

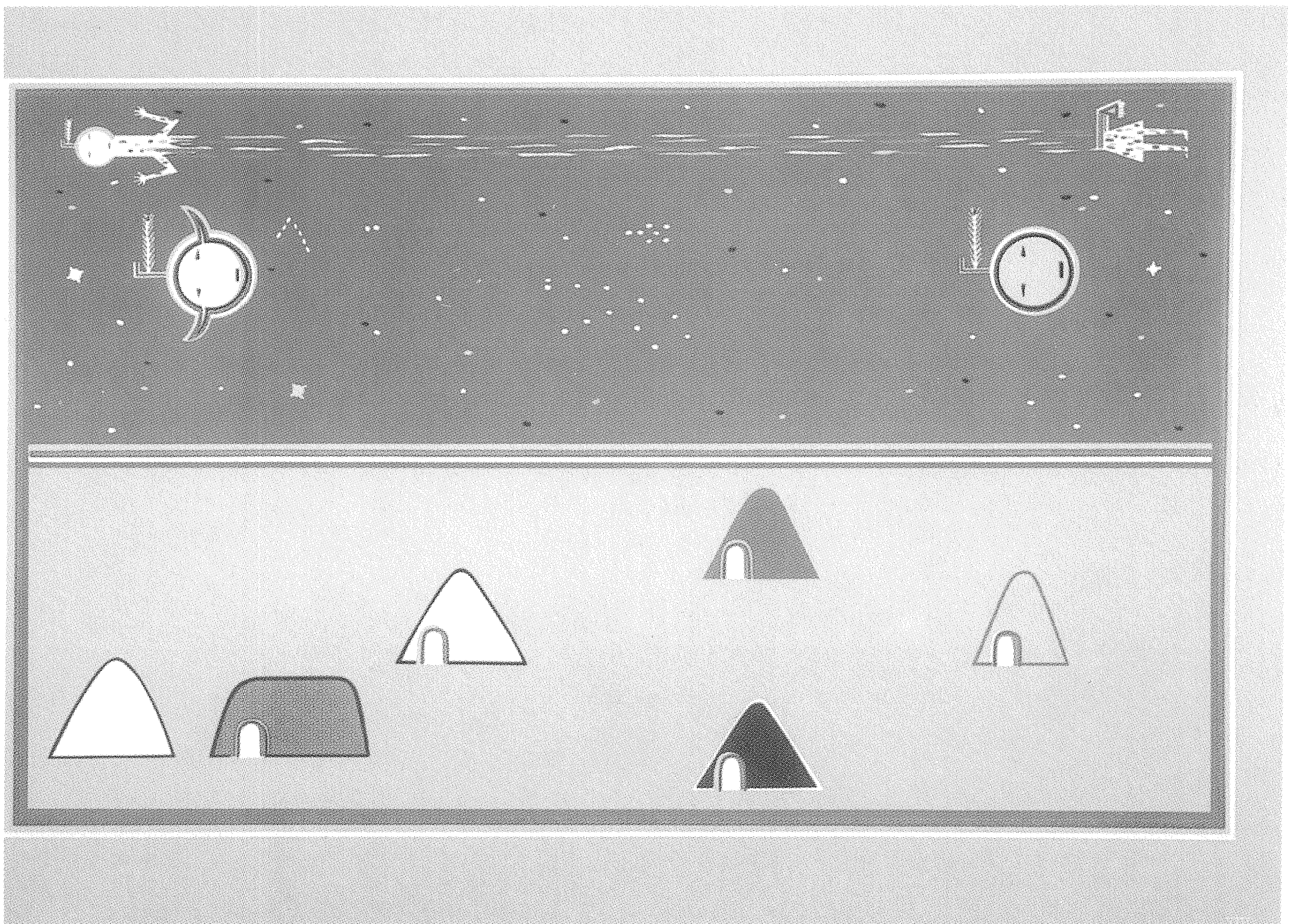
ODPISANO

1999

Letnik 46

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1999

letnik 46, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Miran Černe (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.000 SIT, za študente 1.500 SIT, za tujino 25 EUR. Posamezna številka za člane 600 SIT, stare številke 400 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1999 DMFA Slovenije – 1390 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

- EksPLICITNA parametrizacija geodetk na rotacijskih ploskvah. Sklenjene geodetke na rotacijskem elipsoidu — Explicit parametrization of geodesics on rotational surfaces. Closed geodesics on rotational ellipsoid (Jaka Smrekar) 97–112
- Ali sodi obdelava podatkov k pouku matematike? — Does data handling goes with teaching of mathematics? (Zlatan Magajna in Amalija Žakelj) 113–119
- Matematično-fizikalne metode v elektrokardiografiji — Mathematical physics in electrocardiography (Rok Hren, Vojko Jazbinšek in Zvonko Trontelj) 120–127

Vesti — News

- Obvestilo (Tomaž Pisanski) 119
- Odstop republiške predmetne komisije za matematiko (člani RPK za matematiko) 127–IV

Na ovitku: *Zemlja in nebo*, slika s pelodom indijanca iz plemena Navaho.

EKSPPLICITNA PARAMETRIZACIJA GEODETK NA ROTACIJSKIH PLOSKVAH SKLENJENE GEODETKE NA ROTACIJSKEM ELIPSOIDU

JAKA SMREKAR

Math. Subj. Class. (1991): 53A04

V članku so obdelane geodetke na rotacijskih ploskvah. Poudarek je na iskanju eksplicitne enačbe geodetke skozi poljubno točko v poljubni smeri. Izkaže se, da je slednje vprašanje tesno povezano z „nadaljevanjem geodetk“. Pokazano je, da se dajo pri določenih pogojih geodetke sestavljati in za take primere je podan potreben in zadosten pogoj, da je geodetka skozi dano točko v dani smeri del sklenjene geodetke na ploskvi. Na koncu eksplicitno poiščemo vse geodetke na rotacijskem elipsoidu in klasificiramo tipe sklenjenih geodetk.

EXPLICIT PARAMETRIZATION OF GEODESICS ON ROTATIONAL SURFACES CLOSED GEODESICS ON ROTATIONAL ELLIPSOID

In this article, geodesics on rotational surfaces are considered. Searching for explicit formula of geodesic through an arbitrary point in an arbitrary direction, is emphasized. It is shown that the latter question is related with the so called “geodesic continuation” problem, and that under certain criteria geodesics can be glued. For such cases the necessary and sufficient conditions are given when a geodesic through a given point and a given direction is a part of a closed geodesic on the surface. We also explicitly find all geodesics on a rotational ellipsoid and classify the types of closed geodesics.

1. Uvod

Parametrizacije geodetk na rotacijskih ploskvah so že dolgo znane. Tu pa nas zanima vprašanje, kdaj je geodetka skozi dano točko v dani smeri del sklenjene geodetke na ploskvi. Izkaže se, da lahko dani geodetki (pri razumnih predpostavkah) vedno razširimo definicijsko območje do takega zaprtega intervala, da je njegova slika geodetka, ki se „na obeh straneh“ zakrivi in „prilepi“ na neki vzporednik. Dalje se izkaže, da nam že omenjene predpostavke zagotavljajo, da lahko (tu uporabimo simetrijo rotacijskih ploskev) take razširjene kose sestavljamo. Na vprašanje, ali je dana geodetka del sklenjene geodetke, potem odgovorimo z dokaj preprostim analitičnim kriterijem.

V drugem razdelku in v začetku tretjega najprej formalno opredelimo rotacijske ploskve in geodetke na ploskvah ter navedemo nekaj elementarnih izrekov iz te teorije. V nadaljevanju tretjega razdelka rešimo t.i. geodetski sistem diferencialnih enačb in poiščemo eksplicitno enačbo geodetke skozi dano točko v dani smeri, ki ni smer vzporednika.

Nato se ukvarjamo z razširitvijo definicijskega območja in s sestavljanjem, kar je ključni korak do odgovora na vprašanje sklenjenih geodetk. Potem navedemo potreben in zadosten pogoj, da je dana geodetka del sklenjene geodetke.

V četrtem, zadnjem, razdelku uporabimo razvito teorijo na primeru rotacijskega elipsoida. Obravnavamo in rešimo analitičen pogoj sklenjenih geodetk in klasificiramo tipe sklenjenih geodetk.

Geodetke na rotacijskem elipsoidu, ki ga dobimo, če enotsko sfero v $\mathbb{R}^3$ raztegnemo za $b > 0$ v smeri osi z , oscilirajo med dvema vzporednikoma $z = \pm \text{konst.}$, od katerih se periodično „odbijajo“. Glavni rezultat članka je izrek 7 (izhaja iz izreka 6), ki pove, da je za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ število različnih tipov sklenjenih geodetk na rotacijskem elipsoidu, ki se n -krat odbijejo od obeh vzporednikov, enako moči množice $\{k \in \mathbb{N} \mid n < k < n \cdot b, d(k, n) = 1\}$, če je $b > 1$, oziroma množice $\{k \in \mathbb{N} \mid n \cdot b < k < n, d(k, n) = 1\}$, če je $b < 1$.

Zahvala. Zahvaljujem se recenzentu Pavletu Saksidi za vse pripombe, predvsem pa za to, da je z menoj delil svoj globoki fizikalni vpogled v diferencialno geometrijo. Vsi nazorni fizikalni komentarji, zaradi katerih ima članek večji smisel in je lepše berljiv, so plod diskusij z njim.

2. Rotacijske ploskve

Zanimajo nas ploskve, ki jih dobimo z rotacijo gladke krivulje „v ravnini y, z “ okoli osi z . Vzemimo torej parametrizacijo gladke krivulje K

$$\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \rho(v) = (0, f(v), g(v)),$$

kjer je J interval ter sta f in g funkciji razreda C^2 . Množica, ki jo dobimo z rotacijo krivulje K , je enaka

$$S = \{(f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \mid u \in [0, 2\pi], v \in J\}.$$

Za f in g morajo veljati določene omejitve, da bo dobljena množica v resnici gladka ploskev. Prvi pogoj je regularnost parametrizacije ρ , t.j. pogoj

$$f'(v)^2 + g'(v)^2 \neq 0, \quad \forall v.$$

Dalje mora biti krivulja K simetrična glede na os z , če jo seka; povezana je, ker je J interval. Zato se zožimo na $f(v) \geq 0$ in to zožitev prezrcalimo čez os z . Odtod pride zadnja omejitev: v poljubni točki v_0 , kjer velja $f(v_0) = 0$, mora veljati $f'(v_0) \neq 0$, $g'(v_0) = 0$, kar geometrično pomeni, da se krivulja K „zapiči“ v os z kvečjemu pod pravim kotom in je zato krivulja, dobljena z zrcaljenjem v točki $(0, 0, g(v_0))$, gladka. Takih točk ne obravnavamo preveč podrobno, ker nekako niso „zanimive“. Zgornje povzamemo v

Trditev 1. Naj bo J interval in naj bosta $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dve funkciji razreda C^2 . Privzemimo, da je f nenegativna in da veljajo druge omejitve iz zgornjega odstavka. Označimo z J' prasliko intervala $(0, \infty)$ glede na f . Tedaj je

$$r : \mathbb{R} \times J' \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

imerzija razreda C^2 , katere zožitev r_ξ na podprostor $(\xi - \pi, \xi + \pi) \times J'$ je pri poljubnem fiksnem ξ topološka vložitev, ki zato predstavlja regularno parametrizacijo neke odprte podmnožice v S . Pri tem že r_0 ter r_π pokrivata vso množico S brez točk, ki ležijo na osi z .

Če v točki v_0 velja $f(v_0) = 0$, označimo s φ inverz k f , ki je definiran na nekem intervalu $[0, \varepsilon)$ in obstaja po privzetku o f . Posebej velja $\varphi(0) = v_0$. Tedaj je

$$R : K(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad R(x, y) := \left(x, y, g\left(\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right) \right)$$

regularna parametrizacija okolice točke $(0, 0, g(v_0))$ v S . Seveda gledamo $K(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$.

S je torej gladka ploskev.

Koeficienti prve fundamentalne forme parametrizacije r , $E = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle$, $G = \left\langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle$, so

$$E(u, v) = f^2(v), \quad F(u, v) \equiv 0, \quad G(u, v) = f'(v)^2 + g'(v)^2.$$

Normala na delu ploskve, parametriziranem z r , $\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}$, pa je podana z

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}} (g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v)).$$

3. Geodetke na rotacijskih ploskvah

3.1. Splošna teorija Naj bo v tem podrazdelku odprta podmnožica ploskve S regularno parametrizirana s C^2 -preslikavo $r : V \rightarrow S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, kjer je V odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$, in naj bo $\Gamma : I \rightarrow S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 -parametrizacija (kosa) krivulje $C \subset S$. To pomeni, da imamo podani orientaciji na $\text{im } r \subset S$ in na $\text{im } \Gamma$.

Definicija 2. Če sta u, v C^2 -funkciji iz nekega intervala I v $\mathbb{R}$, tako da velja $(u(s), v(s)) \in V$, $\forall s \in I$, in je $\Gamma(s) = r(u(s), v(s))$ naravna parametrizacija krivulje C , definiramo geodetsko ukrivljenost krivulje C v točki $\Gamma(s)$ kot

$$\kappa_g(s) = \langle \Gamma'(s) \times \Gamma''(s), \mathbf{n}(u(s), v(s)) \rangle = \langle \Gamma''(s), \mathbf{n}(u(s), v(s)) \times \Gamma'(s) \rangle.$$

Geometrično je to ukrivljenost projekcije krivulje C na tangentno ravnino na ploskev S v točki $\Gamma(s)$ in je odvisna od izbranih orientacij. Če ima krivulja v neki točki geodetsko ukrivljenost 0, je to neodvisno od parametrizacije. Zato je smiselna naslednja definicija:

Krivulja C je **geodetka**, kadar je njena geodetska ukrivljenost 0 v vsaki točki.

Nazorno gledano so geodetke tiste krivulje, ki imajo lokalno minimalno dolžino. S stališča mehanike pa imajo geodetke naslednji opis. Če postavimo na ploskev S delec, ki ima gibalno količino, in če nanj ne deluje nobena druga sila razen tiste, ki ga drži na ploskvi (torej deluje v smeri normale), potem se ta delec giblje po geodetki.

Znan je naslednji

Izrek 3. Krivulja C na S , naravno parametrizirana s preslikavo $\Gamma = r \circ (u, v)$, kjer sta u, v C^2 -funkciji, je geodetka natanko tedaj, ko funkciji u in v zadoščata naslednjemu sistemu diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \text{(GS)} \quad u'' + (\Gamma_{uu}^1 \circ (u, v)) \cdot u'^2 + 2(\Gamma_{uv}^1 \circ (u, v)) \cdot u'v' + (\Gamma_{vv}^1 \circ (u, v)) \cdot v'^2 &= 0, \\ v'' + (\Gamma_{uu}^2 \circ (u, v)) \cdot u'^2 + 2(\Gamma_{uv}^2 \circ (u, v)) \cdot u'v' + (\Gamma_{vv}^2 \circ (u, v)) \cdot v'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Christoffelovi simboli $\Gamma_{ij}^k : V \rightarrow \mathbb{R}$ so definirani s t.i. Gaußovimi enačbami $\frac{\partial^2 r}{\partial i \partial j} = \Gamma_{ij}^1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u} + \Gamma_{ij}^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial v} + II_{ij} \cdot \mathbf{n}$, kjer $i, j \in \{u, v\}$ in pomeni II_{ij} i, j -ti element druge fundamentalne forme, tj., $II_{uu} = L$, $II_{uv} = M$, $II_{vv} = N$.

Iz definicije takoj sledi

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial i \partial j}, G \cdot \frac{\partial r}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle, \\ \Gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial i \partial j}, -F \cdot \frac{\partial r}{\partial u} + E \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

Bralec si lahko to podrobneje pogleda v [2], 10. poglavje, ali v [1].

Za praktično računanje je pomembna tale

Trditev 4. Če sta $u, v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ rešitev geodetskega sistema (GS) in za neko točko s_0 velja

$$\begin{aligned} E(u(s_0), v(s_0))u'(s_0)^2 + 2F(u(s_0), v(s_0))u'(s_0)v'(s_0) \\ + G(u(s_0), v(s_0))v'(s_0)^2 = 1, \end{aligned}$$

je s naravni parameter krivulje $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $s \mapsto r(u(s), v(s))$.

Posredno bomo potrebovali tudi

Izrek 5. Če je parametrizacija r (po dogovoru) razreda C^2 , obstaja skozi vsako točko v poljubni smeri na $\text{im } r \subset S$ natanko ena geodetka. Smer v točki $r(u_0, v_0)$ je podana z vektorjem $\lambda \frac{\partial r}{\partial 1}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial r}{\partial 2}(u_0, v_0)$.

Dokaz tega izreka je v bistvu obstoj in enoličnost rešitve sistema diferencialnih enačb, ki zaradi privzetkov o r zadoščajo pravim pogojem.

Dogovor. Ker bomo v razdelku 3 obravnavali različne parametrizacije iskanih krivulj (geodetk), bomo povsod v tem razdelku ločili med krivuljo in njeno parametrizacijo.

3.2. Rotacijske ploskve Zanimajo nas geodetke na naši rotacijski ploskvi, podani s parametrizacijo $r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$. Po krajšem računu dobimo, da se geodetski sistem za naravno parametrizirano geodetko $\gamma : t \mapsto r(u(t), v(t))$ glasi

$$u'' + 2 \frac{f'(v)}{f(v)} u' v' = 0, \quad (1)$$

$$v'' - \frac{f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2} u'^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2} v'^2 = 0. \quad (2)$$

V splošnem moramo k enačbama torej pripisati še pogoj naravne parametriziranosti. Vemo, da za $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$ velja $\|\gamma'(t)\|^2 = E(u, v)u'^2 + F(u, v)u'v' + G(u, v)v'^2$, kar pomeni, da zahtevamo še

$$f^2(v)u'^2 + (f'(v)^2 + g'(v)^2)v'^2 \equiv 1. \quad (3)$$

Pri iskanju eksplícitne parametrizacije geodetk bomo bistveno ločili dva primera. Za primer $v'(t_0) \neq 0$, kar pomeni geodetko, ki seka vzporednik v točki $r(u(t_0), v(t_0))$ transverzalno (to je pod neničelnim kotom), ne bo nobenih težav.

Za primer $v'(t_0) = 0$, kar pomeni geodetko, ki gre skozi točko $r(u(t_0), v(t_0))$ v smeri vzporednika, pa ne bomo znali takoj poiskati eksplícitne parametrizacije.

Izpeljimo najprej enačbi 1 ekvivalentno enačbo. Če enačbo 1 pomnožimo z $f^2(v)$, dobimo $[f^2(v)u']' = 0$ oziroma

$$f^2(v)u' = c, \quad (1*)$$

kjer je c konstanta. Tej enačbi pravimo tudi *prvi integral geodetskega sistema (GS)*.

Izkaže se, da je v okolici vsake točke t_0 , v kateri zahtevamo $v'(t_0) \neq 0$, v zgornjem sistemu treh enačb enačba 2 odveč. Iz enačbe 1* sledi $u' = \frac{c}{f^2(v)}$, in če to vstavimo v enačbo 3, dobljeno enačbo odvajamo na t in novo enačbo

delimo z $2v'$ (kar po privzetku smemo), dobimo enačbo, ki je ekvivalentna enačbi 2.

Poglejmo na prvi integral geodetskega sistema s stališča mehanike. Postavimo torej točkasti delec z neko gibalno količino na našo rotacijsko ploskev. Nanj naj deluje samo sila, ki ga drži na ploskvi, torej sila, ki je v vsaki točki kolinearna z normalnim vektorjem. Delec se giblje po trajektoriji $\gamma(t) = (f(v(t)) \cos u(t), f(v(t)) \sin u(t), g(v(t)))$. Poglejmo, kaj se dogaja z njegovo vrtilno količino. V vsaki točki deluje na delec navor, kolinearen z vektorjem $\gamma(t) \times \mathbf{n}(u(t), v(t)) = \frac{f(v)f'(v)+g(v)g'(v)}{\sqrt{f'(v)^2+g'(v)^2}}(-\sin u, \cos u, 0)|_t$.

To pomeni, da v dani točki navor prispeva samo k vrtilni količini pri vrtenju v ravnini, ki gre skozi os z in točko $\gamma(t)$ (tj. vrtenju v smeri poldnevnik), vrtilna količina pri vrtenju okrog osi z , tj. tretja komponenta vektorja vrtilne količine, pa se ohranja. Naj ima delec maso 1. Tedaj je vrtilna količina delca v točki $\gamma(t)$ enaka, po krajšem računu, $\vec{\Gamma}(t) = \gamma(t) \times \gamma'(t) = (-g^2(v) \frac{d}{dt}(\frac{f(v)}{g(v)} \sin u), g^2(v) \frac{d}{dt}(\frac{f(v)}{g(v)} \cos u), f^2(v)u')|_t$. Iz zgornjega sledi $\Gamma_z(t) = f^2(v)u'|_t = c$. Prvi integral geodetskega sistema torej pravi natanko to, da se komponenta vrtilne količine za vrtenje okrog osi z ohranja. Prej smo pokazali, da je treba zahtevati samo še to, da ima delec velikost hitrosti konstantno enako 1, in že sledi, da je trajektorija v resnici geodetka.

Vrnimo se k splošni obravnavi.

Takoj se prepričamo, da so vse krivulje $u = \text{konst.}$, tj. poldnevniki, geodetke in da je krivulja $v = \text{konst.} = v_0$, tj. vzporednik, geodetka natanko tedaj, ko velja $f'(v_0) = 0$, tj. ko je ta vzporednik (lokalno) minimalen ali maksimalen.

Za splošni primer najprej privzemimo, da geodetka ni poldnevnik, tj. $c \neq 0$. Gledamo okolico točke t_0 . Radi bi napravili substitucijo $t = v^{-1}(s)$, za to pa potrebujemo $v'(t_0) \neq 0$. Torej si moramo najprej pogledati „kako grdo lahko velja“ $v'(t_0) = 0$. Iz enačb (3) ter (1*) sledi, če zamenjamo v (3) u' s $\frac{c}{f^2(v)}$, enačba

$$v'(t) = \frac{1}{f(t)} \sqrt{\frac{f^2(v(t)) - c^2}{f'(v(t))^2 + g'(v(t))^2}}. \quad (3*)$$

(Brez škode vzamemo le pozitivni koren.) Od tod vidimo, da velja

$$v'(t) = 0 \iff f(t) = |c|.$$

Če torej velja $f'(v(t_0)) \neq 0$, je f v neki okolici točke $v(t_0)$ injektivna, kar pomeni, da je v tem primeru t_0 izolirana ničla funkcije v' . Zato lahko brez izgube splošnosti privzamemo $f'(v(t_0)) = 0$, tj. točka $\gamma(t_0)$ je na ekstremnem vzporedniku. Toda ker je $v'(t_0) = 0$, je $\gamma'(t_0) = u'(t_0) \frac{\partial r}{\partial u}(u(t_0), v(t_0))$, kar pomeni, da gre geodetka skozi $\gamma(t_0)$ v smeri vzporednika. Ker pa je ta vzporednik ekstremen in obstaja v eni smeri natanko ena geodetka, leži naša geodetka na vzporedniku in velja $v'(t) = 0$ za vsak t .

Pokazali smo, da so tedaj, ko v ni konstantna (če je, smo na ekstremnem vzporedniku), ničle funkcije v' izolirane. Za zdaj se bomo pri $v'(t_0) = 0$ zadovoljili z eksistenčnim izrekom, kasneje pa se bomo problema lotili „z druge strani”: v točki, kjer velja $v'(t_0) = 0$ (in ni na ekstremnem vzporedniku) bomo poskusili „stakniti” dve „eksplicitni geodetki”. Pri tem je treba najprej odgovoriti na vprašanje, ali je mogoče eksplicitno parametrizacijo geodetke zvezno razširiti do take točke $r(u(t), v(t))$, kjer je $v'(t) = 0$, potem pa na vprašanje, ali sklop parametrizacij dveh takih geodetk v okolici stika predstavlja krivuljo razreda C^2 .

Privzemimo torej $v'(t_0) \neq 0$. Tedaj je na neki okolici v difeomorfizem in mu lahko poiščemo inverz, recimo λ . Zdaj lahko napravimo že zgoraj omenjeno substitucijo

$$t = \lambda(s) : U(s) := u(\lambda(s)), \quad V(s) := v(\lambda(s)) = s, \\ \lambda'(s) = \frac{1}{v'(\lambda(s))}, \quad U'(s) = \frac{u'(\lambda(s))}{v'(\lambda(s))}.$$

Ker je $v'(t_0) \neq 0$, imamo le sistem (1*), (3), ki ga zamenjamo s sistemom (1*), (3*). Površno izpeljemo to substitucijo kot $v = v$, $u = u(v)$ in $\dot{u} = \frac{u'}{v'}$ oziroma $\dot{u}(v) = \frac{c}{f(v)} \sqrt{\frac{f'(v)^2 + g'(v)^2}{f^2(v) - c^2}}$ in dobimo eksplicitno parametrizacijo geodetke (ki v splošnem seveda ni naravna)

$$\gamma_{c,d}(v) = r(u_{c,d}(v), v) = (f(v) \cos u_{c,d}(v), f(v) \sin u_{c,d}(v), g(v)),$$

kjer je

$$u_{c,d}(v) = \int_{v_0}^v \frac{c}{f(\tau)} \sqrt{\frac{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2}{f^2(\tau) - c^2}} d\tau + d.$$

Ob zgornji definiciji funkcije $\gamma_{c,d}$ lahko načeloma pozabimo na eksistenčne izreke in neposredno preverimo, da je $\gamma_{c,d}$ res parametrizacija geodetke.

Po kratkem računu se prepričamo, da za tangentni vektor na $\gamma_{c,0}$ pri v_0 velja $\gamma'_{c,0}(v_0) = (f'(v_0), \sqrt{f'(v_0)^2 + g'(v_0)^2} \frac{\frac{c}{f(v_0)}}{\sqrt{1 - (\frac{c}{f(v_0)})^2}}, g'(v_0))$. Od tod je jasno, da lahko izberemo

$$c \in (-f(v_0), f(v_0)),$$

kar ustreza vsem smerem bodisi zgornje odprte „hemisfere” bodisi spodnje odprte „hemisfere”. To pomeni, da s spreminjanjem parametra c pokrijemo geodetke v vseh smereh razen tiste v smeri vzporednika.

3.3. Razširitev definicijskega območja in sestavljanje Kot smo že napovedali, je vprašanje geodetk v smeri vzporednikov tesno povezano z

vprašanjem definicijskega območja funkcije $\gamma_{c,d}$. Če definiramo

$$v_- := \begin{cases} \sup\{\tau < v_0 \mid f(\tau) = |c|\} & \text{če obstaja} \\ -\infty & \text{sicer} \end{cases}$$

$$v_+ := \begin{cases} \inf\{\tau > v_0 \mid f(\tau) = |c|\} & \text{če obstaja} \\ +\infty & \text{sicer} \end{cases}$$

potem je $\gamma_{c,d}$ zagotovo definirana na $I := (v_-, v_+) \cap \mathcal{D}_\rho$, kjer je $\mathcal{D}_\rho$ definicijsko območje funkcije ρ (iz razdelka 1). Vprašanje pa je, ali se jo da razširiti (kot zvezno odvedljivo funkcijo) na $[v_-, v_+] \cap \mathcal{D}_\rho$, če je seveda vsaj eno od krajišč intervala v $\mathcal{D}_\rho$. Privzemimo, da je v_+ v $\mathcal{D}_\rho$. Prepišimo $u_{c,d}$ takole

$$u_{c,d}(v) = \int_{v_0}^v \frac{c}{f(\tau)} \sqrt{\frac{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2}{f(\tau) + |c|}} \frac{(v_+ - \tau)^s}{\sqrt{f(\tau) - |c|} (v_+ - \tau)^s} d\tau + d.$$

Odtod opazimo, da se da $\gamma_{c,d}$ zvezno razširiti do krajišča v_+ natanko tedaj, ko obstaja $s < 1$, tako da obstaja limita

$$\lim_{(\tau \rightarrow v_+)_-} \frac{(v_+ - \tau)^s}{\sqrt{f(\tau) - |c|}}. \quad (*)$$

Privzemimo, da je pogoj izpolnjen. Definirajmo funkcijo

$$L : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(v) := \int_{v_0}^v \|\gamma'_{c,d}(\tau)\| d\tau = \int_{v_0}^v f(\tau) \sqrt{\frac{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2}{f^2(\tau) - c^2}} d\tau.$$

$L(v)$ je seveda dolžina geodetke $\gamma_{c,d}$ od točke v_0 do v .

Opomba. Jasno je, da so tudi v_+, v_-, L odvisni od c , toda ker so v resnici odvisni le od $|c|$ in bomo v nadaljevanju potrebovali le c ter $-c$, tega ne bomo posebej označili. Fiksirajmo torej $|c|$.

Iz definicije L takoj sledi, da je L na I razreda C^2 in da povsod na I velja $L' > 0$. Torej je L na I C^2 -difeomorfizem. Iz pogoja (*) pa sledi, da obstaja limita $\lim_{(v \rightarrow v_+)_-} L(v)$. L je torej na $I_+ := I \cup \{v_+\}$ homeomorfizem. Označimo s K inverz k L , $K(0) = v_0$, $K(\vartheta_+) = v_+$. Funkcija K je na $[0, \vartheta_+)$

razreda C^2 . Velja tudi $K'(\vartheta) = \frac{1}{f(K(\vartheta))} \sqrt{\frac{f^2(K(\vartheta)) - c^2}{f'(K(\vartheta))^2 + g'(K(\vartheta))^2}}$, $\forall \vartheta \in [0, \vartheta_+)$.

Zdaj se moramo vrniti k naravni parametrizaciji geodetke, predstavljene z $\gamma_{c,d}$:

$$\Gamma_{c,d}(\vartheta) := \gamma_{c,d}(K(\vartheta)) = r(U_{c,d}(\vartheta), K(\vartheta)),$$

kjer je $U_{c,d}(\vartheta) := u_{c,d}(K(\vartheta))$. Seveda sta funkciji $U_{c,d}$ ter K v resnici u in v iz prvega dela obravnave, zato veljajo enačbe (1), (2), (3) (ter (1*), (3*)), ki jih bomo s pridom uporabljali.

Iz (1*) sledi $U'_{c,d}(\vartheta) = \frac{c}{f^2(K(\vartheta))}$ in zato obstaja limita

$$\lim_{(\vartheta \rightarrow \vartheta_+)_-} U'_{c,d}(\vartheta) = \frac{1}{c}.$$

Ker je $\Gamma'_{c,d} = U'_{c,d} \cdot \frac{\partial r}{\partial 1}(U_{c,d}, K) + K' \cdot \frac{\partial r}{\partial 2}(U_{c,d}, K)$, imamo

$$\lim_{(\vartheta \rightarrow \vartheta_+)_-} \Gamma'_{c,d}(\vartheta) = \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial 1}(u(v_+), v_+) = \text{sign}(c) \cdot (-\sin u(v_+), \cos u(v_+), 0),$$

to pa je ravno v smeri vzporednika. Tako pridemo na idejo, kako bi prišli do eksplcitne formule za geodetko v smeri vzporednika. Sestavili bi $\gamma_{c,0}$ ter $\gamma_{-c,d}$ (*opomba*: slika funkcije $\gamma_{-c,0}$ je slika funkcije $\gamma_{c,0}$, prezrcaljena prek ravnine, ki vsebuje os z in točko $\gamma_{c,0}(v_0)$; slika funkcije $\gamma_{-c,d}$ pa je slika funkcije $\gamma_{-c,0}$, zavrnena za kot d okrog osi z), kjer bi bilo število d izbrano tako, da bi veljalo $\gamma_{c,0}(v_+) = \gamma_{-c,d}(v_+)$. Da pa bi dobili regularno parametrizacijo, smo napravili substitucijo, tako da delamo s funkcijama $\Gamma_{c,0}$ ter $\Gamma_{-c,d}$. Ko bomo določili primeren d , se bo definicija glasila

$$\Gamma : [0, 2\vartheta_+] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(\vartheta) := \begin{cases} \Gamma_{c,0}(\vartheta) & \vartheta \in [0, \vartheta_+] \\ \Gamma_{-c,d}(2\vartheta_+ - \vartheta) & \vartheta \in [\vartheta_+, 2\vartheta_+] \end{cases}$$

Treba je le še ugotoviti, kaj se dogaja z drugim odvodom. Vemo, da velja

$$\begin{aligned} \Gamma''_{c,d} = & U''_{c,d} \frac{\partial r}{\partial 1}(U_{c,d}, K) + K'' \frac{\partial r}{\partial 2}(U_{c,d}, K) + U'_{c,d}{}^2 \frac{\partial^2 r}{\partial 1^2}(U_{c,d}, K) + \\ & + 2U'_{c,d}K' \frac{\partial^2 r}{\partial 1 \partial 2}(U_{c,d}, K) + K'^2 \frac{\partial^2 r}{\partial 2^2}(U_{c,d}, K). \end{aligned}$$

Iz enačbe (1) sledi obstoj limite $\lim_{(\vartheta \rightarrow \vartheta_+)_-} U''_{c,d}(\vartheta) = 0$, iz enačbe (2) pa sledi obstoj limite $\lim_{(\vartheta \rightarrow \vartheta_+)_-} K''(\vartheta) = \frac{1}{|c|} \cdot \frac{f'(v_+)}{f'(v_+)^2 + g'(v_+)^2}$. Odtod sledi

$$\lim_{(\vartheta \rightarrow \vartheta_+)_-} \Gamma''_{c,d}(\vartheta) = \frac{1}{|c|} \frac{f'(v_+)}{f'(v_+)^2 + g'(v_+)^2} \frac{\partial r}{\partial 2}(u(v_+), v_+) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r}{\partial 1^2}(u(v_+), v_+).$$

Zdaj že (skoraj) lahko dokažemo, da je sestavljena funkcija Γ razreda C^2 , kar pomeni, da je (naravna) parametrizacija geodetke (geodetska ukriavljenost v točki $\Gamma(\vartheta_+)$ je limita ničelne funkcije).

Ker je $[\frac{d}{d\vartheta} \Gamma_{-c,d}(2\vartheta_+ - \vartheta)]|_{\vartheta_+} = [-\Gamma'_{-c,d}(2\vartheta_+ - \vartheta)]|_{\vartheta_+} = -\Gamma'_{-c,d}(\vartheta_+)$ in je $[\frac{d^2}{d\vartheta^2} \Gamma_{-c,d}(2\vartheta_+ - \vartheta)]|_{\vartheta_+} = [-(-\Gamma''_{-c,d}(2\vartheta_+ - \vartheta))]|_{\vartheta_+} = \Gamma''_{-c,d}(\vartheta_+)$, velja to, kar smo želeli, ker smo zgoraj pokazali, da je $\Gamma'_{c,d}(\vartheta_+)$ odvisna od predznaka c , $\Gamma''_{c,d}(\vartheta_+)$ pa ne.

Preostane nam le še izbira števila d , da bo veljalo $\gamma_{c,0}(v_+) = \gamma_{-c,d}(v_+)$. Iz definicije sledi, da to velja natanko tedaj, ko velja

$$u_{c,0}(v_+) = u_{-c,d}(v_+) - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

oziroma

$$d = 2 \int_{v_0}^{v_+} \frac{c}{f(\tau)} \sqrt{\frac{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2}{f^2(\tau) - c^2}} d\tau + 2k\pi = 2u_{c,0}(v_+) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tako smo dobili tudi eksplicitno parametrizacijo geodetke v smeri vzporednika. To je

$$\gamma : [v_0, 2v_+ - v_0] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(v) := \begin{cases} \gamma_{c,0}(v) & v \in [v_0, v_+] \\ \gamma_{-c,d}(2v_+ - v) & v \in [v_+, 2v_+ - v_0] \end{cases}$$

Je vložitev in je razreda C^2 povsod razen pri v_+ , kjer je zvezna. Skozi točko $\gamma_{c,0}(v_+)$ gre v smeri vzporednika. Torej je to eksplicitna parametrizacija tiste edine geodetke na ploskvi, ki gre skozi točko $\gamma_{c,0}(v_+)$ v smeri vzporednika. ■

3.4. Nadaljnja sestavljanja. Sklenjene geodetke Seveda lahko to geodetko nadaljujemo še naprej, če se da $\gamma_{c,d}$ zvezno razširiti do krajišča v_- , tj. če se da $u_{c,0}$ razširiti do krajišča v_- . Geodetko moramo zopet zrcaliti (tj. $-c$ zamenjamo s c) in jo zavrteti za neki nov kot e okrog osi z , kar pomeni $u_{-c,d}(v_-) = u_{c,d+e}(v_-) - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, od koder sledi $e = -2u_{c,0}(v_-) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Če označimo $A := u_{c,0}(v_+)$, $B := u_{c,0}(v_-)$, potem je sklop funkcij $\gamma_{c,0}, \gamma_{-c,2A}, \gamma_{c,2A-2B}, \gamma_{-c,4A-2B}, \dots$ parametrizacija geodetke.

Vprašanje, ali je ta geodetka del sklenjene geodetke, je naravno. Jasno je, da se geodetka sklene natanko tedaj, ko se „začetek” prvega „elementarnega dela” (ki ga predstavlja $\gamma_{c,0}$) sklene s „koncem” nekega nadaljnjega „elementarnega dela” (ki mora biti seveda prezrcaljen). To pa se zgodi natanko tedaj, ko obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $\gamma_{c,0}(v_-) = \gamma_{-c,2nA-2(n-1)B}(v_-)$, oziroma natanko tedaj, ko obstajata $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, da velja $u_{c,0}(v_-) = -u_{c,0}(v_-) + 2nA - 2(n-1)B - 2k\pi$. Slednji pogoj se da

prepisati v obliko $A - B = \int_{v_-}^{v_+} \frac{c}{f(\tau)} \sqrt{\frac{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2}{f^2(\tau) - c^2}} d\tau = \frac{k\pi}{n}$. Velja torej

Izrek 6. Če definiramo funkcijo

$$\alpha : (-f(v_0), f(v_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(c) = \int_{v_-(c)}^{v_+(c)} \frac{c}{f(\tau)} \sqrt{\frac{f'(\tau)^2 + g'(\tau)^2}{f^2(\tau) - c^2}} d\tau,$$

potem so smeri sklenjenih geodetk podane z množico

$$\alpha^{-1}\left(\left\{\frac{k\pi}{n} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\right\}\right). \quad \blacksquare$$

Opomba. Še enkrat je treba pripomniti, da sta meji v_+ in v_- v zgornjem integralu odvisni od c .

3.5. Opazke Kot enostavno, vendar pomembno posledico zgornje obravnave lahko povemo to, da je v primeru $-\infty < v_- < v_+ < \infty$ poljubno nadaljevanje geodetke, podane z $\gamma_{c,0}$, omejeno na pas $\{(x, y, z) \mid g(v_-) \leq z \leq g(v_+)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Druga pomembna opazka je ta, da geodetka na rotacijski ploskvi, ki se „prilepi“ na neki (nujno neekstremen) vzporednik, vedno ostane na „isti strani“ tega vzporednika, tj. v istem zaprtem polprostoru, ki ga določa ravnina $z = g(v_p)$ (v tem primeru se geodetka prilepi na vzporednik $\{(f(v_p) \cos u, f(v_p) \sin u, g(v_p)) \mid u\}$).

Nazorna utemeljitev s stališča mehanike je naslednja. Kinetična energija našega delca, ki se giblje po geodetki, je konstantna in je sorazmerna vsoti $h^2 + v^2$, kjer je h horizontalna hitrost (v ravnini x, y), v pa vertikalna hitrost (v smeri osi z). Ko se delec prilepi na vzporednik, je njegova vertikalna hitrost enaka 0, horizontalna hitrost pa je maksimalna. To pomeni, da je oddaljenost ρ od osi z minimalna, ker je vrtilna količina okrog osi z konstantna. Če bi se oddaljenost delca od osi z zmanjšala, bi se morala horizontalna hitrost povečati.

To se da utemeljiti tudi kot posledico tako imenovane **Clairautjeve** enačbe $\rho(\tau) \cos \vartheta(\tau) = |c|$, kjer je $\Gamma(\tau) = r(U(\tau), K(\tau))$ naravna parametrizacija geodetke na rotacijski ploskvi, $\rho(\tau)$ je oddaljenost točke $\Gamma(\tau)$ od osi z (tj. $\rho(\tau) = f(\tau)$), $\vartheta(\tau)$ pa je kot med tangentnim vektorjem na Γ pri τ in vzporednikom, ki gre skozi $\Gamma(\tau)$.

Dokaz. V točki $\Gamma(\tau)$ kaže vektor $\frac{\partial r}{\partial 1}(U(\tau), K(\tau))$ v smeri vzporednika. To pomeni

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \left| \left\langle \dot{\Gamma}, \frac{\frac{\partial r}{\partial 1}(U, K)}{\sqrt{E(U, K)}} \right\rangle \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{E(U, K)}} \left| \left\langle \dot{U} \cdot \frac{\partial r}{\partial 1}(U, K) + \dot{K} \cdot \frac{\partial r}{\partial 2}(U, K), \frac{\partial r}{\partial 1}(U, K) \right\rangle \right| = \\ &= \sqrt{E(U, K)} \cdot |\dot{U}| = f \cdot \frac{|c|}{f^2} = \frac{|c|}{f} \end{aligned}$$

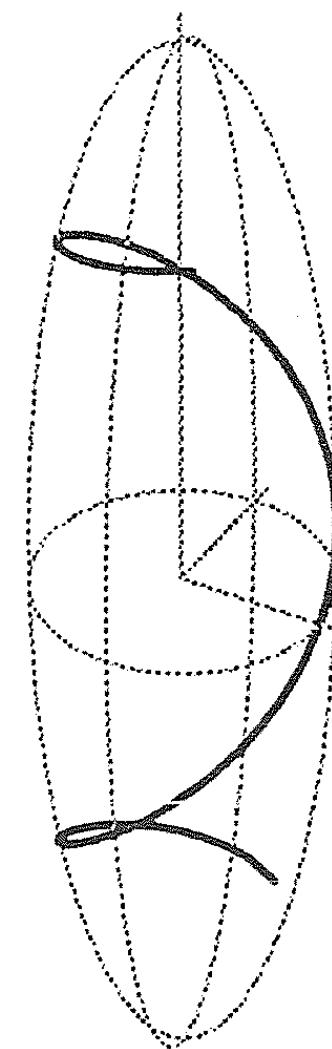
oziroma $f \cdot \cos \vartheta = |c|$. To je še ena oblika enačbe ohranitve vrtilne količine okrog osi z ; ker je velikost hitrosti 1, je $\cos \vartheta(\tau)$ ravno komponenta hitrosti delca v smeri vzporednika, $\rho(\tau)$ pa je ročica glede na os z . ■

Če se geodetka prilepi na vzporednik v točki $\Gamma(\tau_p)$, potem velja $\vartheta(\tau_p) = 0$ oziroma $f(\tau_p) \cos \vartheta(\tau_p) = f(\tau_p) = |c|$. Ker je $f'(\tau_p) \neq 0$ (vzporednik ni ekstremen), v okolici τ_p funkcija f bodisi narašča bodisi pada. Ker pa ima funkcija $\cos$ pri $\vartheta(\tau_p) = 0$ (lokalni) maksimum, je lahko geodetka samo na tisti strani vzporednika, kjer velja $f \geq |c|$.

4. Rotacijski elipsoid

Poiščimo geodetke na rotacijskem elipsoidu, podanem z $f, g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(v) = \cos v$, $g(v) = b \sin v$, $b > 0$. Brez škode privzamemo $b \neq 1$, saj nas sfera ne zanima. Velja torej

$$\begin{aligned} r : (u, v) &\mapsto (\cos v \cos u, \cos v \sin u, b \sin v), \\ \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) &= (-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0), \\ \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) &= (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, b \cos v), \\ E(u, v) &= \cos^2 v, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \sin^2 v + b^2 \cos^2 v, \\ \sqrt{EG - F^2}(u, v) &= \cos v \sqrt{b^2 \cos^2 v + \sin^2 v}, \\ \mathbf{n}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 v + \sin^2 v}} \cdot \\ &\quad \cdot (b \cos v \cos u, b \cos v \sin u, \sin v). \end{aligned}$$



Vzemimo $|v_0| < \frac{\pi}{2}$. Tedaj velja $f(v_0) \neq 0$. Dalje lahko zaradi simetrije izberemo poljuben $u_0 = d$. Iz prejšnjega razdelka vemo, da so parametrizacije geodetk skozi točko $r(u_0, v_0)$ v vseh smereh razen v smeri vzporednika zajete v družini, podani z

Slika 1. $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 4$.

$$u_{c,d}(v) = \int_{v_0}^v \frac{c}{\cos \tau} \sqrt{\frac{\sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau + d = \int_{v_0}^v c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau + d.$$

Seveda moramo zahtevati $\cos v_0 > |c|$, kar je ekvivalentno pogoju $v_0 < \arccos|c|$. Jasno je, da je definicijsko območje $u_{c,d}$ (vsaj) $(-\arccos|c|, \arccos|c|)$, torej vedno vsebuje 0. Zato velja $u_{c,d}(v) = \int_0^v c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau$, za $d = \int_0^{v_0} c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau$. To pomeni, da lahko brez izgube splošnosti opazujemo le geodetke skozi točko $(1, 0, 0)$, kar pomeni $v_0 = 0$, $u_0 = d = 0$, $c \in (-1, 1)$.

Zgoraj preberemo, da velja $\gamma'_{c,0}(0) = b \cdot (0, \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}, 1)$.

Opomba. Na sliki 1 je $\gamma'_{\frac{1}{\sqrt{2}},0}(0) = b \cdot (0, 1, 1)$.

Zdaj lahko ugotavljamo ali se da $u_{c,0}$ razširiti. Imamo $f(\tau) = \cos \tau$ in zato $v_- = -\arccos|c|$, $v_+ = \arccos|c|$. Velja

$$\frac{(v_+ - \tau)^s}{\sqrt{f(\tau) - |c|}} = \frac{(\arccos|c| - \tau)^s}{\sqrt{\cos \tau - \cos \arccos|c|}} = \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\arccos|c| + \tau}{2}}} \frac{\left(\frac{\arccos|c| - \tau}{2}\right)^s}{\sqrt{\sin \frac{\arccos|c| - \tau}{2}}}.$$

Vzemimo $s := \frac{1}{2}$. Ker obstaja limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin h}$ in ker „limita in zvezna funkcija komutirata“, obstaja limita našega izraza, ko $(\tau \rightarrow v_+)_-$. To pomeni, da poznamo tudi geodetke v smeri vzporednika in posebej, da lahko geodetko $\gamma_{c,0} : [v_-, v_+] \rightarrow S$ poljubno nadaljujemo. Podobno kot prej v splošni obravnavi dobimo, da je sklop geodetk $\gamma_{c,0}, \gamma_{-c,2A}, \gamma_{c,4A}, \gamma_{-c,6A}, \gamma_{c,8A}, \dots$ kjer je

$$A = \int_0^{\arccos|c|} c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau,$$

geodetka. To pomeni, da dobimo sklenjeno geodetko natanko tedaj, ko obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\gamma_{c,0}(v_-) = \gamma_{-c,(4n-2)A}(v_-)$. Iz prejšnje obravnave sledi, da je slednji pogoj zadosten (opomniti velja, da iz izbora g sledi, da tangentni vektorji na $\gamma_{c,d}$ pri 0 vedno kažejo „navzgor“; to pomeni, da $\gamma_{c,d}(v_+)$ vedno leži v zgornji hemisferi). Da je pogoj potreben, sledi iz enoličnosti geodetke pri dani točki v dani smeri.

Imamo torej zahtevo $u_{c,0}(v_-) = u_{-c,(4n-2)A}(v_-) - 2k\pi$, $\exists n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, kar pomeni

$$\begin{aligned} (4n-2)A &= 2 \int_0^{v_-} c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau + 2k\pi = \\ &= -2 \int_0^{v_+} c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau + 2k\pi = -2A + 2k\pi \end{aligned}$$

oziroma $A = \frac{k\pi}{2n}$, $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Če je $A = \frac{k\pi}{2n}$, kjer je $\frac{k}{n}$ okrajšan ulomek, ima naša sklenjena geodetka natanko $2n$ „elementarnih“ delov. Zanima nas torej zaloga vrednosti funkcije (brez izgube splošnosti lahko privzamemo $c \geq 0$)

$$A : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(c) = \lim_{(v \rightarrow \arccos c)_-} \int_0^v c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau.$$

Povejmo še nekaj besed o geometrični interpretaciji te preslikave. Če ima delec na rotacijskem elipsoidu, ki se giblje po geodetki (s hitrostjo konstantne velikosti 1), vrtilno količino okrog osi z konstantno enako c , potem je $2 \cdot A(c)$ kot, ki ga opiše projekcija delca na ravnino x, y , ko potuje delec od enega tangentnega vzporednika do drugega.

S standardno substitucijo $\xi = \operatorname{tg} v$, $v = \arctg \xi$, $dv = \frac{1}{1+\xi^2} d\xi$, $\cos^2 \tau = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \tau}$, dobimo

$$\int_0^v c \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \tau + b^2}{\cos^2 \tau - c^2}} d\tau = \int_0^{\operatorname{tg} v} c \sqrt{\frac{b^2 + \xi^2}{(1 + \xi^2)(1 - c^2(1 + \xi^2))}} d\xi.$$

Po substituciji (in privzetku $c \neq 0$) $z = 1 - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\xi$, $\xi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}(1-z)$, dobimo, da je $1 - c^2(1 + \xi^2) = 1 - c^2 - c^2 \frac{1-c^2}{c^2}(1-z)^2 = 1 - c^2 - (1-c^2) - (1-c^2)(-2z - z^2) = (1-c^2)z(2-z)$ in je zadnji integral enak $\int_{1-\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}}^1 \frac{dz}{\sqrt{z(2-z)}}$ oziroma

$$c \neq 0 \Rightarrow A(c) = \int_0^1 \sqrt{\frac{b^2 c^2 + (1-c^2)(1-z)^2}{c^2 + (1-c^2)(1-z)^2}} \frac{dz}{\sqrt{z(2-z)}}.$$

Ker je $b^2 c^2 \leq b^2 c^2 + (1-c^2)(1-z)^2 \leq b^2 + 1 - c^2$ in je $1 \geq c^2 + (1-c^2) \cdot (1-z)^2 \geq c^2$, velja

$$bc \leq \sqrt{\frac{b^2 c^2 + (1-c^2)(1-z)^2}{c^2 + (1-c^2)(1-z)^2}} \leq \sqrt{b^2 + \frac{1-c^2}{c^2}}.$$

Odtod sledi, da integral konvergira enakomerno po kompaktnih v $(0, 1)$, zato je funkcija A zvezna na $(0, 1)$. To pomeni, da je množica $A((0, 1))$ bodisi interval bodisi točka. Če pokažemo, da je množica večja od točke, vemo že veliko o številu sklenjenih geodetk, ne vemo pa točno, kakšne so. Zato podrobneje raziščimo, kakšna je množica $A((0, 1))$.

Bodisi iz elementarne teorije Riemannovega integrala bodisi iz izreka o dominirani konvergenci in iz zveznosti A na $(0, 1)$ sledi

$$\exists \lim_{c \rightarrow 1} A(c) = b \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(2-z)}} = -b \arcsin(1-z) \Big|_0^1 = b \frac{\pi}{2}.$$

Vemo sicer, da velja $A(0) = 0$, ampak ničesar ne vemo o zveznosti A pri 0. Ker limita $\lim_{(c,z) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{b^2 c^2 + (1-c^2)(1-z)^2}{c^2 + (1-c^2)(1-z)^2}}$ ne obstaja, se moramo zares zateči bodisi k Lebesgueovemu integralu bodisi k posplošenemu Riemannovemu integralu in privzeti, da integriramo po intervalu $(0, 1)$. Zdaj pa lahko opazujemo funkcijo

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(c) = \sqrt{\frac{b^2 c^2 + (1-c^2)p}{c^2 + (1-c^2)p}}, \quad p := (1-z)^2 \in (0, 1).$$

Ker je $(1-c^2)p = p - pc^2 > p - c^2$ in je $b^2 c^2 + p(1-c^2) > 0$, je φ dobro definirana pozitivna gladka funkcija na kompaktnem intervalu. Velja $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = b$. Poiščimo maksimum. Če je maksimum različen od $\max\{1, b\}$, potem obstaja tak $c \in (0, 1)$, da je $\varphi'(c) = 0$. Ampak izkaže se, da velja $\varphi'(c) = cp \frac{b^2 - 1}{\sqrt{b^2 c^2 + p(1-c^2)} \sqrt{(c^2 + p(1-c^2))^3}}$, in ker $b \neq 1$ (sfero smo že na

začetku izvzeli), sta oba ekstrema zavzeta kar na robu intervala $[0, 1]$. Iz teorije Lebesgueovega integrala in zveznosti zdaj sledi, da je funkcija A omejena, natančneje, velja $A((0, 1)) = (\min\{\frac{\pi}{2}, b\frac{\pi}{2}\}, \max\{\frac{\pi}{2}, b\frac{\pi}{2}\})$, $A(0) = 0$, $\lim_{c \rightarrow 1} A(c) = b\frac{\pi}{2}$. Iz izreka o dominirani konvergenci in zveznosti A na $(0, 1)$ sledi $\exists \lim_{c \rightarrow 0} A(c) = \frac{\pi}{2}$, torej A pri 0 ni zvezna. Dalje velja, da je funkcija A na $(0, 1)$ strogo monotona.

Za nezveznost A pri 0 imamo nazorno pojasnilo: pri zelo majhnem pozitivnem c pride geodetka zelo blizu obeh polov, a se vseeno prilepi na neki vzporednik in se od njega odbije. Če pa je $c = 0$, je geodetka poldnevnik in gre skozi pola elipsoida, torej je kvalitativno drugačna od drugih.

V zalogi vrednosti funkcije A je cel interval, kar pomeni, da je sklenjenih geodetk „vse polno”: obstaja števno smeri, v katerih dobimo sklenjeno geodetko. Natančneje, v odvisnosti od parametra b lahko povemo, koliko različnih (do rotacije okrog osi z) tipov sklenjenih geodetk z $2n$ elementarnimi deli (to pomeni, da se natanko $2n$ -krat prilepijo na neki vzporednik) obstaja na rotacijskem elipsoidu: če je $b > 1$, potem funkcija A pokrije interval $\frac{\pi}{2} \cdot (1, b)$. Zanima pa nas presek z množico $\{\frac{k\pi}{2n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, d(k, n) = 1\} = \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Q}$. Dokazali smo torej

Izrek 7. Število različnih tipov sklenjenih geodetk na rotacijskem elipsoidu, ki se $2n$ -krat prilepijo na neki vzporednik (oziroma se n -krat odbijejo „navzgor” in n -krat „navzdol”), je natanko število vseh naravnih števil k , za katera velja

$$n < k < n \cdot b, \quad d(k, n) = 1,$$

če je $b > 1$, oziroma število vseh naravnih števil k , za katera velja

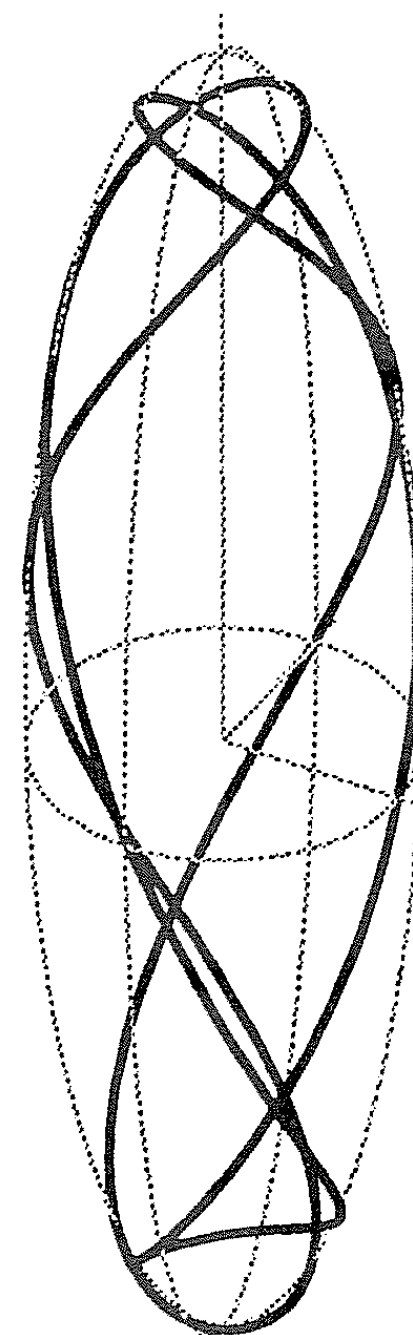
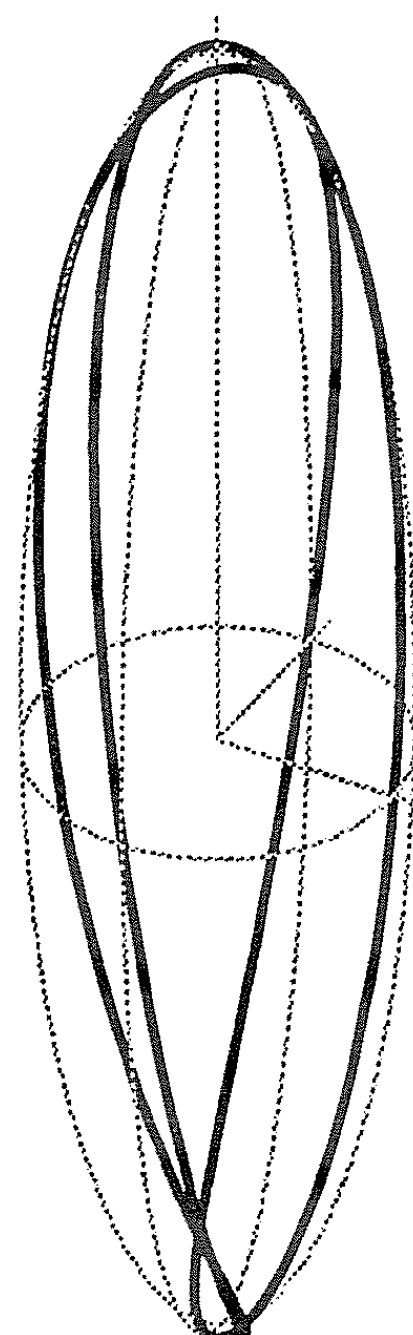
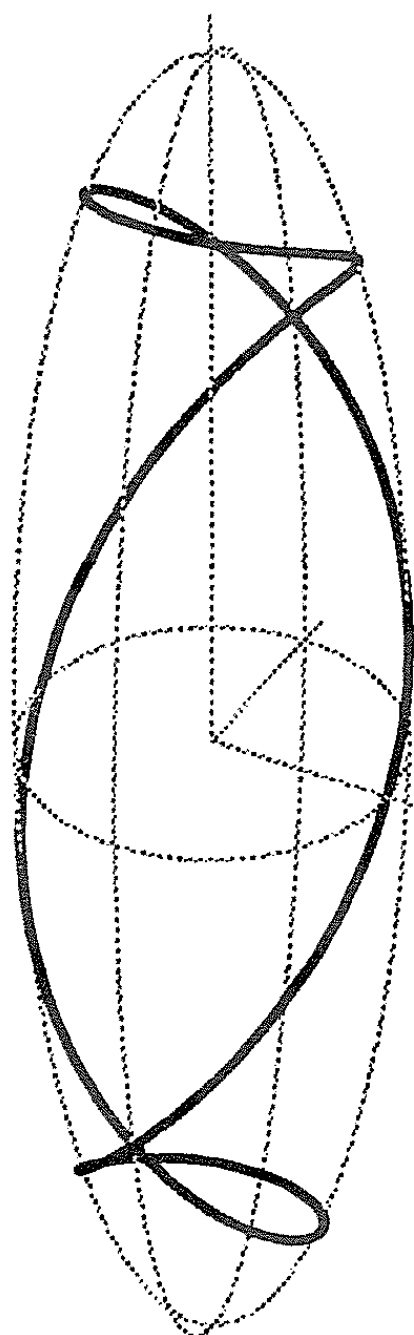
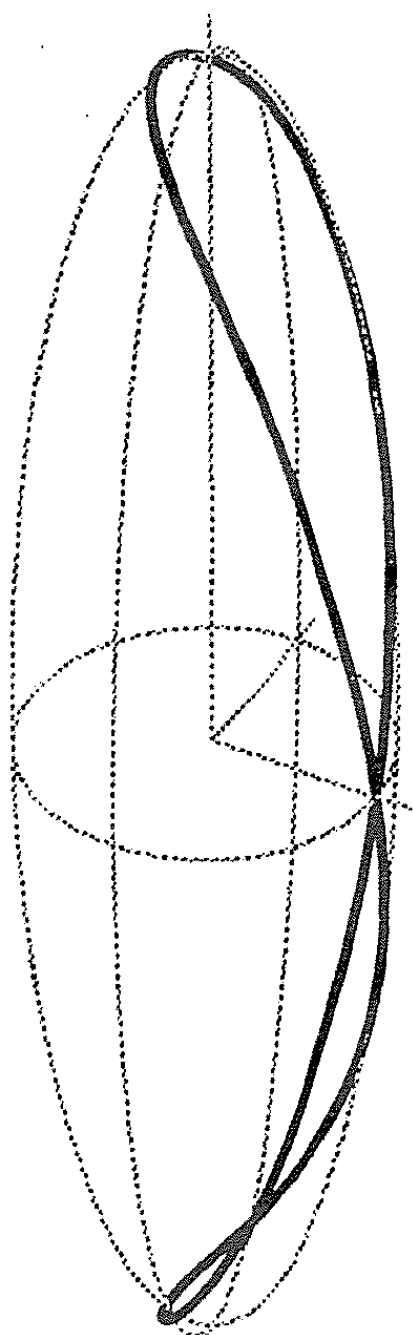
$$n \cdot b < k < n, \quad d(k, n) = 1,$$

če je $b < 1$. ■

Na primer: pri $b = 4$ imamo 2 tipa za $n = 1$, 3 tipe za $n = 2$, 6 tipov za $n = 3$, itd. Pri $b \in (1, 2)$ nimamo geodetk z dvema elementarnima deloma (tj. $n = 1$).

Pri $b < 1$ nikdar nimamo geodetk z dvema elementarnima deloma in kvečjemu eno s štirimi elementarnimi deli ($n = 2$), pri $b < \frac{1}{2}$.

Sliki 2, 3 prikazujeta oba tipa sklenjenih geodetk z dvema elementarnima deloma za $b = 4$, slike 4, 5 in 6 vse tipe sklenjenih geodetk s štirimi elementarnimi deli za $b = 4$, slika 8 prikazuje edini tip sklenjene geodetke s štirimi elementarnimi deli za $b = \frac{1}{3}$, slika 9 pa prikazuje edini tip sklenjene geodetke s šestimi elementarnimi deli za $b = \frac{1}{3}$. Na sliki 7 je na obeh straneh podaljšana geodetka iz slike 1. Ta geodetka ni del sklenjene geodetke.

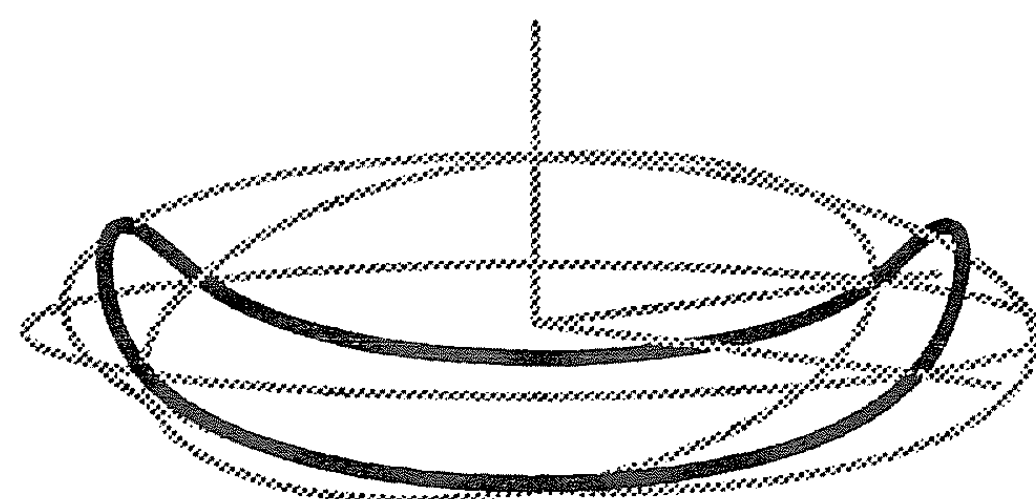
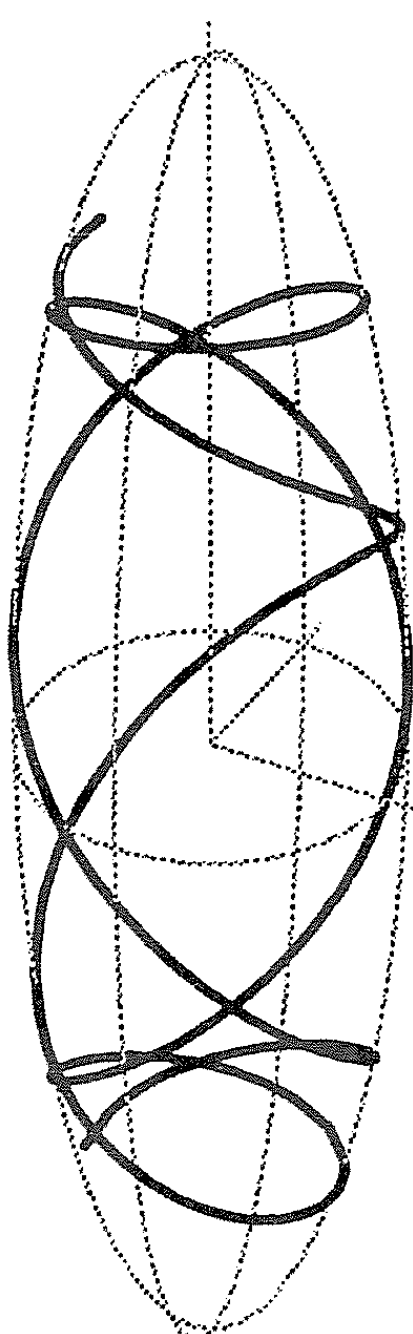
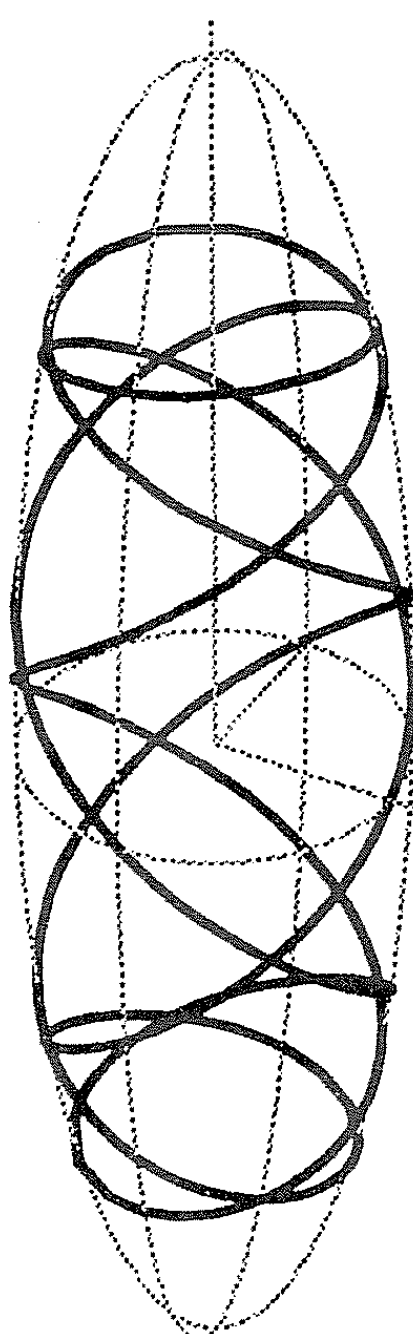


Slika 2.
 $A(c) = \frac{2\pi}{2}, b = 4$

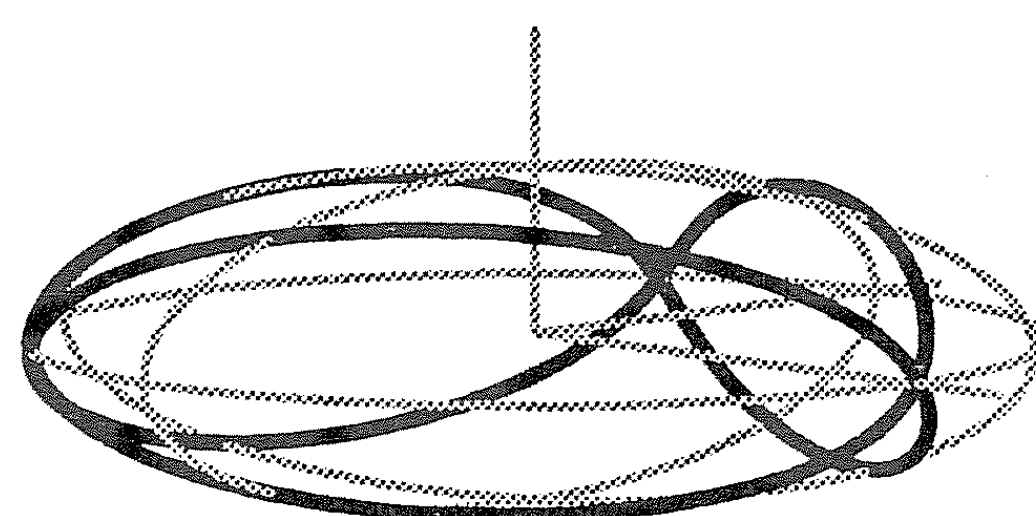
Slika 3.
 $A(c) = \frac{3\pi}{2}, b = 4$

Slika 4.
 $A(c) = \frac{3\pi}{4}, b = 4$

Slika 5.
 $A(c) = \frac{5\pi}{4}, b = 4$



Slika 8.
 $A(c) = \frac{\pi}{4}, b = \frac{1}{3}$



Slika 6.
 $A(c) = \frac{7\pi}{4}, b = 4$

Slika 7.
 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = 4$

Slika 9.
 $A(c) = \frac{2\pi}{6}, b = \frac{1}{3}$

LITERATURA

- [1] M. P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*; dritte, durchgesehene Auflage, **vieweg studium** Aufbaukurs Mathematik, 1993.
- [2] M. M. Lipschutz, *Schaum's outline of theory and problems of differential geometry*, McGraw-Hill Book Company, 1969.

ALI SODI OBDELAVA PODATKOV K POUKU MATEMATIKE?

ZLATAN MAGAJNA IN AMALIJA ŽAKELJ

Math. Subj. Class. (1991): 00A35

Obdelava podatkov je novost v slovenskih učnih načrtih matematike. Sama vsebina je pomembna za povezovanje matematike z drugimi predmeti in s problemskimi znanji, vendar prinaša delo s podatki ob nepravilnem razumevanju pomena in uporabe naučenih orodij nekatere pasti. V sestavku želiva prikazati vzroke uvajanja obdelave podatkov pri pouku matematike, hkrati pa opozoriti na pomisleke, slabosti, nevarnosti in nesporazume, ki jih prinaša uvajanje te vsebine v osnovnošolski pouk matematike.

DOES DATA HANDLING GOES WITH TEACHING OF MATHEMATICS?

Data handling has only recently become part of the mathematics curriculum in the Slovenian elementary schools. The authors consider possible beneficial and problematic implications of such change.

Nekatere prvine znanj o obdelavi podatkov lahko že od nekdaj zasledimo v osnovnošolskih in srednješolskih učbenikih, navadno kot osnove statistike. Če je teorija verjetnosti, kot zahtevna matematična vsebina, pridobila svoje mesto v srednješolski matematiki, pa statistike večinoma ne razumemo kot del osnovnošolske ali srednješolske matematike. Pri pouku matematike smo namreč usmerjeni predvsem v oblikovanje novih pojmov, spoznavanje in razumevanje računskih postopkov ter postopno prehajanje na deduktivni način mišljenja. Statistiko na preduniverzitetni ravni pa lahko obravnavamo le kot nabor praktičnih znanj o zbiranju in obdelavi podatkov, iz katerih izvedemo sklepe, ki presegajo samo vsebino podatkov. Čeprav statistično sklepanje sloni na teoriji verjetnosti, pa je celo na srednješolski ravni težko uvideti to povezavo in znanja o statistiki se tako reducirajo na praktične računske recepte in izdelave prikazov. Nekateri didaktiki in učitelji pa vidijo stvari drugače: znanja o obdelavi podatkov naj bi bila pomembna, celo nujna, za povezovanje matematike z drugimi predmeti, predstavljala naj bi tudi pomemben del problemskih znanj. V nadaljevanju bomo najprej navedli vzroke in prednosti obravnave obdelave podatkov pri pouku matematike. Nato bomo v kontekstu pouka obravnavali odnos med obdelavo podatkov na eni ter verjetnostjo in statistiko na drugi strani. Na koncu pa bomo opozorili na možne pasti, nevarnosti in slabosti, ki jih prinaša obdelava podatkov v pouk matematike.

Razlogi za vpeljavo obdelave podatkov v osnovnošolsko matematiko

Primerljivost z drugimi državami. Skorajda vse države, s katerimi se želimo primerjati na področju pouka matematike, vključujejo v matematično izobraževanje pouk statistike oziroma obdelave podatkov, in to

v vsem obdobju šolanja. Seveda se učni načrti razlikujejo v globini obdelave posameznih vsebin, stopnji vključenosti pojma verjetnosti ter predvideni podpori računalniških programov. Novi slovenski osnovnošolski učni načrt je v tem pogledu dokaj zmeren, še posebej pri obravnavi pojma verjetnosti, saj dosledno ostaja na izkustvenem (empiričnem oz. statističnem) pojmovanju verjetnosti. Primerljivost s tujimi učnimi načrti sama po sebi seveda še ni razlog za uvedbo nove vsebine, zavedati pa se je treba, da bi se ne vključevanje obdelave čutilo pri mednarodnih primerjalnih študijah, pri komuniciranju otrok z vrstniki v tujini, pri prešolanjih ipd.

Temeljna znanja o obdelavi podatkov so del matematične pismenosti. Zaradi dostopnosti in razširjenosti računalniških orodij za obdelavo in prikazovanje podatkov mediji v zadnjem desetletju ali dveh pogosto objavljajo tako ali drugače obdelane in predstavljene podatke. Finančno-ekonomske strani časopisov, reklame, politična argumentiranja ipd. so običajno polni preglednic, grafikonov, primerjav povprečij itd. Matematična pismenost, če jo razumemo dovolj široko, zahteva razumevanje tovrstnih sporočil, celo več, zaželeno je, da znamo kritično pogledati na tako prikazane informacije. Podrobneje bomo o teh težnjah govorili kasneje.

Povezovanje z drugimi predmeti. Za vključevanje znanj o obdelavi podatkov v pouk matematike obstaja velik interes pri številnih drugih šolskih predmetih. Za mnoge izmed njih, še posebej družboslovne, je prav področje obdelave podatkov najpristnejša vez z matematiko. Lahko si cer upamo, da bo matematika spodbudila kritično razmišljanje o določenih metodah pri delu s podatki. Res pa je, da pri nematematičnih predmetih običajno uporabljajo obdelavo podatkov v tako enostavni ali pa v tako specifični obliki, da učenci tega nasploh ne povezujejo z matematiko. Za učitelje matematike pa je povezava znanj o obdelavi podatkov z drugimi predmeti pomembna iz dveh razlogov: po eni strani tako lahko del matematike prikažemo bolj življenjsko, po drugi strani pa take povezave lahko olajšajo razumevanje obravnavanih znanj o obdelavi podatkov.

Problemska znanja. Problemska znanja omogočajo, da znamo naučene pojme in postopke uporabiti v novih situacijah. Eden od temeljnih prijemov pri soočenju z novo situacijo je prav gotovo tudi delo s podatki. Pri obravnavi nove (matematične) situacije, na primer pri reševanju nestandardne, nenavadne naloge, je povsem sprejemljivo, da izhajamo iz bolj ali manj sistematično izvedenih poskusov ter iz rezultatov skušamo ugotoviti zakonitosti ali namig k rešitvi. Pomagamo si torej z obdelavo podatkov, saj rezultate izračunov zberemo, primerno uredimo in jih skušamo prikazati tako, da ugledamo neko zakonitost ali pot k rešitvi. Pri matematičnih nalogah si z znanji o obdelavi podatkov pomagamo tudi drugače. V zastavljeni nalogi je lahko veliko podatkov, ki jih moramo nekako urediti, preden sploh začnemo reševanje, lahko pa je podatkov preveč ali celo premalo in jih moramo zbrati.

Izkušnje s slučajnimi dogodki. Verjetnost je matematična teorija, ki se ukvarja s slučajnimi pojavi. Ko v preduniverzitetni matematiki

razmišljamo o verjetnosti, imamo največkrat v mislih matematično definicijo verjetnosti (torej razmerje med številom ugodnih in številom vseh elementarnih dogodkov v poskusu). Izkušnje iz srednje šole kažejo, da je neposredno uvajanje matematične definicije verjetnosti za dijakinje in dijake zelo zahtevno, saj ne morejo novih pojmov opreti na lastne izkušnje. Slednje bi lahko dobili v osnovni šoli, kjer bi se pri obravnavi verjetnosti omejili le na izkustveno raven. Menimo, da je izoblikovanje empiričnega pojmovanja verjetnosti pomembno za kasnejše razumevanje matematične verjetnosti. V osnovni šoli naj bi učenec s poskusom ugotovil oziroma ocenil verjetnost takega dogodka, pri čemer naj bi se zavedal pomena števila poskusov. Spoznal naj bi, da se pri zelo velikem številu ponovitev poskusa, relativne frekvence dogodka ustalijo blizu neke konstantne vrednosti, imenovane verjetnost dogodka. Učenci in učenke naj bi tudi z izkustvom spoznali, da ne smejo nekritično posploševati ugotovitev, dobljenih na manjšem vzorcu.

Obdelava podatkov kot sklop osnovnošolske matematike

Vsebine, o katerih govorimo, poučujejo v raznih državah z različnimi poudarki in pod različnimi imeni: statistika, verjetnost, statistika in verjetnost, obdelava podatkov. Pomembno je, da navedene pojme med seboj razlikujemo. Verjetnost je matematična disciplina o slučajnih dogodkih. Elementarna teorija verjetnosti sloni na matematični definiciji verjetnosti (kot razmerju med številom ugodnih in vseh elementarnih dogodkov) in je tesno povezana s kombinatoriko. Zahtevnejša teorija verjetnosti sloni na aksiomatski definiciji verjetnosti in preučuje predvsem slučajne spremenljivke in njihove distribucije. Tudi statistika ima dve veji: pri opisni statistiki predvsem zbiramo podatke o dani populaciji in jih tudi tako ali drugače predstavimo oziroma poenostavimo. Pri inferenčni statistiki pa skušamo na osnovi zbranih podatkov vzorca populacije sklepati o lastnostih celotne populacije – pravimo, da testiramo hipoteze. Inferenčna statistika močno temelji na verjetnostnem računu in je tudi zato za razumevanje precej zahtevna.

Pri statistiki delamo s podatki vedno z namenom, da nekaj izvemo o populaciji, ki jo statistično obdelujemo. Pri pouku matematike pa razumemo obdelavo podatkov precej širše. Obdelava podatkov zajema znanja o zbiranju in predstavitvi podatkov, predelavi podatkov, o smiselnih prikazih podatkov, ki omogočajo sklepanje in ugotavljanje zakonitosti. Podatke obdelujemo iz raznovrstnih razlogov in v okviru različnih, tudi matematičnih opravil. Vedenja o obdelavi podatkov so posebej pomemben del problem-skih znanj, saj so neke vrste orodje, ki nam omogoča, da v obilici podatkov ugledamo zakonitosti in pravilnosti.

V okviru osnovnošolskega pouka matematike govorimo izključno o obdelavi podatkov (in ne o statistiki). Učenec naj bi se pri pouku matematike srečal tudi s slučajnimi dogodki oziroma verjetnostjo, vendar le na izkustveni ravni. S tem želimo olajšati učenje verjetnosti v srednji šoli, kjer je pomembna ovira pri razumevanju matematičnega pojmovanja verjetnosti prav pomanjkanje izkušenj s slučajnimi dogodki ter poznavanja dela s podatki.

Znanja o obdelavi podatkov razumemo kot pomembna znanja iz več razlogov: zaradi matematične pismenosti, povezovanja šolske matematike z drugimi vedami (tudi družboslovnimi) ter sposobnosti dela s podatki, ugotavljanja pravilnosti (vzorcev) v podatkih oziroma kot pomemben del problemskih znanj. Učenci naj bi tudi dobili vpogled v celovit postopek obravnave problemov od načrtovanja do zbiranja podatkov, predstavitve in analize podatkov ter predstavitve rezultatov in ugotovitev. Vsebinsko naj bi se obdelava podatkov navezovala predvsem na tri področja: običajne matematične vsebine (npr. razporejanje štirikotnikov glede na en, dva ali več kriterijev), povezovanje z nematematičnimi področji (npr. obravnava višine igralcev dveh košarkarskih moštev) ter pridobivanje izkušenj o slučajnih dogodkih (npr. eksperimentalno ugotavljanje verjetnosti dogodka).

Pomisleki ob vključitvi obdelave podatkov v pouk matematike

Obdelava podatkov vsebinsko ne sodi v matematiko. To je pogost argument predvsem učiteljev matematike, ki čutijo, da je nova vsebina „drugačna” od drugih vsebin. Deloma to drži, še posebej ker se obdelave podatkov (in še bolj statistike) drži sloves izrazito uporabnega znanja. Nemara k pomislekom učiteljev pripomore tudi njihova manjša seznanjenost s samo vsebino obdelave podatkov in predvsem s pomenom teh znanj pri obvladovanju problemskih situacij. Moramo se tudi zavedati, da so kriteriji o tem, kaj sodi v osnovnošolsko (ali srednješolsko) matematiko, svojevoljni.

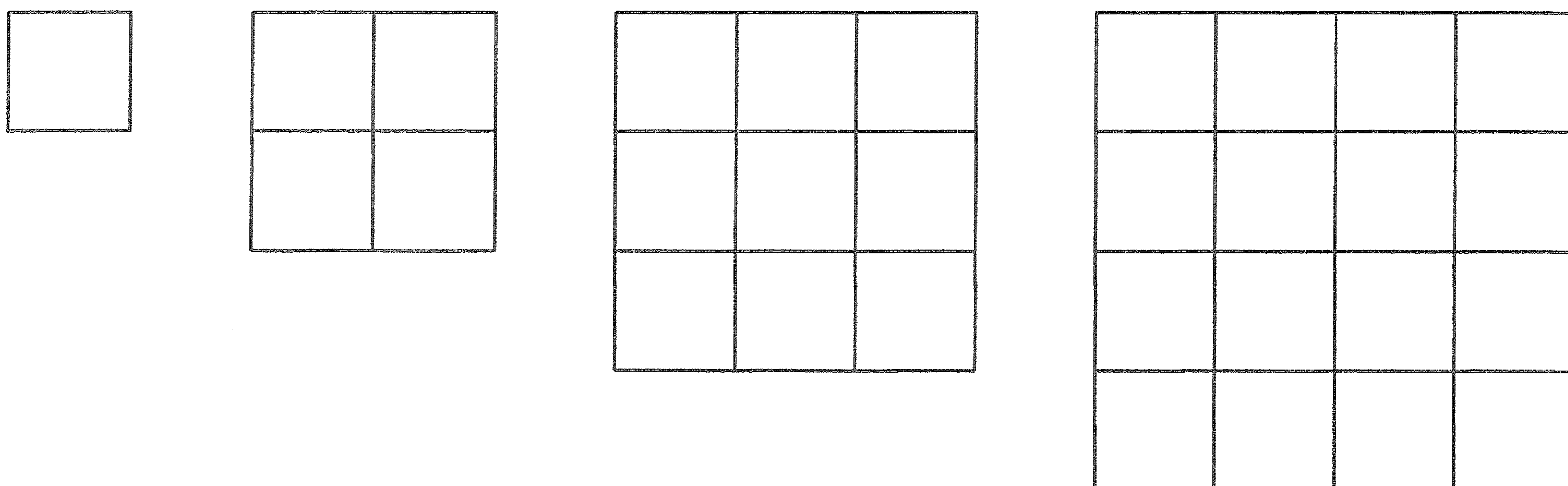
Znanja o obdelavi podatkov so prezahtevna za osnovnošolsko raven. To je razumljiv pomislek vsakogar, ki se je srečal z verjetnostnim računom, inferenčno statistiko ali celo z matematično statistiko. Čeprav so računski postopki npr. pri testiranju hipotez navadno razmeroma preprosti (še posebej če uporabljamo primerne računalniške programe), pa je razumevanje nastopajočih pojmov in postopkov vse prej kot nezahtevno, nemalokrat jim tudi visokošolski študentje niso kos. V resnici pa je težava pri osnovnošolski obdelavi podatkov, kot npr. kaže praksa v anglosaških državah, prej nasprotna: vsebine so „prelahke”. Pri obravnavi se omejimo predvsem na delo s podatki ter na empirične izkušnje. In prav tu je problem oziroma nesporazum. Pri matematiki delamo z matematičnimi idejami, ki presegajo samo izkustvo (npr. iz merjenja ploščine preidemo na pojem ploščine). Pri osnovnošolski obravnavi „statistike” ni tako: podatke enostavno zberemo, jih tako ali drugače predstavimo ter iz vsega tega eventualno kaj razberemo. In tu se zgodba konča. Vse se namreč dogaja na izkustveni ravni in v tem smislu pride do banalizacije matematike. Tudi učencem se nasploh zdijo vsebine, povezane z obdelavo podatkov, dokaj preproste in neproblematične. Da bi se izognili pretirani banalizaciji matematike, želimo znanja o obdelavi podatkov navezati tudi na obravnavo matematičnih vsebin.

Uporaba znanj o obdelavi podatkov je prezahtevna. Dejstvo je, da postopki dela s podatki, ki jih uporabljamo v osnovni šoli, niso pretirano zahtevni. Pri uporabi teh znanj, posebno v vsakodnevnem okolju, pa se

lahko grdo zaplete. Recimo, da bi učenci radi raziskali, koliko se (v danem razredu) doma učijo matematike. Načeloma je naloga preprosta: Učenci povedo, koliko časa se učijo matematiko, zbrane podatke nekako prikažemo, obdelamo in interpretiramo. Prave težave pa so druge: Kaj pomeni učiti se matematiko in kako verodostojno izvedeti za tak podatek? Za nekoga pomeni učiti se matematiko že sedeti ob odprtem zvezku in sanjariti ali celo gledati televizijo. Pa tudi če natanko opredelimo, kaj pomeni „učenje matematike“, je vprašanje, ali bodo odgovori učencev verodostojni. Nekatere ne bodo želeli odgovarjati po pravici, drugi se ne bodo zavedali, kdaj in koliko se učijo, tretji bodo spremenili svoje obnašanje med samoopazovanjem. Vprašanje je, koliko naj se s temi vprašanji pri pouku matematike ubadamo. Prav gotovo nas taka razmišljanja še bolj odvrnejo od matematike, konec koncev pa tudi učitelji matematike niso izšolani za tovrstna razglabljanja. Možni rešitvi sta, da se pouk obdelave podatkov izvaja na „neproblematičnih podatkih“ ali pa da se učence le opozori na zgoraj opisane težave in pomisleke.

Usmerjenost v delo s podatki odvrta pozornost od bistva (kar podatki predstavljajo). Verjetno pa je Ahilovo peto osnovnošolskega pouka obdelave podatkov pokazal Dave Hewit v znanem članku *Train Spotters' Paradise* (naslov se nanaša na angleške opazovalce vlakov, ki v prostem času, kot konjiček, opazujejo vlake in ugotavljajo vzorce/pravilnosti v njihovem voznem redu). Ugotovil je, da učenci skušajo čimprej zbrati podatke v zvezi z matematičnim objektom, nato pa se povsem posvetijo številskim podatkom, na objekt pa kar pozabijo. Iz številsk skušajo ugotoviti vzorec ali pravilnost, ki pa je sploh ne povežejo z lastnostjo obravnavanega objekta. To pa ni cilj pouka matematike, zlasti ne takega, kjer bi znanja o obdelavi podatkov uporabljali pri reševanju problemskih situacij. Ponazorimo to na zgledu:

Ugotoviti je treba, koliko vžigalic potrebujemo za izdelavo kvadratne mreže velikosti n (vžigalic).



Za dijaka, ki že obvlada algebro, je to preprosta naloga, osnovnošolcu, ki se je z algebraičnim razmišljanjem kvečjemu šele srečal, pa pomeni takšna naloga problemsko situacijo. Učenci se z nekaj znanja o obdelavi podatkov lahko naučijo „standardnega“ postopka: zberejo podatke (preštejejo

vžigalice v prvih nekaj vzorcih), podatke tabelirajo ter skušajo iz tabele ugotoviti kakšno pravilnost.

Velikost kvadrata	1	2	3	4	5
Št. vžigalic	4	12	24	40	?

V tabeli nekateri učenci hitro ugledajo pravilnost: števila v drugi vrsti dobimo tako, da števila v prvi vrsti zaporedoma pomnožimo z 4, 6, 8, 10, ... Za kvadrat velikosti 5 vžigalic torej potrebujemo $5 \cdot 12 = 60$ vžigalic, nasploh za kvadrat velikosti n potrebujemo $n \cdot (2n + 2)$ vžigalic. Pri takem razmišljanju skoraj vsi učenci (in učitelji) pozabijo na vžigalice in kvadrate in opazujejo le številke. Ne vidijo, da številke v tabeli niso le številke, ampak števila vžigalic v nekem vzorcu in da izraz $2n(n + 1)$ izraža neko lastnost splošnega kvadratnega vzorca vžigalic. V 24 vžigalicah na tretji mreži lahko vidimo 4 navpične in 4 vodoravne vrste po 3 vžigalice, torej $2 \cdot 4 \cdot 3$ vžigalic, na splošno $2 \cdot (n + 1) \cdot n$ vžigalic. Po Hewittu je iskanje pravilnosti v tabelah podobno neplodnemu iskanju pravilnosti v vozni redih vlakov. Po drugi strani pa je res, da s tehnikami obdelave podatkov nekateri učenci lahko vsaj zmorejo obravnavati nekatere problemske situacije, čeprav rešitev vsebinsko ne povezujejo z obravnavanimi objekti.

Ali so znanja o obdelavi podatkov res del matematične pismenosti? Kako to, da v svetu v zvezi s poukom matematike poudarjajo znanja o obdelavi podatkov šele zadnjih 25 let? Odgovor na to vprašanje lahko iščemo v dveh smereh. Po eni strani danes ta znanja razumemo tudi kot del problemskih znanj, tem pa pri pouku posebej posvečamo pozornost šele v zadnjih desetletjih. Po drugi strani pa lahko ugotovimo, da so podatki in prikazi podatkov bolj in bolj navzoči v vsakdanjem življenju, šolskih učbenikih ipd., verjetno zato, ker sodobna tehnologija omogoča enostavno zbiranje, prikazovanje ter posredovanje podatkov. Vendar pa se ne smemo pustiti zmesti od „vsesplošne navzočnosti“ podatkov v našem življenju ter v življenju otrok. V manjši raziskavi so študentje matematike Pedagoške fakultete v Ljubljani preučili pojavljanje prikazov podatkov (tabel in raznih grafičnih prikazov) v časopisih in revijah, ki so dostopni učencem predmetne stopnje osnovne šole. Izkazalo se je, da praktično vsa periodika (tehnična, zabavna, verska, poljudnoznanstvena) vsebuje zelo malo prikazov podatkov (1 prikaz na 20–80 strani), pa še ti so bili zelo preprosti in lahko razumljivi. Pogostejši so bili prikazi le v poljudnoznanstvenih revijah, ki jih berejo nadarjenejši učenci, ti verjetno znajo prikaze sami interpretirati. Veliko več prikazov pa je bilo v dnevnem časopisju (1 prikaz na 2–6 strani). Deloma so bili to prikazi na poljudno-znanstvenih straneh, velika večina pa jih je bila na finančno-ekonomskih ter na reklamnih straneh. Lahko bi rekli, da so tabele ter razni grafični prikazi podatkov jezik, s katerim nas ogovarjajo predvsem ekonomske in oblastvene strukture. To, da učenci (kot bodoči volivci in kupci) poznajo tehnike obdelave podatkov, omogoča nekaterim družbenim strukturam, da lažje komunicirajo z državljan. Državljan, ki razume tak jezik, je po eni strani manj odporen proti manipulaciji, po drugi strani pa je poznavanje tehnik obdelave podatkov pogoj za kritični odnos do posredovanih informacij.

Sklep

S prispevkom sva želela prikazati večplastnost problematike vpeljave vsebin o obdelavi podatkov v naše osnovne šole. Vsekakor gre za mejno vsebino, ki pa je pomembna tako za samo matematiko kot tudi za uporabo matematike v drugih kontekstih. Navedla sva razloge, zaradi katerih je tudi v naših šolah uvajanje te vsebine tako rekoč nuja – obenem pa sva opozorila na nevarnosti in pasti, ki jih lahko prinese uvajanje teh vsebin in na katere moramo biti posebej pozorni pri njihovem uvajanju v osnovnošolski pouk matematike.

LITERATURA

- [1] P. Andrews, *Train Spotters Have Feelings Too*, Mathematics Teacher **142** (1993), 20–22.
- [2] J. Costello, *Teaching and Learning Mathematics* Routledge, London 1991, pp. 11–16.
- [3] J. Garfield, A. Ahlgren, *Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research*, J. Research Math. Edu. **19** (1998), 44–63.
- [4] D. Hewitt, *Train Spotters' Paradise*, Mathematics Teacher **140** (1992), 6–8.
- [5] G. Howson, B. Wilson, *School Mathematics in the 1990's*, Cambridge University Press 1986.
- [6] K. Y. Li, S. M. Shen, *Students' Weakness in Statistical Projects*, v D. R. Green, A. Dunkels, ur., *Teaching Statistics at Its Best*, Teaching Statistics Trust, Sheffield 1994, pp. 42–48.
- [7] R. Morris (ed.), *Studies in mathematics education. The teaching of Statistics*, Unesco, Paris 1989.
- [8] A. Orton, L. Frobisher, *Insights into Teaching Mathematics*, Cassel, London 1996.
- [9] *PrKK za matematiko*, Učni načrt matematike za osnovno šolo, Ljubljana 1998.
- [10] J. M. Shaughnessy, J. Garfield, B. Greer, *Data Handling*, v A. J. Bishop et al., *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht 1993, pp. 205–237.

OBVESTILO

V prvi številki Obzornika za matematiko in fiziko za leto 1997 sta bila na 29. in 30. strani objavljena pravilnika:

- Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam,
- Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi in za popularizacijo teh znanosti.

Vabimo vas, da pisne predloge za priznanja učiteljem in pohvale šolam pošljete do **8. oktobra 1999** na naslov: *DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 1000 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 2964*.

Predlogi morajo vsebovati dovolj podatkov, da bodo zadoščali komisiji za vsestransko presojo in tehtno odločitev.

Sekretarka komisije za
pedagoško dejavnost:

Danica Jereb

Predsednik DMFA Slovenije:
Tomaž Pisanski

MATEMATIČNO-FIZIKALNE METODE V ELEKTROKARDIOGRAFIJI

ROK HREN, VOJKO JAZBINŠEK IN ZVONKO TRONTELJ

PACS: 2.70-c, 2.70-Pt

V tem članku smo predstavili rešitev direktnega problema v elektrokardiografiji.

MATHEMATICAL PHYSICS IN ELECTROCARDIOGRAPHY

In this paper, we introduced a solution to the direct problem of electrocardiography.

Direktni problem v elektrokardiografiji

Ionski tokovi, ki spremljajo bioelektrično aktivnost srca, povzročajo na površini človeškega telesa (torza) električno potencialno razliko. Kadar jo pomerimo, ji rečemo elektrokardiogram (EKG) [1], ki nam lahko pomaga pri diagnostiki nekaterih nepravilnosti v delovanju srca. Velik del diagnostične elektrokardiografije je omejen na empirične in statistične raziskave. V tem članku bomo predstavili model, ki temelji na kvantitativnem opisu odnosov med izvori v srcu in izmerjenimi vrednostmi.

Če poznamo bioelektrične tokovne izvore v srcu in električne lastnosti delov telesa, ki obdajajo srce, lahko izračunamo električni potencial na površini torza v poljubni točki. To v elektrokardiografiji imenujemo direktni problem [2]. Direktni problem je v primerih geometrij, ki opisujejo človeško telo, vedno enolično rešljiv, kar pomeni, da dana porazdelitev bioelektričnih tokov v srcu povzroči le eno možno porazdelitev površinskih električnih potencialov.

Pri razširjanju akcijskega potenciala po srčni mišični celici se pojavita dva fizikalno različna tokovna prispevka: biološko aktivni, nekonservativni del – to je tok v membrani srčne mišične celice, in ohmski – to je volumski tok v prevodniku s prevodnostjo σ ,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^i + \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}^i - \sigma \nabla \phi. \quad (1)$$

Ker so bioelektrični signali nizkofrekvenčni (pri srcu med 0.1 in 1000 Hz), so razmere kvazistatične [1,3]. Zato smo v enačbi (1) upravičeno zanemarili premikalni tok in zapisali električno polje kot gradient skalarne funkcije. Zaradi ohranitve naboja je celotni tok solenoidalen, tako da velja

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2)$$

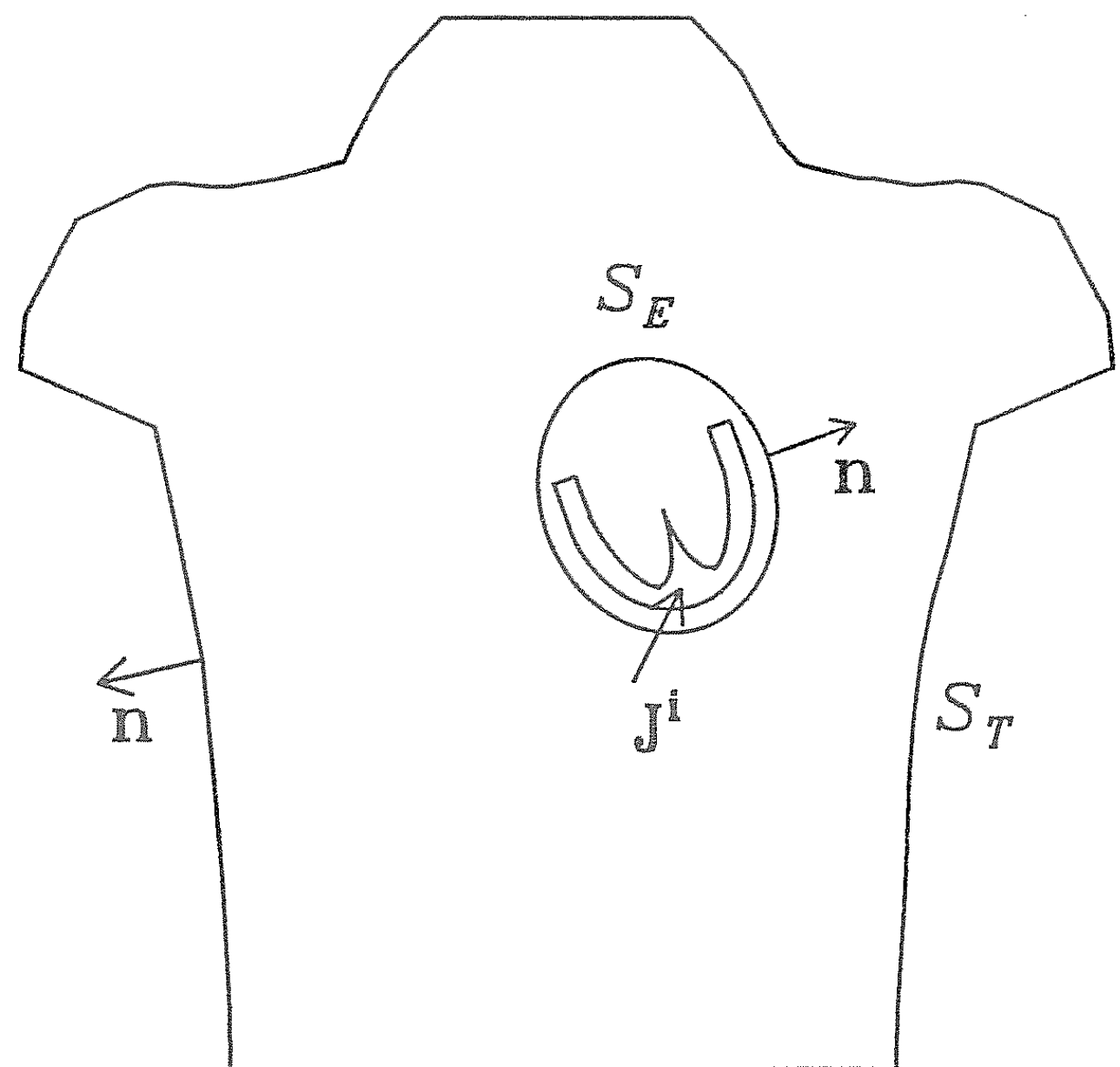
Z uporabo enačb (1) in (2) dobimo Poissonovo enačbo za električni potencial v prostorskem prevodniku [4]

$$\nabla^2 \phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}^i}{\sigma}. \quad (3)$$

Biološko aktivni tok $\mathbf{J}^i$ je omejen le na celično membrano aktivnih srčnih mišičnih celic [5]. Zato lahko enačbo (3) na področju, ki ne vsebuje biološko aktivnih tokov, poenostavimo v Laplaceovo enačbo [4]

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (4)$$

Takšna predstavitev je uporabna, saj lahko človeški torzo razdelimo na primer na področje srca, ki vsebuje tokove $\mathbf{J}^i$, in na področje med epikardom (anatomsko površino srca) in površino torza, ki se obnaša le kot pasivni prevodnik (slika 1). To pomeni, da opišemo izvore v srcu z nadomestnim (ekvivalentnim) izvorom, tj. potencialno porazdelitvijo na epikardu. S tem se pa tudi izognemo direktnemu opisu bioelektrično aktivnih tokov, ki jih je v splošnem zelo težko predstaviti z matematičnim modelom (gl. [6]). Enačbo (4) moramo opredeliti še z robnimi pogoji: (i) z Dirichletovim robnim pogojem $\phi = \phi_E$ na površini epikarda in $\phi = \phi_T$ na površini torza ter (ii) Neumanovim robnim pogojem $\sigma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$ na površini torza.



Slika 1. Shematični prikaz človeškega torza. Ploskvi S_E in S_T , ki omejujeta homogeni prostorski prevodnik s prevodnostjo σ , predstavljata površino epikarda in površino torza. Biološko aktivni tok $\mathbf{J}^i$ je omejen na področje srčne mišice.

Reševanje problema

V tem delu bomo obravnavali rešitev direktnega problema v elektrokardiografiji. Izpeljava izraza za izračun električnega potenciala na površini prostorskega prevodnika poljubne geometrije temelji na drugem Greenovem teoremu [4],

$$\int_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV, \quad (5)$$

kjer je vektor $\mathbf{n}$ normala na zaključeno ploskev S , ki omejuje prostornino V . Funkciji Ψ in Φ sta dvakrat odvedljivi skalarni funkciji prostorske koordinate. Funkcijo Ψ si izberemo kot $1/R$, kjer je $R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ razdalja med točko izvora $\mathbf{r}$ in točko opazovanja $\mathbf{r}'$. Za funkcijo Φ izberemo potencial ϕ , ki je določen z Laplaceovo enačbo (4). S tem dobimo,

$$\int_S \frac{1}{R} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS - \int_S \phi \nabla \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \frac{1}{R} \nabla^2 \phi dV + \int_V \phi \nabla^2 \frac{1}{R} dV. \quad (6)$$

Z upoštevanjem Laplaceove enačbe in enakosti $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ [4] dobimo izraz

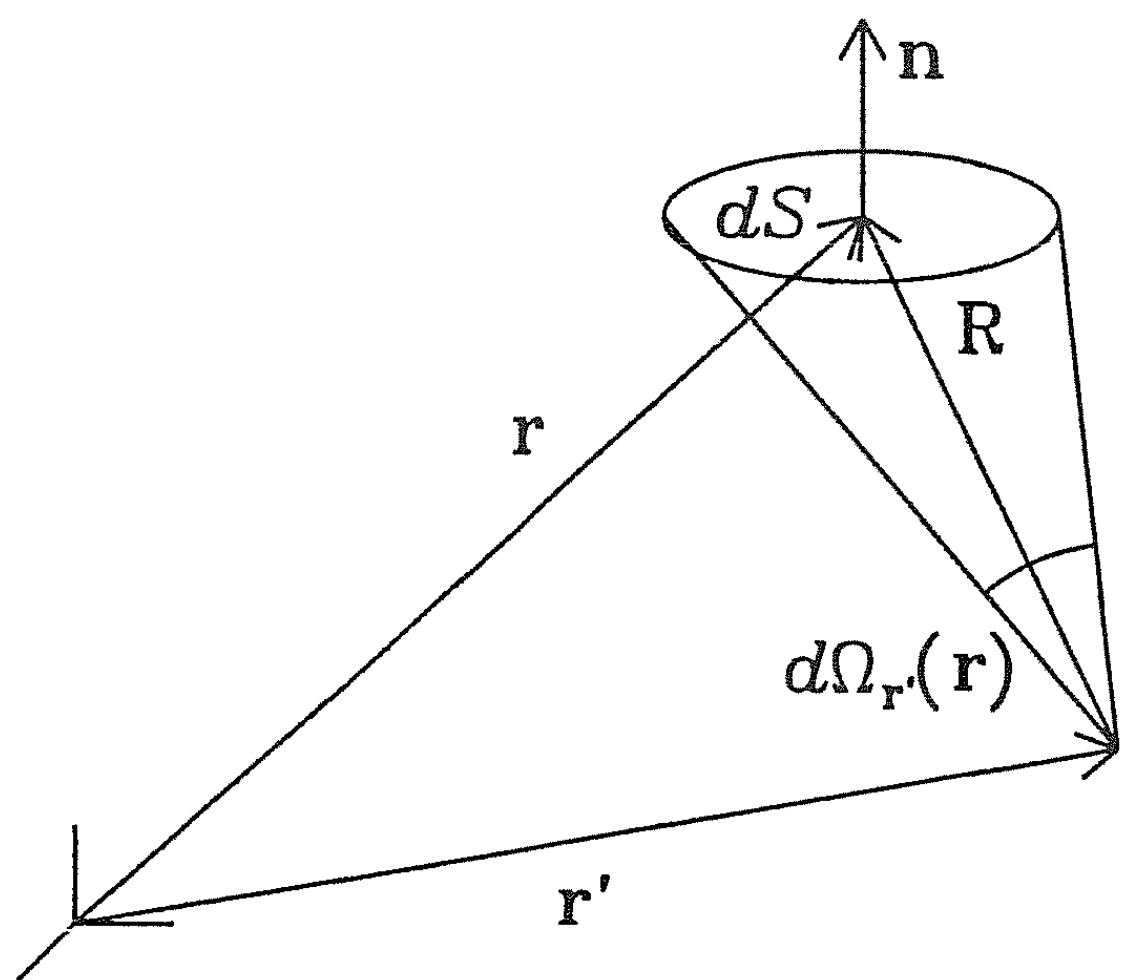
$$\int_S \frac{1}{R} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS - \int_S \phi \nabla \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi\phi(\mathbf{r}'). \quad (7)$$

Zgornji izraz je singularen, ko točka opazovanja leži na ploskvi S . Singularnost lahko odpravimo, če obravnavamo geometrijski pomen ploskovnega integrala v enačbi (7). Izraz

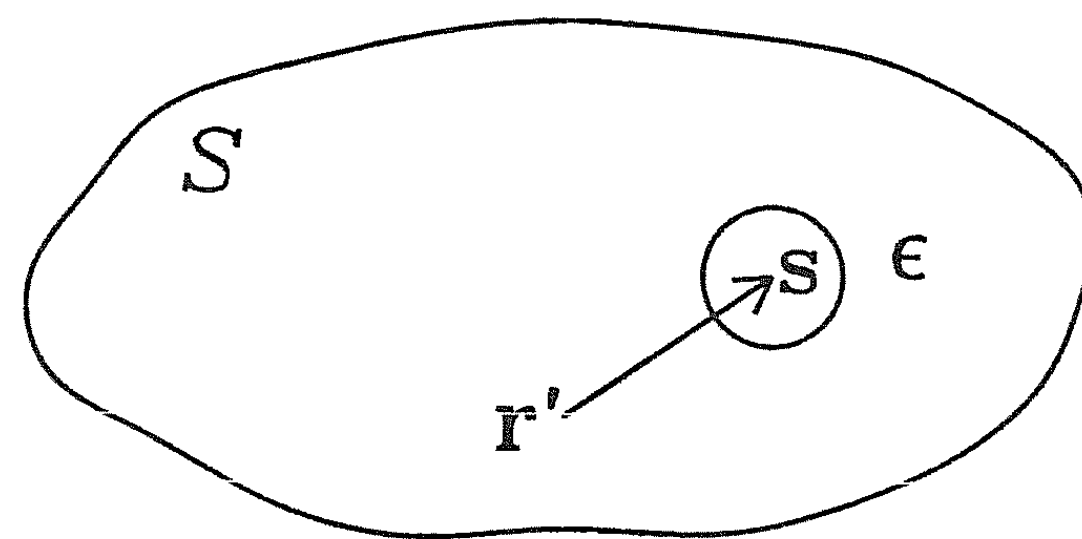
$$-\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \frac{1}{R} dS = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}}{R^3} dS = d\Omega_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r})$$

je prostorski kot $d\Omega$, ki v točki opazovanja $\mathbf{r}'$ objema ploskovni element dS (slika 2). Integral po ploskvi S lahko zapišemo kot

$$F(\mathbf{r}') = \int_S \phi(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \frac{1}{R} dS = - \int_S \phi(\mathbf{r}) d\Omega_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}).$$



Slika 2. Prostorski kot $d\Omega$ v točki opazovanja $\mathbf{r}'$ objema ploskovni element dS .



Slika 3. Geometrija za izračun $F(\mathbf{r}')$.

Vzemimo, da na ploskvi S izrežemo majhno odprto ploskev ε , na kateri leži točka $\mathbf{s}$, in da se točka opazovanja $\mathbf{r}'$ približuje točki $\mathbf{s}$ v smeri normale z notranje strani ploskve S (slika 3). V limitnem primeru, ko $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{s}$ in ko točka opazovanja leži ravno znotraj ploskvice ε , je prostorski kot, ki ga objema ploskvica ε , enak 2π . Tako velja

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{s}} F(\mathbf{r}') = - \int_{S_{\mathbf{r}' \neq \mathbf{s}}} \phi(\mathbf{r}) d\Omega_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}) - 2\pi\phi(\mathbf{s}).$$

Enačbo (7) lahko prepišemo v končno obliko

$$2\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_S \phi \nabla \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_{\mathbf{r}' \neq \mathbf{s}}} \phi(\mathbf{r}) d\Omega_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Že prej smo v enačbah (3) in (4) privzeli, da je človeški torzo omejen homogeni prevodnik s prevodnostjo σ . Ker smo torzo omejili z dvema zaključenima ploskvama, tj. površino torza S_T in površino epikarda S_E , lahko integral po zaključeni ploskvi S zapišemo kot vsoto integralov po ploskvah S_T in S_E

$$2\pi\phi(\mathbf{r}') = \int_{S_E} \phi d\Omega - \int_{S_T} \phi d\Omega - \int_{S_E} \frac{\nabla\phi}{R} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_T} \frac{\nabla\phi}{R} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (9)$$

pri čemer smo spremenili smer normalnega vektorja $\mathbf{n}$ na ploskvi S_E , kot to prikazuje slika 1. Ker je človeško telo obdano z zrakom s prevodnostjo nič, je normalna komponenta električnega toka na površini torza enaka nič (tj. Neumannov robni pogoj v Laplaceovi enačbi (4)). Zadnji člen v enačbi (9) lahko zato zanemarimo.

Iz enačbe (9) je razvidno, da je električni potencial v poljubni točki na ploskvi S določen prvič, z lego točke opazovanja $\mathbf{r}'$ na ploskvi S_E in S_T in drugič, s potencialom in normalno komponento električnega toka na ploskvi S_E in potencialom na ploskvi S_T . Če torej poznamo potencialno porazdelitev na epikardu, lahko izračunamo potencial na površini torza. Čeprav potencialna porazdelitev na epikardu predstavlja ekvivalentni izvor bioelektričnih tokov v srcu, je merljiva količina, ki z visoko ločljivostjo kaže na fiziološke in patofiziološke procese v srcu.

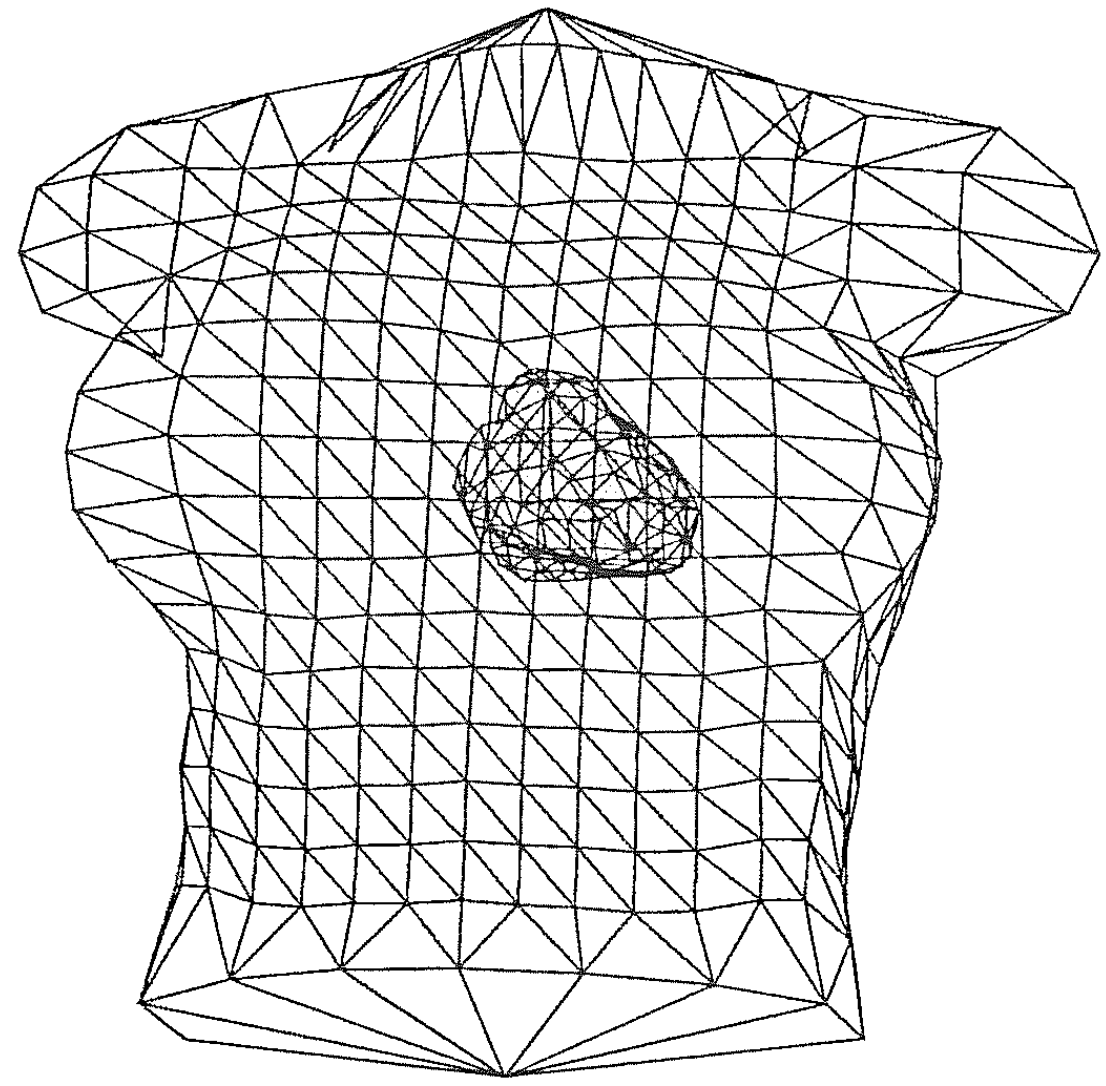
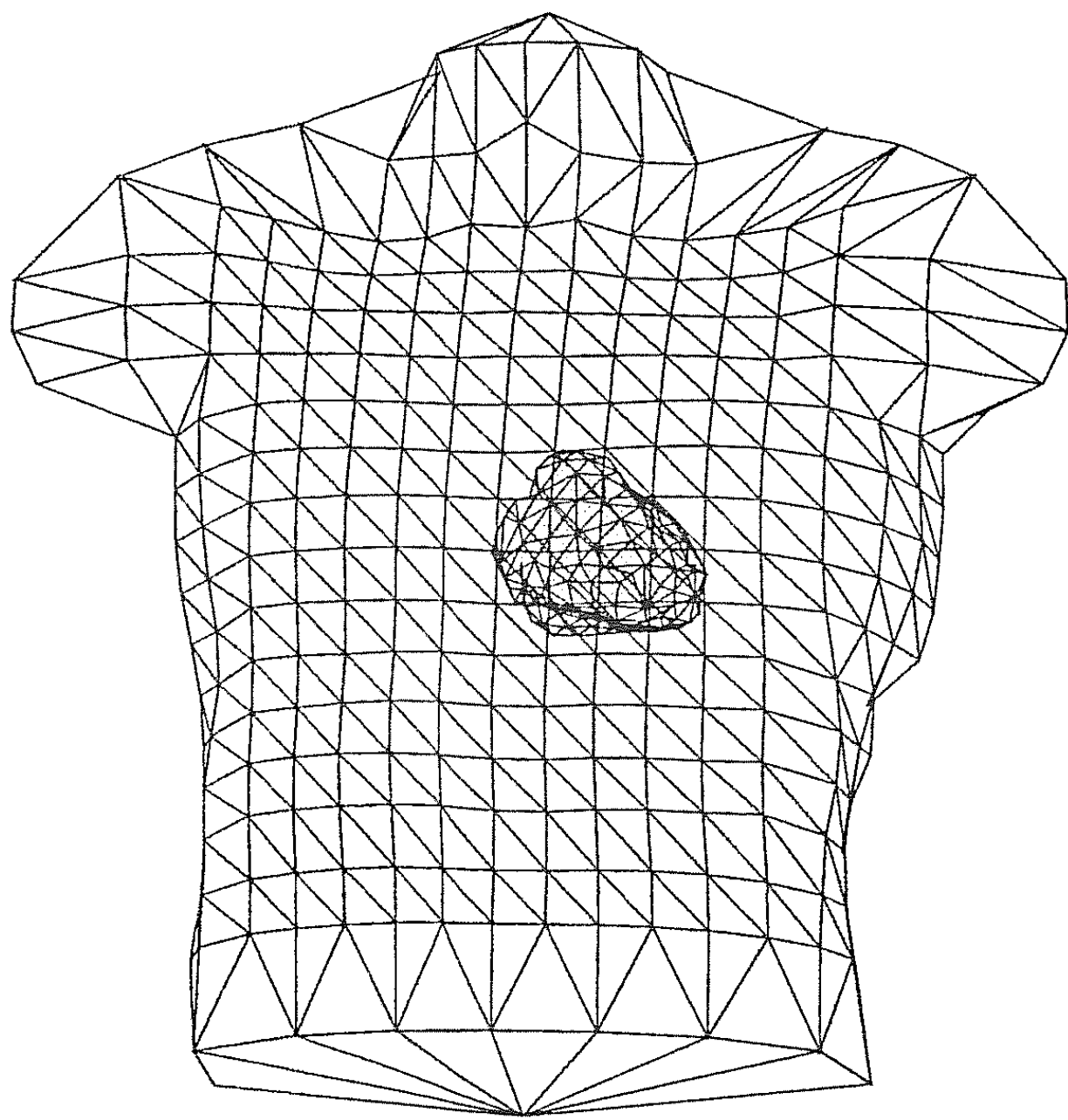
Numerična rešitev

Enačbo (9) moramo v primeru poljubne geometrije rešiti numerično. V ta namen uporabljamo kolokacijsko metodo [7], ki razdeli integracijo po poljubni ploskvi na vsoto bolj preprostih integralov. V praksi to pomeni, da moramo površino torza in epikarda opisati z numeričnim modelom. Slika 4 prikazuje takšen model [8] za predstavitev trikotiziranih površin ženskega in moškega torza. Površina moškega in ženskega torza imata $N_T = 782$ in $N_T = 762$ trikotnikov, površini epikarda pa imata v obeh primerih $N_E = 400$ trikotnikov. Trikotniki so še posebej uporabni, saj so edini večkotniki, določeni z vozlišči, ki nujno ležijo v isti ravnini.

Trikotizacija obeh površin pomeni, da lahko potencial v enačbi (9) aproksimiramo z linearno kombinacijo baznih funkcij $h_i(\mathbf{r}')$,

$$\phi(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^N \phi^i h_i(\mathbf{r}'), \quad (10)$$

kjer so koeficienti ϕ^i neznanke. V najpreprostejšem primeru je bazna funkcija enaka 1 na trikotniku i in nič povsod drugod. To pomeni, da zvezno potencialno porazdelitev na površini epikarda in torza aproksimiramo s po odsekih konstantnimi potenciali. Neznanko ϕ^i lahko torej razumemo kot povprečen potencial na trikotniku i , kjer vsota v enačbi (10) teče po vseh trikotnikih ($N = N_T + N_E$).



Slika 4. Numerična modela moškega in ženskega torza. Površina moškega torza je trikotizirana s 782 trikotniki in ženskega torza s 762 trikotniki; površina epikarda je v obeh modelih trikotizirana s 400 trikotniki. Pri konstrukciji moškega in ženskega torza smo uporabili magnetno resonančno slikanje in algoritem, ki temelji na razvoju po sferičnih harmoničnih funkcijah [8].

Postopek diskretizacije integralov je pomemben za razumevanje numeričnega reševanja enačb, ki nastopajo v obliki enačbe (9), zato ga bomo v nadaljevanju podrobneje opisali. Privzemimo, da je potencial konstanten po ploskvi vsakega izmed trikotnikov. Če uporabimo enačbi (9) in (10), lahko zapišemo posebej izraza za potencial po trikotniku i na torzu in trikotniku k na epikardu,

$$\phi_T^i - \frac{1}{2\pi} \int_{S_E} \phi_E d\Omega_{TE}^i + \frac{1}{2\pi} \int_{S_T} \phi_T d\Omega_{TT}^i + \frac{1}{2\pi} \int_{S_E} \frac{\nabla \phi_E}{R_i} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (11)$$

$$\phi_E^k - \frac{1}{2\pi} \int_{S_E} \phi_E d\Omega_{EE}^k + \frac{1}{2\pi} \int_{S_T} \phi_T d\Omega_{ET}^k + \frac{1}{2\pi} \int_{S_E} \frac{\nabla \phi_E}{R_k} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (12)$$

Takšen zapis je ugoden za izračun integralov, saj eksplicitno loči točko opazovanja na torzu od točke opazovanja na epikardu. Z $d\Omega_{PQ}^l$ smo označili diferencial prostorskega kota, ki ga v težišču trikotnika l na ploskvi P objema ploskvica dS na ploskvi Q . Integrale v zgornjih enačbah lahko diskretiziramo v obliki

$$\phi_T^i + \sum_{j=1}^{N_T} \Omega_{TT}^{ij} \phi_T^j - \sum_{j=1}^{N_E} \Omega_{TE}^{ij} \phi_E^j + \sum_{j=1}^{N_E} \Gamma_{TE}^{ij} \psi_E^j = 0, \quad i = 1, \dots, N_T \quad (13)$$

$$\phi_E^l - \sum_{j=1}^{N_E} \Omega_{EE}^{lj} \phi_E^j + \sum_{j=1}^{N_T} \Omega_{ET}^{lj} \phi_T^j + \sum_{j=1}^{N_E} \Gamma_{EE}^{lj} \psi_E^j = 0, \quad l = 1, \dots, N_E, \quad (14)$$

kjer je $\psi_E^j = \nabla \phi_E^j$ gradient potenciala (tj. električni tok) v smeri normale na ploskev S_E .

Vidimo, da smo z diskretizacijo ločili geometrijske koeficiente Ω_{PQ}^{ij} in Γ_{PQ}^{lj} od potencialov po trikotnikih na torzu in epikardu. Pomembno je, da so koeficienti Ω_{PQ}^{ij} in Γ_{PQ}^{lj} odvisni le od geometrije trikotiziranih ploskev S_T in S_E . Koeficiente Γ_{PQ}^{lj} lahko razumemo kot uteži za prispevek normalne komponente gradienta potenciala po trikotniku j na ploskvi Q k potencialu po trikotniku l na ploskvi P . Podobno koeficienti Ω_{PQ}^{ij} obtežijo prispevek potenciala po trikotniku j na ploskvi Q k potencialu po trikotniku i na ploskvi P . Na primer, koeficient Ω_{ET}^{ij} ustreza točki opazovanja v težišču trikotnika i na površini epikarda in trikotniku j na površini torza, po katerem poteka ploskovna integracija (slika 5). Geometrijske koeficiente Ω_{PQ}^{lj} in Γ_{PQ}^{lj} lahko za poljubna po odsekih koplanarna vozlišča izračunamo analitično [9].

Z uporabo matričnega zapisa sistemov enačb (13) in (14) dobimo

$$(\mathbf{I} + \Omega_{TT})\Phi_T + \Omega_{TE}\Phi_E + \Gamma_{TE}\Psi_E = 0, \quad (15)$$

$$\Omega_{ET}\Phi_T + (\mathbf{I} - \Omega_{EE})\Phi_E + \Gamma_{EE}\Psi_E = 0, \quad (16)$$

kjer so vektorji $\Phi_T = (\phi_T^1, \dots, \phi_T^{N_T})$, $\Phi_E = (\phi_E^1, \dots, \phi_E^{N_E})$ in $\Psi_E = (\psi_E^1, \dots, \psi_E^{N_E})$. Matrika $\mathbf{I}$ je identiteta. Matrika Ω_{TT} ima dimenzijo $N_T \times N_T$, matriki Ω_{TE} in Γ_{TE} imata dimenzijo $N_T \times N_E$, matrika Ω_{ET} dimenzijo $N_E \times N_T$, matriki Ω_{EE} in Γ_{EE} pa dimenzijo $N_E \times N_E$. Če iz enačb (15) in (16) izrazimo Ψ_E , dobimo končni izraz, ki povezuje potencialno porazdelitev na epikardu s potencialno porazdelitvijo na torzu [10]

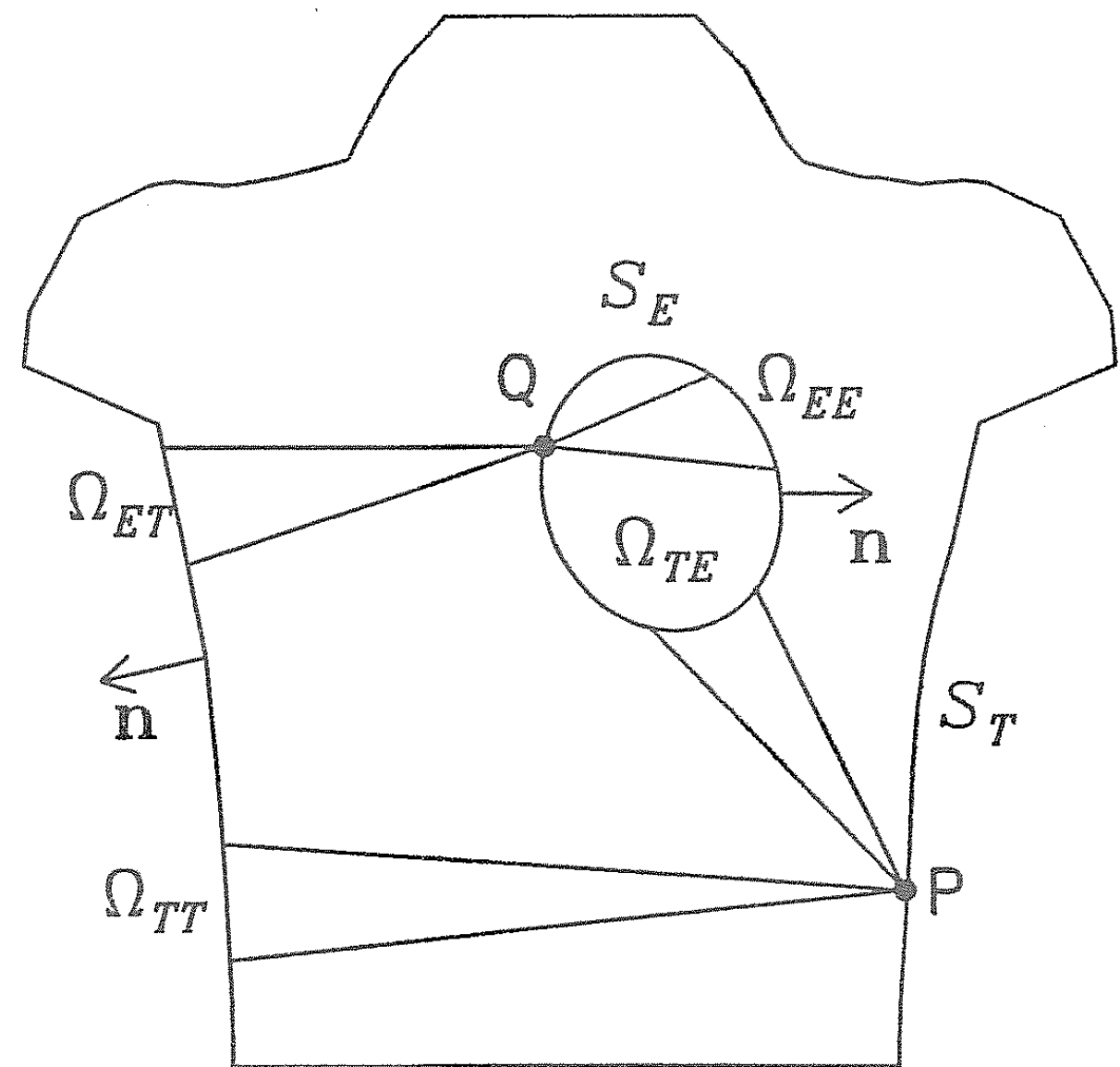
$$\Phi_T = \mathbf{Z}_{TE}\Phi_E, \quad (17)$$

kjer je matrika $\mathbf{Z}_{TE}(N_T \times N_E)$ enaka

$$\mathbf{Z}_{TE} = (\mathbf{I} + \Omega_{TT} - \Gamma_{TE}\Gamma_{EE}^{-1}\Omega_{ET})^{-1}(\Gamma_{TE}\Gamma_{EE}^{-1}(\mathbf{I} - \Omega_{EE}) - \Omega_{TE}). \quad (18)$$

Uporabnost rešitve

Iz enačbe (17) lahko izračunamo potencial na površini torza iz znane potencialne porazdelitve na epikardu, če poznamo matriko $\mathbf{Z}_{TE}$. V resnici je direktno merjenje potencialov na epikardu omejeno le na raziskave na živalih [11,12]. Zato je za klinične raziskave nujno, da iz izmerjene potencialne porazdelitve na torzu (od 30 do 200 elektrokardiogramov) poiščemo



Slika 5. Grafični prikaz geometrijskih koeficientov matrik Ω_{TT} , Ω_{TE} , Ω_{ET} in Ω_{EE} .

porazdelitev na epikardu. To je inverzni problem, ki ga lahko v našem primeru definiramo kot

$$\Phi_E = \mathbf{Z}_{ET} \Phi_T, \quad (19)$$

kjer je $\mathbf{Z}_{ET}(N_E \times N_T)$ matrika geometrijskih koeficientov, ki določa Φ_E iz Φ_T . Število trikotnikov na torzu N_T je večje od števila trikotnikov na epikardu N_E . Četudi je inverzna rešitev za potencialno porazdelitev na epikardu enolična, pa je slabo pogojena, kar pomeni, da je število linearno neodvisnih rešitev manjše od števila neznank. Zato je takšen sistem nezadostnega ranga in ima praviloma zelo velike vrednosti števila pogojenosti [13].

Slabo pogojenost lahko razložimo s fizikalnimi lastnostmi našega sistema. Potencial pada s kvadratom razdalje od izvora. Zato je amplituda potencialov na epikardu pri normalnem elektrokardiogramu precej večja (10–20 mV) od amplitude potencialov na površini človeškega torza (2–2.5 mV) [12]. Matrika geometrijskih koeficientov $\mathbf{Z}_{ET}$ mora tako „ojačati“ merjeni potencial na torzu; relativna ojačitev potencialov je večja za tiste dele torza, ki so bolj oddaljeni od epikarda (ledveni in trebušni del torza). Hkrati s potencialom matrika $\mathbf{Z}_{ET}$ ojača tudi šum in napake zaradi diskretizacije, ki neizogibno spremljajo meritve in simulacije. To potem povzroči funkcionalno linearno odvisnost med enačbami in slabo pogojenost matrike $\mathbf{Z}_{TE}$. Čeprav lahko v načelu izračunamo psevdoinverzno matriko $\mathbf{Z}_{ET} = (\mathbf{Z}_{TE}^T \mathbf{Z}_{TE})^{-1} \mathbf{Z}_{TE}^T$, pa bodo že majhne napake v podatkih povzročile velike oscilacije v rešitvi sistema.

Problem z ojačitvijo merskega šuma pa se pri reševanju direktnega problema ne pojavi, saj je razmerje med signalom in šumom precej večje pri meritvah na epikardu kot pri meritvah na površini torza. Ker so vrednosti potencialov manjše na površini torza, matrika $\mathbf{Z}_{TE}$ „oslabi“ prispevek potencialov na epikardu in s tem tudi prispevek merskega šuma.

Rešitev direktnega problema v elektrokardiografiji je zanimiva, ker predstavlja kvantitativni opis bioelektrične aktivnosti srčne mišice, ki temelji na fizikalnih zakonih. Natančna rešitev je tudi prvi pogoj za reševanje največjega izziva elektrokardiografije, tj. inverznega problema. Rešitev inverznega problema in različne metode, ki lahko zmanjšajo vpliv slabe pogojenosti sistemov, si bomo podrobneje ogledali v prihodnjem članku.

Zahvala

To raziskavo je deloma omogočilo Ministrstvo za znanost in tehnologijo Republike Slovenije.

LITERATURA

- [1] R. Plonsey, *Bioelectric Phenomena*, New York, Mc-Graw Hill, 1969.
- [2] R. M. Gulrajani, *Models of the electrical activity of the heart and computer simulation of electrocardiogram*, CRC Crit. Rev. Biomed. Eng. **16** (1988) 1.
- [3] A. C. L. Barnard, I. M. Duck, M. S. Lynn, W. P. Timlake, *The application of electromagnetic theory to electrocardiology*, Biophys. J. **7** (1967) 443.
- [4] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, New York, McGraw-Hill, 1941.
- [5] J. Lužnik, *Biomagnetizem*, Obzornik za matematiko, fiziko in astronomijo **33** (1986) 24.

- [6] R. Hren, *A Realistic Model of the Human Ventricular Myocardium: Application to the Study of Ectopic Activation*, doktorska disertacija, Dalhousie University, Halifax, 1996.
- [7] C. W. Steele, *Numerical Computation of Electrical and Magnetic Fields*, New York, Van Nostrand Reinhold 1987.
- [8] R. Hren, G. Stroink, *Application of the surface harmonic expansions for modeling the human torso*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **BME-42** (1995) 521.
- [9] V. Jazbinšek, *Modeliranje tokovnih izvorov magnetnega polja srca ob upoštevanju realnih robnih pogojev*, doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Ljubljana 1994.
- [10] R. C. Barr, M. Ramsey, M. S. Spach, *Relating epicardial to body surface potential distributions by means of transfer coefficients based on geometry measurements*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **BME-24** (1977) 1.
- [11] M. Ramsey, R. C. Barr, M. S. Spach, *Comparison of measured torso potentials with those simulated from epicardial potentials for ventricular depolarization and repolarization in the intact dog*, Circ. Res. **41** (1977) 660.
- [12] H. S. Oster, B. Taccardi, R. L. Lux, P. R. Ershler, Y. Rudy, *Noninvasive electrocardiographic imaging: Reconstruction of epicardial potentials, electrograms, and isochrones and localization of single and multiple electrocardiac events*, Circulation **96** (1997) 1012.
- [13] Z. Bohte, *Numerične metode*, Ljubljana, DMFA 1985.

VESTI

ODSTOP REPUBLIŠKE PREDMETNE KOMISIJE ZA MATEMATIKO

Javnost je bila o dogodkih v zvezi z letošnjo junijsko maturo iz matematike pomanjkljivo ali celo nekorektno obveščena, zato je smiselno, da vsaj del strokovne javnosti podrobneje seznanimo z njimi. Prav kmalu po opravljanju pisnega dela mature iz matematike so se po Sloveniji širile govorice (objavljene tudi v nekaterih javnih medijih), da bosta dve nalogi iz kompleta štirinajstih nalog za osnovno raven izločeni. Člani republiške predmetne komisije za matematiko (v nadaljevanju RPK) smo se temu čudili, saj izdelki maturantov še niso bili niti pregledani, ko pa smo nekoliko kasneje od republiške maturitetne komisije (v nadaljevanju RMK) dobili priporočilo, da RPK izloči iz ocenjevanja najslabše reševani nalogi, smo ugotovili, da se vendarle nekaj kuha. Po mnenju RPK ni bilo nobenega tehtnega razloga za izvzetje nalog iz ocenjevanja. Temu primerno kratko strokovno argumentirano odklonilno stališče o izvzetju nalog je RPK posredovala republiški maturitetni komisiji. Na sestanku 9. julija je RPK predsedniku in dvema članoma RMK še izčrpnije pojasnila svojo odločitev. Argumenti RPK za matematiko so bili sprejeti in kazalo je, da se bo zadeva ohladila. Toda, 19. julija je med sejo RMK njen predsednik po telefonu poklical predsednika RPK in skušal dobiti privoljenje za izločitev dveh nalog iz ocenjevanja. Privoljenja seveda ni dobil, RMK pa je kljub temu na isti seji sprejela sklep o izvzetju omenjenih nalog, ki ga povzemamo po zapisniku te seje.

RMK določa, da se iz ocenjevanja pri matematiki izvzameta 6. in 13. vprašanje. Kandidatom, ki so nalogo rešili, se dosežene točke upoštevajo kot povečano število točk. Sklep je bil sprejet z enim vzdržanim glasom in 7 glasovi za.

Zaradi tega sklepa se je 23. julija RPK za matematiko ponovno sestala in sprejela izjavo o odstopu članov RPK za matematiko. Osrednji del izjave se glasi takole:

Z uveljavitvijo sklepa RMK o izvzetju dveh nalog iz maturitetne pole se bistveno okrne smisel mature iz matematike in odstopa od njenih globalnih ciljev. Tak način dela RMK močno posega v strokovne kompetence RPK za matematiko in izraža dvom v premišljenost njenih odločitev. Poleg tega iz sklepa RMK ni razviden postopek za pretvorbo točk v ocene pri maturi iz matematike. Zato se RPK za matematiko distancira od ocen, dobljenih na podlagi omenjenega sklepa RMK.

Zaradi nastalih razmer se je vseh devet članov RPK za matematiko odločilo, da preneha z delom v RPK in s tem odstopa s svojih položajev. Sklep o odstopu je bil takoj po sestanku poslan ministrstvu za šolstvo in šport RS, republiški maturitetni komisiji, državnemu izpitnemu centru ter zavodu RS za šolstvo, tako da bi RMK lahko pravočasno umaknila ali ustrezno spremenila sklep o izvzetju nalog iz ocenjevanja. Predsednik RMK je še istega dne reagiral in predlagal ponoven sestanek z RPK v naslednjem tednu. Takoj po tem sestanku naj bi po njegovih besedah oba predsednika komisij sprejel bodisi minister za šolstvo in šport bodisi državni sekretar za šolstvo. V ponedeljek, 26. julija so bili objavljeni rezultati mature, ki so pokazali, da RMK ni odstopila od omenjenega sklepa. Čez tri dni smo se sestali predsednik in še en član RMK ter predsednik in še dva člana RPK za matematiko. Poskus prepričati prisotne člane RPK za matematiko, da prekličejo svoj odstop, se je izjalovil. Napovedanega sestanka z ministrom oziroma z državnim sekretarjem ni bilo.

Iz zapisnika seje RMK sledi, da je bil sklep o izvzetju dveh nalog iz ocenjevanja sprejet na podlagi edukometrične analize izpitnih vprašanj zaradi izboljšanja uspeha pri matematiki na osnovni ravni. Ta naj bi se z uveljavitvijo sklepa izboljšal približno za 2.5%. Je to (lahko) res pravi razlog za tak poseg? Je to strokovna poteza ali morda politična? Kakšne bodo posledice takega delovanja RMK? Naj navedem še nekaj mnenj, ki jih je RPK za matematiko posredovala RMK na omenjenih sestankih.

Izločevanje korektnih nalog iz kompletov je nasploh problematično in vprašljivo. Struktura konkretne izpitne pole se s posegom RMK bistveno spremeni. Prvotni komplet nalog se oklesti za nekoliko zahtevnejši nalogi, v okrnjenem kompletu pa takih nalog skoraj ni. Ob tem se na strokovnih seminarjih za člane republiških predmetnih komisij vedno poudarja, naj bi se delež manj šablonskih in s tem zahtevnejših nalog pri maturi povečal, saj bi s tem matura pozitivno vplivala na dvig kakovosti pouka matematike v srednjih šolah. Poleg tega s posegom odpadeta na osnovni ravni mature edini nalogi z verjetnostnega računa (oziroma kombinatorike) in procentnega računa.

Naloge letošnje mature iz matematike so na enakem nivoju kot naloge lanske in predlanske, uspeh na njej pa bi bil brez posega RMK le malenkost slabši od lanskega. Tudi meja za pozitivno oceno je skoraj enaka in

hkrati tako nizka, da pri maturi iz matematike na osnovni ravni lahko uspejo (celo brez ti. nearly passa) dijaki, ki so na maturi pokazali komaj kaj znanja srednješolske matematike. Dobro tretjino točk (neokrnjenega) pisnega izpita, ki šteje 80% celote in je po uspešnosti praviloma precej slabši od ustnega dela, je mogoče doseči zgolj z znanjem osnovnošolske matematike. Naj bi ob tem RPK še znižala mejo za pozitivno oceno, da bo uspeh na maturi videti boljši?

Tudi dijaki menijo, da zahtevnost izpita pri maturi iz matematike sploh ni problem. Po raziskavi Zavoda RS za šolstvo, objavljeni v zborniku *Drugi strokovni posvet o maturi*, Ljubljana 1998, je skoraj 73% anketiranih dijakov menilo, da je bil pisni izpit iz slovenskega jezika težak, le dobrih 17% dijakov pa je to trdilo za pisni izpit iz matematike. V anketi, ki jo je izvedla RPK za matematiko na seminarju za zunanje ocenjevalce, se je velika večina pohvalno izrazila o letošnjem izboru nalog iz matematike na maturi.

Čemu torej ukrep RMK, ki je (morda zgolj slučajno) udejanil govornice, omenjene na začetku sestavka? Sklenimo prispevek z nalogami letošnje junjske mature iz matematike. Te naj bi bile po besedah direktorja državnega izpitnega centra javnosti dostopne takoj po pisnem izpitu.

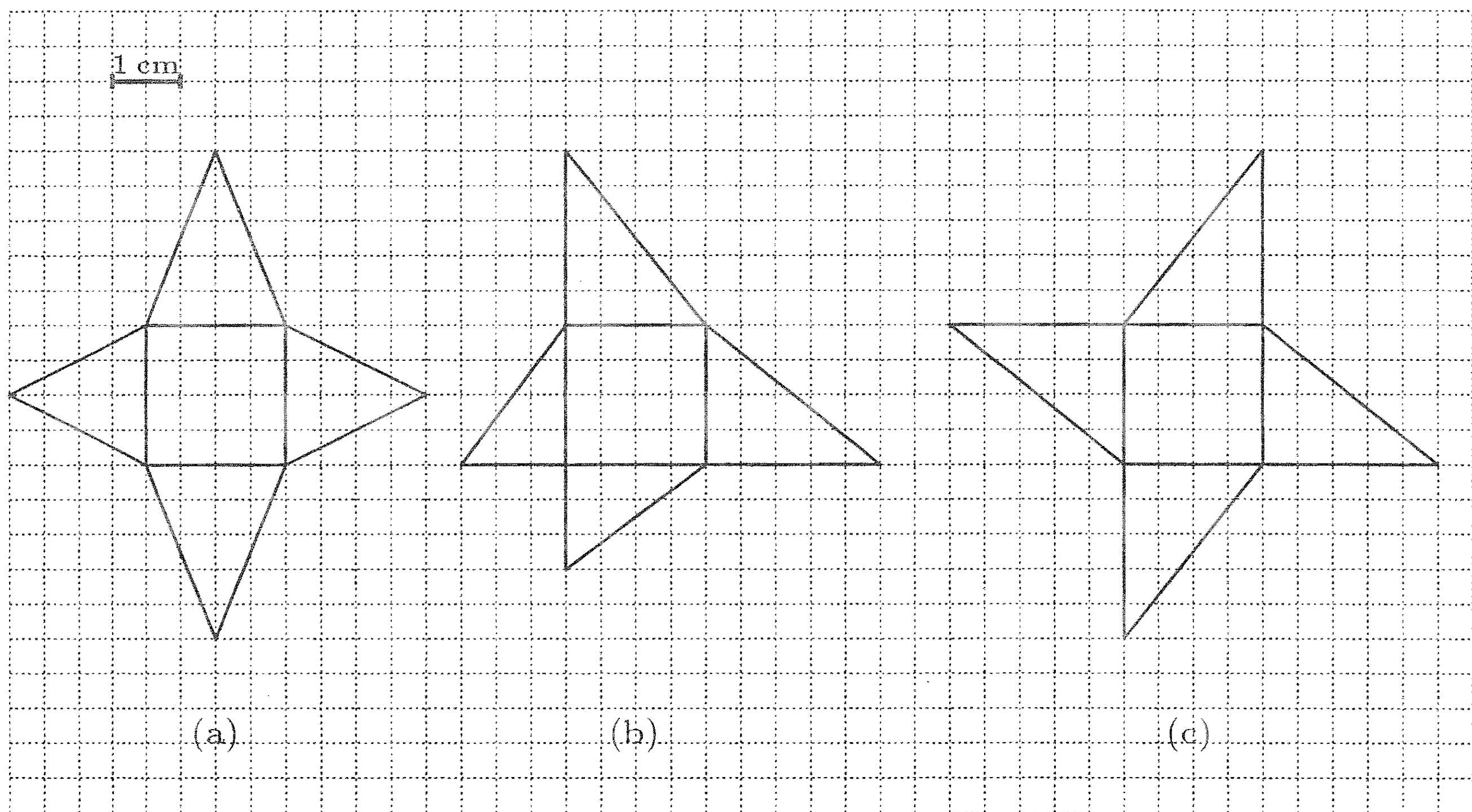
1. Kateri pozitivni večkratniki števila 27 so delitelji števila 1188? (6 točk)
2. Izračunajte vse ničle (tudi kompleksne) polinoma

$$p(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1. \quad (6 \text{ točk})$$

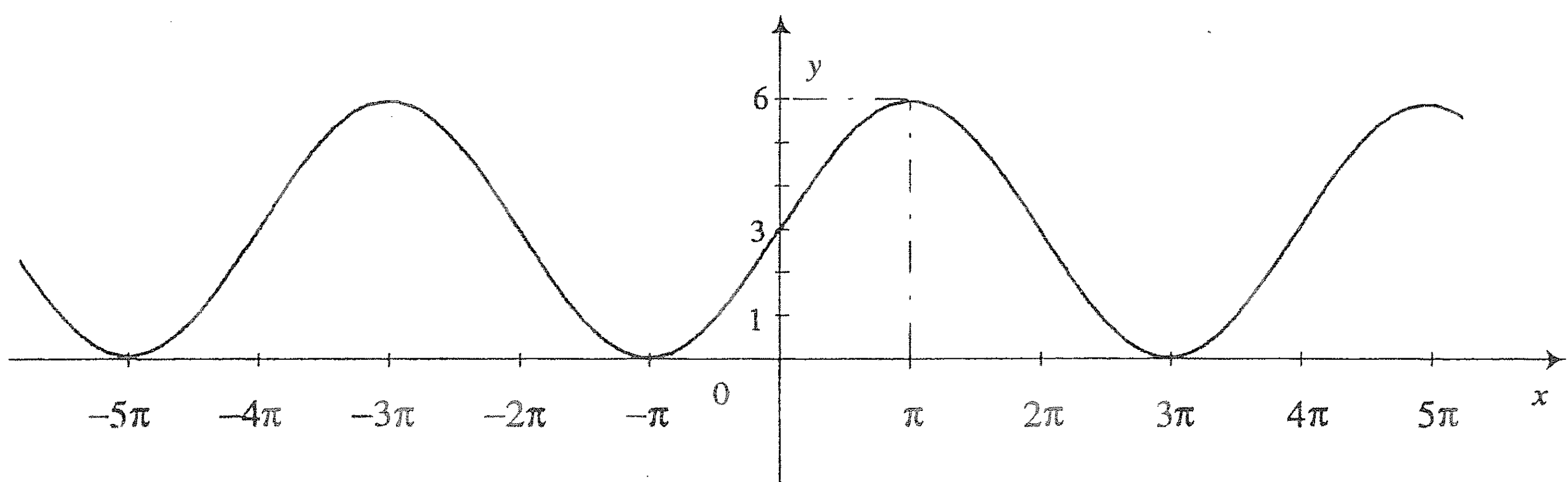
3. S pomočjo delnega korenjenja izračunajte natančno vrednost izraza $(\sqrt{300} - \sqrt{75} - \sqrt{48})(\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{150})$. Tudi končni rezultat delno korenite. (6 točk)
4. Parabolo z enačbo $y = (x-1)^2 - 1$ prezrcalite čez koordinatno izhodišče. V dani koordinatni sistem narišite tako dobljeno krivuljo in zapišite njeno enačbo. (6 točk)
5. Kroga ležita v isti ravnini: manjši v večjem, njuna robova se dotikata. Ploščina večjega kroga je devetkrat tolikšna kot ploščina manjšega. Razdalja med središčema obeh krogov meri 2 dm. Izračunajte polmera obeh krogov. Skica je obvezna. (6 točk)
6. Pred tremi leti je bila Katja za 24 % mlajša od Roka, čez tri leta pa bo Rok za 24 % starejši od Katje. Koliko sta stara Katja in Rok letos? (5 točk)
7. V dani koordinatni sistem narišite krožnico, podano z enačbo

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 1 = 0. \quad (6 \text{ točk})$$

8. Samo ena izmed spodnjih slik prikazuje ravninsko mrežo piramide. Obkrožite črko pod to sliko in izračunajte prostornino ustrezne piramide. Potrebni podatki so na sliki. (6 točk)



9. Izračunajte realno število m , tako da bo dolžina vektorja $\vec{a} = (m - 2, 3 - m, 2m - 12)$ enaka 11. (5 točk)
10. Rešite enačbo $3^{2x+1} + 3^{2x} = 108$. (5 točk)
11. Premica se dotika krivulje z enačbo $y = x^3 + 1$ v točki A in jo seka v točki B . Točka A leži na abscisni osi in je različna od točke B . Izračunajte koordinate točk A in B . (7 točk)
12. V spodnjem koordinatnem sistemu je narisana graf funkcije s predpisom $f(x) = A \sin(Bx) + C$. Zapišite vrednosti parametrov A , B in C ter osnovno periodo te funkcije. (5 točk)



13. V pritličju desetnadstropne stolpnice vstopijo v dvigalo štirje pustolovci. Vsak z enako verjetnostjo izstopi v kateremkoli nadstropju (pri tem pritličja ne štejemo za nadstropje). Kolikšna je verjetnost, da nobena dva ne bosta izstopila v istem nadstropju? (5 točk)
14. Lik je omejen z obema koordinatnima osema, grafom funkcije $f(x) = e^x$ in premico $x = a$. Za kateri $a > 0$ ima ta lik ploščino enako 2? Rezultat zapišite na tri decimalke natančno. (6 točk)

člani RPK za matematiko