

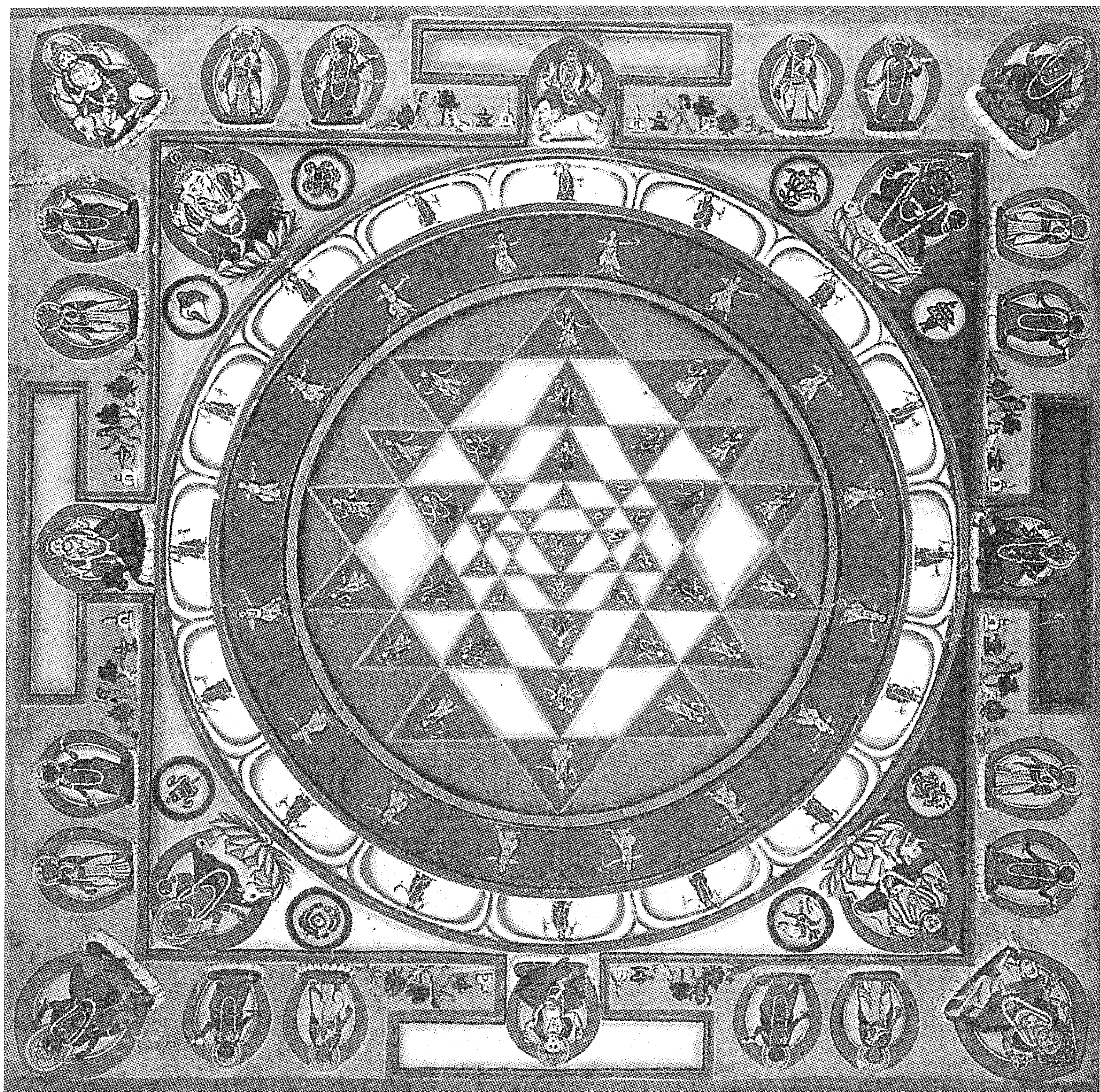
ODPISANO

1999

Letnik 46

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1999

letnik 46, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Miran Černe (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.000 SIT, za študente 1.500 SIT, za tujino 25 EUR. Posamezna številka za člane 600 SIT, stare številke 400 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1999 DMFA Slovenije – 1386 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.—Page

Grupa urejenostnih avtomorfizmov realne osi — The group of order automorphisms of the real line (Boris Lavič) 65–74

Izrek o pozitivnosti — Positivstellensatz (Jaka Cimprič) 75–82

Poučevanje fizike in matematika — Mathematics in physics education (Janez Strnad) 83–89

Origami števila — Origami numbers (Alenka Klokočovnik) 90–IV

Nove knjige — New books (Peter Legiša) IV

Vesti — News

Novi člani Društva v letu 1998 (Simon Vrečar) 74

Na ovitku: *Šri Yantra*, Nepal, 1700.

GRUPA UREJENOSTNIH AVTOMORFIZMOV REALNE OSI

BORIS LAVIČ

Math. Subj. Class. (1991) 20B35, 20F60

Obravnavamo osnovne lastnosti grupe $A(\mathbb{R})$ urejenostnih avtomorfizmov realne osi, edinke te grupe in edinke grupe $S_c(\mathbb{R})$ zveznih bijekcij realne osi.

THE GROUP OF ORDER AUTOMORPHISMS OF THE REAL LINE

We study basic properties of the group $A(\mathbb{R})$ of all order automorphisms of the real line, normal subgroups of $A(\mathbb{R})$, and normal subgroups of the group $S_c(\mathbb{R})$ of continuous bijections of the real line.

1. Uvod

Funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo *urejenostni avtomorfizem*, kadar je bi-jektivna in ohranja naravno urejenost realne osi. Urejenostni avtomorfizem je torej strogo naraščajoča bijekcija realne osi in je zato zvezna funkcija. Brž se lahko prepričamo, da je množica $A(\mathbb{R})$ vseh urejenostnih avtomorfizmov realne osi, opremljena z operacijo komponiranja funkcij, grupa z enoto $e = id_{\mathbb{R}}$. Imenovali jo bomo *grupa avtomorfizmov* in zaznamovali z $A(\mathbb{R})$. Opremimo $A(\mathbb{R})$ z relacijo urejenosti po točkah:

$$f, g \in A(\mathbb{R}), \quad f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tako definirana relacija $\leq$ je očitno refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, torej je relacija delne urejenosti. Za vsak par $f, g \in A(\mathbb{R})$ tudi funkciji $f \vee g$ in $f \wedge g$, opredeljeni s predpisoma

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pripadata $A(\mathbb{R})$, zato je $(A(\mathbb{R}), \leq)$ mreža. Ker poleg tega velja sklep

$$f, g \in A(\mathbb{R}), \quad f \leq g \iff (fh \leq gh \text{ in } hf \leq hg) \quad \forall h \in A(\mathbb{R}),$$

je $A(\mathbb{R})$ mrežno urejena grupa.

Če pri opisani konstrukciji grupe $A(\mathbb{R})$ realno os $\mathbb{R}$ nadomestimo s poljubno linearno urejeno množico X , dobimo mrežno urejeno grupo $A(X)$ urejenostnih avtomorfizmov množice X . Takšne grupe so uporaben model mrežno urejenih grup, poleg tega pa se da po Hollandovem izreku [2, Theorem 2] vsako mrežno urejeno grupo vložiti v ustrezno grupo avtomorfizmov $A(X)$. Pri tem je vložitev injektivna preslikava, ki ohranja operacije mrežno urejene grupe. Še več, iz dokaza izreka 4 v [2] se da razbrati, da je mogoče vsako števno mrežno urejeno grupo vložiti v $A(\mathbb{R})$. V tem sestavku nas bodo zanimale osnovne lastnosti grupe $A(\mathbb{R})$ in grupe $S_c(\mathbb{R})$ vseh zveznih bijekcij realne osi. Večji del navedenih rezultatov o grupi $A(\mathbb{R})$ je v zelo skopi obliki dokazan v [2], nekatere pa obravnava tudi knjiga [1] o splošni teoriji mrežno urejenih grup. Osnovne poteze te teorije vsebuje npr. knjižica [3].

2. Osnovne lastnosti grupe urejenostnih avtomorfizmov

Pri obravnavi grupe avtomorfizmov si bomo pomagali z naslednjim pojmom.

Orbitala elementa $f \in A(\mathbb{R})$ v točki $x \in \mathbb{R}$ je najmanjša konveksna podmnožica $o_f(x)$ realne osi, ki vsebuje orbito $\{f^m(x) : m \in \mathbb{Z}\}$ elementa f . Oznaka f^m seveda pomeni m -to potenco elementa f v grupi $A(\mathbb{R})$.

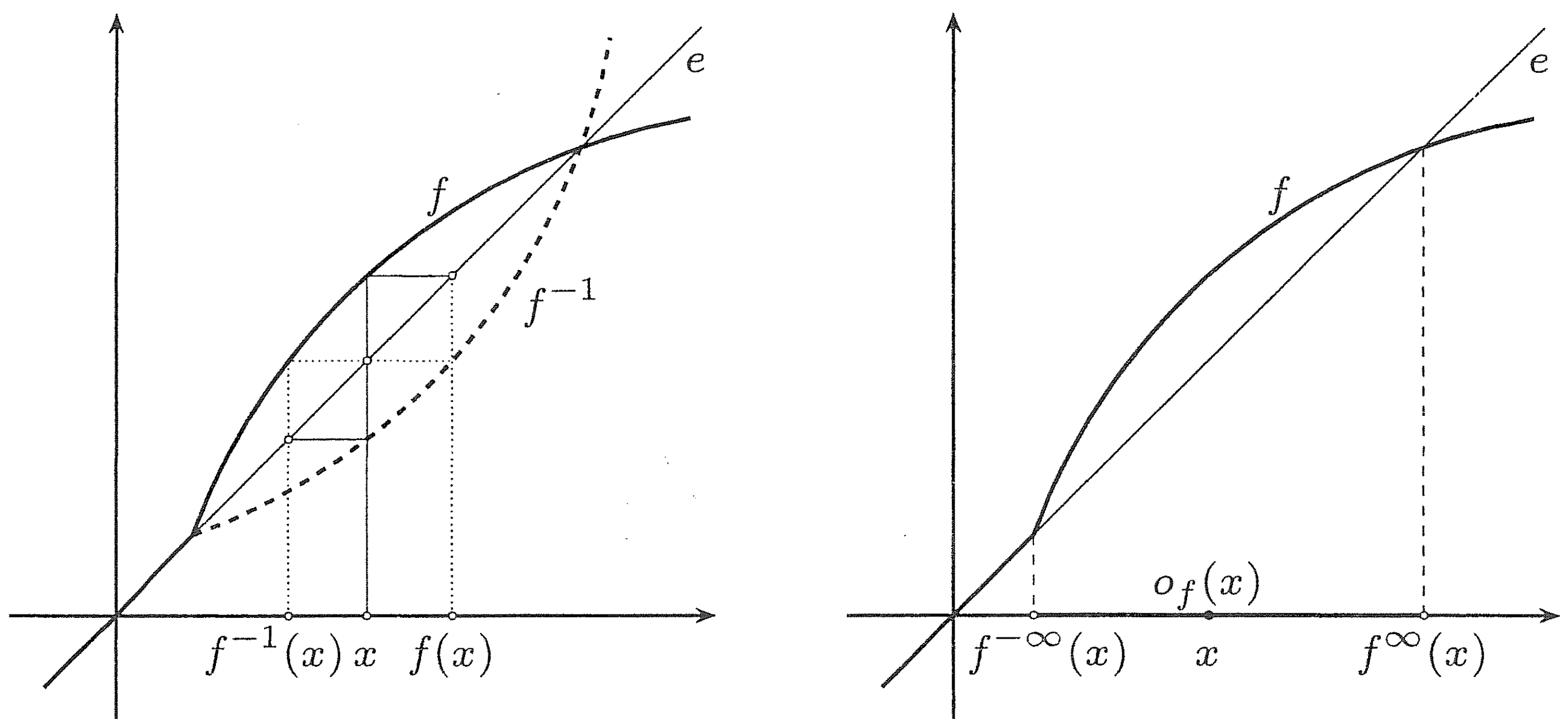
Točka $y \in \mathbb{R}$ pripada orbitali $o_f(x)$ natanko takrat, kadar obstajata taki celi števili k in l , da je $f^k(x) \leq y \leq f^l(x)$. Če je x negibna točka avtomorfizma f , velja $o_f(x) = \{x\}$, če pa je $f(x) > x$ ali $f(x) < x$, je $o_f(x)$ neprazen posplošeni interval. Kadar je $f(x) > x$, velja

$$\dots < f^{-2}(x) < f^{-1}(x) < x < f(x) < f^2(x) < \dots$$

in $o_f(x) = (f^{-\infty}(x), f^{\infty}(x))$, kjer sta $f^{-\infty}(x)$ in $f^{\infty}(x)$ posplošeni limiti

$$f^{-\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x), \quad f^{\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x).$$

Zato za vsak $y \in o_f(x)$ obstaja eno samo tako celo število k , da je $f^{k-1}(x) \leq y < f^k(x)$. Od tod sledi $f^k(x) \leq f(y) < f^{k+1}(x)$ in tedaj še $y < f(y)$. Torej v tem primeru za vsak $y \in o_f(x)$ velja $f(y) > y$. Podobno je z orbitalo $o_f(x)$, kadar je $f(x) < x$; tedaj za vsak $y \in o_f(x)$ velja $f(y) < y$.



Slika 1.

Množico $\mathcal{O}_f = \{o_f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ torej nasploh sestavljajo tri vrste orbital:

Orbitala $I \in \mathcal{O}_f$ je *pozitivna*, kadar za vsak $x \in I$ velja $f(x) > x$, *negativna*, kadar za vsak $x \in I$ velja $f(x) < x$, in *točkasta*, če ni niti pozitivna niti negativna.

Neposredno iz definicije sledi, da točkasta orbitala avtomorfizma vsebuje natanko eno njegovo negibno točko in da je unija vseh točkastih orbital avtomorfizma enaka množici njegovih negibnih točk. Unija pozitiv-

nih in negativnih orbital avtomorfizma f je množica točk $x \in \mathbb{R}$, za katere $f(x) \neq x$. Imenujemo jo *nosilec* avtomorfizma f .

Vzemimo poljubno orbitalo $o_f(x)$ in poljubno točko $y \in o_f(x)$. Ker za ustrezni celi števili k, l velja $f^k(x) \leq y \leq f^l(x)$, in ker sta f^{-k}, f^{-l} avtomorfizma, je $f^{-l}(y) \leq x \leq f^{-k}(y)$. Od tod po kratkem računu dobimo enakost $o_f(x) = o_f(y)$. Če se torej orbitali elementa f sekata, se ujemata. Ker poleg tega za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $x \in o_f(x)$, je množica $\mathcal{O}_f$ vseh orbital elementa f pokritje realne osi z disjunktnimi posplošenimi intervali. Zato lahko množico $\mathcal{O}_f$ uredimo s predpisom

$$I \prec J \iff x < y \quad \forall x \in I, \quad \forall y \in J.$$

Brez težav vidimo, da relacija $\prec$ strogo linearno ureja $\mathcal{O}_f$.

Pri obravnavi edink grupe $A(\mathbb{R})$ si bomo pomagali s kriterijem za konjugiranost avtomorfizmov. Element g grupe $A(\mathbb{R})$ je *konjugiran* elementu $f \in A(\mathbb{R})$, kadar obstaja tak $h \in A(\mathbb{R})$, da je $g = h^{-1}fh$. Konjugiranost je ekvivalenčna relacija. Če je G edinka grupe $A(\mathbb{R})$ in f pripada G , potem tudi vsi elementi, ki so konjugirani g , ležijo v G . Oglejmo si zdaj omenjeni kriterij konjugiranosti.

Trditev 1. Za elementa $f, g \in A(\mathbb{R})$ sta ekvivalentni naslednji izjavi:

- (a) f in g sta konjugirana;
- (b) obstaja bijektivna preslikava $\varphi : \mathcal{O}_g \rightarrow \mathcal{O}_f$, ki ohranja urejenost, tj.

$$I, J \in \mathcal{O}_g, \quad I \prec J \implies \varphi(I) \prec \varphi(J),$$

pozitivne orbitale preslika v pozitivne orbitale, negativne v negativne in točkaste v točkaste.

Dokaz. (a) $\implies$ (b). Naj bo $g = h^{-1}fh$, $h \in A(\mathbb{R})$. Za vsako orbitalo $o_g(x)$ postavimo

$$\varphi(o_g(x)) = \{h(y) : y \in o_g(x)\}.$$

Ker sta neenakosti $g^k(x) \leq y \leq g^l(x)$ ekvivalentni neenakostma

$$f^k h(x) = h g^k(x) \leq h(y) \leq h g^l(x) = f^l h(x),$$

velja $\varphi(o_g(x)) = o_f(h(x))$. Od tod sledi, da je preslikava $\varphi : \mathcal{O}_g \rightarrow \mathcal{O}_f$ dobro definirana in da ustreza pogoju v trditvi.

(b) $\implies$ (a). Naj bo izpolnjen pogoj (b). Konstruirali bomo tak avtomorfizem h , da bo $f = h^{-1}gh$. Vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R}$.

Če je $g(x) = x$, je orbitala $o_g(x) = \{x\}$ točkasta. Zaradi (b) je takšna tudi orbitala $\varphi(o_g(x))$. Torej je $\varphi(o_g(x)) = \{y\}$ za ustrezen y . V tem primeru postavimo $h(x) = y$.

Naj bo zdaj $g(x) > x$. Potem sta orbitali $o_g(x)$ in $\varphi(o_g(x)) = o_f(y)$ pozitivni, torej je $f(y) > y$. Zato obstaja naraščajoča bijekcija $u_0 : [x, g(x)] \rightarrow [y, f(y)]$. Od tod sledi, da so tudi preslikave

$$u_m = f^m u_0 g^{-m} : [g^m(x), g^{m+1}(x)] \rightarrow [f^m(y), f^{m+1}(y)], \quad m \in \mathbb{Z},$$

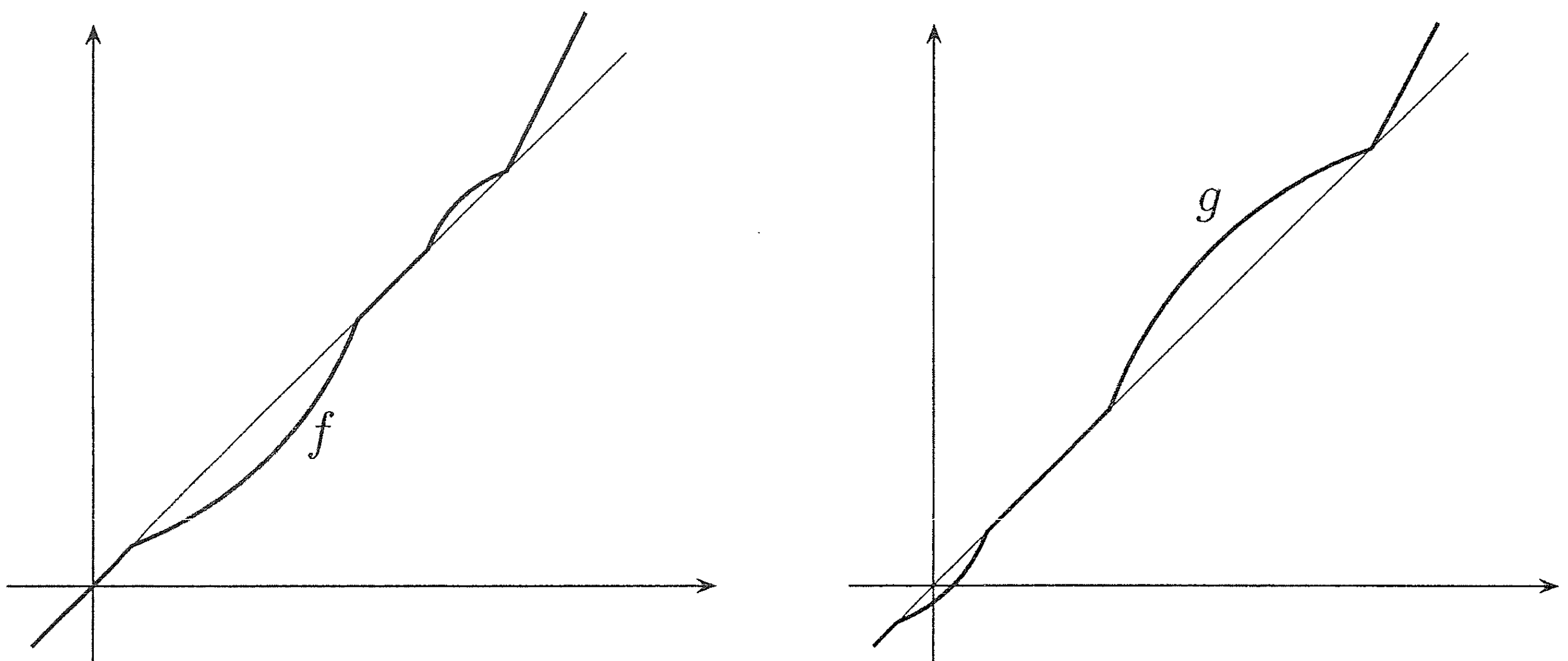
naraščajoče bijekcije. Ker za vsak $m \in \mathbb{Z}$ velja $g^m(x) < g^{m+1}(x)$, $f^m(x) < f^{m+1}(x)$ in

$$u_m g^{m+1}(x) = f^{m+1}(y) = u_{m+1} g^{m+1}(x),$$

preslikave u_m lahko „zlepimo“ in tako dobimo del strogo naraščajoče funkcije h , ki $o_g(x)$ preslika bijektivno na $o_f(y)$. Ker za vsak $z \in [g^m(x), g^{m+1}(x)]$ velja $h(z) = u_m(z) \in [f^m(y), f^{m+1}(y)]$ in je $g(z) \in [g^{m+1}(x), g^{m+2}(x)]$, velja tudi

$$hg(z) = u_{m+1}g(z) = fu_m(z) = fh(z). \quad (1)$$

Podobno opredelimo vrednosti funkcije h na negativnih orbitalah avtomorfizma g . Ker φ ohranja urejenost $\prec$, je h avtomorfizem. Iz (1) sledi, da je $f = h^{-1}gh$, torej velja (a). ■



Slika 2. Avtomorfizma f in g sta konjugirana.

Posledica 2. Grupa $A(\mathbb{R})$ je deljiva: za vsak $f \in A(\mathbb{R})$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $g \in A(\mathbb{R})$, da je $g^n = f$.

Dokaz. Avtomorfizma f in f^n imata isto množico orbital. Ker identična preslikava φ te množice ustreza pogoju trditve 2, sta avtomorfizma f in f^n konjugirana. Torej obstaja tak $h \in A(\mathbb{R})$, da je $f^n = h^{-1}fh$. Za avtomorfizem $g = hfh^{-1}$ velja $g^n = hf^n h^{-1} = f$. ■

Grupa $A(\mathbb{R})$ je podgrupa simetrične grupe $S(\mathbb{R})$ vseh bijekcij realne osi. Dobro je znano preprosto dejstvo, da je grupa $S(\mathbb{R})$ nekomutativna in da ima celo trivialen center. Podobno je tudi z grupo $A(\mathbb{R})$.

Trditev 3. Grupa $A(\mathbb{R})$ ima trivialen center.

Dokaz. Naj bo $f \in A(\mathbb{R}) \setminus \{e\}$ in x_0 tako realno število, da je $f(x_0) \neq x_0$. Konstruirajmo avtomorfizem $g \in A(\mathbb{R})$, ki ne komutira z f . Postavimo $y_0 = f(x_0)$. Kadar je $x_0 < y_0$, imamo $f(x_0) < f(y_0)$ in zato $x_0 < f(y_0)$, kadar pa je $y_0 < x_0$, velja $f(y_0) < f(x_0)$ in tedaj $f(y_0) < x_0$. V obeh primerih je smerni količnik premice, ki poteka skozi točki (x_0, x_0) in $(y_0, f(y_0))$ pozitiven, zato obstaja tak avtomorfizem g , da je $g(x_0) = x_0$ in $g(y_0) = f(y_0)$. Ker $x_0 \neq y_0$, od tod sledi

$$fg(x_0) = f(x_0) \neq f(y_0) = g(y_0) = gf(x_0),$$

torej f ne komutira z g in zato ne leži v centru grupe $A(\mathbb{R})$. ■

3. Edinke grupe avtomorfizmov

Zaznamujmo z $A_l(\mathbb{R})$ množico avtomorfizmov iz grupe $A(\mathbb{R})$ z navzdol omejenimi nosilci, z $A_u(\mathbb{R})$ množico avtomorfizmov z navzgor omejenimi nosilci, z $A_b(\mathbb{R})$ pa množico avtomorfizmov z omejenimi nosilci. Očitno med njimi velja zveza $A_b(\mathbb{R}) = A_l(\mathbb{R}) \cap A_u(\mathbb{R})$. Podmnožice $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ grupe $A(\mathbb{R})$ so zaprte za množenje in invertiranje, torej so njene podgrupe. Precej več o njih zvemo iz naslednjega rezultata.

Lema 4. *Podgrupe $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ so edinke grupe $A(\mathbb{R})$. Vsaka edinka katerekoli od teh grup je edinka grupe $A(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Naj $f \in A_l(\mathbb{R})$, $h \in A(\mathbb{R})$ in $f(x) = x$ za vsak $x \leq x_0$. Potem za vsak $x \leq h^{-1}(x_0)$ velja $h(x) \leq x_0$ in tedaj $fh(x) = h(x)$ ter $h^{-1}fh(x) = x$. Zato $h^{-1}fh \in A_l(\mathbb{R})$, torej je $A_l(\mathbb{R})$ edinka. Podobno vidimo, da sta tudi $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ edinki.

Naj bo G edinka grupe $A_l(\mathbb{R})$, $g \in G$ in $h \in A(\mathbb{R})$. Ker $g \in A_l(\mathbb{R})$, obstaja tak x_0 , da je $g(x) = x$ za vsak $x \leq x_0$. Postavimo $s = h^{-1}(x_0)$, izberimo število $r < \min\{x_0, s\}$ in avtomorfizem w , tako da je $w(r) = r$ in $w(s) = x_0$. Potem je preslikava h_1 , definirana s predpisom

$$h_1(x) = \begin{cases} x, & x \leq r \\ w(x), & r < x < s \\ h(x), & x \geq s \end{cases},$$

avtomorfizem, ki pripada $A_l(\mathbb{R})$. Brez težav se lahko prepričamo, da $u = hh_1^{-1}$ deluje na poltraku $[x_0, \infty)$ kot identiteta. Zato velja $u^{-1}gu = g$ in tedaj $h^{-1}gh = h_1^{-1}gh_1$. Ker je G edinka grupe $A_l(\mathbb{R})$, od tod dobimo $h^{-1}gh \in G$, torej je G tudi edinka grupe $A(\mathbb{R})$. Podobno obravnavamo tudi druge primere. ■

Množice $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ so zaprte za operaciji $\vee$ in $\wedge$, torej so podmreže mreže $A(\mathbb{R})$. Poleg tega so *urejenostno konveksne*: Če sta avtomorfizma f , g v eni od teh množic in velja $f \leq h \leq g$, $h \in A(\mathbb{R})$, potem je tudi h v tej množici. Združimo ti dve lastnosti v definicijo:

Podmnožica mreže $A(\mathbb{R})$ je *strnjena*, kadar je njena podmreža in je urejenostno konveksna.

Podgrupe $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ grupe $A(\mathbb{R})$ so torej strnjene. Za ugotavljanje strnjenosti podgrupe je uporaben naslednji kriterij, ki velja tudi v splošnih mrežno urejenih grupah.

Lema 5. *Podgrupa G grupe $A(\mathbb{R})$ je strnjena natanko takrat, kadar sta izpolnjena pogoja:*

- (a) za vsak $g \in G$ tudi $g \vee e \in G$;
- (b) če za $f \in A(\mathbb{R})$ velja $e \leq f \leq g$, $g \in G$, potem $f \in G$.

Dokaz. Strnjena podgrupa očitno izpolnjuje oba pogoja.

Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da G izpolnjuje (a) in (b). Vzemimo $g_1, g_2 \in G$ in si najprej oglejmo preprosto enakost $g_1 \vee g_2 = (g_1 g_2^{-1} \vee e) g_2$. Zaradi (a) iz nje lahko sklepamo, da $g_1 \vee g_2 \in G$. Od tod s pomočjo zveze $g_1 \wedge g_2 = (g_1^{-1} \vee g_2^{-1})^{-1}$ vidimo, da tudi $g_1 \wedge g_2 \in G$, torej je G podmreža. Zdaj predpostavimo, da velja $g_1 \leq f \leq g_2$, $f \in A(\mathbb{R})$. Potem je $e \leq f g_1^{-1} \leq g_2 g_1^{-1}$, od koder zaradi (b) sledi $f g_1^{-1} \in G$ in tedaj $f \in G$. Grupa G je torej urejenostno konveksna. ■

Lema 6. Vse edinke grupe $A(\mathbb{R})$ so strnjene.

Dokaz. Naj bo G edinka grupe $A(\mathbb{R})$. Za dokaz urejenostne konveksnosti predpostavimo, da velja $e \leq f \leq g \in G$. Potem je $e \leq g \leq f g \leq g^2$, od tod pa brž sledi, da sta za vsak $x \in \mathbb{R}$ ekvivalentni neenakosti $g(x) > x$ in $f g(x) > x$. Torej je $\mathcal{O}_g = \mathcal{O}_{fg}$, identična preslikava $\varphi : \mathcal{O}_g \rightarrow \mathcal{O}_{fg}$ pa ustreza pogoju (b) trditve 1. Zato obstaja tak $h \in A(\mathbb{R})$, da je $f g = h^{-1} g h$. Ker $h^{-1} g h \in G$ in $g^{-1} \in G$, tudi $f = (h^{-1} g h) g^{-1} \in G$, torej je grupa G po lemi 5 urejenostno konveksna.

Dokažimo zdaj, da je G podmreža $A(\mathbb{R})$. Vzemimo poljuben $g \in G$ in s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & g(x) \leq x \\ g^2(x), & g(x) > x \end{cases}$$

opredelimo avtomorfizem f . Potem je $\mathcal{O}_g = \mathcal{O}_f$, identična preslikava $\varphi : \mathcal{O}_g \rightarrow \mathcal{O}_f$ pa ustreza pogoju (b) trditve 1. Avtomorfizma f in g sta torej konjugirana, zato $f \in G$ in tedaj $g^{-1} f \in G$. Kratek račun pokaže, da je $g^{-1} f = g \vee e$, torej $g \vee e \in G$. Po lemi 5 je G podmreža. ■

V grupi $A(\mathbb{R})$ (kot tudi v vsaki mrežno urejeni grupi) lahko definiramo pojem absolutne vrednosti. Za vsak $f \in A(\mathbb{R})$ postavimo $|f| = f \vee f^{-1}$. Očitno je

$$|f| \geq e, \quad e \leq f \vee e \leq |f| \text{ in } e \leq f^{-1} \vee e \leq |f|.$$

Od tod z uporabo enakosti $f = (f \vee e)(f^{-1} \vee e)^{-1}$ brez težav dokažemo naslednjo trditev:

Za strnjeno podgrupo $G \subseteq A(\mathbb{R})$ in vsak $f \in A(\mathbb{R})$ velja ekvivalenca $f \in G \iff |f| \in G$.

Lema 7. Naj bo G edinka grupe $A(\mathbb{R})$.

(a) Če $G \not\subseteq A_u(\mathbb{R})$, potem $A_l(\mathbb{R}) \subseteq G$.

(b) Če $G \not\subseteq A_l(\mathbb{R})$, potem $A_u(\mathbb{R}) \subseteq G$.

Dokaz. (a). Ker je po lemi 6 edinka G strnjena, z uporabo trditve tik pred lemo 7 vidimo, da zadošča dokazati implikacijo

$$\exists g : e \leq g \in G \setminus A_u(\mathbb{R}), \quad e \leq f \in A_l(\mathbb{R}) \implies f \in G. \quad (2)$$

Naj bo torej izpolnjena leva stran implikacije (2). Potem obstaja tak $y_0 \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = x$ za vsak $x \leq y_0$. Najprej privzemimo, da je množica negibnih

točk avtomorfizma g navzgor omejena in z x_0 označimo kako njeno zgornjo mejo. Potem je $g(x) > x$ za vsak $x > x_0$. Izberimo avtomorfizem h , ki y_0 preslika v x_0 , in postavimo $g_1 = h^{-1}gh$. Potem za vsak $x \geq y_0$ velja $h(x) \geq h(y_0) = x_0$, zato $gh(x) > h(x)$ in tedaj $g_1(x) > x$. Če je $g_1(x) = x$, od tod sledi $x < y_0$ in zato $fg_1(x) = f(x) = x$. Če pa je $g_1(x) > x$, velja $fg_1(x) > f(x) \geq x$. Od tod vidimo, da je $\mathcal{O}_{fg_1} = \mathcal{O}_{g_1}$ in da identična preslikava φ te množice ustreza pogoju (b) trditve 1. Avtomorfizma fg_1 in g_1 sta torej konjugirana. Ker $g_1 \in G$ in je G edinka, tudi $fg_1 \in G$. Iz očitne neenakosti $e \leq f \leq fg_1$ zaradi strnjenosti grupe G sledi $f \in G$.

Predpostavimo zdaj, da množica negibnih točk avtomorfizma g ni navzgor omejena. Potem obstajajo taki intervali $[x_j, y_j]$, $j \in \mathbb{N}$, da je $g(x) > x$ za vsak $x \in [x_j, y_j]$ in velja $x_j < y_j < x_{j+1}$ za vsak $j \in \mathbb{N}$. Izberimo avtomorfizem h , ki ustreza pogoju

$$h(x_j) = y_j, \quad h(y_j) = x_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N};$$

njegov graf je lahko zlepek daljic od (x_j, y_j) do (y_j, x_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots$. Postavimo $g_1 = h^{-1}gh$. Če $x \in [y_j, x_{j+1}]$, potem $h(x) \in [x_{j+1}, y_{j+1}]$, zato je $gh(x) > h(x)$ in tedaj $g_1(x) > x$. Ker vsak $x \geq x_1$ leži v enem od intervalov $[x_j, y_j]$ ali v enem od intervalov $[y_j, x_{j+1}]$, za takšne x velja $gg_1(x) > x$. Po predpostavki $g \in G$, ker je G edinka tudi $g_1 \in G$ in tedaj $gg_1 \in G$. Iz prvega dela dokaza zdaj sledi $f \in G$.

Točko (b) dokažemo podobno. ■

Ponovimo definicijo iz teorije grup. Grupa G je *enostavna*, kadar nima nobene netrivialne edinke, različne od G .

Trditev 8. *Grupa $A_b(\mathbb{R})$ je enostavna.*

Dokaz. Naj bo G netrivialna edinka grupe $A_b(\mathbb{R})$, $e \leq g \in G \setminus \{e\}$ in $e \leq f \in A_b(\mathbb{R})$. Izberimo x_0 , tako da je $y_0 = g(x_0) > x_0$, interval $[x_1, y_1]$ pa naj vsebuje nosilec avtomorfizma f . Naj bo $h \in A_b(\mathbb{R})$ tak avtomorfizem, da je $h(x_0) = x_1$ in $h(y_0) = y_1$. Dokažimo, da je potem $h^{-1}fh \leq g$.

Najprej vzemimo $x \in (x_0, y_0)$. Potem je $h(x) \leq h(y_0) = y_1$, zato $fh(x) \leq f(y_1) = y_1$ in tedaj

$$h^{-1}fh(x) \leq h^{-1}(y_1) = y_0 = g(x_0) < g(x).$$

Če je $x \leq x_0$, velja $h(x) \leq h(x_0) = x_1$, zato $fh(x) = h(x)$ in tedaj $h^{-1}fh(x) = x$. Podobno vidimo, da za vsak $x \geq y_0$ velja $h^{-1}fh(x) = x$.

Ugotovili smo, da je $e \leq h^{-1}fh \leq g \in G$. Ker je grupa G po lemi 4 edinka v $A(\mathbb{R})$ in zato po lemi 6 strnjena, $h^{-1}fh \in G$ in nato še $f \in G$. Edinka G torej vsebuje vse pozitivne elemente grupe $A_b(\mathbb{R})$ in je tedaj enaka $A_b(\mathbb{R})$. ■

Izrek 9. *Edine prave netrivialne edinke grupe $A(\mathbb{R})$ so $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Po lemi 4 so $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ edinke.

Naj bo G netrivialna edinka grupe $A(\mathbb{R})$, različna od $A_l(\mathbb{R})$ in $A_u(\mathbb{R})$. Najprej predpostavimo, da je $G \subseteq A_l(\mathbb{R})$. Potem $A_l(\mathbb{R}) \not\subseteq G$ in tedaj po lemi 7 (a) $G \subseteq A_u(\mathbb{R})$. Torej je $G \subseteq A_l(\mathbb{R}) \cap A_u(\mathbb{R}) = A_b(\mathbb{R})$, zato po trditvi 8 velja $G = A_b(\mathbb{R})$.

Podobno ugotovimo, da iz predpostavke $G \subseteq A_u(\mathbb{R})$ sledi $G = A_b(\mathbb{R})$.

Če $G \not\subseteq A_l(\mathbb{R})$ in $G \not\subseteq A_u(\mathbb{R})$, potem po lemi 7 edinka G vsebuje $A_l(\mathbb{R}) \cup A_u(\mathbb{R})$. Dokažimo, da je potem $G = A(\mathbb{R})$. Zadostuje ugotoviti, da $A_l(\mathbb{R}) \cup A_u(\mathbb{R})$ generira grupo $A(\mathbb{R})$. Vzemimo poljuben $f \in A(\mathbb{R})$ in izberimo $x_0 > |f(0)|$ ter avtomorfizem u , tako da je $u(0) = f(0)$ in $u(x_0) = x_0$. Potem predpis

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ u(x), & 0 < x < x_0 \\ x, & x \geq x_0 \end{cases}$$

določa $h \in A_u(\mathbb{R})$. Avtomorfizem $fh^{-1} \in A_l(\mathbb{R})$ ima nosilec navzdol omejen z 0. Ker velja $f = (fh^{-1})h$, smo poljuben $f \in A(\mathbb{R})$ zapisali kot produkt elementov iz $A_l(\mathbb{R})$ in $A_u(\mathbb{R})$. ■

Izrek 10. *Kvocijentne grupe $A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R})$, $A(\mathbb{R})/A_u(\mathbb{R})$, $A_l(\mathbb{R})/A_b(\mathbb{R})$ in $A_u(\mathbb{R})/A_b(\mathbb{R})$ so enostavne in med seboj izomorfne.*

Dokaz. Za vsak $f \in A(\mathbb{R})$ zaznamujmo z f^* avtomorfizem, definiran s predpisom $f^*(x) = -f(-x)$. Brez težav se lahko prepričamo, da je preslikava

$$\Phi : A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R}) \rightarrow A(\mathbb{R})/A_u(\mathbb{R}), \quad \Phi(fA_l(\mathbb{R})) = f^*A_u(\mathbb{R}), \quad f \in A(\mathbb{R}),$$

izomorfizem grup.

Oglejmo si zdaj preslikavo

$$\Psi : A_u(\mathbb{R})/A_b(\mathbb{R}) \rightarrow A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R}), \quad \Psi(fA_b(\mathbb{R})) = fA_l(\mathbb{R}), \quad f \in A_u(\mathbb{R}).$$

Ta je očitno homomorfizem grup. Ker velja

$$\begin{aligned} \ker \Psi &= \{fA_b(\mathbb{R}) : fA_l(\mathbb{R}) = A_l(\mathbb{R}), f \in A_u(\mathbb{R})\} \\ &= \{fA_b(\mathbb{R}) : f \in A_l(\mathbb{R}) \cap A_u(\mathbb{R}) = A_b(\mathbb{R})\} = \{A_b(\mathbb{R})\}, \end{aligned}$$

je Ψ injekcija. Dokažimo, da je Ψ surjekcija. V ta namen vzemimo poljuben $fA_l(\mathbb{R}) \in A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R})$, $f \in A(\mathbb{R})$, in razcepimo f kot pri dokazu izreka 9 v produkt $f = f_1f_2$, $f_1 \in A_l(\mathbb{R})$, $f_2 \in A_u(\mathbb{R})$. Potem zaradi $ff_2^{-1} = f_1 \in A_l(\mathbb{R})$ velja $f_2A_l(\mathbb{R}) = fA_l(\mathbb{R})$, torej za $f_2A_b(\mathbb{R}) \in A_u(\mathbb{R})/A_b(\mathbb{R})$ velja $\Psi(f_2A_b(\mathbb{R})) = fA_l(\mathbb{R})$. Podobno najdemo tudi izomorfizem med grupama $A_l(\mathbb{R})/A_b(\mathbb{R})$ in $A(\mathbb{R})/A_u(\mathbb{R})$.

Dokažimo še, da je grupa $A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R})$ enostavna. Naj bo G edinka grupe $A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R})$, $\pi : A(\mathbb{R}) \rightarrow A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R})$ pa kanonična projekcija. Potem je $\pi^{-1}(G)$ edinka grupe $A(\mathbb{R})$, ki zaradi enakosti $\ker \pi = A_l(\mathbb{R})$ vsebuje $A_l(\mathbb{R})$. Po izreku 10 je $\pi^{-1}(G)$ bodisi $A_l(\mathbb{R})$ bodisi $A(\mathbb{R})$. V prvem primeru je grupa G trivialna, v drugem pa enaka $A(\mathbb{R})/A_l(\mathbb{R})$. ■

Oglejmo si še razširitev grupe $A(\mathbb{R})$. Množica vseh zveznih bijektivnih preslikav realne osi nase, opremljena z operacijo komponiranja, je grupa; zaznamovali jo bomo z $S_c(\mathbb{R})$. V grupi $S_c(\mathbb{R})$ so natanko vse strogo monotone funkcije, zato je $A(\mathbb{R})$ njena podgrupa. Dokažimo, da ima $S_c(\mathbb{R})$ trivialen center. V ta namen vzemimo od enote različen element f in predpostavimo, da leži v centru grupe $S_c(\mathbb{R})$. Iz trditve 3 sledi, da $f \notin A(\mathbb{R})$, torej je funkcija f strogo padajoča. To pa nasprotuje dejstvu, da f komutira z avtomorfizmom $g : x \mapsto x + 1$, saj bi v tem primeru veljalo $f(x + 1) = f(x) + 1 > f(x)$.

Zlahka se prepričamo, da je $A(\mathbb{R})$ edinka grupe $S_c(\mathbb{R})$ in da ima indeks 2 v njej. Poiščimo še vse druge edinke te grupe. Prvi kandidati so seveda edinke grupe $A(\mathbb{R})$. Ni težko videti, da je podgrupa $A_b(\mathbb{R})$ res edinka grupe $S_c(\mathbb{R})$, podgrupi $A_l(\mathbb{R})$ in $A_u(\mathbb{R})$ pa ne. Pri dokazu, da $S_c(\mathbb{R})$ nima drugih netrivialnih edink, si bomo pomagali z naslednjim rezultatom.

Lema 11. *Naj bo H edinka grupe $S_c(\mathbb{R})$ in naj obstaja $h \in H \setminus A(\mathbb{R})$. Potem ima edinka $H_A = H \cap A(\mathbb{R})$ indeks 2 v grupi H , za vsak $g \in S_c(\mathbb{R})$ pa velja $ghH_A = hgH_A$.*

Dokaz. Ker $h^{-1} \in H \setminus A(\mathbb{R})$, za vsak $f \in H \setminus A(\mathbb{R})$ velja $h^{-1}f \in H$. Kompozitum padajočih bijekcij $h^{-1}f$ narašča, zato $h^{-1}f \in H_A$. Od tod dobimo inkluzijo $H \setminus A(\mathbb{R}) \subseteq hH_A$, nasprotna inkluzija pa je očitna. Torej velja $H \setminus A(\mathbb{R}) = hH_A$, odkoder sledi prvi del leme in s tem tudi enakost $H = H_A \cup hH_A$. Ker je $gH = Hg$ in $gH_A = H_Ag$, velja tudi $ghH_A = hH_Ag = hgH_A$. ■

Izrek 12. *Edini pravi netrivialni edinki simetrične grupe $S_c(\mathbb{R})$ sta $A(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$.*

Dokaz. $A(\mathbb{R})$ in $A_b(\mathbb{R})$ sta očitno edinki grupe $S_c(\mathbb{R})$.

Naj bo H netrivialna edinka grupe $S_c(\mathbb{R})$, različna od $A(\mathbb{R})$. Najprej predpostavimo, da je H vsebovana v $A(\mathbb{R})$. Potem je seveda H edinka v $A(\mathbb{R})$, zato se po izreku 10 ujema z eno od grup $A_l(\mathbb{R})$, $A_u(\mathbb{R})$, $A_b(\mathbb{R})$. Ker $A_l(\mathbb{R})$ in $A_u(\mathbb{R})$ nista edinki grupe $S_c(\mathbb{R})$, velja $H = A_b(\mathbb{R})$.

Naj zdaj H ne bo vsebovana v $S_c(\mathbb{R})$. Ker je $H_A = H \cap A(\mathbb{R})$ edinka grup $S_c(\mathbb{R})$ in $A(\mathbb{R})$, je H_A ena od grup $A(\mathbb{R})$, $A_b(\mathbb{R})$, $\{e\}$. Vzemimo poljuben $h \in H \setminus A(\mathbb{R})$. Če je $H = A(\mathbb{R})$, z uporabo leme dobimo

$$H = H_A \cup hH_A = A(\mathbb{R}) \cup hA(\mathbb{R}) = S_c(\mathbb{R}).$$

Dokažimo, da drugi dve možnosti nista mogoči. V obeh primerih po lemi za vsak $g \in S_c(\mathbb{R})$ velja $ghH_A = hgH_A$. Če je $H_A = \{e\}$, h leži v centru grupe $S_c(\mathbb{R})$. Ker je ta trivialen, smo prišli v protislovje z izbiro elementa h . Če pa je $H_A = A_b(\mathbb{R})$, vzemimo translacijo $g : x \mapsto x + 1$ iz $S_c(\mathbb{R})$ in upoštevajmo, da $gh \in hgA_b(\mathbb{R})$. Potem za dovolj velik $x \in \mathbb{R}$ velja $h(x) + 1 = h(x + 1)$ in tedaj $h(x) < h(x + 1)$. Ker $h \notin A(\mathbb{R})$, to ni mogoče. ■

LITERATURA

- [1] M. R. Darnell, *Theory of lattice ordered groups*, Marcel Dekker, New York, Basel, Hongkong, 1995.
- [2] W. C. Holland, *The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set*, Michigan Math. J **10** (1963), 399–408.
- [3] B. Lavrič, *Delno urejene grupe in delno urejeni kolobarji*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993.

VESTI

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1998¹

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 60 novih članov. Društvo je zapustilo 26 članov. Umrli so 3 člani. Novi člani društva so:

1847. Berk Aljoša	1877. Likavec Kristina
1848. Blaževič Aziza	1878. Lojevec Mrvič Vida
1849. Bone Jerneja	1879. Lorenc Gregor
1850. Bregar Kristina	1880. Mahnič Barbka
1851. Bržan Irena	1881. Makovec Martina
1852. Centa Nataša	1882. Marolt Angela
1853. Cugelj Marjeta	1883. Maurer Roman
1854. Čeč Eva	1884. Medved Jadranka
1855. Čepič Mojca	1885. Mesarič Vladimir
1856. Čičak Stipan	1886. Mrak Irja
1857. Dolensšek Marko	1887. Nanut Maja
1858. Dušak Nevenka	1888. Perman Mihael
1859. Fakin Milan	1889. Peterlin Primož
1860. Gazvoda Mojca	1890. Petrica Marjeta
1861. Godnič Evgenija	1891. Pugelj Jelka
1862. Gornik Lidija	1892. Rajh Sonja
1863. Gregori Ivko	1893. Repolusk Samo
1864. Gulič Tatjana	1894. Slapničar Vesna
1865. Hiter Matjaž	1895. Smej Gabrijela
1866. Hočevan Andreja	1896. Starešinič Ticijana
1867. Intihar Mojca	1897. Trampuš Mojca
1868. Jež Andreja	1898. Ujčič Milena
1869. Kaferle Jožica	1899. Velak Rebeka
1870. Kandus Milojka	1900. Vencelj Matjaž
1871. Kastelic Pavel	1901. Vidmar Barbi
1872. Kejžar Magdalena	1902. Zevnik Meta
1873. Klokočovnik Alenka	1903. Zor Tine
1874. Klopčič Jožef	1904. Žagar Marija
1875. Kodila Franc	1905. Žagar Saša
1876. Ličer Matjaž	1906. Žuliček Helena

Simon Vrečar

¹ Novi člani za leto 1997 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **45** (1997), 170.

IZREK O POZIVITNOSTI

JAKA CIMPRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 14Pxx

Med dokazom Stenglovega izreka o pozitivnosti se seznanimo z osnovnimi pojmi realne algebre in semialgebraične geometrije.

POSITIVSTELLENSATZ

We invite the reader to real algebra and semialgebraic geometry and prove Stengle's Positivstellensatz.

1. Uvod

Na mednarodnem kongresu matematikov leta 1900 v Parizu je David Hilbert predstavil 23 problemov. Sedemnajsti problem sprašuje, ali je vsak realen polinom v več spremenljivkah, ki je povsod nenegativen, enak vsoti kvadratov racionalnih funkcij. Problem je rešil Emil Artin leta 1927. V dokazu je uporabil Artin-Schreierjevo teorijo formalno realnih obsegov. Zanimanje za to področje je spet oživel v šestdesetih letih z razvojem algebraične teorije kvadratnih form in realne algebraične geometrije. Artin-Schreierjevo teorijo so posplošili na formalno realne kolobarje in postala je del t.i. realne algebre.

Drugi pomemben Hilbertov prispevek k razvoju algebre in geometrije je njegov izrek o ničlah (Nullstellensatz), ki povezuje komutativno algebro in klasično algebraično geometrijo (glej [6, stran 133, izrek 1.8]). Klasična algebraična geometrija se ukvarja s kompleksnimi algebraičnimi množicami, torej z rešitvami sistemov polinomskih enačb, v katerih nastopajo kompleksni polinomi v več spremenljivkah. Če kompleksne polinome nadomestimo z realnimi, dobimo realne algebraične množice. Z njimi se ukvarja realna algebraična geometrija. Leta 1969 sta Dubois in Risler dokazala realni izrek o ničlah (Real Nullstellensatz), ki povezuje realno algebro ter realno algebraično geometrijo in je popolna analogija Hilbertovega izreka o ničlah.

Semialgebraična geometrija se ukvarja z množicami, ki so rešitve sistemov polinomskih enačb in neenačb, v katerih nastopajo realni polinomi v več spremenljivkah. Takim množicam pravimo semialgebraične množice in vključujejo tako realne algebraične množice kot končne politopske komplekse. Leta 1974 je Stengle dokazal izrek o pozitivnosti (Positivstellensatz), ki je skupna posplošitev sedemnajstega Hilbertovega problema in realnega izreka o ničlah in povezuje realno algebro s semialgebraično geometrijo. Standardne monografije o semialgebraični geometriji so navedene v literaturi.

Namen tega članka je predstaviti elementarni del dokaza Stenglovega izreka o pozitivnosti, ki je zelo eleganten. Neelementarni del se skriva v dokazu Langovega izreka o homomorfizmu. Ta dokaz je razmeroma kratek, vendar uporabi Tarski-Seidenbergov princip, ki v jeziku teorije modelov

formulira lastnost semialgebraičnih množic, da so njihove projekcije na koordinatne hiperravnine spet semialgebraične množice.

2. Algebrajska verzija

Naj bo R poljuben kolobar z enico, R^2 množica kvadratov elementov iz R in ΣR^2 množica končnih vsot elementov iz R^2 . Podmnožica $T \subseteq R$ je *predureditev*, če je

$$T + T \subseteq T, \quad T \cdot T \subseteq T, \quad R^2 \subseteq T.$$

Očitno je množica ΣR^2 najmanjša predureditev na R in R največja predureditev na R . Vsaka predureditev vsebuje enico in ničlo. Označimo

$$T^+ = T \setminus -T, \quad T^- = -T \setminus T, \quad T^0 = T \cap -T, \\ T^e = \{r \in R \mid \exists k \in \mathbb{N} : kr \in T\}.$$

Množici T^0 pravimo *nosilec* predureditve T . Predureditev T je *izolirana*, če je $T = T^e$.

Predureditev T na kolobarju R je *prava*, če $-1 \notin T$. Če na kolobarju R obstaja kaka prava predureditev, potem je tudi predureditev ΣR^2 prava. Pravimo, da je kolobar R *formalno realen*, če je predureditev ΣR^2 prava. Vsak formalno realen kolobar ima karakteristiko nič. To pomeni, da za vsako naravno število n velja $n \cdot 1 \neq 0$. V nasprotnem primeru bi namreč veljalo bodisi $1 = 0$, bodisi bi bil element -1 enak vsoti $n - 1$ kvadratov elementa 1. Podmnožica $P \subseteq R$ je *ureditev*, če je

$$P + P \subseteq P, \quad P \cdot P \subseteq P, \quad P \cup -P = R$$

in je $P \cap -P$ pravi praideal.

Lema 1. *Naj bo R formalno realen kolobar.*

1. *Če je T predureditev na R , potem je T^e izolirana predureditev na R , ki vsebuje T . Če je predureditev T prava, je tudi predureditev T^e prava.*
2. *Če $\mathbb{Q} \subseteq R$, potem je vsaka predureditev na R izolirana.*
3. *Nosilec poljubne izolirane predureditve je ideal.*
4. *Vsaka ureditev je prava izolirana predureditev.*
5. *Za poljubno predureditev T na R in poljuben element $a \in R$ sta tudi množici $T + aT$ in $T - aT$ predureditvi na R , ki vsebujeta T .*

Dokaz. 1. Očitno T^e vsebuje T , torej vsebuje tudi vse kvadrate. Za poljubna $x, y \in T^e$ vzemimo taka $k, l \in \mathbb{N}$, da velja $kx \in T$ in $ly \in T$. Ker je T zaprta za seštevanje, je $kl(x + y) = l(kx) + k(ly) \in T$. Ker je T zaprta za množenje, je $kl(xy) = (kx)(ly) \in T$. Torej je $x + y \in T^e$ in $xy \in T^e$. Ker velja $(T^e)^e = T^e$, je predureditev T^e izolirana. Če $-1 \in T^e$, potem

je $-k \in T$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Ker je T zaprta za seštevanje in vsebuje 1, je $-1 = -k + (k - 1) \in T$.

2. Če je $Q \subseteq R$ in $kr \in T$ za kak $k \in \mathbb{N}$, potem je tudi $k^2r \in T$, saj je T zaprta za seštevanje. Ker T vsebuje vse kvadrate, je $(k^{-1})^2 \in T$. Ker je T zaprta za množenje, je $r = (k^{-1})^2(k^2r) \in T$.

3. Za vsak element $a \in R$ velja $4a = (1 + a)^2 - (1 - a)^2$. Odtod sledi, da je $4(a + (1 - a)^2) = (1 + a)^2 + 3(1 - a)^2 \in T$. Sledi $a + (1 - a)^2 \in T^e$, torej $a \in T^e - T^e$. Če je T izolirana, potem odtod sledi, da je $T - T = R$. Sledi, $RT^0 = (T - T)T^0 \subset T^0$, torej je množica T^0 ideal.

4. Naj bo P poljubna ureditev. Za poljuben $r \in R$ velja bodisi $r \in P$, bodisi $-r \in P$. V obeh primerih je $r^2 \in P$, torej P vsebuje vse kvadrate. Če je $-1 \in P$, potem je $1 \in P^0$. Ker je P^0 pravi ideal, dobimo protislovje $R \subseteq P^0$. Če je $kr \in P$ za neki $k \in \mathbb{N}$ in $r \notin P$, potem je $-r \in P$ in zato $-kr \in P$. Ker je tedaj P^0 praideal, ki vsebuje kr in ne vsebuje r , je $k \in P^0$. Odtod sledi protislovje $-1 = -k + (k - 1) \in P$.

5. Naj bosta $w = s_1 + as_2$ in $z = t_1 + at_2$ poljubna elementa iz $T + aT$. Potem je tudi $w + z = (s_1 + t_1) + a(s_2 + t_2) \in T + aT$ in $wz = (s_1t_1 + a^2s_2t_2) + a(s_1t_2 + s_2t_1) \in T + aT$. Ker je $R^2 \subseteq T \subseteq T + aT$, je $T + aT$ predureditev, ki vsebuje T . ■

Pomen naslednjega rezultata najlažje razložimo, če ga primerjamo z ustreznim rezultatom iz komutativne algebre: *Za vsako multiplikativno množico U in vsak ideal I , disjunkten z U , obstaja tak praideal J , ki vsebuje I in je disjunkten z U .*

Izrek 2. *Naj bo T poljubna predureditev na kolobarju R in $U \subseteq T$ taka multiplikativna množica, da velja $-U \cap T = \emptyset$. Potem obstaja ureditev P , ki vsebuje T in zadošča $-U \cap P = \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{M}$ družina vseh predureditev na R , ki vsebujejo T in ne sekajo $-U$. Družina $\mathcal{M}$ je neprazna, ker vsebuje T . Ker $\mathcal{M}$ zadošča predpostavki Zornove leme, obstaja v $\mathcal{M}$ element P , ki je maksimalen glede na inkluzijo.

Če velja $P \cup -P \neq R$, potem obstaja tak element $a \in R$, da $a \notin P$ in $-a \notin P$. Predureditvi $P + aP$ in $P - aP$ torej strogo vsebujeta predureditev P in zato sekata $-U$. Vzemimo take elemente $u_1, u_2 \in U$ in $p_1, q_1, p_2, q_2 \in P$, da velja $-u_1 = p_1 + aq_1$ in $-u_2 = p_2 - aq_2$. Ko izraza preuredimo in zmnožimo, dobimo $-a^2q_1q_2 = (u_1 + p_1)(u_2 + p_2)$. Odtod sledi protislovje $-u_1u_2 = a^2q_1q_2 + p_1u_2 + u_1p_2 + p_1p_2 \in P$.

Če P^0 ni ideal, potem po točki 3 leme 1 sledi, da $P \neq P^e$. Po točki 1 leme 3 sledi, da je množica P^e predureditev, ki strogo vsebuje P . Po izbiri množice P obstaja tak element $u \in U$, da $-u \in P^e$. Iz $-ku \in P$ sledi protislovje $-u \in P + (k - 1)u \subseteq P + T \subseteq P + P \subseteq P$.

Če ideal P^0 ni praideal, potem obstajata taka elementa $a, b \notin P^0$, da velja $ab \in P^0$. Lahko predpostavimo, da $a, b \notin P$. Ker predureditvi $P + aP$

in $P + bP$ strogo vsebujeta predureditev P , morata sekati $-U$. Vzemimo take elemente $u_1, u_2 \in U$ in $p_1, q_1, p_2, q_2 \in P$, da velja $-u_1 = p_1 + aq_1$ in $-u_2 = p_2 + bq_2$. Odtod sledi $abq_1q_2 = (u_1 + p_1)(u_2 + p_2)$, kar nam da protislovje $-u_1u_2 = -abq_1q_2 + p_1u_2 + u_1p_2 + p_1p_2 \in P$. ■

Množico vseh ureditev na kolobarju R označimo s $\text{Sper } R$ in jo imenujemo *realni spekter* kolobarja R . Množico vseh ureditev na kolobarju R , ki vsebujejo dano predureditev T , označimo s $\text{Sper}_T R$. Naslednja posledica izreka 2 je posplošitev Artin-Schreierjevega izreka za obsege (glej [8], izrek 8.2).

Posledica 3. *Za vsako predureditev T na kolobarju R velja $-1 \notin T$ natanko tedaj, ko je $\text{Sper}_T R \neq \emptyset$. Posebej je $-1 \notin \Sigma R^2$ natanko tedaj, ko $\text{Sper } R \neq \emptyset$.*

Dokaz. V eno smer uporabimo izrek 2 za $U = \{1\}$, v drugo pa upoštevamo, da poljubna ureditev vsebuje ΣR^2 in ne vsebuje -1 . ■

Vsakemu elementu $a \in R$ priredimo funkcijo $\bar{a} : \text{Sper } R \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ s predpisom

$$\bar{a}(P) = \begin{cases} 1 & a \in P^+ \\ 0 & a \in P^0 \\ -1 & a \in P^- \end{cases}$$

Ni težko videti, da velja enakost

$$\overline{ab}(P) = \bar{a}(P)\bar{b}(P), \quad a, b \in R.$$

Naslednja posledica izreka 2 je znana kot (algebrajski) Positivstellensatz.

Posledica 4. *Naj bo T poljubna predureditev na kolobarju R , ki ne vsebuje -1 , in naj bo $a \in R$ poljuben element.*

1. $\bar{a}|_{\text{Sper}_T R} = 0$ natanko tedaj, ko $-a^{2k} \in T$ za neki $k \in \mathbb{N}$.
2. $\bar{a}|_{\text{Sper}_T R} > 0$ natanko tedaj, ko $-1 \in T - aT$.
3. $\bar{a}|_{\text{Sper}_T R} \geq 0$ natanko tedaj, ko $-a^{2k} \in T - aT$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz. 1. Naj bo $U = \{a^{2k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Če za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $-a^{2k} \notin T$, potem je $-U \cap T = \emptyset$. Po izreku 2 obstaja taka ureditev P , ki vsebuje T in ne seka $-U$. Velja $a \notin P^0$. Dokažimo še nasprotno smer ekvivalence. Če $-a^{2k} \in T$ za neki $k \in \mathbb{N}$, potem velja $a^{2k} \in T^0 \subseteq P^0$ za vsako ureditev P , ki vsebuje T . Ker so nosilci ureditev praideali, sledi $a \in P^0$.

2. Če velja $-1 \notin T - aT$, potem obstaja po lemi 1 in izreku 2 neka ureditev P , ki vsebuje $T - aT$. Iz $-a \in P$ sledi $a \notin P^+$. Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da obstaja taka ureditev $P \in \text{Sper}_T R$, da $a \notin P^+$. Potem $a \in -P$, odkoder sledi, da je $T - aT \subseteq P$ in zato $-1 \notin T - aT$.

3. Če velja $-a^{2k} \notin T - aT$ za vsak $k \in \mathbb{N}_0$, potem je $-U \cap T - aT = \emptyset$. Po izreku 2 obstaja taka ureditev P , ki vsebuje $T - aT$ in ne seka $-U$. Odtod sledi $-a \in P$ in $a \notin P^0$, torej $a \notin P$. Dokažimo še nasprotno smer ekvivalence. Če je $-a^{2k} \in T - aT$ za neki naraven k in $a \in -P$ za neko ureditev $P \in \text{Sper}_T R$, potem je $-a^{2k} \in P^0$. Torej iz $-a^{2k} \in T - aT$ sledi $a \in P$. ■

Zanimiva je tudi naslednja posledica izreka 2.

Posledica 5. Naj bo T poljubna predureditev na R , ki ne vsebuje -1 , in naj bosta $a, b \in R$ poljubna elementa. Potem velja $\bar{a}|_{\text{Sper}_T R} = \bar{b}|_{\text{Sper}_T R}$ natanko tedaj, ko $-(a^2 + b^2)^k \in T - abT$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Naj bo $U = \{(a^2 + b^2)^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Če $-(a^2 + b^2)^k \notin T - abT$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, potem je $-U \cap (T - abT) = \emptyset$. Po izreku 2 obstaja taka ureditev P , ki vsebuje $T - abT$ in ne seka $-U$. Odtod sledi $\bar{ab}(P) \leq 0$. Če je $\bar{a}(P) = \bar{b}(P)$, potem je $0 \geq \bar{ab}(P) = \bar{b}^2(P) = \bar{a}^2(P) \geq 0$. Odtod sledi, da je $\bar{a}(P) = \bar{b}(P) = 0$, kar nam da protislovje $-a^2 - b^2 \in P$.

Če $-(a^2 + b^2)^k \in T - abT$ za neki $k \in \mathbb{N}$, potem za vsak $P \in \text{Sper}_T R$ ločimo dve možnosti. Če $-ab \in P$, potem je $T - abT \subseteq P$. Odtod sledi, da $(a^2 + b^2)^k \in P^0$. Zato je $a^2 + b^2 \in P^0$, odkoder po kratkem računu dobimo $a, b \in P^0$. Če je $ab \in P^+$, potem je bodisi $a, b \in P^+$, bodisi $a, b \in P^-$. Torej je v vseh primerih $\bar{a}(P) = \bar{b}(P)$. ■

3. Realen spekter kolobarja polinomov

V tem razdelku nas bo zanimal kolobar polinomov $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Za poljuben element $a \in \mathbb{R}^n$ je množica $P_a := \{h \in A \mid h(a) \geq 0\}$ ureditev na kolobarju A . Oglejmo si preslikavo $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Sper } A$, definirano s $\Phi(a) = P_a$.

Trditev 6. Preslikava Φ je injektivna.

Dokaz. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ taka elementa, da $a \neq b$. Definirajmo $h(x_1, \dots, x_n) := (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2$. Velja $-h \in P_a$ in $-h \notin P_b$. Torej je $P_a \neq P_b$. ■

Za vsak $f \in A$ definirajmo množici $U(f) := \{P \in \text{Sper } A \mid f \in P^+\}$ in $Z(f) := \{P \in \text{Sper } A \mid f \in P^0\}$. Topologiji na $\text{Sper } A$, ki je generirana z množicami oblike $U(f)$, pravimo *Harrisonova topologija*. Topologiji na $\text{Sper } A$, ki je generirana z množicami oblike $U(f)$ in $Z(f)$, pravimo *konstruktibilna topologija*.

Brez dokaza naštejmo osnovne lastnosti obeh topologij. Harrisonova topologija je kompaktna, T_0 , normalna in $\Phi^{-1}(\text{Harrisonova topologija}) = \text{evklidska topologija}$. Konstruktibilna topologija je kompaktna, T_2 , popolnoma nepovezana in $\Phi^{-1}(\text{konstruktibilna topologija}) = \text{diskretna topologija}$.

Izrek 7 (Langov izrek o homomorfizmu, glej [9, Theorem 1.1.2]). Naj bo B poljubna linearno urejena končno generirana komutativna $\mathbb{R}$ -algebra brez deliteljev nič in naj bodo $b_1, \dots, b_k \in B$ strogo pozitivni elementi. Potem obstaja tak homomorfizem $\mathbb{R}$ -algeber $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}$, da velja $\phi(b_1) > 0, \dots, \phi(b_k) > 0$.

Množice oblike $U = Z(f) \cap U(g_1) \cap \dots \cap U(g_k)$, kjer so $f, g_1, \dots, g_k \in A$ poljubni elementi, tvorijo bazo konstruktibilne topologije, zato jim recimo *bazične konstruktibilne množice*. Množicam oblike $\Phi^{-1}(U) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(a) = 0, g_1(a) > 0, \dots, g_k(a) > 0\}$ recimo *bazične semialgebraične množice*. Končnim unijam bazičnih konstruktibilnih množic pravimo *konstruktibilne množice*, končnim unijam bazičnih semialgebraičnih množic pa *semialgebraične množice*. Iz kompaktnosti konstruktibilne topologije sledi, da so konstruktibilne množice ravno odprto-zaprte množice glede na konstruktibilno topologijo.

Posledica 8. Bazična konstruktibilna množica U je neprazna natanko tedaj, ko je množica $\Phi^{-1}(U)$ neprazna.

Dokaz. Naj bo $U = Z(f) \cap U(g_1) \cap \dots \cap U(g_k)$, kjer so $f, g_1, \dots, g_k \in A$ poljubni elementi. Če je množica U neprazna, potem obstaja taka ureditev P na A , da velja $f \in P^0$ in $g_1, \dots, g_k \in P^+$. Algebra $B = A/P^0$ je končno generirana in brez deliteljev nič. Slika $\bar{P}$ ureditve P je pozitiven stožec linearne ureditve na B (glej npr. [8]). Ker so elementi $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k \in B$ strogo pozitivni za $\bar{P}$, obstaja po Langovem izreku tak homomorfizem $\mathbb{R}$ -algeber $\bar{\phi} : B \rightarrow \mathbb{R}$, da velja $\bar{\phi}(\bar{g}_1) > 0, \dots, \bar{\phi}(\bar{g}_k) > 0$. Za vsako točko $a = (\bar{\phi}(\bar{x}_1), \dots, \bar{\phi}(\bar{x}_n)) \in \mathbb{R}^n$ velja $\Phi(a) = \{h \in A \mid h(a) \geq 0\} = \{h \in A \mid \bar{\phi}(h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)) \geq 0\} = \{h \in A \mid \bar{\phi}(\bar{h}) \geq 0\}$. Odtod sledi, da $f \in \Phi(a)^0$ in $g_1, \dots, g_k \in \Phi(a)^+$, torej $\Phi(a) \in U$. Nasprotna smer je očitna. ■

Naslednji izrek opisuje bijektivno korespondenco med semialgebraičnimi množicami na $\mathbb{R}^n$ in konstruktibilnimi množicami na $\text{Sper } A$. Ta bijektivna korespondenca je osnovna zveza med realno algebro in semialgebraično geometrijo.

Izrek 9. Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ poljubna semialgebraična množica.

1. Obstaja natanko ena konstruktibilna množica $S^\# \subseteq \text{Sper } A$, za katero velja $\Phi^{-1}(S^\#) = S$.
2. Množica $\Phi(S)$ je gosta v množici $S^\#$ glede na konstruktibilno topologijo.

Dokaz. Eksistenca množice $S^\#$ sledi iz definicije semialgebraične množice. Če za konstruktibilni množici $U, V \subseteq \text{Sper } A$ velja $\Phi^{-1}(U) = \Phi^{-1}(V)$, potem je množica $\Phi^{-1}(U \triangle V) = \Phi^{-1}(U) \triangle \Phi^{-1}(V)$ prazna. Iz posledice 8 sledi, da je množica $U \triangle V$ prazna, odtod pa sledi $U = V$. S tem je enoličnost dokazana.

Naj bo sedaj U poljubna bazična konstruktibilna množica na $\text{Sper } A$. Če množica U seka množico $S^\#$, potem je po posledici 8 množica $\Phi^{-1}(U \cap S^\#)$ neprazna. Za poljuben element $a \in \Phi^{-1}(U \cap S^\#)$ velja $\Phi(a) \in U \cap \Phi(S)$. Torej U seka tudi $\Phi(S)$. ■

Očitno je $\emptyset^\# = \emptyset$ in $(\mathbb{R}^n)^\# = \text{Sper } A$.

4. Geometrijska verzija

Naj bodo $g_1, \dots, g_k \in A$ dani polinomi, $S = \{a \in \mathbb{R}^n \mid g_1(a) \geq 0, \dots, g_k(a) \geq 0\}$ pripadajoča semialgebraična množica in T najmanjša predureditev na A , ki vsebuje elemente $g_1, \dots, g_k$. Velja

$$T = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_j \subseteq 1, \dots, k} s_{i_1, \dots, i_j} g_{i_1} \cdots g_{i_j} \mid s_{i_1, \dots, i_j} \in \Sigma A^2 \right\}$$

in $S^\# = \text{Sper}_T A$.

Lema 10. *Množica S je neprazna natanko tedaj, ko je predureditev T prava.*

Dokaz. Lema je posledica naslednjih treh trditev. Predureditev T je prava natanko tedaj, ko obstaja neka ureditev P , ki jo vsebuje. Za poljubno ureditev P velja $T \subseteq P$ natanko tedaj, ko $P \in S^\#$. Množica $S^\#$ je neprazna natanko tedaj, ko je množica S neprazna. ■

Izrek 11. *Za poljuben $f \in A$ velja*

1. *(semialgebraični izrek o ničlah) $f|_S = 0$ natanko tedaj, ko $-f^{2k} \in T$ za neki $k \in \mathbb{N}$.*
2. *(izrek o pozitivnosti) $f|_S > 0$ natanko tedaj, ko $-1 \in T - fT$.*
3. *(izrek o nenegativnosti) $f|_S \geq 0$ natanko tedaj, ko $-f^{2k} \in T - fT$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. Dokazujemo tretjo trditev. Dokaz prve in druge je analogen. Trditev $f|_S \geq 0$ je ekvivalentna s trditvijo $\bar{f}(P_a) \geq 0$ za vsak $a \in S$, kar je ekvivalentno s $\bar{f}|_{\Phi(S)} \geq 0$. Glede na konstruktibilno topologijo je funkcija $\bar{f}$ zvezna in množica $\Phi(S)$ gosta v množici $S^\# = \text{Sper}_T A$. Torej je zadnja trditev ekvivalentna s $\bar{f}|_{\text{Sper}_T A} \geq 0$. Tretja trditev sedaj sledi iz tretje trditve v posledici 4. ■

Polinomom $g_1, \dots, g_k \in A$ priredimo realno algebraično množico

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0\}$$

in ideal

$$I = Ag_1 + \dots + Ag_k.$$

$$rr(I) := \{a \in A \mid \exists k \in \mathbb{N} \exists t \in \Sigma A^2 : a^{2k} + t \in I\}$$

je ideal. Imenujemo ga *realni radikal* ideala I . Realni izrek o ničlah je posledica semialgebraičnega izreka o ničlah.

Posledica 12. *Za poljuben element $f \in A$ velja $f|_V = 0$ natanko tedaj, ko je $f \in rr(I)$.*

Dokaz. Množico V lahko zapišemo v obliki $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, -g_1(x) \geq 0, \dots, g_k(x) \geq 0, -g_k(x) \geq 0\}$. Naj bo T' najmanjša predureditev na A , ki vsebuje $\{g_1, -g_1, \dots, g_k, -g_k\}$. Po točki 1 iz trditve 10 velja $f|_V = 0$ natanko tedaj, ko $-f^{2k} \in T'$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Zadošča dokazati enakost $T' = I + \Sigma A^2$. Ker je množica $I + \Sigma A^2$ predureditev in ker vsebuje množico $\{g_1, -g_1, \dots, g_k, -g_k\}$, velja $T' \subseteq I + \Sigma A^2$. Ker je A realna algebra, velja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subseteq A$, torej je predureditev T' izolirana. Po točki 2 leme 1 je $T' - T' = A$. Odtod sledi, da $I = Ag_1 + \dots + Ag_k \subseteq T'g_1 + T'(-g_1) + \dots + T'g_k + T'(-g_k) \subseteq T'$. S tem je dokazano, da $I + \Sigma A^2 \subseteq T'$. ■

Tudi sedemnajsti Hilbertov problem je posledica izreka 11.

Posledica 13. *Za poljuben element $f \in A$ velja $f|_{\mathbb{R}^n} \geq 0$ natanko tedaj, ko obstaja tak $h \in A \setminus \{0\}$, da velja $fh^2 \in \Sigma A^2$.*

Dokaz. Naj bo $S = \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq 0\}$ in $T = \Sigma A^2$. Za poljuben $f \in A$, ki zadošča $f|_S \geq 0$, obstajajo po točki 3 izreka 11 tak $k \in \mathbb{N}$ in taka $s, t \in T$, da velja $-f^{2k} = s - ft$. Če je $t = 0$, potem je $f = 0$ in trditev drži za $h = 1$. Če pa $t \neq 0$, potem trditev drži za $h = t$, saj je $ft^2 = f^{2k}t + st \in \Sigma A^2$. ■

LITERATURA

- [1] C. Andradas, L. Bröcker, J. M. Ruiz, *Constructible sets in Real Geometry*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [2] E. Becker, On the real spectrum of a ring and its application to semialgebraic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **15** (1986), št. 1, 19–60.
- [3] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [4] L. Bröcker, Semialgebraische Geometrie, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **97** (1995), št. 4, 130–156.
- [5] M. Knebusch, C. Scheiderer, *Einführung in die reelle Algebra*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1989.
- [6] T. Košir, B. Magajna, *Transformacije v geometriji*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1997.
- [7] T. Y. Lam, An introduction to real algebra, Rocky Mountain J. Math. **14** (1984), št. 4, 767–814.
- [8] B. Lavrič, *Delno urejene grupe in delno urejeni kolobarji*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1993.
- [9] M. A. Marshall, *Spaces of orderings and abstract real spectra*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

POUČEVANJE FIZIKE IN MATEMATIKA

JANEZ STRNAD

PACS 01.40.-d

Odnos fizike in matematike je v poučevanju fizike še bolj zapleten kot v raziskovanju. Učitelju fizike utegne koristiti, če se zaveda razločkov med fiziko in matematiko.

MATHEMATICS IN PHYSICS EDUCATION

The relation of physics and mathematics is even more complicated in physics education than in research. A physics teacher may benefit by being aware of the distinctions between physics and mathematics.

Uvod

V matematiki in fiziki vidijo nekateri nekakšnega znanstvenega dvojčka. Na to napeljujeta pri nas med drugim Fakulteta za matematiko in fiziko ter Obzornik za matematiko in fiziko. Toda matematika in fizika sta dve zelo različni znanosti. Matematiko štejejo med formalne znanosti in jo pogosto opredelijo kot znanost o strukturah, fizika pa je osnovna znanost o naravi. Odnos fizike in matematike je dokaj zapleten. O vlogi matematike v fizikalnem raziskovanju je veliko različnih mnenj in nekaj jih je zašlo tudi v Obzornik [1]–[3].

„Nekoč je nekdo rekel, da je filozofija zloraba terminologije, ki so jo iznašli prav v ta namen. V istem smislu bi rekel tudi jaz, da je matematika veda spretnih operacij s pojmi in pravili, ki so jih iznašli prav v ta namen. Njen glavni poudarek leži na iznajdbi pojmov.” [1]

„Več kot vem o fiziki, bolj sem prepričan, da ponuja fizika najglobljo uporabo matematike. Matematični problemi in metode, ki so izšli iz fizike, so bili v preteklosti življenjski sok matematike. In še je tako. Problemi, ki jih naskakujejo fiziki, so tudi s stališča matematike silno zanimivi, težki in izzivalni. Mislim, da bi se moralo več matematikov učiti določenih področij fizike in se ukvarjati z njimi. Morali bi uporabiti nove matematične metode na fizikalnih problemih. Fizika je izredno zamotana. Je zelo matematična. Fizikalni občutek na eni strani in matematične metode na drugi so globoka povezava med predmetoma.” [2]

„Če je tako, se morda zazdijo nekatere od nenavadnosti, ki jih raziskujemo, manj nenavadne. Če matematika obravnava strukture, ki so dejanski del naravnega sveta, tako dejanski kot pojmi teorijske fizike, ni tako presenetljivo, da je učinkovito orodje pri raziskovanju dejanskega sveta. Tedaj bi tudi pričakovali, da bo lepota skupna značilnost fizikalnih in matematičnih struktur. Razum se je zagotovo razvil tako, da so mu naravni vzorci prijetni. Temu pogledu je očitno mogoče ugovarjati. Teorijske fizike omejujejo poskusi. Njihove tvorbe morajo biti tudi pravilne, ne samo lepe in učinkovite. Morajo se skladati s poskusi in uspešno napovedovati.” [3]

Eksperimentalni fizik Leon Lederman si je ustvaril sliko piramide znanosti, katere temeljno plast sestavlja matematika [4]. Matematika se opira samo na logiko, ki jo imajo nekateri za njeno vejo. Na matematiko se opira fizika, na matematiko in fiziko pa druge znanosti o naravi, na primer astronomija, geologija, kemija in tako dalje. Fiziki, ki so usmerjeni v teorijo, večinoma mislijo, da je vez med fiziko in matematiko še tesnejša. Za nekatere „fizika brez matematike sploh nima smisla” [5]. V skrajnost gre mnenje, da „so vse, kar imamo [v fiziki], matematični simboli” [6], v drugo pa izjava: „Enačbe so potrebne, če delate knjigovodstvo, ampak so dolgočasni del matematike. Večino zanimivih slik lahko sporočimo z besedami.” [7]

Velik pomen matematike za fiziko izhaja iz zgradbe teorij, ki so osnovni gradniki fizike. Teorijo sestavljajo:

- formalizem, ki ga fizika zajame iz matematike,
- območje dejanskosti z rezultati merjenj pri poskusih in drugimi izkušnjami pri opazovanjih ter
- korespondenčna pravila, ki nekaterim elementom matematičnega formalizma priredijo merljive količine na območju dejanskosti [8]. Teorije ni mogoče izpeljati iz podatkov z območja dejanskosti.

Poleg njih je potrebno še ustvarjalno dejanje, ki ne sodi v fiziko in v katerem se rodi nova zamisel. Na isti vrsti podatkov z območja dejanskosti je mogoče zgraditi več različnih teorij, zato tega območja nekateri nimajo za sestavni del teorije [9]. Zopet drugi poudarjajo, da izvira pomembna razlika med matematiko in fiziko iz tega, da je v matematiki izjava ali pravilna ali nepravilna, na območju dejanskosti v fiziki pa je trditev pravilna ali nepravilna ali pa se ob tistem času ni mogoče odločiti ne za prvo ne za drugo [10].

Čeprav si zaradi zgradbe teorij fizikalnega raziskovanja brez matematike ni mogoče zamisliti, to ne pomeni, da bi ga z matematiko izčrpali, saj obstajata še nabiranje izkušenj pri opazovanjih in pri merjenjih ob poskusih ter ustvarjanje novih zamisli. Zelo pomembna so tudi nepričakovana eksperimentalna odkritja [11]. Nekateri raziskovalci se pri delu bolj oprejo na enačbe in drugi bolj na nazorne predstave in se nova zamisel lahko rodi iz enačbe ali iz nazorne predstave. To vsaj delno pojasni različne izjave o vlogi matematike v fiziki.

Matematika v poučevanju fizike

O vlogi matematike v poučevanju fizike je smiselno razmisliti posebej, ne glede na njeno vlogo v raziskovanju. Za učitelje fizike utegne biti koristno, če si ustvarijo svoj pogled na vlogo matematike v poučevanju fizike. Na poti do tega pogleda lahko pomagajo mnenja, ki jih zastopajo drugi učitelji. Ta mnenja so precej različna, zato ni mogoče pričakovati, da bi prišli vsi učitelji do enotnega pogleda.

Učenec fiziko dojema po drobcih in ne pozna celote, v katero se za raziskovalca ali učitelja ti drobci skladajo in dopolnjujejo. Spoznava le majhne

dele nekaterih fizikalnih teorij. Če raziskovalca ali učitelja primerjamo s planincem, ki z vrha gore opazuje okolico, je učenec podoben planincu, ki se mukoma vzpenja na goro in vidi le del doline ali dveh v svoji bližini [12]. Po drugi prispodobi se učencu fizika utegne zdeti siva dverazsežna senca uspevajočega in košatega zelenega drevesa [13].

Nekaterim se zdi vloga matematike v poučevanju fizike dvorezna. Matematika „naj bi bila dvizni most, po katerem je mogoče varno vstopiti v trdnjavo fizike, ne da bi padli v razumske pasti, toda v večini primerov je globok jarek z blatno vodo, ki preprečuje vsakomur vstop v presveto notranjost trdnjave, če se prej ni naučil leteti ali (vsaj) plavati. Tistim, ki že živijo v trdnjavi, se zdi rešilni pas, vržen v morje napak. Toda za utapljanje se lahko v dejanskih okoliščinah izkaže za kaj spolzko rešilno napravo.” [13]

Zdi se, da prejšnja misel svari pred tem, da bi opazovanja in merjenja pri poskusih prezgodaj prelili v enačbe in fiziko nadomestili z računanjem. Nevarnost je povezana tudi s pretiranim reševanjem računskih nalog pri fiziki. Preobilica fizikalnih nalog lahko iz fizike naredi slabo kopijo matematike. Na drugi strani pa pri matematiki le redko rešujejo naloge s fizikalno vsebino. Preradi zgubimo iz vida, da se učenci vzpenjajo hkrati na goro fizike in na goro matematike, Morda bi bilo oba vzpona mogoče povezati, da bi bila skupaj lažja kot vsak zase?

O matematiki v poučevanju fizike je posebno veliko razmišljanj mogoče najti v angleških revijah, zdi se, da bolj zaradi zadreg kot zaradi uspešnih rešitev. Ne glede na okolje pa je vredno razmisliti o zahtevi, da naj pri fiziki v šoli pride na vrsto le snov, ki so jo učenci pri matematiki že predelali [14]. Zares bi to učencem delo pri fiziki precej olajšalo. Vendar izkušnje kažejo, da to ni izvedljivo. Pomislimo na vektorje pri silah v predzadnjem razredu osnovne šole, infinitezimalni račun z vektorskimi funkcijami v mehaniki in funkcijami več spremenljivk v toploti v prvih dveh letih srednje šole, na črtaste in zvezne spektre in sploh porazdelitve v prvem letniku univerze. Če bi se togo držali zahteve, bi že po teh zgledih hudo omejili obseg fizike na osnovni, srednji in visoki šoli. Ker obsega fizike ni smiselno tako omejiti, zahtevi ni mogoče ustreči. To razkriva eno izmed težav, s katerimi se srečuje poučevanje fizike. Koristno bi bilo, če bi sestavljalci učnega načrta za fiziko in tudi za matematiko tega ne pozabili in bi vsaj v obliki komentarja učiteljem fizike pomagali prebroditi nevšečnost. Četudi bi kaj takega obstajalo, pa bi ne vzelo učiteljem glavnega bremena odločitve o tem, kako naj zadevo izpelje. Angleško spogledovanje z omenjeno zahtevo je zato neurešljiva želja. Te vrste je tudi misel, da bi bilo za matematiko in fiziko ugodno, če bi ju poučeval isti učitelj [15]. To bi bilo celo v idealnem primeru pri nas izvedljivo le v osnovni šoli, na srednji pa že ne več, ker je izobraževanje obojih učiteljev ločeno. Ne glede na to naj bi si „skupnost učiteljev fizike in skupnost učiteljev matematike resno prizadevali, da bi razčistili probleme, ki se pojavijo v preseku obeh strok.” [16] Samo mimogrede omenimo, da so nekateri ruski fiziki predavali na univerzi matematiko za svoje študente in

se lotili tudi pisanja učbenikov.

Nekateri gredo v razmišljanju o poučevanju fizike za tiste, ki jim fizika ni glavni predmet, še dlje: „Matematika naredi fiziko težavno, toda tudi močno, vznemirljivo in za nekatere od nas lepo. Zelo škoda je, da nima več študentov priložnost, da bi izkusilo to vznemirjenje, moč in lepoto. [...] Morda smo [...] na poti, po kateri smo potovali, poskušali preveč hiteti [...] Napačno bi bilo spremeniti naš cilj, prav pa je spremeniti hitrost, po kateri vodimo ljudi do tega cilja.” [17], [18]. Vendar študent zaradi svojega delnega pogleda to težko uvidi.

Razumljivo, da poučevanje fizike v srednji šoli vsebuje več matematike kot v osnovni šoli in na univerzi več kot v srednji šoli. Tudi o vlogi matematike v fiziki na univerzi je mogoče prebrati več različnih mnenj. V tej zvezi je zanimiv angleški predlog, da bi uvedli študij fizike ob zmanjšanih zahtevah glede matematike [19]. Kot so oddelki za klasično filologijo vzcveteli, ko so ponudili študentom angleške prevode starih piscev, naj bi tak študij na oddelke za fiziko pritegnil večje število študentov. „Fizikalne pojave razkrijejo v opazovanjih in poskusih, ki jih lahko razume vsakdo in o njih razpravlja. V razvoju je bilo koristno opisati fiziko z jezikom matematike, toda ne bi smeli dovoliti, da bi ta jezik odvrnil tiste, ki bi jih zanimalo razmišljati o zamislih. Pojavi se vprašanje, ali lahko poučujemo fiziko brez matematike.” V pismih uredniku so predlog zavrnil in spomnili pisca na Russellovo pripombo, da „fizika ni matematična, ker toliko vemo o fizikalnem svetu, ampak zato, ker vemo tako malo: odkrijemo lahko samo njegove matematične lastnosti”. Fizike brez matematike ni mogoče razumeti, kot je mogoče razumeti Iliado brez grščine. Če bi matematično vsebino fizike v srednji šoli še nadalje zmanjšali, bi s tem močno prizadeli „naravo predmeta, njegovo objektivnost in njegovo zmožnost, da pojasni eksperimentalne in tehniške zadeve.” [20]

Čeprav bi bila za nekatere študente na univerzi morda zanimiva „fizika brez matematike”, pa je vprašanje, ali bi se nanjo vpisali, saj večini tak predmet ne bi prinesel otipljive prednosti pri nadaljnjem študiju in v poklicu. S stališča širše družbe pa bi bil predmet brez dvoma koristen za novinarje in urednike, ki se nameravajo poklicno ukvarjati tudi z naravoslovjem. Vendar bi bilo najbrž takih študentov premalo, da bi bilo smiselno uvajati poseben študij. Dodatno znanje bi si lahko pridobili, na primer, po diplomu iz ene od znanosti o naravi s specializacijo na drugem območju.

Razlike med fiziko in matematiko pri poučevanju

V nadaljnjem omenimo nekaj razlik med fiziko in matematiko v šoli, ki utegnejo spraviti učence v zadrego. Začnimo z bolj formalnimi. Znak, ki ga v matematiki najbrž največkrat uporabimo, to je enačaj, pomeni v matematiki, da sta dva izraza enaka na vseh mestih, tudi na tistih, ki morebiti niso zapisana. V fiziki pa enačaj pomeni, da sta količini enaki v

okviru dosežene natančnosti pri merjenju. Kdor to spregleda, lahko zaide v načelne težave in mora, na primer, reči, da je klasično mehaniko izpodrinila relativistična mehanika. V resnici se še naprej učimo klasične mehanike in jo uporabljamo v vsakdanjem življenju. Samo pri majhnem številu poskusov z velikimi telesi – z malo pretiravanja jih je mogoče prešteti na prste ene roke – je bilo treba uporabiti enačbe posebne teorije relativnosti. O tem odloča natančnost merjenja. Pri natančnosti na del promila, s katero se pri velikih telesih pogosto zadovoljimo, bi morala hitrost telesa preseči nekaj tisoč kilometrov na sekundo, preden bi se morali odreči klasični mehaniki.

V fiziki velikokrat uporabimo znaka $\ll$ in $\gg$, ki v matematiki menda sploh nimata prave domovinske pravice. Sorazmernost je v fiziki zelo pomembna, medtem ko matematiki redko uporabijo znak $\propto$. Pozornost zaslužijo tudi številni primeri, pri katerih v določenih okoliščinah uporabimo približek, pa potem pozabimo, da gre za približek. Drug znak namesto enačaja, na primer $\approx$, ne bi pomagal dosti, če ne bi vedeli, za kaj gre. Za nitno nihalo dobimo nihajni čas $f(\varphi_0)t_0$, če je $t_0 = 2\pi(l/g)^{1/2}$ nihajni čas pri dovolj majhni amplitudi, ko sinus odklona nadomestimo z ločno merjenim odklonom. Od amplitude φ_0 odvisni faktor je:

φ_0	0	$\frac{1}{10}\pi$	$\frac{1}{7}\pi$	$\frac{1}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$f(\varphi_0)$	1	1,006	1,013	1,025	1,040	1,073	1,180

Podobno ravnamo še velikokrat. Za zgled vzemimo kapaciteto ploščatega kondenzatorja in induktivnost tuljave. Kapaciteta praznega ploščatega kondenzatorja s krožnima ploščama je $C = f_C(l/r)\varepsilon_0\pi r^2/l$.

l/r	0,2	0,05	0,05	0,02	0,01
$f_C(l/r)$	1,286	1,167	1,094	1,042	1,023

Induktivnost prazne valjaste tuljave z N gosto navitimi ovoji pa je $L = f_L(l/r)\mu_0 N^2\pi r^2/l$

$2r/l$	0,01	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1
$f_L(2r/l)$	0,996	0,979	0,959	0,884	0,818	0,788	0,711	0,688

Pri tem je r radij plošče ali tuljave in l razmik med ploščama ali dolžina tuljave.

Morda se kdo popravnih faktorjev sploh ne zaveda. V učbenikih jih večinoma ni najti, ker zahtevajo dokaj nerodne izpeljave, večinoma jih najdemo v zbirkah podatkov. Še huje je na primer pri navajanju induktivosti dušilk z železnim jedrom za izmenični tok, ki sploh ni konstantna, ampak je odvisna od amplitude jakosti magnetnega polja, torej od amplitude toka.

Da bi izračunali $L(I_0)$, bi potrebovali podatke za histerezo krivuljo, ki jih je v pripravi obliki težko najti.

Podobnih drobnih težav je še nekaj. Omeniti kaže uporabo znakov Δ in d za razliko in diferencial ter v manjši meri $\sum$ in $\int$ za vsoto in integral. V matematiki navadno uporabijo znak Δ za končno razliko in znak d za razliko, ki postane poljubno majhna. V fiziki se zavedamo, da naj bo razlika d dovolj majhna, ne pa tako majhna, da bi jo prevpile napake pri merjenju. Iz obzirnosti do učencev in učiteljev, ki jih znak d pogosto moti, pa uporabljajo osnovnošolski in nekateri srednješolski učbeniki znak Δ . V posebnih primerih fiziki uporabijo znak d kot opozorilo, da ne gre za totalni diferencial. Tako na primer z dA nakažejo, da ne gre za majhno dovedeno delo, ne za spremembo dela. Med zgledi za različne poglede matematikov in fizikov bi lahko od osnovnih zadev navedli vektorje in še precej drugega [21].

Za poučevanje so pomembnejše vsebinske razlike med matematiko in fiziko, ki se skrivajo bolj v ozadju. Na prvem mestu pomislimo na nabiranje izkušenj pri opazovanju in merjenju in na drugem na ustvarjanje novih zamisli pri povezovanju izkušenj z matematičnim formalizmom v korespondenčnih pravilih. Toda pri tem naletimo pri poučevanju na resne težave. Kdo bi predlagal, da je treba delati čim več poskusov in čim natančneje meriti. Toda naprave za demonstracijske poskuse in za laboratorijske poskuse v šoli so navadno preproste in nenatančne, pa še časa manjka. Nekaterih poskusov s takimi napravami sploh ni mogoče narediti. Mogoče pa je poročati o nekdanjih poskusih in njihovem pomenu za razvoj fizike ali o njihovih sodobnih izvedbah in o njih pokazati tudi kak poučevalski film.

Po podobni poti, prek zgledov iz zgodovine fizike, bi učenci lahko dobili nekaj občutka za način raziskovalnega dela v fiziki in za to, kako tesno je fizika povezana z območjem dejanskosti, ki je oster preskusni kamen za vse zamisli. Nasprotno pa bi razpravljanje o zgradbi fizikalnih teorij ali o metodah raziskovalnega dela in odkrivanja novega in o ustvarjalnih korakih najbrž zgrešilo svoj namen. Kot kaže, pričakujemo, da se bo učenec tega navzel pri fiziki, kot je rekel R. P. Feynman, „z osmozo“.

Poučevalci priporočajo „raziskovalni prijem“. Zveza ima smisel toliko, kolikor spodbuja učitelja, naj poskuša pripraviti učenca do tega, da ga stvar zanima, da je z mislimi pri njej in je pripravljen vložiti svoj del navora. Za kaj več pa ni ne znanja ne razgledanosti ne časa. Učenec ne more naprej brez učiteljevih posredovanj, dovolj pogostih in dovolj obsežnih. Učitelj učenca lahko poskusi napeljati, da uvidi potrebo po novi količini in spozna njeno povezavo z znanimi količinami, ko navede izkušnje pri opazovanjih in merjenjih ter teoretično ozadje. Učenec pa ne more podoživeti ustvarjalnega dejanja, ki je uspelo raziskovalcu v razvoju fizike. Že sklicevanje na zgodovino fizike je dovolj nevarno in lahko učenca zavede, razvoj je namreč potekal precej bolj zapleteno, kot bi nam v šoli prišlo prav.

Zaradi omenjenih značilnosti je poučevanje fizike težka naloga in ni poti, ki bi jo mogli priporočiti vsem učiteljem v vseh okoliščinah. Vsak od njih mora glede na svoj pogled na poučevanje in na okoliščine presoditi, kakšen prijem bo uporabil, posebno glede vsebinskih razlik med fiziko in drugimi znanostmi o naravi na eni strani in matematiko in drugimi znanostmi na drugi. Ni boljše opore za to misel kot devet različnih – tehtnih – odgovorov na vprašanje o znanstveni metodi v naravoslovju [22].

LITERATURA

- [1] E. P. Wigner, *Vloga matematike v naravoslovju*, Obzornik mat. fiz. **8** (1961) 145.
- [2] R. Minio, *Pogovor z Michaelom Atiyahom*, Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 129.
- [3] D. J. Gross, *Fizika in matematika na meji*, Obzornik mat. fiz. **37** (1990) 176.
- [4] L. Lederman, *The God Particle*.
- [5] E. Teller, *Conversation on the Dark Secret of Physics*, Plenum, New York 1991.
- [6] R. C. Henry, *An electron is not a wavefunction*, Phys. Teach. **21**, (1983) 74.
- [7] S. Hawking, *A Brief History of Time. A Riders Companion*, Bantam, London, 1992.
- [8] G. Ludwig, *Foundations of Quantum Mechanics*, Springer, New York 1983.
- [9] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley, New York 1974.
- [10] E. Horsfield, *Aspects of scientific method in the natural sciences – physics*, Am. J. Phys. **52** (1984) 809.
- [11] A. Wroblewski, *Chance, prejudice and reason in scientific investigation: a ramble through the history of physics*, Eur. J. Phys. **6** (1985) 116.
- [12] J. Strnad, *Observation and theory*, The role of experiment in physics education, Škofja Loka 1992 (Ljubljana, 1993), 195.
- [13] A. Pflug, *The role of simple qualitative experiments in physics teaching*, The role of experiment in physics education, Škofja Loka 1992 (Ljubljana, 1993), 32.
- [14] A. K. Lavaly, *Do students find physics easier to learn without mathematical problems?* Phys. Educ. **25** (1990) 202.
- [15] P. Rutter, *The effect of studying A-level mathematics on performance in A-level physics*, Phys. Educ. **29** (1994) 8.
- [16] M. P. Eisner, *Physics educators and mathematics educators should work together*, Phys. Teach. **29** (1991) 478.
- [17] M. Monk, *Mathematics in physics education: a case of more haste less speed*, Phys. Educ. **29** (1994) 209.
- [18] B. Parker, *Maths in physics teaching*, Phys. Educ. **24** (1994) 1.
- [19] P. Rice-Evans, *Physics minus maths?*, Phys. World **5** (12) (1992) 19; *BSc in natural philosophy: a fresh proposal*, Phys. Educ. **29** (1994) 23.
- [20] D. B. Kell, R. Silverside, A. T. Jackson, *Letters-to-the-Editor*, Phys. World **6** (1) (1993) 119.
- [21] P. Potočnik, *Električni in magnetni potencial gibajočega se nabitega telesa*, Obzornik mat. fiz. **42** (1995) 72.
- [22] *Answers to question #77. The scientific method*, Am. J. Phys. **67** (1999) 273.

ORIGAMI ŠTEVILA

ALENKA KLOKOČOVNIK

Math. Subj. Class. (1991): 51M15, 51M04, 12D15

Definirali bomo origami konstruktibilne točke in origami števila. Podali bomo algebrsko karakterizacijo origami števil in ugotovili, kaj lahko konstruiramo z origamijem.

ORIGAMI NUMBERS

We define origami constructible points and origami numbers. We give algebraic characterization of origami numbers and examine what can be constructed by origami.

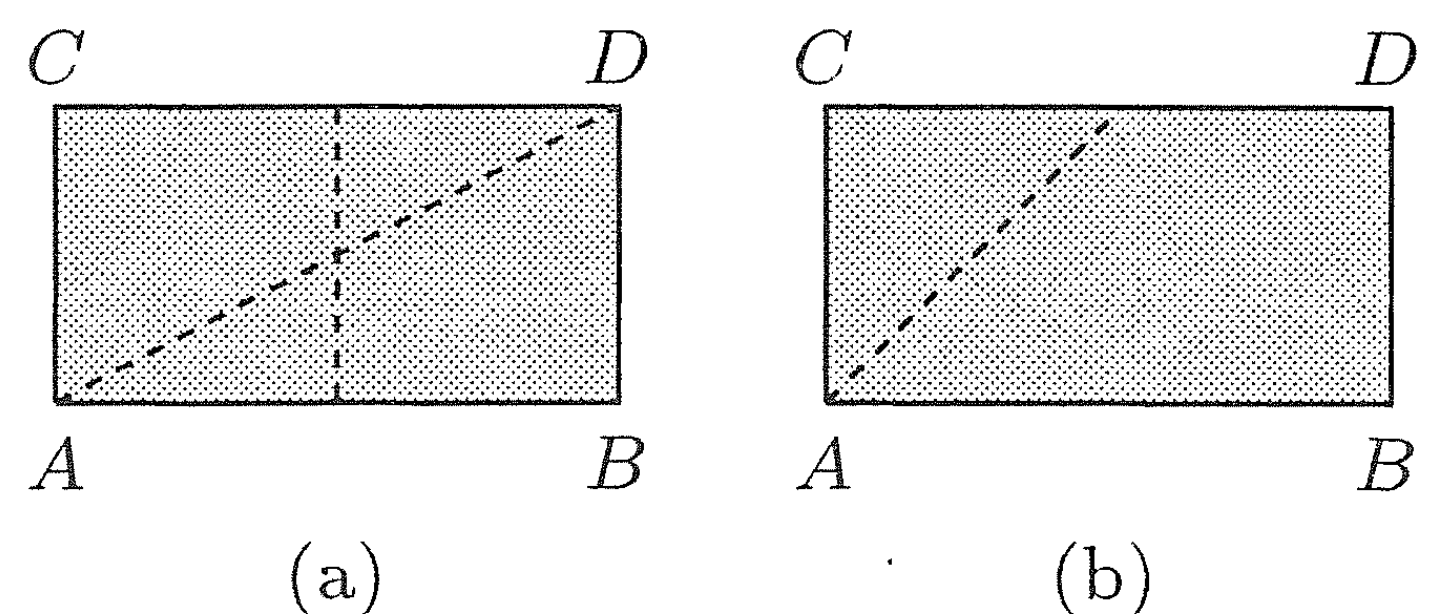
1. Uvod

Origami je stara japonska umetnost izdelovanja papirnatih figuric. Njeni prvi zametki sežejo v čas izpred tisoč let, v zadnjih dveh stoletjih pa je dosegla tudi Evropo. Prepogibanje papirja ni zanimivo le za ustvarjalne in spretnne rokodelce, navdušilo je tudi mnoge matematike. Ti so se ga lotili z matematičnimi prijemi. Poigrajmo se s papirjem še mi.

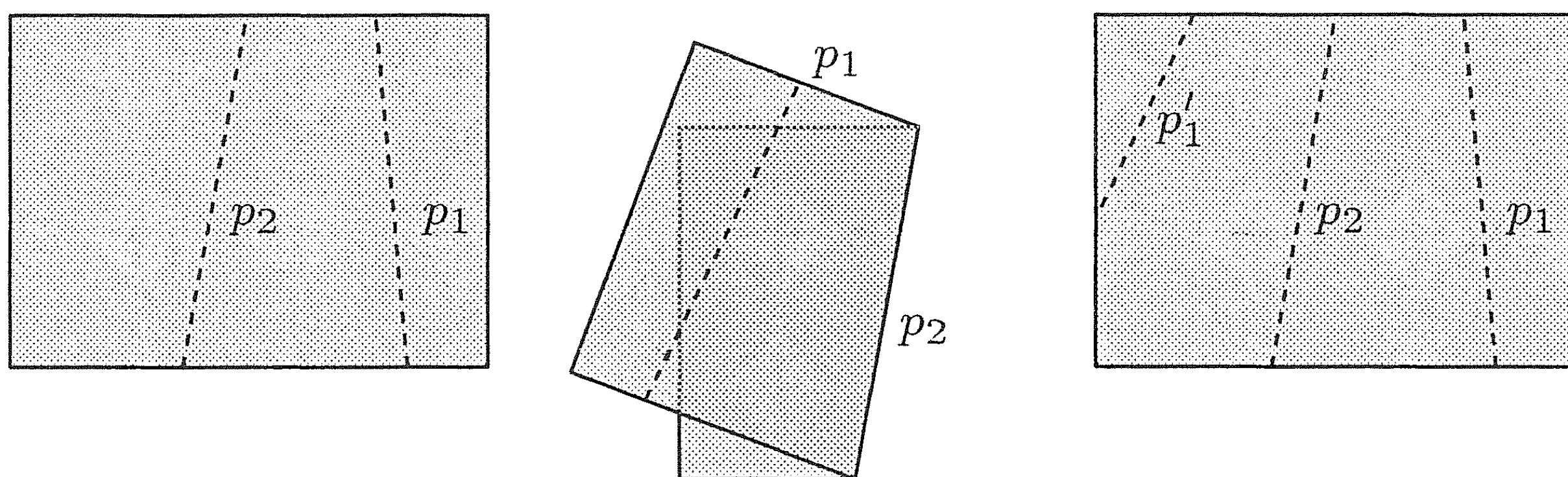
V roke vzemimo list papirja pravokotne oblike. Ta nam bo rabil za model pravokotnika z oglišči A , B , C in D . Za začetek prepognimo list po diagonali AC in ga razprimo. Na njem ostane sled, v kateri prepoznamo model daljice. Če prekrijemo dva nasprotna robova lista, na primer rob AD in BC , in pogladimo nastali pregib, ostane na papirju del premice, ki poteka po sredini med obema vzporednima robovoma. Ta je hkrati tudi simetrala daljice AB (slika 1a). Simetralo kota DAB pa dobimo tako, da prekrijemo sosednja robova AB in AD (slika 1b).

Če zapognemo na listu dve premici, dobimo z nekaj več koraki zrcalno sliko ene premice prek druge (slika 2).

Naštete primere prepogibanja bomo uporabili pri definiciji matematičnega **origamija**.



Slika 1. Premica, simetrala daljice (a) in simetrala kota (b).



Slika 2. Zrcaljenje premice prek premice.

2. Origami konstruktibilne točke

Naš cilj je raziskati, kaj lahko konstruiramo z origamijem in česa ne. Najprej natančno opredelimo *pravila origamija*.

V ravnini $\mathbb{R}^2$ vzemimo množico točk $\mathcal{T}$ in množico premic $\mathcal{P}$, ki ustrezata naslednjim pogojem:

A1 Presečišče dveh premic iz $\mathcal{P}$ je točka v $\mathcal{T}$.

A2 Skozi dve različni točki iz $\mathcal{T}$ poteka premica iz $\mathcal{P}$.

A3 Za vsaki dve različni točki iz $\mathcal{T}$ je *simetrala daljice*, ki jo določata ti dve točki, premica v $\mathcal{P}$.

A4 (i) Za vsaki sekajoči se premici iz $\mathcal{P}$ sta *simetrali kotov*, ki ju določata, tudi premici iz $\mathcal{P}$.

(ii) Za vsaki dve vzporedni premici iz $\mathcal{P}$ je v $\mathcal{P}$ tudi premica, ki je od obeh enako oddaljena.

A5 Za vsaki dve premici p_1 in p_2 iz $\mathcal{P}$ je v $\mathcal{P}$ tudi zrcalna slika premice p_1 prek p_2 .

Par $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$, ki ustreza aksiomom od A1 do A5, bomo imenovali **origami par**.

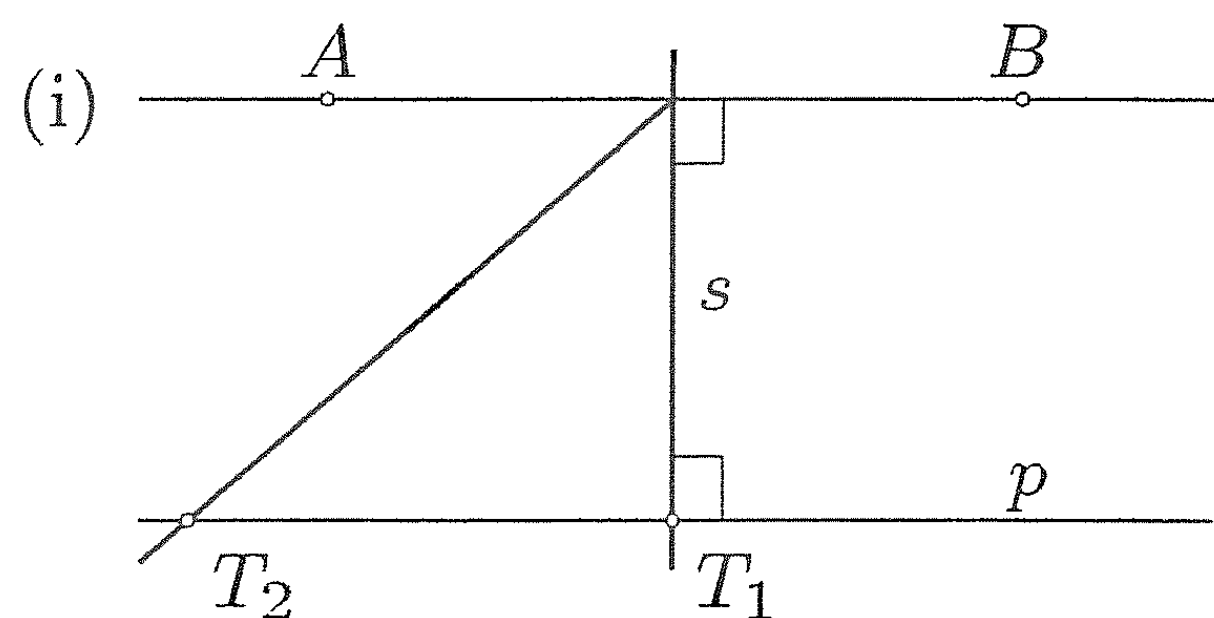
Ker origami pari, kjer množica $\mathcal{T}$ vsebuje manj kot dva elementa, niso posebej zanimivi, bomo privzeli, da množica točk $\mathcal{T}$ vsebuje vsaj dve točki.

Prepričajmo se, da za vsako podmnožico točk $\mathcal{T}$ ravnine $\mathbb{R}^2$, ki vsebuje vsaj dve točki, obstaja največ ena taka množica premic $\mathcal{P}$, da je $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ origami par.

Privzemimo, da je $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ origami par, in dokažimo, da so tedaj v $\mathcal{P}$ natanko vse premice, na katerih ležita vsaj dve točki iz $\mathcal{T}$. Po aksiomu A2 mora množica $\mathcal{P}$ vsebovati vse premice, ki potekajo skozi poljubni dve različni točki iz $\mathcal{T}$.

Vzemimo poljubno premico $p \in \mathcal{P}$. Po predpostavki vsebuje $\mathcal{T}$ vsaj dve točki. Označimo ju z A in B . Po aksiomu A2 premica $\overleftrightarrow{AB}$ pripada množici $\mathcal{P}$. Preglejmo vse možnosti.

(i) Premici p in $\overleftrightarrow{AB}$ nimata skupnih točk (slika 3). Po aksiomu A3 je v $\mathcal{P}$ simetrala s daljice AB . Presečišče simetrale s in premice p naj bo točka T_1 , ki je po aksiomu A1 v $\mathcal{T}$. V $\mathcal{P}$ je tudi simetrala kota med premico $\overleftrightarrow{AB}$ in simetralo s (aksiom A4). Tudi ta seka premico p v točki, ki jo bomo označili s T_2 . Ta je po aksiomu A1 v $\mathcal{T}$, torej smo na premici p našli dve točki iz $\mathcal{T}$.



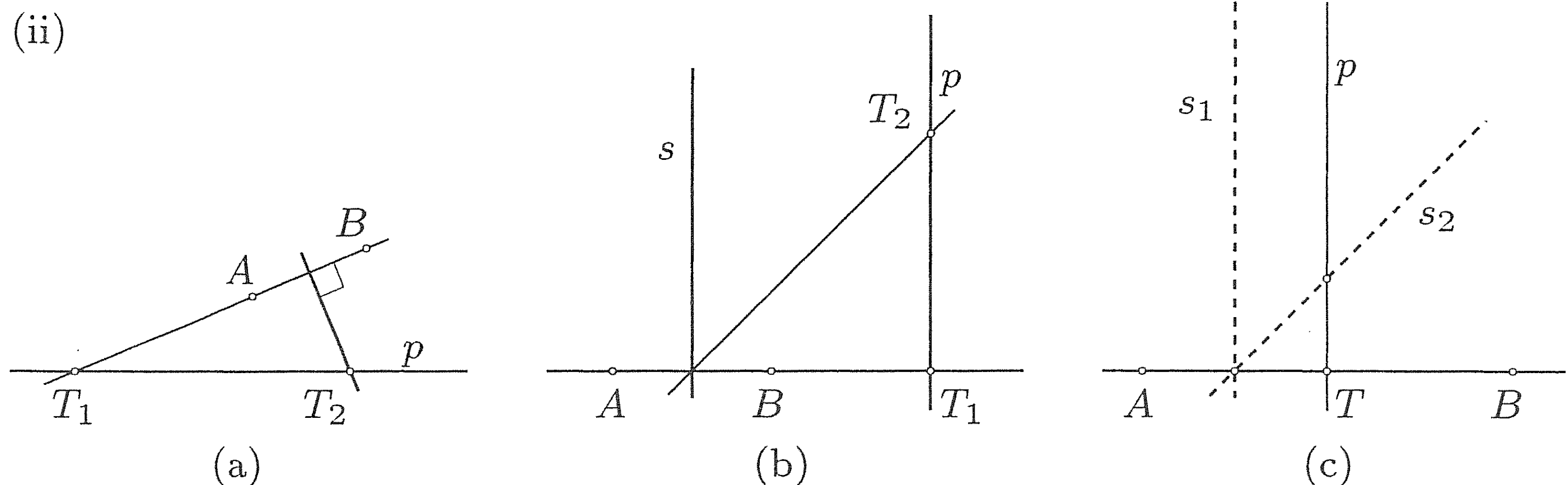
Slika 3. Premici nimata skupnih točk.

(ii) Premici p in $\overleftrightarrow{AB}$ imata eno skupno točko T_1 (slika 4).

Če premica p ni pravokotna na premico $\overleftrightarrow{AB}$, je presečišče simetrale daljice AB s premico p točka T_2 , ki je po aksiomu A1 v $\mathcal{T}$. Če je $T_1 = T_2$, simetralo daljice AB nadomestimo s simetralo daljice AT_1 .

Bralec naj sam razmisli, kako je v primeru, ko sta premici p in $\overleftrightarrow{AB}$ pravokotni. Pri tem si lahko pomaga s slikama 4b in 4c.

(ii)



Slika 4. Premici se sekata.

Dokazali smo torej, da je za dano množico $\mathcal{T}$ le množica premic $\mathcal{P} = \{\overleftrightarrow{AB}; A, B \in \mathcal{T}\}$ takšna, da je $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ lahko origami par. Ker $\mathcal{T}$ ne more biti končna (privzeli smo, da ima vsaj dve točki), vsak tak par ni origami par.

Potrebujemo novo definicijo. Rekli bomo, da je podmnožica $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ zaprta za origami konstrukcijo, če obstaja taka množica premic $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, da je $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ origami par.

Smiselno je poiskati najmanjšo množico točk, ki je zaprta za origami konstrukcijo in vsebuje vsaj dve točki, točki npr. $(0, 0)$ in $(1, 0)$.

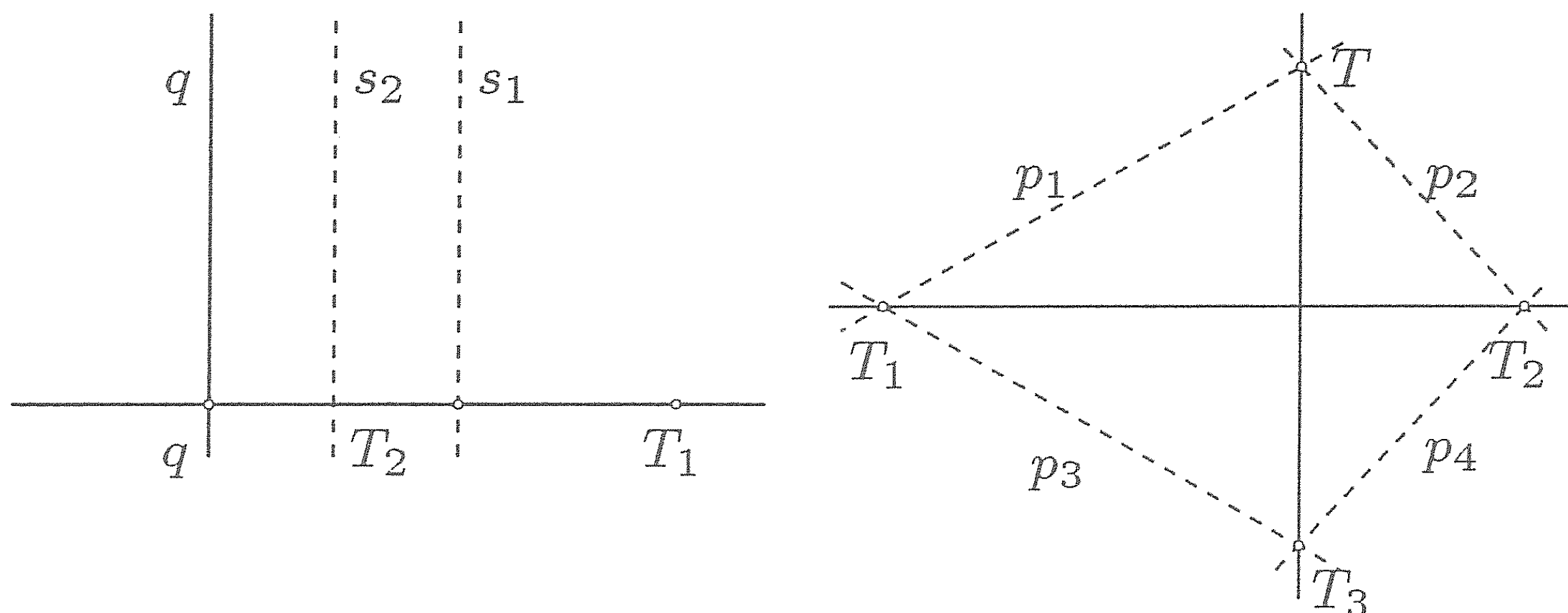
Naj bo $\{\mathcal{T}_\lambda \subset \mathbb{R}^2; \lambda \in \Lambda\}$ družina vseh podmnožic ravnine $\mathbb{R}^2$, ki vsebujejo točki $(0, 0)$ in $(1, 0)$ ter so zaprte za origami konstrukcijo. Množico $\mathcal{T}_o = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ imenujemo množica origami konstruktibilnih točk. Prepričajmo se, da je zaprta za origami konstrukcijo.

Vzemimo take množice $\mathcal{P}_\lambda$, da $(\mathcal{T}_\lambda, \mathcal{P}_\lambda)$ tvorijo origami pare za vsak $\lambda \in \Lambda$, in postavimo $\mathcal{P}_o = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{P}_\lambda$. Brez težav ugotovimo, da par ustreza aksiomom A1–A5 in je tedaj $(\mathcal{T}_o, \mathcal{P}_o)$ origami par.

V nadaljevanju naj bo $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ origami par.

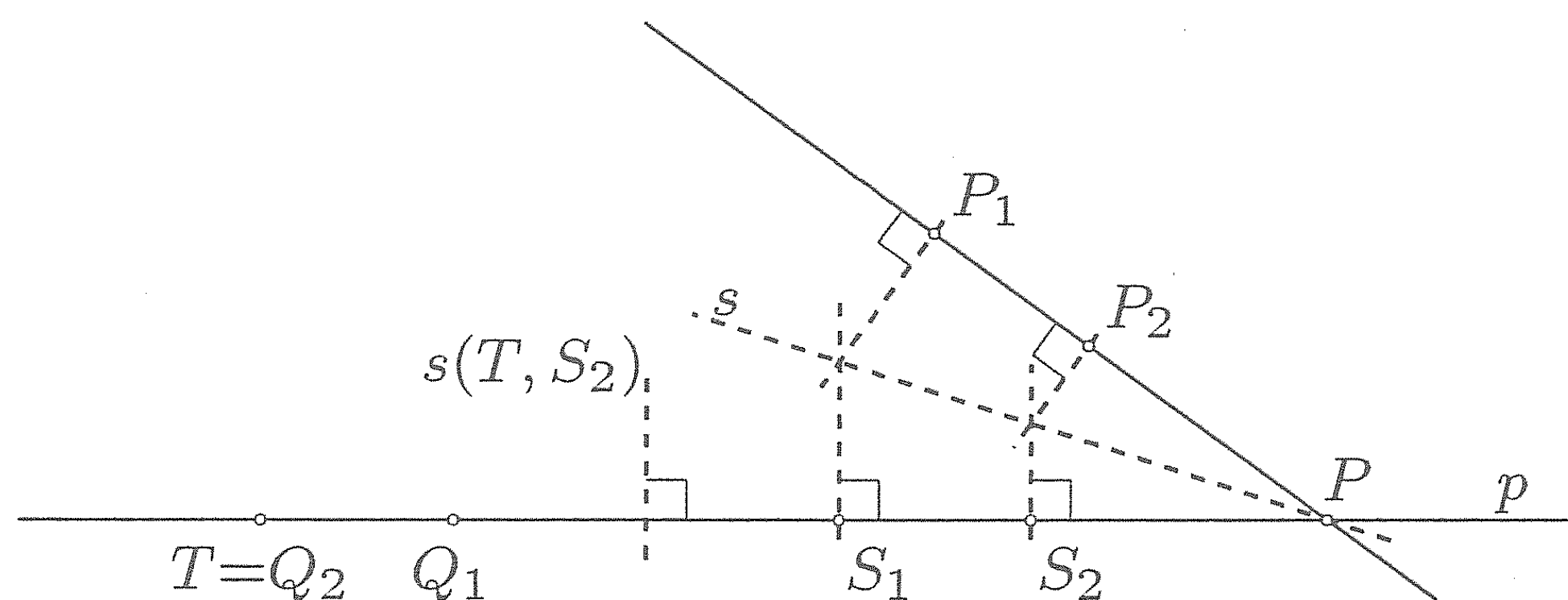
Doslej smo se seznanili z dokazovanjem v aksiomatskem sistemu origamija. Da dobimo še občutek za konstrukcije z origamijem, konstruirajmo pravokotnico na dano premico p iz $\mathcal{P}$ skozi dano točko T iz $\mathcal{T}$ (slika 5). Naj točka T leži na premici p . Ker je $p \in \mathcal{P}$, vemo, da je na njej še vsaj ena točka iz $\mathcal{T}$. Označimo jo s T_1 . Z uporabo aksiomov A3 in A1 naredimo simetralo s_1 daljice TT_1 , ki seka premico p v točki T_2 . Zapognemo še simetralo s_2 daljice TT_2 ter v skladu z aksiomom A5 zrcalimo premico s_1 prek premice s_2 . Dobimo iskano pravokotnico q iz $\mathcal{P}$. Če pa točka T ne leži na premici p , naredimo naslednje. Ker je premica p iz $\mathcal{P}$, sta na njej vsaj dve

točki iz $\mathcal{T}$. Označimo ju s T_1 in T_2 . Po aksiomu A2 sta v $\mathcal{P}$ premici $\overleftrightarrow{TT_1}$ in $\overleftrightarrow{TT_2}$. Ti dve premici prezrcalimo prek premice p (aksiom A5). Prezrcaljeni premici se sekata v točki T_3 iz $\mathcal{T}$. Po aksiomu A2 je premica $\overleftrightarrow{TT_3}$ tudi v $\mathcal{P}$. Hitro se prepričamo, da je to iskana premica.



Slika 5. Pravokotnica na premico.

Bralca vabim, da se preizkusi s konstrukcijo vzporednice k dani premici skozi dano točko in s konstrukcijo pravokotnega trikotnika z danima katetama. Pri slednjem se mora prepričati, da znamo z origamijem prenašati razdalje oziroma natančneje, da nam origami omogoča dano daljico prenesti na dano premico v izbrano krajišče. Pomaga si lahko z grafičnim prikazom prenašanja daljice P_1P_2 na dano premico p z danim krajiščem v točki T (slika 6).



Slika 6. Prenášanje razdalje.

Za vas imam še eno nalogo. Imejmo štiri origami konstruktibilne točke, označene s T_1 , T_2 , T_3 in T_4 . Z origamijem konstruirajte pravokotni trikotnik s hipotenuzo dolžine $|T_1T_2|$ in kateto dolžine $|T_3T_4|$. Če se vam bo porodilo vprašanje, ali je ta konstrukcija sploh mogoča, boste odgovor našli v četrtem poglavju našega članka.

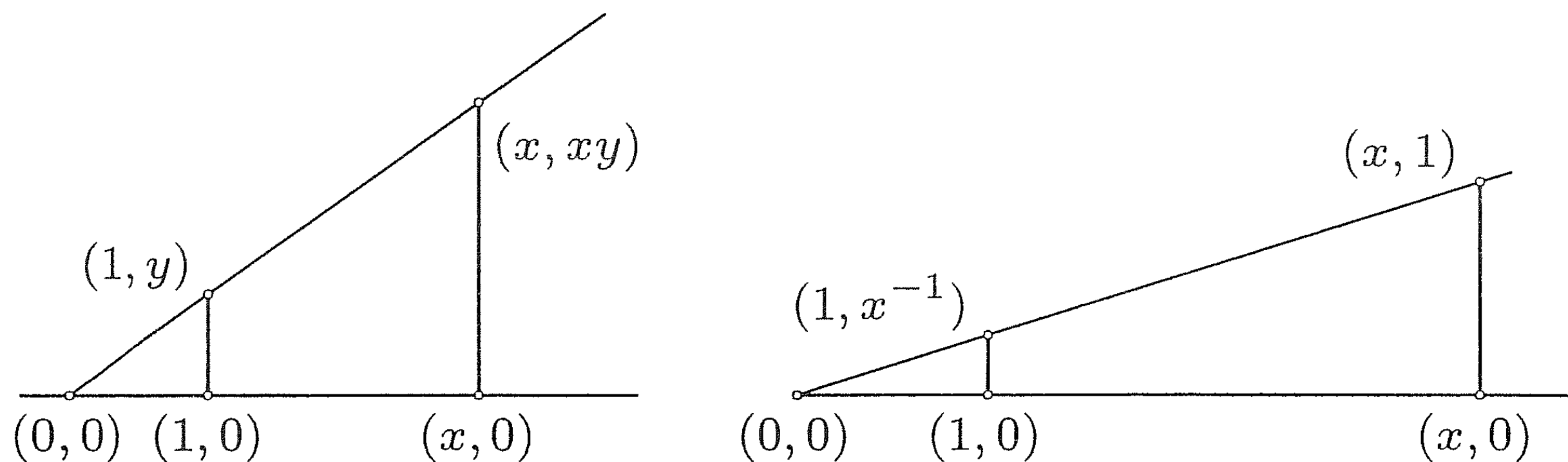
3. Origami števila

Množico vseh realnih števil, katerih absolutna vrednost je razdalja med dvema origami konstruktibilnima točkama, bomo označili z $\mathbb{F}_o$ in jo imenovali *množica origami števil*.

Z uporabo dejstva, da znamo z origamijem prenašati razdalje, brez težav dokažemo, da je točka (x, y) origami konstruktibilna natanko tedaj, ko sta x in y origami števili. Od tod sledi enakost $\mathcal{T}_o = \mathbb{F}_o \times \mathbb{F}_o$.

Ker je z vsakima dvema točkama origami konstruktibilno tudi razpolovišče daljice med njima, so $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ origami števila. Ni težko videti, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ število $\frac{1}{n}$ origami število.

Po definiciji $\mathbb{F}_o$ je z vsakim $x \in \mathbb{F}_o$ tudi $-x \in \mathbb{F}_o$. Ker znamo z origamijem prenašati razdalje, je vsota dveh origami števil spet origami število. S podobnimi trikotniki preverimo, da je $x \cdot y \in \mathbb{F}_o$ za vsaka $x, y \in \mathbb{F}_o$ in $x^{-1} \in \mathbb{F}_o$ za vsak neničelni $x \in \mathbb{F}_o$ (slika 7).



Slika 7.

Dokažimo, da je tudi $\sqrt{1+x^2} \in \mathbb{F}_o$ za vsak $x \in \mathbb{F}_o$. Po definiciji origami števil je $\sqrt{1+x^2} \in \mathbb{F}_o$, če obstajata taki točki $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_o$, da je $d(T_1, T_2) = \sqrt{1+x^2}$. Iskani točki sta $(1, 0)$, ki pripada $\mathcal{T}_o$ po definiciji, in $(1, x)$, ki je tudi v $\mathcal{T}_o$.

Množica origami števil je torej polje (komutativni obseg), zaprto za operacijo $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Definirajmo

$$\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} = \bigcap \{ \mathbb{F} \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{F} \text{ polje, zaprto za } x \mapsto \sqrt{1+x^2} \}.$$

Podobno, kot smo se prepričali, da je množica $\mathcal{T}_o$ zaprta za origami konstrukcijo, preverimo, da je $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ polje, zaprto za $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Gotovo je vsebovano v vsakem polju, ki je zaprto za $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Ker je že polje $\mathbb{F}_o$ takšno, velja $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \subseteq \mathbb{F}_o$. Dokažimo, da sta polji celo enaki.

Izrek 1. Velja enakost $\mathbb{F}_o = \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

Dokaz. Dokazati moramo še vsebovanost $\mathbb{F}_o \subseteq \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

Če dokažemo, da je $\mathcal{T}_o \subseteq \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \times \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$, bo od tod sledilo, da je $\mathbb{F}_o \subseteq \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Ker je $\mathcal{T}_o$ po definiciji vsebovana v vsaki za origami zaprti množici, je dovolj preveriti, da je $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \times \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ za origami zaprta množica.

Definirajmo $\mathcal{T} := \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \times \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ in $\mathcal{P} := \{\overleftrightarrow{PQ}; P, Q \in \mathcal{T}\}$. S preverjanjem aksiomov A1 do A5 pokažimo, da tako definirana $\mathcal{T}$ in $\mathcal{P}$ tvorita origami par $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$.

A1 Vzemimo dve nevzporedni premici p_1 in p_2 iz $\mathcal{P}$. Preveriti moramo, da je presečišče teh dveh premic točka iz $\mathcal{T}$.

Ker sta premici v $\mathcal{P}$, obstajajo štiri take točke iz $\mathcal{T}$, da je $\mathcal{T}_1 = \overleftrightarrow{T_1T_2}$ in $\mathcal{T}_2 = \overleftrightarrow{T_3T_4}$. Točka T_i naj ima koordinati (x_i, y_i) za $i = 1, 2, 3, 4$, kjer so x_i in y_i iz $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Premici p_1 in p_2 naj ne bosta pravokotni na abscisno os. Enačbi premic sta

$$p_1 : y = k_1x + n_1, \text{ kjer } k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ in } n_1 = -k_1x_1 + y_1,$$

$$p_2 : y = k_2x + n_2, \text{ kjer } k_2 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \text{ in } n_2 = -k_2x_3 + y_3.$$

Ker je $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ polje, so skupaj z x_i in y_i v njem vsebovana tudi števila k_i in n_i za $i = 1, 2$. Presečišče premic je točka s koordinatama $(\frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}, \frac{k_1n_2 - k_2n_1}{k_1 - k_2})$, ki sta v $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

Kaj pa, če je ena od premic navpična?

Privzemimo, da je p_1 pravokotna na abscisno os. Premica p_1 ima potem enačbo $x = m$, kjer $m \in \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$, p_2 pa tako kot prej. Njuno presečišče je točka $(m, k_2m + n_2)$, katere koordinati sta spet števili iz $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Presečišče dveh premic je res točka iz $\mathcal{T}$.

A2 Drugi aksiom iz definicije origami para je izpolnjen po definiciji množice $\mathcal{P}$.

A3 Vzemimo točki T_1 in T_2 iz $\mathcal{T}$. Dokazati moramo, da je simetrala s daljice T_1T_2 v $\mathcal{P}$. Ker sta točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ iz $\mathcal{T}$, so x_1, x_2, y_1, y_2 iz $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Simetrala s ima enačbo

$$2(y_1 - y_2)y = 2(x_1 - x_2)x + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2,$$

od tod pa brž sledi, da je na njej dovolj točk iz $\mathcal{T}$.

A4 Naj bosta premici p_1 in p_2 iz $\mathcal{P}$.

(i) Če premici nista vzporedni, se sekata v točki $T_1(x_1, y_1)$ in na njiju obstajata še vsaj po ena točka $T_2(x_2, y_2) \in p_1$ in $T_3(x_3, y_3) \in p_2$. Ker sta premici iz $\mathcal{P}$, so vse tri točke v $\mathcal{T}$. Enotska smerna vektorja premic sta

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{m_1}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ in } \vec{s}_2 = \frac{1}{m_2}(x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$

kjer je

$$m_1 = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} \text{ in } m_2 = |x_3 - x_1| \sqrt{1 + \left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)^2}.$$

Smerni vektor simetrale, ki jo premici določata, je $\vec{s}_1 + \vec{s}_2$, zato je na njej točka $T_4(\frac{x_2-x_1}{m_1} + \frac{x_3-x_1}{m_2}, \frac{y_2-y_1}{m_1} + \frac{y_3-y_1}{m_2})$ iz $\mathcal{T}$. Točki T_1 in T_4 ležita na simetrali, zato je ta v $\mathcal{P}$.

(ii) Če sta premici p_1 in p_2 vzporedni, obstajajo točke $T_1(x_1, y_1) \in \mathcal{T} \cap p_1$ in $T_2(x_2, y_2), T_3(x_3, y_3) \in \mathcal{T} \cap p_2$. Točki $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ in $(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2})$ sta v $\mathcal{T}$ in ležita na iskani premici, zato je ta v $\mathcal{P}$.

A5 Vzemimo premici p_1 in p_2 iz $\mathcal{P}$. Dokažimo, da je zrcalna slika premice p_1 prek p_2 v $\mathcal{P}$. Spet moramo ločiti dva primera glede na to, ali sta premici p_1 in p_2 vzporedni ali ne. Oglejmo si najprej primer, ko nista vzporedni. Seveda lahko predpostavimo, da nista pravokotni. Naj bo točka S njuno presečišče in $T \in \mathcal{T} \cap p_2$. Z nekaj računanja preverimo, da je v $\mathcal{P}$ tudi pravokotnica p na premico p_2 skozi točko T . Krajevni vektor zrcalne slike točke A' presečišča A med p in p_1 je $\vec{r}_{A'} = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$. Ker $A \in \mathcal{T}$, smo našli točko na iskani premici, ki je v $\mathcal{T}$. Torej je tudi zrcalna slika premice p_1 prek p_2 , ki poteka skozi točki S in A' , v $\mathcal{P}$. Naj bosta sedaj premici p_1 in p_2 vzporedni. Na premici p_1 izberimo točko T_1 , na premici p_2 pa točki T_2 in T_3 , ki so vse iz $\mathcal{T}$. Potem točki A_1 in A_2 , ki ju določata krajevna vektorja $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_{T_1} + 2(\vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1})$ in $\vec{r}_{A_2} = \vec{r}_{T_1} + 2(\vec{r}_{T_3} - \vec{r}_{T_1})$, ležita na iskani premici $\overleftrightarrow{A_1 A_2} \in \mathcal{P}$. ■

S tem izrekom smo podali algebrajski opis polja origami števil. Sedaj lahko povemo, da je na primer $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ origami število, saj je $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + (1 + \sqrt{1 + 1^2})^2}$. Da bomo lahko preverili, ali je $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ origami število, bomo morali poiskati boljšo karakterizacijo origami števil.

Najprej si osvežimo nekaj definicij in dejstev iz abstraktne algebre.

- Število α je *algebraično število*, če je koren polinoma z racionalnimi koeficienti.
- Za vsako algebraično število α obstaja natanko en polinom $m_\alpha(x)$ v $\mathbb{Q}[x]$ z vodilnim koeficientom 1 in lastnostjo, da deli vsak polinom, ki ima število α za svojo ničlo. Takšen polinom $m_\alpha(x)$ imenujemo *minimalni polinom* števila α .
- Korene minimalnega polinoma $m_\alpha(x)$ v $\mathbb{Q}[x]$ imenujemo *konjugiranke* števila α .
- Algebraično število je *povsem realno*, če so vse njegove konjugiranke realna števila. Množico povsem realnih števil bomo označili z $\mathbb{F}_{\text{TR}}$.

Izkaže se, da so vsa origami števila povsem realna števila, $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \subset \mathbb{F}_{\text{TR}}$. Da se o tem prepričamo, moramo preveriti, ali je množica $\mathbb{F}_{\text{TR}}$ polje in zaprta za operacijo $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, saj je po definiciji origami števil $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ vsebovan v vsakem takem obsegu. Zaradi obsežnosti in kompleksnosti bomo dokaz izpustili, bralec ga lahko najde v [3].

Ali je $\sqrt[3]{2}$ origami število?

Konjugiranki števila $\sqrt[3]{2}$ sta $\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, ki pa nista realni števili, torej $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{F}_{\text{TR}}$, in zato ni origami število. Ker je število $\sqrt[3]{2}$ povezano z zelo znanim problemom podvojitve kocke, smo s tem pokazali, da ta problem ni rešljiv s tako definiranim prepogibanjem papirja.

Prav tako ne moremo z origamijem konstruirati pravokotnega trikotnika s poljubno hipotenuzo in kateto. Če bi bilo to mogoče, bi lahko konstruirali tudi trikotnik s hipotenuzo $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ in kateto 1. Dolžina druge katete bi potem bila $\sqrt{(\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 - 1^2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, ki pa ni origami število, saj sta njegovi konjugiranki imaginarni števili $\pm i\sqrt{|1 - \sqrt{2}|}$.

4. Origami in konstrukcije s šestilom ter ravnilom

Oglejmo si povezavo med klasičnimi konstrukcijami s šestilom in ravnilom ter konstrukcijami z origamijem. Za začetek se spomnimo konstrukcij s šestilom in ravnilom ([4]). Če je $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$ najmanjše podpolje v $\mathbb{C}$, ki je zaprto za operacijo $x \mapsto \sqrt{x}$, potem je $\mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{R}$ množica s šestilom in ravnilom konstruktibilnih števil.

Trditev 2. *Vse, kar se da konstruirati z origamijem, se da tudi s šestilom in ravnilom.*

Dokaz. Dovolj je videti, da je $\mathbb{F}_o \subset \mathbb{F}_{\sqrt{x}}$. Ker je $\mathbb{F}_o$ najmanjše polje, zaprto za operacijo $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, moramo pokazati, da je tudi $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$ zaprt za to operacijo. Vzemimo število $\alpha \in \mathbb{F}_{\sqrt{x}}$. Ker je $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$ obseg, je tudi $1 + \alpha^2 \in \mathbb{F}_{\sqrt{x}}$. Ker je $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$ zaprt za korenjenje, je očitno tudi $\sqrt{1 + \alpha^2}$ v $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$. ■

Obrat trditve ne velja, saj smo na koncu prejšnjega razdelka obravnavali število $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, ki je konstruktibilno z ravnilom in šestilom, ni pa origami število.

Izkaže se, da je origami število vsako povsem realno število, ki je konstruktibilno s šestilom in ravnilom. Zapišimo s simboli

$$\mathbb{F}_o = \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} = \mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{\text{TR}}.$$

Iz dosedanjega dela je razvidno, da je $\mathbb{F}_o \subset \mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{\text{TR}}$. Dokaz, da velja tudi $\mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{\text{TR}} \subset \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$, lahko bralec poišče v [3].

Z origamijem torej ne moremo rešiti znamenitih problemov podvojitve kocke, trisekcije kota in kvadrature kroga, vendar naj vas to ne potre preveč. V nasprotju s konstrukcijami s šestilom in ravnilom, si namreč avtorji niso enotni, kaj so dovoljene operacije pri origamiju ([5]), torej kaj vzeti za aksiome origamija.

LITERATURA

- [1] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., 3. izdaja, 1995.
- [2] Steven Roman, *Field Theory*, Springer Verlag, 1995.
- [3] D. Auckly, J. Cleveland, *Totally Real Origami and Impossible Paper Folding*, The Amer. Math. Monthly **102** (1995), 215–226.
- [4] M. Jerman, *O konstrukcijah z ravnilom in šestilom*, Obzornik mat. fiz. **45** (1998), 73–78.
- [5] T. Hull, *A Note on Impossible Paper Folding*, The Amer. Math. Monthly **103** (1996), 240–241.

NOVE KNJIGE

T. W. Körner: The Pleasures of Counting, Cambridge University Press, 1996, 534 str.

Ta obsežna knjiga je bila napisana predvsem za mladostnike in naj bi jim prikazala moč in privlačnost matematike. Avtor je zbral kopico nadvse zanimivih primerov uporabe matematike. Začne s preprosto statistiko, z zgodbo o londonskem zdravniku Snowu, ki je s skrbno analizo primerov kolere odkril, da je vzrok zanjo po vsej verjetnosti en sam okužen vodnjak. Ko so po njegovem nasvetu odstranili ročico črpalke, je epidemija pojenjala. Vsa zgodba ima seveda dodatne zaplete. Nato imamo prav tako zelo poučno pripoved o učinkovitosti zdravil proti kapi. Zanimivo je, da sem pred kratkim o isti temi bral dnevnik enega naših znanih zdravnikov. Körnerjev zapis je daljši in kot tak jasneje prikaže vso zgodbo.

Sledijo zgodbe o podmorniški vojni in uporabi radarja. Vojne teme očitno privlačijo avtorja, saj jim je posvetil velik del knjige. Obravnava tudi probleme epidemij, škržatov, ki se izvalijo vsakih 13 ali 17 let, „fiziko v temni sobi“ (z analizo dimenzij), razvrščanje in še mnogo drugega. Poseben, napeto napisan razdelek opisuje, kako so poljski in angleški matematiki razkrili nemški sistem šifriranja, znan kot Enigma.

Avtor je izreden pripovedovalec in moram priznati, da pri nekaterih razdelkih kar nisem mogel nehati z branjem. Knjiga je primerna tudi za intelektualne lenobe, saj je napisana tako, da trdo matematiko lahko večinoma preskočimo. Dosti čudovitih anekdot in zanimivih dokumentov najdemo v njej, npr. pismo Lorda Chesterfielda o tem, kako je dosegel vpeljavo gregorijanskega koledarja. Poučimo se lahko o tem, kako naj se matematik obnaša v raznih odborih ...

Pisec ne skriva, od kod vse je nabral snov. Obsežna bibliografija z mnogimi nasveti bo marsikomu v pomoč. Ob vsej avtorjevi erudiciji in pisateljskem daru bi človek dobil kar manjvrednostne občutke, če ne bi pri pozornejšem pregledu matematičnih formul in izrekov opazil, da je v njih precej napak (recimo na str. 170) in da tu stvari pogosto niso kaj preveč jasno razložene. (To je pravzaprav presenetljivo, saj ima avtor tudi čisto matematična dela s področja harmonične analize in je med drugim objavil daljši članek v *Annals of Mathematics*.) Kljub temu pa knjigo toplo priporočam. Prepričan sem, da jo bo marsikdo bral z veseljem.

Peter Legiša