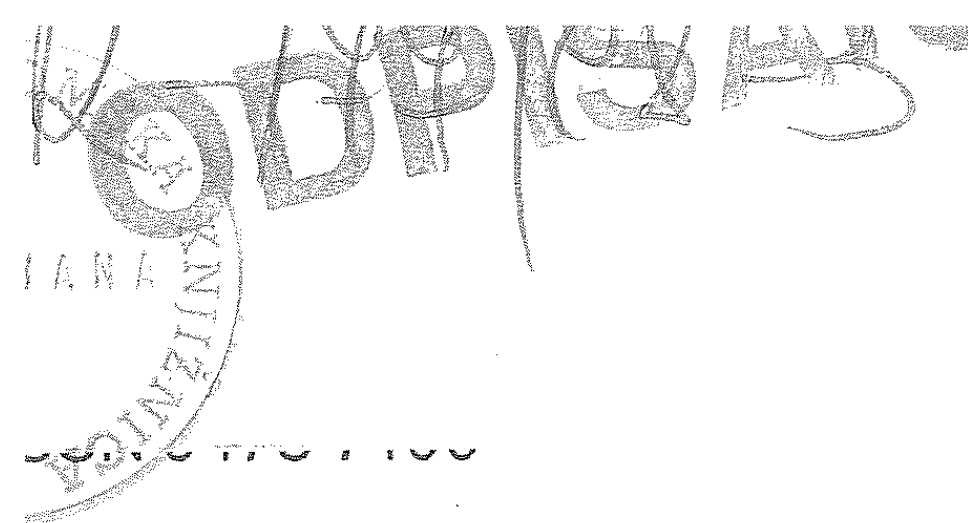




MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

1998

Letnik 45

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1998

letnik 45, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Miran Černe (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemaajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.000 SIT, za študente 1.500 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 580 SIT, stare številke 380 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1998 DMFA Slovenije – 1355 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.—Page

Hallov poročni izrek in njegove uporabe — Hall's Marriage theorem and its applications (Sandi Klavžar) 65–72

O konstrukcijah z ravnilom in šestilom — Ruler and compass constructions (Marjan Jerman) 73–78

Hausdorffova razdalja in iteracijski funkcijski sistemi — Hausdorff metric and iterated function systems (Janko Bračič) 79–88

Leksikografsko izotoni linearni operatorji — Lexicographical isotone linear operators (Andreja Drobnič) 89–96

Nove knjige — New books (Anton Suhadolc, Mihael Perman) 96–III, IV

Vesti — News

Pobrs kajmo po zaprašenih polica h (Matjaž Željko) 88
Obvestilo (Nada Razpet) IV

Na ovitku: J. M. W. Turner, *Sončni zahod nad jezerom*, 1840.

HALLOV POROČNI IZREK IN NJEGOVE UPORABE

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (1991): 05C70, 05B15, 15A15, 15A36

Predstavljen je Hallov poročni izrek in njegove različice. Podani so tudi nekateri primeri uporabe tega izreka, in sicer s področja matrik, permanent in latinskih kvadratov.

HALL'S MARRIAGE THEOREM AND ITS APPLICATIONS

Hall's marriage theorem is described in several variants. Some of its applications to matrices, permanents and Latin squares are also presented.

1. Uvod

Med najpomembnejšimi izreki s področja kombinatorne teorije množic je prav gotovo Hallov poročni izrek. Imenuje se imenuje po Philipu Hallu, ki ga je dokazal leta 1935. Dodati pa moramo, da so bili nekateri sorodni rezultati objavljeni že prej. Tako je König dokazal izrek, za katerega se je kasneje izkazalo, da je ekvivalenten Hallovemu izreku. Pri tem z ekvivalentnostjo mislimo na dejstvo, da je vsak izmed obeh rezultatov relativno preprosta posledica drugega. Tudi Frobenius je posegel na to področje, in sicer je leta 1917 objavil rezultat, ki ga tu navajamo kot posledico 2. Več o zgodovini teh rezultatov lahko preberemo v uvodu knjige [6].

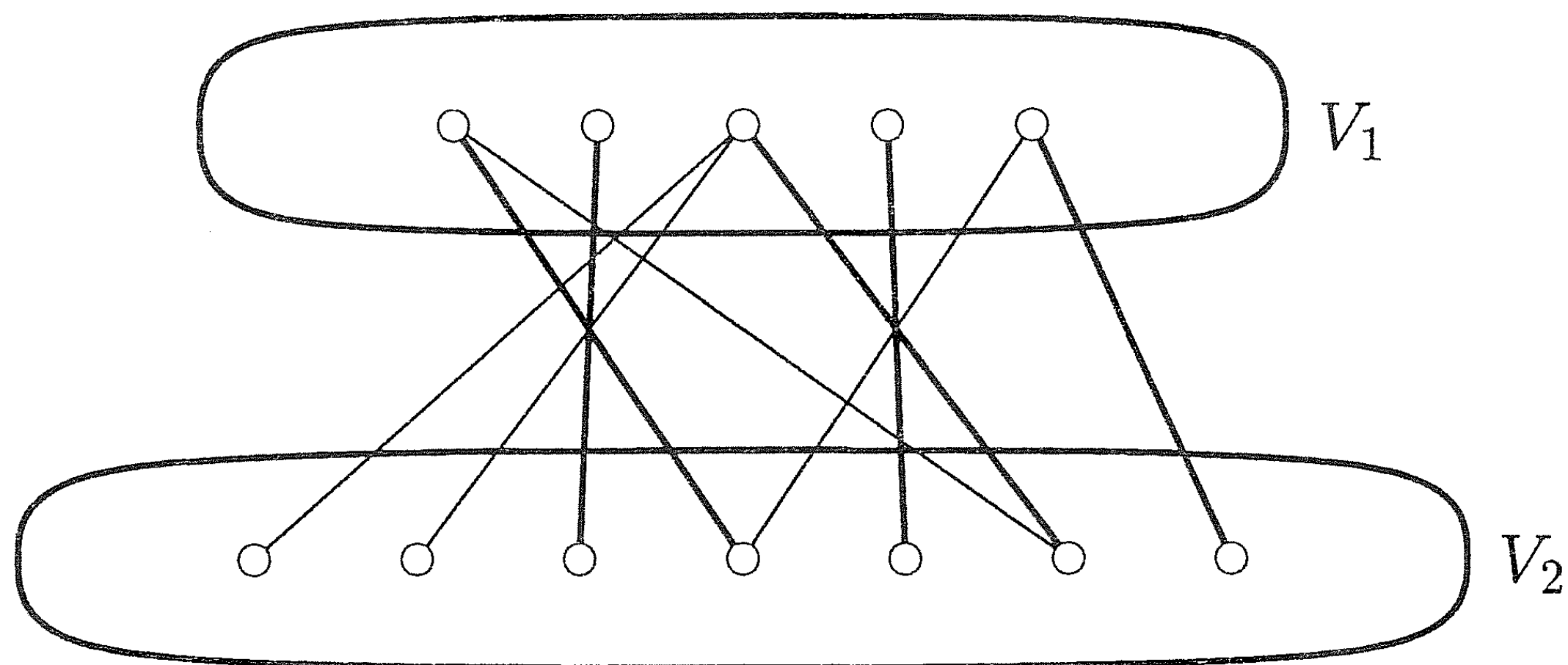
V naslednjem razdelku bomo podali Hallov izrek v treh različnih oblikah: v smislu teorije grafov, kot rešitev poročnega problema in v jeziku teorije množic. Na kratko bomo še pogledali, kaj se zgodi, če dopustimo tudi obravnavo neskončnih množic. V tretjem razdelku pa bomo predstavili nekatere izmed mnogih uporab Hallovega izreka. Posegli bomo med matrike, permanente in latinske kvadrate.

Za konec uvoda se spomnimo tistih pojmov iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Vsi obravnavani grafi bodo končni grafi brez večkratnih povezav in zank. $V(G)$ naj označuje množico točk grafa G in $E(G)$ množico njegovih povezav. Naj bo G graf in $W \subseteq V(G)$. Tedaj z $N(W)$ označimo množico vseh točk grafa G , ki so sosedne z vsaj eno točko iz W . Z drugimi besedami, $N(W)$ je množica sosedov točk iz W . Graf je r -regularen, če je stopnja vsake njegove točke enaka r .

Graf je *dvodelen*, če lahko njegove točke razdelimo v dve množici tako, da ima vsaka povezava grafa eno krajišče v prvi in drugo krajišče v drugi množici. Znano je, in tudi ni težko videti, da je graf dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje ciklov lihe dolžine.

Množici neodvisnih povezav grafa pravimo tudi *prirejanje*. Prirejanje je torej takšna množica povezav, v kateri nobeni dve nimata skupnega krajišča. Prirejanje je *popolno*, če je vsaka točka grafa krajišče neke povezave prirejanja. Če ima graf popolno prirejanje, tedaj ima seveda sodo število točk. Naj bo G dvodelen graf, kjer je $V(G) = V_1 \cup V_2$ razdelitev točk

grafa G v neodvisni množici, torej vse povezave v G potekajo med V_1 in V_2 . Prirejanje v G , ki se s svojimi povezavami dotika vseh točk iz V_1 , imenujemo *prirejanje, ki pokrije V_1* . Na sliki 1 je primer takega prirejanja. Povezave iz prirejanja so prikazane krepko.



Slika 1. Prirejanje, ki pokrije V_1 .

2. Hallov izrek in njegove variacije

Hallov izrek odgovori na vprašanje, kdaj v dvodelnem grafu G z razbitjem točk $V(G) = V_1 \cup V_2$ obstaja prirejanje, ki pokrije V_1 . Naj bo W poljubna podmnožica točk v V_1 . Da bo iskano prirejanje obstajalo, mora prav gotovo veljati $|N(W)| \geq |W|$, saj v nasprotnem nimamo niti prirejanja, ki pokrije W . Ta očitno potrebni pogoj za obstoj prirejanja, ki pokrije V_1 , imenujemo *Hallov pogoj*. Natančneje, Hallov pogoj za množico V_1 v dvodelnem grafu G z razbitjem točk $V(G) = V_1 \cup V_2$ pravi:

$$\forall W \subseteq V_1 : |N(W)| \geq |W|. \quad (1)$$

Presenetljivo pa je, da je Hallov pogoj tudi zadostni pogoj, kot pravi naslednji izrek.

Izrek 1 (Hallov izrek z grafi). *Naj bo G dvodelen graf z razbitjem točk $V(G) = V_1 \cup V_2$. Tedaj obstaja prirejanje, ki pokrije V_1 , natanko tedaj, ko je izpolnjen Hallov pogoj (1).*

Dokaz. Videli smo že, da je pogoj potreben. Dokaz zadostnosti bomo naredili z indukcijo na $m = |V_1|$. Za $m = 1$ trditev očitno velja, saj Hallov pogoj zagotavlja, da ima edina točka iz V_1 vsaj enega soseda v V_2 . Naj bo sedaj $m \geq 2$ in naj trditev velja za vse primere, ko je $|V_1| < m$. Ločimo dva primera:

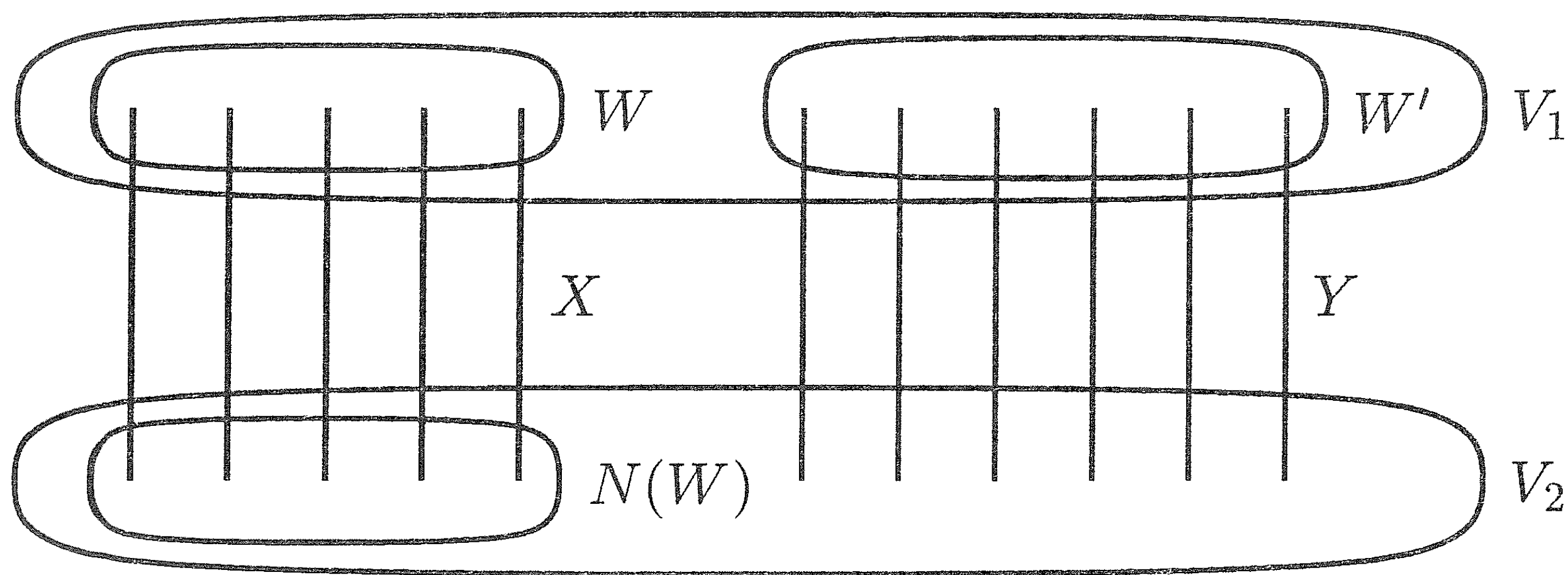
Primer 1. Za vsako podmnožico $W \subset V_1$ z $|W| = k < m$ velja $|N(W)| > k$.

V tem primeru izberemo poljubno povezavo grafa G , recimo v_1v_2 , kjer je $v_1 \in V_1$. Na $m - 1$ točkah množice $V_1 \setminus \{v_1\}$ je zaradi predpostavke

tega primera izpolnjen Hallov pogoj tudi v grafu $G - v_1 - v_2$, zato po indukcijski predpostavki obstaja prirejanje med $V_1 \setminus \{v_1\}$ in $V_2 \setminus \{v_2\}$, ki pokrije $V_1 \setminus \{v_1\}$. Skupaj s povezavo v_1v_2 dobimo prirejanje, ki pokrije V_1 .

Primer 2. Obstaja podmnožica $W \subset V_1$, $|W| = k < m$, za katero je $|N(W)| = k$.

Po indukcijski predpostavki obstaja prirejanje X , ki pokrije W (glej sliko 2). Naj bo $W' = V_1 \setminus W$ in naj bo W'' podmnožica v W' s s točkami. Tedaj ima W'' v $V_2 \setminus N(W)$ vsaj s sosedov, sicer bi imela množica $W \cup W''$ manj kot $|W \cup W''| = k + s$ sosedov, to pa ni možno, saj je v G izpolnjen Hallov pogoj. Torej je na W' izpolnjen Hallov pogoj (s sosedi v $V_2 \setminus N(W)$), zato po indukcijski predpostavki obstaja prirejanje Y , ki pokrije W' . Prirejanji X in Y še združimo, pa je dokaz končan. ■



Slika 2. K primeru 2 v dokazu izreka 1.

Gornji dokaz je le eden izmed mnogih znanih dokazov Hallovega izreka. V literaturi pogosto najdemo tudi pristop, ki povečuje prirejanje s tako imenovano metodo alternirajočih poti. Ta pristop je posebej pomemben z algoritmičnega vidika, glej npr. [1].

Iz izreka 1 takoj dobimo naslednji posledici.

Posledica 2. Naj bo G dvodelen graf z razbitjem točk $V(G) = V_1 \cup V_2$. Tedaj ima G popolno prirejanje natanko tedaj, ko je $|V_1| = |V_2|$ in je izpolnjen Hallov pogoj (1).

Dokaz. Naj G premore popolno prirejanje. Tedaj je izpolnjen Hallov pogoj, in ker je G dvodelen graf, je $|V_1| = |V_2|$.

Obratno, če je izpolnjen Hallov pogoj, imamo prirejanje, ki pokrije V_1 . Toda ker je $|V_1| = |V_2|$, je to prirejanje popolno. ■

Posledica 3. Vsak r -regularen dvodelen graf premore popolno prirejanje.

Dokaz. Naj bo G r -regularen dvodelen graf z razbitjem točk $V(G) = V_1 \cup V_2$. Število povezav, ki gredo iz V_1 , je enako $r|V_1|$, in to je seveda enako

$r|V_2|$, tj. številu povezav, ki izstopa iz V_2 . Zato je $|V_1| = |V_2|$. Podobno, če je $W \subseteq V_1$, tedaj iz W izstopa $r|W|$ povezav, število povezav iz $N(W)$ v W pa ne more biti večje od $r|N(W)|$. Torej je $r|W| \leq r|N(W)|$, in odtod dobimo $|N(W)| \geq |W|$. Uporabimo posledico 2 in dokaz je končan. ■

Pojasnimo sedaj „poročnointerpretacijo izreka. Imejmo skupino fantov in skupino deklet, kjer za vsakega fanta vemo, katera dekleta pozna. Vprašanje je, ali lahko vse fante poročimo tako, da je vsak poročen z dekletom, ki ga pozna. To vprašanje imenujemo *poročni problem*. Če fantom priredimo točke ene množice in dekletom točke druge množice razbitja točk dvodelnega grafa, v katerem so povezave podane na naraven način (fant je povezan z dekleti, ki jih pozna), očitno sprašujemo, ali obstaja prirejanje, ki pokrije množico fantov. Zapišimo to kot izrek:

Izrek 4. (Hallov izrek – poročna oblika). *Poročni problem je rešljiv natanko tedaj, ko vsaka skupina k fantov, $k \geq 1$, skupaj pozna vsaj k deklet.*

Obstaja še tretja standardna interpretacija Hallovega izreka, ta je v jeziku teorije množic. Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_n$ podmnožice končne množice S . Elemente $a_1, a_2, \dots, a_n$ množice S imenujemo *sistem različnih predstavnikov* množic $A_1, A_2, \dots, A_n$, če so ti elementi paroma različni in je $a_i \in A_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Naj bo G dvodelen graf z razbitjem točk $V_1 \cup V_2$, kjer postavimo $V_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ in $V_2 = S$. Točko $i \in V_1$ povežemo s tistimi točkami v V_2 , ki pripadajo množici A_i . Prav hitro vidimo, da sistemom različnih predstavnikov množic $A_1, A_2, \dots, A_n$ ustrezajo ravno prirejanja, ki pokrijejo V_1 . Zato imamo:

Izrek 5. (Hallov izrek z množicami). *Sistem različnih predstavnikov množic $A_1, A_2, \dots, A_n$ obstaja natanko tedaj, ko ima unija poljubnih k izmed teh množic, $1 \leq k \leq n$, vsaj k elementov.*

Seznam variant Hallovega izreka s tem še ni izčrpan. Ravno tako obstajajo tudi mnoge njegove posplošitve. Na primer, Rado je dokazal posplošitev na matroide. Vendar nam bodo zgornje različice zadoščale.

Za konec razdelka bežno pogledjmo, kaj se zgodi, če pri interpretaciji z množicami dopuščamo tudi neskončne množice. Najprej povejmo, da v tem primeru izrek ne velja. Na primer, naj bo

$$A_0 = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{2\}, \quad A_3 = \{3\}, \quad \dots$$

Tedaj je v uniji k izmed množic A_i vsaj k elementov in v uniji neskončnega števila množic je neskončno elementov. Toda po drugi strani opazimo, da ne moremo najti sistema različnih predstavnikov, saj če izberemo i za predstavnika množice A_0 , ne moremo izbrati predstavnika množice A_i . Pač pa velja naslednji izrek, ki ga tu navajamo brez dokaza, bralec ga lahko najde v [1, str. 318].

Izrek 6. Naj bo $\{A_i \mid i \in I\}$ družina končnih množic in naj za vsako končno množico indeksov J velja $|\bigcup_{j \in J} A_j| \geq |J|$. Tedaj ima družina množic $\{A_i \mid i \in I\}$ sistem različnih predstavnikov.

Kot zanimivost dodajmo, da je slednji izrek dokazal Marshall Hall. (Hallow izrek imenujemo po Philipu Hallu.)

3. Uporabe Hallovega izreka

V nadaljevanju bomo prikazali nekaj najbolj znanih uporab Hallovega izreka in tako vsaj delno utemeljili, da gre res za enega najpomembnejših izrekov s področja kombinatorne teorije množic.

3.1 Matrike

Začnimo s Königovim izrekom, ki smo ga omenili v uvodu. Najprej ga bomo formulirali v matrični obliki, kasneje pa še v grafovski. $(0, 1)$ -matrika je matrika, katere elementi so 0 ali 1. Vrstici ali stolpcu matrike bomo rekli *vrsta*. Dve enici $(0, 1)$ -matrike sta *neodvisni*, če ne ležita v isti vrsti.

Izrek 7 (Königov izrek – matrična oblika). Naj bo A $(0, 1)$ -matrika. Tedaj je minimalno število vrst, ki vsebujejo vse enice matrike A , enako maksimalnemu številu neodvisnih enic v A .

Dokaz. Naj bo m minimalno število vrst, ki vsebujejo vse enice matrike A , in naj bo M maksimalno število neodvisnih enic v A . Očitno velja $m \geq M$, saj za vsako neodvisno enico potrebujemo vsaj eno vrsto, s katero jo pokrijemo.

Dokazati moramo še, da je $M \geq m$. Recimo, da minimalno pokritje enic matrike A z vrstami vsebuje v vrstic in s stolpcev. Torej je $m = v + s$. Lahko predpostavimo, da imamo tako minimalno pokritje, ki vsebuje prvih v vrstic in prvih s stolpcev. Za $i = 1, 2, \dots, v$ sedaj postavimo $A_i = \{j \mid a_{ij} = 1, j > s\}$. Če bi unija k izmed teh množic vsebovala kvečjemu $k - 1$ elementov, bi lahko ustreznih k vrstic pokritja nadomestili s $k - 1$ stolpci, kar ni možno. Torej imajo množice A_i po izreku 5 sistem različnih predstavnikov. Z drugimi besedami, v prvih v vrsticah imamo v neodvisnih enic, ki niso v prvih s stolpcih. Analogno vidimo, da imamo v prvih s stolpcih s neodvisnih enic, ki niso v prvih v vrsticah. Torej je $M \geq v + s = m$. ■

Königov izrek je torej posledica Hallovega izreka. Kot smo omenili že prej, velja tudi obratno, namreč Hallow izrek lahko izpeljemo kot posledico Königovega izreka.

Prevedimo sedaj Königov izrek še v grafovsko obliko, v kateri je König originalno formuliral rezultat. Množica točk U grafa G je *pokritje povezav*, če ima vsaka povezava iz $E(G)$ vsaj eno krajišče v množici U .

Izrek 8. (Königov izrek – grafovska oblika). *Naj bo G dvodelen graf. Tedaj je velikost največjega prirejanja v G enaka velikosti najmanjšega pokritja povezav v G .*

Da je izrek 8 res druga oblika izreka 7, naj se prepriča bralec sam. Namig: $(0,1)$ -matriki priredimo dvodelni graf, v katerem so točke ene množice razbitja vrstice matrike, točke druge množice razbitja pa so njeni stolpci. Povezavo med točkama potegnemo tedaj, ko je na ustreznem mestu v matriki enica.

Kot drugi primer uporabe Hallovega izreka na matrikah podajmo naslednji izrek, ki je znan kot Birkhoffov izrek. Spomnimo se, da je *permutacijska matrika* $(0,1)$ -matrika, ki ima v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko eno enico.

Izrek 9. *Naj bo A kvadratna matrika velikosti $n \times n$ z nenegativnimi celoštevilskimi elementi. Če je vsota vsake vrstice in vsakega stolpca v A enaka s , tedaj A lahko zapišemo kot vsoto s permutacijskih matrik.*

Dokaz. Za $s = 1$ izrek velja, saj je tedaj A enaka permutacijski matriki.

Naj bo sedaj $s \geq 2$. Za $i = 1, 2, \dots, n$ postavimo $A_i = \{j \mid a_{ij} > 0\}$. Oglejmo si unijo poljubnih k izmed teh množic. Vsota elementov ustreznih vrstic matrike A je ks , vsota vsakega stolpca pa je enaka s . Zato so neničelni elementi izbranih vrstic v vsaj k različnih stolpcih. To pomeni, da lahko uporabimo Hallov izrek in zaključimo, da imajo te množice sistem različnih predstavnikov. Le-ta določa permutacijsko matriko P , ki jo lahko odštejemo od matrike A . Po indukcijski predpostavki pa lahko matriko $A - P$ zapišemo kot vsoto $s - 1$ permutacijskih matrik in dokaz je končan. ■

3.2. Permanente

Ostanimo še malo pri linearni algebri in se najprej spomnimo definicije determinante kvadratne matrike A velikosti $n \times n$:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

Pri tem vsota teče po vseh permutacijah π na n elementih, $s(\pi)$ pa označuje predznak permutacije. Če gornjo vsoto poenostavimo, dobimo *permanento* matrike A :

$$\text{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

Permanenta kvadratne matrike je torej definirana kot vsota vseh tistih produktov njenih elementov, pri katerih iz vsake vrstice in vsakega stolpca izberemo natanko po en element.

Zvezo med permanentami in sistemi različnih predstavnikov dobimo na naslednji način. Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_n$ podmnožice množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Definirajmo matriko A z:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & i \in A_j, \\ 0; & i \notin A_j. \end{cases}$$

Za tako definirano matriko A velja:

Trditev 10. *Število sistemov različnih predstavnikov množic $A_1, A_2, \dots, A_n$ je enako $\text{per}(A)$.*

Dokaz. Sistem različnih predstavnikov množic $A_1, A_2, \dots, A_n$ očitno ustreza neničelnemu produktu v izračunu permanente matrike A . Vrednost tega produkta je enaka 1. Obratno, vsak neničelni produkt v izračunu permanente ima vrednost 1 in ustreza sistemu različnih predstavnikov množic $A_1, A_2, \dots, A_n$. Torej je vrednost permanente enaka številu sistemov različnih predstavnikov. ■

Čeprav smo definicijo permanente dobili s poenostavitvijo definicije determinante, je izračun permanente neprimerno težji kot izračun determinante. Znano je, da lahko determinanto poljubne racionalne matrike izračunamo v polinomskem času. Po drugi strani pa je Valiant [8] dokazal, da je naslednji problem #P-poln:

Problem: Izračun permanente $(0, 1)$ -matrike.

Vhod: $(0, 1)$ -matrika A reda n .

Izhod: $\text{per}(A)$.

Sedaj sledi odstavek, ki ga lahko vsi, ki jih teoretično računalništvo ne zanima, brez škode izpustijo. #P-polnost je definirana analogno z običajno NP-polnostjo, le da gre pri tem za Turingove stroje, ki štejejo. Na kratko, *Turingov stroj za štetje* je nedeterministični Turingov stroj, ki za dani vhodni niz vrne **število**, kolikokrat je stroj sprejel ta niz. Razred #P tvorijo vse funkcije, ki so v polinomskem času izračunljive na Turingovem stroju za štetje. Problem Π je *#P-težak*, če lahko nanj v polinomskem času (Turingovo) prevedemo vsak problem iz #P. Če nadalje Π pripada #P, je problem Π *#P-poln*. Tiste, ki so prebrali odstavek do konca, za podrobnosti napotimo v [3].

Omenimo, da je preštevalna oblika večine NP-polnih problemov #P-polna. Zgornji problem izračuna permanente pa je bolj zanimiv. Po eni strani znamo učinkovito ugotoviti, ali ima dani dvodelni graf popolno prirejanje, po drugi strani pa je problem preštevanja popolnih prirejanj v dvodelnem grafu #P-poln problem. Z drugimi besedami, gre za problem, ki je v odločljivi varianti polinomski, v preštevalni različici pa #P-poln.

Več o permanentah lahko preberemo v monografiji [7].

3.3. Latinski kvadrati

Latinski pravokotnik reda $m \times n$, $m \leq n$, je matrika velikosti $m \times n$, katere elementi so števila iz množice $\{1, 2, \dots, n\}$, pri čemer velja, da imamo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu same različne elemente. *Latinski kvadrat* reda n je latinski pravokotnik reda $n \times n$.

Hallov izrek lahko uporabimo tudi za dokaz naslednjega rezultata:

Izrek 11. *Vsak latinski pravokotnik reda $m \times n$, kjer je $m < n$, lahko dopolnimo do latinskega pravokotnika reda $(m + 1) \times n$.*

Dokaz. Za $i = 1, 2, \dots, n$ naj bo množica A_i definirana kot množica tistih števil iz $\{1, 2, \dots, n\}$, ki se ne pojavijo v i -tem stolpcu latinskega pravokotnika. Izberimo poljubnih k izmed teh množic. Trdimo, da je v njihovi uniji vsaj k števil. Če upoštevamo ponavljanja, potem je v tej uniji $k(n - m)$ števil. Če bi bilo med njimi manj kot k različnih, bi se eno pojavilo več kot $(n - m)$ -krat. Toda to ni možno. Zato imajo množice A_i po Hallovem izreku sistem različnih predstavnikov, ki ga lahko uporabimo za razširitev latinskega pravokotnika na $(m + 1)$ -vo vrstico. ■

Iz gornjega izreka seveda takoj sledi, da lahko vsak latinski pravokotnik dopolnimo do latinskega kvadrata. S pomočjo Hallovega izreka pa lahko dokažemo še marsikaj drugega. Iz ene izmed njegovih variant sledi, da je število latinskih kvadratov reda n vsaj $1! \cdot 2! \cdots n!$. Dokaz tega dejstva, kot tudi omenjeno varianto Hallovega izreka, najdemo v [1]. Prav tako bi lahko izpeljali potreben in zadosten pogoj za razširljivost delnega latinskega kvadrata (kvadrata, v katerem so zapisani le nekateri elementi) do latinskega kvadrata, glej npr. [5]. Ker pa je Obzornik pred kratkim že pisal o latinskih kvadratih (glej [2]), izpeljav tu ne bomo naredili. Za konec dodajmo le še to, da lahko latinske kvadrate uspešno obravnavamo tudi s pomočjo barvanj povezav grafov, glej [2,4].

LITERATURA

- [1] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [2] J. Čer-Titan, *Barvanje povezav grafa, latinski kvadrati in problem urnika*, Obzornik mat. fiz. **42** (1995) 107–117.
- [3] D. S. Johnson, *A Catalog of Complexity Classes*, Poglavje 2 v Handbook of Theoretical Computer Science (J. van Leeuwen, urednik), Elsevier, Amsterdam, 1990, 69–161.
- [4] M. Juvan, *Osnovno o seznamskih barvanjih*, Obzornik mat. fiz. **44** (1997) 65–73.
- [5] L. H. van Lint in R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [6] L. Lovász in M. D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Mathematics 29, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [7] H. Minc, *Permanents*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1978.
- [8] L. G. Valiant, *The complexity of computing the permanent*, Theoret. Comput. Sci. **8** (1979) 189–201.

O KONSTRUKCIJAH Z RAVNILOM IN ŠESTILOM

MARJAN JERMAN

Math. Subj. Class (1991): 12-01, 15A03

Pokazano je, katera števila lahko narišemo le s pomočjo ravnila in šestila. Podanih je nekaj geometričnih primerov.

RULER AND COMPASS CONSTRUCTIONS

We show which real numbers can be constructed using ruler and compass only. Some geometrical examples are given.

1. Kaj moremo narisati

Na voljo imamo velik list papirja, ki nam bo rabil kot model ravnine $\mathbb{R}^2$, ravnilo, na katerem je označena enota 1, in običajno šestilo. Narišimo abscisno os in si izberimo izhodišče $(0, 0)$. Katere točke na abscisni osi lahko natančno določimo le s pomočjo ravnila in šestila? Če moremo na tak način določiti točko $(x, 0)$, bomo rekli, da *moremo narisati število x* . Množico vseh števil, ki se dajo narisati, označimo z $\mathcal{F}$.

Z ravnilom lahko rišemo premice, s šestilom pa krožnice. Seveda smemo vsako premico potegniti le skozi že določeni točki. Šestilo smemo zapičiti le v točko, ki jo že poznamo. Če hočemo narisati krožnico, moramo s šestilom odmeriti njen polmer r . Zato moramo znati narisati tudi število r .

Torej se da določiti natanko tiste točke, ki jih lahko dobimo s končnim zaporedjem operacij naslednjih treh tipov:

- (i) sekanje dveh premic;
- (ii) sekanje premice in krožnice;
- (iii) sekanje dveh krožnic.

Na premico $p \subset \mathbb{R}^2$ lahko skozi dano točko $T \in \mathbb{R}^2$ načrtamo pravokotnico q na dobro poznani način. Če skozi točko T potegnemo pravokotnico na dobljeno premico q , smo s tem dobili vzporednico k premici p skozi točko T (slika 1).

Naš premislek nam pove, da lahko točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ določimo natanko takrat, ko znamo narisati števili x in y .

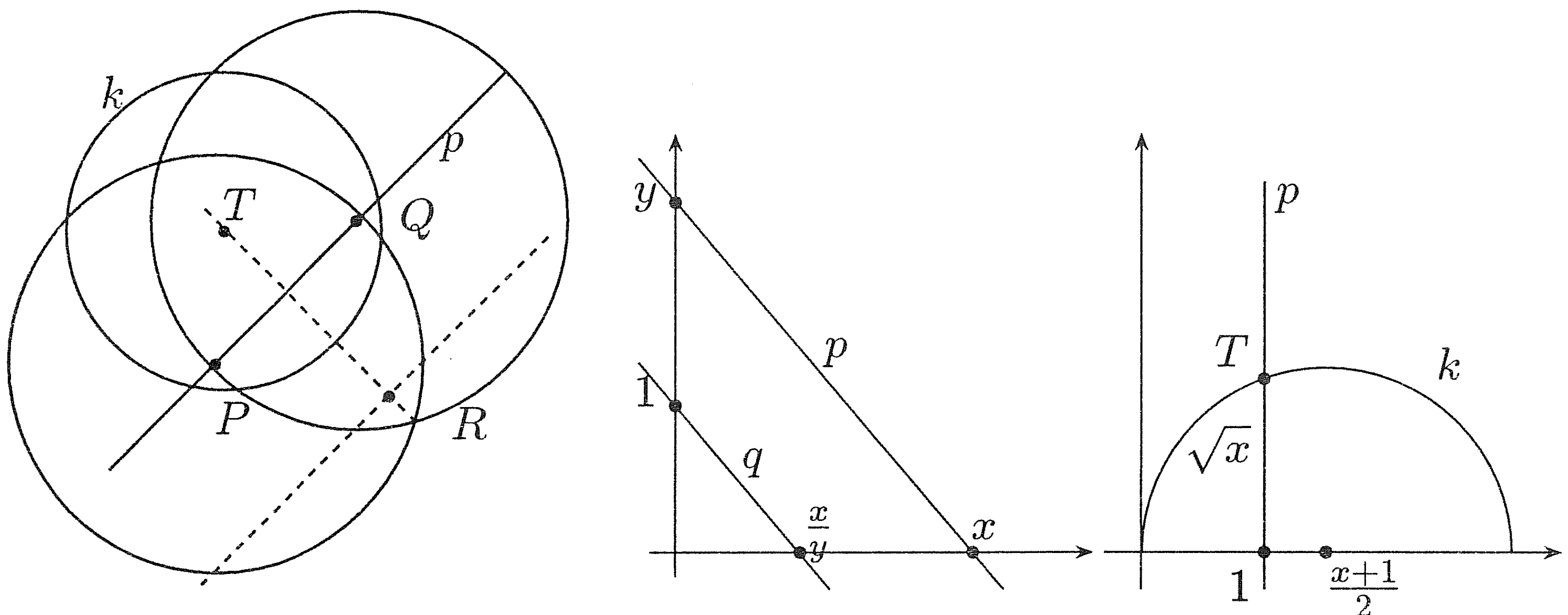
Recimo, da znamo narisati števili x in y . Katera števila lahko še narišemo?

- (a) Samo s premikom lahko narišemo *razliko* $x - y$ in *vsoto* $x + y$. Ker imamo na ravnilu označeno enoto 1, lahko s tem postopkom narišemo vsa cela števila.
- (b) Če je število y različno od nič, lahko s pomočjo podobnosti narišemo tudi *ulomek* x/y . Potegnimo premico p skozi točki $(x, 0)$ in $(0, y)$. Skozi točko $(0, 1)$ potegnimo vzporednico q k premici p . Premica

q seka abscisno os v točki $(x/y, 0)$ (slika 2). Zato lahko narišemo katerokoli racionalno število, torej je $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F}$.

- (c) Lahko narišemo tudi *produkt* xy . Število 0 že imamo. Če je $y \neq 0$, znamo po prejšnji točki narisati ulomek $1/y$. Zato znamo narisati tudi ulomek $\frac{x}{1/y} = xy$.
- (d) Če je število x nenegativno, znamo narisati *koren* $\sqrt{x}$. Narišimo krožnico k s središčem v točki $(\frac{x+1}{2}, 0)$ in polmerom $\frac{x+1}{2}$. Načrtajmo premico p , ki je pravokotna na abscisno os in gre skozi točko $(1, 0)$. Presečišče krožnice k in premice p označimo s T . Razdalja med točkama T in $(1, 0)$ je $\sqrt{x}$ (slika 3).

Po točkah (a), (b) in (c) je množica $\mathcal{F}$ zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje z neničelnim številom. Zato je $\mathcal{F}$ obseg, vsebovan med obsegoma $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.



Slike 1, 2 in 3

Recimo, da po nekaj korakih (i), (ii) in (iii) skonstruiramo števila, ki ležijo v množici $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$. Po točkah (a), (b) in (c) $\mathcal{K}$ lahko razširimo do najmanjšega obsega, ki $\mathcal{K}$ vsebuje. Zato lahko privzamemo, da je množica $\mathcal{K}$ obseg.

Katere nove točke lahko dobimo v naslednjem koraku? Ločimo vse tri že omenjene primere.

- (i) Naj bosta p in q nevzporedni premici, ki potekata vsaka skozi različni točki s koordinatama v obsegu $\mathcal{K}$. Ko računamo implicitni enačbi obeh premic, koordinate seštevamo, odštevamo, delimo in množimo, zato so koeficienti v implicitni enačbi elementi iz obsega $\mathcal{K}$. Naj bosta ustrezni enačbi

$$p: ax + by = c \quad \text{in} \quad q: dx + ey = f; \quad a, b, c, d, e, f \in \mathcal{K}.$$

Presečišče (x, y) je rešitev zgornjega sistema linearnih enačb. Ker se premici p in q ne sekata, je determinanta tega sistema $ae - bd$ različna od 0 in števili

$$x = \frac{ce - fb}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

ležita v obsegu $\mathcal{K}$. S tem korakom tako ne pridobimo novih števil.

- (ii) Naj bo k krožnica s središčem (a, b) in polmerom r , kjer so a, b in r števila iz obsega $\mathcal{K}$. Enačba krožnice se tedaj glasi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad a, b, r \in \mathcal{K}.$$

Premica p , podana implicitno z enačbo

$$cx + dy = e, \quad c, d, e \in \mathcal{K},$$

naj seka krožnico k v točki (x, y) . Vsaj eden od koeficientov c in d je različen od nič. Presek (x, y) je tako rešitev sistema zgornjih enačb. Ker je vsaj eden od koeficientov c, d neničeln, lahko iz druge enačbe izrazimo bodisi x z y bodisi y z x . Ko to vstavimo v enačbo krožnice, dobimo kvadratno enačbo z eno spremenljivko. Njena diskriminanta D leži v obsegu $\mathcal{K}$. Znan obrazec za rešitev kvadratne enačbe nam pove, da smo pridelali števili x in y oblike

$$x = f + g\sqrt{D}, \quad y = h + j\sqrt{D}, \quad f, g, h, j \in \mathcal{K}.$$

- (iii) Ostane nam še primer dveh sekajočih se krožnic. Naj bosta podani z enačbama

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{in} \quad (x - c)^2 + (y - d)^2 = s^2, \quad a, b, c, d, r, s \in \mathcal{K}.$$

Če točka (x, y) zadošča obema enačbama, zagotovo zadošča tudi razliki obeh enačb:

$$2x(c - a) + 2y(d - b) = r^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2 - s^2.$$

To pa je enačba premice, kakršno smo obravnavali v točki (i).

Zato naše presečišče lahko dobimo kot eno od rešitev sistema kvadratne enačbe in linearne enačbe s koeficienti v obsegu $\mathcal{K}$. S tem smo točko (iii) prevedli na točko (ii).

Tako smo videli, da nam en korak na poti od $\mathcal{K}$ do $\mathcal{F}$ prinese največ števil oblike $a + b\sqrt{D}$ in $c + d\sqrt{D}$, kjer so a, b, c, d in D števila iz obsega $\mathcal{K}$. Po točkah (a), (b) in (c) smemo množico $\mathcal{K} \cup \{\sqrt{D}\}$ razširiti do najmanjšega obsega, ki jo vsebuje. Temu obsegu pravimo *obseg, dobljen s privzemom (adjunkcijo) elementa $\sqrt{D}$* , in ga označimo s simbolom $\mathcal{K}(\sqrt{D})$. Malo bolj natančno si oglejmo njegovo zgradbo. Izberimo si pozitivno število $D \in \mathcal{K}$, ki ni kvadrat nobenega elementa iz obsega $\mathcal{K}$. Množica

$$\{a + b\sqrt{D}; \quad a, b \in \mathcal{K}\}$$

je očitno zaprta za seštevanje, odštevanje in množenje. Ker je

$$\frac{1}{a + b\sqrt{D}} = \frac{a}{a^2 - b^2D} - \frac{b}{a^2 - b^2D}\sqrt{D}$$

in je po privzetku $D \neq \left(\frac{a}{b}\right)^2$, je zaprta tudi za deljenje z neničelnim številom. Zato je ta množica enaka obsegu $\mathcal{K}(\sqrt{D})$. Množica $\mathcal{K}(\sqrt{D})$ je tako dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{K}$ z bazo $\{1, \sqrt{D}\}$.

Zaporedni koraki operacij tipa (i), (ii) ali (iii) nam dajo končno strogo naraščajočo verigo obsegov

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \dots \subset \mathcal{K}_m, \quad (1)$$

v kateri je vsak obseg dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom, ki leži v verigi mesto pred njim. Vsak obseg te verige vsebuje vsa števila, ki jih moremo na danem koraku narisati.

Za dokončno določitev števil, ki se dajo narisati, rabimo naslednjo ugotovitev:

Lema 1. *Naj za obsega K in F velja $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq F$. Če je K m -razsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$ in F n -razsežen vektorski prostor nad obsegom K , je F mn -razsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$.*

Dokaz je enostavna vaja iz linearne algebre. Bralec ga lahko najde v Vidavovi knjigi [2, IX.3, izrek 6].

Recimo, da znamo narisati realno število r . Tedaj zagotovo obstaja veriga oblike (1), katere zadnji obseg $\mathcal{K}_m$ vsebuje število r . Naj bo $\mathbb{Q}(r)$ obseg, ki ga dobimo s privzemom števila r k racionalnim številom. Tedaj velja

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(r) \subseteq \mathcal{K}_m.$$

Po prejšnji lemi je obseg $\mathcal{K}_m$ vektorski prostor razsežnosti 2^m nad obsegom $\mathbb{Q}$. Po isti lemi mora biti razsežnost vektorskega prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ delitelj števila 2^m . To pa se zgodi natanko tedaj, ko je razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ nenegativna potenca števila 2.

Po točki (d) znamo narisati kvadratne korene že narisanih pozitivnih števil, zato lahko na vsakem koraku obsegu že narisanih števil dodamo poljuben kvadratni koren števila, ki smo ga narisali na enem od prejšnjih korakov. Zato lahko narišemo vsa tista števila $r \in \mathbb{R}$, za katera je razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ nenegativna potenca števila 2.

Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 2. *Število $r \in \mathbb{R}$ se da narisati le s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom $\mathbb{Q}$, enaka nenegativni potenci števila 2.*

2. Razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ in zgledi

Naj bo r realno število, ki ga želimo narisati. Če hočemo našo teorijo koristno uporabiti, je treba ugotoviti, kako izračunati razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$ kot vektorskega prostora nad obsegom $\mathbb{Q}$. Tej razsežnosti pravimo tudi *stopnja razširitve obsega* $\mathbb{Q}$.

Naj bo r realno število, ki je ničla kakšnega neničelnega polinoma z racionalnimi koeficienti. *Minimalni polinom* števila r je polinom $m \in \mathbb{Q}[x]$ z vodilnim koeficientom 1, ki ima najnižjo stopnjo med vsemi neničelnimi polinomi $p \in \mathbb{Q}[x]$, ki ustrezajo pogoju $p(r) = 0$.

Dobro je znano (in lahko je dokazati), da minimalni polinom m deli vsak polinom $p \in \mathbb{Q}[x]$ z ničlo r . (Glej na primer Vidavovo knjigo [2], IX.1) Pri računanju stopnje razširitve nam prihrani veliko računskih neprijetnosti naslednji izrek iz teorije obsegov:

Izrek 3. *Naj bo r realna ničla kakšnega neničelnega polinoma z racionalnimi koeficienti. Najmanjši obseg, ki vsebuje unijo $\mathbb{Q} \cup \{r\}$, je enak najmanjšemu podkolobarju v $\mathbb{R}$, ki vsebuje unijo $\mathbb{Q} \cup \{r\}$.*

Tudi dokaz tega izreka ni težak. Zahteva le nekaj osnovnega znanja o kolobarju polinomov. Bralec ga lahko najde v Vidavovi knjigi [2, IX.1, izrek 2].

Izrek ima ugodne posledice. Naj ima število r minimalni polinom m stopnje k . Lahko je premisliti, da je najmanjši kolobar, ki vsebuje unijo $\mathbb{Q} \cup \{r\}$, množica oblike

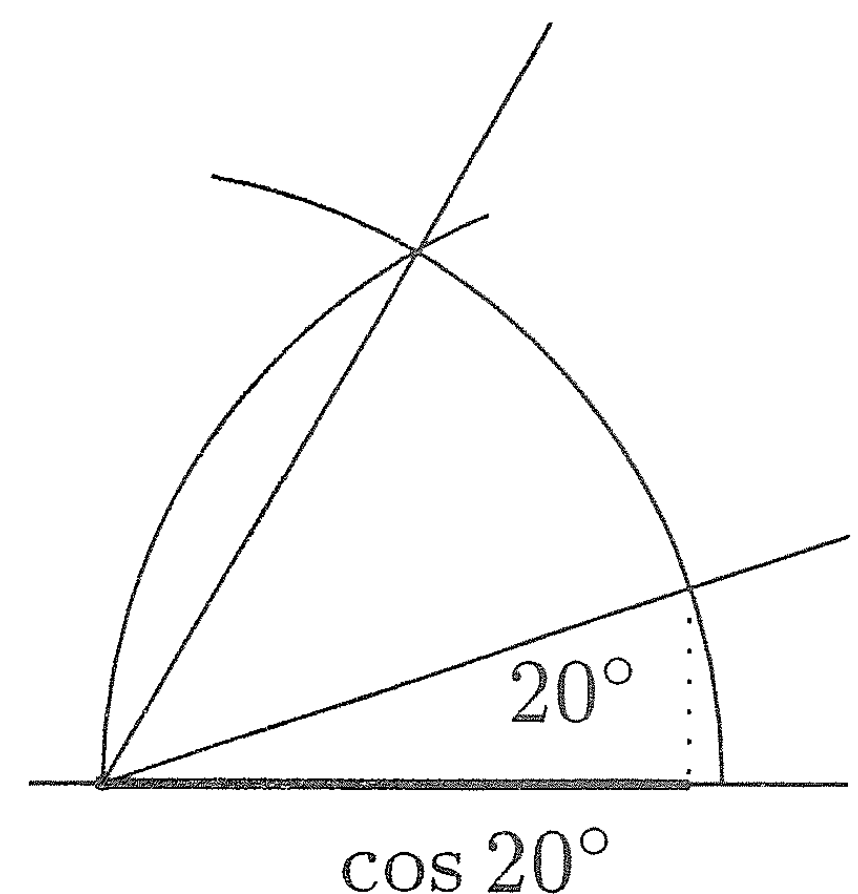
$$\mathcal{M} = \{a_0 + a_1 r + \dots + a_{k-1} r^{k-1}; a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{Q}\}.$$

Zelo neprijetno bi bilo z elementarnimi sredstvi pokazati, da so tudi obratne vrednosti elementov iz množice $\mathcal{M}$ v tej množici. Tako ima obseg $\mathbb{Q}(r)$ kot vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$ ogrodje, sestavljeno iz elementov $\{1, r, r^2, \dots, r^{k-1}\}$. Ker je m polinom najnižje stopnje, za katerega je $m(r) = 0$, je to ogrodje baza prostora $\mathbb{Q}(r)$. Zato je stopnja razširitve obsega $\mathbb{Q}(r)$ enaka stopnji minimalnega polinoma števila r .

Trisekcija kota. S tem smo pripravili teren za rešitev zelo starega problema, ki pravi, da se samo z ravnilom in šestilom ne da razdeliti poljubnega kota na tri enake dele.

Pokažimo, da nam to ne uspe pri kotu 60° .

Kot 60° znamo narisati. Če bi ga znali razdeliti na tri enake kote, bi znali narisati tudi kot 20° . Ker znamo vleči pravokotnice, bi s tem narisali število $\cos 20^\circ$. Pokažimo, da to ne gre.



Izračunajmo minimalni polinom števila $\cos 20^\circ$. Ker je

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ,$$

ima polinom $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ ničlo $\cos 20^\circ$. Minimalni polinom števila $\cos 20^\circ$ deli polinom p . Če polinom p razpade na produkt dveh polinomov s koeficienti v $\mathbb{Q}$, je eden od polinomov zagotovo linearen. To pa bi pomenilo, da ima polinom p vsaj eno racionalno ničlo. Edini kandidati za racionalne ničle polinoma p so števila iz množice

$$\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}.$$

Nobeno od teh števil ni ničla polinoma p , zato se p ne da razcepiti na produkt dveh polinomov z racionalnimi koeficienti. Minimalni polinom števila $\cos 20^\circ$ je torej enak

$$m(x) = \frac{1}{8}p(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

Tako je razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ enaka 3 in števila $\cos 20^\circ$ se ne da narisati le z ravnilom in šestilom.

Zato trisekcija kota nasploh ni mogoča.

Podvojitev kocke. Neki drug star problem sprašuje naslednje. V prostoru imamo kocko. Ali se da samo z ravnilom in šestilom narisati stranico kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot dana kocka?

Če je stranica kocke dolga 1, je stranica podvojene kocke dolga $\sqrt[3]{2}$. Še lažje kot prej vidimo, da je obseg $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad obsegom $\mathbb{Q}$. Zato podvojitev kocke nasploh ni mogoča.

Konstrukcije likov. Naša metoda nam včasih že samo s pomočjo računanja pove, ali se da kak lik narisati samo s šestilom in ravnilom. Bralca vabim, naj pokaže, da se ne da narisati trikotnika, ki ima dve stranici dolgi 6 in 10, polmer včrtanega kroga pa enak 1.

Z malo več znanja algebre bi lahko pokazali tudi naslednje zanimivo dejstvo:

Izrek 4. *Pravilni n -kotnik lahko narišemo le s šestilom in ravnilom natanko tedaj, ko je število n oblike*

$$n = 2^r(2^{2^s} + 1),$$

kjer sta r in s nenegativni celi števili, število $2^{2^s} + 1$ pa je praštevilo.

Fermat je domneval, da je vsako število oblike $2^{2^s} + 1$ praštevilo. To pa ni res. Že Euler je ugotovil, da je število $2^{2^5} + 1$ sestavljeno. Deljivo je s številom 641.

LITERATURA

- [1] T. W. Hungerford, *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.
- [2] I. Vidav, *Algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1989.

HAUSDORFFOVA RAZDALJA IN ITERACIJSKI FUNKCIJSKI SISTEMI

JANKO BRAČIČ

Math. Subj. Class. (1991): 54E35, 54E50, 54E40

V tem članku najprej pokažemo, kako lahko na družini vseh nepraznih kompaktnih podmnožic metričnega prostora (X, ρ) definiramo Hausdorffovo razdaljo. Potem na kratko obravnavamo iteracijske funkcijske sisteme.

HAUSDORFF METRIC AND ITERATED FUNCTION SYSTEMS

In this paper we show first how the Hausdorff metric in the family of all non-void compact subsets of the metric space (X, ρ) can be defined. Then a short description of iterated function systems is given.

1. Metrični prostori

Definicija. Naj bo X neprazna množica. Realna funkcija

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R},$$

ki zavzame le nenegativne vrednosti, je razdalja na X , če zadošča naslednjim pogojem:

- (i) $\rho(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$,
- (ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ in
- (iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

pri čemer so x, y in z poljubne točke iz X .

Metrični prostor je urejen par (X, ρ) , kjer je X neprazna množica in ρ razdalja na X .

Zgled. Evklidska razdalja med točkama $x = (x_1, \dots, x_k)$ in $y = (y_1, \dots, y_k)$ iz $\mathbb{R}^k$ oz. $\mathbb{C}^k$ je definirana s predpisom

$$d_2(x, y) = (|y_1 - x_1|^2 + \dots + |y_k - x_k|^2)^{1/2}.$$

Ker se v tem članku ne bomo preveč oddaljili od običajne evklidske ravnine – čeprav bomo uporabljali splošne oznake – lahko bralec vedno pomisli na prostor $(\mathbb{R}^2, d_2)$, ko bomo zapisali (X, ρ) . Po drugi strani pa bomo zaradi tega vzeli za znane osnovne topološke pojme in izreke iz teorije metričnih prostorov. V primeru kakršne koli nejasnosti pa bralcu priporočamo, da poišče podrobnejšo razlago v [3]. Tam bo našel tudi dokaz naslednjega izreka, ki govori o skrčitvah polnih metričnih prostorov. Za lažje razumevanje izreka povzemimo po [3]:

Definicija. Preslikava f iz metričnega prostora (X, ρ) vase je *skrčitev* prostora X , če obstaja takšno število $0 \leq s < 1$, da za poljubni točki x in y iz X velja

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y).$$

V nadaljevanju bomo številu s rekli *koeficient skrčitve*.

Izrek 1.1 ([3], Izrek 14.14). Naj bo (X, ρ) poln metričen prostor in $f : X \rightarrow X$ skrčitev prostora X . Potem ima preslikava f natanko eno negibno točko, tj. takšno točko $x_f \in X$, za katero velja $f(x_f) = x_f$. Pri poljubni točki $x_0 \in X$ konvergira zaporedje $\{x_n\}$, ki ga rekurzivno definiramo s formulo $x_n = f(x_{n-1})$, k x_f .

2. Hausdorffova razdalja. Naj bo (X, ρ) poln metričen prostor. Označimo s $\mathcal{H}(X)$ družino vseh nepraznih kompaktnih podmnožic v X . Če sta A in B iz $\mathcal{H}(X)$, potem je tudi $A \cup B$ v $\mathcal{H}(X)$. (Zakaj?) Ni pa nujno, da je $A \cap B$ v $\mathcal{H}(X)$, saj sta A in B lahko disjunktni množici.

Oddaljenost točke $x \in X$ od množice $B \in \mathcal{H}(X)$ je število

$$\rho(x, B) = \min\{\rho(x, y); y \in B\}.$$

Da je definicija dobra, se najlažje prepričamo tako, da definiramo funkcijo $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(y) = \rho(x, y).$$

Zveznost funkcije f sledi iz neenakosti

$$|f(y') - f(y'')| = |\rho(x, y') - \rho(x, y'')| \leq \rho(y', y'').$$

Ker je B kompaktna množica, obstaja takšna točka $b \in B$, da je

$$\rho(x, b) = f(b) \leq f(y) = \rho(x, y), \quad \forall y \in B.$$

Torej je $\rho(x, b) = \min\{\rho(x, y); y \in B\}$ nenegativno število.

Podoben razmislek nas prepriča, da je dobra tudi naslednja definicija.

Za poljubni množici A in B iz $\mathcal{H}(X)$ naj bo

$$D(A, B) = \max\{\rho(x, B); x \in A\}. \quad (2.1)$$

Ker sta A in B neprazni kompaktni množici, obstajata takšni točki $a \in A$ ter $b \in B$, da je

$$D(A, B) = \rho(a, B) = \rho(a, b). \quad (2.2)$$

Z (2.1) ni definirana razdalja na $\mathcal{H}(X)$. Poglejmo naslednji primer.

Zgled. Vzemimo prostor $\mathbb{R}^2$, ki je opremljen z evklidsko razdaljo. Označimo z A zaprti krog s polmerom $r_1 = 1$ in s središčem v koordinatnem začetku, množica B pa naj bo zaprti krog z istim središčem in s polmerom $r_2 = 2$.

Po definiciji je $D(A, B) = \max\{\min\{d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \mathbf{y} \in B\}; \mathbf{x} \in A\}$. Ker je $A \subset B$, je $d_2(\mathbf{x}, B) = \min\{d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \mathbf{y} \in B\} = d_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ pri vsakem $\mathbf{x} \in A$. Torej je tudi $D(A, B) = \max\{d_2(\mathbf{x}, B); \mathbf{x} \in A\} = 0$.

Izračunajmo še $D(B, A)$. Vzemimo točko $x_0 = (2, 0) \in B$. Iz $d_2(x_0, A) = \min\{d_2(x_0, y); y \in A\} = 1$ sledi $D(B, A) \geq 1$. Torej D nima lastnosti (ii), ki smo jo navedli v definiciji razdalje.

Trditev 2.1. *Naj bo (X, ρ) poln metričen prostor. S predpisom*

$$h(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\}, \quad A, B \in \mathcal{H}(X) \quad (2.3)$$

je na $\mathcal{H}(X)$ definirana razdalja.

Dokaz. Očitno za poljubni množici A in B iz $\mathcal{H}(X)$ velja

$$h(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\} = h(B, A)$$

in

$$h(A, A) = D(A, A) = 0.$$

Naj bosta zdaj A in B različni množici iz $\mathcal{H}(X)$. Rekli smo, da obstajata takšni točki $a \in A$ ter $b \in B$, da velja (2.2). Razdalja med poljubnima točkama v X je končno število, zato imamo $D(A, B) < \infty$. Zaradi enakih razlogov velja tudi $D(B, A) < \infty$. Se pravi, da je $h(A, B) < \infty$.

Ker sta A in B različni množici, obstaja vsaj v eni od njiju točka, ki ni v drugi. Recimo, da je $x_0 \in A$ in $x_0 \notin B$. Potem je $h(A, B) \geq \rho(x_0, B) > 0$.

Dokazati moramo še veljavnost trikotniške neenakosti.

Najprej bomo pokazali, da za poljubne tri množice A , B in C iz $\mathcal{H}(X)$ velja $D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$. Pri poljubni točki $a \in A$ je za poljubno točko $c \in C$ res

$$\begin{aligned} \rho(a, B) &= \min\{\rho(a, b); b \in B\} \leq \min\{\rho(a, c) + \rho(c, b); b \in B\} \\ &= \rho(a, c) + \min\{\rho(c, b); b \in B\} = \rho(a, c) + \rho(c, B). \end{aligned}$$

Ker je $\rho(c, B) \leq \max\{\rho(c', B); c' \in C\} = D(C, B)$, velja torej

$$\rho(a, B) \leq \rho(a, C) + D(C, B).$$

Točka $a \in A$ je bila poljubno izbrana, zato je $D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$.

Seveda velja tudi neenakost $D(B, A) \leq D(B, C) + D(C, A)$. Sklepamo torej lahko, da je $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$. ■

Definicija. Razdaljo h na $\mathcal{H}(X)$ imenujemo *Hausdorffova razdalja*.

Zgled. Izračunajmo Hausdorffovo razdaljo med množicama A in B iz prejšnjega zgleda.

Ugotovili smo že, da je $D(A, B) = 0$. Očitno v primeru $x = (x_1, x_2) \in A$ velja $\min\{d_2(x, y) : y \in A\} = 0$. Če pa je $x \in B \setminus A$, imamo $\min\{d_2(x, y) : y \in A\} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1$.

Torej je $D(B, A) = \max\{\min\{d_2(x, y) : y \in A\} : x \in B\} = \max\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 : x \in B \setminus A\} = 1$, kar pomeni, da je Hausdorffova razdalja med množicama A in B enaka 1.

Bralec sam bo premislil, kolikšna je Hausdorffova razdalja med singletonoma $\{x\}$ in $\{y\}$, kjer sta x in y točki iz X .

Pri računanju Hausdorffove razdalje med dvema množicama iz $\mathcal{H}(X)$ si lahko pomagamo z naslednjima pomožnima izrekoma.

Lema 2.2. *Množici A in B naj bosta iz $\mathcal{H}(X)$. Če je $\varepsilon > 0$ poljubno število, potem velja*

$$h(A, B) \leq \varepsilon$$

natanko tedaj, ko je

$$A \subset B_\varepsilon \quad \text{in} \quad B \subset A_\varepsilon,$$

pri čemer smo z A_ε označili množico

$$\{x \in X; \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$$

in ima B_ε podoben pomen.

Dokaz. Najprej dokažimo ekvivalenco $D(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B_\varepsilon$.

Vzemimo, da je $D(A, B) \leq \varepsilon$. To pomeni, da je $\max\{\rho(a, B); a \in A\} \leq \varepsilon$, od koder pri poljubnem $a \in A$ sledi neenakost $\rho(a, B) \leq \varepsilon$. Se pravi, da je $a \in B_\varepsilon$. Ker je $a \in A$ poljubna točka, smo dokazali veljavnost inkluzije $A \subset B_\varepsilon$.

Predpostavimo, da je $A \subset B_\varepsilon$. Potem je $\rho(a, B) \leq \varepsilon$ za poljubno točko $a \in A$. Velja torej $D(A, B) \leq \varepsilon$.

Očitno lahko na enak način dokažemo ekvivalenco $D(B, A) \leq \varepsilon \iff B \subset A_\varepsilon$. Iz obeh ekvivalenc sledi naša trditev. ■

Lema 2.3. *Za poljubne množice K, L, M in N iz $\mathcal{H}(X)$ velja*

$$h(K \cup L, M \cup N) \leq \max\{h(K, M), h(L, N)\}.$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da za poljubne tri množice A, B in C iz $\mathcal{H}(X)$ velja

$$D(A \cup B, C) = \max\{D(A, C), D(B, C)\} \tag{2.4}$$

in

$$D(C, A \cup B) \leq D(C, A), \quad D(C, A \cup B) \leq D(C, B). \tag{2.5}$$

Prva enakost sledi iz tega, kako izračunamo maksimum funkcije na uniji množic:

$$\begin{aligned} D(A \cup B, C) &= \max\{\rho(x, C); x \in A \cup B\} = \\ &= \max\{\max\{\rho(y, C); y \in A\}, \max\{\rho(z, C); z \in B\}\} = \\ &= \max\{D(A, C), D(B, C)\}. \end{aligned}$$

Neenakosti v (2.5) pa sta posledici dejstva, da oddaljenost od večje množice ni večja kot oddaljenost od manjše množice. Namreč, pri vsakem $x \in C$ velja

$$\rho(x, A \cup B) = \min\{\rho(x, y); y \in A \cup B\} \leq \min\{\rho(x, y); y \in A\} = \rho(x, A),$$

zato je

$$D(C, A \cup B) = \max\{\rho(x, A \cup B); x \in C\} \leq \max\{\rho(x, A); x \in C\} = D(A, C).$$

To dokazuje prvo neenakost v (2.5), druga neenakost pa je preprosta posledica prve.

Uporabimo zdaj (2.4) in (2.5):

$$\begin{aligned} D(K \cup L, M \cup N) &= \max\{D(K, M \cup N), D(L, M \cup N)\} \leq \\ &\leq \max\{D(K, M), D(L, N)\} \leq \\ &\leq \max\{h(K, M), h(L, N)\}. \end{aligned}$$

Zamenjajmo vlogo množic K in M ter L in N , upoštevajmo simetričnost Hausdorffove razdalje h , pa imamo še

$$D(M \cup N, K \cup L) \leq \max\{h(K, M), h(L, N)\}.$$

Torej velja tudi

$$\begin{aligned} h(K \cup L, M \cup N) &= \max\{D(K \cup L, M \cup N), D(M \cup N, K \cup L)\} \leq \\ &\leq \max\{h(K, M), h(L, N)\}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Glede na pomen, ki ga imajo med vsemi metričnimi prostori polni metrični prostori, nas seveda zanima, ali je prostor $(\mathcal{H}(X), h)$ poln. Če je (X, ρ) poln metričen prostor, potem je odgovor na zastavljeno vprašanje pritrdilen. O tem govori naslednji izrek, katerega dokaz bo bralec našel v [1].

Izrek 2.4. *Če je (X, ρ) poln metričen prostor, je tudi metričen prostor $(\mathcal{H}(X), h)$ poln.*

Naj bo $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}(X)$ poljubno Cauchyjevo zaporedje, potem je njegova limita enaka množici

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X; \text{ obstaja Cauchyjevo zaporedje } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, \\ &\quad \text{ki konvergira k } x \text{ in zanj velja } x_n \in A_n \text{ pri vsakem } n\}. \end{aligned}$$

Zgled. Naj bo A zaprt krog v prostoru $\mathbb{R}^2$, ki smo ga opremili z evklidsko razdaljo. Pri vsakem indeksu $n \in \mathbb{N}$ naj bo A_n zaprt pravilen $(n+2)$ -kotnik, ki je očrtan krogu A .

Ni težko videti, da pri vsakem številu $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks N , da iz $n \geq N$ sledi $A_n \subset A_\varepsilon$. Ker vedno velja $A \subset A_n$, lahko na osnovi leme 2.2 sklepamo, da iz $n \geq N$ sledi $h(A, A_n) \leq \varepsilon$. Se pravi, da je $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}(X)$ Cauchyjevo zaporedje z limito $A \in \mathcal{H}(X)$. Hitro se lahko prepričamo, da tudi v tem primeru velja zgornja karakterizacija limitne množice.

3. Iteracijski funkcijski sistemi. V tem razdelku bomo ves čas delali s polnim metričnim prostorom (X, ρ) , zato tega ne bomo več posebej poudarjali.

Definicija. Končen nabor skrčitev $w_1, \dots, w_N$ prostora X s koeficienti skrčitve $s_1, \dots, s_N$, imenujemo *iteracijski funkcijski sistem* (krajše *IFS*) s koeficientom $s = \max\{s_1, \dots, s_N\}$.

Če je $\{w_i\}_i^N$ IFS s koeficientom $s \in [0, 1)$, potem je z

$$W(B) = w_1(B) \cup \dots \cup w_N(B), \quad \text{za vse } B \in \mathcal{H}(X) \quad (3.1)$$

definirana skrčitev prostora $\mathcal{H}(X)$ s koeficientom s . Da je to res v primeru $N = 1$, lahko preveri bralec sam. Mi bomo pogledali primer $N = 2$, saj lahko iz njega s pomočjo indukcije sklepamo na splošen primer. Najprej pa povejmo, da je definicija (3.1) dobra. Namreč, preslikave w_i , $i = 1, \dots, N$ so zvezne in torej slikajo kompaktne množice v kompaktne množice; prav tako je unija končno mnogo kompaktnih množic kompaktna množica.

Vzemimo množici B in C iz $\mathcal{H}(X)$. Potem z uporabo leme 2.3. dobimo

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \max\{s_1 h(B, C), s_2 h(B, C)\} \\ &= s h(B, C). \end{aligned}$$

Zdaj, ko vemo, da je s (3.1) definirana skrčitev polnega metričnega prostora $(\mathcal{H}(X), h)$, lahko uporabimo izrek 1.1; prepisan za primer preslikave iz (3.1) se glasi:

Izrek 3.1. Naj bo $\{w_i\}_{i=1}^N$ IFS s koeficientom $s \in [0, 1)$. Potem je z

$$W(B) = w_1(B) \cup \dots \cup w_N(B), \quad \text{za vse } B \in \mathcal{H}(X),$$

definirana skrčitev prostora $\mathcal{H}(X)$ s koeficientom s .

Preslikava $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ ima natanko eno negibno točko A . Če je $A_0 \in \mathcal{H}(X)$ poljubna kompaktna množica, potem za zaporedje $\{A_n\}$ kompaktnih množic, ki je definirano rekurzivno s formulo $A_n = W(A_{n-1})$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. ■

Definicija. Kompaktno množico A iz izreka 3.1 imenujemo *atraktor iteracijskega funkcijskega sistema* $\{w_i\}_{i=1}^N$.

Zgled. Preslikavi $w_1(x) = 0$ in $w_2(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ sta skrčitvi prostora $\mathbb{R}$, ki smo ga opremili z običajno razdaljo. Ker je koeficient skrčitve prve preslikave enak 0, druge pa $\frac{2}{3}$, je

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B), \quad B \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

skrčitev prostora $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ s koeficientom skrčitve $\frac{2}{3}$. Uporabimo izrek 3.1 in poiščimo atraktor A tega IFS.

Naj bo $A_0 = \{0\}$. Naslednji členi zaporedja, ki ga dobimo po formuli $A_k = W(A_{k-1})$, so torej

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, \frac{1}{3}\} \\ A_2 &= \{0, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}\} \\ A_3 &= \{0, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}, \frac{19}{27}\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Če uredimo števila v A_k po velikosti in jih označimo $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$, potem se lahko z indukcijo prepričamo, da je v A_k poleg $x_0 = 0$ še natanko k pozitivnih števil $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, pri čemer so $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ natanko vsa pozitivna števila iz A_{k-1} , število x_k pa je dobljeno po formuli $x_k = \frac{2}{3}x_{k-1} + \frac{1}{3}$. Če na zadnjo enakost pogledamo kot na diferenčno enačbo in jo rešimo pri začetnem členu $x_1 = \frac{1}{3}$, dobimo $x_k = 1 - (\frac{2}{3})^k$.

Iz povedanega sledi, da so v atraktorju A poleg števila 0 še vsi členi zaporedja $\{1 - (\frac{2}{3})^k\}_{k=1}^{\infty}$. Ker pa je atraktor kompaktna množica, morajo biti v njem tudi vsa njegova stekališča. Se pravi, da je v A tudi število 1. Označimo kompaktno množico $\{1 - (\frac{2}{3})^k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{0, 1\}$ z A' . Ker za vsako število x iz A' velja $w_1(x) = 0$ in je $w_2(0) = \frac{1}{3}$, $w_2(1) = 1$ ter $w_2(1 - (\frac{2}{3})^k) = 1 - (\frac{2}{3})^{k+1}$, je $W(A') = A'$. Toda atraktor je edina negibna točka IFS, zato mora veljati $A' = A$.

Za konec pogledjmo nekoliko daljši zgled uporabe navedene teorije.

Naj bo $b \in \mathbb{C}$ poljubno kompleksno število z absolutno vrednostjo $|b| > 1$. Označimo z $\mathcal{D}$ množico kompleksnih števil $\{d_0, d_1, \dots, d_n\}$, pri čemer je $d_0 = 0$. V [2] smo urejenemu paru $\mathcal{S} = (b, \mathcal{D})$ rekli *številski sistem z osnovo b in z množico števk $\mathcal{D}$* .

Opremimo $\mathbb{C}$ z običajno razdaljo. Pri vsakem indeksu $i = 0, 1, \dots, n$ je z

$$w_i(\alpha) = b^{-1}\alpha + b^{-1}d_i \tag{3.2}$$

definirana skrčitev prostora $\mathbb{C}$. Zlahka preverimo, da so vsi koeficienti skrčitev enaki $|b|^{-1}$. Se pravi, da je $\{w_i\}_{i=0}^n$ IFS s koeficientom $|b|^{-1}$. Kaj je njegov atraktor?

Naj bo W skrčitev prostora $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, ki jo porodi IFS (3.2). Po izreku 3.1. lahko atraktor A poiščemo kot limito rekurzivno podanega zaporedja množic $A_{n+1} = W(A_n)$, pri čemer je začetna množica A_0 poljubno izbrana. Pa začnimo z množico $A_0 = \{0\}$. Potem je

$$A_n = \{b^{-n}d_{i_n} + b^{-(n-1)}d_{i_{n-1}} + \dots b^{-1}d_{i_1} : d_{i_j} \in \mathcal{D}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Če z A_∞ označimo množico vseh tistih kompleksnih števil, ki jih lahko zapišemo kot $\sum_{i=1}^k b^{-i}a_i$, $a_i \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}$, potem je $A_\infty = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$. V zaprtju $\overline{A_\infty}$ so natanko tista kompleksna števila, ki jih lahko zapišemo kot $\sum_{i=1}^\infty b^{-i}a_i$, $a_i \in \mathcal{D}$. Očitno velja

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_\infty. \quad (3.3)$$

Izrek 3.1 nam zagotavlja, da zaporedje $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ konvergira. Označimo z A njegovo limito. Če je α poljubno število iz $\overline{A_\infty}$, potem obstaja v A_∞ Cauchyjevo zaporedje $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$, ki konvergira k α . Ker velja (3.3), lahko zaporedje $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ izberemo tako, da pri vsakem indeksu $i = 1, 2, \dots$ velja $\alpha_i \in A_i$. Po [?] Se pravi, da je $\overline{A_\infty} \subset A$. Množica A je kompaktna, zato je tudi $\overline{A_\infty}$ kompaktna.

Zdaj lahko pokažemo, da je $\overline{A_\infty} = A$. Namreč, če bi veljalo $\overline{A_\infty} \neq A$, bi imeli $h(A, \overline{A_\infty}) > c > 0$, od koder bi zaradi $A_i \subset \overline{A_\infty}$ sledilo $h(A, A_i) > c$ pri vseh indeksih $i = 1, 2, \dots$. Toda to ne more veljati, saj je A limita zaporedja A_i .

Definicija. *Premier ali diameter* neprazne množice U v metričnem prostoru (X, d) je

$$\text{diam}(U) = \sup\{d(x, y); x, y \in U\}.$$

Označimo z $\mathcal{Z}$ množico vseh „celih“ števil $\sum_{i=0}^M b^i a_i$, $a_i \in \mathcal{D}$. Očitno je množica $\mathcal{Z}$ števna, in ker so pri dani števk $a \neq 0$ vsa števila ab^i , $i = 0, 1, 2, \dots$, med seboj različna, je $\mathcal{Z}$ števno neskončna. Naj bo torej $\mathcal{Z} = \{z_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$, pri čemer je $z_0 = 0$.

Izrek 3.2. *Če lahko v številskem sistemu $\mathcal{S}$ izrazimo vsako kompleksno število, potem obstaja neskončno mnogo kompleksnih števil, ki jih lahko v številskem sistemu $\mathcal{S}$ izrazimo na dva različna načina.*

Dokaz. Vzemimo najprej, da obstaja takšno število $w \in \mathbb{C}$, ki ima v številskem sistemu $\mathcal{S}$ dva različna zapisa. Recimo, da je

$$w = \sum_{i=0}^M a_i b^i + \sum_{i=1}^\infty c_i b^{-i}, \quad a_i, c_i \in \mathcal{D}, \quad a_M \neq 0$$

in

$$w = \sum_{j=0}^N d_j b^j + \sum_{j=1}^{\infty} e_j b^{-j}, \quad d_j, e_j \in \mathcal{D}, \quad d_N \neq 0.$$

Naj bo $L = \max\{M, N\}$. Če je $a \in \mathcal{D}$ poljubna neničelna števka, so vsa števila $w_n = ab^{L+n} + w$, $n \in \mathbb{N}$, med seboj različna in vsako lahko v številskem sistemu $\mathcal{S}$ izrazimo na dva različna načina. V tem primeru torej izrek velja.

Predpostavimo zdaj, da nobeno kompleksno število ne moremo v številskem sistemu $\mathcal{S}$ zapisati na dva različna načina.

Pri vsakem indeksu $k = 0, 1, 2, \dots$ naj bo $Z_k = z_k + \overline{A_\infty} = \{z_k + \alpha; \alpha \in \overline{A_\infty}\}$ – množica $\overline{A_\infty}$ premaknjena za z_k . Množice Z_k , $k = 1, 2, \dots$, so kompaktne, ker je množica $Z_0 = \overline{A_\infty}$ takšna. Predpostavko izreka lahko zdaj zapišemo kot $\mathbb{C} = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k$, in ker nobenega števila ne moremo izraziti na dva različna načina, so množice Z_k paroma disjunktne.

Podmnožica v $\mathbb{C}$ je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta ([3, lema 2.25]). Se pravi, da je premer $\text{diam}(Z_k)$ vsake množice Z_k končen. Še več, ker je

$$\begin{aligned} \text{diam}(Z_k) &= \sup\{|z_k + \alpha - (z_k + \beta)|; z_k + \alpha, z_k + \beta \in Z_k\} = \\ &= \sup\{|\alpha - \beta|; \alpha, \beta \in Z_0 = \overline{A_\infty}\} = \text{diam}(\overline{A_\infty}), \end{aligned}$$

imajo vse množice Z_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, isti premer, ki ga bomo označili z $d > 0$.

Prepričajmo se, da notranjosti množic Z_k niso prazne. Če bi pri nekem indeksu k_0 veljalo, da je notranjost množice Z_{k_0} prazna, bi to veljalo pri vseh indeksih $k = 0, 1, 2, \dots$, saj lahko vse množice Z_k dobimo tako, da množico Z_{k_0} ustrezno premaknemo. Pa vzemimo, da so notranjosti množic Z_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, prazne. Označimo z $U_k = Z_k^c$, $k = 0, 1, 2, \dots$, komplemente množic Z_k . To so odprte množice in iz predpostavke, da so notranjosti množic Z_k prazne, sledi, da je vsaka od množic U_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ povsod gosta v $\mathbb{C}$. Zaradi $\mathbb{C} = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k$ velja $\bigcap_{k=0}^{\infty} U_k = \emptyset$, kar pa je v nasprotju z Bairovim izrekom (glejte [3, Izrek 14.19]), ki pravi, da je v polnem metričnem prostoru X presek zaporedja povsod gostih odprtih množic gost v X . Množice Z_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ torej res nimajo prazne notranjosti. Se pravi, da lahko najdemo takšen neprazen odprt krog κ , ki je vsebovan v notranjosti množice $Z_0 = \overline{A_\infty}$, odprti krogi $z_k + \kappa$, $k = 1, 2, \dots$, pa so vsebovani v notranjosti množic Z_k . Ploščina vsake od množic Z_k je večja od ploščine kroga κ , ki ima seveda od nič različno ploščino. Jasno je tudi, da imajo vse množice Z_k isto ploščino. Naj bo $p > 0$ ploščina vsake od množic Z_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

Vzemimo poljubno množico Z_{k_0} in naj bo K takšen zaprt krog v $\mathbb{C}$, da je Z_{k_0} vsebovana v njegovi notranjosti. Polmer kroga K označimo z r .

Trdimo, da le končno mnogo množic Z_k seka K . Namreč, če to ne bi bilo res, bi bilo v zaprtem krogu K_d – tj. v krogu, ki ima isto središče kot K in polmer $r + d$, kjer je d premer množic Z_k – neskončno mnogo množic Z_k . Toda to je nemogoče: krog K_d ima končno ploščino, množice Z_k pa so paroma disjunktne in ploščina vsake njih je $p > 0$.

Krog K torej poleg množice Z_{k_0} seka le še končno mnogo množic $Z_{k_1}, \dots, Z_{k_n}$. Ker je množica Z_{k_0} vsebovana v notranjosti kroga K , mora biti $n \geq 1$. Označimo $F_i = K \cap Z_{k_i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Množice F_i so neprazne in kompaktne, njihova unija je krog K . Naj bo $F = \cup_{i=1}^n F_i$. Tudi F je neprazna kompaktna množica, saj je unija končno mnogo nepraznih kompaktnih množic. Velja torej $K = F_0 \cup F$. Zaprti krog K smo zapisali kot unijo dveh nepraznih kompaktnih množic. Ker je K enostavno povezana podmnožica v $\mathbb{C}$, množici F_0 in F ne moreta biti disjunktne. Se pravi, da obstaja v množici $F_0 = Z_{k_0}$ vsaj eno število, ki je še v neki drugi množici Z_k , oz. število, ki ga lahko v številskem sistemu $\mathcal{S}$ izrazimo na dva različna načina. To pa je v nasprotju s predpostavko, da v $\mathbb{C}$ takih števil ni. ■

Še vprašanje: Ali je tudi kompleksnih števil, ki imajo vsaj tri različne zapise v številskem sistemu $\mathcal{S}$, neskončno mnogo?

LITERATURA

- [1] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
- [2] J. Bračič, *Številski sistemi s kompleksnimi osnovami*, Obzornik mat. fiz. **43** (1996) 5, 139–149.
- [3] J. Vrabec, *Metrični prostori*, DMFA, Ljubljana, 1993.

OBVESTILO

Pobrs kajmo po zaprašenih policah

Ob petdesetletnici delovanja Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije nameravamo pri DMFA izdati zbornik o aktivnostih društva od ustanovitve pa do današnjih dni. Podatki o nekaterih matematičnih tekmovanjih srednješolcev Slovenije, ki so navedeni v starejših Obzornikih za matematiko in fiziko, so nepopolni. Za prvo tekmovanje vemo npr. le, da je bilo leta 1950, radi pa bi izvedeli tudi druge podatke: datum tekmovanja, kraj (šola) tekmovanja, število sodelujočih dijakov oz. šol. Za tekmovanja v letih 1951 in 1958–1967 pa bi radi izvedeli kraj in šolo, kjer je tekmovanje bilo.

Kdor bi karkoli vedel o navedenih tekmovanjih, naj to čimprej sporoči na naslov društva. Morda se bo na kakšni polici našel tudi bilten, ki so ga ob tekmovanju izdali organizatorji.

Matjaž Željko

V članku obravnavamo linearne operatorje med končno razsežnimi linearno urejenimi vektorskimi prostori, ki ohranjajo urejenost. Ugotovimo obliko matrike, s katero je v standardni bazi predstavljen tak operator.

LEXICOGRAPHICAL ISOTONE LINEAR OPERATORS

In this note we consider the lexicographical order preserving linear operators in finite-dimensional vector spaces. We describe the matrices of such operators in the standard basis.

Naj bo v realnem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ dana relacija linearne urejenosti $\leq$. Pravimo, da je relacija *usklajena*, če ustreza naslednjima pogojema:

- (1) $x, y \in \mathbb{R}^n$; $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ za vsak $z \in \mathbb{R}^n$;
- (2) $x, y \in \mathbb{R}^n$; $x \leq y \Rightarrow rx \leq ry$ za vsak $r \in \mathbb{R}^+$.

Vektorski prostor z usklajeno relacijo linearne urejenosti $(\mathbb{R}^n, \leq)$ imenujemo *linearno urejen vektorski prostor*. Osnovni primer linearno urejenega vektorskega prostora je *leksikografsko urejen vektorski prostor* $(\mathbb{R}^n, \overset{L}{\leq})$. V leksikografski urejenosti za vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $x \leq y$ natanko takrat, kadar je bodisi $x = y$ bodisi $x \neq y$ in $x_k \leq y_k$ za najmanjši indeks k , pri katerem $x_k \neq y_k$. Po definiciji velja neenakost $x \overset{L}{<} y$ takrat, ko je $x \neq y$ in $x_k \leq y_k$ za najmanjši indeks k , pri katerem je $x_k \neq y_k$.

Prostor $\mathbb{R}^n$ je leksikografsko urejen v bazi $\{e'_j\}_1^n$, ko za poljubna vektorja $x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$ in $y = \sum_{j=1}^n y'_j e'_j$ velja $x' \overset{L}{\leq} y'$, kjer je $x' = (x'_1, \dots, x'_n)^\top$ in $y' = (y'_1, \dots, y'_n)^\top$.

V nadaljnjem bomo besedo usklajena kar opuščali, če pa urejenost ne bo imela te lastnosti, bomo to posebej poudarili.

Vsaka linearna urejenost prostora $\mathbb{R}^n$ je pravzaprav leksikografska urejenost v neki urejeni ortonormirani bazi tega prostora. Ker pa za vsako tako bazo lahko najdemo natanko določen unitarni operator, ki jo preslika v standardno bazo, obstaja bijektivna korespondenca med unitarnimi operatorji tega prostora in usklajenimi linearnimi urejenostmi.

Velja namreč naslednji rezultat, ki ga z dokazom vred najdemo v [3]:

Trditev 1. Za vsako usklajeno linearno urejenost $\leq$ na $\mathbb{R}^n$ obstaja natanko ena taka unitarna preslikava $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, da velja ekvivalenca

$$x \leq y \iff v(x) \overset{L}{\leq} v(y) \quad \text{za} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Obratno, za vsako unitarno preslikavo $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je s to ekvivalenco določena na $\mathbb{R}^n$ usklajena linearna urejenost $\leq$.

Naj bosta $(\mathbb{R}^n, \leq)$ in $(\mathbb{R}^k, \leq')$ linearno urejena vektorska prostora. Linearni operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ ohranja urejenost, kadar velja

$$x, y \in \mathbb{R}^n : \quad x \leq y \implies u(x) \leq' u(y).$$

Če upoštevamo omenjeno bijektivno korespondenco med linearnimi urejenostmi prostora in unitarnimi operatorji, vidimo, da potem obstajata taka unitarna operatorja $v_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ in $v_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, da zgornja implikacija dobi obliko:

$$x \stackrel{\text{L}}{\leq} y \implies v_1 u v_2^{-1}(x) \stackrel{\text{L}}{\leq} v_1 u v_2^{-1}(y),$$

kjer je $\stackrel{\text{L}}{\leq}$ običajna leksikografska urejenost.

Operatorju u smo priredili operator $v_1 u v_2^{-1}$, ki ohranja leksikografsko urejenost. Omejimo se na lastnosti operatorjev, ki ohranjajo leksikografsko urejenost, pa bomo lahko dobili lastnosti vseh operatorjev, ki ohranjajo linearno urejenost.

Naslednji rezultati so povzeti po delu [4].

Definicija. Operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je *leksikografsko izoton*, kadar ohranja leksikografsko urejenost. Operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je *leksikografsko nenegativen*, kadar za standardne bazne vektorje e_j , $j = 1, \dots, n$, velja $u(e_j) \stackrel{\text{L}}{\geq} 0$.

Pri izrekih, ki kažejo obliko matrike leksikografsko izotonih operatorjev, bomo potrebovali še pojem leksikografskega indeksa.

Definicija. Leksikografski indeks vektorja $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in \mathbb{R}^n$ je dan s predpisom:

$$\alpha(y) := \begin{cases} \min\{j \in \{1, \dots, n\}; y_j \neq 0\}, & y \neq 0 \\ \infty, & y = 0 \end{cases}.$$

Naslednji izrek nam poda karakteristično lastnost leksikografskega indeksa.

Trditev 2. Leksikografski indeks kot preslikava $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, \dots, n, \infty\}$ zadošča naslednjim pogojem:

- (a) $\alpha(0) = \infty$,
- (b) $\alpha(\mathbb{R}^n) = \{1, \dots, n, \infty\}$,
- (c) $\alpha(\lambda y) = \alpha(y)$ za $\lambda \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$,
- (d) $y, z \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \stackrel{\text{L}}{\leq} y \stackrel{\text{L}}{\leq} z \implies \alpha(y) \geq \alpha(z)$.

Dokaz. Iz definicije leksikografskega indeksa takoj slede lastnosti (a), (b) in (c). Naj bo $y, z \in \mathbb{R}^n$ in $0 \stackrel{L}{\leq} y \stackrel{L}{\leq} z$. Če $y \neq z$, je $y_k < z_k$ za najmanjši indeks k , kjer je $y_k \neq z_k$. Če sta leksikografska indeksa vektorjev y, z enaka, točka (d) drži. Če pa je $\alpha(y) \neq \alpha(z)$, mora imeti vektor y v k -ti komponenti vrednost 0, torej je leksikografski indeks tega vektorja večji od leksikografskega indeksa $\alpha(z)$. Implikacija v točki (d) je tudi v tem primeru izpolnjena. ■

Opomba. Da se pokazati (glej [4]), da je leksikografski indeks edina preslikava z lastnostmi (a), (b), (c) in (d).

Vsak leksikografsko izotoni operator je očitno leksikografsko nenegativen.

Katero lastnost moramo dodati, da bo leksikografsko nenegativen operator leksikografsko izoton, nam poda:

Izrek 3. Za operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ so ekvivalentne naslednje izjave:

- (i) Operator u je leksikografsko izoton.
- (ii) Operator u je leksikografsko nenegativen in zanj velja

$$\alpha(y) = \alpha(z) \implies \alpha(u(y)) = \alpha(u(z)).$$

- (iii) Operator u je leksikografsko nenegativen in obstaja natanko ena preslikava $\varphi_u : \{1, \dots, n, \infty\} \rightarrow \{1, \dots, k, \infty\}$, ki zadošča enakosti $\alpha(u(y)) = \varphi_u(\alpha(y))$, $y \in \mathbb{R}^n$.
- (iv) Operator u je leksikografsko nenegativen in izpolnjuje neenakost

$$\alpha(u(e_{j-1})) + 1 \leq \alpha(u(e_j)); \quad j = 2, \dots, n.$$

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Leksikografsko izoton operator je tudi leksikografsko nenegativen. Naj za vektorja $y, z \in \mathbb{R}^n$ velja $\alpha(y) = \alpha(z)$. Brez izgube za splošnost dokaza lahko vzamemo $0 \stackrel{L}{<} y \stackrel{L}{<} z$. Zaradi točke (i) velja $0 \stackrel{L}{\leq} u(y) \stackrel{L}{\leq} u(z)$. Od tod dobimo s pomočjo točke (d) trditve 1 neenakost $\alpha(u(y)) \geq \alpha(u(z))$.

Razvijmo vektorja y, z po standardni bazi, leksikografski indeks $\alpha(y)$ pa krajše označimo z j_0 :

$$y = \sum_{j=j_0}^n y_j e_j \quad \text{in} \quad z = \sum_{j=j_0}^n z_j e_j, \quad 0 < y_{j_0} < z_{j_0}.$$

Vektor $z_{j_0}y - \frac{1}{2}y_{j_0}z$ je leksikografsko pozitiven, zato je $u(z_{j_0}y) \stackrel{L}{\geq} u(\frac{1}{2}y_{j_0}z) \stackrel{L}{\geq} 0$. Upoštevamo točki (c) in (d) trditve 1 in dobimo

$$\alpha(u(y)) = \alpha(z_{j_0}u(y)) = \alpha(u(z_{j_0}y)) \leq \alpha(u(\frac{1}{2}y_{j_0}z)) = \alpha(u(z)).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Opredelimo preslikavo $\varphi_u : \{1, \dots, n, \infty\} \rightarrow \{1, \dots, k, \infty\}$ s predpisom

$$\varphi_u(\infty) := \infty \quad \text{in} \quad \varphi_u(j) := \alpha(u(e_j)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Če upoštevamo še lastnost leksikografskega indeksa v točki (ii) tega izreka za neničelni vektor y in $e_{\alpha(y)}$, velja $\varphi_u(\alpha(y)) = \varphi_u(\alpha(e_{\alpha(y)})) = \alpha(u(e_{\alpha(y)})) = \alpha(u(y))$. Posebej za $y = 0$ dobimo $\varphi_u(\alpha(0)) = \varphi_u(\infty) = \infty = \alpha(0) = \alpha(u(0))$. Preslikava z lastnostjo v točki (iii) tega izreka je ena sama, saj je leksikografski indeks za poljuben vektor natanko določen.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Očitno.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Dokažimo s protislovjem. Naj za $j \in \{2, \dots, n\}$ velja

$$\alpha(u(e_{j-1})) + 1 > \alpha(u(e_j)). \quad (1)$$

Ločimo dve možnosti: $\alpha(u(e_{j-1})) = \infty$, $\alpha(u(e_{j-1})) < \infty$. Če je $\alpha(u(e_{j-1})) = \infty$, zaradi (1) velja $\alpha(u(e_j)) < \infty$, torej imamo $u(e_{j-1}) = 0 \neq u(e_j)$. Leksikografska indeksa slik vektorjev e_{j-1} in $e_{j-1} + e_j$ nista enaka, saj velja

$$\alpha(u(e_{j-1} + e_j)) = \alpha(u(e_{j-1}) + u(e_j)) = \alpha(u(e_j)) < \infty \quad \text{in} \quad \alpha(u(e_{j-1})) = \infty,$$

enaka pa sta leksikografska indeksa originalov $\alpha(e_{j-1} + e_j) = j - 1 = \alpha(e_{j-1})$. To pa je v protislovju s točko (ii).

Če je $\alpha(u(e_{j-1})) < \infty$, potem lahko neenakost (1) zapišemo kot $\alpha(u(e_{j-1})) \geq \alpha(u(e_j))$. Razvijmo vektorja $u(e_{j-1})$ in $u(e_j)$ po standardni bazi, kjer za njuna leksikografska indeksa $g := \alpha(u(e_{j-1}))$ in $h := \alpha(u(e_j))$ upoštevamo $h \leq g \leq k$ in je operator u predstavljen z matriko $U = [u_{ij}]$:

$$u(e_{j-1}) = \sum_{i=g}^k u_{i,j-1} e_i, \quad u_{g,j-1} \neq 0; \quad u(e_j) = \sum_{i=h}^k u_{i,j} e_i, \quad u_{h,j} \neq 0.$$

Če je $g > h$, pridemo do protislovja z (ii) pri vektorjih e_{j-1} in $e_{j-1} + e_j$. Če je $g = h$, bi bila vektorja e_{j-1} in $-u_{g,j-1}e_j + u_{h,j}e_{j-1}$ tista, pri katerih bi prišli v protislovje z (ii).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Izberimo poljuben vektor $y = (y_1, \dots, y_n)^\top \stackrel{L}{>} 0$ z leksikografskim indeksom $j_0 := \alpha(y)$. Vektor $u(y)$ lahko zapišemo

$$u(y) = \left(\sum_{j=j_0}^n u_{1,j} y_j, \dots, \sum_{j=j_0}^n u_{k,j} y_j \right)^\top. \quad (2)$$

Dokazati moramo, da je v zapisu (2) prva neničelna komponenta večja od nič ali pa, da je $u(y) = 0$. Če je $u(e_{j_0}) = 0$, velja seveda $\alpha(u(e_{j_0})) = \infty$. Po

točki (iv) je tedaj $\alpha(u(e_{j_0+1})) = \infty$, torej $u(e_{j_0+1}) = 0$. Podobno bi sklepali naprej in dobili tudi nadaljnje slike standardnih baznih vektorjev enake nič:

$$u(e_j) = 0, \quad j = j_0 + 1, \dots, n.$$

V tem primeru je $u(y) = 0$ in točka (i) drži.

Če pa imamo $u(e_{j_0}) \neq 0$, obravnavamo dve možnosti: $u(e_{j_0+1}) = 0$ in $u(e_{j_0+1}) \neq 0$.

V prvem primeru so tudi nadaljnje komponente vektorja $u(e_j)$ za $j = j_0 + 2, \dots, n$ enake nič po sklepu, ki smo ga malo prej izpeljali. V zapisu (2) to pomeni:

$$u(y) = (u_{1,j_0}y_{j_0}, \dots, u_{k,j_0}y_{j_0})^\top.$$

Če upoštevamo še $u_{i,j_0} = 0$ za $i = 1, \dots, \alpha(u(e_{j_0})) - 1$ in $u_{\alpha(u(e_{j_0})),j_0} > 0$, kar velja zaradi nenegativnosti leksikografskega operatorja u , končno dobimo

$$u(y) = (0, \dots, 0, u_{\alpha(u(e_{j_0})),j_0}y_{j_0}, \dots, u_{k,j_0}y_{j_0}) \stackrel{L}{\geq} 0.$$

V drugem primeru iz točke (iv) sledi $\alpha(u(e_{j_0})) < \alpha(u(e_{j_0+1})) < \infty$. To pomeni, da pri vektorju $u(e_{j_0+1})$ prva neničelna vrednost nastopi kvečjemu v kasnejši komponenti kot pri $u(e_{j_0})$. Torej je

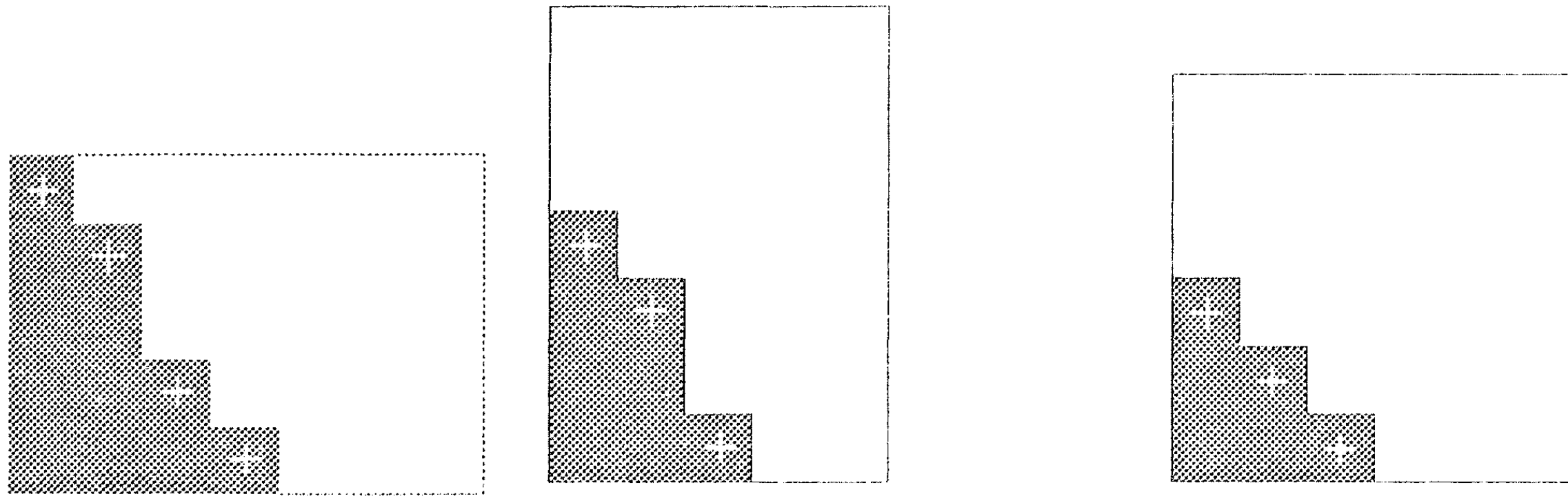
$$u_{\alpha(u(e_{j_0})),j} = 0 \quad \text{za} \quad j = j_0 + 1, \dots, n.$$

Ker so seveda nič tudi vse komponente u_{i,j_0} za $i = 1, \dots, \alpha(u(e_{j_0})) - 1$, je prva neničelna komponenta vektorja $u(y)$ v (2) enaka $u_{\alpha(u(e_{j_0})),j_0}y_{j_0}$. Ta je pozitivna, torej je $u(y)$ leksikografsko pozitiven vektor. ■

Povzemimo trditve izreka. Če je operator leksikografsko izoton, je leksikografski indeks slike odvisen le od leksikografskega indeksa originala; obstaja natanko določena preslikava, ki nam poda leksikografski indeks slike iz leksikografskega indeksa originala; leksikografski indeksi neničelnih slik standardnih baznih vektorjev strogo naraščajo. Če je operator leksikografsko nenegativen in velja ena od zgoraj navedenih lastnosti, je operator leksikografsko izoton.

Dokaz izreka 3 pove, da je pri leksikografsko izotonem operatorju zaradi neenakosti $\alpha(u(e_{j-1})) + 1 \leq \alpha(u(e_j))$, $j \in \{2, \dots, n\}$, preslikava φ_u naraščajoča.

Matrike leksikografsko izotonih operatorjev imajo posebno obliko. Nad diagonalnimi elementi so le ničle; od leve proti desni ima vsak naslednji stolpec kasneje prvo neničelno komponento. Prikažimo nekaj primerov



Slika 1. Leksikografsko izotoni linearni operatorji.

matrik, kjer so prazni kvadrati ničle, temni del vsakega stolpca se začne s pozitivnim elementom, n je število stolpcev in k število vrstic.

Injektivni leksikografsko izoton operator ima posebno lepe lastnosti. Zato definirajmo:

Definicija. Operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je *strogo leksikografsko izoton*, če za vsak vektor $y \stackrel{\text{L}}{>} 0$ velja $u(y) \stackrel{\text{L}}{>} 0$.

Ker je strogo leksikografsko izoton operator injektiven, je smiselno predpostaviti $k \geq n$. Izpeljimo nekatere trditve o leksikografsko izotonih operatorjih še za strogo leksikografsko izotone operatorje.

Izrek 4. Za operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ veljajo ekvivalence med izjavami:

- (i) Operator u je *strogo leksikografsko izoton*.
- (ii) Operator u je *leksikografsko nenegativen* in obstaja natanko določena strogo naraščajoča preslikava $\varphi_u : \{1, \dots, n, \infty\} \rightarrow \{1, \dots, k, \infty\}$, ki zadošča pogoju $\alpha(u(y)) = \varphi_u(\alpha(y))$, $y \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Operator u je *leksikografsko nenegativen* in velja

$$\alpha(u(e_{j-1})) < \alpha(u(e_j)) \leq k, \quad j = 2, \dots, n.$$

Za $k = n$ so te izjave ekvivalentne točki (iv):

- (iv) Operator u je *leksikografsko nenegativen* in u je *nesingularen operator s spodnjetrikotno matriko*.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Po izreku 3 vemo, da je preslikava $\varphi_u : \{1, \dots, n, \infty\} \rightarrow \{1, \dots, k, \infty\}$ naraščajoča na $\varphi_u^{-1}\{1, \dots, k\}$. Zaradi injektivnosti operatorja pa ni mogoče, da bi se kak indeks $j \in \{1, \dots, n\}$ preslikal v ∞ , kajti velja $\infty = \alpha(0) = \alpha(u(0)) = \varphi_u(\alpha(0)) = \varphi_u(\infty)$. Preslikava φ_u je strogo naraščajoča na vsem definicijskem območju $\{1, \dots, n, \infty\}$. Ostale lastnosti druge točke veljajo po izreku 3.

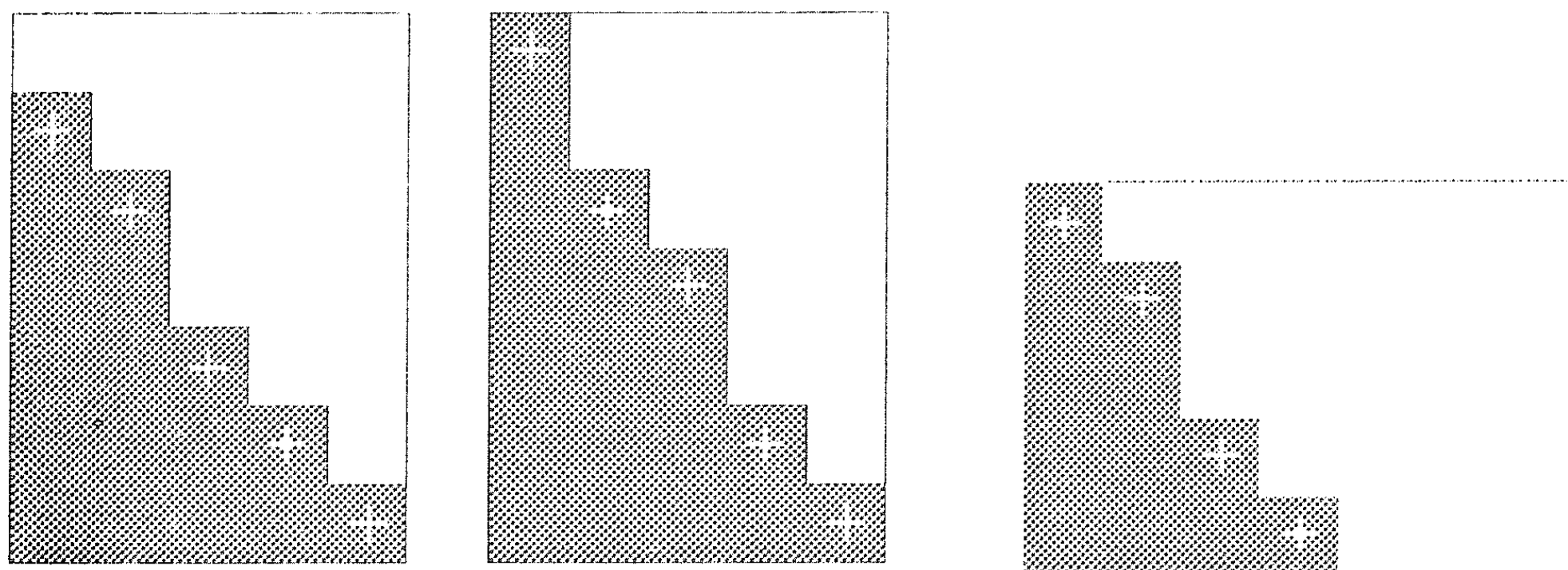
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Iz predpostavke (ii) sledi $\alpha(u(e_{j-1})) = \varphi_u(j-1) < \varphi_u(j) = \alpha(u(e_j)) \leq k$ za $j = 2, \dots, n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Če točka (iii) drži, zaradi ekvivalence točke (iv) in (i) v izreku 3 dobimo, da je operator u leksikografsko izoton. Ker je tudi injektiven, je strogo leksikografsko izoton.

(i) $\wedge$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Zaradi (i) je matrika operatorja u nesingularna (obrnjiva za $k = n$). Po točki (iii) dobimo $1 \leq \alpha(u(e_1)) < \dots < \alpha(u(e_n)) \leq k = n$, zato je izpolnjeno $\alpha(u(e_j)) = j$ za vse indekse $j = 1, \dots, n$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Očitno. ■

Že pri dokazovanju opazimo obliko matrike strogo leksikografsko izotonega operatorja $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Matrika je spodnjetrikotna, pri kvadratni matriki je brez ničelnih elementov na diagonalnih mestih.



Slika 2. Strogo leksikografsko izotoni linearni operatorji.

Izrek 5. Za operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je ekvivalentno:

- (i) Operator u ohranja kako linearno urejenost prostora $\mathbb{R}^n$;
- (ii) Lastne vrednosti operatorja u so realne in nenegativne.

Če je operator u nesingularen (obrnjiv), sta točki (i) in (ii) ekvivalentni točki:

- (iii) Lastne vrednosti operatorja u so realne in pozitivne.

Če je u izometrija, so vse točke ekvivalentne točki:

- (iv) Operator u je identični operator.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Če operator u ohranja linearno urejenost $\leq'$ v prostoru $\mathbb{R}^n$, za poljuben x iz $\mathbb{R}^n$ velja implikacija $0 \leq' x \Rightarrow u(0) \leq' u(x)$. S pomočjo trditve 1 vemo, da za to linearno urejenost najdemo natanko določen unitarni operator $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, tako da velja $0 \stackrel{L}{\leq} v(x) \iff 0 \leq' x$ in implikacijo lahko zapišemo v obliki:

$$0 \stackrel{L}{\leq} x \Rightarrow 0 \stackrel{L}{\leq} vuv^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Tak leksikografsko izoton operator vuv^{-1} ima po izreku 3 spodnjetrikotno matriko. Diagonalni elementi take matrike so tudi njene lastne vrednosti, torej lastne vrednosti operatorja vuv^{-1} , ki pa se ujemajo z lastnimi vrednostmi operatorja u . Zaradi oblike matrike leksikografsko izotonih operatorjev pa so te lastne vrednosti realne in nenegativne.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Naj bo operator $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ predstavljen z Jordanovo matriko J , ki ima po diagonali realne in nenegativne lastne vrednosti z morebitnimi ničlami na zadnjih diagonalnih mestih pod diagonalnimi elementi v bazi $\{e'_j\}_1^n$ (za konstrukcijo take matrike glej na primer [2]).

Zapišemo $J = VUV^{-1}$, kjer je V prehodna matrika med bazo $\{e'_j\}_1^n$ in standardno bazo $\{e_j\}_1^n$ ter U matrika, ki predstavlja operator vuv^{-1} v standardni bazi. Matrika $J = VUV^{-1}$ pa predstavlja operator vuv^{-1} v standardni bazi. Ta matrika zadošča točki (iv) izreka 3, zato je vuv^{-1} leksikografsko izoton operator. Ker pa je v unitarni operator, zanj po trditvi 1 obstaja linearna urejenost $\leq'$, da velja ekvivalenca $0 \stackrel{L}{\leq} v(x) \iff \iff 0 \leq' x$ za poljuben vektor $x \in \mathbb{R}^n$. S pomočjo te ekvivalence in implikacije $0 \stackrel{L}{\leq} x \Rightarrow 0 \stackrel{L}{\leq} vuv^{-1}(x)$, ki velja za leksikografsko izoton operator vuv^{-1} , dobimo želeno izjavo $0 \leq' x \Rightarrow 0 \leq' u(x)$. Torej je u operator, ki ohranja linearno urejenost, določeno z operatorjem v .

(ii) $\iff$ (iii). Če je operator bijektiven, mora biti determinanta matrike različna od nič. Ker pa je determinanta matrike J produkt njenih lastnih vrednosti, morajo biti le-te različne od nič.

(iii) $\iff$ (iv). Če je operator u izometrija, so absolutne vrednosti njegovih lastnih vrednosti enake 1. Ker unitaren operator standardno bazo preslika v ortonormirano bazo, ima vsak stolpec matrike normo 1; enic pod diagonalno v Jordanovi matriki J ne sme biti, na diagonali pa so realne, pozitivne lastne vrednosti z absolutno vrednostjo 1. Operator je torej identičen.

Obrat je očiten. ■

LITERATURA

- [1] A. Drobnič, *Stožci v končno razsežnih vektorskih prostorih*, Magistrsko delo, 1996.
- [2] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1993.
- [3] B. Lavrič, *Končno razsežni linearno urejeni vektorski prostori*, Obzornik mat. fiz. **44** (1997), 97–104.
- [4] J. E. Martinez-Legaz, I. Singer, *Lexicographical order, lexicographical index, and linear operators*, Linear Algebra Appl. **128** (1990), 65–95.

NOVE KNJIGE

Gerlinde Faustmann, Österreichische Mathematiker um 1800, unter besonderer Berücksichtigung ihrer logarithmischen Werke. Österreichischer Kunst-und Kulturverlag, Wien 1994.

Knjiga Gerlinde Faustmann, srednješolske profesorice matematike in kemije, obsega 194 strani teksta in še 10 dopolnilnih strani ter je avtoričina disertacija. V njej obravnava pomembnejše matematike, ki so delovali okoli leta 1800 v Avstriji; poseben poudarek je namenila njihovim naporom pri

sestavi logaritmičnih tablic, ki so v tistem času pomenile približno to, kar danes pomenijo računalniki, kadar jih uporabljamo za računanje.

Disertacija se začne s podrobnim pregledom zgodovinskega razvoja pojma logaritma in konstrukcij logaritmičnih tablic do konca 18. stoletja. Sledi kratek opis avstrijske zgodovine na prelomu 18. stoletja. Osrednje je četrto poglavje. V njem avtorica opiše življenjske poti in strokovno delo petih matematikov: Leopolda von Unterbergerja (1734–1818), Johanna Pasquicha (1753–1829), Jurija von Vege (1754–1802), Johanna Konrada Blanka (1757–1827) in Ignaca Lindnerja (1777–1835).

Podobno kot Jurij Vega je bil tudi Unterberger profesor matematike na topničarski akademiji na Dunaju, prav tako je dosegel visok oficirski čin. Poleg učbenikov matematike za študente topničarske akademije je izdal leta 1777 tudi tablice naravnih vrednosti in njihovih logaritmov kotnih funkcij in logaritmov naravnih števil od 1 do 20 000.

Johann Pasquich (morda Ivan Paskvič), doma iz Senja, je bil katoliški duhovnik. Poučeval je višjo matematiko na univerzi v Budimpešti, deloval pa je tudi na zvezdarnah v Pešti in na Dunaju. Objavil je več knjig in znanstvenih člankov iz matematike, mehanike, astronomije in geodezije, pa tudi skrajšane logaritmično-trigonometrične tablice (1817).

Sledi življenjepis in opis logaritmičnih tablic Jurija Vege, ki je bil med temi petimi matematiki najmočnejši kot matematik in sestavljalec logaritmičnih tablic.

Tudi Johann Konrad Blank je bil katoliški duhovnik. Predaval je matematiko na različnih akademskih institucijah na Dunaju. Umrl je kot žrtev morilca iz koristoljubja. Poleg matematičnih učbenikov je Blank leta 1816 izdal tablice logaritmov naravnih števil do 10 000 in logaritmov trigonometričnih funkcij.

Ignac Lindner je bil rojen v Pragi. Kariero je začel kot topničar in je dosegel čin polkovnika. Postal je profesor matematike na topničarski akademiji na Dunaju, kjer je poučeval desetletji pred njim tudi Jurij Vega. Poleg učbenikov mehanike za potrebe topničarske akademije je izdal tudi priročnik žepnega formata z logaritmi števil, logaritmi trigonometričnih funkcij in zbirko raznih tabel in formul.

V zadnjem razdelku avtorica ugotavlja, da so se omenjeni matematiki večinoma poznali osebno ali pa so bili vsaj v pismenih stikih. Opiše tudi relacije med logaritmičnimi tablicami vseh teh avtorjev. Kot Dunajčanka je seveda imela lažji dostop do literature kot naši raziskovalci Vegovega življenja in delovanja. O Vegi ni odkrila kaj bistveno novega, mnoga znana dejstva pa je mogla z novimi dokumenti potrditi ali dopolniti.

Anton Suhadolc

NOVE KNJIGE

STEWART, William J., Introduction to the Numerical Solutions of Markov Chains, Princeton University Press, Princeton, New Jersey; 539 str.

Knjiga je namenjena predvsem matematikom in uporabnikom markovskih verig.

Osnova za stohastične modele v mnogih vejah uporabne verjetnosti, od genetike, ekonomije, teoretične fizike, teorije strežbe do numerične integracije v velikih dimenzijah, so markovske verige. Čeprav so konceptualno preproste, je le redko mogoče eksplicitno izračunati prehodne verjetnosti po velikem številu korakov, posebej še, če je prostor stanj precej velik.

Pričujoča knjiga je sistematična obravnava numeričnih metod za izračunavanje prehodnih verjetnosti, tako za markovske verige v diskretnem kot tudi v zveznem času. Avtor uporablja kombinacijo numeričnih metod in verjetnosti in obravnava množico posebnih verig, ki se pogosto pojavljajo v uporabi. Tako nas knjiga popelje skozi množico iterativnih in rekurzivnih shem, prikaže različne razcepe, obravnava transientne in Hessenbergove markovske verige in še metode za periodične verige. Knjiga se sklene z diskusijo računalniških programov, ki so trenutno na voljo. Vseskozi je posejano tudi mnogo primerov.

Knjiga ni namenjena branju od prve do zadnje strani, ampak je nekakšen priročnik za tiste, ki se srečujejo z numeričnimi problemi, povezanimi z markovskimi verigami.

Mihael Perman

OBVESTILO

V lanski prvi številki Obzornika za matematiko in fiziko sta bila na 29. in 30. strani objavljena pravilnika:

- Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam,
- Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi in za popularizacijo teh znanosti.

Pisne predloge za priznanja učiteljem in pohvale šolam pošljite do **20. septembra 1998** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 1000 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 2964.**

Predlogi morajo vsebovati dovolj podatkov, da bodo zadoščali komisiji za vsestransko presojo in tehtno odločitev.

Sekretarka komisije za
pedagoško dejavnost:

Danica Jereb

Predsednica DMFA Slovenije:

Nada Razpet