

ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

TRIALNA EKONOMSKA
IŽNICA Ljubljana

R-177/87-5

1997

Letnik 44

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1997

letnik 44, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.500 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 5.000 SIT, za študente 1.250 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 480 SIT, stare številke 320 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1997 DMFA Slovenije – 1331

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.—Page

Vzporedni algoritem za iskanje blokov grafa — Parallel algorithm for finding blocks of a graph (Mojca Indihar Štemberger)	129–138
Plateaujev problem — The Plateau problem (Miran Černe)	139–145
Nenavadni interferenčni poskusi: Poskusi z gručami atomov — Unusual interference experiments: Experiments with atomic clusters (Janez Strnad)	146–149
O integralski reprezentaciji logaritma — On integral representation of logarithm (Anton Suhadolc)	150–152

Vesti — News

Novi člani društva v letu 1996 (Andreja Šafarič)	145–145
Ob sedemdesetletnici prof. dr. Milana Muršiča (Peter Vencelj)	152–153
Četrto mednarodno tekmovanje študentov matematike v Plovdivu v Bolgariji (Marjan Jerman)	154–156
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1996 (Martina Koman)	157–IV
Srečanje o uporabi fizike	IV

Na ovitku: Jan Vermeer, *Astronom*, 1668.

VZPOREDNI ALGORITEM ZA ISKANJE BLOKOV GRAFA

MOJCA INDIHAR ŠTEMBERGER

Math. Subj. Class. (1991): 68Q22

Predstavljen je vzporedni algoritem za iskanje 2-povezanih komponent ali blokov neusmerjenega grafa, katerega avtorja sta R. E. Tarjan in U. Vishkin. Algoritem poišče bloke grafa s pomočjo prevedbe problema na problem iskanja povezanih komponent grafa, za reševanje katerega je znanih veliko vzporednih algoritmov.

PARALLEL ALGORITHM FOR FINDING BLOCKS OF A GRAPH

A parallel algorithm for finding 2-connected components or blocks of an undirected graph, due to Tarjan and Vishkin, is presented. The algorithm works by translating the problem to that of finding connected components of another graph, a problem for which many parallel algorithms are known.

Uvod

Nekateri povezani grafi so povezani tako šibko, da razpadejo na več delov brž ko iz njih odstranimo že eno samo točko. Za povezane grafe lahko vpeljemo mero, ki pove, kako močno je graf povezan.

Definicija 1. Graf $G = (V, E)$ je k -povezan, če ima vsaj $k + 1$ točk in je graf, ki ga dobimo z odstranitvijo katerihkoli $k - 1$ točk in pripadajočih povezav, še vedno povezan.

Ker z grafi predstavimo razna omrežja (na primer komunikacijska), je zelo pomembno, da je njihova povezanost čim večja, saj sicer ob odstranitvi nekaj vozlišč omrežje ni več povezano.

Velja pomembna zveza med k -povezanostjo in številom poti med posameznima točkama.

Izrek 2. Graf $G = (V, E)$ je k -povezan natanko takrat, ko za vsak par točk $u, v \in V$, $u \neq v$, obstaja najmanj k poti od u do v , ki nimajo nobenih drugih skupnih točk razen u in v .

Dokaz tega izreka najdemo v [2].

Če se omejimo na 2-povezane grafe, vidimo, da zanje velja:

Graf $G = (V, E)$ z vsaj tremi točkami je 2-povezan, če lahko iz njega odstranimo katerokoli točko $v \in V$ in vse pripadajoče povezave, in je tako dobljeni graf povezan.

Definicija 3. Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf. Točko $v \in V$, katere odstranitev iz grafa povzroči, da graf ni več povezan, imenujemo presečna točka.

Trditev 4. Graf je 2-povezan natanko takrat, ko je vsak par njegovih povezav $e, f \in E$ na istem ciklu.

Dokaz. Po izreku 2 je graf 2-povezan natanko takrat, ko sta med vsakim parom njegovih točk $u, v \in V$, $u \neq v$ najmanj dve poti, ki nimata nobenih drugih skupnih točk razen u in v . Takšni poti sestavljata cikel.

Obratno lahko vsak cikel razbijemo na dve poti, ki nimata skupnih točk razen začetka in konca. ■

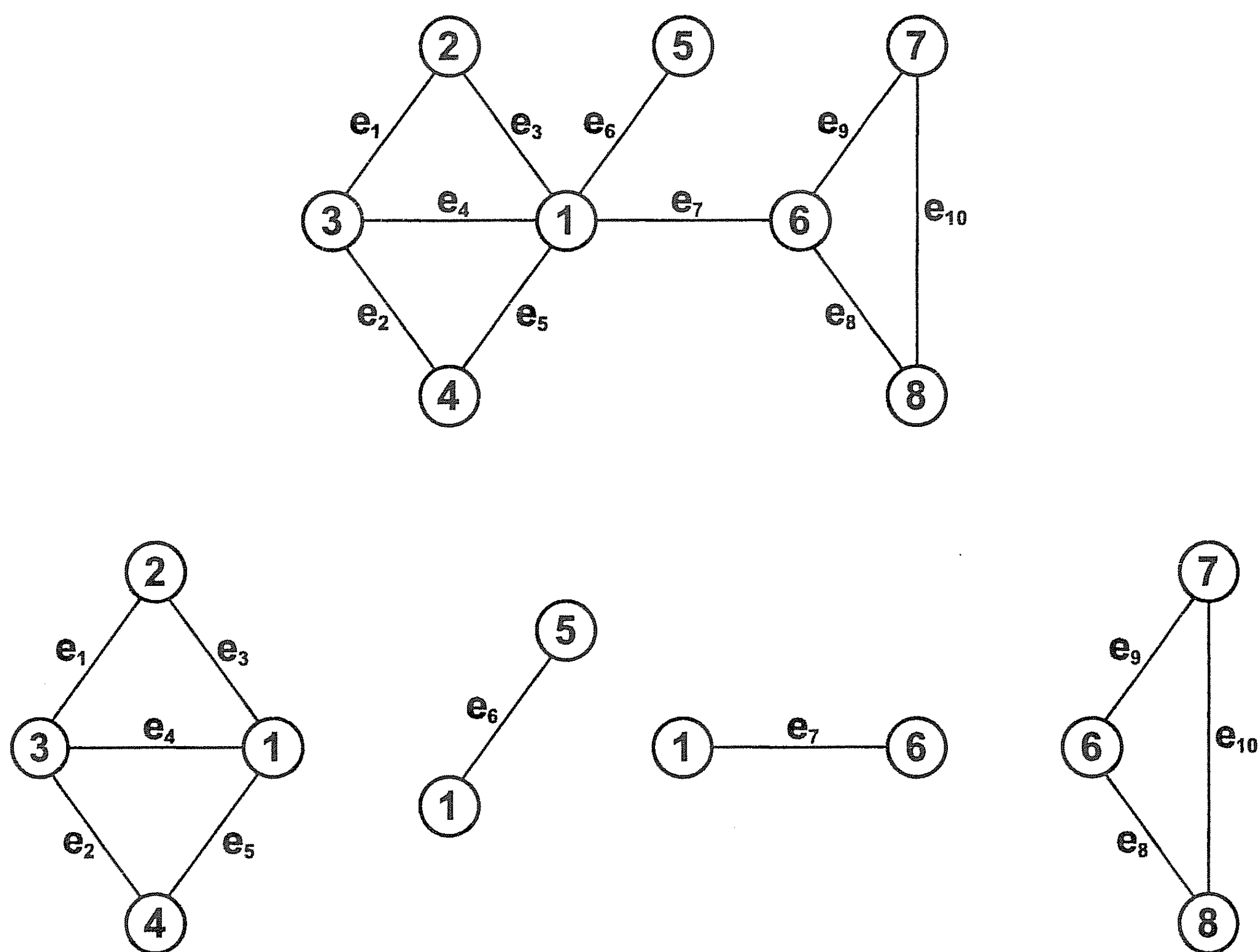
Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf. Na množici povezav E lahko definiramo relacijo R_b .

Definicija 5. Za povezavi $e, f \in E$ velja $eR_b f$ natanko takrat, ko je $e = f$ ali pa sta e in f na skupnem ciklu.

Ni težko preveriti, da je R_b ekvivalenčna relacija na množici povezav, zato razdeli množico povezav E na ekvivalenčne razrede $\{E_i\}_{i=1}^s$. Če z V_i označimo množice točk

$$V_i = \{v \in V; v \text{ je krajišče povezave iz } E_i\},$$

potem podgrafi $G_i = (V_i, E_i)$ predstavljajo 2-povezane komponente grafa G ali *bloke*. Slika 1 prikazuje graf in njegove bloke.



Slika 1. Graf in njegovi bloki.

Zaporedni algoritem za iskanje blokov grafa ima časovno zahtevnost $O(n + m)$, deluje pa z uporabo algoritma za iskanje v globino [1] in poišče presečne točke grafa.

Izkazalo se je, da se iskanja v globino in iskanja v širino ne da zapisati v obliki učinkovitih vzporednih algoritmov, še zlasti ne iskanja v globino. Zato se lotimo reševanja problema iskanja blokov grafa drugače, s pomočjo prevedbe na problem iskanja povezanih komponent grafa, za reševanje katerega je znanih veliko vzporednih algoritmov [7], [5].

Vzporedni algoritem za iskanje blokov grafa, katerega avtorja sta R. E. Tarjan in U. Vishkin [8], uporablja drugačno strategijo, saj ne obstaja iskanju v globino analogni vzporedni algoritem, ampak temelji na transformaciji grafa G v takšen graf G' , da so bloki grafa G ravno povezane komponente grafa G' . Pri tem algoritmu ne izhajamo iz drevesa, ki ga tvori iskanje v globino, ampak iz poljubnega vpetega drevesa.

Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf. Zanj lahko definiramo vpeto drevo.

Definicija 6. Vpeto drevo grafa $G = (V, E)$ je drevo $T = (V, E_T)$, za katero velja $E_T \subset E$. Povezave iz množice E_T imenujemo *drevesne povezave*, povezave iz množice $E - E_T$ pa *nedrevesne povezave*.

Če graf ni povezan, imamo vpeto drevo za vsako povezano komponento. Ta drevesa imenujemo *vpet gozd*.

Vzporedni algoritem za iskanje vpetega gozda dobimo tako, da nekoliko dopolnimo enega od algoritmov za iskanje povezanih komponent grafa. Pri algoritmih, ki originalnega grafa med svojim delovanjem ne spreminjajo (npr. Awerbuch-Shiloachov algoritem), si je treba samo zapomniti, katere povezave je algoritem uporabil za tvorjenje supervozlišč. Te povezave tvorijo množico povezav E_T vpetega drevesa. Tvorjenje vpetega drevesa ne poveča časovne zahtevnosti ali števila potrebnih procesorjev vzporednim algoritmom, ki jih uporabljamo.

Definicija 7. Naj bosta C_1 in C_2 cikla grafa $G = (V, E)$. S $C_1 \oplus C_2$ (*simetrična razlika*) označimo množico povezav, ki so v C_1 ali v C_2 , ne pa v obeh ciklih.

Naj bo $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^s$ množica ciklov v G . Cikli $C_1, C_2, \dots, C_s$ so *neodvisni*, če nobeden izmed njih ni simetrična razlika podmnožice preostalih ciklov.

Množico neodvisnih ciklov $\mathcal{C}$ imenujemo *baza ciklov* grafa G , če je vsak cikel v G simetrična razlika podmnožice $\mathcal{C}$.

Predpostavimo, da je graf G povezan (če ni, obravnavamo vsako njegovo komponento posebej). Vpeto drevo $T = (V, E_T)$ grafa G določi bazo ciklov na naslednji način. Vsaka povezava $e \in E - E_T$ naredi cikel C_e , če jo dodamo k povezavam, ki tvorijo vpeto drevo. Množica

$$\{C_e; e \in E - E_T\}$$

tvori bazo ciklov grafa G . Vsakega izmed ciklov C_e imenujemo *bazni cikel* glede na T . Ker smo predpostavili, da je G povezan, je število elementov v bazi ciklov enako

$$|E| - |E_T| = m - n + 1.$$

Če imamo vpeto drevo T grafa $G = (V, E)$, lahko definiramo relacijo R_c na množici E .

Definicija 8. Za vsak par povezav $e, f \in E$ velja eR_cf natanko takrat, ko e in f pripadata skupnemu ciklu, nastalemu z nedrevesno povezavo.

Refleksivna in tranzitivna ovojnica R_c^* relacije R_c doda v relacijo še vse pare povezav $e, f \in E$, za katere velja

- $e = f$ ali
- obstajajo takšne povezave $g_1, g_2, \dots, g_l$, da zanje velja $eR_cg_1, g_1R_cg_2, \dots, g_{l-1}R_cg_l$ in g_lR_cf .

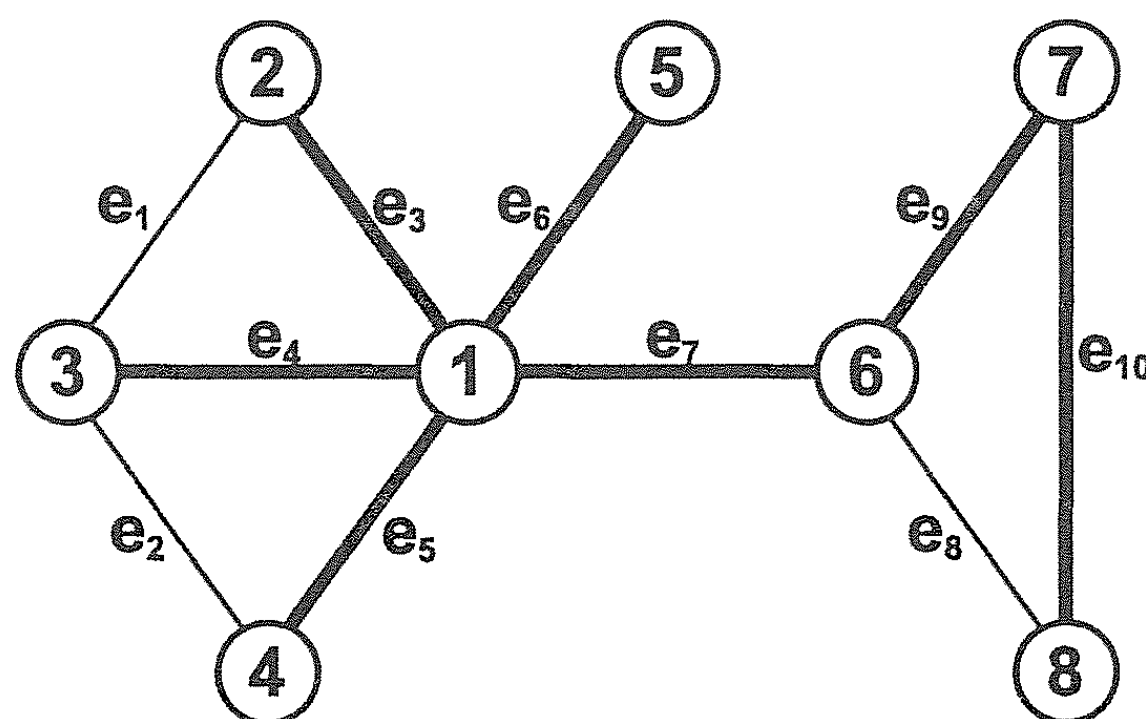
Spodnja trditev vzpostavi pomembno zvezo med relacijama R_b in R_c^* , ki jo bomo izkoristili pri vzporednem algoritmu za iskanje blokov grafa G .

Trditev 9. Naj bo T poljubno vpeto drevo grafa $G = (V, E)$. Potem je $R_b = R_c^*$, kjer je R_b ekvivalenčna relacija, ki definira bloke grafa G , R_c^* pa refleksivna in tranzitivna ovojnica relacije R_c .

Dokaz. Glede na definicijo relacije R_c iz eR_cf sledi, da sta povezavi e in f na istem baznem ciklu glede na T , zato je $R_c \subseteq R_b$. Ker pa je R_b ekvivalenčna relacija, velja tudi $R_c^* \subseteq R_b$.

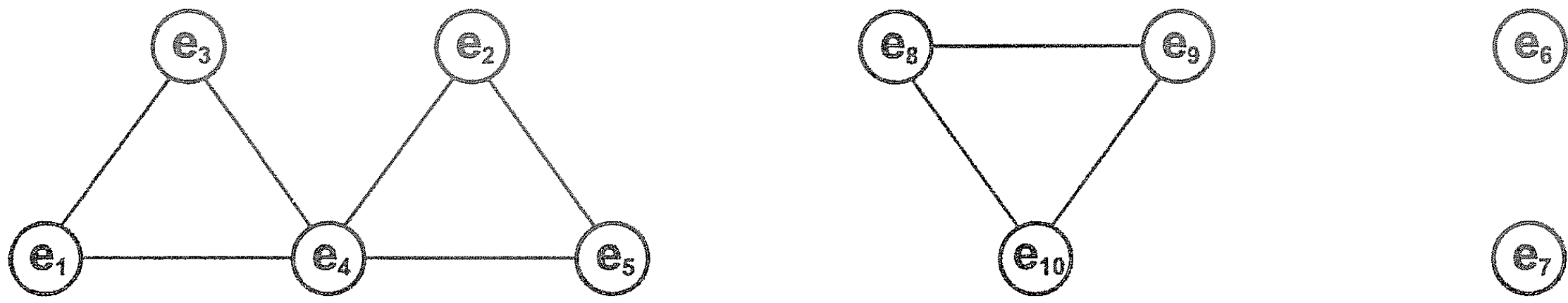
Naj bosta e in f povezavi, za kateri velja eR_bf . Če je $e = f$, velja tudi eR_c^*f , saj je relacija R_c^* refleksivna. Sicer pa obstaja cikel C , ki vsebuje obe povezavi. Naj bo $\mathcal{C} = \{C_i\}$ baza ciklov, ki jo definira vpeto drevo T . Potem je $C = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \dots \oplus C_{i_l}$ za $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_l} \in \mathcal{C}$. Če vzamemo katerakoli dva cikla C_{i_j} in C_{i_k} , obstajajo takšni cikli $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \dots, C_{\alpha_r}$, da cikel C_{i_j} deli povezavo s ciklom C_{α_1} , cikel C_{α_1} s ciklom C_{α_2} in tako naprej, ter cikel C_{α_r} deli povezavo s ciklom C_{i_k} . Ker so povezave iz ciklov C_{i_j} v relaciji R_c , so zaradi tranzitivnosti vse povezave iz cikla C v relaciji R_c^* , kar pomeni, da velja eR_c^*f in $R_b \subseteq R_c^*$. ■

Predpostavimo, da poznamo način za določitev povezav grafa $G = (V, E)$, ki so v relaciji R_c . Potem lahko bloke grafa G poiščemo tako, da definiramo graf $G' = (V', E')$, kjer je V' množica povezav E grafa G , v množici njegovih povezav E' pa so natanko povezave (e, f) , za katere velja eR_cf . Povezane komponente grafa G' ustrezajo ekvivalenčnim razredom relacije R_c^* , zato pravilno določijo bloke grafa G . Bloki grafa G so krajišča povezav (v grafu G) iz posameznih povezanih komponent grafa G' .



Slika 2. Vpeto drevo in povezave, ki tvorijo bazne cikle.

Primer. Slika 2 prikazuje vpeto drevo za graf s slike 1. Bazo ciklov, ki jo definira to vpeto drevo, predstavljajo cikli $C_1 = \{e_1, e_3, e_4\}$, $C_2 = \{e_2, e_4, e_5\}$ in $C_3 = \{e_8, e_9, e_{10}\}$. Graf G' , ki ga definira relacija R_c , je predstavljen na sliki 3.



Slika 3. Graf G' , ki ga definira relacija R_c .

Povezane komponente grafa G' so $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_8, e_9, e_{10}\}$, $\{e_6\}$ in $\{e_7\}$. Na ta način določeni bloki grafa G so torej podgrafi, ki jih definirajo podmnožice točk $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{6, 7, 8\}$, $\{1, 5\}$ in $\{1, 6\}$ ter ustrezajo blokom, ki jih prikazuje slika 1.

Algoritem za iskanje blokov grafa ne deluje čisto tako, saj bi lahko na zgoraj opisani način tvorjeni graf G' imel preveč povezav. Če je na primer G cikel na n točkah, je v relaciji R_c vsak par povezav, zato velja $|R_c| = O(n^2)$. Definirali bomo podmnožico relacije R_c , ki definira iste povezane komponente kot relacija R_c .

Relacijo R_c smo definirali glede na vpeto drevo T grafa $G = (V, E)$. Želimo definirati relacijo R'_c na množici povezav E , za katero velja:

- $R'_c \subseteq R_c$,
- $|R'_c| = O(m)$ in
- $(R'_c)^* = R_c^*$, kjer $*$ označuje refleksivno in tranzitivno ovojnico relacije.

Za definicijo relacije R'_c je treba oštevilčiti vozlišča v vpetem drevesu T grafa G glede na premi vrstni red (angl. *preorder*) [6]. Za koren drevesa izberemo poljubno vozlišče. Od zdaj naprej imenujmo vozlišča glede na to oštevilčenje. Za tako oštevilčena vozlišča veljajo lastnosti, ki jih opisuje naslednja trditev:

Trditev 10. Naj bo T vpeto drevo, v katerem so vsa vozlišča oštevilčena glede na premi vrstni red, velikost(v) pa naj označuje število vozlišč v poddrevesu s korenem v . Potem velja:

1. Če za katerikoli vozlišči u in v velja $u < v$, v ne more biti prednik u -ja.
2. Če za katerikoli vozlišči u in v velja $v + \text{velikost}(v) \leq u$, potem ni niti vozlišče u prednik vozlišča v niti obratno.

Dokaz. Točka 1 velja, ker je pri oštevilčenju glede na premi vrstni red vsako vozlišče obiskano prej kot katerikoli njegovih potomcev.

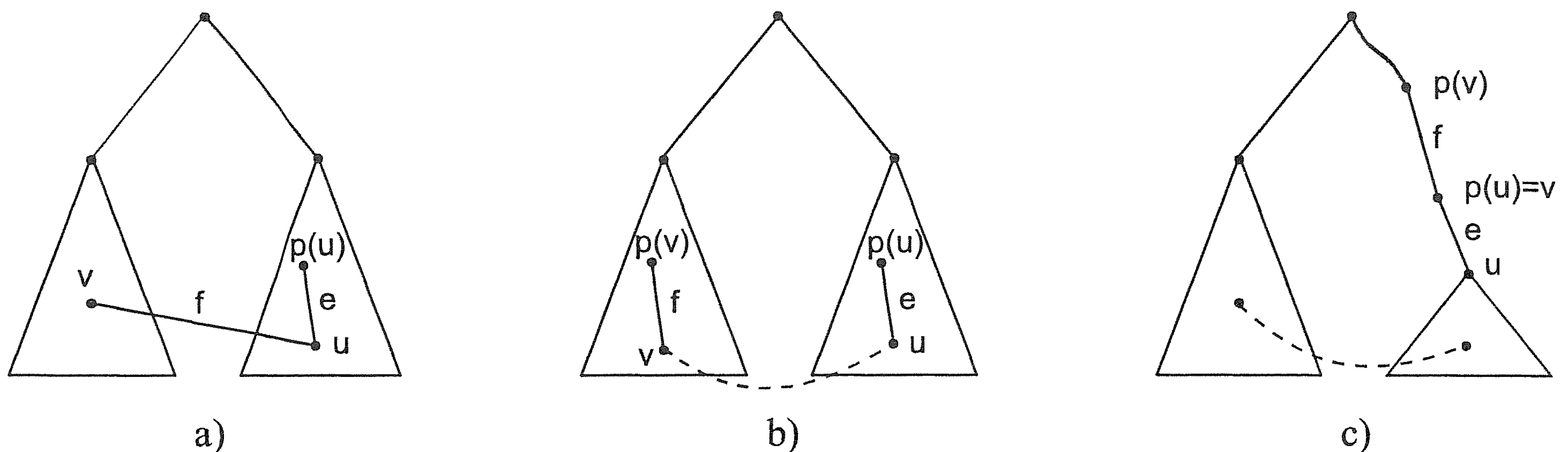
Točka 2 velja, ker vozlišče u ne more biti prednik vozlišča v , saj je $v < u$. Obratno tudi ne more biti res, saj vsakega naslednika w vozlišča v obiščemo, preden končamo obisk poddrevesa s korenem v . Zato za w velja $v \leq w < v + \text{velikost}(v)$, kar pomeni, da vozlišče u tudi ne more biti naslednik vozlišča v . ■

Zdaj lahko definiramo relacijo R'_c .

Definicija 11. Za vsako vozlišče v označimo s $p(v)$ njegovega očeta v vpetem drevesu T . Natanko takrat, ko je izpolnjen eden izmed spodnjih pogojev:

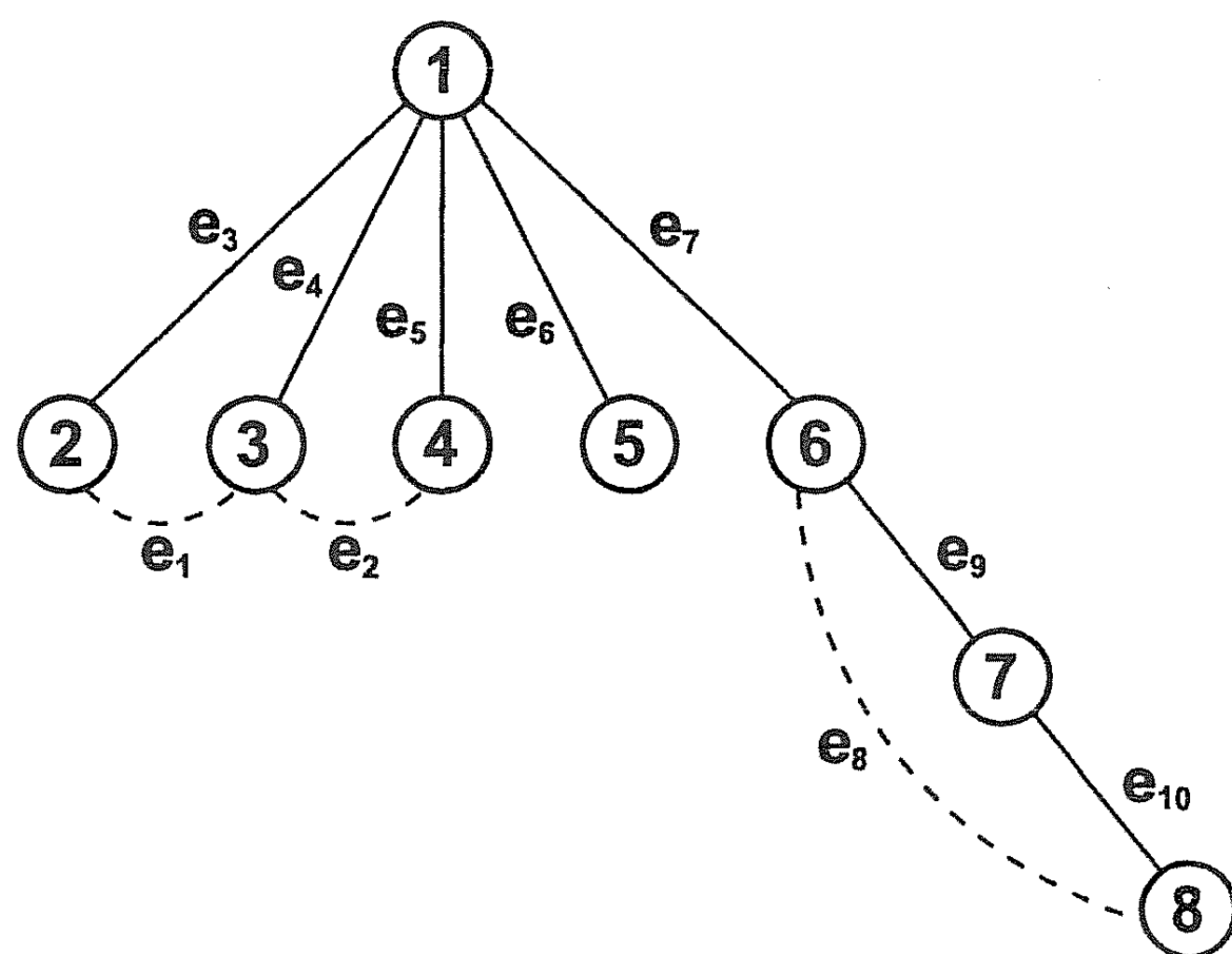
1. $e = (u, p(u))$, $f = (u, v)$ v $G - T$ in $v < u$ (slika 4a)),

2. $e = (u, p(u))$, $f = (v, p(v))$, $(u, v) \in G - T$ in niti u ni prednik v -ja niti obratno (slika 4b)),
 3. $e = (u, p(u) = v)$, $v \neq 1$, $f = (v, p(v))$ in povezava iz G , ki ni del vpetega drevesa, povezuje naslednika u -ja z vozliščem, ki ni naslednik v -ja (slika 4c)),
- velja eR'_cf in fR'_ce .



Slika 4. Ilustracija relacije R'_c .

Graf G' spet definiramo enako, kot smo ga definirali za relacijo R_c . V' je množica povezav E grafa G , v množici njegovih povezav E' pa so natanko povezave (e, f) , za katere velja eR'_cf .



Slika 5. Vpeto drevo s korenem v vozlišču 1.

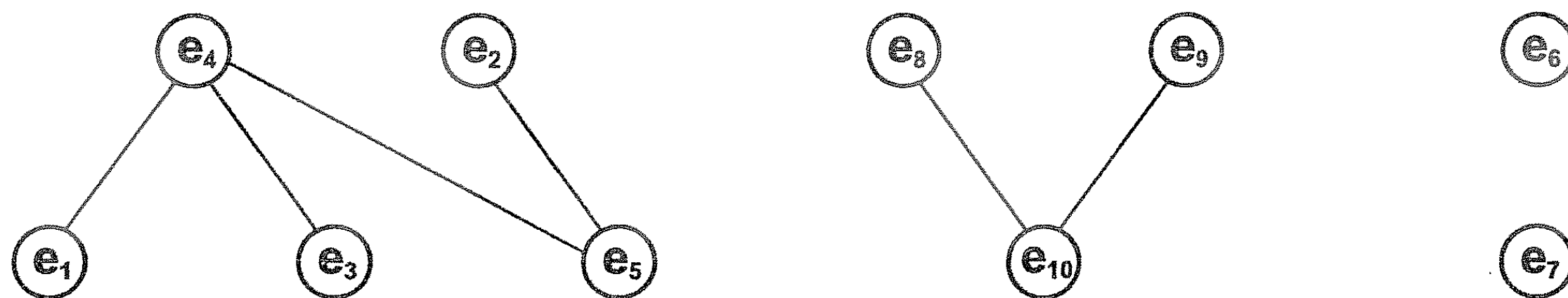
Primer. Slika 5 prikazuje vpeto drevo s korenem v vozlišču 1 za graf s slike 1. Oštevilčenje glede na premi vrstni red vozliščem priredi oznake, ki ustrezajo oznakam v grafu. V relaciji R'_c so naslednji pari povezav:

- (e_4, e_1) , (e_5, e_2) in (e_{10}, e_8) (zaradi pogoja 1),
- (e_5, e_4) in (e_4, e_3) (zaradi pogoja 2) ter
- (e_9, e_{10}) (zaradi pogoja 3).

Graf $G' = (V', E')$, ki ustreza relaciji R'_c , je prikazan na sliki 6.

Povezane komponente tega grafa spet definirajo bloke grafa G . ■

Spodnja trditev nam da zvezo med relacijama R'_c in R_c^* , ki potrjuje, da smo relacijo R'_c definirali tako, da nam bo omogočila iskati 2-povezane komponente ali bloke grafa.



Slika 6. Graf G' , ki ga definira relacija R'_c .

Trditev 12. Naj bosta R_c in R'_c zgoraj definirani relaciji glede na poljubno vpeto drevo T grafa G . Potem velja:

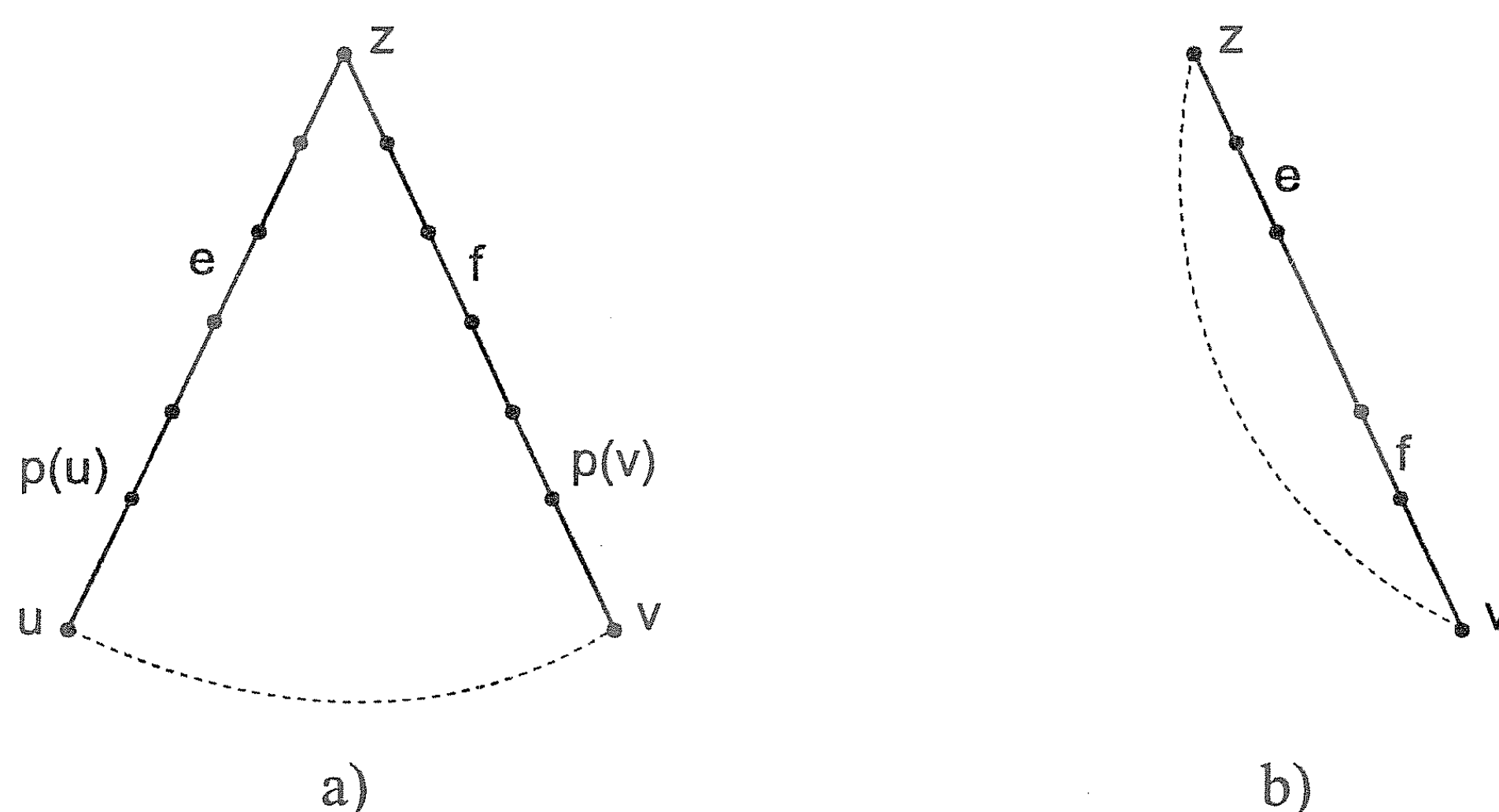
- $R_c^* = (R'_c)^*$ in
- $|R'_c| = O(m)$, kjer je m število povezav v G .

Dokaz. Vsaki dve povezavi e in f , za kateri velja eR'_cf , pripadata ciklu, definiranemu z nedrevesno povezavo. Zato sta v relaciji R_c , kar pomeni, da je $R'_c \subseteq R_c$ in $(R'_c)^* \subseteq R_c^*$.

Dokazati je treba še nasprotno. Naj bosta e in f povezavi, za kateri velja eR_cf . Potem ležita na skupnem baznem ciklu glede na T , na primer na ciklu, definiranem z nedrevesno povezavo (u, v) . Naj bo z najmanjši skupni prednik u in v . Pokazali bomo, da so vse povezave iz baznega cikla v $(R'_c)^*$.

Predpostavimo, da je $u < v$. Ločimo lahko dva primera:

- $z \neq u$ (slika 7a). Torej u ni prednik v -ja, zato sta povezavi $(u, p(u))$ in $(v, p(v))$ v relaciji R'_c , saj izpolnjujeta pogoj 2. Zaradi pogoja 1 sta v relaciji R'_c povezavi $(v, p(v))$ in (v, u) , zaradi pogoja 3 pa je v relaciji vsak par zaporednih povezav na poti med z in u in na poti med z in v . Zaradi tranzitivnosti velja $e(R'_c)^*f$.
- $z = u$ (slika 7b). Večkrat uporabimo pogoj 3 in dobimo $e(R'_c)^*f$.



Slika 7. Ilustracija dokaza trditve.

Torej velja tudi $R_c^* \subseteq (R'_c)^*$, kar pomeni, da sta relaciji enaki.

$|R'_c|$ dobimo tako, da izračunamo zgornjo mejo za število vozlišč, za katera je izpolnjen eden izmed pogojev 1, 2 ali 3. Vsaka povezava iz $G - T$ definira par povezav, za katerega je izpolnjen pogoj 1, in največ en par povezav, za katerega je izpolnjen pogoj 2. Povezava, za katero je izpolnjen pogoj 3, je lahko v relaciji R'_c največ z eno povezavo, namreč s svojo sosedo

na poti proti korenu drevesa T . Torej je število parov povezav, ki so v R'_c in izvirajo iz pogoja 3, tudi reda velikosti $O(m)$ in velja $|R'_c| = O(m)$. ■

Pomembna posledica trditve 12 je, da povezane komponente grafa $G' = (V', E')$ definirajo bloke prvotnega grafa $G = (V, E)$.

- Vpeljimo še dve novi oznaki, to sta *spodnja*(v) in *zgornja*(v), kjer
- *spodnja*(v) označuje najmanjše vozlišče, ki je naslednik v -ja v drevesu ali pa je povezano z naslednikom v -ja v grafu G z nedrevesno povezavo,
 - *zgornja*(v) pa označuje največje vozlišče, ki je naslednik v -ja v drevesu ali pa je povezano z naslednikom v -ja v grafu G z nedrevesno povezavo.

Ti dve spremenljivki bosta uporabni pri ugotavljanju, ali pari vozlišč ustrezajo pogoju 3 v definiciji relacije R'_c .

Trditev 13. Naj bosta $e = (u, p(u) = v)$, $v \neq 1$, in $f = (v, p(v))$ zaporedni drevesni povezavi v vpetem drevesu T . Potem e in f ustrezata pogoju 3 v definiciji relacije R'_c natanko takrat, ko je *spodnja*(u) $< v$ ali *zgornja*(u) $\geq v + velikost(v)$.

Dokaz. Glede na pogoj 3 sta e in f v relaciji R'_c , če kaka povezava iz E povezuje naslednika u -ja z vozliščem, ki ni naslednik v -ja.

Predpostavimo, da je za povezavi e in f izpolnjen pogoj 3, in naj bo (x, y) povezava, ki povezuje naslednika u -ja (vozlišče x) z vozliščem y , ki ni naslednik v -ja. Ločimo dva primera glede na to, ali je $y < u$ ali $y > u$.

- $y < u$. Ker y ni naslednik v -ja in je $(u, p(u) = v)$ povezava v vpetem drevesu T , velja $y < v$. Ker pa je *spodnja*(u) $\leq y$, velja *spodnja*(u) $< v$.
- $y > u$. Ker y ni naslednik v -ja in je (u, v) povezava v vpetem drevesu T , je y gotovo obiskan (glede na premi vrstni red) po obisku poddrevesa s korenem v . Zato je $y \geq v + velikost(v)$, kar pomeni, da velja *zgornja*(u) $\geq v + velikost(v)$.

Trditev je treba dokazati še v drugo smer. Naj bosta $e = (u, p(u) = v)$, $v \neq 1$, in $f = (v, p(v))$ zaporedni drevesni povezavi v vpetem drevesu T , za kateri velja *spodnja*(u) $< v$ ali *zgornja*(u) $\geq v + velikost(v)$.

- Predpostavimo, da je *spodnja*(u) $< v$. Po definiciji *spodnja*(u) obstaja naslednik u -ja x , ki ga nedrevesna povezava (x, y) povezuje z vozliščem y , za katero velja $y = \text{spodnja}(u)$. Ker je $y = \text{spodnja}(u) < v$, y ne more biti naslednik v -ja. Torej je (x, y) povezava, ki povezuje naslednika u -ja z vozliščem, ki ni naslednik v -ja, zato je za povezavi e in f izpolnjen pogoj 3.
- Primer, ko je *zgornja*(u) $\geq v + velikost(v)$, obravnavamo podobno. ■

Algoritem za iskanje blokov grafa temelji na preverjanju vseh treh pogojev v definiciji relacije R'_c . Za preverjanje pogoja 3 je treba izračunati vrednosti spremenljivk *spodnja*(v) in *zgornja*(v).

Algoritem za izračun vrednosti spremenljivke *spodnja*(v) sestavljata dva koraka. Prvi korak priredi vsakemu vozlišču $v \in V$ vrednost $T(v)$, ki predstavlja minimum v -ja in vseh vozlišč, ki jih z v -jem povezuje nedrevesna povezava. Drugi korak priredi spremenljivki *spodnja*(v) minimum $T(u)$ za vsa vozlišča u iz poddrevesa s korenem v .

Algoritem: Izračun $spodnja(v)$

Vhod algoritma je vpeto drevo iskanja v globino T_g povezanega grafa $G(V, E)$, izhod pa je vektor $spodnja$ dolžine n .

1. za $v := 1$ do n hkrati izvedi
 $T(v) := \min\{u; (v, u) \in G - T\} \cup \{v\}$
2. za $v := 1$ do n hkrati izvedi
 $spodnja(v) := \min\{T(u); u \text{ je v poddrevesu s korenem } v\}$

Vrednosti spremenljivke $zgornja(v)$ lahko izračunamo s pomočjo podobnega algoritma, v katerem minimum zamenja maksimum.

Algoritem: Iskanje 2-povezanih komponent ali blokov grafa

Vhod je povezan graf $G(V, E)$, izhod pa je vektor oče dolžine m . Če sta povezavi e in f v istem bloku, velja $(e) = oče(f)$.

1. Poišči vpeto drevo T grafa G .
2. Izberi katerokoli vozlišče za koren vpetega drevesa T in oštevilči vozlišča glede na premi vrstni red.
3. Za vsako vozlišče v izračunaj $velikost(v)$, $spodnja(v)$ in $zgornja(v)$.
4. Konstruiraj seznam parov povezav L :
 - a) Za vsako povezavo $e = (u, v) \in G - T$, za katero velja $v < u$, vstavi v L par povezav (e, f) , kjer je $f = (u, p(u))$.
 - b) Za vsako povezavo $(u, v) \in G - T$, za katero velja $v + velikost(v) \leq u$, vstavi v L par povezav (e, f) , kjer je $e = (v, p(v))$ in $f = (u, p(u))$.
 - c) Za vsako povezavo $e = (u, p(u) = v)$, $v \neq 1$, vstavi v L par povezav (e, f) , če je $spodnja(u) < v$ ali $zgornja(u) \geq v + velikost(v)$, kjer je $f = (v, p(v))$.
5. Poišči povezane komponente grafa $G' = (V', E')$, katerega vozlišča so $V' = E$, povezave pa $E' = L$.

Izrek 14. *Zgornji algoritem poišče povezave, ki se nahajajo v blokih grafa $G = (V, E)$. Njegova časovna zahtevnost in število potrebnih procesorjev sta enaka kot pri vzporednem algoritmu, ki ga uporabljamo za iskanje povezanih komponent grafa G' .*

Dokaz. Pari povezav, ki so v relaciji R'_c , so natanko tisti, ki jih v seznam L uvrsti četrti korak. Vsak par, ki ga v seznam uvrsti korak 4a), ustreza pogoju 1 v definiciji relacije. Pari, ki jih v seznam uvrsti korak 4b), ustrezajo pogoju 2, saj iz $v + velikost(v) \leq u$ sledi, da nobeno izmed vozlišč u in v ni naslednik drugega vozlišča (trditev 10). Vsak par povezav, za katerega je izpolnjen pogoj 2, bo ta korak uvrstil v seznam L . Korak 4c) uvrsti v seznam L tiste pare povezav, za katere je izpolnjen pogoj 3 (trditev 13).

V grafu G' je toliko vozlišč, kolikor je v grafu G povezav, število povezav pa je v obeh grafih istega reda. Zato je ključnega pomena za zahtevnost algoritma peti korak.

Vpeto drevo povezanega grafa lahko poiščemo v istem času in z istim številom procesorjev kot pri algoritmu za iskanje povezanih komponent grafa. Ker je v grafu G manj vozlišč kot v grafu G' , je zahtevnost tega koraka manjša, kot je zahtevnost petega koraka.

Tehniko Eulerjevega obhoda [5], [7] lahko uporabimo za določitev korena vpetega drevesa, oštevilčenje vozlišč v vpetem drevesu glede na premi vrstni red in za izračun $velikost(v)$ za vsako vozlišče. Ta algoritem ima časovno zahtevnost $O(\log n)$, potrebuje pa $n/\log n$ procesorjev.

Pri izračunu vrednosti spremenljivk *spodnja* in *zgornja* si pomagamo z izboljšano metodo uravnoveženega drevesa [5], [7], [3], ki ima časovno zahtevnost $O(\log n)$, potrebuje pa $n/\log n$ procesorjev. ■

Tudi četrti korak je manj zahteven od petega koraka. Če za določitev vpetega drevesa in za iskanje povezanih komponent grafa G' uporabimo Awerbuch-Shiloachov algoritem [4], znaša časovna zahtevnost algoritma za iskanje blokov grafa $O(\log n)$, število potrebnih procesorjev pa $n + m$. Namesto tega algoritma lahko uporabimo tudi kakšnega izmed boljših algoritmov [7], [5], [3].

Sklep

Iskanje blokov grafa pomeni eno izmed možnosti uporabe vzporednih algoritmov za iskanje povezanih komponent grafa. Te algoritme lahko uporabimo tudi pri iskanju minimalnega vpetega drevesa, šibko in krepko povezanih komponent usmerjenega grafa ter še pri reševanju mnogih problemov s področja fizike in računalniškega vida.

Ugotavljanja 2-povezanosti in 3-povezanosti se lahko lotimo tudi drugače, s pomočjo vzporednega algoritma za odprto ušesno dekompozicijo [7]. Tudi pri tem algoritmu uporabljamo vzporedni algoritem za iskanje povezanih komponent grafa.

LITERATURA

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, 1974.
- [2] M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster, *Graphs and Digraphs*, Prindle, Weber and Schmidt International Series, Boston, 1979.
- [3] M. Indihar Štemberger, *Paralelni algoritmi za iskanje povezanih komponent grafa*, Magistrsko delo, Ljubljana, 1996.
- [4] M. Indihar Štemberger, *Vzporedni algoritmi za iskanje povezanih komponent grafa*, Obzornik za matematiko in fiziko **44** (1997), 1, 1–13.
- [5] J. JáJá, *An Introduction to Parallel Algorithms*, Addison-Wesley, 1992.
- [6] J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1986.
- [7] J. H. Reif, *Synthesis of Parallel Algorithms*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California, 1993.
- [8] R. E. Tarjan, U. Vishkin, *An Efficient Parallel Biconnectivity Algorithm*, SIAM Journal of Computing **14** (1985), 4, 862–874.

PLATEAUJEV PROBLEM

MIRAN ČERNE

Math. Subj. Class. (1991) 49Q05, 53A10

Predstavljen je Plateaujev problem in nekaj elementarnih rezultatov, povezanih z njim.

THE PLATEAU PROBLEM

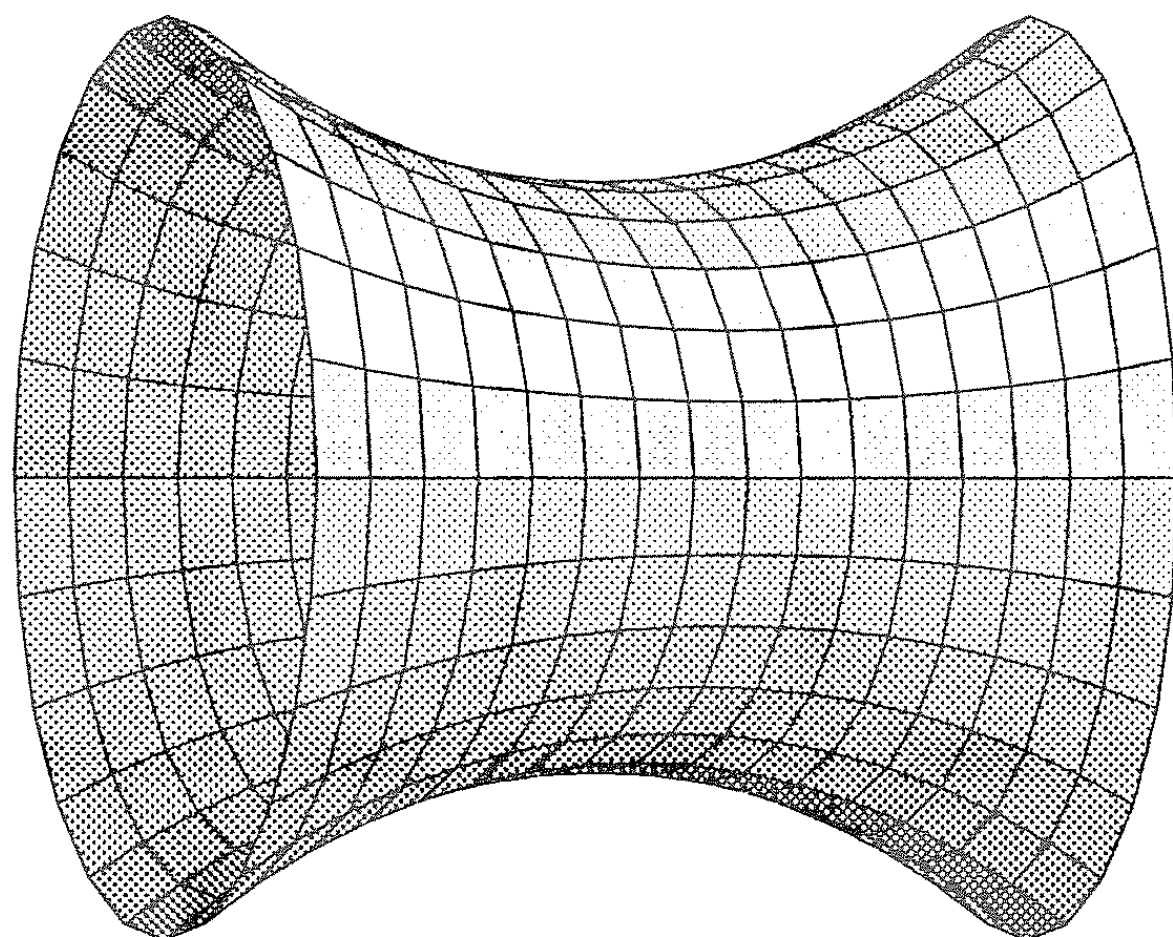
The Plateau problem and some related elementary results are presented.

Uvod

Naj bo γ unija končno mnogo enostavno sklenjenih krivulj v $\mathbb{R}^3$. Med vsemi ploskvami $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, ki imajo γ za svoj rob, bi radi poiskali tisto ploskev Σ_o , ki ima najmanjšo površino.

Zgledi:

- a) Za krožnico γ je Σ_o kar ravninski disk, ki ga γ omejuje.
- b) Naj bo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ unija dveh vzporednih enako velikih krožnic γ_1 in γ_2 . Kaj je Σ_o v tem primeru? Če sta γ_1 in γ_2 dovolj skupaj, se nam zdi, da bo rešitev problema Σ_o po obliki blizu valja, ki je napet na γ_1 in γ_2 . Dejansko je to rotacijska ploskev, ki jo dobimo, če verižnico (graf funkcije $y = A \operatorname{ch}(x)$ za ustrezen $A \in \mathbb{R}$) zavrtimo okoli osi skozi središči obeh krožnic. Ta ploskev se imenuje *katenuida*. Če pa sta γ_1 in γ_2 dovolj narazen, tedaj bo rešitev Σ_o kar unija dveh ravninskih diskov, ki sta napeta na γ_1 in γ_2 (iskana ploskev Σ_o ni nujno povezana!).



Slika 1. Katenoida

Opomba. Problem, ki ga rešujemo, ima tudi naslednjo fizikalno interpretacijo: Kakšna ploskev se napne na ogrodje γ , če ga pomočimo v milnico? Ploskev, ki nastane, se oblikuje tako, da se minimizira njena površinska energija, le-ta pa je sorazmerna površini ploskve. Če smo čisto natančni, problema nista popolnoma ekvivalentna. To lahko vsakdo tudi preizkusi na zgoraj predstavljenem primeru dveh krožnic. Na dve ločeni krožnici, ki ju

pomočimo v milnico, se katenoida noče in noče napeti. Ploskev, ki se oblikuje, ko ogrodje γ pomočimo v milnico, potemtakem le **lokalno** minimizira površino ploskve, tj. ploskev, ki se oblikuje, ima med vsemi bližnjimi ploskvami najmanjšo površino, ni pa to nujno natanko ploskev z najmanjšo možno površino.

Matematična formulacija problema

Kako naj se matematično lotimo problema? V prvi obliki sta problem neodvisno drug od drugega rešila Tibor Radó in Jesse Douglas v tridesetih letih tega stoletja (Douglas je za svoje delo leta 1936 dobil tudi eno od prvih dveh Fieldsovih medalj, [5]). Reševala sta tako imenovani (klasični) Plateaujev problem (ime je dobil po belgijskem profesorju fizike in anatomije Josephu Plateauju (1801–1883), ki je prvi sistematično opisal lastnosti ploskev, ki jih na danem ogrodju oblikuje milnica, [1]):

Naj bo γ enostavno sklenjena gladka krivulja v $\mathbb{R}^3$ (tokrat je krivulja ena sama!). Med vsemi glatkimi preslikavami

$$f = (f_1, f_2, f_3) : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

iz enotskega kroga $D \subseteq \mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^3$, ki krožnico $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ preslikajo na γ , je treba poiskati tako preslikavo f_o , da ima ploskev $f_o(D)$ najmanjšo površino.

Opomba. Pri reševanju Plateaujevega problema se potemtakem omejimo na poseben razred ploskev z robom v γ . Zanimajo nas le **diski** (slike enotskega kroga D) v $\mathbb{R}^3$, katerih robovi leže na γ .

Plateaujev problem rešujemo z variacijskimi metodami. Najprej zapišimo funkcional, ki podaja površino ploskve $f(D)$. Da pa ne bi zašli v tehnične podrobnosti, bomo predstavitev problema nekoliko poenostavili in predpostavili, da je ploskev $f(D)$ graf neke gladke funkcije u na D . Torej

$$f_1(x, y) = x, \quad f_2(x, y) = y, \quad f_3(x, y) = u(x, y).$$

Spomnimo se, [7], da je v tem primeru površina grafa funkcije u podana z naslednjim funkcionalom:

$$P(u) := \iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dx \, dy.$$

V tem poenostavljenem problemu je enostavno sklenjena krivulja γ podana kot graf neke (dane) funkcije φ na krožnici ∂D . Sedaj torej iščemo tako gladko funkcijo u_o na D s predpisanimi robnimi vrednostmi ($u_o(x, y) = \varphi(x, y)$ za vse $(x, y) \in \partial D$), da je vrednost funkcionala $P(u)$ v u_o najmanjša.

Naj bo v poljubna gladka funkcija na D , katere robne vrednosti so vse enake 0. Torej $v(x, y) = 0$ za vse $(x, y) \in \partial D$. Tedaj ima za vsak $t \in \mathbb{R}$ funkcija $u_o + tv$ iste robne vrednosti kot u_o . Oglejmo si vrednosti funkcije realne spremenljivke t

$$P_v(t) := P(u_o + tv) = \iint_D \sqrt{1 + (u_{ox} + tv_x)^2 + (u_{oy} + tv_y)^2} dx dy.$$

Če naj ima funkcional $P(u)$ pri predpisanih robnih vrednostih φ v funkciji u_o svoj minimum, mora imeti tudi funkcija P_v v $t = 0$ svoj minimum. Torej je

$$\frac{dP_v}{dt}(0) = 0$$

oziroma

$$\iint_D (1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2)^{-\frac{1}{2}} [u_{ox}v_x + u_{oy}v_y] dx dy = 0. \quad (1)$$

Označimo

$$M := (1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2)^{-\frac{1}{2}} u_{ox} \quad \text{in} \quad N := (1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2)^{-\frac{1}{2}} u_{oy}.$$

S pomočjo Greenove formule dobimo

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (Mv) + \frac{\partial}{\partial y} (Nv) \right] dx dy = \int_{\partial D} (Mv) dy - (Nv) dx = 0, \quad (2)$$

saj je $v|_{\partial D} = 0$. Upoštevajoč (1) in (2) sklepamo, da je

$$\iint_D G(u_o) v dx dy = \iint_D (Mv_x + Nv_y) dx dy = 0, \quad (3)$$

kjer je

$$\begin{aligned} G(u_o) &= -M_x - N_y \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [(1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2)^{-\frac{1}{2}} u_{ox}] - \frac{\partial}{\partial y} [(1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2)^{-\frac{1}{2}} u_{oy}] \\ &= -(1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2)^{-\frac{3}{2}} [(1 + u_{oy}^2) u_{oxx} - 2u_{ox} u_{oy} u_{oxy} + (1 + u_{ox}^2) u_{oyy}]. \end{aligned}$$

Ker enakost (3) velja za vsako funkcijo v na D , ki je na robu ∂D identično enaka 0, mora veljati $G(u_o) = 0$. Funkcija u_o torej mora zadoščati naslednji nelinearni parcialni diferencialni enačbi drugega reda

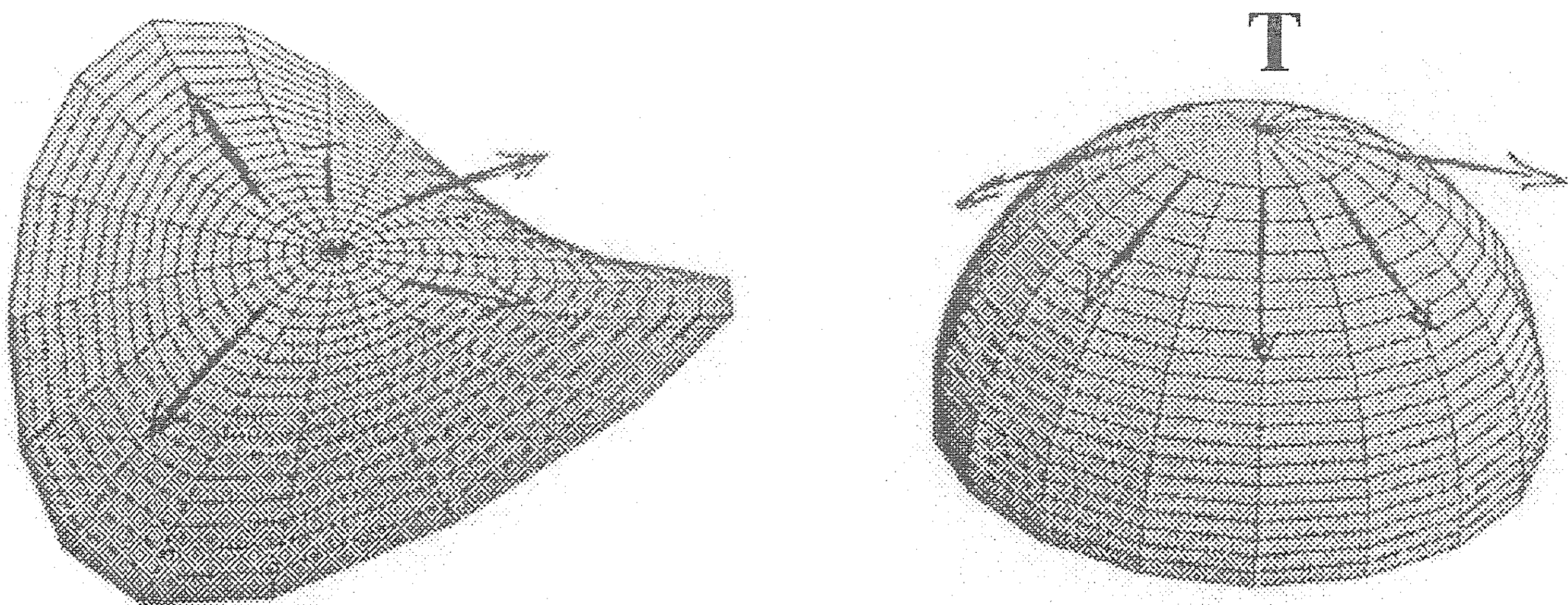
$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0. \quad (4)$$

Kakšno informacijo nam da ta enačba? Če graf funkcije u_o res podaja ploskev z najmanjšo površino, potem mora u_o rešiti to enačbo. Za gladko

ploskev Σ v $\mathbb{R}^3$ se spomnimo pojma povprečne ukrivljenosti. V vsaki točki T na ploskvi Σ najprej določimo obe glavni ukrivljenosti $\frac{1}{R_1}$ in $\frac{1}{R_2}$, [7]. Tedaj je povprečna ukrivljenost H ploskve Σ v točki T enaka $\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$. Če pa je ploskev Σ podana kot graf neke funkcije u , je, [7],

$$2H = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vidimo, da funkcija u reši parcialno diferencialno enačbo (4) natanko tedaj, ko je v vsaki točki njenega grafa povprečna ukrivljenost enaka 0. Zaradi tega vsako ploskev v $\mathbb{R}^3$ (tudi če ima nekaj samopresečišč), ki ima v vsaki svoji točki povprečno ukrivljenost enako 0, imenujemo *minimalna ploskev*. Kot smo videli zgoraj, je vsaka ploskev, ki za dani rob minimizira površino, minimalna ploskev. V naslednjem razdelku pa bomo predstavili nekaj primerov, ki pokažejo, da obrat te izjave ne drži. Minimalne ploskve so torej le stacionarne (ne nujno ekstremalne!) točke funkcionala P .



Slika 2. Na levi sliki, kjer je $H = 0$, imamo ravnovesje sil površinske napetosti, na desni sliki, kjer $H \neq 0$, pa sile površinske napetosti silijo točko T in njeno okolico navzdol (površina ploskve se pri taki perturbaciji zmanjša).

Če izberemo ustrezen koordinatni sistem, postane enačba (4) v izbrani točki $T = (a, b, u(a, b)) \in f(D)$ bolj preprosta. Najprej premaknimo izhodišče koordinatnega sistema v točko T , nato pa naredimo tak zasuk v prostoru, da se tangentna ravnina na $f(D)$ v točki T ujame z ravnino (x, y) . Še več, ker sta smeri glavnih ukrivljenosti pravokotni druga na drugo, [7], nam nadaljnji zasuk omogoči tak koordinatni sistem, da se os x ujema s prvo glavno smerjo in os y z drugo. V tem koordinatnem sistemu v točki T , oziroma $(a, b) \in D$, velja

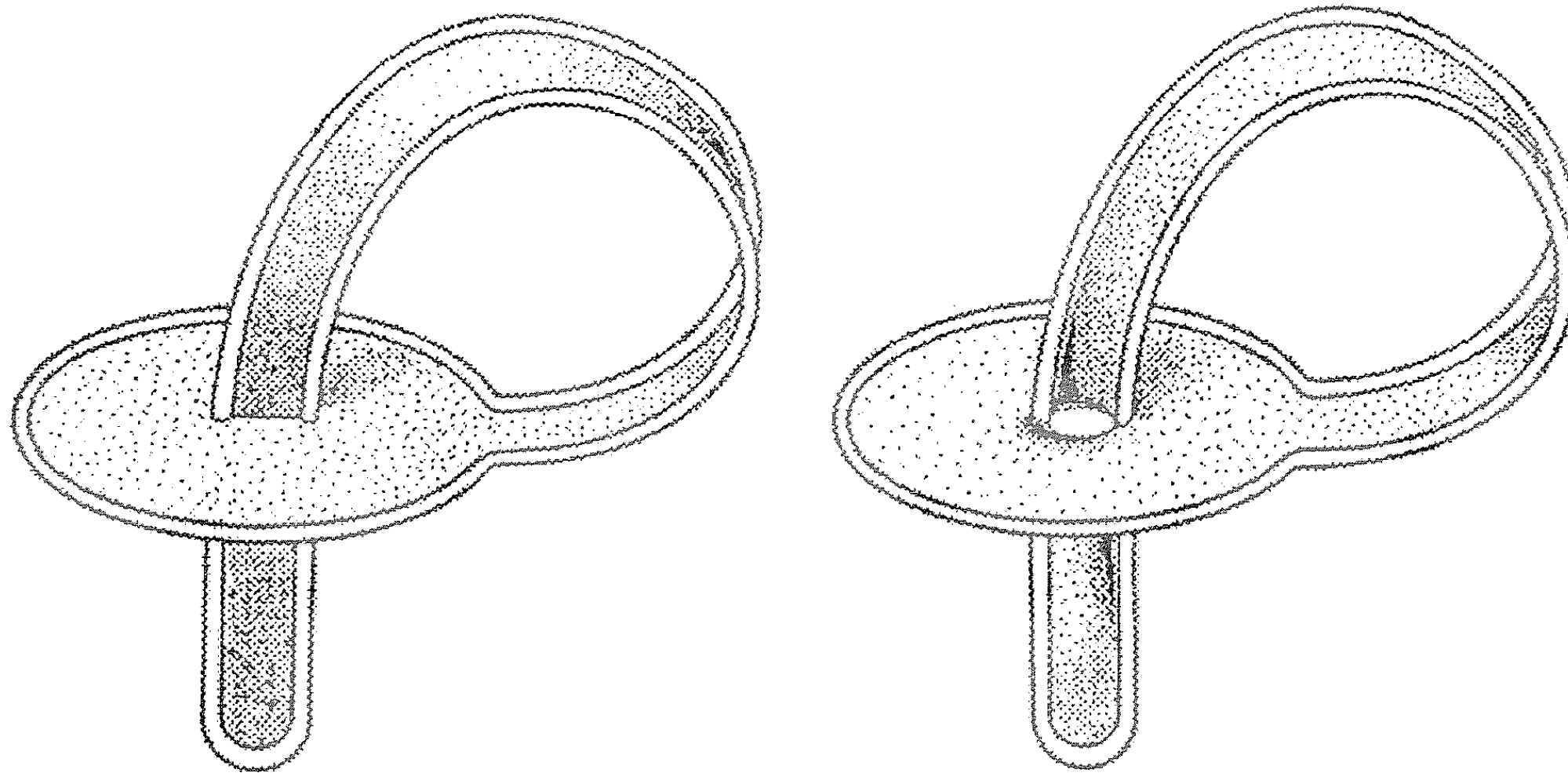
$$u_x(a, b) = u_y(a, b) = 0$$

in zato se enačba (4) v točki (a, b) glasi

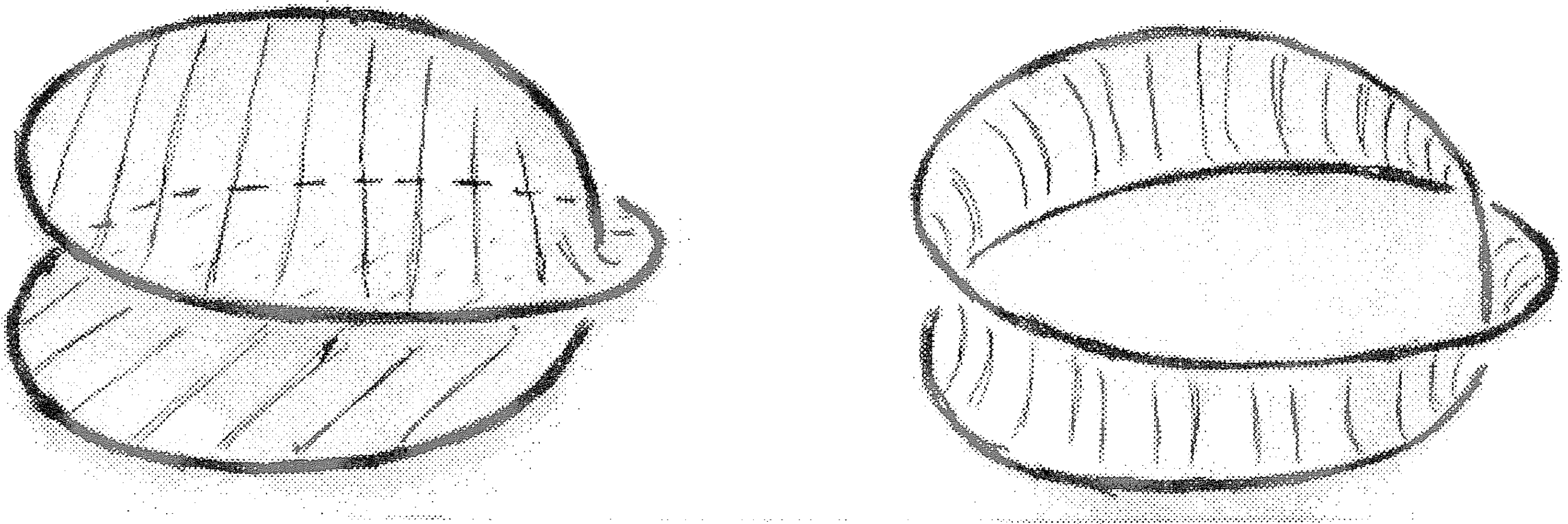
$$\Delta u(a, b) = u_{xx}(a, b) + u_{yy}(a, b) = 0.$$

Plateaujev problem in ploskve z najmanjšo površino

Ker smo se pri reševanju Plateaujevega problema omejili le na diske z robom v γ , rešitev Plateaujevega problema za enostavno sklenjeno krivuljo γ ni nujno tudi ploskev z najmanjšo površino. Tako nastane vprašanje, kaj so zadostni pogoji na γ , da je rešitev Plateaujevega problema za γ tudi ploskev z najmanjšo površino.



Slika 3. Ploskev na levi sliki predstavlja rešitev Plateaujevega problema, ploskev na desni sliki pa ploskev Σ_o , ki minimizira površino. Opazimo, da ima ploskev Σ_o na mestu, kjer ima rešitev Plateaujevega problema samopresečišče, majhno luknjo in da nima samopresečišč v svoji notranjosti, [3].



Slika 4. Naj bo γ rob dovolj ozkega Möbiusovega traku. Tedaj je ustrezna ploskev Σ_o z najmanjšo površino nekoliko ukrivljen Möbiusov trak, ki je po obliki blizu prvotnemu. Rešitev Plateaujevega problema na levi strani pa je popolnoma drugačne oblike, [6].

Izrek [4]. Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ konveksno območje z gladkim robom in naj bo u_o rešitev enačbe (4) na Ω . Tedaj ima graf Γ funkcije u_o med vsemi ploskvami, ki imajo isti rob kot Γ , najmanjšo površino.

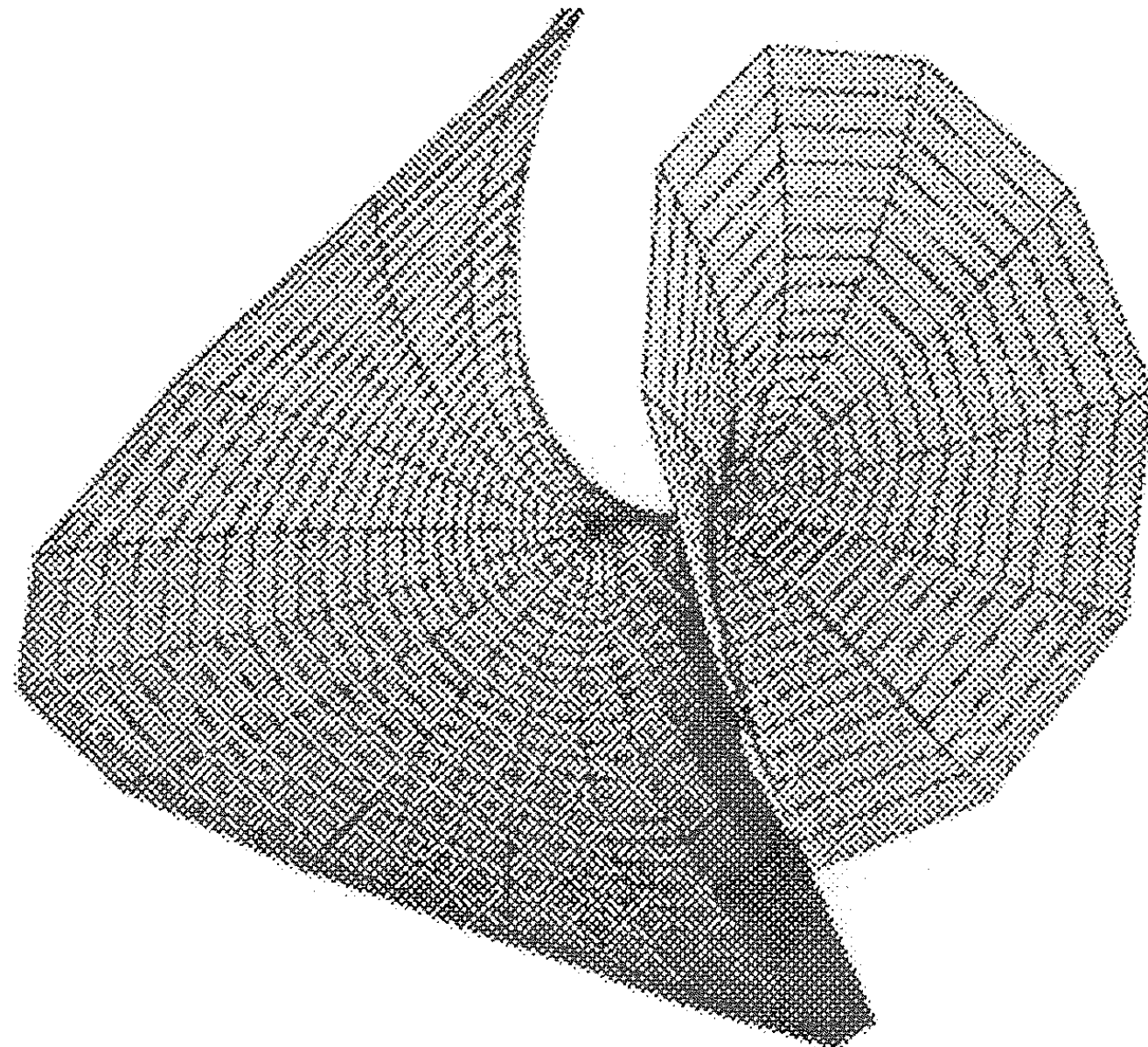
Opomba. Za konveksna območja z gladkim robom v $\mathbb{R}^2$ rešitev enačbe (4) za gladke robne pogoje vedno obstaja, [4]. Izkaže pa se tudi, [6], da so edine rešitve parcialne diferencialne enačbe (4) na vsem $\mathbb{R}^2$ le afine funkcije, katerih grafi so ravnine.

Slika 5. Enneperjeva minimalna ploskev.

Parametrizirana je takole:

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re}(w - w^3/3), \\y &= \operatorname{Re}(i(w + w^3/3)), \\z &= \operatorname{Re}(w^2), \quad (w \in \mathbb{C}), \quad [4].\end{aligned}$$

To je minimalna ploskev (v vsaki svoji točki ima povprečno ukrivljenost enako 0), vendar za svoj rob (ogrodje, na katerega je napeta) ni ploskev z najmanjšo površino.



Skica dokaza. Naj bo

$$\mathbf{Q}(x, y, z) = \left(-\frac{u_{ox}}{\sqrt{1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2}}, -\frac{u_{oy}}{\sqrt{1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + u_{ox}^2 + u_{oy}^2}} \right)$$

vektorsko polje na $\Omega \times \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\|\mathbf{Q}\| = 1 \quad \text{in} \quad \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0$$

povsod na $\Omega \times \mathbb{R}$. Druga enakost sledi iz dejstva, da funkcija u_o reši parcialno diferencialno enačbo (4) in da je tretja komponenta vektorskega polja $\mathbf{Q}$ neodvisna od spremenljivke z .

Na tem koraku bomo privzeli naslednje intuitivno očitno dejstvo: Ker je Ω konveksno območje, ploskev Σ_o z robom $\partial\Gamma$ in najmanjšo površino leži v $\Omega \times \mathbb{R}$.

Ker imata Γ in Σ_o isti rob in ker je divergenca vektorskega polja $\mathbf{Q}$ povsod enaka 0, po Gaussovem izreku velja enakost ploskovnih integralov

$$\int_{\Gamma} \mathbf{Q} d\mathbf{P} = \int_{\Sigma_o} \mathbf{Q} d\mathbf{P}$$

(vektorsko polje $\mathbf{Q}$ je definirano povsod na Σ_o , saj je $\Sigma_o \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$!). Ploskvi smo pred tem seveda orientirali, in sicer tako, da (normirana) normala $\mathbf{n}_{\Gamma}$ ($= \mathbf{Q}$) na Γ kaže navzgor, medtem ko je orientacija ploskve Σ_o določena tako, da se orientacija njenega roba $\partial\Sigma_o = \partial\Gamma$ ujema z orientacijo roba grafa Γ . Tedaj je levi integral

$$\int_{\Gamma} \mathbf{Q} d\mathbf{P} = \int_{\Gamma} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} dP = \int_{\Gamma} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} dP = \operatorname{Površina}(\Gamma).$$

Za desni integral po Σ_o pa velja

$$\int_{\Sigma_o} \mathbf{Q} d\mathbf{P} = \int_{\Sigma_o} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma_o} dP \leq \operatorname{Površina}(\Sigma_o).$$

Dolžina vektorskega polja $\mathbf{Q}$ je namreč 1 povsod na $\Omega \times \mathbb{R}$ in zato je skalarni produkt tega vektorskega polja s poljubnim enotskim vektorskim poljem (v tem primeru z normirano normalo $\mathbf{n}_{\Sigma_o}$ na Σ_o) manjši ali enak 1. Tako smo dobili

$$\operatorname{Površina}(\Gamma) \leq \operatorname{Površina}(\Sigma_o).$$

Ker pa ima Σ_o najmanjšo možno površino, mora veljati enačaja. ■

Kdor ima možnost uporabe programa MATHEMATICA, lahko s pomočjo knjige [2] nariše še kakšno drugo zanimivo minimalno ploskev (v knjigi [2] lahko pravzaprav najdete bistveno več kot le razdelek o minimalnih ploskvah). Kdor pa ima več veselja s pravimi poskusi (in ne le z računalniškimi simulacijami), lahko ustvarja minimalne ploskve v svoji kadi. V ta namen potrebujete „kvalitetnejšo“ milnico, kot je tista, ki jo ustvarjajo navadna domača mila. Recept, ki nam ga je posredovala gospa Nada Razpet, je naslednji: v razmerju 1 : 1 : 1 je potrebno zmešati vodo, glicerin in kakšen tekoči detergent za pomivanje posode (čarli, likvi,...).

LITERATURA

- [1] A. T. Fomenko, *The Plateau problem*, Vol 1, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1990.
- [2] A. Gray, *Modern geometry of curves and surfaces*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [3] F. Morgan, *What is a surface?*, Amer. Math. Month. **103** (1996), 369-376.
- [4] F. Morgan, *Geometric measure theory: a beginner's guide*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [5] D. Repovš, *XXII. mednarodni kongres matematikov*, Obzornik mat. fiz. **41** (1994), 129–140.
- [6] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol 4, Publish or Perish, Boston, 1975.
- [7] I. Vidav, *Višja matematika 2*, DZS, Ljubljana, 1979.

VESTI

Novi člani društva v letu 1996

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 21 novih članov, društvo je zapustilo 50 članov. Novi člani društva so:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1775. ČERČEK Milan | 1786. ONDRAČKA Maja |
| 1776. DUŽIČ Renata | 1787. PETEK Lucija |
| 1777. GABRIJEL Nevenka | 1788. SENEGAČNIK Adela |
| 1778. HORVAT Martin | 1789. SEVER Marta |
| 1779. JELENKO Štefan | 1790. ŠARLAH Andreja |
| 1780. KAVKLER Alenka | 1791. ŠEGA Gregor |
| 1781. KLEP Igor | 1792. ŠTRUKELJ Mitja |
| 1782. KOMAR Mojca | 1793. VELUŠČEK Dejan |
| 1783. LESAR Marko | 1794. ZUPAN Jure |
| 1784. MAZEJ Uroš | 1795. ŽAGAR Ksenija |
| 1785. MORAVEC Primož | |

Andreja Šafarič

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI: POSKUSI Z GRUČAMI ATOMOV

JANEZ STRNAD

PACS 03.75.Dg, 36.40.+d

Pri interferenčnih poskusih z atomskim curkom je mogoče raziskovati gruče, v katere van der Waalsova sila poveže atome.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS: EXPERIMENTS WITH ATOMIC CLUSTERS

In diffraction experiments with an atomic beam clusters of atoms, bound by the van der Waals force, can be studied.

Pri interferenčnih poskusih s curkom atomov dobijo curek atomov tako, da žlahtni plin s tlakom potiskajo skozi razširjajočo se šobo v vakuum. Atomi, s katerimi bi radi naredili poskus in ki jih uvedejo v curek, imajo enako hitrost kot atomi žlahtnega plina [1]. V izoblikovanem curku te vrste je povprečna hitrost določena kot $\langle v \rangle = (5kT/m_1)^{1/2}$, če je m_1 masa atoma žlahtnega plina. To je več kot povprečna hitrost molekul v posodi, ko je treba namesto 5 upoštevati $8/\pi = 2,55$, in več od hitrosti zvoka, ko je treba upoštevati razmerje specifičnih toplot $\frac{5}{3} = 1,67$. Relativna razpolovna hitrost v curku $v_{1/2}/\langle v \rangle$ meri okoli 0,05. Razpolovno hitrost smo vpeljali tako, da ima polovica molekul v curku hitrost na pasu med $\langle v \rangle - v_{1/2}$ in $\langle v \rangle + v_{1/2}$.

De Broglieva dolžina atomov z maso m_1 meri v tem primeru

$$\lambda_B = \frac{h}{m_1 \langle v \rangle} = \frac{h}{(5m_1 kT)^{1/2}}.$$

Pri temperaturi 300 K je to za atom z maso 1 atomske enote mase 0,113 nm in za helijev atom polovico tega, to je 0,056 nm.

Pripravna mrežica iz silicijevega nitrída ima več deset rež s širino $b = 100$ nm v razmiku $a = 200$ nm. Znana enačba za interferenčno sliko pri svetlobi $j \propto [\sin(\mathcal{N}\pi a \sin \beta/\lambda)/\sin(\pi a \sin \beta/\lambda)]^2 [\sin(\pi b \sin \beta/\lambda)/(\pi a \sin \beta/\lambda)]^2$ pokaže, da za $a = 2b$ ni sodih interferenčnih vrhov. S krajšanjem drugega in tretjega faktorja nastane namreč v imenovalcu izraz $2 \cos(\frac{1}{2}\pi a \sin \beta/\lambda)$, ki ima ničle samo tedaj, ko velja enačba $a \sin \beta = (2n + 1)\lambda$, $n = 0, 1, \dots$

V zadnjem času je močno naraslo zanimanje za gruče atomov. S temi tvorbami se nadejajo zasledovati, kako lastnosti atomov preidejo v lastnosti snovi. Za kemijsko fiziko je tudi zanimivo vprašanje, ali je mogoče molekulo z več atomi opisati samo z dvodelčnimi silami ali je treba vključiti tudi večdelčne sile. Van der Waalsova ali molekulska sila, ki veže atome v gruče, je zelo šibka. Vezavna energija doseže v skrajnem primeru milijonino elektronvolta ali še manj. Zelo zanimiva je gruča dveh helijevih atomov

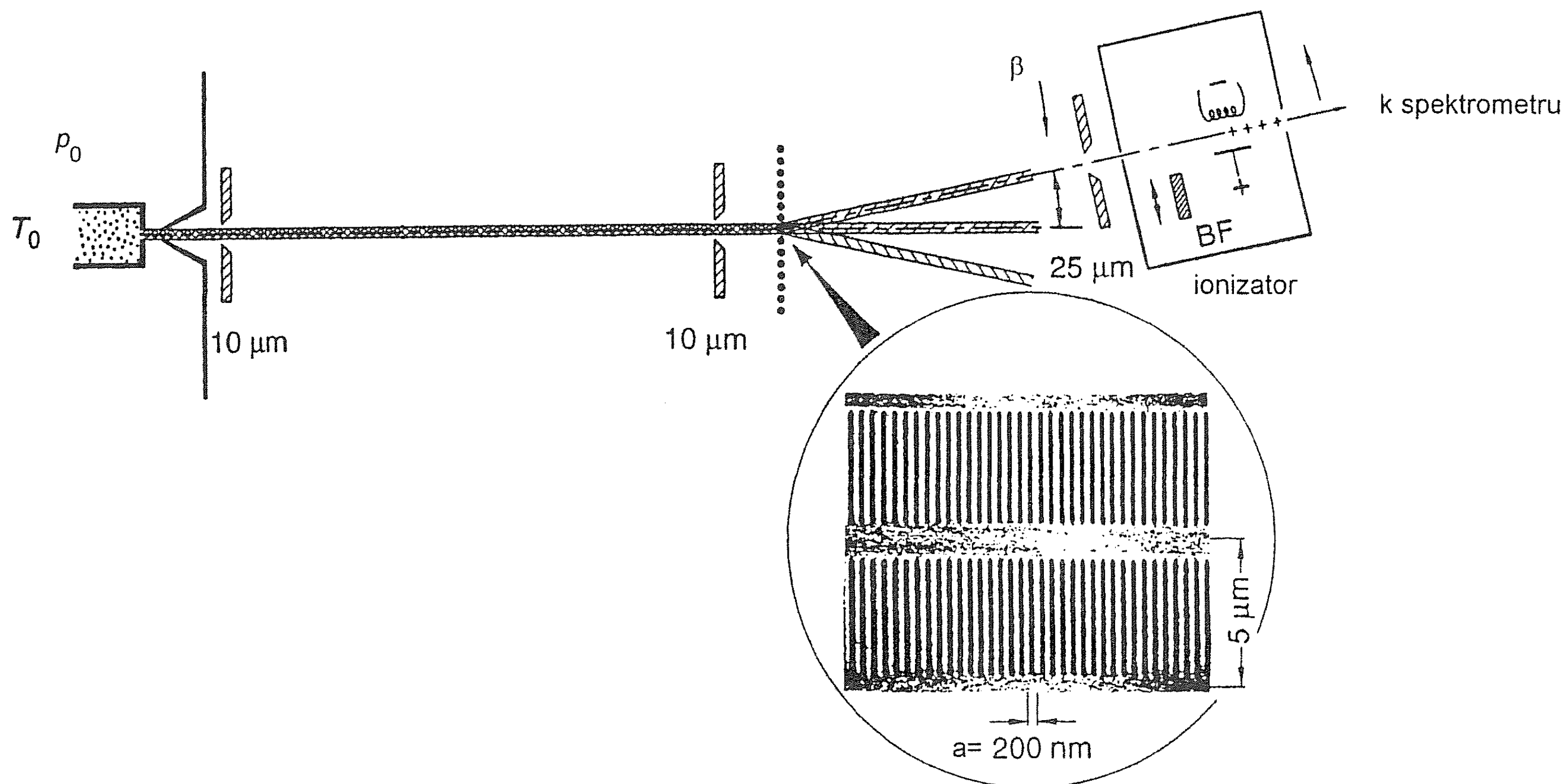
He₂ z vezavno energijo $1,1 \cdot 10^{-7}$ eV, ki ji ustreza temperatura 0,0013 K. V njej sta jedri razmaknjeni 5 nm, tako da sodi med največje dvoatomne "molekule". Zadrega v poimenovanju pokaže, da je mogoče gruče imeti za molekule, v katere veže gradnike van der Waalsova sila.

Ta sila je tako šibka, da se gruča ob majhni motnji iz okolice razdeli na manjše gruče ali na gradnike. Zaradi tega je gruče zelo težko zaznavati. V masnem spektrometru se razdelijo že ob ionizaciji. Nekaj več uspeha so imeli pri drugačnem zaznavanju velikih gruč s sto do nekaj tisoč atomi ali zelo majhnih razmeroma trdno vezanih gruč. Opazovali so na primer, kako se spreminja porazdelitev atomov argona v curku po velikosti hitrosti ali po kotu ob sipanju na plinskem argonu. Gruče v curku ogljikovega dioksida, vodne pare in didušikovega oksida so raziskovali s kemiluminiscenčno reakcijo z barijem. Poleg tega so si pomagali z interferenčnimi poskusi z zelo hitrimi elektroni na atomskem curku. Vendar v tem primeru iz interferenčne slike ni bilo preprosto izluščiti podatkov o gručah.

Interferenčni poskusi z atomskimi curki so prišli kot naročeni za raziskovanje gruč. Atomi v plinskem curku, ki ga s tlakom stiskajo skozi razširjajočo se šobo v vakuum, imajo vsi domala enako hitrost. Več atomov, ki letijo vstric, se poveže v gručo. Po prehodu skozi uklonsko mrežico prispeva gruča z N atomi k interferenčnemu vrhu, ki ustreza de Broglievi dolžini $h/Nm_1\langle v \rangle = \lambda_B/N$. Tako je mogoče po interferenčnih vrhovih jasno razločiti gruče z različnim številom atomov med seboj.

Način merjenja so razvili na Inštitutu Maxa Plancka za raziskovanje tokov v Göttingenu [2]. Plin v posodici je imel temperaturo T_0 , ki so jo lahko znižali do 5 K. Na to, kolikšen delež atomov se je povezal v gruče in kako so bile zastopane gruče z različnim številom atomov, so vplivali s tlakom p_0 v posodici s plinom. Curek atomov helija, ki je izhajal iz šobe v posodici, sta določili reži s širino po 10 μm v razmiku 47 cm (sl. 1). Nato je curek šel skozi opisano uklonsko mrežico iz silicijevega nitrída, ki jo je göttingenskemu inštitutu posodila skupina z MIT iz ameriškega Cambridgea. Pod majhnim kotom β proti smeri vpadnega curka so s 25 μm široko režo v razdalji 57 cm od mrežice izločili curek, ki so ga mislili raziskati. Gruče so zaznavali z doma izdelanim masnim spektrometrom v posebnem delu vakuumske posode, v katerem so vzdrževali tlak $7 \cdot 10^{-11}$ mbara. Preden so atomi in gruče vstopili v masni spektrometer, so šli skozi ionizator, v katerem so jih posipali z elektroni s kinetično energijo 60 eV.

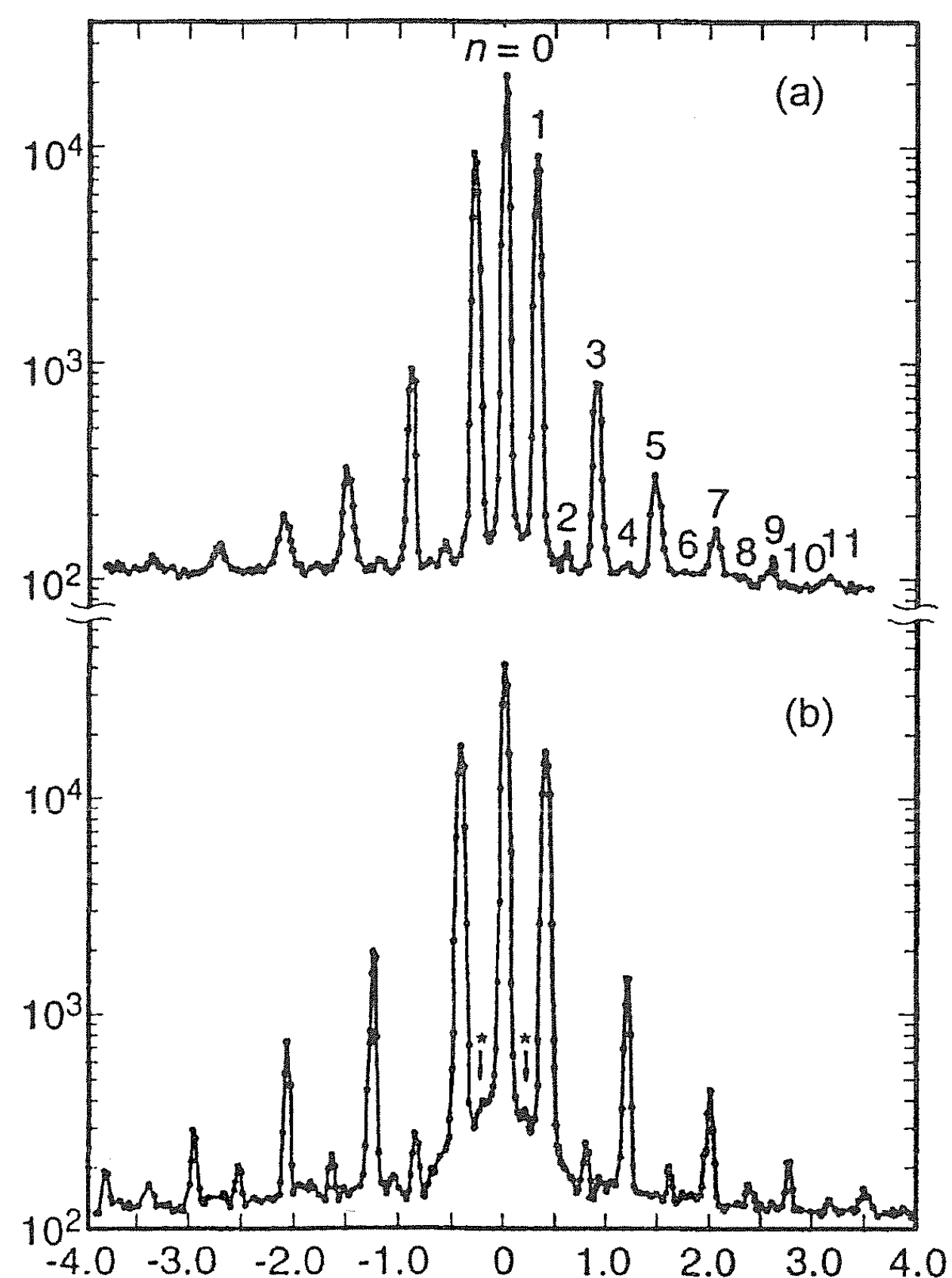
Masni spektrometer so naravnali tako, da je zaznaval ione z določeno maso. Spektrometer je v tem primeru deloval le kot merilnik toka delcev, saj je bila masa delcev določena s kotom β ne glede na to, v kolikšni meri so se gruče ob ionizaciji razdelile. Kot je bil tako majhen, da je veljala zveza $a\beta = n\lambda_B/N$, če sta n red interference in N število atomov v gruči. Masni spektrometer je zaznal vsak milijonti atom. O tem so se lahko prepričali tako, da so na pot curka pred ionizatorjem postavili majhno oviro in z njo razdelili vse gruče v atome, potem pa zmerili povišanje tlaka v posodi spektrometra. Ta način merjenja so pri helijevem curku umerili z napravo, s kakršno sicer iščejo luknje v vakuumskih napravah.



Slika 1. Merilna naprava Schöllkopfa in Toenniesa [2]. Iz posodice s plinom pri temperaturi T_0 in tlaku p_0 izhaja skozi razširjajočo se šobo curek plina, ki ga določata reži s širino po $10\ \mu\text{m}$. Curek plina gre skozi mrežico iz silicijevega nitrida z razmikom med režami $200\ \text{nm}$, ki jo kaže posnetek z elektronskim tipalnim mikroskopom. Nato gre skozi ionizator, naposled zazna interferenčne vrhove masni spektrograf.

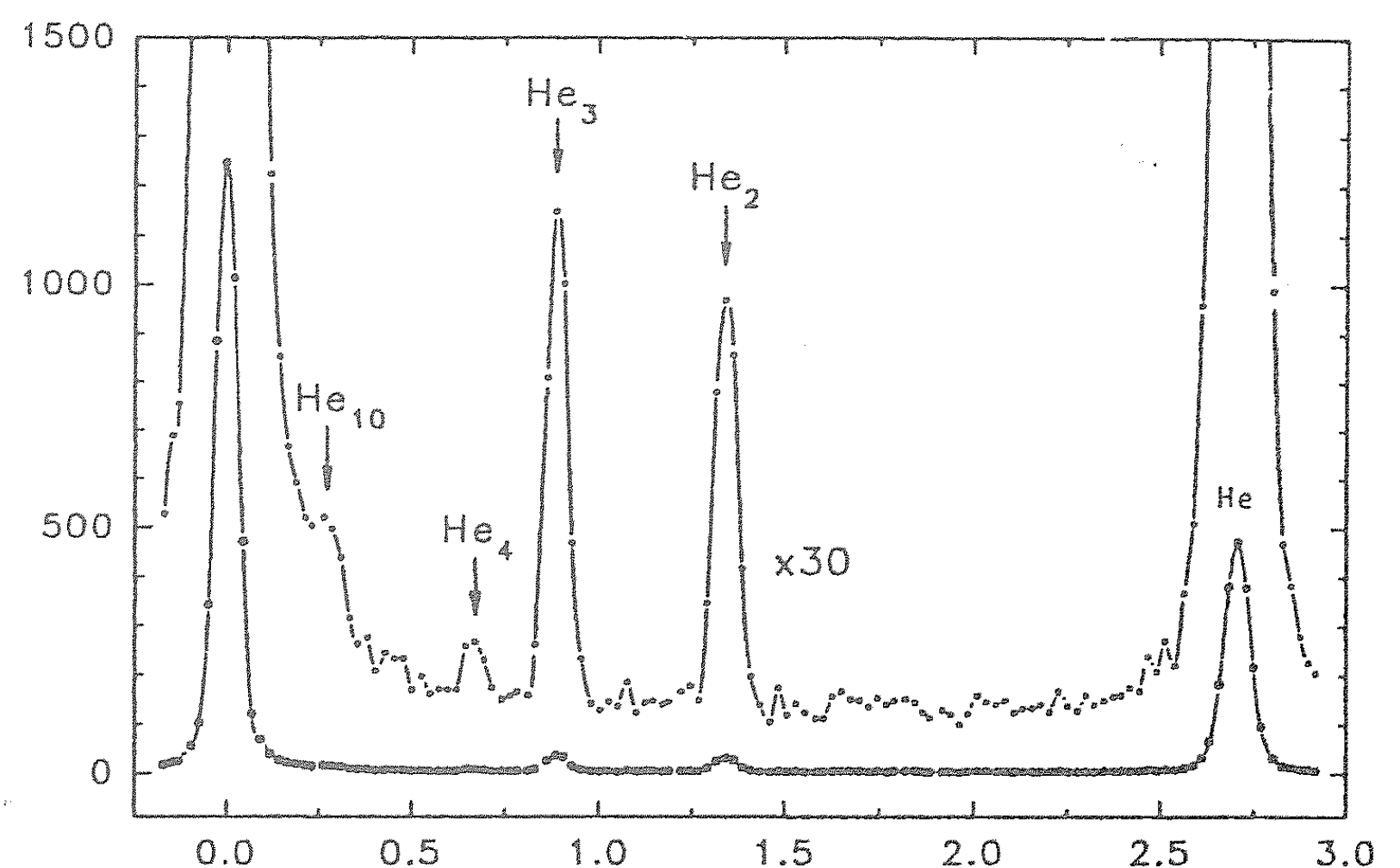
Večino poskusov so naredili s helijem, posebno zaradi velikega zanimanja za gručo iz dveh atomov He_2 . Interferenčna slika za helijev curek pri temperaturi $330\ \text{K}$ in tlaku $150\ \text{barov}$ je pokazala lihe interferenčne vrhove do reda 11 (sl. 2a). Pri temperaturi $150\ \text{K}$ in tlaku $170\ \text{barov}$ so se vrhovi razmaknili, ker se je de Broglieva dolžina povečala na $0,078\ \text{nm}$. Med vrhovi so se pokazali nekateri zelo šibki, zanje je bilo mogoče sklepati, da ustrezajo He_2 (sl. 2b).

Slika 2. Interferenčna slika s helijevim curkom pri tlaku $p_0 = 150\ \text{barov}$ in temperaturi $T_0 = 300\ \text{K}$. Na ordinatno os je nanesen tok ionov, kot ga je dal merilnik v masnem spektrometru, v sunkih na sekundo, na abscisno os pa odklon β v miliradianih, to je v $0,180/\pi^\circ = 0,057^\circ$. Masni spektrometer je bil naravnan na ione He^+ z maso $4\ \text{u}$. Zaradi značilnosti mrežice ($a = 2b$) je mogoče opaziti samo lihe interferenčne vrhove, in to do reda 11 (a). V interferenčni sliki pri nekoliko višjem tlaku $p_0 = 170\ \text{barov}$ in nižji temperaturi $T_0 = 150\ \text{K}$, ko je de Broglieva dolžina nekaj večja, so interferenčni vrhovi nekoliko bolj razmaknjeni in je mogoče med vrhovoma 0 in 1 opaziti neizrazit vrh, ki ga gre pripisati gručam He_2 (b).

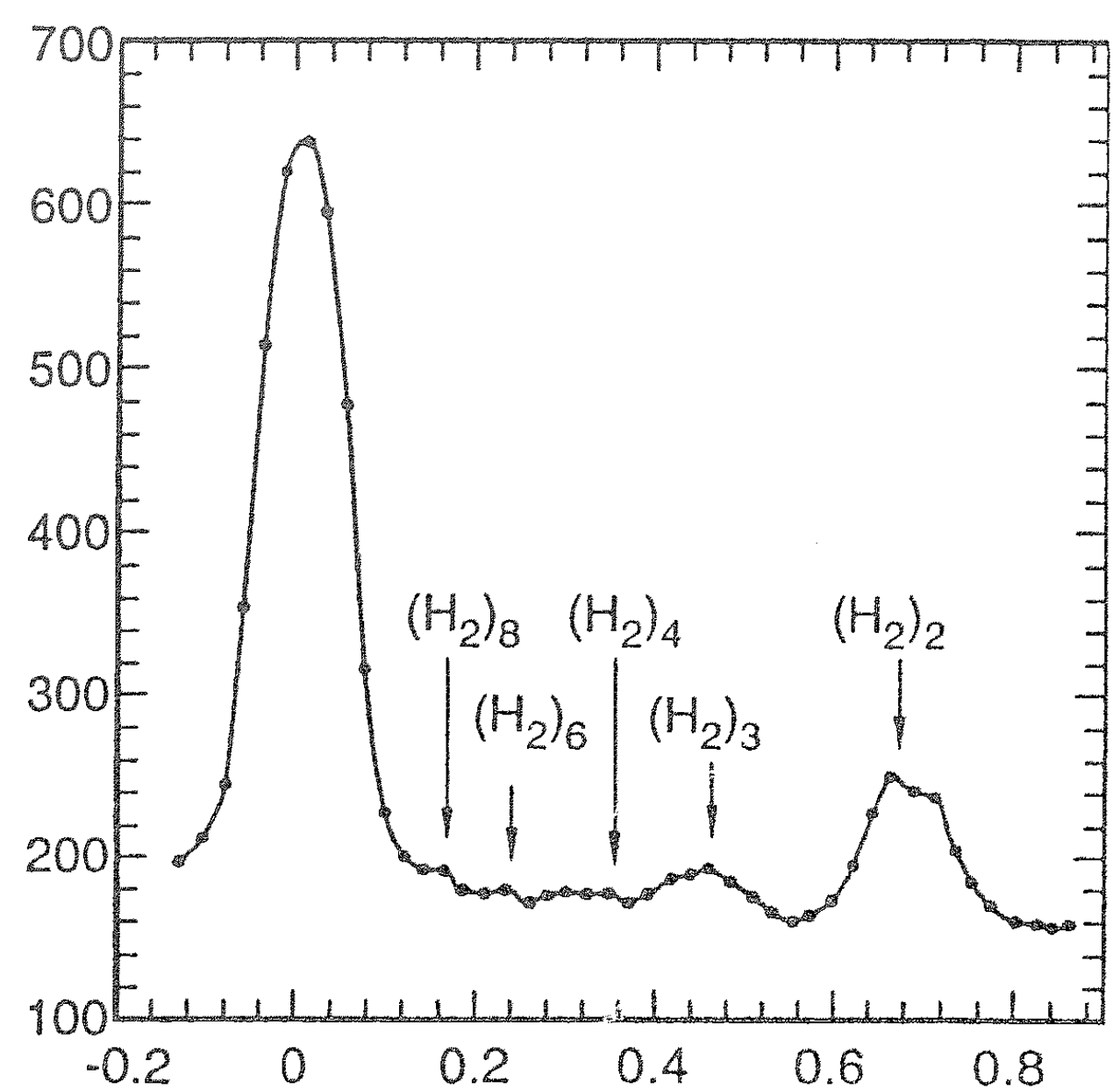


Nato so znižali temperaturo na 30 K, pri kateri je de Broglieva dolžina dosegla 0,181 nm, in tlak na 15 barov. Podrobno so raziskali le območje med neodklonjenim curkom in prvim interferenčnim vrhom. Pri tem so opazili vrhova, ki ustrezata gručama He_2 in He_3 . Pri temperaturi 6 K in tlaku 1 bar so poleg teh gruč zasledili še gruči He_4 in He_{10} (sl. 3). Že prej so raziskali tudi curek molekul težkega vodika D_2 s slabšo ločljivostjo, ker so tedaj uporabljali nekoliko širše reže (sl. 4).

Slika 3. Podrobna interferenčna slika s helijevim curkom med interferenčnima vrhovoma 0 in 1 pri tlaku $p_0 = 1$ bar in temperaturi $T_0 = 6$ K. Diagram je narisana podobno kot na sl.2. Pri tridesetkrat boljši ločljivosti je mogoče zaslediti še interferenčne vrhove, ki ustrezajo gručam He_2 , He_3 , He_4 in He_{10} . Slika s Schöllkopfovimi in Tonnievimi merjenji je vzeta iz *Europhysics News* 2 (1995) 91.



Slika 4. Podrobna interferenčna slika s curkom vodikovih molekul med interferenčnima vrhovoma 0 in 1 pri tlaku $p_0 = 10$ bar in temperaturi $T_0 = 40$ K. Masni spektrometer je bil naravnana na ione H_3^+ z maso 3 u. Na sliki je mogoče zaslediti šibke vrhove, ki ustrezajo gručam s po dvema, tremi, štirimi, šestimi in osmimi molekulami vodika [5].



Interferenčni poskusi s curki delcev, pri katerih zasledujejo gruče atomov ali molekul, odpirajo zanimiva vprašanja. Kolikšna je največja gruča, ki bi jo bilo mogoče ločiti od sosednjih gruč? Napovedujejo, da bodo pri poskusih s helijem, pri katerem je mogoče doseči $v_{1/2}/\langle v \rangle = 0,033$, ločili še He_{21} od He_{20} . Ali obstajajo gruče z določenim številom atomov ali molekul, ki so precej močnejše vezane kot gruče z atomom ali molekulo več ali manj, torej gruče z magičnim številom gradnikov? Taka bi utegnila biti gruča He_{10} , če upoštevamo, da gruč s šestimi ali osmimi atomi ali z lihim številom helijevih atomov niso zaznali. Ali je sila, ki veže gradnike v gruče, odvisna od spina, ali je pri fermionih drugačna kot pri bozonih?

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Atomski interferometer*, Obzornik. mat. fiz. **38** (1991) 151; *Nenavadni interferenčni poskusi. Korak h Heisenbergovemu mikroskopu*, Obzornik mat. fiz. **43** (1996) 54.
- [2] W. Schöllkopf, J. P. Toennies, *Nondestructive mass selection of small van der Waals clusters*, *Science* **266** (1994) 1345.

O INTEGRALSKI REPREZENTACIJI LOGARITMA

ANTON SUHADOLC

Math. Subj. Class. (1991) 01A45, 01A50

V sestavku je podan elementarni izračun integrala funkcije $1/x$, ki delno temelji na postopku patra Gregoriusa de Saint Vincenta iz leta 1647.

ON INTEGRAL REPRESENTATION OF LOGARITHM

In the article an elementary method is presented for calculating the integral of the function $1/x$, based in part on ideas of pater Gregorius de Saint Vincento from the year 1647.

Nedavno smo praznovali 200-letnico izida Vegovega velikega logaritmovnika *Thesaurusa*. Vega je računanje logaritmov oprl na danes vsakemu, ki se je kdaj vsaj malo ukvarjal z višjo matematiko, znano vrsto

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| < 1, \quad (1)$$

in na vrste, ki jih je izpeljal iz te s spretnimi substitucijami.

Ko je prof. Agata Tiegl pripravljala razstavo ob 200-letnici *Thesaurusa*, je opazila, da je vrsto (1) verjetno prvi našel Nikolaj Mercator. Objavil jo je leta 1668 v delu *Logarithmotechnia*. Izpeljavo moremo na kratko opisati takole: vrsto

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

po členih integriramo v mejah od 0 do x , $|x| < 1$, pa dobimo

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Treba je le še poznati vrednosti integrala na levi strani te enačbe, ki je seveda $\ln(1+x)$. Ta del izpeljave je bil tedaj že poznan. Pater Gregorius de Saint Vincentio je namreč leta 1647 v delu *Opus geometricum quadrature circuli et sectionem conii* izpeljal formulo

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x, \quad x > 0. \quad (2)$$

V tej notici si bomo ogledali pot, po kateri moremo izpeljati to formulo. Začetek je zvest avtorjevi poti, zaključek izpeljave pa uporablja danes običajno definicijo logaritma, ko jo je podal Euler leta 1748, in danes

običajno definicijo Riemannovega integrala. Narišimo enakoosno hiperbolo $y = 1/x$; izberimo pozitivno število $p > 1$ in določimo abscise $x_0 = 1$, $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} > x_k$, tako da bodo imeli vsi pravokotniki na sliki ploščine enake izbranemu številu p . Ta zahteva nam da enačbe

$$p = 1(x_1 - 1) = \frac{1}{x_1}(x_2 - x_1) = \frac{1}{x_2}(x_3 - x_2) = \dots$$

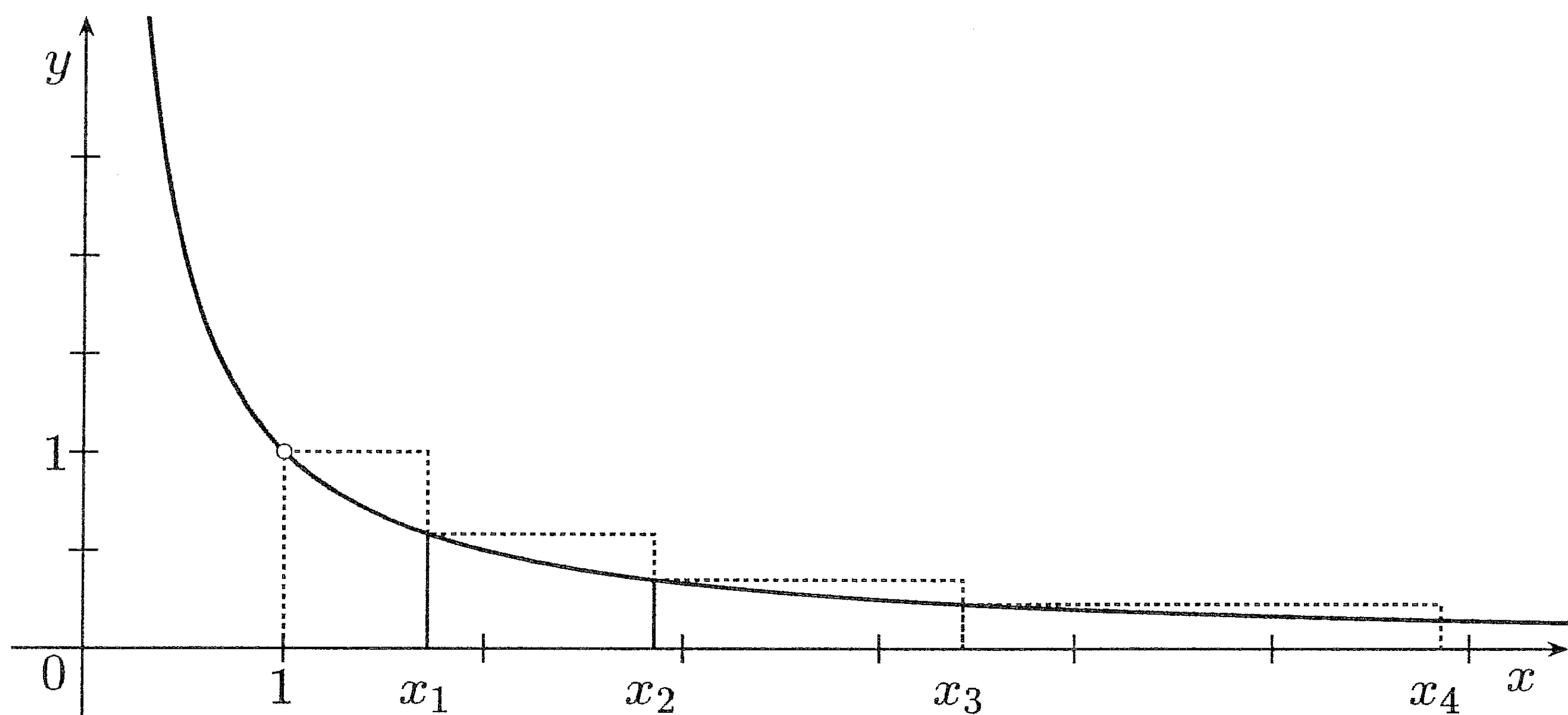
Iz prve izračunamo $x_1 = p + 1$, iz druge $x_2 = x_1(p + 1)$, iz tretje $x_3 = x_2(p + 1)$ itd. Takoj uganemo splošno formulo

$$x_n = x_1^n = (1 + p)^n,$$

ki jo zlahka dokažemo z matematično indukcijo.

Iz definicije abscis x_k sledi: vsota ploščin pravokotnikov od prvega do n -tega je np , zadnja abscisa pa je $x_n = x_1^n$. Ploščine in abscise tvorijo torej aritmetično oz. geometrično zaporedje:

p	$2p$	$3p$	$\dots$	np
x_1	x_1^2	x_1^3	$\dots$	x_1^n



Slika 1.

Zapišimo x_n malo drugače: $x_n = (1 + p)^n = ((1 + p)^{1/p})^{np}$ in vpeljimo označbo $a = (1 + p)^{1/p}$. Tako dobimo zaporedji

$$\begin{array}{cccccc} p & 2p & 3p & \dots & np \\ a^p & a^{2p} & a^{3p} & \dots & a^{np} \end{array}.$$

Iz enačbe $x_n = a^{np}$ sledi

$$np = \log_a x_n. \quad (3)$$

Izberimo si sedaj poljubno število $x > 1$ in ga vzemimo za x_n . Iz formule $x = x_n = (1 + p)^n$ sledi $p = \sqrt[n]{x} - 1$. Če pri fiksnem x večamo n , gre seveda p proti 0. Število $a = (1 + p)^{1/p}$ pa limitira pri $p \rightarrow 0$ k številu e .

Pogled na skico pove, da je vsota np ploščin pravokotnikov prav Riemannova vsota za integral $\int_1^x dt/t$. Prepričati se moramo, da gredo širine podintervalov proti 0, ko gre n čez vsako mejo:

$$x_{k+1} - x_k = (1 + p)^{k+1} - (1 + p)^k = (1 + p)^k p \leq (1 + p)^n p = x_n p = x p.$$

Pri $n \rightarrow \infty$ gre $p \rightarrow 0$, zato gre desna stran v zgornji formuli tudi proti 0. Ker je funkcija $1/t$ na intervalu $(1, x)$ zvezna, integral obstaja in je po definiciji enak limiti Riemannovih vsot, pa tudi limiti zgoraj definirane podzaporedja Riemannovih vsot:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} np, \quad p = \sqrt[n]{x} - 1.$$

Upoštevajmo formulo (3) in dobro znano dejstvo $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, pa dobimo

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln a} = \ln x,$$

saj smo ugotovili, da velja $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + p)^{1/p} = e$. V zgornji enačbi smo še upoštevali, da je $\ln x$ zvezna funkcija za $x > 0$, zato velja seveda $\lim_{a \rightarrow e} \ln a = 1$. Formula (2) je tako dokazana.

VESTI

Ob sedemdesetletnici prof. dr. Milana Muršiča

Skoraj bi se zgodilo, da bi prezrli lep življenjski jubilej našega profesorja in kolega dr. Milana Muršiča, kajti s svojo živahnostjo in dejavnostjo nanj ravno ne opozarja. Čeprav z malo zamude mu iskreno voščimo, da bi ohranil svojo živahnost, predvsem pa mu želimo dobrega zdravja.

Rodil se je 13. septembra 1927 v Ljubljani in Ljubljana je mesto, kjer se je zgodilo skoraj vse, kar je oblikovalo njegovo življejsko pot. Vojna je bila kriva, da je moral šolanje prekiniti, vendar je že spomladi 1946 uspešno končal gimnazijo in se jeseni istega leta vpisal na strojni oddelek tedanje tehniške fakultete univerze v Ljubljani. Ob koncu leta 1952 je diplomiral kot inženir strojništva. S šolskim delom se je srečal že med študijem kot demonstrator za strojne elemente in tehniško risanje, poučevanju pa je ostal zvest vse do danes. Po diplomi je postal redni asistent na fakulteti za strojništvo

in honorarni asistent na fakulteti za elektrotehniko, kjer je ostal do odhoda na Fakulteto za rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo leta 1958. Tu se njegovo pedagoško in strokovno delo usmeri na področje deformabilnih teles, elastomehanike in teorije plošč. Zelo uspešno konča junija 1963 podiplomski študij na Fakulteti za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo z magistrskim delom „Določanje napetosti in deformacij v elastičnih ploščah z uporabo funkcij kompleksne spremenljivke“. Elastičnim problemom v teoriji plošč ostane zvest tudi pri doktorskem delu: „Koncentracije napetosti na robovih lukenj v zmerno debelih elastičnih ploščah“, ki ga sklene z govorom v letu 1965. Konec istega leta je izvoljen za docenta za tehnično mehaniko na odseku za mehaniko matematično-fizikalnega oddelka Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Na odseku za mehaniko je ostal vse do danes. Leta 1971 je bil izvoljen v naziv izrednega profesorja za osnove tehnike (statika, hidromehanika, kinetika in reologija), od 1983 pa je redni profesor na odseku za tehniško mehaniko.

Bogato je njegovo pedagoško delo in študenti dodiplomskih in podiplomskih smeri na FNT in BTF ga poznajo kot dobrega učitelja in avtorja več skript in zbirke treh učbenikov iz mehanike. Manj znano je, da se je vrsto let skupaj s kolegi na odseku za mehaniko zavzemal za postavitev študijske smeri mehanika na ljubljanski univerzi, ki pa žal ni zaživela. Kot diplomant in strokovnjak na področju strojništva se je z vključitvijo na matematično-fizikalni oddelek znašel v vlogi povezovalca med mehaniko v tehniki in v naravoslovju. V svojem znanstvenem in strokovnem delu je znal najti pravo ravnotežje med teoretičnimi prispevki in vsakodnevno praktično uporabo. Skromne materialne možnosti za delo na različnih področjih mehanike v preteklost so bile ovira za mnoge želje in prizadevanja profesorja Muršiča, da bi se mehanika na ljubljanski univerzi bolje razvila in uveljavila.

Bil je predstojnik odseka za mehaniko, direktor Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, član sveta in namestnik predsednika sveta matematika in mehanika v času, ko smo imeli VTOZD-e. Deloval je v mnogih odborih in komisijah na fakulteti in univerzi. Je eden od ustanoviteljev Slovenskega društva za mehaniko, kjer je dolga leta aktivno sodeloval. Več kot petindvajset let je bil tudi sodni izvedenec za strojno in prometno področje pri sodiščih v Sloveniji.

Ko danes iz zrele življenjske razdalje gleda na prehojeno pot, mu ni težko, saj je tlakovana s trdim delom in prizadevanji. Kot vsako življenje, tudi njegovo ni brez pelina, naša sreča pa je; da gredo slabi dogodki in izkušnje hitreje v ozadje pozabe kot pa dobri. Ob življenjskem jubileju mu predvsem želimo čim več lepih trenutkov in da bi še dolgo prijateljeval z nami.

Peter Vencelj

Četrto mednarodno tekmovanje študentov matematike v Plovdivu v Bolgariji

Od 30. julija do 4. avgusta 1997 je bilo v Plovdivu v Bolgariji četrto mednarodno tekmovanje študentov matematike. Slovenijo so zastopali: Jernej Barbič in Dejan Velušček iz drugega letnika, Iztok Kavkler iz tretjega letnika ter Mitja Mastnak iz četrtega letnika. Študentje so dva dni vsak dan po pet ur reševali naslednje naloge (številka v oglatem oklepaju pomeni, koliko točk je prinesla pravilna rešitev posamezne naloge):

1. [10] Naj bo $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje pozitivnih realnih števil, ki konvergira k ničli. Poišči limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} + \varepsilon_n \right).$$

2. [10] Naj konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ali konvergirata naslednji vrsti:

a) $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + \cdots + a_9 + a_{32} + \cdots$

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} +$
 $+ a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + \cdots$

Svoja odgovora utemelji.

3. [15] Naj bosta A in B realni matriki velikosti $n \times n$, za kateri velja $A^2 + B^2 = AB$. Pokaži, da velja naslednji sklep: če je matrika $BA - AB$ obrnljiva, je število n deljivo s 3.

4. [20] Naj bo α realno število, $1 < \alpha < 2$.

- a) Pokaži, da lahko α na en sam način zapišemo kot neskončen produkt

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n_2}\right) \cdots,$$

kjer so n_i naravna števila, za katera velja

$$n_i^2 \leq n_{i+1}.$$

- b) Pokaži, da je število α racionalno natanko tedaj, ko velja: za neko število m in vse $k \geq m$ je

$$n_{k+1} = n_k^2.$$

5. [20] Naj bo n naravno število in

$$R_0^n := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\},$$

$$Z_0^n := \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in R_0^n; y_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Za $0 < p < \infty$ naj bo

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

in $\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$.

a) Naj za $x \in R_0^n$ velja

$$\max_i x_i - \min_i x_i \leq 1.$$

Pokaži, da za vse $p \in [1, \infty]$ in vse $y \in Z_0^n$ velja

$$\|x\|_p \leq \|x + y\|_p.$$

b) Pokaži, da za vsak $p \in (0, 1)$ obstaja takšno število n , tak $x \in R_0^n$ in tak $y \in Z_0^n$, da je

$$\max_i x_i - \min_i x_i \leq 1 \quad \text{in} \quad \|x\|_p > \|x + y\|_p.$$

6. [??] Naj bo $\mathcal{F}$ taka družina končnih podmnožic naravnih števil $\mathbb{N}$, da za poljubni množici $A, B \in \mathcal{F}$ velja $A \cap B = \emptyset$.

a) Ali lahko izberemo tako končno podmnožico $Y \subset \mathbb{N}$, da bo za poljubni množici $A, B \in \mathcal{F}$ veljalo $A \cap B \cap Y = \emptyset$?

b) Ali velja točka a) pod pogojem, da imajo vse množice iz družine $\mathcal{F}$ enako število elementov?

7. [10] Naj bo $f \in C^3(\mathbb{R})$ nenegativna funkcija, za katero velja

$$f(0) = f'(0) = 0 < f''(0).$$

Za $x \neq 0$ naj bo $g(x) = \left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} \right)'$ in $g(0) = 0$. Pokaži, da je funkcija g omejena v neki okolici ničle. Ali to velja tudi, če je funkcija f le dvakrat zvezno odvedljiva?

8. [15] Naj bo M obrnljiva matrika velikosti $(2n) \times (2n)$, zapisana v bločni obliki (glede na neko bazo prostora) kot

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da velja $\det M \cdot \det H = \det A$.

9. [15] Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(\log n)}{n^{\alpha}}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 0$.
10. [15] Naj bo $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linearni funkcional na prostoru realnih matrik velikosti $n \times n$.
- Pokaži, da obstaja natanko določena matrika C , za katero je $f(A) = \operatorname{tr}(AC)$ za vse matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pri tem tr označuje sled matrike.
 - Naj za poljubni matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ velja še $f(AB) = f(BA)$. Pokaži, da obstaja tako realno število $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $f(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$ za vse $A \in M_n(\mathbb{R})$.
11. [20] Naj bo X poljubna množica, $f : X \rightarrow X$ pa bijektivna preslikava. Pokaži, da obstajata preslikavi $g_1, g_2 : X \rightarrow X$, za kateri velja $f = g_1 \circ g_2$ in $g_1 \circ g_1 = \operatorname{id} = g_2 \circ g_2$. Pri tem id pomeni identično preslikavo $X \rightarrow X$.
12. [25] Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pravimo, da f *seka abscisno os* v točki x , če je $f(x) = 0$, v vsaki okolici točke x pa obstajata točki y in z z lastnostjo $f(y) < 0$ in $f(z) > 0$.
- Poišči primer, ko funkcija f neskončnokrat seka abscisno os.
 - Ali lahko funkcija f seka abscisno os več kot števno mnogokrat?

Naloge, ki so jih študentje reševali prvi dan, so se izkazale za bistveno težje kot naloge, ki so jih reševali drugi dan. Sistem nagrajevanja je podoben sistemu, ki velja na srednješolskih matematičnih olimpiadah. Med našimi študenti se je najbolje odrezal Iztok Kavkler, ki je bil v skupni razvrstitvi peti in je tako dobil prvo nagrado. Tudi drugi trije so se odrezali dobro. Mitja Mastnak je dobil drugo nagrado, Jernej Barbič tretjo nagrado, Dejan Velušček pa je dobil pohvalo.

Tudi letos je bila konkurenca huda, saj so se tekmovanja udeležili študentje iz mnogih uglednih evropskih univerz. Da bi popestrili tekmovanje, ga bodo organizatorji (sofijska univerza in University College of London) preselili v eno od črnomoških mest v Bolgariji ali pa v London.

Marjan Jerman

OBVESTILO

Slike z 49. občnega zbora, ki je bil v Podčetrtku od 10. do 11. oktobra letos, si lahko ogledate na naslovu <http://www.dmfa.si/49obc-z/slike.htm>.

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1996*

Pedagoška fakulteta — Maribor

2. stopnja

Matematika — fizika

- | | |
|---------------------|---|
| 46. Aškerc Saša | Ploščina |
| 47. Kamplet Marica | Hiperkompleksna števila |
| 48. Korošec Boris | Spinska stekla |
| 49. Kotnik Marija | Psevdometrike projektivne ravnine |
| 50. Lipušček Vlasta | Šibko nelinearni in šibko disperzivni valovi |
| 51. Mencinger Matej | Konstrukcija Mycielskega |
| 52. Metličar Alenka | Maksimalni pretoki in prirejanja |
| 53. Pogelšek Katja | Volterrove integralske enačbe |
| 54. Pulko Lidiya | BIB-načrti |
| 55. Smej Gabrijela | Enostavne grupe |
| 56. Smolar Katja | Selbergov dokaz izreka o porazdelitvi praštevil |
| 57. Tancer Edita | Tlakovanje ravnine |
| 58. Turičnik Igor | Fraktali |
| 59. Turnšek Lea | Osnove teorije mere |
| 60. Vaupot Branka | Fourierjeve vrste |
| 61. Zadravec Sonja | Primeri parcialnih diferencialnih enačb |

Kemija — matematika

- | | |
|-----------------|--|
| 1. Žigert Petra | Generiranje azopoliheksov in molekulske kode |
|-----------------|--|

Biologija — matematika

- | | |
|---------------------|------------|
| 1. Pečovnik Andreja | Stožernice |
|---------------------|------------|

Matematika — proizvodno tehnična vzgoja

- | | |
|-------------------|--|
| 1. Ješovnik Mojca | Številski sistemi z iracionalno osnovo |
|-------------------|--|

3. stopnja

Matematika — področje izobraževanja

- | | |
|--------------------|---|
| 2. Kosi-Ulbi Irena | Uvodna poglavja teorije nekomutativnih kolobarjev |
| 3. Lipovec Alenka | Hedetniemijeva domneva |

Pedagoška fakulteta — Ljubljana

2. stopnja

Matematika — fizika

- | | |
|-----------------------|---|
| 59. Skukan Nevenka | Konveksne množice |
| 60. Schlegel Erik | Uvod v topološko teorijo grafov |
| 61. Klepej Helena | Pellova enačba |
| 62. Bogataj Martina | Funkcija z omejeno totalno variacijo |
| 63. Petek Lucija | Stieltjesov integral |
| 64. Prijatelj Damjana | Strategija učencev pri računanju z ulomki |
| 65. Strašek Rok | Problem momentov |
| 66. Jereb Mojca | Razvoj infinitezimalnega računa |
| 67. Pantar Anica | Začetki geometrije na Kitajskem |

* Seznam diplomantov iz leta 1995 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **43** (1996) 4. Nekatere zaporedne številke diplomantov se ne ujemajo s prejšnjimi številkami.

- | | |
|---------------------|---|
| 68. Suban Mojca | Eliptična geometrija |
| 69. Pintar Melita | Geometrija v Egiptu in Mezopotamiji |
| 70. Jakob Mateja | Analiza napak pri uporabljanju žepnega računalnika v Srednjih tehniških šolah |
| 71. Smolej Tihana | Infinitezimalni račun v 17. stoletju |
| 72. Jan Dragica | Leonhard Euler in variacijski račun |
| 73. Anžlovar Andrej | Usmerjenost spiralnih galaksij v prostoru |

Matematika — tehnika

- | | |
|-----------------------|---|
| 6. Ambrožič Helena | Novi pristop pri pouku o motorjih v osnovni šoli |
| 7. Legan Mojca | Inverzijska preslikava |
| 8. Flajs Dag | Predstavitev strojnih elementov z osnovami robotike |
| 9. Vrtačnik Maja | Cantorjeva teorija neskončnih množic |
| 10. Drgajner Jadranka | Dvojno število in njegova uporaba |
| 11. Kukovičič Andreja | Logika v osnovnošolskem programu matematike |
| 12. Šmuc Vida | Uporaba teorije grafov v arhitekturi |
| 13. Grilj Vilma | Evklid |
| 14. Kovačič Mihaela | Pitagora |

Fizika — tehnika

- | | |
|----------------------|--|
| 9. Krmelj Irena | Pouk energije v osnovni šoli |
| 10. Hajdinjak Ludvik | Računalniško krmiljeni modeli obdelovalnih strojev |

Fizika — kemija

- | | |
|----------------------|---|
| 10. Aleksič Jordan | Razvoj naprav za merjenje časa in njihova natančnost |
| 11. Trdan Mojca | Pojem eksperimenta pri razvijanju kemijskih pojmov |
| 12. Tkavc Marjan | Zamisel in priprava srednje poklicno-tehniškega izobraževanja programa za smer kontrolor tehniških pregledov motornih vozil |
| 13. Mrzlikar Mihaela | Termodinamika gradiv |

Fakulteta za matematiko in fiziko

1. stopnja

Matematika — uporabna smer

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 283. Ditrich Tamara | 288. Muravec Marko |
| 284. Flek Janez | 289. Tomažin Aleš |
| 285. Kocjan Branko | 290. Vodovnik Smiljan |
| 286. Seljak Rudolf | 291. Zavodnik Sonja |
| 287. Mugerli Nadja | 292. Gajšek Jernej |

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

- | | |
|--------------------------|--|
| 488. Novak-Lavriša Tjaša | Izometrije hiperboličnega prostora |
| 489. Erker Niko | Globalne analitične funkcije |
| 490. Škarabot Martin | Krožnice |
| 491. Komar Mojca | Frizne grupe in frizni vzorci |
| 492. Kramar Andreja | Izometrije hiperbolične ravnine |
| 493. Jeraj Slavka | Osnovna teorija Liejevih algeber |
| 494. Kalan Dragica | Tretji Hilbertov problem |
| 495. Česnik Tanja | Metoda najmanjših kvadratov z omejitvami |
| 496. Simonič Tatjana | Krivulje s konstantno širino |
| 497. Mohorčič Gregor | Abelov izrek |
| 498. Ivančič Sonja | Ravninske krivulje |

Matematika — uporabna smer

497. Dobrovoljc Andreja Nenegativne matrike
498. Gartner Darja Okvirna drevesa
499. Miklavič Štefko Grothendieck-ova neenakost za bilinearne forme na C^* -algebrah
500. Ban Vladimir Posplošeni obrati
501. Črnjarič Nelida Diskretno stohastično dinamično programiranje
502. Košmrlj Matej Uporaba modulov VBX in paketa Borland Visual Solutions Pack v programskem okolju Delphi
503. Dolžan David Primitivna upodobitev grupe enot kolobarja v simetrično grupo neenot
504. Gartner Katja Polnormalni operatorji
505. Vošner Kristina Metoda zveznega nadaljevanja
506. Taškov Marija Prostor zlepkov v dveh dimenzijah
507. Kramar Marjeta Metode Lomonosova pri iskanju invariantnih podprostorov
508. Krsnik Jurij Tcl/Tk jezik za pripravo uporabniških vmesnikov
509. Demšar Urška Širjenje prometnega hrupa v okolici ceste
510. Fijavž Gašper Izrek štirih barv
511. Zelenc Mitja Analiza temperaturnih in napetostnih stanj v komutatorju pri procesni fazi staranja
512. Dobravec Tomaž Analiza in izračun vrednosti funkcije
$$f_{\mu}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{z}{t}} t^{\mu-1} dt$$

513. Žepič Mateja Matrike največjih skupnih mer
514. Zornada Leo Delphi in podatkovne baze
515. Kavkler Alenka Odvajanja, centralizatorji in sorodne preslikave
516. Kurent Katarina Konvolucijski operatorji na prostoru periodičnih funkcij
517. Vrhovnik Mateja Reševanje sistemov polinomskih enačb z metodo zveznega nadaljevanja
518. Špolad Marko Permanente
519. Soklič Metka Inverzno-nenegativne matrike

Matematika — teoretična smer

47. Lorger Blaž Konstrukcija orientabilnih sklenjenih 3-mnogoterosti

Matematika — smer računalništvo z matematiko

2. Resnik Boštjan Čas v formalnem jeziku Lotos
3. Novoselec Peter Avtorski sistem Tool Book

Fizika — pedagoška smer

138. Kožuh Vasja Animirane skice pri pouku fizike

Fizika — tehnična smer

648. Mali Gregor Raziskava vgradnje kovinskih ionov v nekatere aluminofosfate z jedrsko magnetno resonanco
649. Rogelj Igor Merjenje debeline oljnega filma med kovinskima površinama
653. Štrancar Janez Študij transporta spinsko označenih lipofilnih molekul skozi biološke membrane z metodo elektronske paramagnetne resonance
654. Rovan Aljoša Regulator pretoka
655. Skačej Gregor Ureditev tekočega kristala v tanki plasti: molekularne slike
656. Pehani Peter Potek klasičnih izoterm v bližini kritične točke

657. Rola Beno	Določanje povprečne poti fotonov γ v vzorcih z merjenjem spektra
658. Slak Gorazd	Temperaturno stabilizirana mikrosonda z AFM
659. Spindler Lea	Sipanje svetlobe na nematičnih kapljicah vgrajenih v polimer
660. Kočevar Klemen	Vpliv holesterola na strukturo modelne membrane
661. Oblak Andraž	Karakterizacija liposomov holesterol – natrijev holesterol sulfat
662. Robba Severin	Obdelava meritev in-situ z metodo Monte Carlo
663. Japelj Marjan	Kondenzacija ditranola v ditranol rjavo
664. Tadel Matevž	Vezana stanja dveh težkih mezonov v nerelativističnem kvarkovem modelu
665. Lesar Marko	Temperaturna odvisnost frekvence jedrske kvadrupolne resonance ^{35}Cl v NOCl
666. Stres Špela	Študij primernosti polprevodniških detektorjev za rentgen-sko slikanje
667. Drinovec Luka	Diodno črpanje Nd:YAG laserja
668. Pestotnik Rok	Večanodna fotopomnoževalka kot krajevno občutljiv detektor Čerenkovih fotonov
669. Studen Mojca	Napovedovanje strukture proteinov z modelom spinskih stekel
670. Veberič Darko	Tirni magnetizem v modelu močno koreliranih elektronov
671. Jazbinšek Mojca	Kritične fluktuacije v okolici praga optične nestabilnosti v nematiku
672. Stokanovič Jasna	Hidrodinamske fluktuacije v smektiku C
673. Dobnikar Jure	Statistika spektrov v prehodnem območju med integrabilnostjo in kaosom ob zlomljeni antiunitarni simetriji
674. Simsič Marko	Študij feroelektričnega faznega prehoda v RbH_2PO_4 z metodo NMR spin-mrežne relaksacije ^{87}Rb in ^{85}Rb
675. Žagar Tomaž	Določevanje zgorelosti gorivnih elementov raziskovalnega reaktorja TRIGA
676. Mencej Damjan	Izdelava in preizkus pozicijsko občutljivih detektorjev za fotone energije 511 keV
677. Šifrar Marko	Krmiljenje pomikov in preizkus delovanja scintilacijskega pozitronskega tomografa
678. Kordeš Urban	Empirično modeliranje dinamike skalarne polja
679. Šubic Aleš	Optimizacija laserja Cr, Tm, HO:YAG

Meteorologija

61. Turk Sandra	Vodna bilanca tal v Sloveniji in bližnji okolici v zadnjem stoletju
62. Perčič Mojca	Vstopanje okolišnjega zraka v kumulusni oblak
63. Pirnat Špela	Ugotavljanje virov onesnaženja z ozonom s pomočjo trajektorij

3. stopnja

Matematika — izobraževalna smer

13. Erker Jaka	Sullivanov izrek
14. Pavlič Gregor	Elementarni dokazi v teoriji praštevil
15. Mutić Snežana	Ravninske mrežne poti
16. Manfreda Vida	Galoisova teorija reševanja enačb
17. Drobnič Andreja	Stožci v končno razsežnih prostorih

Matematika — raziskovalna smer

- | | |
|-------------------|--|
| 70. Cigler Gregor | Algebraične grupe |
| 71. Zmazek Blaž | Zvezdno kromatično število grafov |
| 72. Rupnik Darja | Schurovi multiplikatorji in operatorsko diferenciable funkcije |
| 73. Željko Matjaž | Realne algebraične množice |
| 74. Trobec Mojca | Raschevi modeli za kategorične podatke |
| 75. Bračič Janko | Nekatere posplošitve Fuglede-Putnamovega izreka |
| 76. Košir Andrej | Sistem medsebojno učinkujočih delcev |

Specialistični študij — matematično izobraževanje (po programu ni naloge)

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. Zabret Marta | 3. Tomažin Janita |
| 2. Čampelj Borut | 4. Šmuc Slavka |

Fizika — elektrooptika

- | | |
|---------------------|--|
| 164. Poberaj Gorazd | Dinamika razvoja prečnih nihajnih načinov v laserjih s pasivnim preklopnikom kvalitete resonatorja |
|---------------------|--|

Fizika trdne snovi

- | | |
|------------------------|---|
| 165. Mrđen Tomo | Električne karakteristike Schottkyjevih diod Ag/Si izdelanih z metodo nanašanja s curki ioniziranih skupkov |
| 166. Mikac Mojca Urška | Študij enodimenzionalno moduliranega inkomenzurabilnega sistema BCPS z jedrsko kvadrupolno resonanco |
| 167. Slavinec Mitja | Nematiki v kapilari: ureditev ob krivi prosti površini |

Fizika jedra in osnovnih delcev

- | | |
|-------------------|---|
| 168. Stanič Samo | Meritev razpadne širine resonance Z^0 v kvarke $b\bar{b}$ z metodo nevronske mreže |
| 169. Širca Simon | Reakcija $p(e,e',\pi^+)n$ v spodnjem energijskem področju resonance Δ |
| 170. Škrk Damijan | Delovanje žične komore s svetlobno mešanico metan – TMAE pri velikih pogostostih štetja |

Jedrska tehnika

- | | |
|---------------------|---|
| 171. Dvoršek Tomaž | Primerjava strategij vzdrževanja cevi uparjalnikov jedrskih elektrarn |
| 172. Peršič Andreja | Dvodimenzionalni izračun zgorelosti raziskovalnega reaktorja |

Meteorologija

- | | |
|------------------|--|
| 7. Divjak Marjan | Radarsko merjenje padavin v neoptimalnih razmerah |
| 8. Gaberšek Saša | Vpliv spremembe albeda tal na nekatere meteorološke količine |

Doktorati — matematika

- | | |
|--------------------|---|
| 48. Dacar Franc | Končna obrežja pogojev |
| 49. Drnovšek Roman | Pozitivni operatorji na Banachovih mrežah |
| 50. Juvan Martin | Algoritmi in ovire za vlaganje grafov v torus |
| 51. Malešič Jože | Toroidne dekompozicije trirazsežne sfere |

Doktorati — fizika

- | | |
|---------------------|---|
| 151. Abramič Darija | Študij heksatičnih faz v feroelektričnih tekočih kristalih z jedrsko magnetno resonanco |
| 152. Ambrožič Milan | Kiralni nematiki v omejeni cilindrični geometriji |

153. Drevenšek Olenik Irena Raziskave feroelektričnih tekočih kristalov s podvajanjem optične frekvence
154. Gyergyek Tomaž Analiza nelinearnih oscilacij električnega toka na pozitivno elektrodo v šibko magnetizirani razelektritveni plazmi
155. Iglič Aleš Teoretična analiza vesikulacije biološke membrane
156. Janžekovič Helena Tvorba vrzeli v atomski lupini K pri obstreljevanju z nizko-energijskimi ioni
157. Klanjšek Gunde Marta Infrardeča spektroskopija tankih plasti
158. Mandrino Dorde Rast srebra in zlata na kristalih IV-VI polprevodniških spojin s strukturo CdJ₂ in NaCl
159. Mele Irena Validacija teoretičnih modelov za izračun parametrov pulza v reaktorju Triga
160. Mertelj Tomaž Vpliv dopiranja na optične fonone v visokotemperaturnih superprevodnikih
161. Mühleisen Artur Sevalni Augerjevi prehodi K-LM in K-MM pri argonu, kriptonu in ksenonu
162. Podobnik Tomaž Tvorba resonanc pri reakciji $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$
163. Prosen Tomaž Kvantna Poincarejeva preslikava
164. Rastegar Abbas Sipanje svetlobe v feroelektričnih in antiferoelektričnih tekočih kristalih v omejeni geometriji
165. Štuhec Matjaž Večelektronske fotoekscitacije v serijah ionov z zaključenimi lupinami
166. Zidanšek Aleksander Študij gelov z jedrsko magnetno resonanco

Martina Koman

VABILO

Srečanje o uporabi fizike

Nacionalni komite za fiziko pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi na 3. slovensko srečanje o uporabi fizike, ki bo v hotelu Vesna zdravilišča Topolšica pri Velenju v četrtek, 6. novembra 1997, s pričetkom ob 9. uri.

Fiziki, ki delamo v slovenski industriji, na inštitutih in obeh univerzah, bomo s preko 25 referati in posterji v petih sekcijah (fizika kondenzirane snovi, optika in elektronika, jedrska in reaktorska fizika, akustika in ultrazvok in interdisciplinarna področja) predstavili zanimiva področja uporabe fizike v tehniki in znanosti. Srečanje bomo zaključili z okroglo mizo o položaju fizikov v slovenski industriji in sodelovanju z univerzama in inštituti.

Podroben program in druge informacije so na voljo pri pripravljalnem odboru na naslovu: Matjaž Babič, Iskraemeco d.d., 4000 Kranj, Savska loka 4, tel. (064) 2640 (int. 2569), fax (064) 221377, email: matjaz.babic@rd.iskraemeco.si.

Kotizacija, v katero je vključen zbornik izvlečkov, kosilo in osvežilni napitki, znaša 7000,00 SIT in jo lahko nakažete na žiro račun DMFA, 1000 Ljubljana, Jadranska 19, št. 50101-678-49168, sklic na št. 120.

Prijave sprejemamo tudi na dan srečanja v Topolšici, prosimo pa, da svojo udeležbo prijavite čimprej.

Prisrčno vabljeni v Topolšico!