

ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

TRALNA EKONOMSKA
ŽNICA Ljubljana

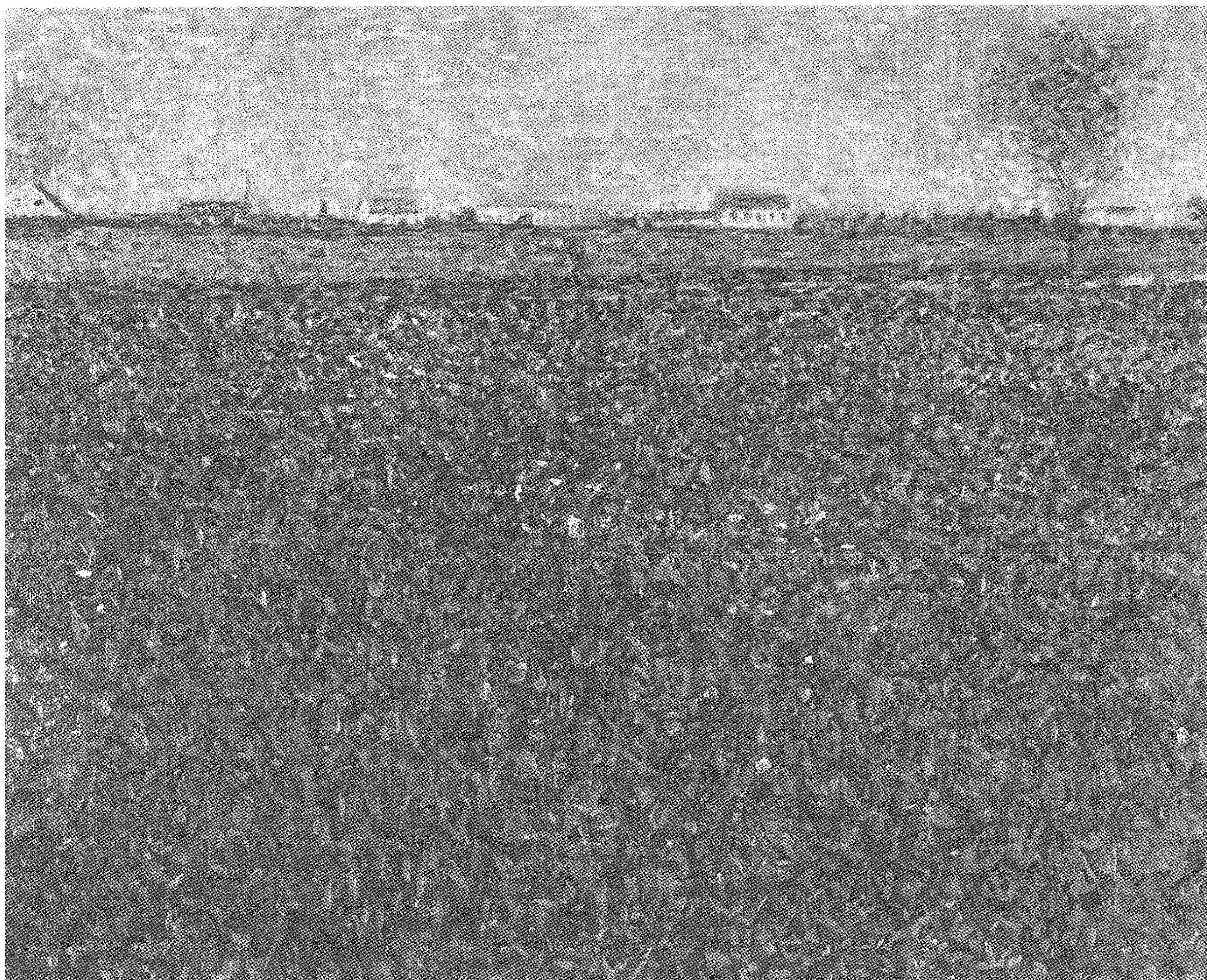
2011/12/17 - 4

1997

Letnik 44

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1997

letnik 44, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopić (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.500 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 5.000 SIT, za študente 1.250 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 480 SIT, stare številke 320 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1997 DMFA Slovenije – 1326

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

Končno razsežni linearno urejeni vektorski prostori — Finite dimensional linearly ordered vector spaces (Boris Lavrič)	97–104
Isingov model — The Ising model (Igor Vilfan)	105–115
O geometriji v osnovni in srednji šoli — Geometry at primary and secondary school (Vinicio Villani)	116–123
Uporaba programa DERIVE v srednji šoli — Using DERIVE in Secondary schools (Mojca Lokar, Matija Lokar)	125–128

Vesti — News

Strokovno srečanje in 49. občni zbor društva (Andrej Čadež) III–IV

Nove knjige — New books (Anton Suhadolc, Gorazd Planinšič) 123, 124

Na ovitku: Georges Seurat, *Lucerna*, 1885.

KONČNO RAZSEŽNI LINEARNO UREJENI VEKTORSKI PROSTORI

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 06F25, 13J25

V članku obravnavamo končno razsežne linearne urejene vektorske prostore. Dokažemo, da je vsaka usklajena linearna urejenost na realnem končno razsežnem vektorskem prostoru leksikografska v kaki bazi tega prostora.

FINITE DIMENSIONAL LINEARLY ORDERED VECTOR SPACES

In this note we consider finite dimensional linearly ordered vector spaces. We prove that every compatible linear order of a real finite dimensional vector space is lexicographic in some basis of that space.

1. Linearno urejeni vektorski prostori

Za uvod ponovimo nekaj preprostih pojmov iz splošne teorije urejenosti. Naj bo M dana neprazna množica. Binarno relacijo $\leq$ (manjše ali enako) na M imenujemo *relacija linearne urejenosti*, kadar je

antisimetrična: iz $a \leq b$ in $b \leq a$ sledi $a = b$,

tranzitivna: iz $a \leq b$ in $b \leq c$ sledi $a \leq c$,

strogo sovisna: za vsak par $(a, b) \in M \times M$ velja $a \leq b$ ali $b \leq a$.

Kadar je na M dana relacija linearne urejenosti $\leq$, imenujemo M (ali par $(M, \leq)$) *linearno urejena množica*. Relacija linearne urejenosti na M je zaradi stroge sovisnosti refleksivna ($a \leq a$ za vsak $a \in M$) in tedaj poseben primer relacije delne urejenosti.

Linearna urejenost $\leq$ določa s predpisom

$$a < b \iff (a \leq b \text{ in } a \neq b), \quad a, b \in M,$$

na M relacijo $<$ (manjše). Za poljubna elementa $a \in M$ in $b \in M$ velja natanko ena od možnosti $a < b$, $b < a$ in $a = b$ (zakon *trihotomije*). Znak $\leq$ lahko zasučemo: $a \geq b$ pomeni isto kot $b \leq a$.

Neprazna podmnožica linearne urejene množice M na naraven način podeduje urejenost iz M . Podedovano linearno urejenost imenujemo *inducirana* urejenost.

Teh nekaj osnovnih pojmov iz splošne teorije urejenosti bo dovolj za nadaljevanje, v katerem se bomo ukvarjali z urejenostjo v vektorskih prostorih. Več informacij o splošnih relacijah urejenosti lahko bralec najde v knjižici [4].

Definicija 1. Naj bo V realen vektorski prostor. Relacija linearne urejenosti $\leq$ na V je *usklajena*, kadar ustreza naslednjima pogojevima:

$$x, y \in V, \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \text{za vsak } z \in V \quad (1)$$

$$x, y \in V, \quad x \leq y \implies rx \leq ry \quad \text{za vsak nenegativen } r \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Prostor V skupaj z usklajeno relacijo linearne urejenosti imenujemo *linearno urejen vektorski prostor*.

Pogoja (1), (2) smiselno usklajujeta algebrski operaciji in delno urejenost prostora V . Posplošujeta naravno povezanost algebrske in urejenostne strukture standardno urejenega realnega prostora $\mathbb{R}$. Zabeležimo še osnovni primer končno razsežnega linearno urejenega vektorskega prostora, *leksikografsko* urejeni prostor n -teric $\mathbb{R}^n$. V tej urejenosti za $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $x \leq y$ natanko takrat, kadar je bodisi $x = y$ bodisi $x \neq y$ in $x_k < y_k$ za najmanjši indeks k , pri katerem $x_k \neq y_k$. Brez težav se lahko prepričamo, da je leksikografska urejenost linearna in usklajena.

Naj bo V linearno urejen vektorski prostor. Množico $P = \{x \in V : x \geq 0\}$ imenujemo *pozitivni stožec* prostora V , njene elemente pa *pozitivni elementi*. Element $x \in V$ je *negativen*, kadar velja $x \leq 0$. Z uporabo pogoja (1) lahko vidimo, da je x negativen natanko takrat, kadar je $-x \geq 0$. Zato velja $-P = \{x \in V : x \leq 0\}$.

Iz zahteve (1) sledi, da za poljubna elementa x in y iz linearno urejenega vektorskega prostora V s pozitivnim stožcem P velja ekvivalenca $x \leq y \iff y - x \in P$. Poleg tega iz (1) zaradi tranzitivnosti relacije $\leq$ sledi, da je pozitivni stožec P zaprt za seštevanje:

$$P + P \subseteq P. \quad (3)$$

S pomočjo pogoja (2) brž ugotovimo, da je P zaprt za množenje z nenegativnimi realnimi števili:

$$\mathbb{R}^+ P \subseteq P. \quad (4)$$

Z uporabo antisimetričnosti in refleksivnosti relacije $\leq$ lahko brez težav dokažemo, da velja

$$P \cap (-P) = \{0\}. \quad (5)$$

Če upoštevamo strogo sovisnost relacije $\leq$, brž dobimo še enakost

$$P \cup (-P) = V. \quad (6)$$

Definicija 2. Podmnožico P realnega vektorskega prostora, ki zadošča pogojem (3), (4) in (5), imenujemo *stožec*.

S stožci lahko preprosto opišemo vse usklajene relacije linearne urejenosti na danem realnem vektorskem prostoru.

Izrek 3. Naj bo P podmnožica realnega vektorskega prostora V . Potem lahko V linearno uredimo tako, da postane linearno urejen vektorski prostor s pozitivnim stožcem P natanko takrat, kadar je P stožec, ki ustreza pogoju (6). Pri tem je linearna urejenost enolično določena s P .

Dokaz izreka 3 je preprost in zelo podoben dokazu izreka 3 iz [1], zato ga prepuščamo bralcu. Z izrekom 3 vzpostavimo bijektivno korespondenco

med družino vseh stožcev prostora V , ki imajo lastnost (6), in družino vseh usklajenih linearnih urejenosti na V . Stožce P , ki ustrezajo pogoju (6), lahko opišemo še drugače.

Trditev 4. *Naj bo $\mathcal{P}$ družina vseh stožcev realnega vektorskega prostora V , urejena z relacijo inkluzije. Potem $P \in \mathcal{P}$ zadošča pogoju (6) tedaj in le tedaj, ko je P maksimalen element družine $\mathcal{P}$.*

Dokaz. Naj stožec P izpolnjuje pogoj (6), stožec Q pa naj vsebuje P . Potem je seveda tudi $-P \subseteq -Q$. Če je Q različen od P , obstaja element $x \in Q \setminus P$. Zaradi (6) velja $x \in -P \subseteq -Q$ in tedaj $x \in Q \cap (-Q) = \{0\}$. Torej je $x = 0 \in P$. Prišli smo v protislovje s predpostavko $x \notin P$, zato je $Q = P$. Stožec P je torej maksimalen v $\mathcal{P}$.

Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da stožec P ne izpolnjuje pogoja (6). Izberimo poljuben vektor $x \in V$, ki ne pripada $P \cup (-P)$, in tvorimo množico

$$R = \{\xi x + u : \xi \in \mathbb{R}^+, u \in P\}.$$

Dokažimo, da je R stožec. Očitno velja $R + R \subseteq R$ in $\mathbb{R}^+ R \subseteq R$. Vzemimo poljuben $z \in R \cap (-R)$ in ga zapišimo v obliki

$$z = \xi x + u = -(\zeta x + v), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^+, u, v \in P.$$

Potem velja $(\xi + \zeta)x = -(u + v) \in -P$, od koder zaradi $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^+$ in $x \notin -P$ sledi $\xi = \zeta = 0$. Tedaj $z = u = -v \in P \cap (-P) = \{0\}$, torej je $z = 0$. Ker je poleg tega $0 \in R \cap (-R)$, velja $R \cap (-R) = \{0\}$. Množica Q je potemtakem stožec. Ker stožec R očitno vsebuje P in je zaradi $x \in R \setminus P$ različen od P , P ni maksimalen element družine $\mathcal{P}$. ■

Posledica 5. *Vsak realen vektorski prostor lahko uredimo z usklajeno linearno urejenostjo.*

Dokaz. Družina $\mathcal{P}$ vseh stožcev danega prostora zaradi $\{0\} \in \mathcal{P}$ ni prazna. Naj bo $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ veriga v $\mathcal{P}$. Dokažimo, da potem $Q = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ pripada $\mathcal{P}$. Če elementa x in y pripadata Q , obstajata taka indeksa $\alpha, \beta \in \Lambda$, da $x \in P_\alpha$, $y \in P_\beta$. Tedaj x in y ležita v večjem od stožcev P_α, P_β , zato tudi $x + y$ pripada temu stožcu. Torej velja $x + y \in Q$. Podobno dokažemo, da Q izpolnjuje pogoj (5), še preprosteje pa vidimo, da Q izpolnjuje pogoj (4). Po Zornovi lemi ima tedaj družina $\mathcal{P}$ maksimalen element P . Po trditvi 4 stožec P ustreza pogoju (6), zato po izreku 3 določa usklajeno linearno urejenost. ■

Zabeležimo še nekaj preprostih lastnosti stožcev. Vzemimo poljubna elementa x, y iz stožca P in število $t \in [0, 1]$. Zaradi (4) je $tx \in P$ in $(1 - t)y \in P$, zaradi (3) pa potem konveksna kombinacija $tx + (1 - t)y$ leži v P . Vsak stožec je torej konveksna množica. Naj bo sedaj P konveksna podmnožica realnega vektorskega prostora in naj ustreza pogojema (4)

in (5). Dokažimo, da potem P zadošča pogoju (3) in je potemtakem stožec. V ta namen vzemimo poljubna elementa $x, y \in P$. Zaradi (4) velja $2x \in P$ in $2y \in P$, zaradi konveksnosti P pa od tod sledi $x + y = \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y) \in P$. Torej P res ustreza pogoju (3).

Vektorski podprostor U linearno urejenega prostora V s pozitivnim stožcem P je v inducirani urejenosti linearno urejen. Inducirano urejenost na U določa stožec $U \cap P$.

2. Karakterizacija usklajenih linearnih urejenosti z leksikografskimi

Naj bo V netrivialen končno razsežen realen vektorski prostor in $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ njegova *urejena baza*, tj. baza z danim vrstnim redom vektorjev v njej. Množico P_B naj sestavljajo vektor 0 in vsi neničelni vektorji $x \in V$, ki ustrezajo naslednjemu pogoju:

Če je $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$, $\xi_i \in \mathbb{R}$, in je k najmanjši med indeksi $i \in \{1, \dots, n\}$, za katere velja $\xi_i \neq 0$, potem je $\xi_k > 0$.

Ni se težko prepričati, da je P_B stožec v V . Ker očitno velja $P_B \cup \cup(-P_B) = V$, stožec P_B določa na V usklajeno linearno urejenost. Imenujemo jo *leksikografska urejenost glede na urejeno bazo B* . Če je $V = \mathbb{R}^n$ in B običajno urejena standardna baza, P_B določa običajno *leksikografsko urejenost* v $\mathbb{R}^n$.

Z naslednjim rezultatom si bomo olajšali dokaz, da je vsaka usklajena linearna urejenost na končno razsežnem vektorskem prostoru leksikografska glede na kako urejeno bazo.

Lema 6. *Naj bo V netrivialen linearno urejen končno razsežen evklidski prostor s pozitivnim stožcem P . Potem obstaja natanko en tak vektor $v \in V$ z normo 1, da za vsak $x \in P$ velja $\langle v, x \rangle \geq 0$.*

Dokaz. Vzemimo ortonormirano bazo $\{u_1, \dots, u_n\}$ prostora V in postavimo

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{če } u_i \in P \\ -1, & \text{če } u_i \notin P \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potem za vsak indeks i velja $\sigma_i u_i \in P$, zato $u = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i \in P$. Dokažimo, da P vsebuje odprto enotsko kroglo $K_1(u)$ s središčem u .

Vzemimo poljuben $y \in K_1(u)$ in ga zapišimo v obliki $y = \sum_{i=1}^n \eta_i u_i$, $\eta_i \in \mathbb{R}$. Ker je

$$\sum_{i=1}^n |\eta_i - \sigma_i|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (\eta_i - \sigma_i) u_i \right\|^2 = \|y - u\|^2 < 1,$$

za vsak indeks i velja $|\eta_i - \sigma_i| < 1$. Potem pa je $\eta_i \sigma_i > 0$ in tedaj $\eta_i u_i = (\eta_i \sigma_i) \sigma_i u_i \in P$. Od tod sledi $y = \sum_{i=1}^n \eta_i u_i \in P$, torej je res $K_1(u) \subset P$.

Stožec P je konveksen, zato je konveksno tudi njegovo zaprtje $\overline{P}$. Ker u leži v notranjosti stožca P in ker je $P \cap (-P) = \{0\}$, velja $u \notin -\overline{P}$. Množica $-\overline{P}$ je zaprta v končno razsežnem normiranem prostoru, zato obstaja v njej vektor $w \neq u$, najbližji vektorju u .

Vzemimo poljuben $x \in P$ in poljubno realno število $\varepsilon > 0$. Potem $\varepsilon x \in P$ in $w \in -\overline{P}$, zato velja $w - \varepsilon x \in -\overline{P}$. Zaradi $\|u - w\| = \inf\{\|u - z\| : z \in -\overline{P}\}$ je tedaj

$$\|u - w\| \leq \|u - (w - \varepsilon x)\| = \|(u - w) + \varepsilon x\|.$$

S kvadriranjem te neenakosti in prehodom na skalarni produkt brez težav dobimo neenakost

$$2 \langle u - w, x \rangle \geq -\varepsilon \langle x, x \rangle.$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, od tod sledi $\langle u - w, x \rangle \geq 0$. Vektor $v = \|u - w\|^{-1} \cdot (u - w)$ z normo 1 tedaj ustreza pogoju $\langle v, x \rangle \geq 0$ za vsak $x \in P$. S tem je dokazan obstoj vektorja v iz leme. Dokažimo še edinstvo takšnega vektorja.

Denimo, da tudi vektor v' z normo 1 ustreza pogoju $\langle v', x \rangle \geq 0$ za vsak $x \in P$. Brez škode za splošnost dokaza predpostavimo, da velja $v - v' \in P$ (če $v - v' \notin P$, zamenjamo med sabo v in v'). Potem je $\langle v, v - v' \rangle \geq 0$ in $\langle v', v - v' \rangle \geq 0$. Od tod sledi $\langle v, v' \rangle \leq 1$ in $\langle v', v \rangle \geq 1$, torej je $\langle v, v' \rangle = 1$. Zdaj se lahko brž prepričamo, da je $\langle v - v', v - v' \rangle = 0$ in tedaj $v' = v$. ■

Izrek 7. *Naj bo V netrivialen linearno urejen končno razsežen evklidski prostor s pozitivnim stožcem P . Potem obstaja natanko ena taka urejena ortonormirana baza $B \subset V$, da je urejenost prostora V leksikografska v tej bazi.*

Dokaz. Pomagali si bomo z matematično indukcijo. Če je prostor V enorazsežen, ima en sam pozitiven vektor v njem normo enako 1. Edina ustrezna baza prostora V je tedaj singleton, ki vsebuje ta vektor.

Naj bo sedaj $\dim V = n > 1$, izrek pa naj velja za vse prostore z razsežnostjo manjšo od n . Po lemi 6 obstaja tak element $v_1 \in V$ z normo 1, da je $\langle v_1, x \rangle \geq 0$ za vsak $x \in P$. Razcepimo V na ortogonalno vsoto podprostorov $V = \mathbb{R}v_1 \oplus V_1$. Evklidski prostor V_1 je $(n-1)$ -razsežen in linearno urejen v inducirani urejenosti. Zato ima po indukcijski predpostavki tako urejeno ortonormirano bazo $C = \{v_2, \dots, v_n\}$, da je leksikografsko urejen glede na C . Potem je $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortonormirana baza prostora V . Dokazali bomo, da velja $P = P_B$.

Najprej vzemimo poljuben $x \in P$ in ga zapišimo v obliki $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$, $\xi_i \in \mathbb{R}$. Iz $\langle v_1, x \rangle \geq 0$ sledi $\xi_1 \geq 0$. Ker poleg tega v primeru $\xi_1 = 0$ očitno velja $x \in V_1 \cap P = P_C$, od tod dobimo $x \in P_B$. Torej velja $P \subseteq P_B$.

Za dokaz nasprotne inkluzije vzemimo poljuben $y \in P_B$ in ga zapišimo v obliki $y = \sum_{i=1}^n \eta_i v_i$, $\eta_i \in \mathbb{R}$. Kadar je $\eta_1 = 0$, velja $y \in P_C \subset P$. Če $\eta_1 \neq 0$, potem je $\eta_1 > 0$. Iz $y \notin P$ sledi $-y \in P$, kar pa nas vodi v protislovje $\eta_1 = \langle v_1, y \rangle = -\langle v_1, -y \rangle \leq 0$. Torej je tudi v tem primeru $y \in P$. Dokazali smo inkluzijo $P_B \subseteq P$, ta pa skupaj s prejšnjo da iskano enakost $P = P_B$.

Dokažimo še enolično določenost baze iz izreka. Naj bo $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ taka urejena ortonormirana baza prostora V , da je $P_A = P$. Potem iz opredelitve stožca P_A sledi $\langle u_1, x \rangle \geq 0$ za vsak $x \in P$, zato po lemi 6 velja $u_1 = v_1$. Očitno je $D = \{u_2, \dots, u_n\}$ urejena ortonormirana baza prostora V_1 , ki ustreza pogoju $P_D = P \cap V_1$. Ker je po indukcijski predpostavki C edina urejena ortonormirana baza prostora V_1 , ki ustreza pogoju $P_C = P \cap V_1$, se urejeni bazi C in D ujemata. Potem pa se ujemata tudi urejeni bazi A in B . ■

Naj bo V netrivialen končno razsežen evklidski prostor, $\mathcal{B}$ množica vseh urejenih ortonormiranih baz v njem, $\mathcal{P}$ pa množica vseh stožcev, ki določajo v V usklajeno linearno urejenost (torej ustrezajo pogoju (6)). Ker za vsako bazo $B \in \mathcal{B}$ stožec P_B pripada $\mathcal{P}$, po izreku 7 predpis $B \mapsto P_B$ določa bijekcijo med $\mathcal{B}$ in $\mathcal{P}$. Torej so po izreku 7 usklajene linearne urejenosti na V v bijektivni korespondenci z urejenimi ortonormiranimi bazami prostora V . Podobno bijektivno korespondenco vzpostavlja naslednji rezultat, ki sta ga Martinez-Legaz in Singer objavila v [2]. Njun dokaz temelji na teoriji hemiprostorov [3] in je zato precej zapleten.

Posledica 8. (Martinez-Legaz, Singer) *Za vsako usklajeno linearno urejenost $\leq$ na $\mathbb{R}^n$ obstaja natanko ena taka unitarna preslikava $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, da velja ekvivalenca*

$$x \leq y \iff \mathcal{U}x \overset{L}{\leq} \mathcal{U}y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

pri čemer smo s simbolom $\overset{L}{\leq}$ označili leksikografsko urejenost na $\mathbb{R}^n$. Obratno, za vsako unitarno preslikavo $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je s to ekvivalenco določena na $\mathbb{R}^n$ usklajena linearna urejenost $\leq$.

Dokaz. Naj bo $\leq$ usklajena linearna urejenost na $\mathbb{R}^n$ in $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$. Po izreku 7 obstaja natanko ena urejena ortonormirana baza $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ v $\mathbb{R}^n$, za katero velja $P_B = P$. Obstaja unitarna preslikava $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, ki vektorje te baze zapored preslika v vektorje $e_1, e_2, \dots, e_n$ standardne baze E . Za vektorje iz $\mathbb{R}^n$ očitno velja ekvivalenca $z \in P_B \iff \mathcal{U}z \in P_E$. Stožec P_E določa običajno leksikografsko urejenost $\overset{L}{\leq}$, torej velja ekvivalenca $z \geq 0 \iff \mathcal{U}z \overset{L}{\geq} 0$. Če v njej z zamenjamo z $y - x$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, dobimo (7).

Denimo, da tudi unitarna preslikava $\mathcal{U}' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ustreza pogoju (7), v katerem seveda $\mathcal{U}$ nadomestimo z $\mathcal{U}'$. Potem velja ekvivalenca $z \geq 0 \iff \mathcal{U}'z \overset{L}{\geq} 0$, ki jo zlahka preoblikujemo v $z \in P_B \iff \mathcal{U}'z \in P_E$. Naj bo C urejena ortonormirana baza, sestavljena iz vektorjev $u_1, \dots, u_n$, za katere velja $\mathcal{U}'u_i = e_i$. Ker $\mathcal{U}'z \in P_E$ natanko takrat, kadar $z \in P_C$, lahko z uporabo prejšnje ekvivalence in izreka 7 vidimo, da se urejeni bazi B in C ujemata. Zato se ujemata tudi preslikavi $\mathcal{U}'$ in $\mathcal{U}$. ■

Naj bo V netrivialen končnorazsežen realen vektorski prostor. Ker V lahko opremimo z evklidsko normo, iz izreka 7 sledi, da je vsaka usklajena linearna urejenost na V leksikografska glede na ustrezno urejeno bazo B . Pri tem baza B ni enolično določena z linearno urejenostjo.

Predpostavimo, da je $\dim V = n > 1$, in opremimo V z leksikografsko urejenostjo glede na urejeno bazo $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Neposredno iz definicije vidimo, da so elementi iz B pozitivni in da zanje velja naslednji sklep:

$$i < j \implies kv_j \leq v_i \text{ za vsak } k \in \mathbb{N}.$$

Kadar za pozitivna elementa x in y linearno urejenega vektorskega prostora velja $kx \leq y$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, pravimo, da je x neskončno manjši od y , in zapišemo $x \ll y$ ali $y \gg x$. V prostoru V torej za elemente iz baze B velja $v_1 \gg v_2 \gg \dots \gg v_n$. Od tod takoj sledi, da v vsakem n -razsežnem linearno urejenem vektorskem prostoru obstaja baza iz vektorjev, ki ustrezajo takšnemu pogoju. Še več o tem zvemo iz izreka 10, ki ga bomo dokazali s pomočjo naslednjega rezultata.

Lema 9. *Naj bo V linearno urejen vektorski prostor in $w_1, \dots, w_m$, $m > 1$, strogo pozitivni elementi iz V . Če za pozitiven vektor $w \in V$ in za vsak $i \in \{1, \dots, m\}$ velja $w \gg w_i$, potem je $w > x$ za vsak x iz podprostora, napetega na vektorje $w_1, \dots, w_m$.*

Dokaz. Naj bo $x = \sum_{i=1}^m \zeta_i w_i$, $\zeta_i \in \mathbb{R}$, in naj za vsak $i \in \{1, \dots, m\}$ velja $w \gg w_i$. Vzemimo $k \in \mathbb{N}$, tako da je

$$k > m \max\{|\zeta_i| : 1 \leq i \leq m\}.$$

Potem za vsak i velja $w \geq kw_i > m|\zeta_i|w_i$. Od tod sledi

$$mw > \sum_{i=1}^m m|\zeta_i|w_i \geq m \sum_{i=1}^m \zeta_i w_i = mx,$$

in tedaj $w > x$. ■

Izrek 10. *Naj bo V linearno urejen vektorski prostor z razsežnostjo $n \in \mathbb{N}$. Potem pozitivni vektorji $v_1, \dots, v_n$ iz V ustrezajo pogoju $v_1 \gg v_2 \gg \dots \gg v_n \neq 0$ natanko takrat, kadar je $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ urejena baza prostora V in je V leksikografsko urejen glede na B .*

Dokaz. Naj pozitivni vektorji $v_1, \dots, v_n$ ustrezajo pogoju $v_1 \gg v_2 \gg \dots \gg v_n \neq 0$. Potem so vsi ti vektorji strogo pozitivni.

Dokažimo najprej, da je $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza prostora V . Denimo, da so $v_1, \dots, v_n$ linearno odvisni. Potem obstajajo tak indeks $j < n$ in taki skalarji ξ_i , da je $\xi_j \neq 0$ in $\sum_{i=j}^n \xi_i v_i = 0$. Tedaj v_j leži v podprostoru, ki ga razpenjajo $v_{j+1}, \dots, v_n$. Ker za vsak $i > j$ velja $v_j \gg v_i$, od tod po

lemi 9 sledi $v_j \gg v_j$, kar pa zaradi $v_j > 0$ ni res. Torej so vektorji $v_1, \dots, v_n$ linearno neodvisni in tvorijo bazo.

Zdaj se prepričajmo, da je V leksikografsko urejen v tej bazi. V ta namen vzemimo poljuben neničeln element $x \in V$ in ga zapišimo v obliki $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$, $\xi_i \in \mathbb{R}$. Naj bo k najmanjši indeks, za katerega je $\xi_k \neq 0$. Če $x \in P_B$, potem je $\xi_k > 0$ in zato $\xi_k v_k \gg v_i$ za vsak $i > k$. Od tod sledi, da je $\xi_k v_k > v$ za vsak v iz podprostora, ki ga razpenjajo vektorji v_i , $i > k$. Torej po lemi 9 velja $\xi_k v_k > \sum_{i>k} -\xi_i v_i$ (kadar je $k = n$, na desni strani znaka $>$ lahko vzamemo 0) in zato $x > 0$. Če $x \notin P_B$, potem $-x \in P_B \setminus \{0\}$, zato po prejšnjem velja $-x > 0$ in tedaj $x \not> 0$. Od tod sledi, da je P_B pozitivni stožec prostora V , torej je V leksikografsko urejen glede na B .

Nasprotno smer ekvivalence iz izreka smo dokazali že prej. ■

Če združimo ugotovitve izreka 10 in izreka 7, dobimo naslednji rezultat:

Posledica 11. *Naj bo V linearno urejen evklidski prostor z razsežnostjo $n \in \mathbb{N}$. Potem v njem obstaja natanko ena urejena ortonormirana baza $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, ki ustreza pogoju $v_1 \gg v_2 \gg \dots \gg v_n$.*

Pozitivni element linearno urejenega vektorskega prostora je *neskončno majhen*, kadar je neskončno manjši od kakega elementa tega prostora. Tako so na primer elementi $v_2, \dots, v_n$ urejene baze $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ prostora V z leksikografsko urejenostjo glede na B neskončno majhni. Bralec se bo zlahka prepričal, da element v_1 ni neskončno majhen.

Če v linearno urejenem vektorskem prostoru ni neničelnih neskončno majhnih elementov, za vsak $x > 0$ in vsak $y > 0$ iz tega prostora obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ (odvisen od x in y), da je $kx > y$. Tak prostor imenujemo *arhimedski*. Naslednji rezultat je podoben izreku 11 iz članka [1].

Izrek 12. *Netrivialen linearno urejen vektorski prostor je arhimedski natanko takrat, kadar je enorazsežen.*

Dokaz. Naj bo V netrivialen linearno urejen vektorski prostor. Če V ni enorazsežen, vsebuje dvorazsežen podprostor U . Po ugotovitvah pred izrekom prostor U (v inducirani urejenosti) vsebuje neskončno majhne elemente in zato ni arhimedski. Torej tudi prostor V ni arhimedski.

Naj bo zdaj $\dim V = 1$. Če sta x in y neničelna pozitivna elementa iz V , obstaja tak pozitiven $r \in \mathbb{R}$, da je $y = rx$. Od tod sledi, da za vsako naravno število $k > r$ velja $kx > y$. Prostor V je torej arhimedski. ■

LITERATURA

- [1] B. Lavrič, *Končno razsežni arhimedski delno urejeni vektorski prostori*, Obzornik mat. fiz. **42** (1995), 97–106.
- [2] J. E. Martinez-Legaz, I. Singer, *Compatible Preorders and Linear Operators on $\mathbb{R}^n$* , Linear Algebra Appl. **153** (1991), 53–66.
- [3] J. E. Martinez-Legaz, I. Singer, *The structure of hemispaces in $\mathbb{R}^n$* , Linear Algebra Appl. **110** (1988), 117–179.
- [4] N. Prijatelj, *Matematične strukture I*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1964.

ISINGOV MODEL*

IGOR VILFAN

PACS 05.50.+q, 75.10.Hk

Predstavljen je Isingov model za opis faznih prehodov v feromagnetih. Isingov model obravnava sistem sklopljenih klasičnih spinov $S = \pm 1$ na poljubni mreži. Model ima fazni prehod vrste red/nered, če je prostorska dimenzija večja od $d = 1$. Predstavljena sta dva načina reševanja Isingovega modela, približek povprečnega polja in Monte Carlo simulacija modela v dveh dimenzijah. Z Isingovim modelom lahko študiramo tudi fazne prehode v drugih sistemih, kot so npr. binarne zlitine in mrežni plin.

THE ISING MODEL

The Ising model has been originally formulated to study phase transitions in ferromagnets. It comprises of a system of interacting classical spins, $S = \pm 1$, on an arbitrary lattice. The model has an order-disorder type phase transition in more than one dimension. Two methods of solving the Ising model are discussed, the mean-field approximation and the Monte Carlo simulation in two dimensions. The Ising model has other applications, not just magnetic systems. In particular, it can be used to study phase transitions in binary alloys and lattice gases.

1. Uvod

Kljub temu da je bil Isingov model objavljen že leta 1920 [1] in v eni dimenziji rešen nekaj let pozneje [2], je svoj razcvet kot eden najbolj standardnih modelov statistične mehanike doživel šele po drugi svetovni vojni. Prvotno so namreč domnevali, da je model zaradi preveč poenostavljenega obravnavanja interakcije med spini neuporaben za opis realnih sistemov. V sedemdesetih letih, ko se je uveljavila metoda renormalizacijske grupe, pa so ugotovili, da kritične lastnosti bolj realističnih modelov v bližini kritične točke preidejo v lastnosti Isingovega modela. Tedaj namreč postane korelacijska dolžina velika in mikroskopski detajli postanejo nepomembni.

Danes pomeni Isingov model osnovo vseh mrežnih modelov v statistični mehaniki in ga uporabljajo za opis različnih fizikalnih sistemov, kot so magneti, mrežni plini in binarne zlitine, poleg tega pa, npr., tudi v biologiji in sociologiji. Isingov model je tudi osnova za opis nevronske mreže.

V tem sestavku si bomo najprej ogledali kratko zgodovino Isingovega modela in njegovo uporabnost za opis sorodnih sistemov. Model je točno rešljiv v vseh dimenzijah razen v treh, ki so za praktično uporabo najbolj zanimive. Ogledali si bomo enostavno rešitev v približku povprečnega polja in rezultate veliko bolj natančne Monte Carlo simulacije Isingovega modela na kvadratni mreži.

* Predavanje na Seminarju za učitelje in profesorje fizike v Ljubljani, februarja 1997. Sofinanciranje z denarno pomočjo EU v okviru projekta Tempus – Phare Structural Joint European Project EDEN S-JEP-09578-95.

2. Kratka zgodovina Isingovega modela

Kljub temu da model nosi ime po Isingu, si ga je prvi zamislil Wilhelm Lenz, takrat profesor v Rostocku, in to objavil v članku leta 1920 [1]. Ko je Ising kmalu nato prišel k Lenzu v Hamburg delat doktorsko disertacijo, je dobil nalogo, da model reši. Ising je model točno rešil, izračunal je fazno vsoto za enodimenzionalno mrežo [2]. Ugotovil je, da model nima faznega prehoda v urejeno (feromagnetno) stanje pri končni temperaturi. V eni dimenziji je sistem spinov namreč premalo povezan in že pri najmanjši temperaturi nad absolutno ničlo termične fluktuacije feromagnetno ureditev spinov podrejo. Ising se ni zavedal, da ta ugotovitev velja samo v eni dimenziji, in je mislil, da model, kasneje imenovan po njem, sploh nima faznega prehoda, ker je pregrob. Seveda to ni res, saj danes vemo, da ima model fazni prehod kakor hitro je dimenzija prostora $d > 1$. Točno rešitev Isingovega modela na kvadratni mreži, to je v dveh dimenzijah, je našel Lars Onsager [4], v treh dimenzijah pa še vse do danes ni nihče našel točne rešitve.

Ising, ki je bil rojen leta 1900 v Kölnu ter študiral fiziko in matematiko v Göttingenu, Bonnu in Hamburgu, je po doktoratu delal eno leto v patentnem uradu AEG, nato pa učil po raznih nemških šolah do prihoda Hitlerja na oblast. Takrat je kot Žid izgubil mesto državnega uslužbenca in šel učiti na internat za židovske otroke blizu Potsdama. Kmalu zatem, ko so nacisti v „kristalni noči“ novembra 1938 internat zažgali, sta se z ženo preselila v Luksemburg z namenom, da emigrirata v ZDA. Vizuma nista pravočasno dobila in tako sta dočkala v Luksemburgu nemško okupacijo. Med vojno je moral Ising prisilno delati za nemško vojsko, kmalu po vojni pa sta se z ženo izselila v ZDA in sedaj živita v Peorii, država Illinois [3].

3. Definicija modela

V Isingovem modelu magnetni moment atoma (ali molekule) opišemo s klasičnim spinom, ki je lahko obrnjen le „gor“ ali „dol“, $S = \pm 1$. Spini so razporejeni v pravilni mreži in so sklopljeni običajno le s svojimi najbližjimi sosedi, lahko pa nanje deluje tudi zunanje magnetno polje.

Energija sistema sklopljenih spinov v zunanjem magnetnem polju je:

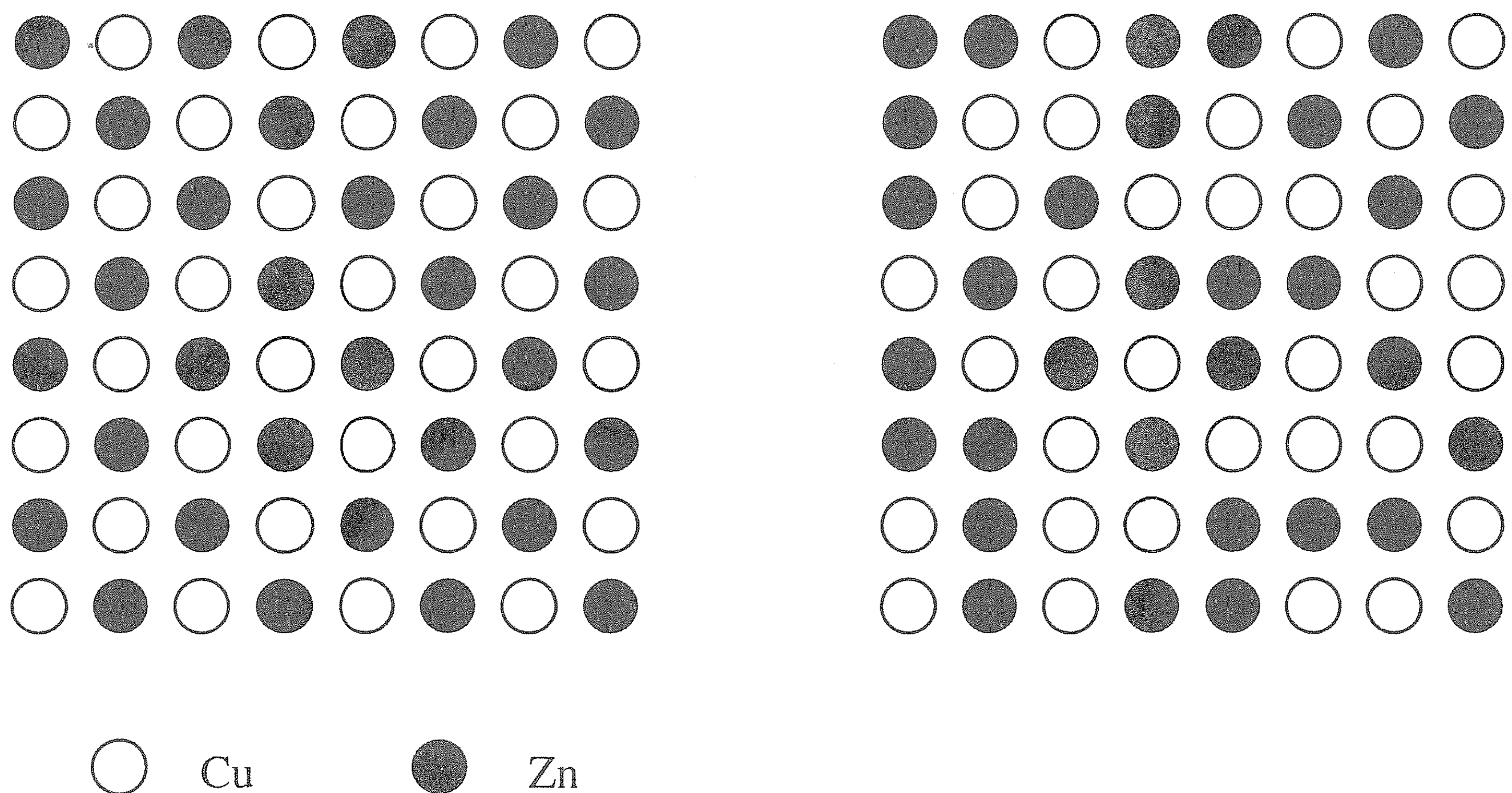
$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i. \quad (1)$$

Prvi člen opisuje sklopitev med spini, zato teče vsota po vseh najbližjih parih. J je energija sklopitve med dvema najbližjima spinoma in ima svoj fizikalni vzrok v izmenjalni interakciji med elektroni na sosednjih atomih ter je lahko pozitivna ali negativna. Drugi člen opisuje sklopitev spinov z magnetnim poljem, pri čemer je H energija sklopitve spina z zunanjim magnetnim poljem.

4. Uporabnost modela

Bistvena značilnost Isingovega modela je, da je uporaben za opis vseh sistemov, ki so sestavljeni iz mreže celic in ima posamezna celica na razpolago samo dve možni stanji. Celice morajo biti tudi medsebojno sklopljene.

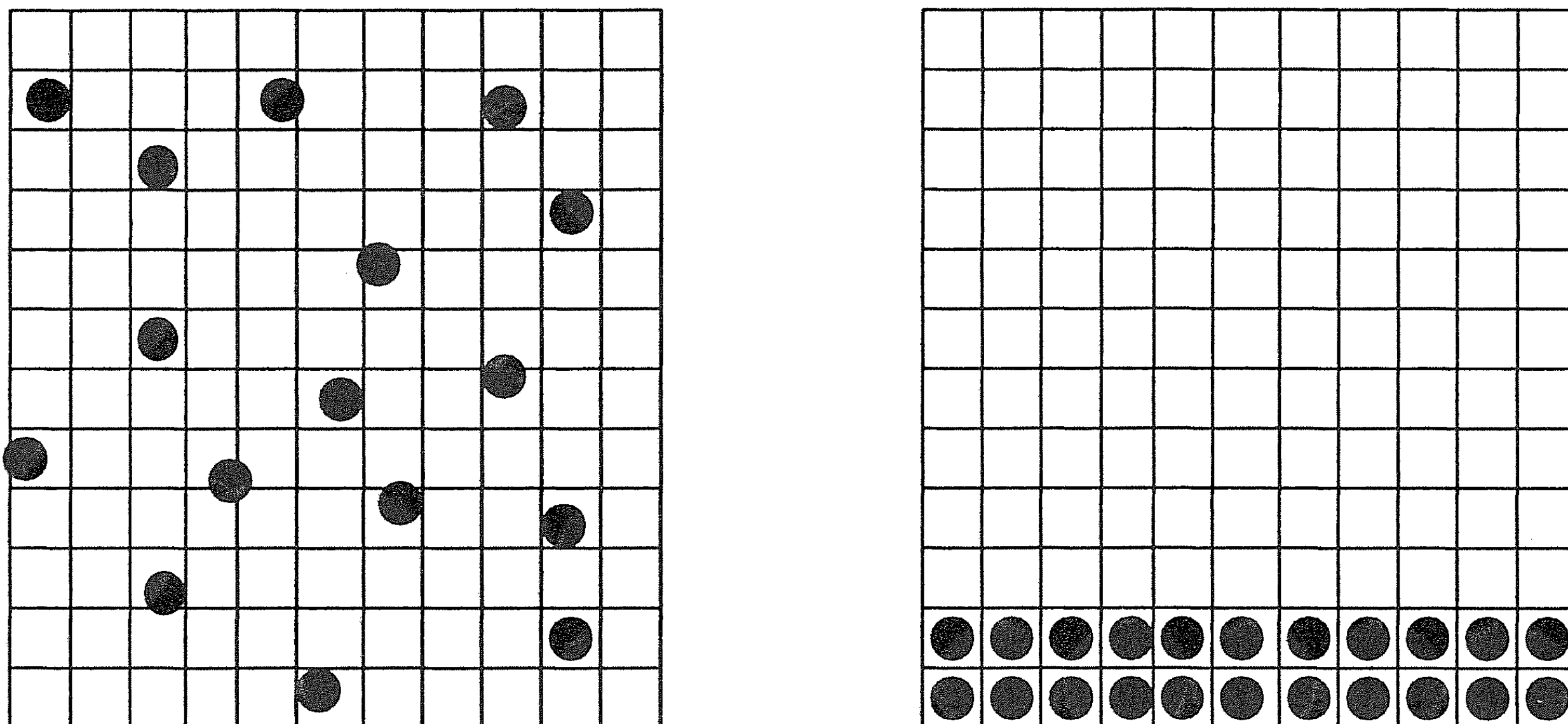
Sistemov, ki jih lahko opišemo z Isingovim modelom, je veliko. Poleg magnetnih sistemov so najbolj znane še binarne zlitine in mrežni plin. Primer binarne zlitine je β -medenina, sestavljena iz 50% Cu in 50% Zn. β -medenina tvori prostorsko centrirano mrežo. Pri nizki temperaturi so atomi Cu in Zn pravilno, izmenično razporejeni na mreži, gl. sliko 1a. Pri $T > 740$ K (vendar pod temperaturo tališča!) zlitina sicer še vedno tvori kubično mrežo, vendar pa se atomi Cu in Zn med seboj pomešajo, sl. 1b. Binarno zlitino preslikamo na Isingov model tako, da mestom, zasedenim z atomi Cu, priredimo npr. $S = +1$, mestom, zasedenim s Zn, pa $S = -1$.



Slika 1. Binarna zlitina je urejena pri nizki temperaturi (leva slika) ter neurejena pri visoki temperaturi (desna slika).

Drugi sistem, ki ga tudi pogosto opišemo z Isingovim modelom, je mrežni plin. Prostor razdelimo na kocke velikosti, ki je primerljiva z velikostjo molekul plina. Na ta način dosežemo, da je v vsaki kocki kvečjemu ena molekula plina. Kockam (celicam), zasedenim z molekuljo plina, priredimo $S = +1$, praznim kockam pa $S = -1$. Pri visoki temperaturi so molekule „razmetane“ po prostoru (sl. 2a), pri nizki temperaturi pa kondenzirajo (sl. 2b). Vmes je fazni prehod, ki ima enake lastnosti kot Isingov model.

Vse naštetje sisteme, ki so z makroskopskega stališča zelo različni, lahko torej obravnavamo z Isingovim modelom. Pravimo, da pripadajo istemu, Isingovemu *univerzalnostnemu razredu*.

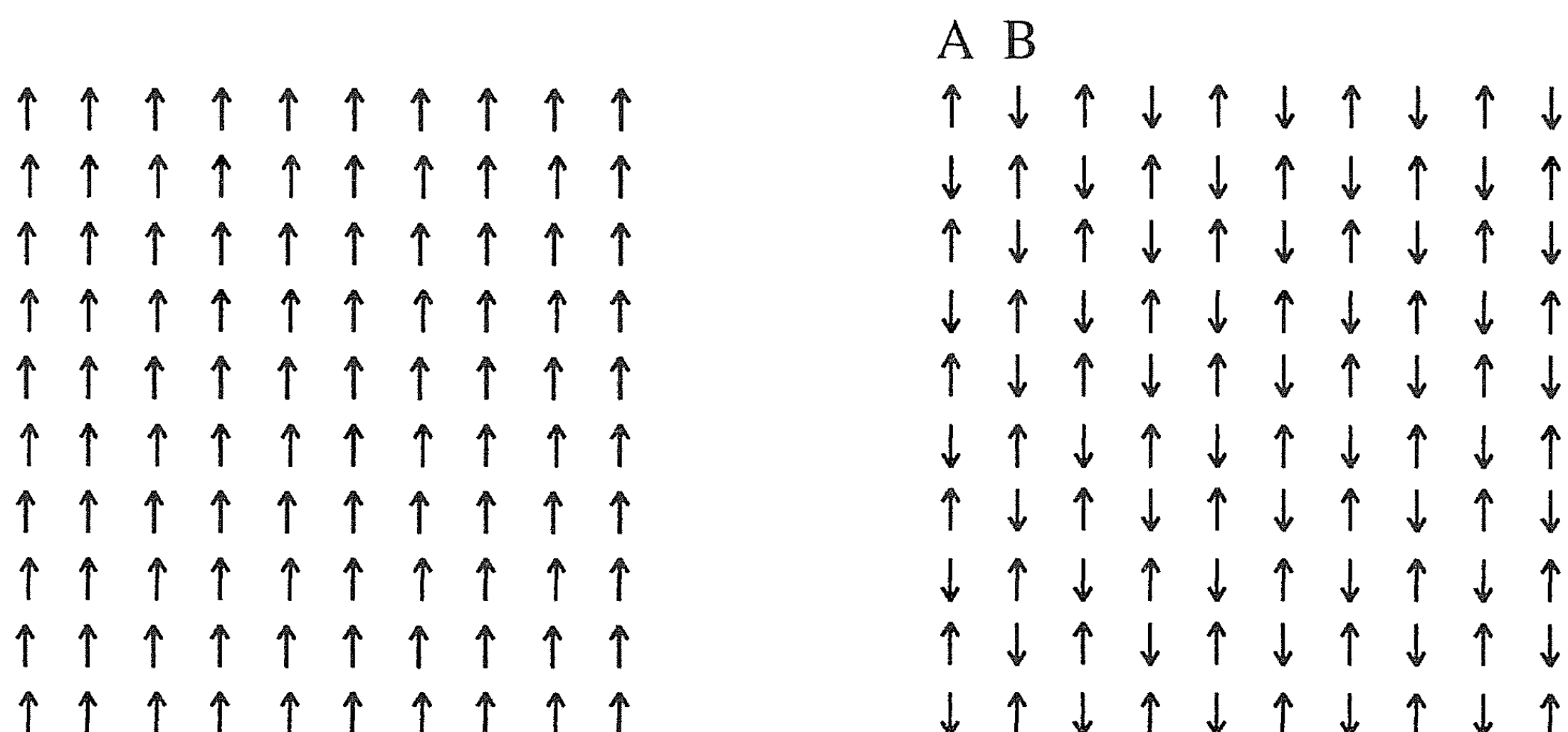


Slika 2. Mrežni plin v neurejeni fazi pri visoki temperaturi (leva slika) in v kondenzirani fazi pri nizki temperaturi (desna slika).

5. Ureditev spinov

Tipičen makroskopski sistem sestoji iz velikega števila delcev s spinom, njihovo število je reda velikosti 10^{23} . Vsak poskus reševanja enačb gibanja tako velikega sistema je obsojen na neuspeh. Zato si pomagamo z metodami statistične mehanike, ki pove *verjetnost*, da je sistem v določenem makroskopskem stanju.

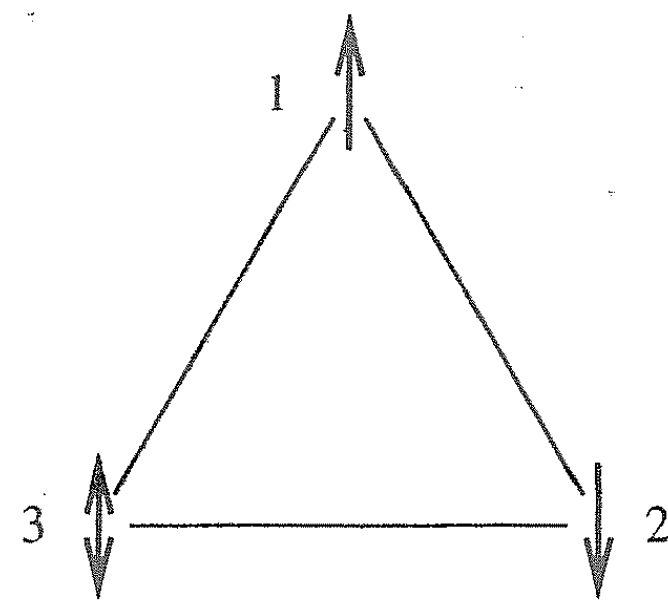
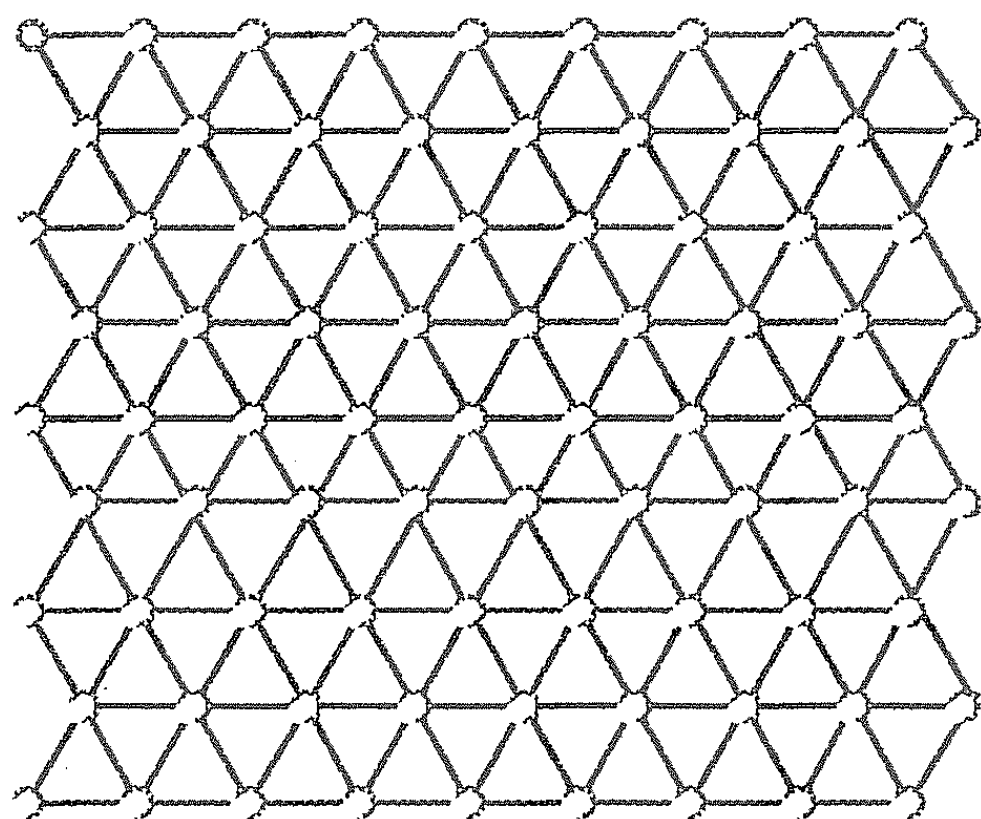
Pri absolutni ničli ($T = 0$ K) je sistem v osnovnem stanju, to je stanju z najnižjo energijo. Če je sklopitev med spini $J > 0$, so v osnovnem stanju vsi spini obrnjeni v isto smer, to imenujemo *feromagnetno osnovno stanje*, gl. sl. 3. Tudi prej omenjeni mrežni plin opišemo z $J > 0$.



Slika 3. V feromagnetnem osnovnem stanju ($J > 0$) so vsi spini obrnjeni v isto smer (leva slika), v antiferomagnetnem ($J < 0$; desna slika) pa so sosednji spini obrnjeni v nasprotno smer. V osnovnem stanju vsi spini z $S = +1$ ležijo na podmreži A, spini z $S = -1$ pa na podmreži B.

Kadar je $J < 0$, želita biti najbližja soseda obrnjena v nasprotno smer. Na večini mrež se spini tedaj uredijo *antiferomagnetno*. Izjema, ki potrjuje

to pravilo, je trikotna mreža, gl. sl. 4. Če je prvi spin na trikotniku obrnjen „gor”, bo drugi spin obrnjen „dol”. Tretji spin, ki čuti nasprotni vpliv obeh sosedov, pa je zbegan (frustriran) in ne ve, kam bi se obrnil. Obe stanji tretjega spina imata enako energijo in sta zato enako verjetni. Osnovno stanje Isingovega modela na trikotni mreži je torej degenerirano, če je $J < 0$. Poleg antiferomagnetov opišemo z $J < 0$ tudi binarno zlitino bakra in cinka, saj je osnovno stanje enako kot pri antiferomagnetu.



Slika 4. Leva slika prikazuje trikotno mrežo, desna slika pa tri sosednje spine na trikotni mreži. Kadar je $J < 0$, tretji spin ne ve, kam bi se obrnil.

Spini v (anti)feromagnetnem osnovnem stanju so urejeni na velike razdalje, govorimo o *redu dolgega dosega*. V splošnem pravimo, da obstoji red dolgega dosega pri feromagnetih, kadar je več spinov obrnjenih v eno kot v drugo smer. Če je neki spin na poljubnem mestu obrnjen npr. navzgor, potem je drugi spin *daleč stran* tudi z večjo verjetnostjo obrnjen navzgor kot navzdol. Pri antiferomagnetih je stvar nekoliko bolj zapletena, saj je že v osnovnem stanju enako spinov obrnjenih „gor” kot „dol”. Takrat mrežo spinov razdelimo na dve „podmreži” (A in B na sliki 3a). V eni podmreži je torej večina spinov obrnjenih „gor”, v drugi pa „dol”. Red dolgega dosega izgine, ko je v eni podmreži v povprečju enako spinov obrnjenih „gor” in „dol”.

Pri nizkih temperaturah (vendar $T > 0$ K) so nekateri naključno izbrani spini termično vzbujeni, obrnjeni v nasprotni, energijsko neugodni smeri. Verjetnost, da je spin na mestu i termično vzbujen, je podana z Boltzmannovim faktorjem:

$$p(S_i = -1) \propto e^{-\Delta E_i/kT}$$

(k je Boltzmannova konstanta), kjer je

$$\Delta E_i = E_i(S_i = -1) - E_i(S_i = +1).$$

Če so vsi sosedi mesta i nevzbujeni, je $p(S_i = -1)$:

$$p(S_i = -1) \propto e^{-2zJ/kT}. \quad (2)$$

Tu je z število najbližjih sosedov (na kvadratni mreži npr. je $z = 4$). Termično vzbujanje posameznih spinov ne podre reda dolgega dosega pri nizkih temperaturah.

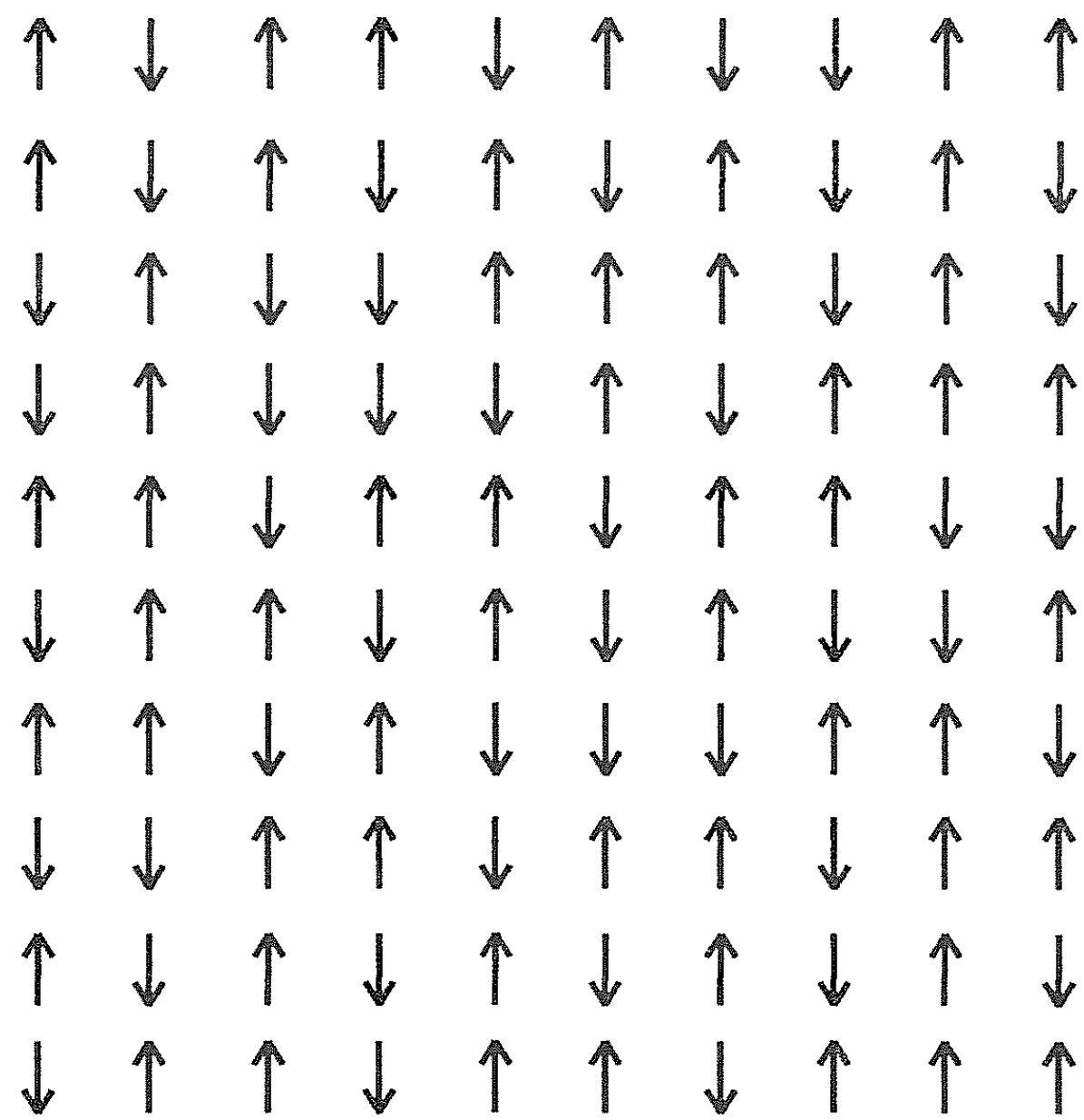
Pri višjih temperaturah gostota vzbujenih spinov naraste in vzbujanja spinov ne moremo več opisati z enačbo (2). Verjetnost, da bo spin na mestu i obrnjen v nasprotno smer, je bistveno odvisna od orientacije bližnjih sosedov in prek njih tudi od orientacije bolj oddaljenih sosedov. Pri zelo visoki temperaturi ($T \rightarrow \infty$) je veliko spinov termično vzbujenih, spini so neurejeni, reda dolgega dosega ni, to je *paramagnetna faza* (sl. 5).

Ko je dovolj sosedov termično vzbujenih, se tudi spin i prav z lahkoto obrne okrog. Vidimo, da termičnega vzbujanja spinov pri višjih temperaturah ne moremo več obravnavati individualno, temveč samo v okviru sistema sklopljenih spinov. Pojave, ki so s tem povezane, imenujemo zadružne (kooperativne) in najbolj znan pojav, povezan s to lastnostjo, je fazni prehod. Pri Isingovem modelu so torej spini pri nizki temperaturi urejeni, pri visoki pa neurejeni. Zato govorimo o *faznem prehodu vrste red-nered*.

Za kvantitativno obravnavo faznega prehoda uvedemo *ureditveni parameter* m , to je povprečno vrednost spina

$$m = \bar{S} = \frac{1}{N} \sum_i S_i.$$

Ureditveni parameter je enak 1 v feromagnetnem osnovnem stanju (pri absolutni ničli), ko so vsi spini obrnjeni v isto smer. Z naraščajočo temperaturo zaradi termičnega vzbujanja spinov m pada, dokler ne izgine pri „kritični temperaturi“ T_C , to je pri temperaturi faznega prehoda. Seveda pa sistem še daleč ni opisan s tem, da poznamo vrednost ureditvenega parametra. Za popoln opis sistema v statistični mehaniki moramo poznati fazno vsoto, saj iz nje lahko z znanimi termodinamskimi relacijami izračunamo še druge lastnosti sistema, kot so prosta energija, ureditveni parameter, entropija, specifična toplota, itd. Fazno vsoto Isingovega modela lahko izračunamo brez posebnega truda le za enodimenzionalni Isingov model. V dveh dimenzijah se sicer tudi da izračunati fazno vsoto, vendar je račun strahotno zapleten. Zato si bomo v nadaljevanju raje ogledali dve metodi reševanja Isingovega modela, s katerima se ognemo računanju fazne vsote, metodo povprečnega polja in pa Monte Carlo simulacijo.



Slika 5. Spini v visokotemperaturni, paramagnetni fazi so neurejeni.

6. Rešitev modela v približku srednjega polja

Pri višjih temperaturah ne vemo, kako so obrnjeni sosednji spini glede na i -ti spin, zato njihovo vrednost nadomestimo s povprečno vrednostjo spinov, $S_j \rightarrow m$. To nam omogoča, da zapišemo verjetnost, s katero je S_i obrnjen „gor“, kot

$$p(S_i = +1) \propto e^{zJm/kT}$$

in verjetnost, da je obrnjen „dol“, kot

$$p(S_i = -1) \propto e^{-zJm/kT}.$$

Ureditveni parameter je torej:

$$m = \bar{S} = \frac{e^{zJm/kT} - e^{-zJm/kT}}{e^{zJm/kT} + e^{-zJm/kT}},$$

$$m = \tanh\left(\frac{zJm}{kT}\right). \quad (3)$$

Transcendentna enačba (3) ima dve rešitvi, trivialno pri $m = 0$ in pri dovolj nizkih temperaturah še $m \neq 0$. Temperaturno odvisnost ureditvenega parametra vidimo na sliki 6. Temperaturo, pri kateri postane $m = 0$, imenujemo *kritično temperaturo* ali temperaturo faznega prehoda. Kritična temperatura je:

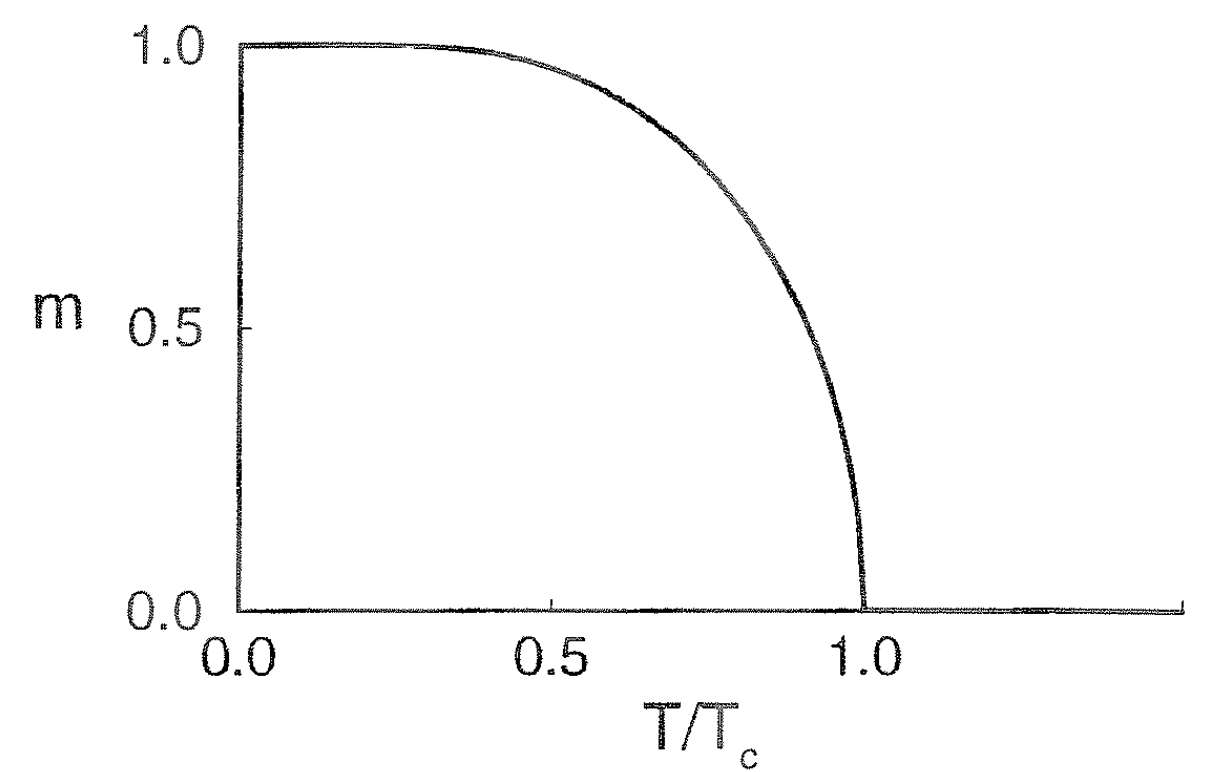
$$T_C = \frac{zJ}{k}. \quad (4)$$

Kritična temperatura, izračunana v približku povprečnega polja, je neodvisna od dimenzije sistema, čeprav je odvisna od števila sosedov. m je zvezna funkcija temperature, zato pravimo, da je fazni prehod zvezen. Rezultat (4) je točen v štirih in več dimenzijah. Razlog je v tem, da so v štirih (in več) dimenzijah spini tako močno povezani med seboj, da se odstopanja (fluktuacije) vrednosti sosednjih spinov medsebojno uničijo in je polje na mestu spina dovolj dobro podano z m .

V dveh in treh dimenzijah je rezultat (4) kvalitativno pravilen. Točnega izraza za kritično temperaturo v treh dimenzijah ne poznamo, v dveh dimenzijah (kvadratna mreža) pa je:

$$T_C = \frac{2J}{k \ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.269 \frac{J}{k},$$

medtem ko nam enačba (4) da $T_C = 4J/k$.



Slika 6. Temperaturna odvisnost ureditvenega parametra m v približku povprečnega polja.

V eni dimenziji enačba (4) še vedno da kritično točko pri končni temperaturi, čeprav iz točne rešitve Isingovega modela vemo, da tam faznega prehoda ni oziroma je pri $T = 0$ K. V eni dimenziji so namreč spini urejeni le pri $T = 0$ K, že poljubno blizu nad $T = 0$ K pa nekaj vzbuditev podre red dolgega dosega (slika 7), prepletenost spinov v eni dimenziji je premajhna. Tu nam ne pomaga niti vključitev sklopitve z naslednjimi sosedi. Približek povprečnega polja torej v eni dimenziji popolnoma odpove.

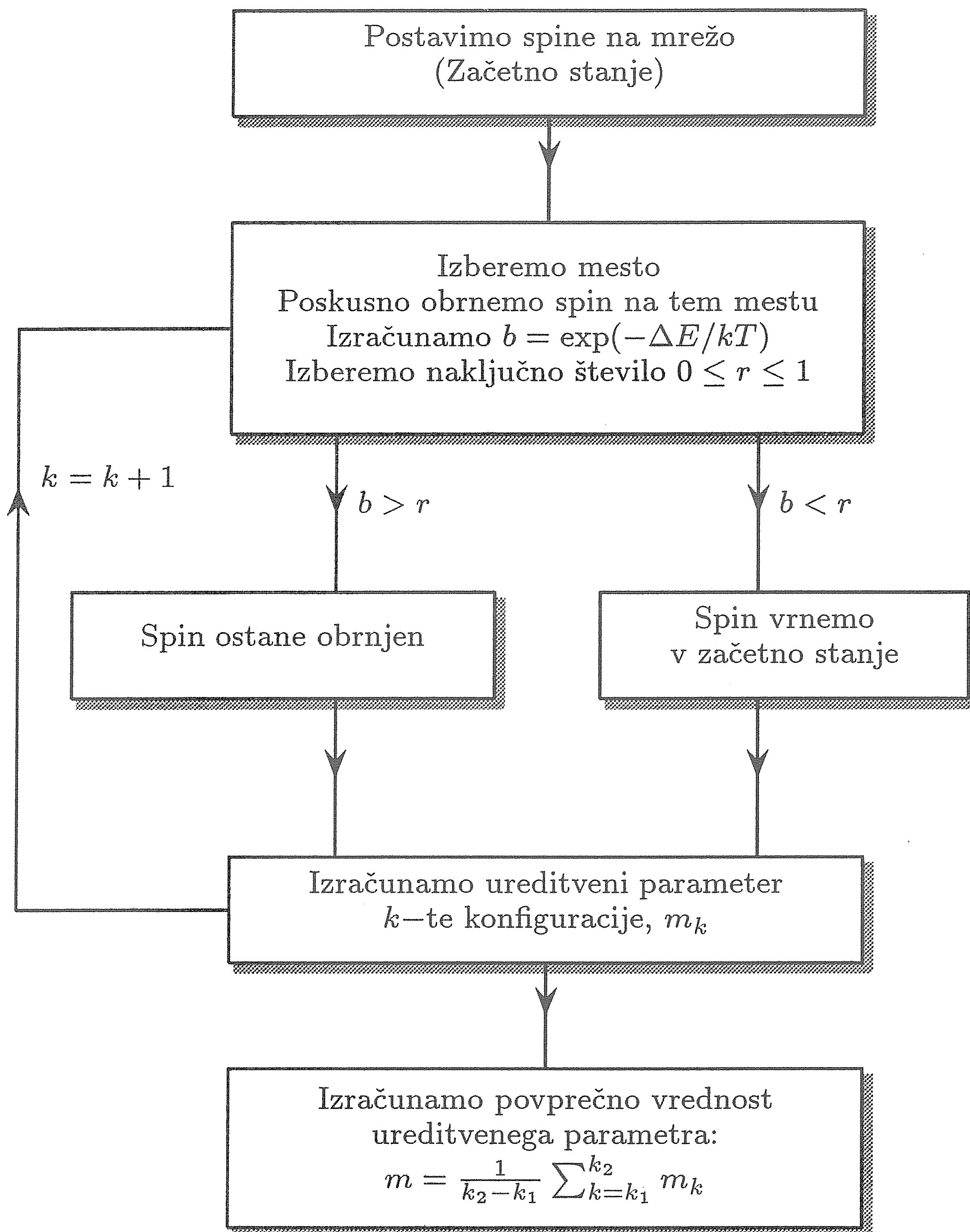
↑ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Slika 7. Termično vzbujanje že pri najnižji temperaturi podre red dolgega dosega v eni dimenziji.

7. Monte Carlo simulacija

Kadar sistema ne znamo rešiti analitično, si pogosto pomagamo z računalniškimi simulacijami. Njihova prednost je v tem, da – če imamo dovolj zmogljiv računalnik, ki lahko simulira dovolj velik sistem – dajo zelo natančne rezultate. Med računalniškimi simulacijami so Monte Carlo simulacije verjetno najbolj znane [5] [6]. Potek simulacije prikazuje slika 8. Bistvo Monte Carlo simulacije je, da termično vzbujanje spinov simuliramo tako, da spin obrnemo, izračunamo pripadajoči Boltzmannov faktor ter ta faktor primerjamo z naključno izbranim številom. Obdržimo le tiste konfiguracije spinov, pri katerih je Boltzmannov faktor večji od naključno izbranega števila. To ponavljamo zelo dolgo in vsakič izračunamo fizikalno količino, ki nas zanima, npr. ureditveni parameter. Na koncu izračunamo povprečje fizikalne količine za veliko število simulacij.

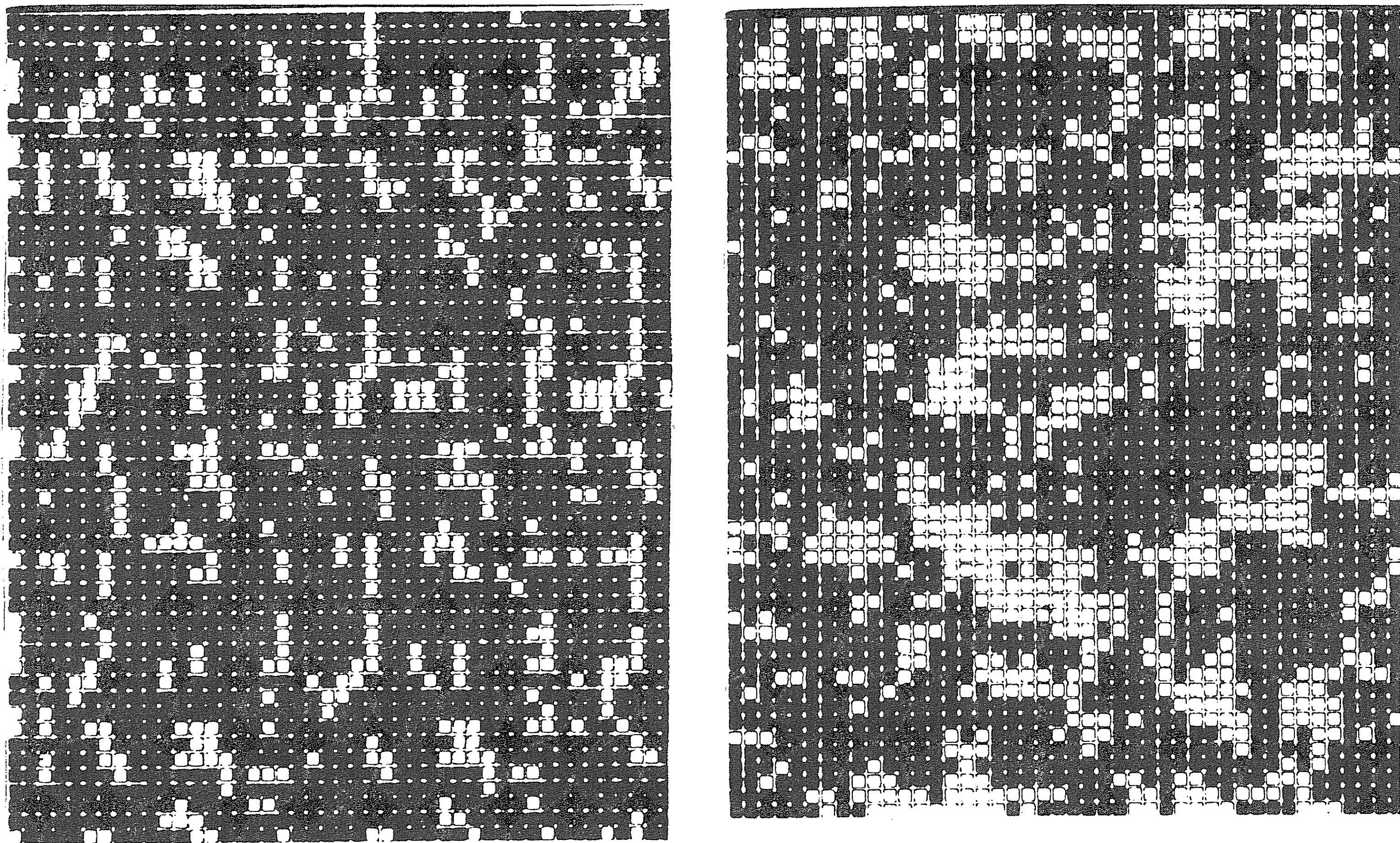
Primere trenutnih konfiguracij spinov na kvadratni mreži pri različnih temperaturah vidimo na slikah 9–11. Črni kvadrati predstavljajo $S = +1$, beli pa $S = -1$. Pri nizki temperaturi (sl. 9a) je večina spinov pozitivnih, imamo red dolgega dosega. Vendar je tudi pri nizki temperaturi nekaj spinov obrnjenih v nasprotno smer. Ti spini so združeni v *skupke*. Skupki so različnih velikosti, velikost največjih skupkov pa nam pove, kolikšna je *korelacijska dolžina* sistema. Pri nekoliko višji temperaturi, vendar še vedno pod kritično temperaturo, vidimo na sliki 9b, da je skupkov več in da so postali večji. Skupki nasprotno obrnjenih spinov (beli kvadrati) povzročijo, da povprečna vrednost ureditvenega parametra pada, ko se bližamo kritični temperaturi. Če bi delali simulacijo v živo, bi tudi videli, da v bližini T_C skupki nastajajo ter izginjajo počasneje kot pri nizki temperaturi. Sklepamo, da korelacijska dolžina in korelacijski čas naraščata, če se sistem bliža kritični temperaturi. Do podobnega spoznanja pridemo tudi, če opazujemo konfiguracije spinov nad kritično temperaturo, sl. 10, vendar s to razliko, da nad kritično temperaturo nimamo reda dolgega dosega, v povprečju je število belih in črnih kvadratkov enako.



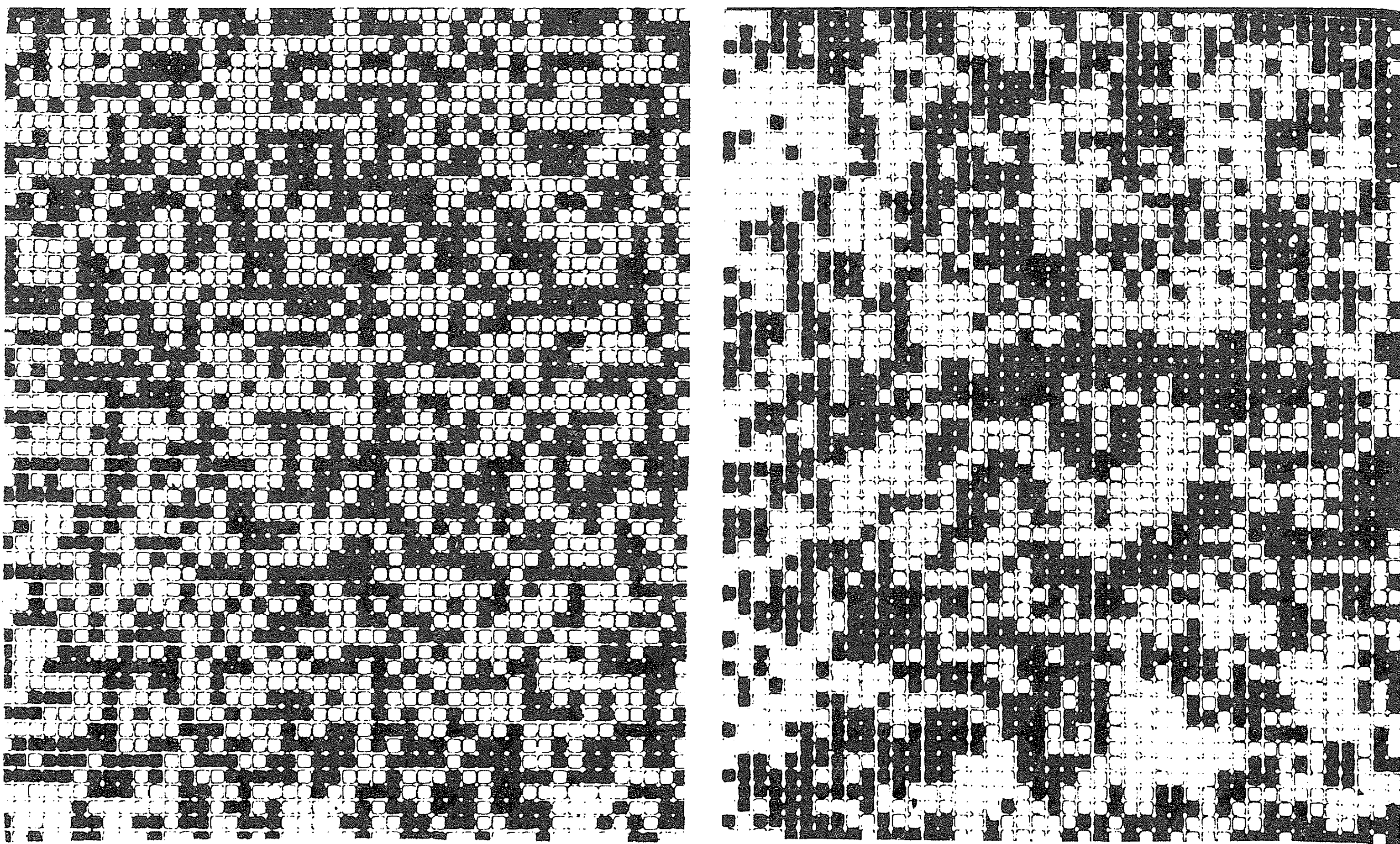
Slika 8. Shematski potek Monte Carlo simulacije.

Posebno pozornost zasluži konfiguracija spinov pri sami kritični temperaturi, ki jo prikazuje sl. 11. Tam so skupki zelo veliki. Vsaj en skupek sega čez ves sistem. Če bi simulirali še večji sistem, bi videli, da en skupek spet sega čez ves sistem. V resnici je pri T_C en skupek neskončno velik, korelacijska dolžina torej pri T_C divergira. Sedaj tudi vidimo, zakaj moramo simulirati velike sisteme in zakaj želimo za Monte Carlo simulacije imeti čim zmogljivejše računalnike. Če želimo raziskovati lastnosti sistema blizu kritične temperature, mora biti sistem večji, kot je korelacijska dolžina.

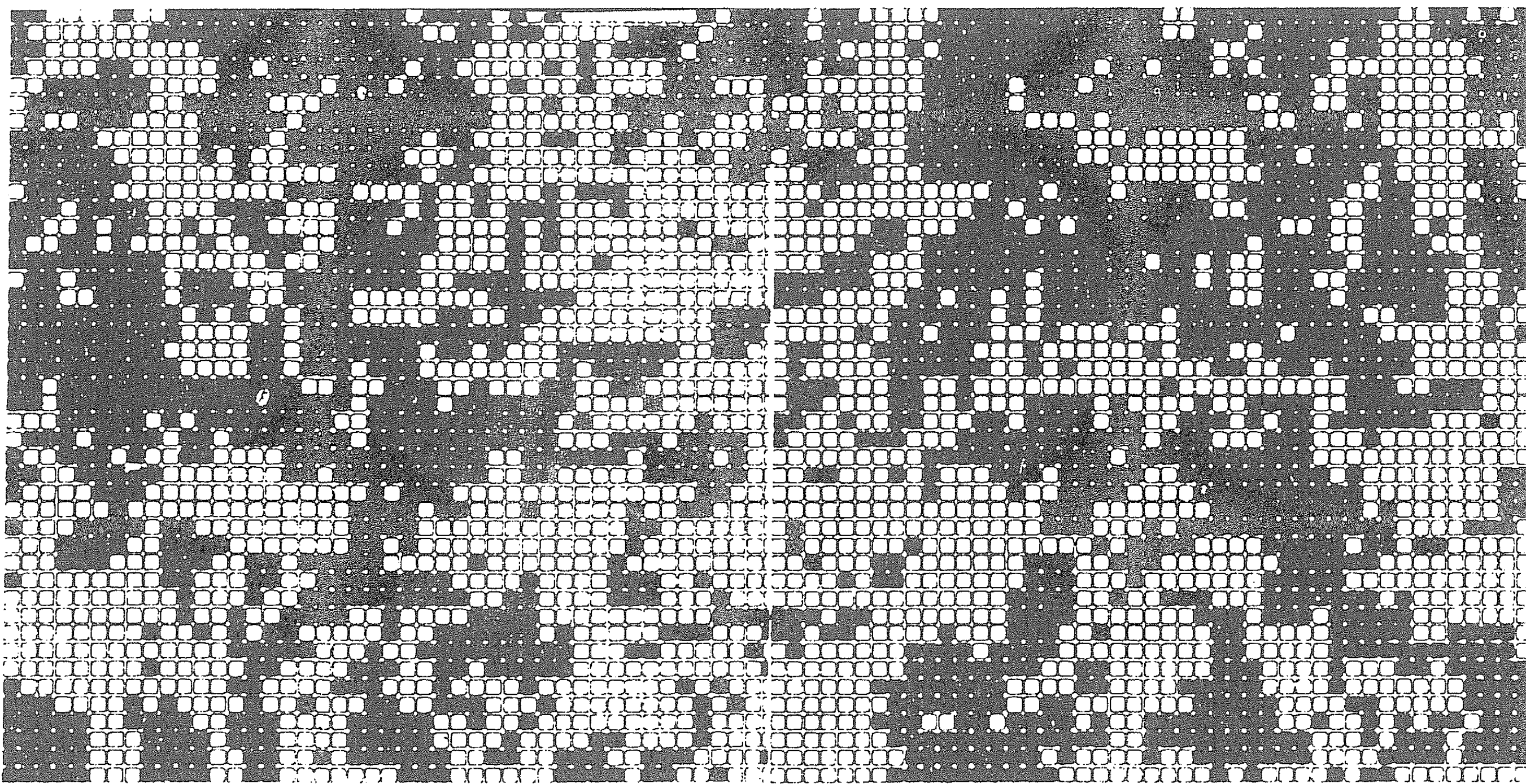
Kot zanimivost dodajmo, da so z Monte Carlo simulacijo $64 \times 64 \times 64$ velikega sistema izračunali, da je kritična temperatura Isingovega modela na kubični mreži (torej v treh dimenzijah) enaka $T_C = (4.5116 \pm 10^{-4}) J/k$ [7]. Medtem so verjetno z novejšimi in zmogljivejšimi računalniki ta rezultat še izboljšali.



Slika 9. Primer konfiguracije spinov na kvadratni mreži pri dveh različnih temperaturah pod kritično temperaturo. Velikost „belih” skupkov narašča, ko se bližamo kritični temperaturi. Leva slika: $T/T_C \approx 0.9$, desna slika: $T/T_C \approx 0.95$. (Iz: K. G. Wilson, *Scientific American*, 241, št. 2, 140 (avgust 1979).)



Slika 10. Primer konfiguracije spinov pri dveh različnih temperaturah nad kritično temperaturo. Sedaj velikost „belih” in „črnih” skupkov narašča, ko se bližamo kritični temperaturi. Leva slika: $T/T_C \approx 2$, desna slika: $T/T_C \approx 1.5$. (Iz: K. G. Wilson, *Scientific American*, 241, št. 2, 140 (avgust 1979).)



Slika 11. Primer konfiguracije spinov pri kritični temperaturi. Beli skupek v sredini slike se razteza od vrha do dna. (Iz: K. G. Wilson, *Scientific American*, 241, št. 2, 140 (avgust 1979).)

8. Sklepi

Isingov model je osnova za vse moderne teorije faznih prehodov in, bolj splošno, za vse modele kooperativnih pojavov. Tu smo se omejili na sklopitev med najbližjimi sosedi, model pa lahko razširimo tako, da vključimo še sklopitev z bolj oddaljenimi sosedi, zunanje magnetno polje ali pa celo nehomogeno polje ali nepravilno mrežo.

Isingov model na pravilni mreži v več kot eni dimenziji in v odsotnosti magnetnega polja ima fazni prehod pri končni temperaturi. Fazni prehod je zvezen in je vrste *red-nered*, nizkotemperaturna faza je (vsaj delno) urejena, visokotemperaturna pa neurejena. Vedno, ne samo za Isingov model, pa velja, da je fazni prehod *zadružni (kooperativni) pojav* in nastopi le v termodinamski limiti, to je v limiti $N \rightarrow \infty$. Spini so med seboj *korelirani* in tvorijo *skupke*. Skupki so različnih velikosti, njihova velikost je temperaturno odvisna. *Korelacijska dolžina*, to je povprečna velikost največjega skupka, divergira pri kritični temperaturi.

LITERATURA

- [1] W. Lenz, *Phys. Zeitschrift* **21**, 613 (1920).
- [2] E. Ising, *Zeitschrift für Physik* **31**, 253 (1925).
- [3] S. Kobe, *Phys. Bl.* **51**, 426 (1995); S. Kobe, *J. Stat. Phys.*, v tisku (1997).
- [4] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
- [5] *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, Ed. by K. Binder, Springer (Berlin, 1986).
- [6] Simulacijo Isingovega modela z 8×8 spini in še mnogo drugih zanimivih fizikalnih demonstracij najdemo na internetu na naslovu <http://www.tp.umu.se/TIPTOP/vlab/>.
- [7] J. Adler, *J. Phys. A* **16**, 3585 (1983).

Ob spremembah, ki se bodo dotaknile tudi poučevanja matematike v naši osnovni in srednji šoli, utegne bralce Obzornika zanimati pogled z univerze na poučevanje geometrije iz članka *Poučevanje geometrije pred univerzo. Veliko vprašanj, nekaj odgovorov*. Članek je s privoljenjem avtorja priredila Milena Strnad.

GEOMETRY AT PRIMARY AND SECONDARY SCHOOL

As the changes in the school system will touch also the teaching of mathematics at our primary and secondary school the readers of Obzornik may be interested in a view from the university on the teaching of geometry as presented in the article *Teaching of geometry before university. Many questions, some answers*. The article was edited by Milena Strnad with the kind permission of the author.

1. *Kaj pomeni pojem geometrija?* Omejimo se od definicije, na primer: „Geometrija je znanost o prostoru” in razmislimo raje o bolj obrobni zadevah, na primer: Kaj kaže vključiti v to, kar imenujemo geometrija? Ali v pouk sodijo geometrijsko risanje, geometrija na računalniku (od loga do videoigric s fraktali), histogrami, diagrami, realni vektorski prostor z eno, dvema tremi ali več razsežnostmi?

Odgovor. Geometrijo je smiselno razumeti v širšem smislu. Vsega, kar zajema pojem geometrija, pa ni treba poučevati na določeni stopnji. Če bi preveč širili področje, bi to prizadelo kvaliteto poučevanja. Predvsem v zadnjih letih srednje šole, v katerih zahtevamo več sistematičnosti in globine, je nujno izbirati. Najbrž je treba dati prednost osnovnim vidikom ravninske in prostorske geometrije na škodo bolj „moderni” snovi, kot so fraktali.

2. *Kakšni so smotri poučevanja geometrije?* Lahko si zamislimo skupino med seboj usklajenih ciljev, h katerim naj bi pripeljalo poučevanje geometrije, na primer: razvijanje prostorske intuicije, vpeljava natančne terminologije, vrsta geometrijskih dejstev (formule, izreki, ...), na katere je mogoče postaviti nadaljnjo rabo, utrjevanje sposobnosti za prehajanje iz enega jezika v drugega (grafičnega, algebraičnega, simboličnega), logično razmišljanje in sklepanje o določenih delih teorije, pomemben zgled za hipotetično-deduktivni prijem. Kolikšno težo naj pripišemo vsaki od teh postavk?

Odgovor. V širšem smislu je poučevanje geometrije zahtevno in težko prav zaradi velikega števila in raznoličnosti smotrov, ki si jih zastavljamo hkrati, in to na vseh stopnjah šolanja. Zato je odgovor odvisen od vrste

¹ Na mednarodnem kongresu julija 1996 o poučevanju matematike ICME 8 v Sevilji je o *Perspektivah za poučevanje geometrije v 21. stoletju* predaval tudi profesor z univerze v Pisi Vinicio Villani. Zahvaljujem se mu, ker mi je ljubeznivo dovolil, da povzamem glavne misli predavanja kar iz njegovega članka *L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta* iz revije *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 17 (1994) 440–457.

šole in starosti učencev. Kljub temu se nekateri od navedenih smotrov javljajo ves čas šolanja. Prostorsko predstavo naj bi začeli razvijati že na predšolski stopnji, jo dopolnjevali v osnovni šoli, vso srednjo šolo in je ne bi smeli zanemarjati niti na univerzi, čeprav se to pogosto dogaja. Po drugi strani naj ne bi odlašali s samostojnim razmišljanjem do srednje šole. Razmišljanja seveda ne smemo enačiti samo s formalnim dokazovanjem. Preprosto geometrijsko sklepanje je mogoče že v predšolski dobi ter med vso osnovno šolo. Odločilno vlogo ima v zadnjih letnikih srednje šole. Do takrat bi morali od naštetih smotrov prihraniti samo vzbujanje občudovanja do geometrije kot zgled hipotetično-deduktivnega prijema.

3. *Na katera znanja in sposobnosti, ki so jih učenci pridobili v prejšnjem šolanju, naj naslonimo poučevanje? Kako naj pridobljeno znanje izkoristimo?* Poenostavimo: na prehodu z ene stopnje na drugo naletimo pri učiteljih na različne prijeme, od stroge didaktične „kontinuitete“ do jasnega „preloma“ glede na zastavljene učne zamisli. Kako naj vzpostavimo ravnotežje?

Odgovor. Kjub vsesplošnemu zavzemanju za večjo povezavo med različnimi šolskimi stopnjami se zdi smiseln metodološki „rez“ med osnovno in srednjo šolo. Pri tem ne smemo razširjati nesmislov vrste: „Pozabite vse, kar ste se doslej naučili.“ Ukrep proti temu je pazljivo preverjanje znanja in sposobnosti učenca ob začetku vsake nove stopnje s testi in pogovori. Vendar vsebinskega vidika ne smemo poistiti z metodičnim. Če se želimo izogniti temu, da bi se vračanje k osvojenim pojmom zdelo kot dolgočasno ponavljanje bolj ali manj znanih dejstev, je treba učence prepričati o nujnosti pravega preskoka, to je „reza“ med šolskima stopnjama. Na prehodu z osnovne šole na srednjo geometrijska „dejstva“ ostajajo v bistvu ista (še vedno govorimo o lastnostih kotov, trikotnikov, krožnic itd.). Bistveno pa se spremeni prijem, kako obravnavamo ta „dejstva“. Geometrijske lastnosti, ki smo jih do prejšnjega leta lahko „opazovali“ na kakem liku, je treba zdaj „dokazati“.

Zakaj je potrebna tako korenita sprememba zornega kota? Kakšna so nova pravila igre? Če učitelj tega ne pojasni, so učenci zmedeni in ne vedo več, kaj se od njih pričakuje. Pogosto je težje razumeti, kaj in zakaj je treba nekaj natančno dokazati, kot dokaz sam.

4. *Kakšno vlogo imajo definicije?* Ali je pomembno, da se učenci naučijo na pamet definicije iz svojih učbenikov? Ali je pomembno, da so učenci sposobni z lastnimi besedami razumno definirati stvari, ki jih dobro poznajo, na primer, kaj je trikotnik, kaj štirikotnik, kaj kocka? Ali naj se učenci dosledno držijo zapisanih definicij? Ali naj presojujejo, če določena predstava sodi v okvir neke definicije, ki so jo postavili sami ali kdo drug, ali ne?

Odgovor. Definicija v bistvu natančno določi, o čem govorimo. Torej je treba „učiti“ definirati. Vendar je nujno, ne glede na vidik didaktične dejavnosti, napredovati postopoma in z dobršno mero zdravega razuma. Povsem

nekoristno je, če prisilimo otroka, da se nauči na pamet in nato „oddrdra” definicijo, če sam še ni dovolj zrel in sposoben, da bi jo povedal z lastnimi besedami in dosledno določil, ali ji kak pojem ustreza ali ne. V geometriji številne definicije ostajajo dolgo samoumevne, pogosta raba jih uzakoni, še zlasti izraze z močno intuitivno sestavino, kot na primer obravnava trikotnika, štirikotnika, kocke ter pojem dolžine, ploščine, prostornine, kota, smeri.

Nasprotno se zdi nepošteno obravnavati kot definicije nekatere navidezne definicije temeljnih pojmov, na primer premice, točke, ravnine, smeri, ki jih na žalost celo krepko tiskane navajajo številni osnovnošolski in srednješolski učbeniki.

5. *Kakšno vlogo imajo domneve, sklepanja, dokazi?* V matematiki in posebno v geometriji po mnenju večine „dokazujemo izreke”. Vendar so tudi za poklicne matematike dokazi samo zadnji korak v dolgem „odkrivanju skritih resnic”, ki se začne z opazovanjem, razčlenjevanjem posebnih primerov, z oblikovanjem domnev in nato vodi po vijugastih poteh do sklepa. Od katere starosti dalje so učenci sposobni oblikovati domneve, predlagati sklepe, razumeti dokaze drugih ali pa se sami dokopati do njih? Kakšno vzgojno vrednost ima vsak od teh korakov?

Še en vidik je vreden posebnega premisleka. Splošno je znano, da učenci veliko prej pozabijo dokaze kot dejstva. Tako, na primer, se po dolгих letih študenti ali bivši študenti spomnijo Pitagorovega izreka, skoraj nihče pa se ne spominja niti enega dokaza. Če upoštevamo vse to, se takoj vprašamo, ali je smiselno v zadnjih razredih srednje šole posvetiti pretežni del časa raziskovanju in dokazovanju izrekov? Ali je smiselno izhajati iz dokazovanj, takšnih, kot so zapisana v učbenikih?

Odgovor. Intuicija, domneva, dokazovanje, raziskovanje, risba so pomembne sestavine, ki jih je treba gojiti od začetka osnovne in srednje šole. Že predšolski otroci se po izkušnjah v igri zavedajo pomena trikotniške neenakosti. (Po Vergnaudu gre za „izrek, ki se udejanja”: premočrtne poti so tiste, ki zmanjšujejo razdaljo med dvema določenima točkama.) Osnovnošolski otroci so sposobni zaznati, če jih pravilno vodimo, veljavnost izreka o vsoti zunanjih kotov večkotnika. Kdor prehodi sklenjeno večkotniško pot, se na koncu znajde v začetni točki, potem ko je „obšel” ves krog, in tega sestavlja vsota vseh delnih „zasukov” v ogliščih.

V osnovni šoli lahko pozorno opazovanje sončnih senc različno dolgih palic ob istem trenutku pripelje do bistva Talesovega izreka. Če je ena palica dvakrat višja od druge, bo tudi senca prve palice dvakrat daljša od sence druge palice.

Pri tem seveda ne gre za dokazovanje v pravem pomenu besede. Vendar je vrednost teh izkušenj in opazovanj neizpodbitna, saj so osnova za nadaljnje razumsko urejanje pridobljenega znanja. Naloga srednje šole je, da vzbudi razumevanje in zanimanje za ta kvalitativni skok, ko učenec preide od razmišljanja, ki je vezano na čutne zaznave, k formalnemu dokazu v okviru določene teorije.

Res je, da dokaze pozabimo prej kot dejstva, vendar to še ne pomeni, da je nepotrebno „učiti dokazovati“. Pomembna je zavest, da mora vsaka izpeljava sloneti na pojasnjenih privzetkih, ne pa na tehničnih podrobnosti dokaza.

Ne glede na kulturno in ne samo tehnično vrednost hipotetično-deduktivnega prijema ni treba vsega dokazovati, ne v srednji šoli in ne na univerzi. Morda se bo kdo zgražal nad izjavo: popolnoma upravičeno izpustimo kak dokaz zato, ker je preveč zapleten ali ker se ponavlja in je dolgočasen ali ker manjka časa. Treba je le glasno povedati in vsem mora biti jasno, kaj bi bilo treba dokazati.

6. *Kakšne tehnične in didaktične pripomočke naj bi uporabljali, če bi bilo mogoče, in s kakšnim namenom?* Največ uporabljamo v geometriji ravnilo in šestilo, modele geometrijskih likov, različne vrste programske opreme (logo, cabri, geometre, sketchpad, programi za risanje krivulj in za aksonometrično ali perspektivno risanje likov v trirazsežnem prostoru). Ali lahko vsak od teh pripomočkov spodbudi razumevanje in sistematizacijo, h katerima teži pouk geometrije? Ali lahko to zavira?

Odgovor. Na vseh šolskih stopnjah so dobrodošli modeli iz lepenke ali plastike in risbe z ravnilom in šestilom, vendar z njimi ne smemo nadomestiti teoretičnih vidikov. V osnovni šoli bi bilo razlikovanje med geometrijskimi liki in njihovimi risbami ali modeli prezgodnje. V srednji šoli se začenjajo učenci zavedati, da geometrijske like dobimo po idealizaciji in abstrakciji, čeprav smo še vedno vezani na materialne vzorce in risbe. V srednji šoli se ločitev geometrije od fizične resničnosti dodatno poglobi. Še vedno je dobrodošla pomoč vidne zaznave, vendar je treba „videno“ lastnost dokazati na kaki sliki ali modelu, če hočemo, da se ta posebnost vključi v ustrezni teoretični okvir.

Predmet posebne obravnave je didaktična programska oprema (na primer cabri, geometre), ki dovoljuje, da lik na zaslonu deformiramo, ne da bi se spremenile nekatere njegove lastnosti. Pri tem ne gre jemati kot „resnično“ kake lastnosti (obstoj točke, ki je skupna vsem trem srednjicam trikotnika), če smo jo samo grafično preverili, in to na enem samem trikotniku. Danes je mogoče z omenjeno programsko opremo poljubno spreminjati obliko trikotnika. Ali smo lastnost dokazali, če se pokaže pri vseh trikotnikih na zaslonu? Odgovor je še vedno nikalen. Na drugi strani je verjetno ta lastnost „resnična“, se pravi, da jo je mogoče dokazati s teoretičnim sklepanjem, če se ji uspe obdržati na zaslonu kljub vsem mogočim deformacijam lika. Uporaba omenjene programske opreme je lahko zelo koristna za vzbujanje zanimanja in za odkrivanje zanimivih, tudi nevsakdanjih lastnosti pri obravnavi geometrijskih lastnosti in ne kot izvleček tradicionalnih dokazov.

7. *Kakšne vrste povezave poskušamo vzpostaviti pri pouku med „sintetičnimi“ in „analitičnimi“ vidiki geometrije?* Najbolj naravno je, če ves čas geometrijsko razumemo rezultate, ki jih dobimo z metodo koordinat.

Ob tem se lahko vprašamo: V kakšni obliki navadno postavimo geometrijski problem? Ali pri tem sami predpišemo način rešitve (na primer sintetično, trigonometrijsko, analitično ali vektorsko metodo)? Ali izhajamo iz določenega sistema koordinat in predpišemo izbiro spremenljivk ali prepustimo izbiro učencem?

Odgovor. Medtem ko je bila nekdanja analitična geometrija omejena na srednjo šolo, se zadnja leta javlja težnja k bolj zgodnji uporabi sistema koordinat v srednji in celo v osnovni šoli. Vendar algebrski formalizem ne sme uničiti geometrijske intuicije. Metoda koordinat lahko privede do pomembnih odgovorov samo, če znamo postavljati dobra vprašanja in imamo jasen vpogled v geometrijsko podlago. Zadnja vprašanja pod točko 7. so namenoma izzivalna. Pristen geometrijski problem bi bilo treba zastaviti v tipični geometrijski obliki in tako dopustiti učencem čim večjo izbiro načinov pri reševanju. Poleg tega je treba koordinatni sistem pri analitičnem reševanju prilagoditi problemu in obratno.

8. *Kakšne vrste povezave poskušamo vzpostaviti med teorijo in vajami?* Na vseh stopnjah šole se sprašujemo o povezavi med „znanjem” in njegovo „uporabnostjo”, ali drugače rečeno, med poznavanjem teorije, ki jo sestavljajo aksiomi, definicije, izreki, pravila in razne formule, in sposobnostjo, da njene dele uporabimo pri reševanju nalog. Poglavitni namen nalog je, da se učenci privadijo na uporabo pridobljenega teoretičnega znanja, ali bolje, da поблиže spoznajo nekatere težave. Nekoliko poenostavljeno, ali je „teorija” pred prakso ali ji sledi? Mogoče ni sprejemljiv ne prvi ne drugi skrajni vidik.

Odgovor. Teorija in vaje so tako povezane in odvisne, da se ne da točno določiti, kje se začenja en in kje se končuje drug vidik. Z „vajami” mislimo predvsem na „probleme” ali – bolje – na „odprte problemske situacije”. Pri tem gre za neraziskano področje bolj kot za pričakovanje natančnega „odgovora”. Tako na primer se zdi problem razvrstitve štirikotnikov po simetrijskih značilnostih čudovita snov, če jo prepustim posamičnemu ali skupinskemu odkrivanju učencem sedmega razreda osnovne šole ali prvega letnika srednje šole. Izredno dolgočasna pa je, če jo frontalno razlaga učitelj z vsemi njenimi primeri in podprimeri.

Večje zanimanje za odprte problematične situacije ne zmanjšuje pomena ponavljajočih se vaj, s katerimi utrjujemo določeno znanje. Treba pa je paziti, da ne bi tehnična in formalna stran prevladala na škodo resničnega razumevanja.

9. *Ali je pomembno, da poučevanje sloni na določeni aksiomatiki? Na kakšni?* Vprašanje zadeva samo didaktični vidik. Na drugi del sta samo dva mogoča odgovora: Evklidova aksiomatika, nekoliko prirejena po Hilbertu, na katero se sklicuje velika večina italijanskih učiteljev, ali aksiomatika metričnega tipa, kot jo je zastavil Choquet.

Odgovor. Učitelj naj bi jasno zastavil okvir poučevanja. Če ni jasne slike o globalni strukturi geometrije, pridemo do začaranih krogov, nedoslednosti in napak. Še posebej morajo dobro poznati aksiomatične osnove srednješolski učitelji.

Najprej dva razloga za Hilbert-Evklidovo aksiomatiko.

1. Tesno je povezana z zgodovinskim razvojem geometrije, bogatijo jo večstoletne izkušnje s širokim izborom vaj.
2. V njej ni pogoj, da dobro poznamo realna števila. Neizmerljivost diagonale kvadrata s stranico je za učitelje zahteva po razširitvi področja racionalnih števil z iracionalnimi. Choquetova aksiomatika pa rabi realna števila od vsega začetka, ko vpelje funkcijo oddaljenosti.

Trije razlogi govorijo za Choquetovo aksiomatiko:

1. Oblikovanje aksiomov je manj razpršeno.
2. Nekatera osnovna geometrijska dejstva vpelje preprosteje. Pri Evklidu in Hilbertu dejstvo, da je vsota notranjih kotov iztegnjeni kot, sloni na izreku o zunanjem kotu, kar je težko razumljivo. Po Choquetu je mogoče to dokazati s prijemi, ki so veliko bližje intuiciji, prek kroženj ali sorazmerij.
3. Choquetova aksiomatika sistematično uporablja geometrijske transformacije. Te so obsežnejše in močnejše orodje kot so evklidska merila skladnosti ali podobnosti trikotnikov.

10. *Ali je nujno učence izrecno poučiti o izbrani aksiomatiki? Kdaj? Na začetku poučevanja geometrije? Postopoma, sproti, kot nanese priložnost? Na koncu šolanja, kot zaključni kritični povzetek?* Drugače od prejšnjih to vprašanje zadeva samo srednjo šolo. V osnovni šoli aksiomatično obravnavanje geometrije ni primerno. V srednji šoli je vprašanje upravičeno, čeprav odgovor ni lahek. V preteklosti in še danes se v Italiji in drugod zagovorniki in nasprotniki hudo prerekajo, tretji pa poskušajo posredovati med skrajnostma.

Odgovor. V srednji šoli je treba učence seznaniti z aksiomatsko strukturo. Vendar ni treba ne prve ne druge aksiomatike obdelati v celoti na začetku srednje šole. Takrat namreč učenci še nimajo izkušenj s hipotetično-deduktivnim prijemom in ne morejo oceniti smisla, obsega, pomena ter elegance in lepote aksiomatične teorije.

Med drugim je mogoče sistemizirati teorijo šele potem, ko doseže dokaj visoko razvojno stopnjo. Kar zadeva geometrijo, so grški matematiki znali dokazati veliko izrekov „evklidske“ geometrije že dobri dve stoletji pred Evklidom.

Najbolje je začeti z lokalno dedukcijo in postopoma navesti aksiome. Celovita sistematizacija in kritični pogled celote sodita na konec srednje šole.

11. *Kako ocenjujemo učenje?* Na prvi pogled je lahko zatrditi, da se morata preverjanje in ocenjevanje skladati s splošnimi cilji šole. Kako pa naj dosežemo to skladnost, še posebej v geometriji? Kakšne načine

ocenjevanja lahko uporabljamo poleg tradicionalnih pisnih testov in ustnega izpraševanja?

Odgovor. Način poučevanja naj vabi k razmišljanju in odprtosti. Mentalni procesi naj bodo pomembnejši od rezultatov in razumevanje pomembnejše od učenja pravil in formul na pamet. S tem so povezane težave pri ocenjevanju. Dobro poznamo pomanjkljivost in omejitve pisnih testov in ustnega izpraševanja. Tudi testi z več mogočimi odgovori, ki so v določenih okoliščinah učinkoviti, lahko ob nepremišljeni rabi povečajo zmedo. Ni optimalne rešitve, pri kateri bi bilo ocenjevanje povsem usklajeno s cilji šole. Kljub temu bi bilo treba upoštevati poleg omenjenih načinov preverjanja tudi druge dejavnosti učencev: prispevek nekaterih učencev med razpravami v razredu, kratke pisne prispevke o določenih temah (poročila o geometrijskih postopkih z računalnikom), seminarska poročila o določenih temah, ki jih je pouk obšel.

12. *Kaj bi kazalo dodati in kaj odvzeti pri pouku geometrije? Zakaj?* V programe geometrije na različnih šolah bi lahko vključili nekatere od predlogov iz točke 1, za katere so se večkrat zavzele bolj ali manj ugledne ustanove. Pri razmišljanju o seznamu, ki ga je treba razumeti kot izziv, kaže misliti na geometrijo v določenih usmeritvah in upoštevati, da utegne biti pomen izraza odvisen od zveze: topologija, projektivna geometrija, grafi, fraktali, vektorski prostori, neevklidske geometrije, geometrije v več kot treh razsežnostih. Seveda bi moral vsak resen predlog tudi predvideti, koliko časa bi potrebovali za novost. Potrebno bi bilo torej natančno določiti, kaj od stare vsebine bi spustili.

Odgovor. Na prvem mestu na vseh šolskih stopnjah je predlog, da bi posvetili posebno pozornost geometriji trirazsežnega prostora ter povezavam med njim in njegovimi ploskovnimi sestavami. Vsi drugi predlogi se zdijo manj pomembni. Pri tem kaže biti previden. To narekujejo izkušnje in zdrava pamet. Novost je smiselno vpeljati samo po treznem premisleku, če pričakujemo, da jo bomo lahko toliko poglobili, da bodo učenci sposobni dojeti ne povsem banalne odgovore na ne povsem banalna vprašanja.

Kje najti čas za zahtevnejše in boljše poučevanje trirazsežne geometrije ali za vključevanje možnih novih geometrijskih tem v šolski pouk? S krčenjem tehnično zamotanih, a kulturno nepomembnih vidikov: v srednji šoli naj bi korenito skrčili trigonometrijo. Z odpravo nepotrebnih podvajanj: na primer teorija o velikostih se podvaja s teorijo o realnih številih. Z večjo povezavo (včasih so govorili o „stapljanju“) med ravninsko in prostorsko geometrijo. S krčenjem drugih poglavij iz matematike v prid geometriji, na primer zamotanih aritmetičnih in algebrskih izrazov, ki bi lahko ugajali kakemu učitelju ali učencu, vendar nimajo v času računalnikov skoraj nobene učne in praktične vrednosti.

13. *Je primernejši poseben učbenik za geometrijo ali učbenik, v katerem je geometrija vključena v druge veje matematike?* Še pred dvajsetimi leti bi bil odgovor znan, saj so bili učbeniki geometrije strogo ločeni od učbenikov

aritmetike, algebre ali analize. Zadnje čase pa se pojavljajo učbeniki z vsemi temi vejami matematike. Kateri imajo prednost?

Odgovor. Načelno je boljši skupni učbenik za geometrijo in druge veje matematike. Ločeni učbeniki privedejo do ponavljanj, opuščanja, neusklajenosti. Tudi na univerzi je priporočljivo usklajevanje, če že ne združitev pouka geometrije, algebre in analize.

Prepost, a pomemben primer, ki govori za združevanje, je „številka premica“. Osnovni pojem sodi hkrati v geometrijo in v numerične strukture. Absurdno bi bilo odgovoriti se rabi števil v geometriji, prav tako absurdno bi bilo opustiti geometrijsko predstavo števil na premici (naj gre za cela števila, racionalna ali realna števila).

Toda ko preidemo od načelnih izjav k podrobnostim, združitve geometrije in drugih vej matematike ne moremo imeti vedno za uspešno. Krajši konec potegnejo navadno tiste „skupne“ obravnave, ki so posvečene geometriji.

NOVE KNJIGE

Gerald B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Sec. edition, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1995. 324 + 12 str.

Že v predgovoru zvemo, da je knjiga nastala iz zapiskov predavanj, ki jih je imel avtor za podiplomske študente. Čeprav je velik del knjige v načelu dostopen tudi našim študentom četrtega letnika, je ne bi mogel priporočiti kot pomožni učbenik na dodiplomskem študiju.

Knjiga obravnava osnove teorije parcialnih diferencialnih enačb. V uvodnem poglavju opiše nekaj pripomočkov iz teorije L^p prostorov, Fourierove transformacije in poda nekaj osnovnih dejstev iz teorije distribucij. Prvo poglavje je posvečeno teoriji parcialnih diferencialnih enačb prvega reda (Cauchyjev problem), v glavnem kvazilinearnih, drugo lokalni eksistenci rešitev linearnih parcialnih enačb poljubnega reda. V tretjem poglavju obravnava Laplaceovo enačbo in lastnosti harmoničnih funkcij. Izpelje eksistenčne izreke za Dirichletove in Neumannove probleme po metodi integralnih enačb za potencial enojnega in dvojnega sloja. V 4. in 5. poglavju izpelje običajne lastnosti paraboličnih in hiperboličnih parcialnih diferencialnih enačb. Do tu shaja avtor z razmeroma skromnimi matematičnimi sredstvi, kar pa ne velja za poglavja 6–8. V 6. poglavju izpelje lastnosti prostorov Soboljeva, ki jih uporabi za razvoj L^2 teorije eliptičnih parcialnih diferencialnih enačb v 7. poglavju. Razmeroma moderna snov je v zadnjem, osmem poglavju: tu vpelje pojem psevdodiferencialnih operatorjev, posplošitev pojma linearnih diferencialnih operatorjev in izpelje nekaj njihovih lastnosti.

Knjiga je vzorno organizirana, razlaga je jasna, dokazi večinoma podrobno izpeljani. Zato jo toplo priporočam vsakomur, ki bi se rad izobrazil v osnovah moderne teorije parcialnih diferencialnih enačb.

Anton Suhadolc

DEMŠAR, F., JEVTIČ, V., BAČIĆ, G. G., Slikanje z magnetno resonanco, založba Littera Picta, naklada 1000 izvodov, 1996, ISBN 961-6030-19-1, 150 str.

Knjiga Slikanje z magnetno resonanco prinaša pregled teorije in uporabe magnetne resonance (MR) v medicini in biologiji. Namenjena je predvsem tistim, ki se prvič srečujejo z magnetno resonanco. Večina pojavov, ki so pomembni za razumevanje metod MR in za pravilno interpretacijo rezultatov, je opisanih tako, da jih bo bralec s solidnim srednješolskim znanjem fizike in biologije razumel. Knjiga bo nedvomno najbolj pritegnila medicinske delavce, ki začenjajo uporabljati MR pri svojem delu. Delo je lahko primerno tudi kot učbenik za študente tistih smeri, kjer je pomembno poznavanje uporabe MR v diagnostiki, poznavanje tipičnih lastnosti naprav na MR in rokovanja z njimi, ni pa potrebno podrobno razumevanje fizikalnega ozadja MR.

Knjiga ima 9 poglavij. V prvem je predstavljen zgodovinski pregled odkritij na področju MR. Na koncu poglavja je dodan obširen seznam relevantne literature in seznam najpomembnejših revij, ki pokrivajo področje magnetne resonance. V drugem poglavju so opisane osnove MR. Predstavljene so osnovne pulzne metode in vloga Fourierove transformacije. Tretje poglavje obravnava osnove slikanja z MR. Vpeljan je pojem gradienta magnetnega polja in podan pregled glavnih metod slikanja z MR. V četrtem poglavju so vpeljeni relaksacijski časi, ki nastopajo pri pojavu magnetne resonance. Predstavljene so tipične vrednosti relaksacijskih časov za biološka tkiva in opisane glavne odvisnosti relaksacijskih časov od MR parametrov. Področje manipulacije s kontrasti pri MR slikanju je posebej obdelano v petem poglavju. Predstavljena so glavna kontrastna sredstva in posebnosti njihove uporabe.

Šesto poglavje obravnava klinično uporabo slikanja z MR. V sedmem poglavju je predstavljena MR in vivo spektroskopija in tipični primeri uporabe v medicini. Osmo poglavje obravnava varnost pri slikanju z MR. Opisane so glavne potencialne nevarnosti za okolico, ki jih lahko povzroči tipičen MR sistem, navedeni so osnovni varnostni ukrepi in mednarodno sprejete omejitve pri uporabi MR v medicini. V zadnjem, devetem poglavju so opisane osnovne tehnične karakteristike MR tomografov. Vsako poglavje se konča s kratkim, preglednim povzetkom najpomembnejših spoznanj. Bralec tako lažje prepozna in utrdi najpomembnejše elemente problematike. Posebej je treba omeniti dodatka na koncu knjige. V prvem je podan pregled glavnih pulznih zaporedij, ki jih uporabljajo pri slikanju z MR. Daje izvirni pregled, ki ga ne najdemo niti v tuji tovrstni literaturi. Drugi dodatek sestavlja slovarček izrazov in okrajšav s področja slikanja z MR. Glede na to, da je večina strokovnih izrazov s tega področja angleških, je slovarček koristno dopolnilo, ki bi ga veljalo uvesti kot pravilo pri izdajanju knjig, ki prvič prinašajo novosti v slovenski besedi.

Pričujoča knjiga bo zapolnila vrzel v slovenski strokovni literaturi in pripomogla, da ujamemo korak s svetom na področju uporabe magnetne resonance v medicini in biologiji.

Gorazd Planinšič

UPORABA PROGRAMA DERIVE V SREDNJI ŠOLI

MOJCA LOKAR, MATIJA LOKAR

Math. Subj. Class. (1991) 97B99, 68U30, 68Q40, 68N99, 68-04

V drugi polovici leta 1996 je potekal raziskovalni projekt o uporabi programa DERIVE pri pouku matematike v srednji šoli. Glavni namen projekta je bil pripraviti sklop gradiv, ki neposredno nakazujejo možnosti uporabe tega programa pri pouku matematike v srednji šoli. V članku je predstavljen tudi eden od prispevkov.

USING DERIVE IN SECONDARY SCHOOLS

In the second half of 1996 a research project on usage of DERIVE in teaching mathematics in secondary schools was going on. The main aim of the project was preparation of courseware, which directly show possibilities of this program at teaching mathematics. In the article an example of such courseware is also presented.

Programi za simbolno računanje prinašajo v pouk matematike vsaj toliko novosti in s tem odprti vprašanj, kot so jih pred leti prinesli kalkulatorji. Zaradi aktualnosti teh vprašanj, ki se tičejo pouka matematike, je nujno, da vsi učitelji matematike spoznajo tovrstne programe in si ustvarijo mnenje o njih. Tako bomo vsi skupaj lažje premišljevali in se pogovarjali o tem, kdaj, kako in v kakšni meri uporabljati te programe. Določen program najlažje spoznamo tako, da ga uporabljamo. Ker pa v slovenščini ni veliko gradiva, ki bi omogočalo takojšno uporabo teh programov, smo se na Gimnaziji Kranj in Oddelku za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani odločili pripraviti učne liste, ki bi bili neposredno uporabni pri pouku.

V sklopu programa Računalniško opismenjevanje je bil leta 1996 objavljen razpis za raziskovalne projekte, namenjene uporabi računalnika pri pouku. Med sprejetimi projekti je bil tudi skupni projekt Fakultete za matematiko in fiziko in Gimnazije Kranj z naslovom Uporaba programa za simbolno računanje DERIVE pri pouku matematike v srednji šoli. Žal so bili projekti dokončno odobreni šele jeseni, tako da smo imeli na voljo le čas od oktobra do decembra 1996. Kljub temu smo sodelavci projekta pripravili vrsto gradiv, namenjenih uporabi pri pouku matematike. Razdelili smo jih v več kategorij:

- vodeno delo dijaka za računalnikom – mišljeno je tisto gradivo, ki je namenjeno izvajanju v računalniški učilnici z vsem razredom (ali delom razreda);
- samostojno delo dijaka za računalnikom – gradivo, ki je namenjeno samostojnemu delu dijaka za računalnikom (v učilnici ali doma);
- profesorjeva demonstracija – profesor uporablja računalnik in elektronsko prosojnico oziroma kak drug način prikaza zaslonske slike računalnika;
- skupno raziskovanje profesorja in dijaka – med uro dijaki in profesor skupaj uporabljajo računalnik in program DERIVE pri spoznavanju nove snovi;

- pripomoček pri ponavljanju – med uro dijaki sami ali skupaj s profesorjem uporabljajo računalnik in elektronsko prosojnico ali pa le računalnik pri ponavljanju;
- pripomoček za učitelja – gradivo, namenjeno učitelju pri njegovi pripravi, sestavljanju testov itd.

S tem smo želeli odpraviti pomanjkanje metodičnih in drugih navodil za ta program v slovenskem jeziku. Nekaj naslovov tem: *Velika števila, FaktORIZACIJA velikih števil, Kosinusni izrek, Transformacije grafa funkcije, Točke, premice in ravnine, Skalarni produkt, Premik kvadratne funkcije, Računanje ničle funkcije z bisekcijo, Kritične točke in racionalne funkcije, Aproksimacija določenega integrala z desnimi pravokotniki, Eulerjeva konstanta, Riemannova vsota in numerično računanje določenega integrala, Zveznost funkcije, Limita $\frac{\sin x}{x}$, ko gre x proti 0, Navadno in obrestno obrestovanje, Obročna vplačila in izplačila.*

Večina gradiva ne zahteva posebnega poznavanja programa DERIVE. Za uspešno uporabo je večinoma dovolj, da poznamo način vnašanja ukazov v DERIVE. To je znanje, za katero potrebujemo le nekaj dobre volje in priročnik, ali še bolje kolega, ki program obvlada, in nekaj minut časa. Gradivo bodo lahko uspešno uporabljali tudi tisti, ki se bodo s programom DERIVE prvič srečali.

In kdo smo bili v projektni skupini:

- Tanja Dermota, Gimnazija Kranj;
- mag. Bogdan Kejžar, Gimnazija Kranj;
- dr. Damjan Kobal, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani;
- mag. Matija Lokar, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani;
- Mojca Lokar, Gimnazija Kranj;
- Matjaž Pertot, Gimnazija Kranj.

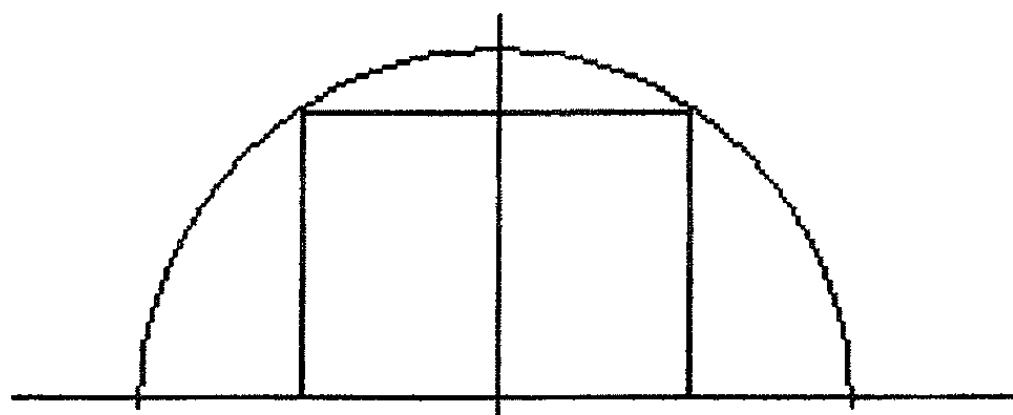
Upamo, da bomo projekt lahko nadaljevali in pripravili še več tovrstnega gradiva ter ga dopolnili s pomembno manjkajočo točko – ocenitvijo vpliva takšnega dela na raven in kvaliteto osvojenega znanja dijakov pri matematiki.

Za občutek, kakšno to gradivo je, si oglejmo prispevek *DERIVE in uporaba odvoda pri določanju ekstrema funkcij*.

V četrtem letniku gimnazijskega programa se srečamo z vrsto uporabnih nalog, s katerimi ilustriramo uporabo odvoda. Pripravili smo gradivo, namenjeno učitelju, ki s pomočjo programa DERIVE in prikaza z elektronsko prosojnico razloži potek reševanja ene takih nalog.

Rešujemo naslednjo nalogo: V polkrog z radijem 2 včrtamo pravokotnik. Kakšna je največja ploščina, ki jo ima ta pravokotnik, in kakšne so njegove dimenzije?

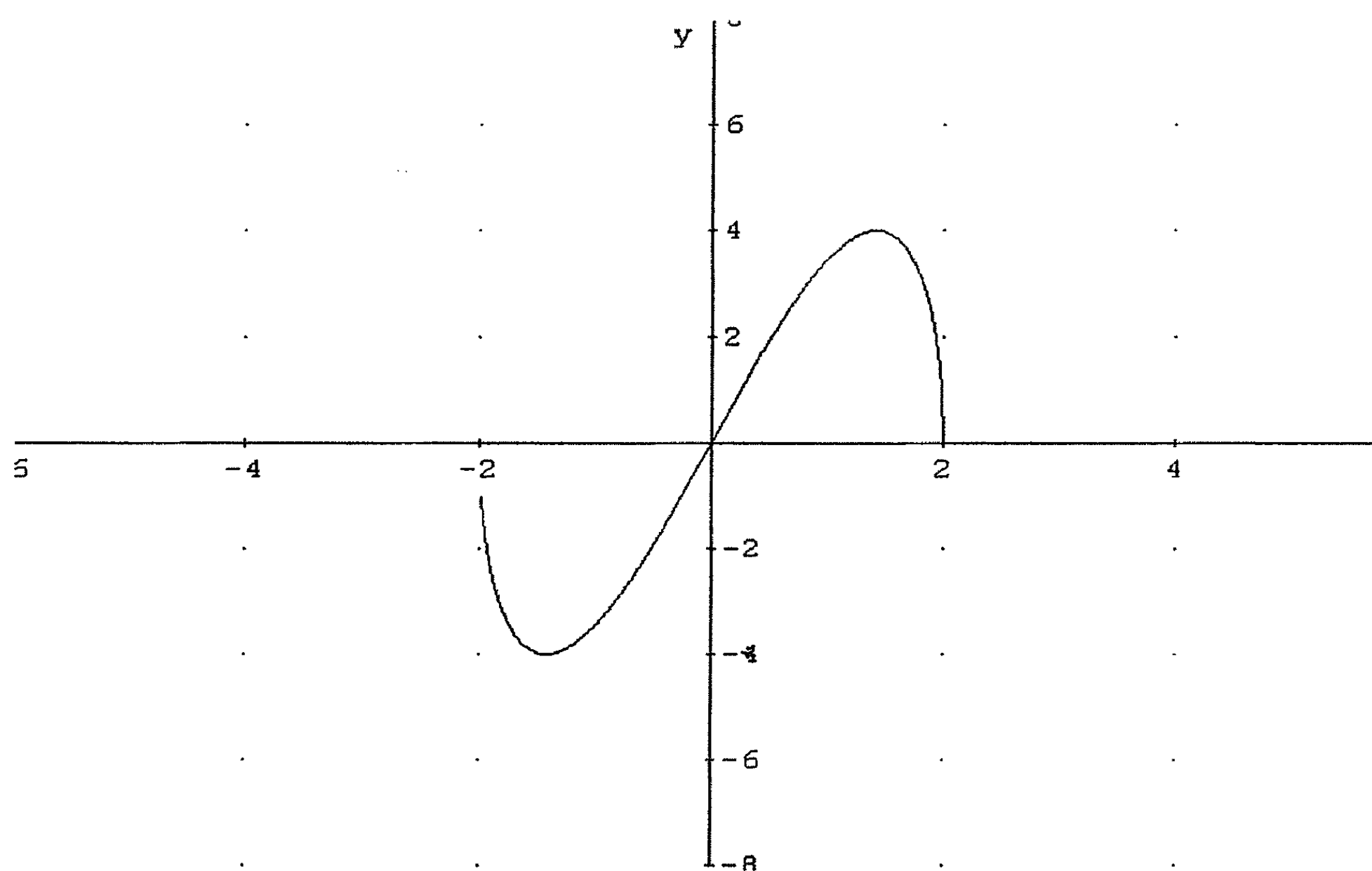
Narišemo skico:



Skupaj ugotovimo, da bomo najlaže opisali pravokotnik, če dolžino označimo z $2x$ in višino z $y = +\sqrt{4-x^2}$. Spremenljivka x lahko zavzame poljubno vrednost med 0 in 2.

Naloga je torej poiskati absolutni maksimum funkcije $P(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$ na intervalu $[0, 2]$. Najprej narišimo funkcijo:

Author: `2x sqrt(4-x^2)`
 Plot/Overlay/Plot

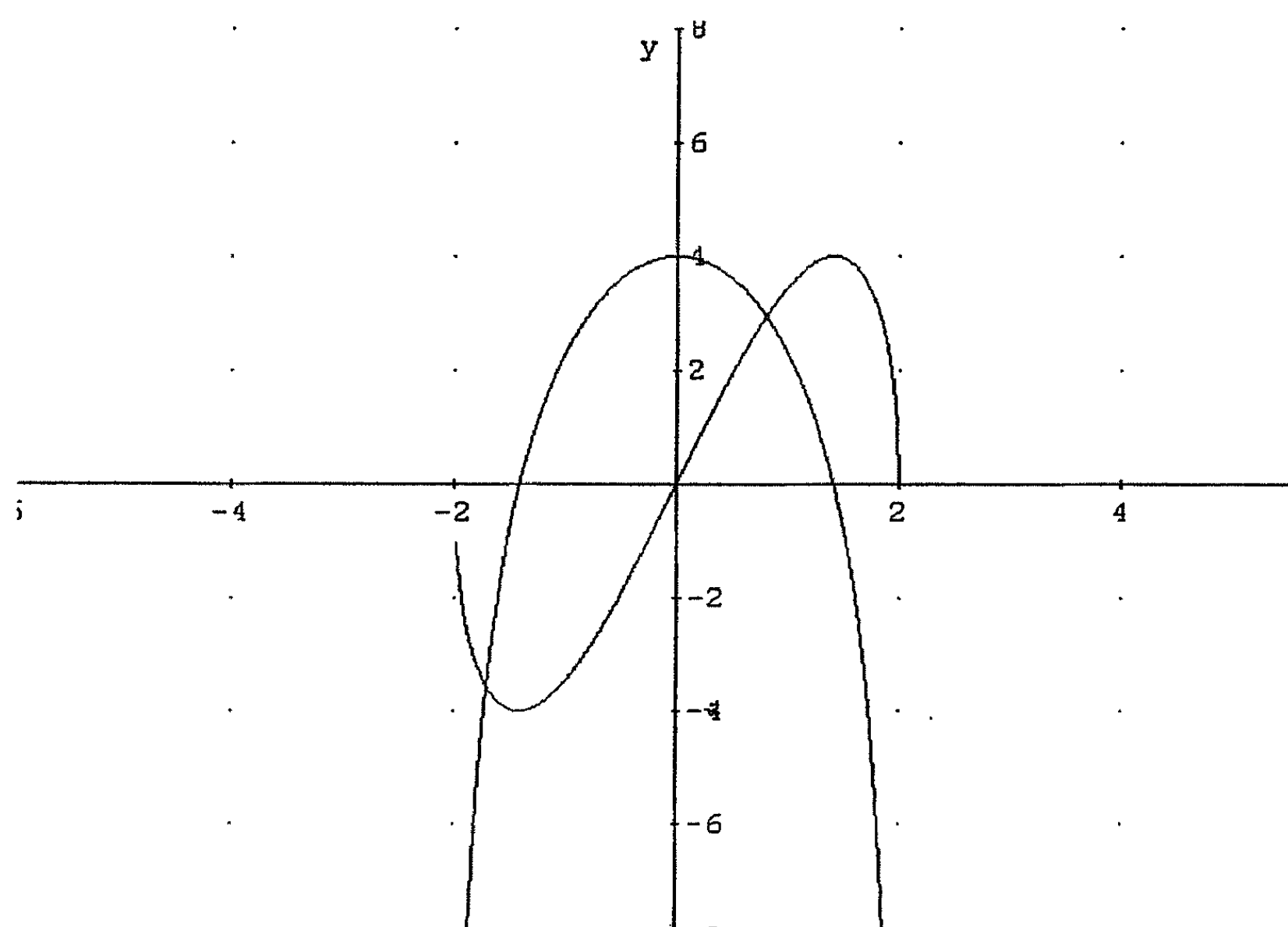


Vidimo, da ima funkcija en maksimum približno na sredini intervala. Izračunajmo še odvod $\frac{dP}{dx}$

Algebra
 Calculus/Differentiate : #1
 Simplify : #2

in ga narišimo

Plot
 Plot



Opozorimo, da je rešitev tam, kjer ima odvod ničlo. S pomočjo grafičnega križca lahko približno odčitamo rešitev.

S programom DERIVE rešimo enačbo $\frac{dP}{dx}=0$. S tem dobimo kritične točke.

Algebra
Solve : #3

DERIVE kot rešitvi izpiše $\sqrt{2}$ and $-\sqrt{2}$.

```

1:  2 x √(4 - x2)
2:  d
   — (2 x √(4 - x2))
   dx
3:  2 √(4 - x2) -  $\frac{2 x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ 
4:  x = - √2
5:  x = √2

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
          Options Plot Quit Remove Simplify Transfer move Window approx
Compute time: 1.0 seconds
Solve(3)                                     Free:100%                               Derive Algebra

```

Ugotovimo, da je v območju, ki nas zanima, le $\sqrt{2}$, ki je torej potencialna rešitev problema. Sedaj izračunamo vrednost funkcije P v kritičnih točkah in na robovih intervala:

$$x = 0;$$

$$P(0) = 2 \cdot 0 \cdot \sqrt{4 - 0^2} = 0 \text{ (minimum)}$$

$$x = \sqrt{2};$$

$$P(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = 4 \text{ (maksimum)}$$

$$x = 2;$$

$$p(2) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{4 - 2^2} = 0 \text{ (minimum)}$$

Manage/Substitute: #1 / 0
Simplify : #6
Manage/Substitute: #1 / SQRT(2)
Simplify : #8
Manage/Substitute: #1 / 2
Simplify : #10

Tako smo analitično in grafično ugotovili, da je maksimalna vrednost ploščine pravokotnika 4 in da ima pravokotnik dolžino $2x = 2\sqrt{2}$ in višino $\sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$.

VABILO

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi vse matematike, fizike in astronome na

STROKOVNO SREČANJE IN 49. OBČNI ZBOR DRUŠTVA

ki bo 10. in 11. oktobra 1997

v Osnovni šoli Podčetrtek in v hotelu Atomske toplice.

Program:

petek, 10. oktobra 1997, dopoldne

9.00 Prijave udeležencev

9.30 Otvoritev, priprave za občni zbor

10.00	V. Batagelj: Omrežni (elektron- ski) učbenik	T. Ramšak: Fizika kvantnih pik in kvantnih žic	M. Perman: Zgodovina verjetno- sti
11.00	M. Trobec: Mednarodna pri- merjava znanja ma- tematike in naravo- slovja naših osnov- nošolcev	A. Čadež, A. Gomboc: Črne luknje danes	J. Žerovnik: Problem dodeljeva- nja frekvenc
12.00	A. Suhadolc: Jurij Vega	R. Podgornik: Mehka kondenzi- rana snov	M. Razpet: Nožiščne krivulje parabole

13.00–15.00 Kosilo

petek, 10. oktobra 1997, popoldne

15.00 T. Zwitter: Revolucionarne spremembe kvalitete astronomskih opa-
zovanj po uvedbi polprevodniških detektorjev

16.00 J. Brilej: Podčetrtek in okolica

17.00	M. Brumen: Predstavitev dela kurikularne komisi- je za fiziko	G. Tomšič: Predstavitev dela kurikularne komisi- je za matematiko	Sestanek komisije za tekmovanja
-------	--	--	------------------------------------

19.00 Večerja in družabni večer

sobota, 11. oktobra 1997, dopoldne

9.00–10.00 Razprava, odgovori na pisna vprašanja

10.00–12.00 Občni zbor

12.00–14.00 Kosilo

sobota, 11. oktobra 1997, popoldne

14.00 Izlet s turističnim vlakom v Olimje. Na izletu boste profesorji matematike in fizike pod slapom z gibajočimi se lutkami in vodičem g. Jožetom Brilejem dobili nove ideje za pestrejši pouk.

PRIJAVA

Prijavljam se na 49. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, ki bo v Podčetrtku na Osnovni šoli Podčetrtek in v hotelu Atomske toplice. Ker smo vezani na število udeležencev, Vas prosimo, da čim prej pošljete izpolnjeno prijavnico.

Ime in priimek (tiskano): _____

Točen naslov: _____

Rezervirajte mi eno- ali dvoposteljno sobo za ____ osebo(-i).

Pridem dne ____ . oktobra 1997, prvi obrok: zajtrk, kosilo, večerja
(ustrezno podčrtajte)

Odidem dne ____ . oktobra 1997, zadnji obrok: zajtrk, kosilo, večerja
(ustrezno podčrtajte)

Prenočišče z zajtrkom v dvoposteljni sobi stane 6 700 SIT na osebo. Polni penzion (s kosilom v petek ali v soboto) v dvoposteljni sobi stane 7 900 SIT na osebo.

Podpis: _____

Prijavljam se za izlet v okolico Podčetrтка s turističnim vlakom za eno (dve) osebi (cena z vstopninami 800 SIT na osebo)

DA

NE

Podpis: _____

Kopijo zgornje prijave pošljite najkasneje do 3. oktobra 1997 na naslov:
Janez Krušič, DMFA Slovenije, Jadranska c. 19, 1 111 Ljubljana

Predsednik DMFA Slovenije:
Andrej Čadež