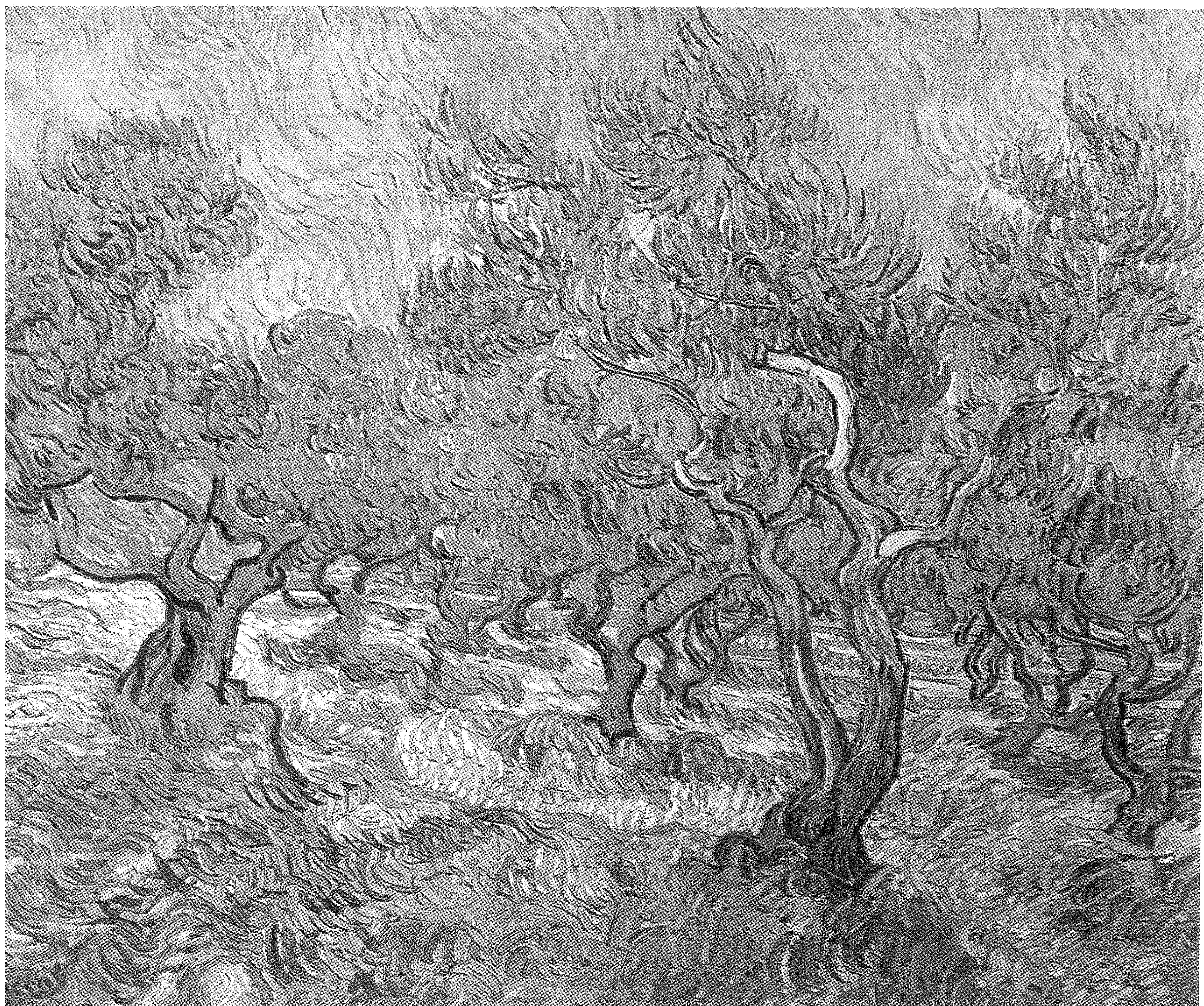


1997

Letnik 44

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1997

letnik 44, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.500 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 5.000 SIT, za študente 1.250 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 480 SIT, stare številke 320 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1997 DMFA Slovenije – 1322

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.—Page

Osnovno o seznamskih barvanjih — Introduction to list colourings

(Martin Juvan) 65–73

Bose-Einsteinova kondenzacija — Bose-Einstein condensation

(Janez Strnad) 74–84

Ob stoletnici slovenskih učbenikov matematike za gimnazije — The centennial

of the Slovene mathematical textbooks for high schools (Peter Legiša) 85–III

Nove knjige — New books (Boris Lavrič) III–IV

Vesti — News

Obvestilo (Ivana Mulec in Andrej Čadež) IV

Na ovitku: Vincent van Gogh, *Oljčni nasad*, 1889.

OSNOVNO O SEZNAMSKIH BARVANJIH

MARTIN JUVAN

Math. Subj. Class. (1991) 05C15

V članku so predstavljena seznamska barvanja grafov, posplošitev običajnih barvanj, pri kateri moramo vsak element grafa obarvati z barvo iz njegovega seznama dopustnih barv. Dokazani sta posplošitvi Brooksovega in Königovega izreka na seznamska barvanja, obravnavana pa so tudi seznamska barvanja ravninskih grafov.

INTRODUCTION TO LIST COLOURINGS

In the article list colourings of graphs are considered. List colourings form a natural generalization of ordinary colourings in which each element of a graph must be coloured by a colour from its own list of admissible colours. Generalizations of Brooks' and König's theorems to list colourings are proved. List colourings of planar graphs are also discussed.

1. Uvod

Barvanja grafov in sorodni problemi so ena od klasičnih tem teorije grafov. V prispevku bomo spoznali *seznamska barvanja*, posplošitev običajnih barvanj, ki je bila v zadnjih letih deležna precejšnje pozornosti. Seznamska barvanja so neodvisno v drugi polovici sedemdesetih let vpeljali Vizing [12] ter Erdős, Rubin in Taylor [4]. Zanimanje zanje se je povečalo v devetdesetih letih, ko je bilo razrešenih nekaj osnovnih vprašanj, povezanih z njimi [1,13,9,5]. Kljub temu pa pregledna knjiga [6] še vedno omenja precej nerešenih problemov, ki se navezujejo na seznamska barvanja.

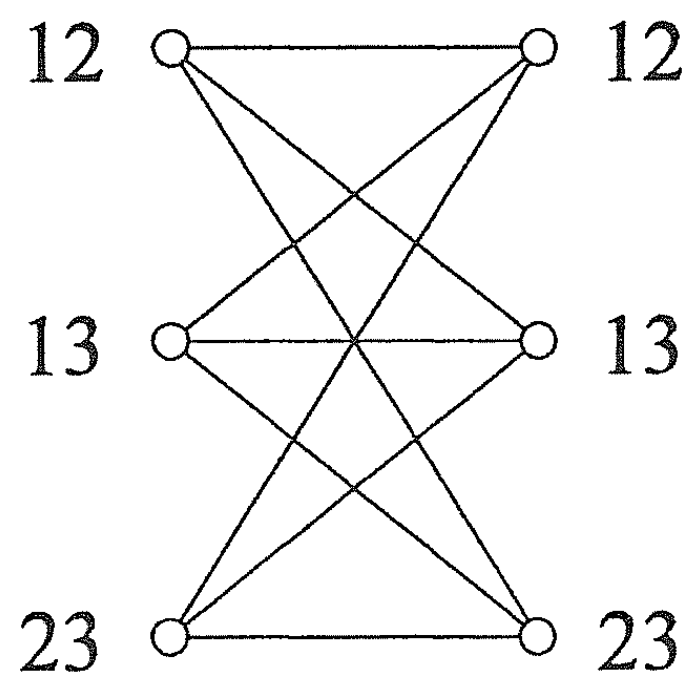
2. Barvanja točk

Vzemimo (enostaven) graf G . Z $V(G)$ bomo označili množico točk, z $E(G)$ pa množico povezav grafa G . Naj bo $L: V(G) \rightarrow P(\mathbb{N})$ preslikava, ki vsaki točki $v \in V(G)$ priredi množico naravnih števil $L(v)$. Preslikavi L pravimo *izbira barv* za točke grafa G , množica $L(v)$ pa je *seznam dopustnih barv* za točko v . Preslikava $\lambda: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ je L -*barvanje* (točk) grafa G , če izpolnjuje naslednji zahtevi:

- (i) $\lambda(v) \in L(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$,
- (ii) sosednje točke so obarvane z različnimi barvami, $u \sim v \Rightarrow \lambda(u) \neq \lambda(v)$.

Običajna barvanja dobimo, kadar je izbira barv L konstantna funkcija, torej če imajo vse točke enake sezname dopustnih barv. Graf G je (po točkah) seznamsko k -obarvljiv, če dopušča L -barvanje za vsako izbiro barv L , za katero za vsako točko $v \in V(G)$ velja $|L(v)| \geq k$. Najmanjše število k , za katero je graf G seznamsko k -obarvljiv, imenujemo *seznamsko kromatično število* grafa G in ga označimo s $\chi_\ell(G)$.

Naj $\deg_G(v)$ označuje stopnjo točke v v grafu G in $\Delta(G)$ maksimalno stopnjo točk v grafu G . Ker ima poljubna točka grafa G kvečjemu $\Delta(G)$ sosedov, je $\chi_\ell(G) \leq \Delta(G) + 1$. Neposredno iz definicij tudi sledi, da



Slika 1. Graf $K_{3,3}$ ni seznamsko 2-obarvljiv.

seznamsko kromatično število $\chi_\ell(G)$ ni manjše od običajnega kromatičnega števila $\chi(G)$. Lahko pa je strogo večje. Vzemimo polni dvodelni graf $K_{3,3}$ in njegovim točkam izberimo dopustne barve tako, kot to prikazuje slika 1. Ni se težko prepričati, da pri taki izbiri dopustnih barv grafa $K_{3,3}$ ni mogoče obarvati. Zato je $\chi_\ell(K_{3,3}) > 2 = \chi(K_{3,3})$. Konstrukcijo izbire barv s slike 1 lahko brez težav posplošimo.

Trditev 1. Naj bo k naravno število in $n = \binom{2k-1}{k}$. Potem je

$$\chi_\ell(K_{n,n}) > k.$$

Dokaz. Pokazati moramo, da obstaja taka izbira barv L za točke grafa $K_{n,n}$, za katero je $|L(v)| \geq k$ za vsako točko $v \in V(K_{n,n})$, hkrati pa graf $K_{n,n}$ ni L -obarvljiv. Naj bo $V(K_{n,n}) = V_1 \cup V_2$ dvodelno razbitje grafa $K_{n,n}$, $\mathcal{L}$ pa družina vseh podmnožic moči k množice $\{1, \dots, 2k-1\}$. Za izbiro barv L izberimo poljubno preslikavo $L: V(K_{n,n}) \rightarrow \mathcal{L}$, za katero sta zožitvi $L|_{V_1}$ in $L|_{V_2}$ bijekciji. Ker je $|\mathcal{L}| = n$, to seveda lahko storimo.

Recimo, da obstaja L -barvanje λ grafa G . Označimo z $\Lambda = \{\lambda(v) \mid v \in V_1\}$ množico barv, ki jih λ uporabi na V_1 . Trdimo, da je $|\Lambda| \geq k$. Če bi namreč veljalo $|\Lambda| < k$, potem bi obstajala množica $A_1 \in \mathcal{L}$, ki bi bila disjunktna z Λ . Toda tedaj točka $u_1 \in V_1$, za katero je $L(u_1) = A_1$, ni pravilno obarvana. Torej je $|\Lambda| \geq k$. Zato obstaja množica $A_2 \in \mathcal{L}$, za katero velja $A_2 \subseteq \Lambda$. Naj bo $u_2 \in V_2$ točka, za katero je $L(u_2) = A_2$. Torej $\lambda(u_2) \in \Lambda$. Ker pa je vsaka točka iz V_1 sosednja z vsako točko iz V_2 , je to v nasprotju z zahtevo (ii) v definiciji L -barvanja. Barvanje λ torej ne obstaja. ■

Trditev 1 tudi dokazuje, da sta lahko razlika in kvocient med seznamskim in običajnim kromatičnim številom poljubno velika.

Preden nadaljujemo, se spomnimo, da povezavi $e, f \in E(G)$ ležita v istem bloku grafa G natanko tedaj, ko v grafu G obstaja cikel, ki vsebuje obe povezavi e in f . Točke, ki pripadajo več blokom grafa, imenujemo *prerezne točke*. Če je graf G povezan, potem je dvodelni graf, ki ima za točke prerezne točke in bloke grafa G , pri čemer je prerezna točka v sosednja z blokom B natanko tedaj, ko $v \in V(B)$, drevo. Blokom, ki ustrezajo listom

tega drevesa, pravimo *končni bloki*. Graf je *2-povezan*, če ima vsaj 3 točke in je sestavljen iz enega samega bloka.

Eden osnovnih izrekov o barvanju točk grafa je Brooksov izrek [3]. Ta pravi, da je mogoče skoraj vse grafe po točkah obarvati že z $\Delta(G)$ barvami.

Izrek 2 (Brooks). *Naj bo G povezan graf, ki ni izomorfen niti polnemu grafu niti ciklu lihe dolžine. Potem je*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Dokaza izreka ne bomo navedli, radovedni bralec ga lahko prebere na primer v [10, str. 307–308]. Pokazali pa bomo, kako iz Brooksovega izreka sledi njegova posplošitev na seznamska barvanja. Pri tem bomo potrebovali naslednjo pomožno trditev:

Lema 3. *Naj bo G povezan graf z n točkami in L taka izbira barv za G , da velja $|L(v)| \geq \deg_G(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$.*

- (i) *Če obstaja točka $u \in V(G)$, za katero je $|L(u)| > \deg_G(u)$, potem je graf G L -obarvljiv.*
- (ii) *Če je graf G sestavljen iz enega samega bloka in če obstajata točki $u', u'' \in V(G)$, za kateri velja $L(u') \neq L(u'')$, potem je graf G L -obarvljiv.*

Dokaz. (i) Ker je graf G povezan, obstaja taka razvrstitev $v_1, \dots, v_n$ točk grafa G , da je $v_n = u$ in ima vsaka točka v_i ($1 \leq i < n$) vsaj enega soseda med točkami $v_{i+1}, \dots, v_n$. Točke obarvamo po vrsti, kot to določa izbrana razvrstitev. Ker ima vsaka od točk $v_1, \dots, v_{n-1}$ v koraku, ko je na vrsti za barvanje, vsaj še enega neobarvanega soseda, na razpolago pa imamo vsaj toliko barv, kot je sosedov, z njimi nimamo težav. Obarvamo pa lahko tudi zadnjo točko v_n , saj imamo za njeno barvanje po predpostavki na voljo več barv, kot ima točka sosedov, torej je na koncu prosta vsaj še ena barva.

(ii) Tudi dokaz te točke sloni na podobni ideji kot dokaz prejšnje. Predpostavimo lahko, da sta točki u' in u'' sosednji in da velja $L(u') \setminus L(u'') \neq \emptyset$. Ker je graf G po predpostavki sestavljen iz enega samega bloka, je tudi graf $G - u'$ povezan. Torej obstaja taka razvrstitev $v_1, \dots, v_n$ točk grafa G , da je $v_1 = u'$, $v_n = u''$ in ima vsaka točka v_i ($1 \leq i < n$) vsaj enega soseda med točkami $v_{i+1}, \dots, v_n$. Tudi tokrat točke obarvamo po vrsti, kot to določa izbrana razvrstitev. Najprej obarvamo točko v_1 z barvo iz $L(u') \setminus L(u'')$, nato pa barvanje razširimo na točke $v_2, \dots, v_{n-1}$. Nazadnje obarvamo še točko v_n . To lahko storimo, čeprav ima točka v_n obarvane že vse sosedne, saj je točka v_1 , ki je sosednja s točko v_n , obarvana z barvo, ki ne pripada $L(v_n)$, in tako ne zmanjša množice dopustnih barv za v_n . ■

S pomočjo leme 3 ni težko pokazati posplošitve Brooksovega izreka na seznamska barvanja.

Izrek 4. *Naj bo G povezan graf, ki ni izomorfen niti polnemu grafu niti ciklu lihe dolžine. Potem je*

$$\chi_\ell(G) \leq \Delta(G).$$

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po številu blokov grafa G . Naj bo L izbira barv za graf G , za katero velja $|L(v)| \geq \Delta(G)$ za vsako točko $v \in V(G)$. Če ima graf G le en blok, potem trditev izreka sledi iz Brooksovega izreka, kadar je izbira barv L konstantna funkcija, oziroma iz leme 3(ii), če obstajata točki z različnima seznamoma dopustnih barv. Če pa ima graf G več blokov, naj bo G_1 eden od končnih blokov, G_2 unija preostalih blokov grafa G , $u \in V(G_1) \cap V(G_2)$ pa prerezna točka, v kateri se stikata G_1 in G_2 . Po indukcijski predpostavki obstaja L -barvanje λ_2 grafa G_2 . Naj bo L_1 izbira barv za G_1 , ki se na $V(G_1) \setminus \{u\}$ ujema z L , dopustne barve za u pa so tiste barve iz $L(u)$, ki jih λ_2 ne uporabi na sosedih točke u v grafu G_2 , $L_1(u) = L(u) \setminus \{\lambda_2(v) \mid v \in V(G_2), u \sim v\}$. Trdimo, da obstaja tudi L_1 -barvanje λ_1 grafa G_1 . Če je $|L_1(u)| > \deg_{G_1}(u)$, to sledi iz leme 3(i). Sicer pa je $|L_1(u)| = \deg_{G_1}(u) < \Delta(G)$ in $|L_1(v)| \geq \Delta(G)$ za vse druge točke $v \in V(G_1)$, torej lahko uporabimo lemo 3(ii). Združitev barvanj λ_1 in λ_2 , pri čemer za točko u uporabimo barvo $\lambda_1(u)$, nam potem da iskano L -barvanje celotnega grafa G . ■

3. Ravninski grafi

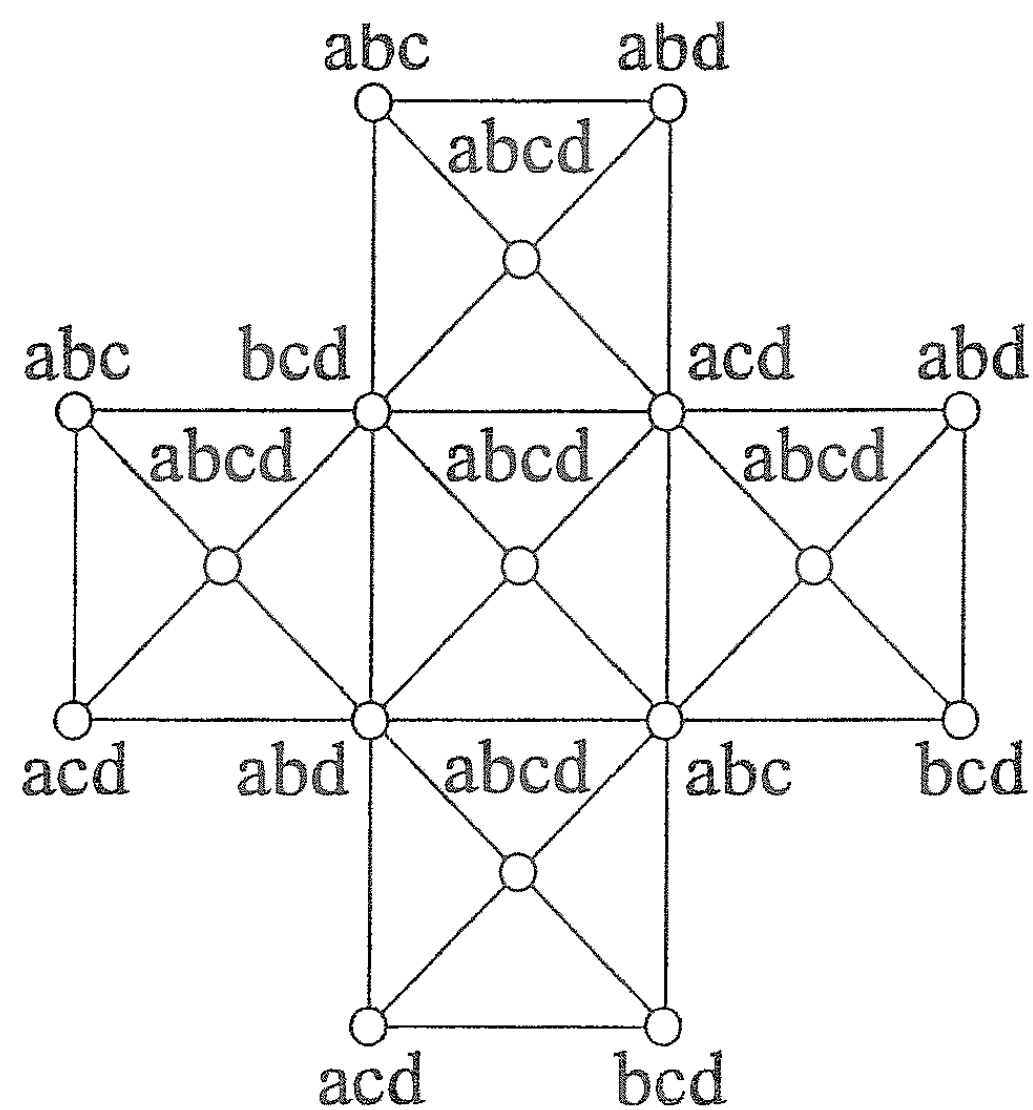
Eden najbolj znanih izrekov v teoriji grafov je gotovo izrek štirih barv. Ta pravi, da za vsak ravninski graf G velja $\chi(G) \leq 4$. Kljub mnogim poskusom še vedno ni znan noben dokaz tega izreka, ki ne bi vsaj delno slonel na uporabi računalnikov.

Kot bomo videli v nadaljevanju, izreka štirih barv ni moč posplošiti na seznamska barvanja. Obstajajo namreč ravninski grafi s seznamskim kromatičnim številom enakim 5. Prvi tak graf je konstruirala Voigtova [13] in ima 238 točk. V prispevku bomo predstavili konstrukcijo iz [8], ki rodi graf na 63 točkah. Pri tem se bomo bistveno naslonili na naslednjo pomožno trditev.

Lema 5. *Naj bosta graf H in izbira barv L za graf H določena s sliko 2. Potem graf H ni L -obarvljiv.*

Dokaz. Domenimo se za poimenovanje delov grafa H . Graf H je sestavljen iz petih kvadratov: srednjega, levega, desnega, zgornjega in spodnjega, vsak od njih pa ima še notranjo točko, ki je sosednja z vsemi njegovimi oglišči.

Uporabili bomo dokaz s protislovjem. Predpostavimo, da obstaja L -barvanje λ grafa H . Ker imajo vse notranje točke sezname dopustnih barv enake $\{a, b, c, d\}$, seznamami dopustnih barv oglišč pa so podmnožice



Slika 2. Graf H z izbiro barv L .

$\{a, b, c, d\}$, ima vsak kvadrat vsaj en par nasprotnih oglišč, ki ga barvanje λ obarva z isto barvo. Označimo z u levo zgornje in z v desno zgornje oglišče srednjega kvadrata. Pokazali bomo, da je $\lambda(u) = b$ ali $\lambda(v) = a$. Recimo, da je $\lambda(u) \neq b$ in $\lambda(v) \neq a$. Ločimo dve možnosti. Če je $\lambda(u) = c$, potem morata biti levo zgornje in desno spodnje oglišče zgornjega kvadrata obarvani enako, in sicer z barvo c , kar je protislovje. Če pa je $\lambda(u) = d$, morata biti z barvo d obarvani tudi desno zgornje in levo spodnje oglišče srednjega kvadrata, kar je spet protislovje.

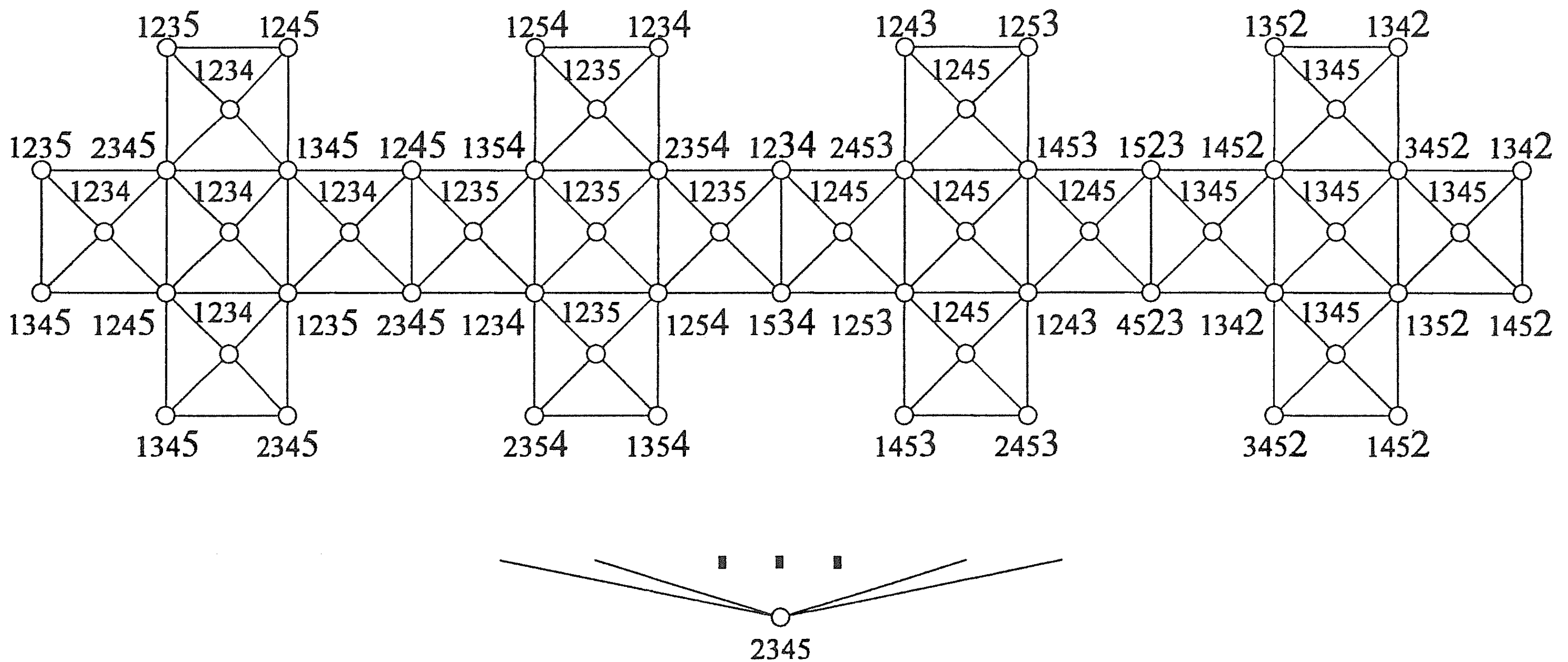
Da ovržemo začetno predpostavko o obstoju L -barvanja λ , torej zadošča pregledati le dve možnosti: $\lambda(u) = b$ in $\lambda(v) = a$. Če je $\lambda(u) = b$, potem sta levo zgornje in desno spodnje oglišče levega kvadrata obarvani z a , levo spodnje in desno zgornje oglišče spodnjega kvadrata s c , levo zgornje in desno spodnje oglišče desnega kvadrata pa dobita barvo d . Torej $\lambda(v) = d$, kar je protislovje. Na enak način pridemo do protislovja, kadar je $\lambda(v) = a$.

■

Graf H bomo uporabili kot osnovni gradnik pri konstrukciji ravninskega grafa, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.

Trditev 6. *Obstaja ravninski graf na 63 točkah, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.*

Dokaz. Ravninski graf, ki ni seznamsko 4-obarvljiv, je skupaj z ustrezno izbiro barv prikazan na sliki 3. Sestavljen je iz štirih kopij grafa H , zloženih v pot, pri čemer imata zaporedni kopiji skupno povezavo, in dodatne točke, ki je sosednja z vsemi oglišči v vseh kopijah grafa H . Kot barve a, b, c, d s slike 2 so v prvi kopiji izbrane barve 1, 2, 3, 4, v drugi kopiji 2, 1, 5, 3, v tretji 1, 2, 4, 5, v četrti pa 3, 1, 5, 4. Ogliščem prve kopije je kot dopustna barva dodana še barva 5, ogliščem druge kopije barva 4, ogliščem tretje barva 3 in ogliščem četrte barva 2. Lema 5 zagotavlja, da bo pri vsakem dopustnem barvanju vsaj eno oglišče prve kopije obarvano z barvo 5, vsaj eno oglišče druge kopije z barvo 4, vsaj eno oglišče tretje kopije z barvo 3 in vsaj eno oglišče četrte kopije z barvo 2. Ker pa ima dodatna točka za dopustne barve ravno barve 2, 3, 4 in 5, dopustno barvanje celotnega grafa ne obstaja. ■



Slika 3. Ravninski graf, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.

Omenimo, da je običajno kromatično število grafa s slike 3 enako 3. Ni znano, ali je ta graf tudi najmanjši ravninski graf, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.

Graf, vložen v ravnino, je *šibka triangulacija*, če je vsako njegovo lice, razen morda neomejenega, trikotnik. Thomassen [9] je dokazal, da seznamsko kromatično število ravninskega grafa ne more biti večje od 5. Natančneje, dokazal je naslednji izrek:

Izrek 7. *Naj bo graf G 2-povezana šibka triangulacija ravnine. Označimo s $C = v_1v_2 \cdots v_s v_1$ cikel v G , ki omejuje neomejeno lice. Naj bo L taka izbira barv za G , da velja*

$$|L(v)| \geq \begin{cases} 1; & v = v_1 \text{ ali } v = v_2, \\ 3; & u \in V(C) \setminus \{v_1, v_2\}, \\ 5; & u \notin V(C). \end{cases}$$

Če velja tudi $|L(v_1) \cup L(v_2)| > 1$, potem obstaja L -barvanje grafa G .

Dokaz. Izrek dokažemo z indukcijo po $|E(G) \setminus E(C)|$. Če je $G = C$, trditev očitno drži. V indukcijskem koraku ločimo dve možnosti. Če ima cikel C diagonalo $v_i v_j$, kjer je $2 \leq i \leq j-2 \leq s-1$ (pri čemer je $v_{s+1} = v_1$), potem najprej uporabimo indukcijsko predpostavko na grafu, sestavljenem iz cikla $v_1 v_2 \cdots v_i v_j v_{j+1} \cdots v_1$ in njegove notranjosti, nato pa še na grafu, sestavljenem iz cikla $v_j v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$ in njegove notranjosti. Sicer pa lahko predpostavimo, da cikel C nima diagonal. Naj bodo $v_1, u_1, \dots, u_t, v_{s-1}$ sosedi točke v_s , naštetih po vrsti, kot si sledijo okoli točke v_s . Ker je graf G šibka triangulacija, cikel C pa nima diagonal, je tudi graf $G' = G - v_s$ 2-povezana šibka triangulacija ravnine. Pri tem cikel $v_1 v_2 \cdots v_{s-1} u_t \cdots u_1 v_1$ omejuje neomejeno lice. Izberimo barvo $a \in L(v_1)$ in različni barvi $b_1, b_2 \in L(v_s) \setminus \{a\}$. Naj bo L' izbira barv za graf G' , ki se

na $V(G') \setminus \{v_1, u_1, \dots, u_t\}$ ujema z L , na u_i , $1 \leq i \leq t$, je enaka $L'(u_i) = L(u_i) \setminus \{b_1, b_2\}$, za v_1 pa ima vrednost $L'(v_1) = \{a\}$. Po indukcijski predpostavki obstaja L' -barvanje grafa G' . Ker je med sosedi točke v_s kvečjemu točka v_{s-1} obarvana z b_1 ali b_2 , pa lahko to barvanje razširimo do L -barvanja celotnega grafa G . ■

Ker lahko vsak ravninski graf dopolnimo do 2-povezane šibke triangulacije ravnine, ima izrek 7 naslednjo posledico:

Posledica 8. *Za vsak ravninski graf G velja*

$$\chi_\ell(G) \leq 5.$$

4. Barvanja povezav

Podobno kot seznamska barvanja točk vpeljemo tudi seznamska barvanja povezav. Tako vsako preslikavo $L': E(G) \rightarrow P(\mathbb{N})$ imenujemo *izbira barv za povezave* grafa G . Preslikava $\lambda': E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ je L' -barvanje povezav grafa G , če $\lambda'(e) \in L'(e)$ za vsako povezavo $e \in E(G)$ in je vsak par različnih povezav, ki ima kako skupno krajišče, obarvan z različnima barvama. Graf G je *po povezavah seznamsko k -obarvljiv*, če je L' -obarvljiv za vsako izbiro barv L' za povezave grafa G , za katero za vsako povezavo $e \in E(G)$ velja $|L'(e)| \geq k$. Najmanjše število k , za katero je graf G po povezavah seznamsko k -obarvljiv, imenujemo *seznamski kromatični indeks* grafa G in ga označimo s $\chi'_\ell(G)$. Običajni kromatični indeks grafa G bomo označili s $\chi'(G)$. Očitno za vsak graf G velja $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$.

Na zanimanje za seznamska barvanja je močno vplivala naslednja domneva, ki jo je konec sedemdesetih let postavil Dinitz. Naj bo dana matrika velikosti $n \times n$, katere elementi so množice moči n . Potem je iz vsake od n^2 množic mogoče izbrati po en element tako, da v nobeni vrstici in v nobenem stolpcu nista izbrana dva enaka elementa. Če domnevo prevedemo v jezik seznamskih barvanj, tedaj pravi, da je seznamski kromatični indeks polnega dvodelnega grafa $K_{n,n}$ enak n .

Domnevo je pred nekaj leti dokazal Galvin [5]. Natančneje, Galvin je dokazal, da za vsak dvodelni multigraf G velja $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$. Pri tem multigraf pomeni graf brez zank z morebitnimi vzporednimi povezavami. Ponovimo, da pri barvanju točk vzporedne povezave niso pomembne, pri barvanju povezav pa nanje ne smemo pozabiti (ali pa se moramo omejiti le na enostavne grafe).

Galvinov rezultat je posplošitev (ene od različic) Königovega izreka [7] na seznamska barvanja.

Izrek 9 (König). *Naj bo G dvodelen multigraf. Potem je*

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Tudi dokaz tega izreka si bralec lahko ogleda v [10, str. 331, 335]. V nadaljevanju bomo pokazali, kako iz Königovega izreka izpeljemo Galvinov rezultat.

Izrek 10. *Naj bo G dvodelen multigraf. Potem je*

$$\chi'_\ell(G) = \Delta(G).$$

Dokaz. Naj bo $V(G) = V \cup U$ dvodelno razbitje grafa G in $c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ običajno barvanje povezav grafa G z $\Delta(G)$ barvami. Königov izrek nam zagotavlja, da barvanje c obstaja. Pravimo, da povezava $e_1 = u_1v_1$ *pokriva* povezavo $e_2 = u_2v_2$, kjer $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, če je $u_1 = u_2$ in $c(e_2) < c(e_1)$ ali $v_1 = v_2$ in $c(e_2) > c(e_1)$. Množica povezav F_1 *pokriva* množico F_2 , če je vsaka povezava iz $F_2 \setminus F_1$ pokrita s kako povezavo iz F_1 .

Pokažimo najprej pomožno trditev, da za vsako množico povezav $F \subseteq E(G)$ obstaja prirejanje $M \subseteq F$, ki pokriva F . (Množica povezav M je *prirejanje*, če noben par povezav iz M nima skupnega krajišča.) Trditev pokažemo z indukcijo po $|F|$. Če je $|F| = 1$, vzamemo kar $M = F$. Sicer pa naj bo $U_F \subseteq U$ množica tistih točk, ki so krajišče kakšne povezave iz F . Za vsako točko $u \in U_F$ označimo z $e_u \in F$ tisto povezavo s krajiščem u , ki je s c obarvana z največjo barvo. Naj bo $M' = \{e_u \mid u \in U_F\}$. Če je M' prirejanje, je trditev dokazana, saj vzamemo $M = M'$. Sicer pa naj bosta $e_{u_1}, e_{u_2} \in M'$ povezavi s skupnim krajiščem $v \in V$ in $e_v \in F$ tista povezava s krajiščem v , za katero je barva $c(e_v)$ največja. Predpostavimo lahko, da je $e_v \neq e_{u_1}$. Povezava e_{u_1} torej pokriva e_v . Po indukcijski predpostavki obstaja prirejanje $M \subseteq F \setminus \{e_v\}$, ki pokriva $F \setminus \{e_v\}$. Toda M pokriva tudi povezavo e_v , saj bodisi $e_{u_1} \in M$ ali pa M vsebuje povezavo, ki v točki v pokriva e_{u_1} , in torej tudi e_v .

V nadaljevanju bomo z indukcijo po $|E(G)|$ dokazali, da je vsak dvodelen multigraf z izbranim običajnim barvanjem c po povezavah L' -obarvljiv za vsako izbiro barv L' , za katero je $|L'(e)| \geq 1 + |e|$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Pri tem $|e|$ označuje število povezav, ki pokrivajo povezavo e glede na barvanje c . Ker je vsaka povezava pokrita s kvečjemu $\Delta(G) - 1$ povezavami, bo od tod sledilo, da je $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$. Baza indukcije je graf z eno povezavo, za katerega trditev gotovo drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzemimo poljubno izbiro barv L' , ki vsaki povezavi e določi vsaj $1 + |e|$ barv. Izberimo še dopustno barvo a in označimo $F_a = \{e \in E(G) \mid a \in L'(e)\}$. Po pomožni trditvi obstaja prirejanje $M_a \subseteq F_a$, ki pokriva F_a . Obarvajmo povezave iz M_a z barvo a in odstranimo a iz seznamov dopustnih barv za povezave iz $F_a \setminus M_a$. Ker M_a pokriva F_a , je v grafu $G - M_a$ za vsako povezavo, ki je izgubila dopustno barvo, manjše tudi število povezav, ki jo pokrivajo. Torej po indukcijski predpostavki obstaja barvanje grafa $G - M_a$, s čimer je dokaz končan. ■

Borodin, Kostochka in Woodall [2] so Galvinov rezultat še izboljšali. Pokazali so, da v splošnem ni treba, da imajo vse povezave $\Delta(G)$ dopustnih barv.

Izrek 11. *Naj bo G dvodelen multigraf in L' taka izbira barv za povezave grafa G , da za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja*

$$|L'(e)| \geq \max\{\deg_G(u), \deg_G(v)\}.$$

Potem obstaja L' -barvanje povezav multigrafa G .

Za kromatični indeks vsakega multigrafa G velja $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \rfloor$. Enako oceno lahko s pomočjo izreka 11 izpeljemo tudi za seznamski kromatični indeks. Če se omejimo na enostavne grafe, lahko zgornjo mejo za kromatični indeks še močno izboljšamo. To nam zagotavlja Vizingov izrek [11], ki je eden osnovnih izrekov o barvanju povezav. Njegov dokaz si bralec lahko ogleda na primer v [10, str. 306–307].

Izrek 12 (Vizing). *Naj bo G enostaven graf. Potem je*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad \blacksquare$$

Vprašanje, ali Vizingov izrek velja tudi za seznamska barvanja, je gotovo najbolj znan nerešen problem, povezan s seznamskimi barvanji. Natančneje, domneva pravi, da drugače kot pri barvanju točk za vsak (multi)graf G velja

$$\chi'(G) = \chi'_\ell(G).$$

Izrek 10 zagotavlja, da domneva drži za dvodelne multigrafe.

LITERATURA

- [1] N. Alon, M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs, *Combinatorica* **12** (1992) 125–134.
- [2] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, D. R. Woodall, *List edge and list total colourings of multigraphs*, rokopis, 1996.
- [3] R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941) 194–197.
- [4] P. Erdős, A. Rubin, H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. **26** (1980) 125–157.
- [5] F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combin. Theory Ser. B **63** (1995) 153–158.
- [6] T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley Interscience, New York, 1995.
- [7] D. König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. **77** (1916) 453–465.
- [8] M. Mirzakhani, *A small non-4-choosable planar graph*, Bull. Inst. Combin. Appl. **17** (1996) 15–18.
- [9] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combin. Theory Ser. B **62** (1994) 180–181.
- [10] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- [11] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p -graph* (v ruščini), Metody Diskret. Analiz. **3** (1964) 25–30.
- [12] V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors* (v ruščini), Metody Diskret. Analiz. **29** (1976) 3–10.
- [13] M. Voigt, *List colourings of planar graphs*, Discrete Math. **120** (1993) 215–219.

BOSE-EINSTEINOVA KONDENZACIJA*

JANEZ STRNAD

PACS 03.75.Fi, 32.80.Pj

Množica delcev, ki jih ne moremo razločevati drugega od drugega in za katere ne velja Paulijeva prepoved, je v ravnovesnem stanju na značilen način porazdeljena po energiji. Pri zelo nizkih temperaturah se delci nabirajo v osnovnem stanju pri kinetični energiji nič. Ta Bose-Einsteinova kondenzacija ima zanimivo zgodovino. Nedavno so jo prvič opazovali v plinu.

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION

An ensemble of undistinguishable particles for which the Pauli principle does not apply in thermal equilibrium is distributed over energy in a characteristic way. At very low temperatures the particles occupy the ground state at zero kinetic energy. This Bose-Einstein condensation has an interesting record. Recently for the first time it was observed in a gas.

Uvod

Pred poldrugim letom je svet obšla vest, da je uspelo doseči Bose-Einsteinovo kondenzacijo v oblaku alkalijskih atomov. Marsikdo je postal pozoren na naslove *Najhladnejši atomi na svetu*, *Najmirnejši atomi v vesolju*, *Einstein je imel vendarle prav*, čeprav morda ni poznal ozadja. Med fiziki je vest zbudila manj pozornosti, saj so pojav napovedali pred sedmimi desetletji. Vendarle pa je veliko fizikov med pomembnimi dogodki v letu 1995 Bose-Einsteinovo kondenzacijo v oblaku alkalijskih atomov postavilo na prvo mesto. Novo je bilo spoznanje, da se ob večanju gostote v oblaku alkalijskih atomov pri zelo nizki temperaturi ne izloči kapljica ali kristalček, ampak pride do Einstein-Bosejeve kondenzacije. Ta kondenzacija je eden od redkih pojavov, pri katerih je treba v kvantni mehaniki opisati sistem z makroskopsko razsežnostjo.

Porazdelitev

Podrobneje obdelajmo ozadje pojava. Sistem naj sestavlja N delcev, ki ne motijo drug drugega, na primer molekul idealnega enoatomnega plina. Posodo, ki zadržuje delce, opišemo z efektivnim potencialom, na primer z neskončno potencialno jamo v obliki kocke. Os enodelčnih energij razdelimo na pasove, tako da pas i sega od $W_i - \frac{1}{2}\Delta W_i$ do $W_i + \frac{1}{2}\Delta W_i$ in vsebuje N_i delcev v g_i enodelčnih stanjih. Širino pasu ΔW_i izberemo tako, da je $1 \ll N_i \ll N$ in $1 \ll g_i$. Na koliko načinov je mogoče N_i delcev razvrstiti na g_i stanj? g_i enodelčnih stanj ločimo med seboj z $g_i - 1$ mejami in meje obravnavamo enako delce. $N_i + g_i - 1$ reči bi lahko razvrstili na $(N_i + g_i - 1)!$

* Predavanje na Seminarju za učitelje in profesorje fizike v Ljubljani, februarja 1997. Sofinanciranje z denarno pomočjo EU v okviru projekta Tempus – Phare Structural Joint European Project EDEN S_JEP-09578-95.

načinov, če bi jih med seboj razločevali. Toda delcev in mej ne moremo razločevati, zato premeščanje delcev med seboj ali mej med seboj ne prinese novih načinov. Na pasu i je tako

$$P_i = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!} = \frac{(N_i + g_i)!}{N_i!g_i!} \propto \frac{(N_i + g_i)^{N_i+g_i}}{N_i^{N_i}g_i^{g_i}}$$

različnih načinov. Upoštevali smo, da je na pasu veliko enodelčnih stanj in delcev, zanemarili 1 in uporabili Stirlingov približek $N_i! \propto N_i^{N_i}/e^{N_i}$. Nazadnje upoštevamo vse pasove na energijski osi in ugotovimo, da je vseh načinov

$$P = \prod_i P_i \propto \prod_i \frac{(N_i + g_i)^{N_i+g_i}}{N_i^{N_i}g_i^{g_i}}. \quad (1)$$

Vsakemu izmed načinov ustreza mikroskopsko stanje. Mikroskopskih stanj pri opazovanju sistema ne moremo razločevati med seboj, če imata število delcev in povprečna energija sistema predpisani vrednosti:

$$N = \sum_i N_i \quad \text{in} \quad W = \sum_i N_i W_i. \quad (2)$$

Entropijo sistema izračunamo po Boltzmannovi enačbi $S = k \ln P$:

$$S = k \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i]. \quad (3)$$

Sorazmernostni koeficient v P prinese le konstanten člen, zato smo ga lahko spregledali. V toplotno izoliranem sistemu je entropija v ravnovesnem stanju največja. Njena variacija, ki jo izračunamo kot diferencial, mora biti tedaj enaka nič: $\delta S = k \sum_i [\ln(N_i + g_i) - \ln N_i] \delta N_i = 0$. Iz zvez (2) izhajata še zahtevi $\delta N = \sum_i \delta N_i = 0$ in $\delta W = \sum_i W_i \delta N_i = 0$. Vse troje zajamemo z enačbo:

$$\sum_i [\ln(1 + \frac{g_i}{N_i}) - \alpha - \beta W_i] \delta N_i = 0.$$

Koeficienta α in β sta povezana s prvo in drugo zvezo (2). Tako smo dosegli, da so variacije δN_i neodvisne druga od druge. Oglati oklepaj mora biti za vsak i enak nič, iz česar izhaja:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{\alpha+\beta W_i} - 1}. \quad (4)$$

Za entropijo (3) dobimo s (4):

$$\begin{aligned} S &= k \sum_i N_i [\ln(g_i + N_i) - \ln N_i] + k \sum_i g_i [\ln(g_i + N_i) - \ln g_i] = \\ &= k\alpha N + k\beta W - k \sum_i g_i \ln[1 - e^{-(\alpha+\beta W_i)}]. \end{aligned}$$

Entropijski zakon pove, da je $\partial S / \partial W = 1/T$ in potemtakem $k\beta = 1/T$.

Število enodelčnih stanj g_i na energijskem pasu i določimo tako, da ustrezno fazno prostornino $(2S + 1) \cdot 4\pi p_i^2 \Delta p_i V$ delimo s prostornino fazne celice h^3 , ki odpade na eno enodelčno stanje:

$$g_i = (2S + 1) \frac{V \cdot 4\pi p_i^2 \Delta p_i}{h^3}. \quad (5)$$

Upoštevali smo $2S + 1$ magnetnih stanj delca s spinom S . Delci imajo samo kinetično energijo, tako da je $W_i = \frac{1}{2}p_i^2/m$ in $\Delta p_i = (2m)^{1/2} \Delta W_i / 2W_i^{1/2}$ ter:

$$N_i = (2S + 1)V \frac{2\pi(2m)^{3/2} W_i^{1/2} \Delta W_i}{h^3(e^{\alpha + W_i/kT} - 1)}.$$

Gostota delcev

$$\frac{N}{V} = (2S + 1) \int_0^\infty \frac{2\pi(2m)^{3/2} W^{1/2} dW}{h^3(e^{\alpha + W/kT} - 1)}$$

pri dani temperaturi narašča s padajočim koeficientom $\alpha \geq 0$ in je največja pri $\alpha = 0$:

$$\frac{N_0}{V} = (2S + 1) \int_0^\infty \frac{2\pi(2m)^{3/2} W^{1/2} dW}{h^3(e^{W/kT} - 1)} = 2,61(2S + 1) \left(\frac{\sqrt{2\pi m k T}}{h} \right)^3. \quad (6)$$

Gostota delcev lahko preseže N_0/V , saj bi sicer plin postal nestisljiv. Tedaj delci začnejo zasedati osnovno enodelčno stanje pri kinetični energiji $W = 0$, ki ga upoštevamo posebej kot ostro stanje z $\alpha \neq 0$, za vzbujena stanja pri $W > 0$ pa vzamemo $\alpha = 0$ in jih obravnavamo kot doslej. Za število delcev velja:

$$N \approx \frac{1}{e^\alpha - 1} + N_0 \approx \frac{1}{\alpha} + N_0.$$

Pri konstantni temperaturi se prostornina manjša, ko narašča tlak, dokler gostota delcev ne doseže N_0/V . Nato ostane tlak nespremenjen, čeprav se še naprej manjša prostornina. Delci v osnovnem stanju pač nimajo gibalne količine, ne prispevajo k tlaku in nanje odpade zanemarljivo majhna prostornina. Pri nižanju temperature ob konstantnem tlaku pod T_0 , ki ustreza gostoti delcev N_0/V , število delcev v osnovnem stanju narašča:

$$N_{W=0} = N_0[1 - (T/T_0)^{3/2}], \quad T < T_0. \quad (7)$$

Pojav nekoliko spominja na kondenzacijo vodne pare. Vendar to ni fazni prehod prvega reda, pri katerem se sprosti izparilna toplota in se spremeni način gibanja delcev zaradi sil med njimi. To je fazni prehod drugega reda, pri katerem ni izparilne toplote, le toplotna kapaciteta pri konstantni prostornini ima pri temperaturi T_0 koleno. Delci ob kondenzaciji zgubijo istovetnost in nastalo stanje spominja na koherentno lasersko svetlobo. Pojava ne povzročijo sile med delci, ampak zakoni kvantne mehanike. V prispodobi si predstavljamo, da v vrvežu na trgu vse več ljudi obmiruje in počasi ubrano telovadi.

Zgodovinsko ozadje

Sredi leta 1923 je Satyendranath Bose, profesor v Daki, poslal Albertu Einsteinu v Berlin kratek članek s prošnjo, naj ga da prevesti v nemščino in objaviti, če misli, da je tega vreden. Einstein je članek prevedel in ga dal objaviti s pohvalno pripombo o Bosejevem delu. V članku *Planckov zakon in domneva o kvantih* je Bose postavil gostoto stanj (5) in z njo na nov način izpeljal Planckov zakon [1]. Upošteval je energijo $W = h\nu$ in gibalno količino $p = h\nu/c$ kvantov ter ni vztrajal pri zahtevi, da je njihovo število nespremenljivo. Tako je dobil

$$N_i = \frac{2 \cdot 4\pi\nu_i^2 \Delta\nu_i V}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu_i/kT} - 1}.$$

To pomnožimo s $h\nu_i$ in delimo z V , pa dobimo povprečno gostoto energije v sevanju črnega telesa. V vseh prejšnjih izpeljavah Planckovega zakona je bilo treba elektromagnetno valovanje opisati klasično. Bose se je izognil klasičnih privzetkov, tako da je mikroskopskemu stanju priredil fazno celico s prostornino h^3 . Zamisel so utemeljili pozneje, ko so prešteli rešitve Schrödingerjeve enačbe za delec v neskončni potencialni jami z obliko kocke.

Einsteinu je takoj uporabil Bosejevo delo v kvantni teoriji idealnega enoatomnega plina, s katero se je tedaj ukvarjal, in svoja spoznanja objavil v treh člankih [2]. V prvem je ponovil Bosejevo izpeljavo za ravnovesno stanje plina, a je upošteval, da se število delcev ne spremeni. Raziskal je, koliko se nove enačbe razlikujejo od enačb za klasični idealni plin. V drugem članku je obravnaval nasičen plin in z enačbami, od katerih smo jih nekaj navedli, napovedal *Bose-Einsteinovo kondenzacijo*. Zapisal je:

„Naraščajoče število molekul preide v prvo kvantno stanje (stanje brez kinetične energije), medtem ko se preostale molekule porazdelijo glede na parameter $\alpha = 0$. Trditev nakazuje, da se pojavi nekaj podobnega kot pri izotermnem stiskanju pare pod nasičeno prostornino. Pride do ločenja: del ‘kondenzira’, preostanek pa ostane ‘nasičeni idealni plin’. [...] Po izpeljani enačbi stanja obstaja pri vsaki temperaturi največja gostota gibajočih se molekul. Ko prekoračimo to gostoto, se izločijo nadštevilne molekule kot negibne (‘kondenzirajo brez privlačnih sil’).”

Po zamisli iz doktorskega dela Louisa de Broglieja je idealni kvantni plin opisal podobno kot sevanje. Kvadrat efektivnega odmika števila delcev je izrazil z dvema členoma, od katerih je eden zajel lastnosti delcev, to je Wienov približek, a drugi lastnosti valovanja [3].

Po Paulijevi prepovedi za elektrone v atomu leta 1925 je naslednjega leta Enrico Fermi izpeljal porazdelitev za delce, od katerih lahko kvečjemu eden zasede eno enodelčno stanje. Wolfgang Pauli je leta 1926 uporabil enačbe tudi za elektrone v kovini. Za prevodniške elektrone velja porazdelitev

$$N_i = \frac{g_i}{e^{W/kT} e^{-W_F/kT} + 1} \quad (8)$$

s Fermijevo energijo W_F . Paul Dirac je prišel do enakega sklepa. Oba sta bila tedaj prepričana, da je treba enoatomni plin opisati s porazdelitvijo (8). Leta 1940 je Pauli utemeljil *izrek o spinu in statistiki*. Bose-Einsteinova porazdelitev velja za delce s celim spinom, za katere je Dirac predlagal ime *bozoni*. Za bozone ni Paulijeve prepovedi in mora biti valovna funkcija sistema simetrična glede na zamenjavo delca z delcem. To je pojasnilo Ehrenfestovo pripombo, da Einstein delcev pravzaprav ni obravnaval kot popolnoma statistično neodvisne. Fermi-Diracova porazdelitev velja za delce s polovičnim spinom. Te delce zajame Paulijeva prepoved in valovna funkcija sistema mora biti antisimetrična proti zamenjavi delca z delcem¹.

Leta 1937 je Peter Kapica ugotovil, da se kapljevinski helij ^4He pri temperaturi pod 2,19 K pretaka skozi špranjo, kot da bi ne imel viskoznosti. Tako je bilo mogoče nenavadne lastnosti helija pod to temperaturo opisati s *supertekočnostjo*. Naslednje leto je Fritz London supertekočnost pojasnil kot Bose-Einsteinovo kondenzacijo z opisano teorijo, ki so jo dotlej imeli za „popolnoma imaginarno“. Supertekoči helij je mogoče samo približno obravnavati kot idealni plin. Z izmerjeno gostoto helija $N_0/V = 2,18 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ pod 2,19 K izračunamo za temperaturo prehoda 3,1 K, kar je za okoli 50 % preveč. Podrobnejša teorija upošteva razmeroma močno sodelovanje med atomi helija v kapljevini.

V jedrskih reaktorjih so s časom pridelali dovolj lažjega helijevega izotopa ^3He , da so postali izvedljivi poskusi tudi z njim. Leta 1972 so Douglas Osheroff, Robert Richardson in David Lee ugotovili, da pride do fazne spremembe pri temperaturi pod 0,0027 K tudi v tem izotopu. Pokazalo se je, da molekulska sila poveže dva atoma ^3He s spinom po $\frac{1}{2}$ v nekakšno molekulo s spinom 1, in te molekule kondenzirajo. Tudi v tem primeru je treba upoštevati razmeroma močno sodelovanje med molekulami v kapljevini. Bose-Einsteinovo kondenzacijo, ki jo je mogoče v dobrem približku opisati z idealnim plinom, zasledimo samo v oblakih alkalijskih atomov.

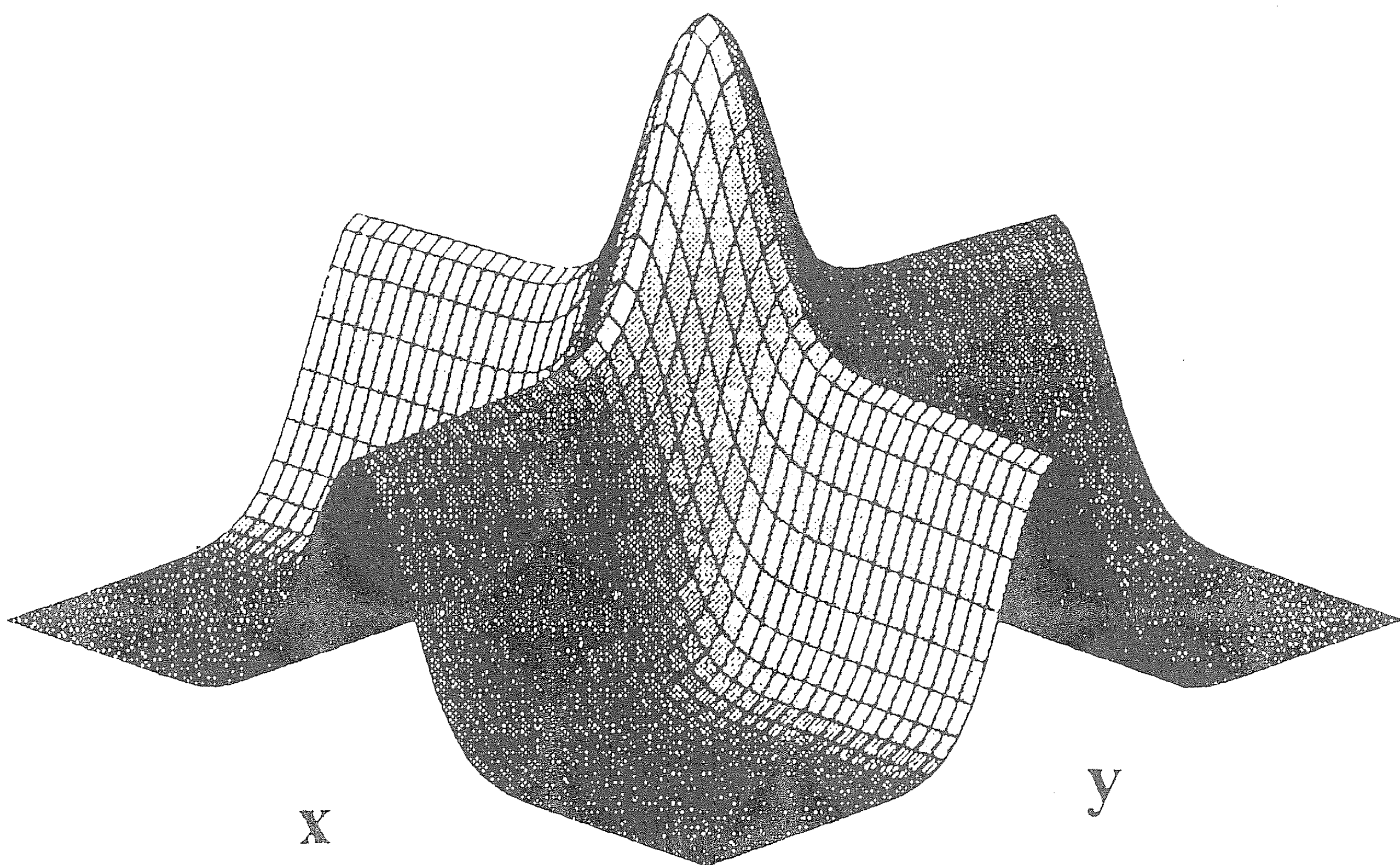
Oblaki alkalijskih atomov

V oblaku atomov z *laserskim hlajenjem* zmanjšamo povprečno kinetično energijo atomov. Na oblak usmerimo enobarvni curek z malo manjšo frekvenco od resonančne. Zaradi Dopplerjevega pojava svetlobo absorbirajo samo atomi, ki se gibljejo proti curku in ki se jim pri tem gibalna količina zmanjša za gibalno količino fotona. Ti atomi sevajo v vseh mogočih smereh in zaradi prožnih trkov med atomi se s časom zmanjša povprečna kinetična energija atomov v oblaku.

Delovanje laserskega curka na atom izkoristimo še drugače. V klasični sliki je med nihanjem valenčnega elektrona v alkalijskem atomu in nihanjem električnega polja v valovanju fazna razlika π , če je frekvenca valovanja višja od resonančne frekvence atoma. Električno polje v valovanju tedaj deluje

¹ Podrobnejše podatke vsebuje zapis J. Strnad, *Začetki kvantne statistične mehanike* (v tisku).

z odbojno silo na atom. Nasprotno je sila privlačna, če je frekvenca malo nižja od resonančne frekvence, ker tedaj ni fazne razlike. Iz laserja speljejo na oblak atomov curka pod kotom 90° ali drugega nasproti drugemu. Curka sta linearno polarizirana v pravokotnih smereh, da ne pride do stoječega valovanja. Fokussirajo ju in s tem dosežejo, da se sila spreminja s krajem. Tako dobijo *dipolno optično past* (sl. 1). Te pasti so dokaj učinkovite, a zajamejo le zelo majhen del prostora. V *magnetooptični pasti* uporabijo še dodatno magnetno polje in izkoristijo prehod med stanjema, ki nastaneta z Zeemanovo razcepitvijo. Z lasersko svetlobo z valovno dolžino λ je mogoče znižati temperaturo v oblaku atomov po oceni na $20T_0$, če kT_0 izenačimo z odzivno kinetično energijo $h^2/2m\lambda^2$. Dosegljiva gostota atomov je omejena zaradi neprožnih trkov, pri katerih se spremeni spinsko stanje, in atom po trku uide iz pasti.



Slika 1. Porazdelitev gostote energijskega toka v dipolni pasti določa privlačno silo v njej. Curka v smeri osi x in osi y iz laserja s frekvenco, nižjo od resonančne, sta linearno polarizirana v pravokotnih smereh. Risba je iz članka C. S. Adams, H. J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, S. Chu, *Evaporative cooling in a crossed dipole trap*, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3577.

V *magnetnih pasteh* uporabijo nehomogeno magnetno polje, ki deluje na magnetni moment atoma. Sila, kakršno na primer izkoristimo pri Stern-Gerlachovem poskusu, je sorazmerna z gradientom gostote magnetnega polja. V pasti z osnosimetričnim kvadrupolnim poljem in ravnino simetrije sila polja vleče atom s spinom $F = 1$ v stanju $M_F = -1$ proti sredini pasti (sl. 2a, b). Z magnetno pastjo je mogoče doseči dovolj nizke temperature in dovolj velike gostote atomov. Doslej so prišli do območja nanokelvinov, a ni načelnih ovir za veliko nižje temperature. Opisana past pa ima napako: na območju največje gostote delcev okoli sredine pasti je magnetno polje šibko,

tam delec zlahka preide v druga spinska stanja in se zgubi iz pasti. Napako odpravijo na različne načine.

V magnetni pasti je mogoče oblak atomov *hladiti z odparevanjem*. Z dodatnim magnetnim poljem z radijsko frekvenco zanalašč preklopijo spin najhitrejših atomov in jih tako izločijo iz pasti. S tem znižajo povprečno kinetično energijo preostalih atomov. Frekvenco dodatnega polja prilagodijo gostoti magnetnega polja na območju pasti z najhitrejšimi atomi. Potem postopno znižujejo frekvenco polja in povzročijo, da preostanejo samo najpočasnejši atomi. Hlajenje z odparevanjem je mogoče, če si preostali atomi ob prožnih trkih dovolj učinkovito izmenjajo zmanjšano kinetično energijo. V času zadrževanja mora atom v povprečju večsto- do tisočkrat prožno trčiti z drugimi atomi. To je mogoče le v oblaku z dovolj veliko gostoto v dovolj močni magnetni pasti. Past mora poskrbeti tudi za silo, ki uravnovesi težo atomov. Potem ko past izključijo, oblak prosto pade, na primer v šestih tisočinah sekunde za 0,2 mm.

Bose-Einsteinovo kondenzacijo v oblaku alkalijskih atomov so dosegli v dveh korakih. Najprej so v posodi z alkalijsko paro pri zelo nizkem tlaku v dipolni ali magnetooptični pasti zbrali dovolj atomov v gost oblak. V drugem koraku so to past izključili in vključili magnetno past, v kateri so oblak zgostili in ohladili z odparevanjem.

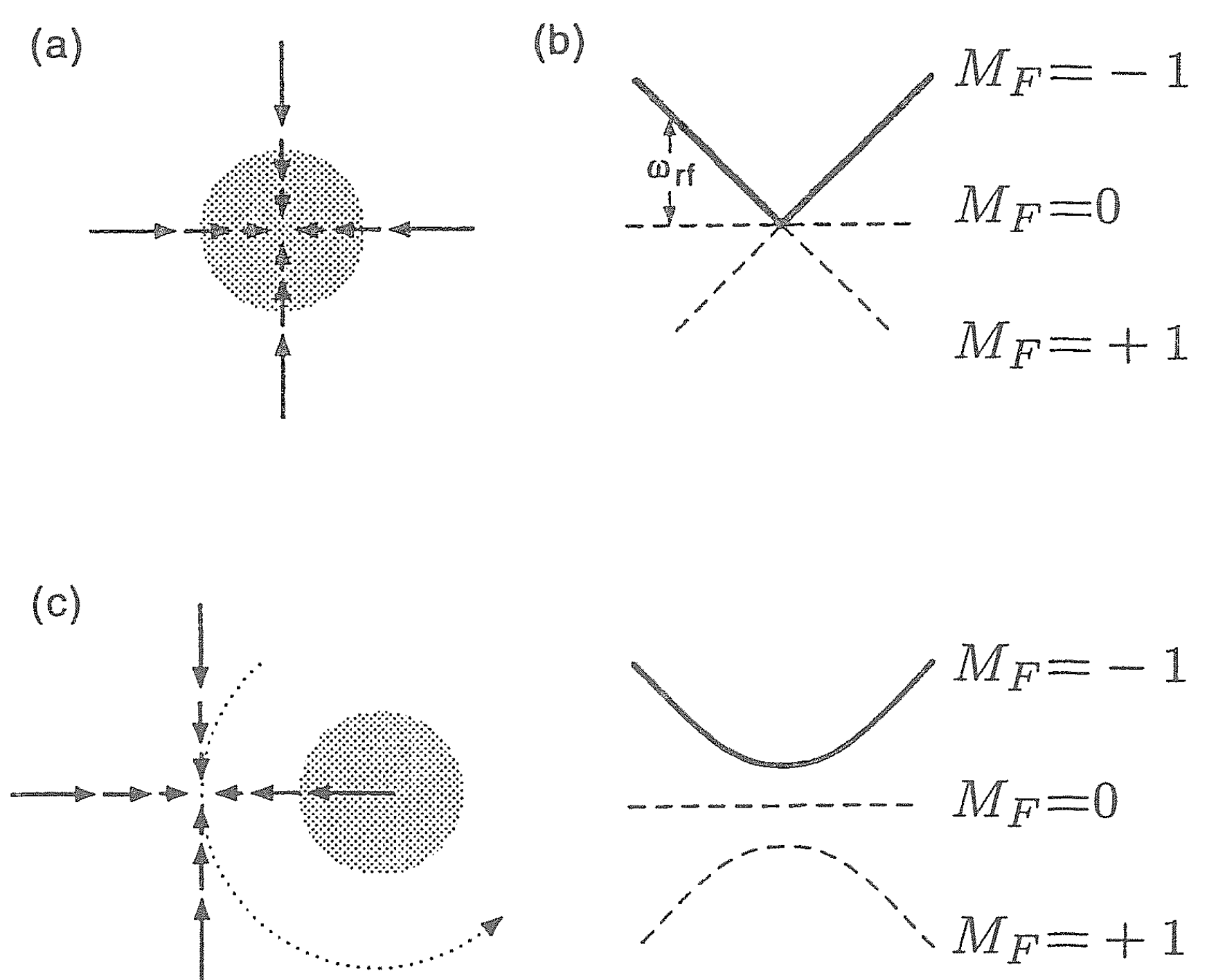
Kondenzacija v oblaku atomov

Bose-Einsteinova kondenzacija v oblaku atomov je uspela trem ameriškim raziskovalnim skupinam. Skupina E. A. Cornella in C. E. Wiemana z Državnega inštituta za standarde in tehnologijo in s koloradske univerze v Bouldru je delala z rubidijem ^{87}Rb [4], skupina R. G. Huleta z Riceove univerze v Houstonu z litijem ^7Li [5] in skupina W. Ketterleja z MIT z natrijem ^{23}Na [6]². Opišimo značilnosti pri poskusih treh skupin, ne da bi se spustili v vse podrobnosti.

Prva skupina je uporabila stekleno celico, visoko 12 cm z osnovno ploskvijo $2,5\text{ cm} \times 2,5\text{ cm}$. V njej je spočetka bila rubidijeva para pri sobni temperaturi in tlaku 10^{-11} mbar. Rubidijeve atome so zbrali in ohladili najprej v magnetooptični pasti s šestimi laserskimi curki, ki so se sekali sredi celice. V petih minutah se je nabralo kakih deset milijonov atomov. Oblak so dodatno stisnili in ohladili na $20\text{ }\mu\text{K}$ s tem, da so spremenili gradient magnetnega polja in frekvenco svetlobe. Nato so izključili magnetooptično

² Leta 1997 sta Eric Cornell in Carl Wieman dobila visoko mednarodno nagrado kralja Feisala za „tvorbo Bose-Einsteinovega kondenzata z elegantno kombinacijo laserskega hlajenja in hlajenja z odparevanjem v novi atomski pasti“. Wolfgangu Ketterleju je Nemško fizikalno društvo podelilo nagrado Gustava Hertza kot „priznanje za eksperimentalni preskus Bose-Einsteinove kondenzacije ultrahladnih atomskih plinov.“ Cornell in Ketterle sta si za „doseženo Bose-Einsteinovo kondenzacijo plina atomov, za izdelavo tehnike, za raziskovanje kondenzata in za merjenje njegovih fizikalnih lastnosti“ delila še nagrado I. I. Rabija, ki jo mladim fizikom podeljuje Ameriško fizikalno društvo.

Slika 2. Magnetna kvadrupolna past: gostota magnetnega polja v vodoravni ravnini je usmerjena proti sredini pasti (a), tako da nehomogeno polje deluje na magnetni moment v stanju $M_F = -1$ s silo, katere potencial je sorazmeren z razdaljo. Na zaznamovanem delu magnetno polje z dano krožno frekvenco ω_{rf} povzroči prehod v stanje $M_F = 0$ in atom „odpari“ iz pasti (b). Raziskovalna skupina iz Bouldra je dodala krožeče magnetno polje (c), tako da povprečni potencial ni dosegel ničle, s čimer so odpravili napako pasti. Zaradi tega se je zmanjšala privlačna sila pasti. Risba je iz članka W. Petrich, M. H. Anderson, R. J. Ensher, E. A. Cornell, *Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3352.



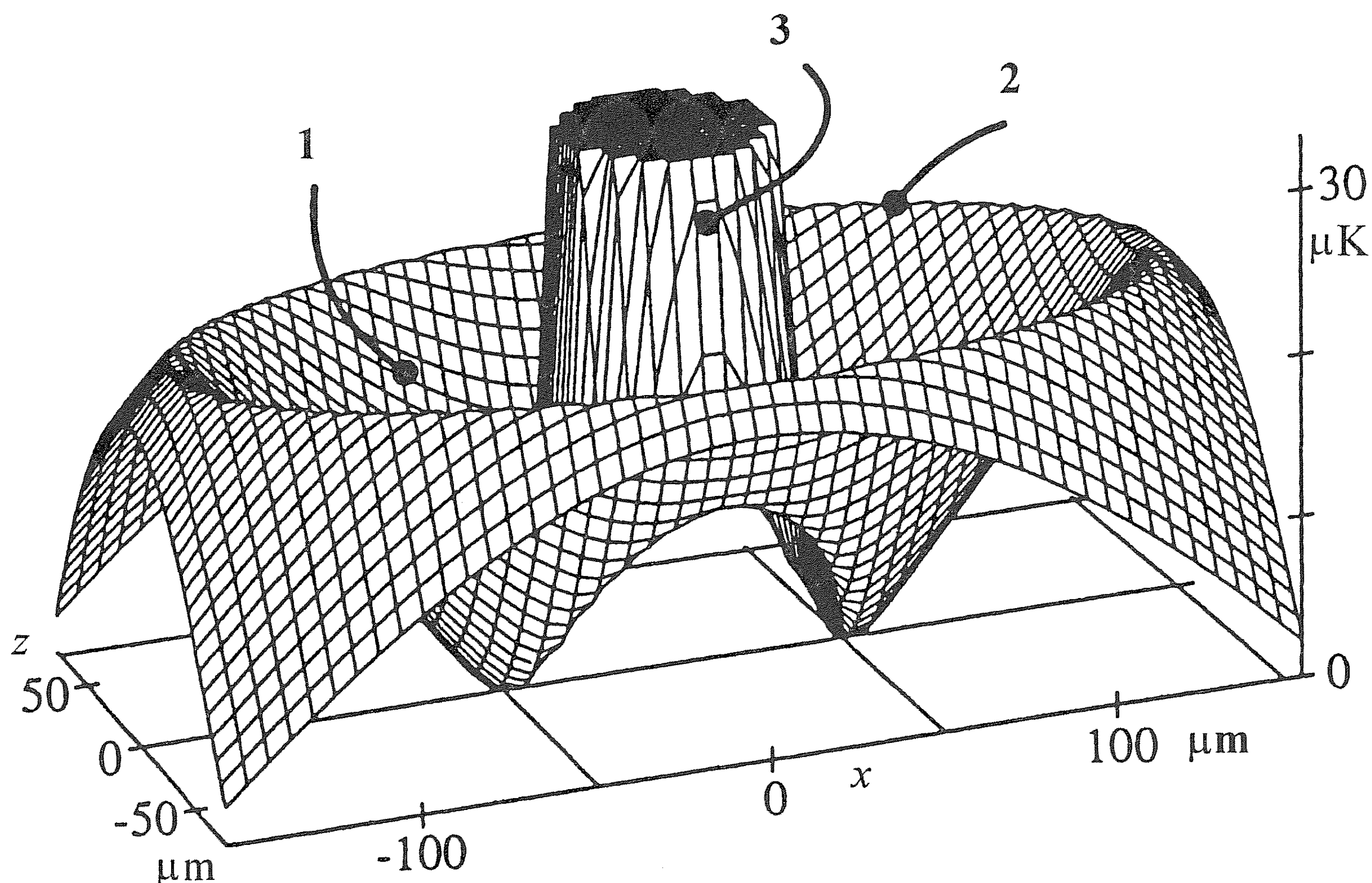
past in vključili magnetno past. Tedaj so bili v oblaku štirje milijoni atomov pri temperaturi $90 \mu\text{K}$ in gostoti $2 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Napako magnetne pasti so odpravili z dodatnim prečnim homogenim magnetnim poljem, ki se je tako hitro vrtelo, da atomi niso mogli slediti območju z majhno gostoto magnetnega polja in tam preiti v drugo spinsko stanje (sl. 2c, d). Nato so oblak dobro minuto hladili z odparevanjem in ob tem znižali frekvenco in gostoto magnetnega polja. Počakali so še 2 sekundi, da so se razmere v oblaku ustalile. Nato so izključili svetlobne curke in magnetno polje, da se je oblak razširil in ob tem dodatno ohladil. Tako so dosegli temperaturo 170 nK in sredi oblaka gostoto $2,6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$. Ob nadaljnjem širjenju je padla temperatura na 20 nK . Oblak so lahko opazovali še več deset sekund.

Povprečna hitrost atomov rubidija $\langle v \rangle = \sqrt{2\pi kT/m}$ pri 20 nK meri $3,5 \text{ mm/s}$. Ustreza ji termična de Brogliejeva valovna dolžina $\lambda_0 = h/m\langle v \rangle = 1,3 \mu\text{m}$. Enačba (6) za mejno fazno gostoto $\lambda_0^3 N_0/V = 2,61$ v tem primeru zahteva gostoto atomov vsaj 10^{18} m^{-3} .

Nekaj stotin sekunde po tem, ko so se razmere ustalile, so oblak osvetlili s curkom svetlobe, ki so jo absorbirali atomi v oblaku. S slikovno napravo CCD so skozi mikroskop zajeli prepuščeno svetlobo. Tako so lahko po sliki ugotovili, kolikšne so bile hitrosti atomov. O Bose-Einsteinovi kondenzaciji je zanesljivo pričalo troje. Sredi oblaka so se pojavile številne molekule s hitrostjo okoli nič. Njihov delež se je izrazito povečal, ko so znižali temperaturo. Ta del oblaka je bil nesimetričen: molekule so bile v smeri simetrijske osi pasti dvakrat hitrejške kot v pravokotni smeri. To je bilo mogoče pojasniti s Heisenbergovo neenačbo $\delta x \delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar$, po kateri manjši razsežnosti oblaka ustreza večja hitrost. Kinetična energija atomov v kondenziranem

jedru oblaka v resnici ne more biti enaka nič. V simetričnem oblaku v neskončni potencialni jami z obliko kocke z robom R bi bila enaka lastni energiji osnovnega stanja $\pi^2 \hbar^2 / 2mR^2$. Tej kinetični energiji je ustrezala temperatura okoli 1 nK. Ocenili so, da se je kondenziralo dva tisoč atomov.

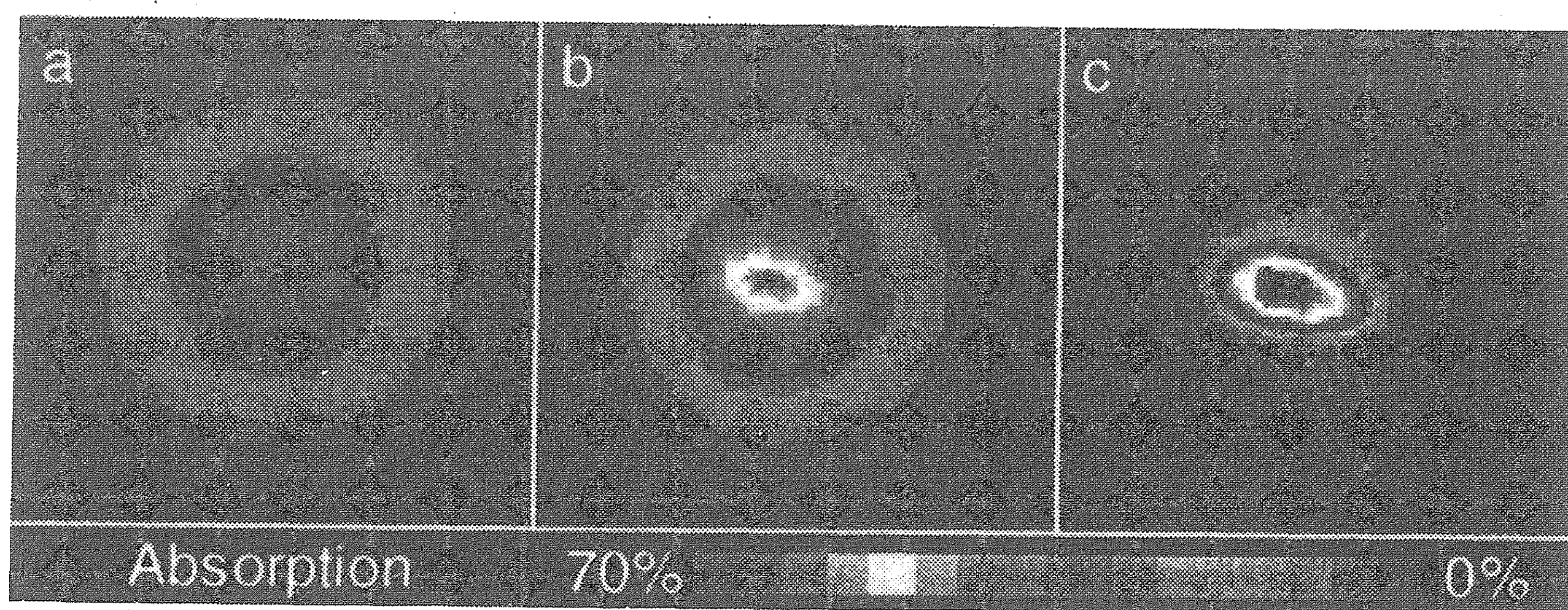
V Houstonu so uporabili magnetno past s tremi pari trajnih magnetov. Napako pasti so odpravili z dodatnim homogenim magnetnim poljem, s katerim so dosegli, da v pasti gostota magnetnega polja nikjer ni padla na nič. Ker pasti s trajnimi magneti niso mogli izključiti, niso mogli naravnost ugotoviti hitrostne porazdelitve atomov v oblaku. Slike oblaka so pokazale samo, da se je srednji del oblaka zgostil. Najprej so mislili, da se je tam kondenziral večji del dvesto tisoč atomov. Pozneje pa se je pokazalo, da se je kondenziralo veliko manj atomov [7], [8]. Ne samo, da je v oblaku litija zaradi manjše mase atomov treba za Bose-Einsteinovo kondenzacijo doseči nižjo temperaturo. Za atome litija je sipalna dolžina negativna, medtem ko je za atome rubidija in natrija pozitivna. Po domače rečeno se atoma litija šibko privlačita, atoma rubidija ali natrija pa šibko odbijata. Najprej so mislili, da to ni vplivalo na kondenzacijo. Poznejša merjenja pa so potrdila napoved, da je oblak kondenziranih atomov litija obstojen le, dokler v njem ni več kot 1400 atomov.



Slika 3. Potencialna energija atoma natrija v stanju $M_F = -1$ v magnetni pasti skupine na MIT v ravnini xz (os z je simetrijska os) [8]. Privlačno silo je povzročila nehomogenost polja (1), odbojno silo na zunanjem robu (2), kjer atomi odparevajo, pa radiofrekvenčno magnetno polje. Napako pasti so odpravili z odbojno silo sredi pasti (3), ki jo je povzročil močan (3,5 W) laserski curek s frekvenco, višjo od resonančne frekvence. Potencial v bližini sredine pasti (brez srednjega odbojnega dela) lahko približno opišejo z anizotropnim trirazsežnim harmoničnim oscilatorjem.

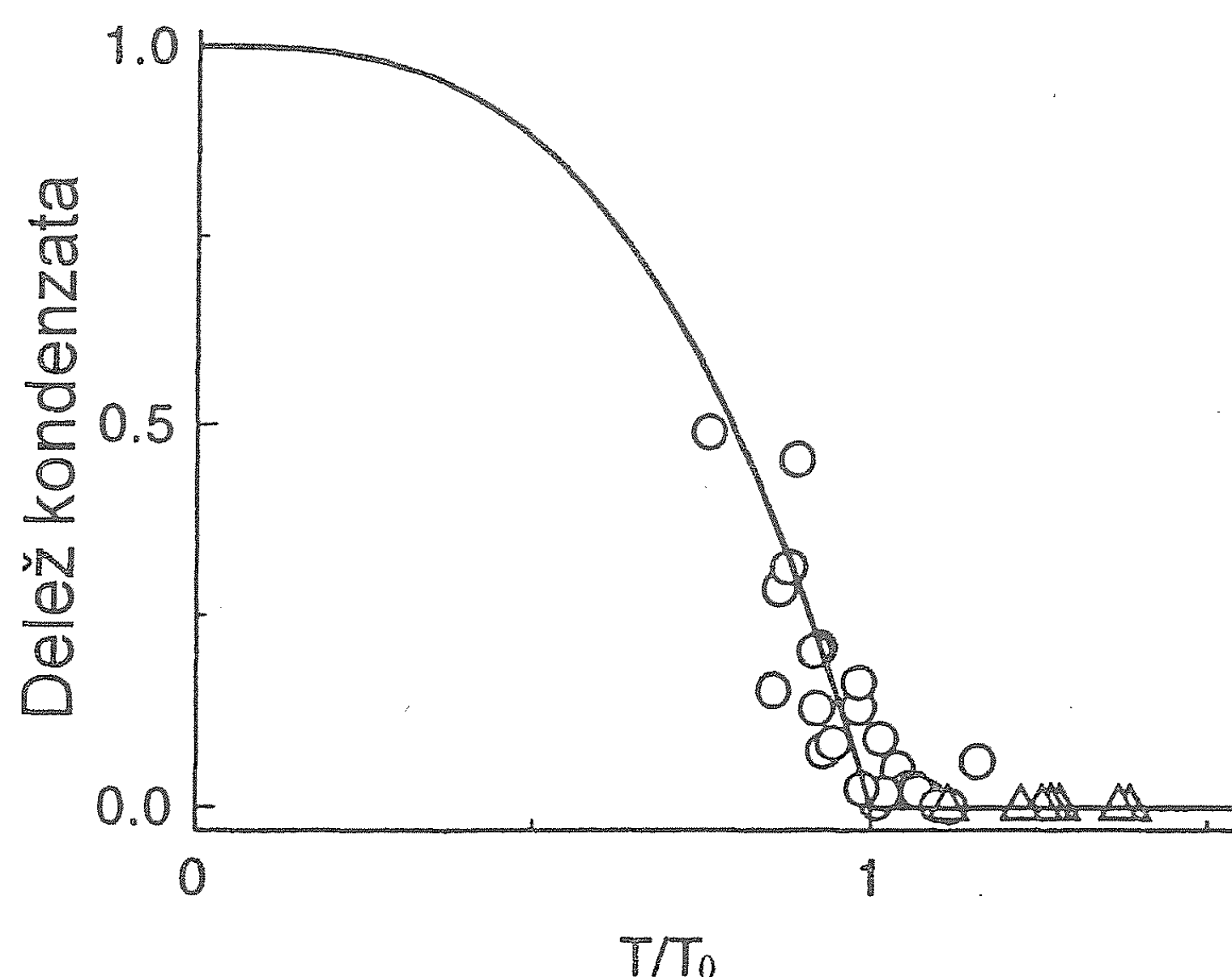
Skupina na MIT je najprej v 2 sekundah ujela v magnetno past milijardo atomov natrija v stanju s spinom atoma $F = 1$ in komponento v smeri polja

$M_F = -1$ pri temperaturi okoli $200 \mu\text{K}$ in gostoti 10^{17} m^{-3} . Napako pasti so odpravili tako, da so z laserskim curkom z višjo frekvenco od resonančne posvetili na njeno središče in s tem ustvarili tam močno odbojno silo na atome (sl. 3). Oblak so potem ohladili z odparevanjem tako, da se je nazadnje kondenziralo 500 tisoč natrijevih atomov pri gostoti $4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Oblak so opazovali s curkom svetlobe, ki so jo absorbirali atomi v stanju s spinom $F = 2$, v katero jih je iz stanja $F = 1$ vzbudil poseben kratkotrajen in šibek laserski curek. Oblak so preslikali na slikovno napravo CCD in opazovali, kako se je razširil v 6 ms (sl. 4). Oblak, v katerem se še ni pojavilo kondenzirano jedro, se je širil izotropno (a in b). Znamenje, da se je pojavilo kondenzirano jedro, je bilo prav neenakomerno širjenje, povezano z geometrijo magnetne pasti (c).



Slika 4. Absorpcija svetlobe v oblaku natrijevih atomov 6 tisočin sekunde po izključitvi magnetne pasti v lažnih barvah. Na prvih dveh slikah se je oblak razširil enakomerno v vseh smereh, na tretji pa ne, kar kaže, da je prišlo do Bose-Einsteinove kondenzacije. Stranica slike ustreza $0,87 \text{ mm}$.

Slika 5. Delež atomov natrija v kondenziranem jedru oblaka pod temperaturo prehoda T_0 je v magnetni pasti, ki jo lahko opišemo s trirazsežnim harmoničnim potencialom, enak $1 - (T/T_0)^3$ [10]. Zveza (7) velja le za atome v neskončni kockasti potencialni jami, S. R. de Groot, G. J. Hooyman, C. A. ten Seldman, *On the Bose-Einstein condensation*, Proc. Roy. Soc. A **203** (1950) 266.



Kot kaže, se nobena druga raziskovalna skupina ni lotila raziskovanja Bose-Einsteinove kondenzacije v oblaku alkalijskih atomov. Le Daniel Kleppner z MIT s sodelavci nadaljuje poskuse, da bi dosegel kondenzacijo v oblaku vodikovih atomov [9]. To raziskovanje je pripeljalo do uporabe alkalijskih atomov, ki jih je lažje zajeti v past in opazovati. Bouldrska skupina in

skupina z MIT delo uspešno nadaljujeta. Druga skupina je uporabila magnetno past v obliki deteljice, ki nima omenjene napake in s katero je uspelo kondenzirati pol milijona atomov. V tej pasti magnetno polje ustvarita dve skupini po pet tuljav: tuljavo zgoraj in spodaj obdajajo po štiri enake tuljave kot listi štiriperesne deteljice [10]. Obe skupini sta razvili način za neposredno opazovanje oblaka s svetlobo. Ni bilo več treba izključiti magnetne pasti in opazovati, kako so se razbežali atomi, s curkom svetlobe, ki je oblak segrel, da ga je bilo treba vselej znova nakopičiti in ohladiti. Zasledili so nihanje kondenziranega oblaka in izmerili frekvence v radialni in aksialni smeri [8]. Opazovali so dva kondenzirana oblaka rubidijevih atomov, ki sta se delno prekrivala. Atomi so bili v enem v stanju $F = 1$, $M_F = -1$ in v drugem v stanju $F = 2$, $M_F = 2$. Z atomi kalija je uspelo narediti zasnovo laserja na atome. V pasti z dvema območjema so dobili dva kondenzirana oblaka in nato past izključili, da sta se oblaka razširila in se začela prekrivati. V gostoti atomov so se pokazale interferenčne proge, kar je pričalo, da je bilo mogoče oblaka opisati z valovnimi funkcijama z določeno fazno razliko, ki sta spominjali na koherentni stanji, s kakršnima opišemo laserska curka. Skoraj vsaka številka Physical Review Letters prinese kaj novega o Bose-Einsteinovi kondenzaciji.

LITERATURA

- [1] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z. Phys. **26** (1924) 178.
- [2] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*; Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften **22** (1924) 261; *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung*; ibid. (1925) 3; ibid. *Zur Quantentheorie des idealen Gases* (1925) 18.
- [3] J. Strnad, *Einstein in kvanti*, Obzornik mat.fiz. **42** (1995) 80.
- [4] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science **269** (1995) 198. Uredništvo je dobilo članek 26.6.1995.
- [5] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1687. Uredništvo je dobilo članek 25.7.1995.
- [6] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3969. Uredništvo je dobilo članek 27.11.1995.
- [7] G. P. Collins, *Quantitative BEC results reported at DAMOP meeting*, Phys. Today **49** (1996) 18 (8)
- [8] C. C. Bradley, C. A. Sackett, R. G. Hulet, *Bose-Einstein condensation of lithium*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 985
- [9] D. Kleppner, *The fuss about Bose-Einstein condensation*, Phys. Today **49** (1996) 11 (8)
- [10] M.-O. Mewes, M. R. Anderson, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, W. Ketterle, *Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 416

OB STOLETNICI SLOVENSKIH UČBENIKOV MATEMATIKE ZA GIMNAZIJE

PETER LEGIŠA

Math. Subj. Class. (1991) 01A55, 00A35

Predstavljene so nekatere značilnosti prvega kompleta slovenskih matematičnih učbenikov za gimnazije avtorja Blaža Matka in sodelavcev.

THE CENTENNIAL OF THE SLOVENE MATHEMATICAL TEXTBOOKS FOR HIGH SCHOOLS

We present some characteristics of the first complete set of Slovene mathematical textbooks for high schools by Blaž Matek and coauthors.

Kot avtor matematičnih učbenikov za gimnazije sem bil povabljen, da na 48. občnem zboru našega društva v Postojni podam nekaj vtisov o knjigah Blaža Matka [1], čeprav je o njih marsikaj napisala že Agata Tiegl v knjižici [2]. Za Obzornik sem takratno predavanje nekoliko razširil.

Pred več leti sem si pogledal Močnikove učbenike, ki so me zelo navdušili. Ker so Močnikove knjige okrog petdeset let starejše, jih zaradi pridiha starinskosti morda človek nehote presoja nekoliko mileje. Pri Matku imam bolj mešane občutke, morda tudi zato, ker je marsikaj v njih podobno pouku v času, ko sem sam hodil v šolo.

Začnimo s knjigo Aritmetika za nižje gimnazije, Prvi del (1896). Zelo značilen je uvod, v katerem zremo: „Stvari vsakdanjega življenja in tudi našega mišljenja so *iste vrste* ali *raznih vrst*. Stvari iste vrste moreš zameniti drugo za drugo ali popolnoma ali vsaj deloma; stvari raznih vrst pa se ne dado tako zamenjevati. N. pr. ure in dnevi so stvari iste vrste, ker moreš nadomestiti ure z dnevi in dneve z urami; namesto osem in štiridesetih ur postaviš lahko dva dneva, in tri dneve smeš zamenjati z dva in sedemdesetimi urami; ali: osem ur dà tretji del dneva, in polovica dne je jednaka dvanajstim uram. Leto in kilometer sta dve stvari raznih vrst... Vsaka stvar, ki je sestavljena iz enakih delov ali iz delov iste vrste ali se dà vsaj tako misliti, imenuje se *količina*. Bistvena lastnost vsake količine je, da jo moremo povečati in zmanjšati. Količine so: števila, ploskve, črte i.t.d.”

Tovrstnega razglabljanja je še več. Spomnim se, da sem bral spomine dijaka iz tistih časov, ki je imel s svojimi sotovariši grozne težave z obnavljanjem tovrstnih trditev. Morda je šlo za pretirano željo delati red in spravljati pojme v predalčke, kar je bilo značilno za takratno avstro-ogrsko družbo. Seveda pa so taki odlomki s precej subjektivnimi, odvečnimi in deloma tudi dvomljivimi izjavami z videzom dokončne objektivnosti učitelju dajali možnost kadarkoli dokazati svojo superiornost in avtoriteto proti učencem.

Knjižica obravnava računske operacije v decimalnem zapisu, sprva z nenegativnimi celimi števili, nato tudi s poljubnimi nenegativnimi decimalnimi ulomki in navadnimi nenegativnimi ulomki. Po prvih treh računskih načinih (seštevanju, odštevanju in množenju) imamo takole besedilo:

„4. *Odštevaj od števila 12 število 4 tolikokrat, kolikokrat je mogoče!* Število, ki ga iščeš, nam pove, kolikokrat se 4 nahaja v 12. Ta računski način je *merjenje*; pisмено se zaznamuje takó-le:

$$12 : 4 = ?$$

5. *Razdeli število 12 na toliko enakih delov, kakor kaže število 4!* Število, ki ga iščeš, je četrti del števila 12. Ta računski način se imenuje *deljenje v pravem ali ožjem pomenu* te besede. Deljenje se pisмено zaznamuje ravno tako kakor merjenje.

Ako je treba dve določeni števili meriti ali deliti drugo z drugim, dobimo v obeh slučajih isti rezultat, če se namreč ne oziramo na njegov pomen. Zato se smatrata četrti in peti računski način, akoravno sta po svojem bistvu zelo različna, samo za jeden računski način, ki se imenuje *deljenje v širjem pomenu* te besede.”

Malo naprej: „Po navedenem pojasnilu o množenji nimata nalogi $8 \times 1 = ?$ in $8 \times 0 = ?$ nobenega pravega pomena; kajti določeno število je- denkrat, oziroma ničkrat sešteti, je brez smisla. Da moreš v takih slučajih določiti produkt, treba je faktorja zamenjati;...”

Citati naj bi podali vtis, kako gostobesedno so razložene računske operacije. Res pa je, da je na tem nivoju (ki odgovarja srednjim razredom naše osnovne šole) to še danes problematično in imamo pogosto ekstreme v drugo smer, se pravi, da so knjige praktično brez razlage.

Včasih je vsaka stvar imela svoje ime:

„Vsako število, katero ima jednote le jednega imena, imenuje se *jedno- imensko število*. N. pr. 18 *m*, 236 *hl* i.t.d. Vsako število pa, ki ima jednote raznih imen iste vrste, zove se *mnogoimensko število*. N. pr. 4 *kg* 25 *dkg*,...”

Knjiga vsebuje tudi poglavje o deljivosti, sklepni račun in obrestni račun ter razmerja in sorazmerja, kjer zvemo:

„Razmerje med dvema neimenovanima številoma imenujemo *čisto šte- vilno razmerje*, razmerje med dvema istovrstnima količinama (dvema ime- novanima številoma iste vrste) pa *količinsko razmerje*. Tako je n. pr. $12 : 4$ čisto številno razmerje, $12\ m : 4\ m$ pa količinsko razmerje...”

Na koncu imamo Vadbe in naloge za vsa poglavja:

„Slovenski pesnik in pisatelj Vodnik se je porodil 3. februarja leta 1758 in je doživel 60 let 11 mesecev 28 dnij; kedaj je umrl?

Na ladji je 36 mornarjev, ki imajo živeža za 60 dnij; 12 dnij potem, ko so se odpeljali, utonilo je vsled viharja 20 mož; kako dolgo izhajajo ostali mornarji z živežem, kar ga je še ostalo?

Uradnik dobi s 15 % priklado 1836 gl plače na leto; koliko znaša priklada?

Iz 160 *kg* apnenca se dobi $81\frac{1}{5}$ *kg* živega apna; koliko % izgubi apnenec pri žganju?

Gospod obljubi svojemu slugi na leto obleko in 144 gl; čez 3 mesece ga odpusti in sluga dobi obleko in 18 gl; za koliko se mu je zaračunala

obleka? (Koliko denarja in koliki del obleke zasluži sluga na mesec? Koliko v 3 mesecih? Nezasluženi del obleke je toliko vreden, za kolikor dobi sluga premalo denarja.)

Dvakrajcarska žemlja tehta $8\frac{3}{4}$ *dkg*, ako velja *hl* pšenice 9·3 *gl*; koliko bi moral *hl* pšenice veljati, da bi tehtala taka žemlja 9 *dkg*?"

Tudi drugi del gornje knjige (1898) v uvodu ponovi nekaj iz prvega, doda pa še v istem slogu:

„Ako hočemo zaznamovati neznano ali nedoločeno množino jednot, ne moremo rabiti posebnih števil in njih znamenj; treba je nove vrste števil – in to so *občna števila*.

Različne črke zaznamujejo v jednom in istem računu različna števila.

Znaki za osnovne računske načine, t.j. znaki za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje so pri občnih številih isti kakor pri posebnih."

Izraz $a + b$ (pa tudi $4 + 5$) je knjiga imenovala *nakazana vsota* oziroma *nakazano seštevanje*. Značilno je opisovanje formul z besedami. Distributivnost $ma + na = (m + n)a$ je razložena takole:

„Istoimenske izraze sešteješ, ako sešteješ njih koeficiente in pridržiš skupno glavno količino."

In še: „Raznoimenske izraze sešteješ, ako nakažeš seštevanje. N. pr. $3a + 5b + 9c$."

„Števila s predznakom + imenujemo *pozitivna*, števila s predznakom – pa *negativna* števila. Pozitivna in negativna števila imajo skupno ime *relativna* ali *algebrajska* števila. Števila, ki nimajo nobednega predznaka, zovejo *seabsolutna*". Ali bi po vsem tem znali odgovoriti na vprašanje: „Ali je različna pozitivna jednota od absolutne?"

Dve strani kasneje se kot strela z jasnega pojavi pojem absolutne vrednosti: „*Dvoje algebrajskih števil z istim predznakom sešteješ, ako sešteješ absolutni vrednosti in pridržiš skupni predznak*."

Bolj znano zveni pravilo: „Potence iste podloge množiš, ako pridržiš skupno podlogo ter sešteješ potenčne eksponente." Za potenco je knjiga uporabljala tudi izraz „vzmnož", ki pa se očitno ni prijel. Kot se za tisti čas spodobi, je v knjigi pravilo za kvadriranje števil v desetiškem zapisu; izpeljano pa je z besedami, brez formul. Enako je z algoritmom za računanje kvadratnega korena. Zanimivo je, da v obeh postopkih včasih uporablja okrajšano deljenje.

Sledi Računanje z ulomki in nato Računanje z nepopolnimi števili, kjer zvemo:

„*Vsako celo ali desetinsko število, katerega vrednost moremo le približno povedati ali določiti, imenujemo nepopolno število*. N. pr. Cesta od *A* do *B* je približno 8215 *m* dolga; ali $\frac{2}{3}K$ je približno 67 vinarjev; ali $\sqrt{2}$ je približno $= 1.41421\dots$ Včasih je treba tudi popolne računske zneske pretvoriti v nepopolna števila, da dobijo dotični zneski pomen. N. pr. Ako velja 1 *kg* nekega blaga 1.21 *K*, velja 6.34 *kg* 7.6714 *K*. Ker ne moremo v prometu izplačati vinarских deset in stotin, treba je torej navedeni znesek pretvoriti v 7.67 *K*." Tako se nam razjasni, da gre za računanje s približki. Mimogrede,

knjiga je uporabljala decimalno piko zgoraj, tako kot to počnemo danes. Pri okrajšavah je bilo pravilo takole: „Zadnjo številko okrajašanega števila povečaš za jednoto, ako je prva številka, ki jo izpustiš, večja od 5 ali pa 5 z naslednjimi veljavnimi številkami; v vsakem drugem slučaju pustiš zadnjo številko okrajašanega števila neizpremenjeno.” In še:

„Izmed dveh nepopolnih števil je tisto popolnejše, ki ima več veljavnih števil. Če pa imata obe števili jednako veliko veljavnih števil, je tisto popolnejše, v katerem najdeš (od leve proti desni) poprej večjo številko. Vsako popolno število je popolnejše ko katerokoli nepopolno število.”

Kot običajno je nadaljnja vsebina mnogo boljša od tega uvoda.

Sledita tretja potenca („kubovanje”) in tretji koren, nato pa „Jednačbe”. Tu tekst postane prav dober. Sploh je opazno: bolj ko je snov zahtevna, bolje je napisana knjiga. Res pa pri odpravljanju korenov v enačbah avtor ne opozori, da s kvadriranjem ne dobimo enakovredne enačbe. Spet pa imamo zoprno vprašanje: „Kedaj rabiš prištevanje, oziroma odštevanje, množenje, deljenje, vzmnoževanje in korenjenje?”

Sledijo „Črkinе jednačbe”, v katerih poleg neznank nastopajo še drugi parametri, seveda na tem nivoju brez vsake diskusije, ter enačbe z dvema neznankama in s tremi neznankami. Za „eliminirati” knjiga uporablja izraz „iztrebiti”. Sledi daljše in dobro razčlenjeno poglavje o uporabi enačb, se pravi o besednih problemih, ki zajemajo tudi obrestni račun:

„Ako posodi A sosedu B novcev, imenuje se A upnik, B pa dolžnik. Posojeni novci se zovejo *glavnica* ali *kapital*, nagrada pa, katero mora dolžnik plačevati upniku zato, da sme rabiti njegov denar, imenuje se *obrest*.” Za predčasno vrnjeno posojilo se je odobral *diskont*. Posebno poglavje je bilo: Delitev po določenih pogojih in zmesni račun. Vsi tipi nalog so se ponovili pri sistemih enačb z dvema in s tremi neznankami. Navedimo nekaj zgledov iz knjige:

„Katero število je za 23 večje nego vsota iz njega četrtrine, petine in šestine?

Neki kot in njegov sokot sta si kakor 3 : 5; kolik je dotični kot?

V neki družbi je dvakrat toliko gospodov kakor gospà; ko pa je odšlo 12 gospodov s svojimi gospémi, ostalo je 4krat toliko gospodov kakor gospà. Koliko je bilo gospodov in koliko gospà?”

Seveda je v knjigi tudi Sestavljeni sklepni račun s premo in obratno sorazmernimi količinami. Pri Obrestnoobrestnem računu so navedene kar tabele za naslednje mere: 2 %, $2\frac{1}{2}\%$, 4%, 5%, za obdobja od 1 do 15 let. Očitno je bil takratni finančni sistem zelo stabilen.

„Vadbe in naloge” so na koncu za vsa poglavja skupaj. (Seveda pa so bili v tekstu že dani primeri.) Za dijake so morala biti problem ustna vprašanja kot: „Kaj si je treba zapomniti o rabi občnih števil nasploh?” Sicer pa je več zanimivih in značilnih nalog:

„Krčmar prilije 23 *hl* vina po 25 gl. 2 *hl* vode; koliko vina ima potem? Koliko velja to vino? Koliko je vreden 1 *hl*?”

Zanimivost so tudi Skupinske mere:

„12 komadov ali kosov se imenuje dvanajsterica (ali tucat); 15 komadov = 1 stava; 60 komadov = 1 kopa; 12 dvanajsteric = 1 gro.

Papir štejemo takó-le: 10 pol = 1 lega ali 1 snopič, 10 leg = 1 knjiga, 10 knjig = 1 rizma, 10 rizem = 1 bala. ”

Novci so bili zlati, srebrni, nikljevi in bronasti. Preseneti nas, da so dana valutna razmerja za funt sterling, francoski frank, marko in dolar na 5-7 mest natančno. Pojasnilo: „Zlati novci raznih držav se primerjajo drugi drugim gledé na množino čistega zlata, ki se nahaja v dotičnih novcih. Ta pomen imajo gornji podatki. V prometu nimajo zlati novci raznih držav stalne cene; njih cena se izpreminja kakor cena pri blagu.” Takrat so mnoge valute še imele kritje v zlatu, rubelj pa po vsem sodeč v srebru.

Ob strani so bili v vseh teh knjigah drobno tiskani nemški izrazi za nekatere od uporabljenih pojmov.

Preidimo zdaj na Aritmetiko in algebro za srednje in višje gimnazijske razrede (1909). Marsikaj v tej knjigi je dobesedno enako kot v prejšnji. Spet imamo Pojasnila:

„Ako imamo množino stvari iste vrste, pravimo vsaki stvari *enota*; izraz za vse stvari te množine se zove *število*. S številom določamo, koliko istovrstnih stvari imamo v mislih. Enote sestavljajo število.

Matematične osnovne resnice so te-le:

1. Enake količine smeš povsod zameniti med seboj.
2. Ako izpremeniš enake količine na isti način, najdeš enake količine.
3. Vsaka celota je tolika, kolikršni so vsi deli te celote skupaj; torej je vsaka celota večja ko del te celote.”

Prvo poglavje je: Osnovni računski načini s celimi števili. Tu zvemo: „Multiplikand in multiplikator imata skupno ime zmnožkova *činitelja* ali produktova *faktorja*. ”

Poglavje 10 ima naslov Množenje in deljenje enačb in neenačb. Tu naletimo na hud spodrsaljaj:

„b) Ako množiš (*deliš*) neenake številne izraze z enakimi izrazi, najdeš v istem zmislju neenake zneske, v znakih $a > b, c = d$, pomnoženo $ac > bd$. . . **Dokaz.** Iz $a = b + f, c = d$ pomnoženo sledi $ac = bd + df$, . . . torej je po osnovnih resnicah $ac > bd$. . .

c) Ako množiš enake številne izraze z neenakimi izrazi, najdeš v istem zmislju neenake izraze, v znakih iz $a = b$ in $c > d$ sledi $ac > bd$. Dokaz je popolnoma sličen dokazu pod b).”

Povem pa naj, da sem tudi sam v srednji šoli doživel pri pouku podobno pomoto, ko je šlo za določevanje brega premice, čeprav je bilo pravilo v učbeniku korektno. Bilo si ga je pač težko zapomniti. Prav zanimivo je, kako se iz generacije v generacijo čeri pojavljajo na istem mestu.

Pri Številnih sestavih imamo tudi sestav s „podlogo” 8. Deljivost obravnava Evklidov algoritem.

Nato pride Računanje z ulomljenimi števili. Tu imamo zelo dvomljive trditve:

„Ulomkova vrednost je neizrečeno velika, če je števec neizrečeno velik, ali pa imenovalec = 0. **Dokaz.** Če seštejemo ulomljeno enoto $\frac{1}{b}$ neizrečeno velikokrat, je očitno, da mora ulomkova vrednost postati neizrečeno velika, v znakih $\frac{1}{b} \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$. Jasno je, da morata obratni vrednosti dveh enakih številnih izrazov biti enaki. Če vzamemo pri številnih izrazih v enačbi $0 = \frac{a}{\infty}$ obratni vrednosti, najdemo $\frac{1}{0} = \frac{\infty}{a} = \infty$; torej je tudi $\frac{a}{0} = \infty$.” Kot vemo, so se podobne stvari našle pred deset in več leti celo v matematičnih priročnikih. Nekateri zmote so pač izredno trdovratne. Pri tej knjigi pa je presenetljivo, da je na straneh 30, 31, korektno napisano:

„Kvocijent se ne da določiti, ako je divizor = 0. Kajti za kvocijent $0 : 0$ smeš vzeti vsako število x , ker je $x \cdot 0 = 0$. Kvocijent $a : 0$ pa je nemogoč, ker ni števila, ki bi z ničlo pomnoženo dalo produkt a .”

Pri decimalnih ulomkih zvemo: „Tisti decimalni ulomek, v katerem se ponavljajo vse desetinke, se imenuje *čisto periodičen decimalni ulomek*; decimalni ulomek pa, v katerem se ponavljajo le nekatere desetinke, se zove *nečisto periodičen decimalni ulomek*. Tako je npr. $\frac{19}{300} = 0,06\bar{3} \dots$ nečisto periodičen decimalni ulomek.”

Navedimo še citat o računanju s približki: „Pri računanju z nepopolnimi števili je treba gledati na to, da se noben znesek ne določi dalje ko do tistega mesta, na katerem se začenja nepopolnost, in da se končni znesek določi ali tako natanko, kakor je sploh mogoče, ali pa natanko, kakor je nalogi primerno.” Precej prostora je posvečeno tudi okrajšanemu računanju.

Tretji veliki razdelek so Razmerja in sorazmerja. Tu imamo ogromno definicij in pravil ter uporabo pri sorazmernih količinah. Danes je, prav nasprotno, v osnovni šoli tega zelo malo.

Eno od naslednjih poglavij je Določanje točkine lege in načrtavanje linearne funkcije. Vpeljani so pojmi: pravokotno soredje, sorednici ali koordinati, odsečnica ali abscisa, rednica ali ordinata. Srečamo se tudi z grafičnim reševanjem sistema dveh enačb: „Ako poiščemo enačbama ustrezni funkcijski črti in narišemo skupni točki teh črt koordinati ter ju izmerimo kolikor mogoče natanko, najdemo (približno) skupno razrešitev obeh določenih enačb. Zakaj je razrešitev navadno le približna?”

Poglavje o uporabi enačb je še razširjeno v primerjavi s prejšnjo knjigo. Nekateri naloge zvenijo znano:

„Zaradi slabe kupčije se odpusti v tovarni 140 delavcev in ostalim se zniža dnina za 15%; na ta način se doseže, da znaša dnina za vse delavce le polovico prejšnje dnine. Koliko delavcev je bilo sprva v tovarni?”

Poglavje Vzmnoževanje enačb in neenačb... vsebuje pravilo:

„Vsaka pozitivna (cela) potenca pravega ulomka je zopet pravi ulomek, ki je tem manjši, čim večji je potenčni eksponent. **Dokaz.** Ako a pomeni vrednost pravega ulomka, je $1 > a$ in $\dots a > a^2 \dots$, torej je $1 > a > a^2 > a^3 \dots$ ”

Pri korenjenju: „Števila, katerih vrednost leži med dvema zaporednima ulomljenima številoma in se da s pomočjo ulomkov le približno določiti, toda tako natanko, kakor želimo, se imenujejo *nerazložna ali iracionalna števila*;

cela in ulomljena števila pa se zovejo *razložna ali racionalna števila*. Prva števila se ne dajo popolnoma natanko razložiti na enote ali enotne dele, pri zadnjih številih pa je to mogoče.”

Zanimivost: *Korenski izraz z negativnim eksponentom je enak obratni vrednosti dotičnega korenskega izraza s pozitivnim eksponentom, v znakih*

$$-\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

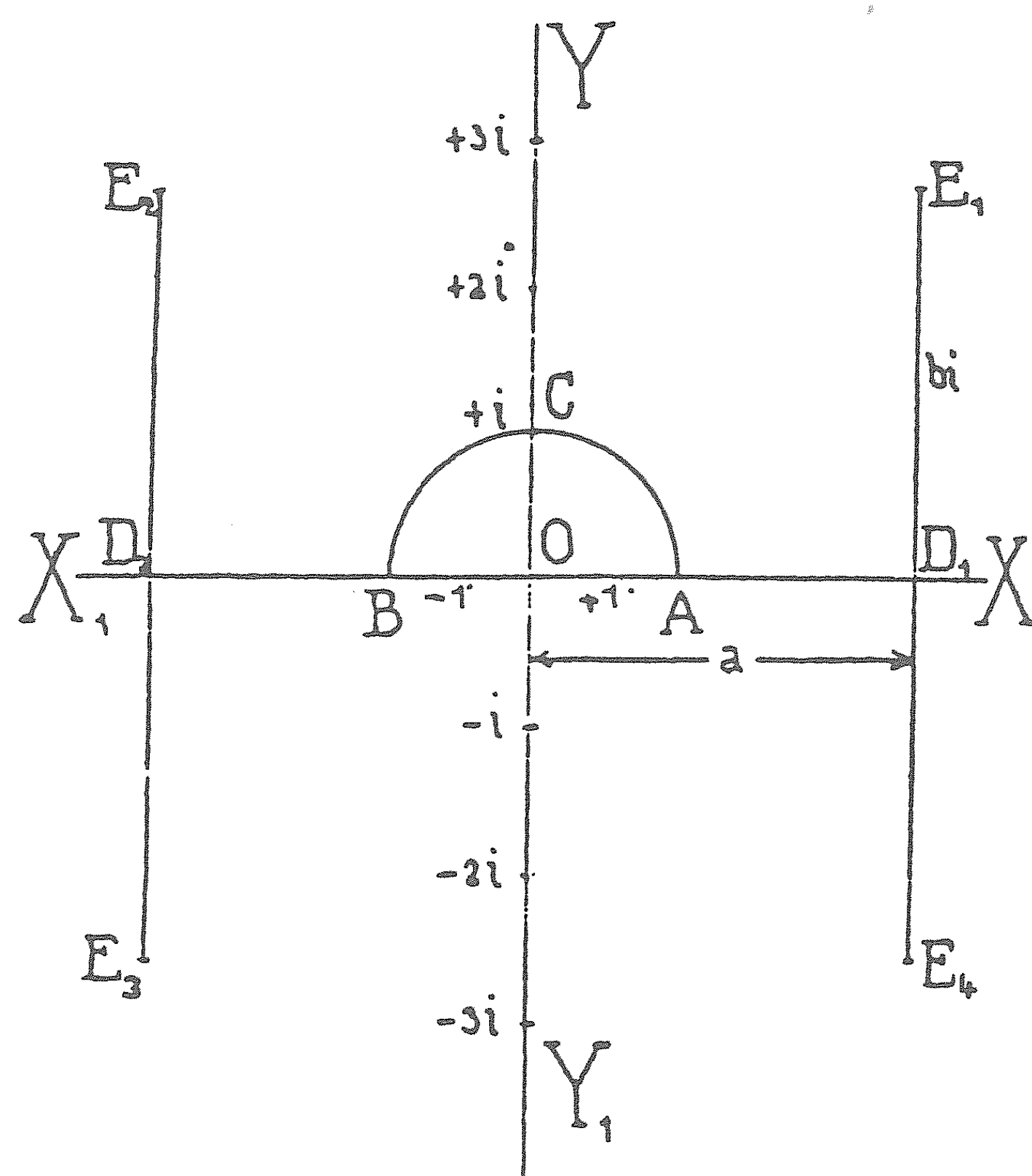
Definirana je potenca z ulomljenim eksponentom in tudi koren z ulomljenim eksponentom:

$$m/\sqrt[n]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Na koncu knjige zvemo: „Zato moremo sode korene iz negativnih števil smatrati za neko novo vrsto števil. Ta števila se zovejo *umišljena* ali *imaginarna števila*, ker nimajo stvarne podlage...” „Kompleksni števili $a + bi$ in $a - bi$, ki se razlikujeta le v predznaku imaginarnega dela, se imenujeta *spojeno kompleksni*.” Zanimiva je tudi vpeljava grafičnega prikaza kompleksnih števil.

Kako predočujemo s sliko imaginarna in kompleksna števila.

Imaginarna števila in njih zvezo z realnimi števili predočujemo v sliki tako-le. Iz enačbe $i^2 = -1$ sledi sorazmerje $(+1) : i = i : (-1)$, t. j. imaginarna enota je srednja geometrijska sorazmernica med pozitivno in negativno (realno) enoto.



Če predstavlja OA pozitivno, OB negativno enoto in ako narišemo nad daljico BA polukrog in $OC \perp BA$, je $OA : OC = OC : OB$, torej $OC = i$. Ako načrtamo daljico OC večkrat na premici YY_1 v smer OY in OY_1 , dobimo v smeri OY pozitivna imaginarna števila $+i, +2i, +3i, \dots$, v smeri OY_1 pa negativna imaginarna števila $-i, -$

$-2i, -3i, \dots$. Vrsta imaginarnih števil stoji torej pravokotno z ozirom na vrsto realnih števil.

Na koncu imamo Vadbe in naloge za vsa poglavja, kot npr.: „Koliko kubičnih metrov smrekovega lesa, ki ima specifično težo 0'65, moraš zvezati z granitno kocko, ki ima 2'85 specifične teže in 10 m^3 prostornine, da plavata spojeni telesi popolnoma v vodi?

Geometrija za nižje gimnazije, Prvi del (1896) ima tudi Uvod, kjer zremo: „*Geometrijsko telo je na vse strani omejen prostor.*

Kocka je telo; razprostira se: 1.) od desne na levo (na dolžino), 2.) od spredaj navzad (na širino), 3.) od spodaj navzgor (na višino).

Kakor kocka ima tudi valj, krogla in vsako drugo telo trojno glavno razsežnost: dolžino, širino in višino.

Namesto besede „višina“ rabimo pri nekaterih telesih besedo „globočina“, pri drugih pa besedo „debelina“.

„Meje telesu so *ploskve*. Kocko n. pr. omejuje šestero ravnih ploskev, valj dve ravni in jedna kriva, kroglo pa le jedna kriva ploskev.

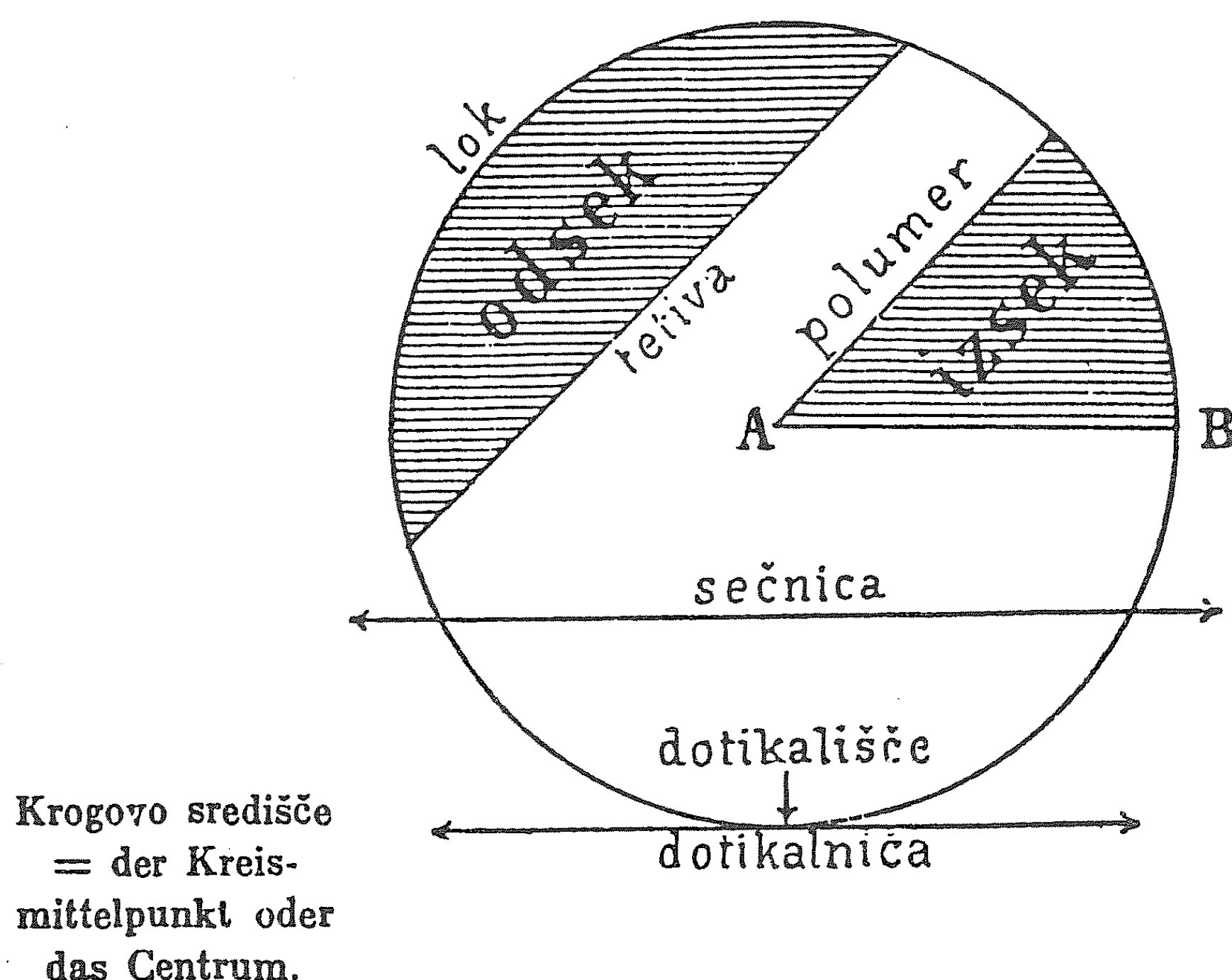
Vsaka ploskev se razprostira v dvojno glavno smer: od desne na levo (na dolžino) in od spredaj navzad (na širino), ali pa: od desne na levo in od spodaj navzgor (na višino).

Da uvidimo dvojno glavno razsežnost krivih ploskev, treba je vsako tako ploskev v mislih primerno prerezati, jo raztegniti in zravnati...

Točke, črte, ploskve in telesa imenujemo geometrijske *stvore*.”

Dejstvo je, da je vse te pojme na osnovnošolskem nivoju tudi danes težko razložiti, tako da ne moremo biti kaj dosti kritični do gornjih citatov, ki vsebujejo zdravo jedro.

Sicer pa je v knjigi standardna snov iz planimetrije, na katero nimam posebnih pripomb. Dejal bi lahko, da je kar zahtevna za ta nivo. Konveksni štirikotniki so bili klasificirani malce drugače kot danes (npr. kvadrat ni bil tudi romb).



Na koncu imamo Vadbe in naloge:

„Ali je vsak kot someren stvor in zakaj?

Kje leži vsaka taka točka, ki je od obeh krakov določenega kota enako oddaljena?

Ali se da deltoidu včrtati krog?"

Drugi del iste knjige obravnava ploščino, podobnost in stereometrijo. Preseneti nas:

„Vsaka ploskev, v kateri moreš premice risati na vse strani, imenuje se *ravna ploskev* ali *ravnina*... Ravnina utegne biti: 1. *neomejena*, 2. *na pol omejena*, 3. *popolnoma omejena*. Ako govorimo o neomejeni ravnini, imenujemo jo naravnost *ravnino*... Popolnoma omejeni ravnini pravimo *raven lik* ali *ravna ploskev*.”

Sicer pa je mnogo snovi podane skoraj dobesedno tako kot danes.

Uganka je naslednja naloga:

„Kolikokrat se mora v 1 minuti zavrteti mlinski kamen, ki ima $1{,}35\text{ m}$ v premeru, da dobode točka na obodu hitrost $10{,}5\text{ m/s}$?” (Verjetno bi moralo tu in še marsikje drugje pisati na koncu m/s .)

Še dve nalogi:

„Krogla, ki ima 92 mm v premeru, zavrti se na nekem kegljišči 36 krat; kako dolgo je kegljišče?

Kvadratu je očrtan in včrtan krog; kako so si površja, kako prostornine teles, ki nastanejo, ako zavrtiš kvadrat okoli jedne diagonale tako, da se povrne v prvotno lego?” (Treba je bilo določiti razmerja prostornin.)

V Geometriji za srednje in višje gimnazijske razrede, Prvi del (1909) je planimetrija ponovno obdelana, vendar hitreje in s težjimi nalogami. Geometrijski stvari so se spremenili v tvore. Zvemo še:

„Dve daljici sta *enaki* (*skladni*), ako se, položeni druga na drugo, pokrivata popolnoma. Če pa gleda ena daljica izpod druge, sta daljici *neenaki*; tista, ki gleda izpod druge, je večja.”

Seveda tu nimamo aksiomatske obravnave. Avtor se večkrat skliče na načrtovanje ali pa uporablja za dokaze toge premike – vrtenja, zrcaljenja, translacije, ne da bi se pred tem kaj ustavljal pri njihovih lastnostih. Sploh je težišče knjige na načrtovalnih nalogah. Citirajmo:

„Nalogo si mislimo rešeno, t. j. zahtevani lik si načrtamo ter zaznamujemo in izvršimo v njem vse nalogne pogoje. Potem preiskujemo, kako se dado s pomočjo določenih sestavin načrtati ali posamezni deli zahtevanega lika, ali pa pomožen lik, iz katerega se da izvesti zahtevani lik. Tako izvemo način načrtavanja, in to se imenuje *razklad* ali *analiza* naloge. Potem se izvrši načrtavanje. Iz analize in načrtavanja sledi *dokaz* o pravi razrešitvi naloge. Končno je treba preiskati, koliko razrešitev ima naloga, in kdaj je nemogoča; tako tolmačenje se imenuje *determinacija*.”

Stvar je bila zastavljena malce preambiciozno, še posebno za ta nivo. Na str. 37 imamo npr. nalogo:

„Načrtaj trikotnik, v katerem je ena stranica $= a$, tej stranici pripadajoča višina $= v_a$ in isti stranici pripadajoča srednjica $= s_a$!” (Opozorimo, da je srednjica v tem primeru pomenila težiščnico.) „... **Determinacija**. Naloga ima eno razrešitev in je mogoča, kadar je $s_a \geq v_a$; zakaj

samo po sebi se razume, da more daljica s_a ležati le na eni strani daljice v_a !”

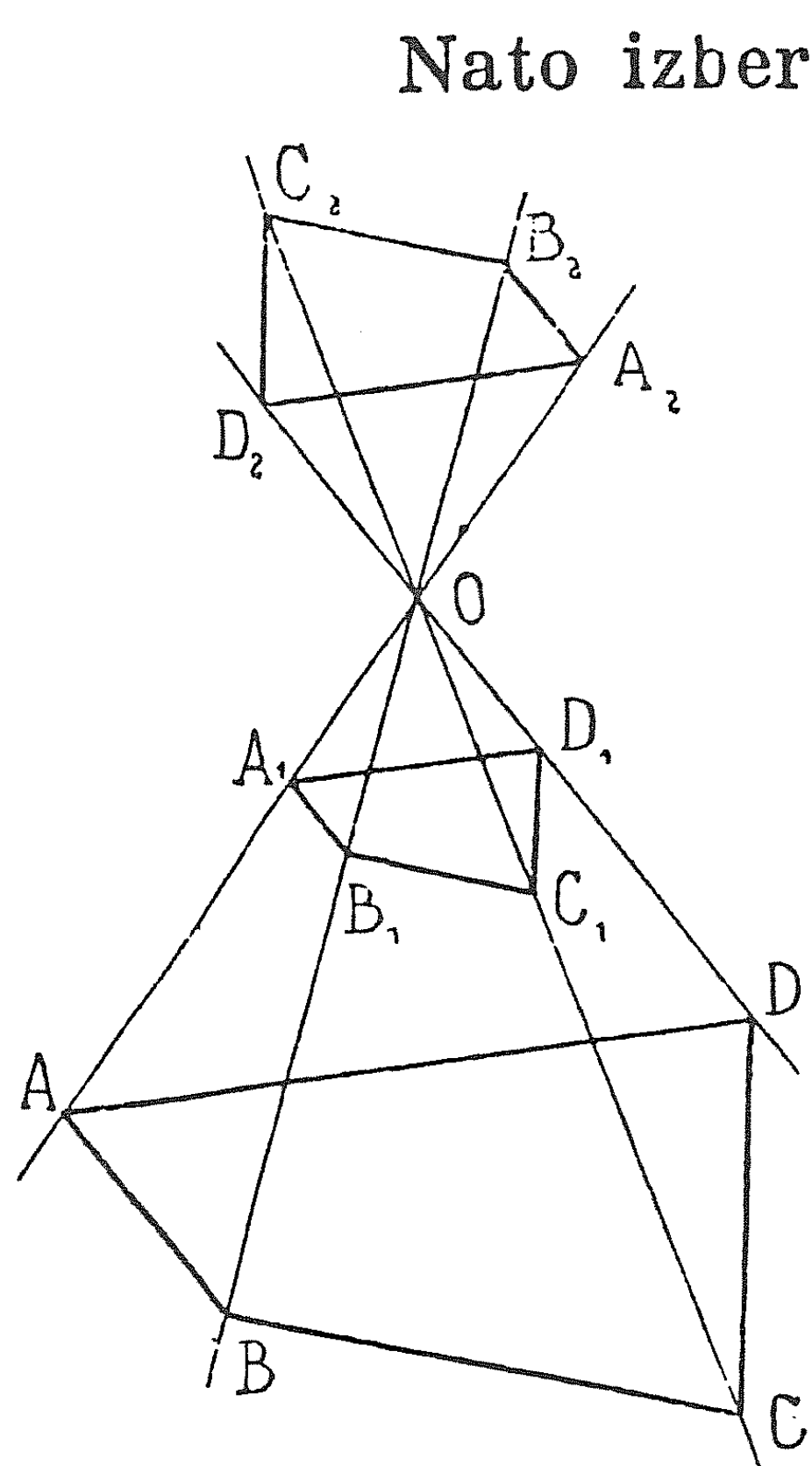
Če je gornja utemeljitev determinacije rahlo nerazumljiva, pa je, kot je bilo opaženo že v [2], mnogo hujši spodrseljaj na strani 61, kjer sta zgrešeni tako konstrukcija kot determinacija:

„5. Načrtaj trikotnik iz a, v_a, v_c ! ...

Načrtavanje. Nariši daljico $AB = a$ (slika 61), iz krajišča B lok s polumerom v_b , iz krajišča C ...

Dokaz. Iz analize in načrtavanja sledi, da trikotnik BCA ustreza nalogi.

Determinacija. Naloga ima eno razrešitev, če je $v_b < a$ in $v_c < a$, sicer pa je nemogoča.”



Nato izberi na traku skozi A kjerkoli dve točki

A_1 in A_2 in načrtaj $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel CD$ itd.; tako dobiš tri mnogokotnike $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ki jim vidiš na prvi pogled že gotovo medsebojno sorodstvo. Na podlagi prejšnjega paragrafa razsodimo lahko, da imajo ti trije liki istoležne stranice AB , A_1B_1 , A_2B_2 ... vzporedne in sorazmerne ter enake istoležne kote ($a = a_1 = a_2$...). Rečemo, da so ti trije liki podobni drug drugemu.

Precej prostora zavzema podobnost, ki je obdelana dokaj podrobno, nato pa ploščinsko enaki liki, rezanje na ploščinsko enake dele itd. V zgledih je izpeljan Heronov obrazec in nekatere posledice. Na strani 111 je izrek:

„Obsegi pravilnih, krogu včrtanih mnogokotnikov se večajo, če se večja število stranic. Obsegi pravilnih, krogu očrtanih mnogokotnikov se manjšajo, če se večja število stranic.”

Dokaz pa je narejen le za primer, da število stranic podvojimo. Naloge v tej knjigi so med tekstom.

Zadnja knjiga v tej vertikali je Geometrija za šesti, sedmi in osmi gimnazijski razred (1910). Obravnavane so kotne funkcije, enačbe z njimi in trigonometrija. Zraven so kar težke naloge:

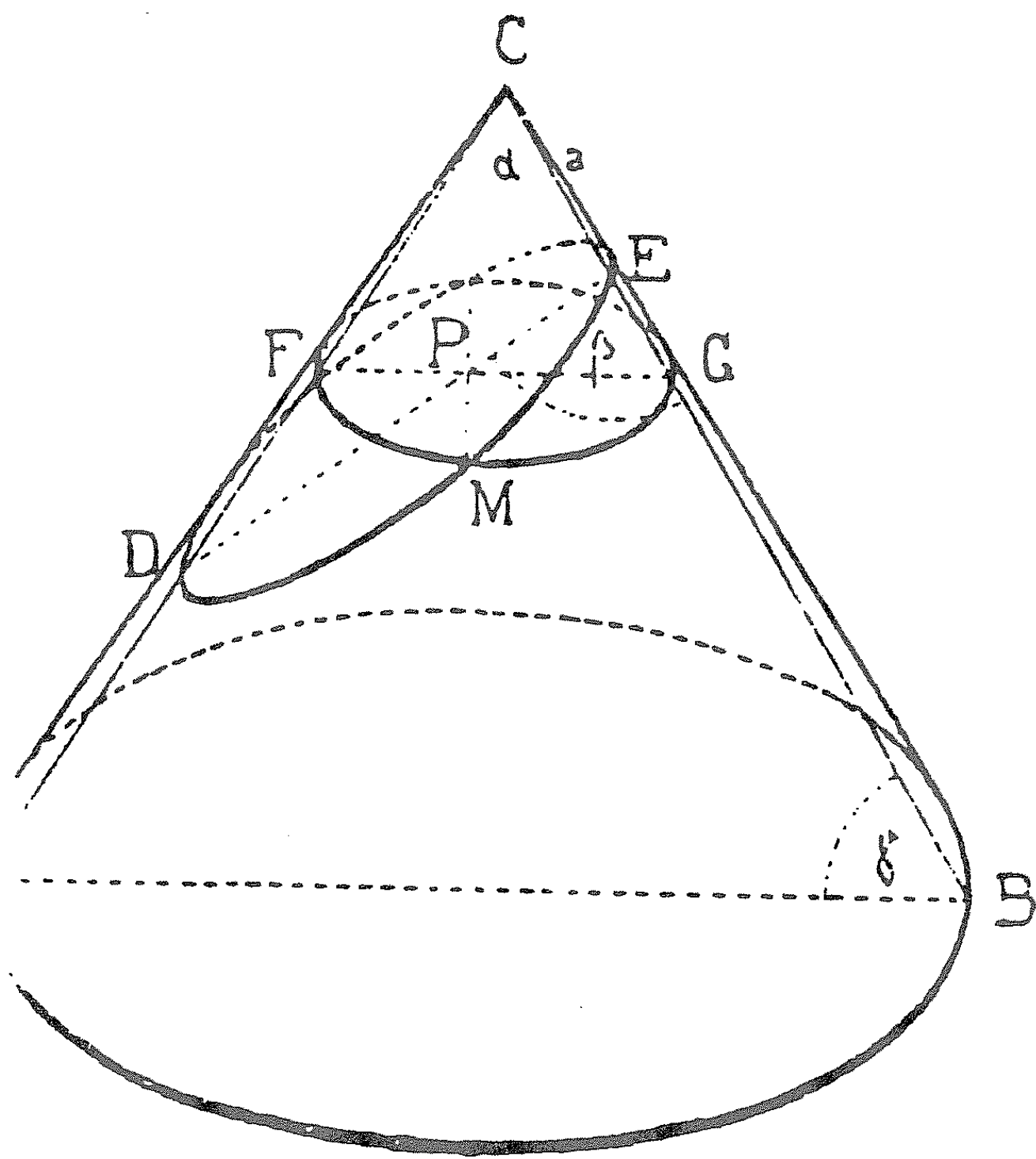
„Ako zavrtiš lok okoli enega njegovih mejnih polumerov, stvariš krogelno kapico, katere ploščina je enaka četrtemu delu krogelne ploskve; kolik je obsrediščni kot, ki pripada določenemu loku?

Razdeli pravi kot na dva dela, tako da je razlika njunih sinusov $\frac{1}{3}$.

Kolika sta ostra kota pravokotnega trikotnika, v katerem je ena kateta a) aritmetična; b) geometrijska sorazmernica med drugo kateto in hipotenuzo?"

Analitična geometrija je podana jedrnato in podobno kot danes. Presenetljiv je eksperimentalni pristop, v katerem od dijakov zahteva:

„Poišči naslednjim enačbam geometrijska mesta: $4x^2 + 9y^2 = 36$, $y^2 = \frac{16}{x^2} - 4$, ...” in šele nato začne z obravnavo premice. Ali je šlo za risanje po točkah? Naloge so spet kar zahtevne in teorija zelo popolna. Obravnava krog, tangento nanj, elipso, hiperbolo in parabolo v središčni legi ter „vrhovno” enačbo teh krivulj (ko se dotikajo ordinatne osi v izhodišču). Dokazano je celo, da so te krivulje *stožkosečnice*.



Na koncu so ponavljalne naloge:

„Koliki so koti pravokotnega trikotnika, katerega stranice tvorijo:

a) aritmetično; b) geometrijsko postopico?

Enakostraničnemu stožcu je včrtana kocka; kako sta si prostornini teh teles?

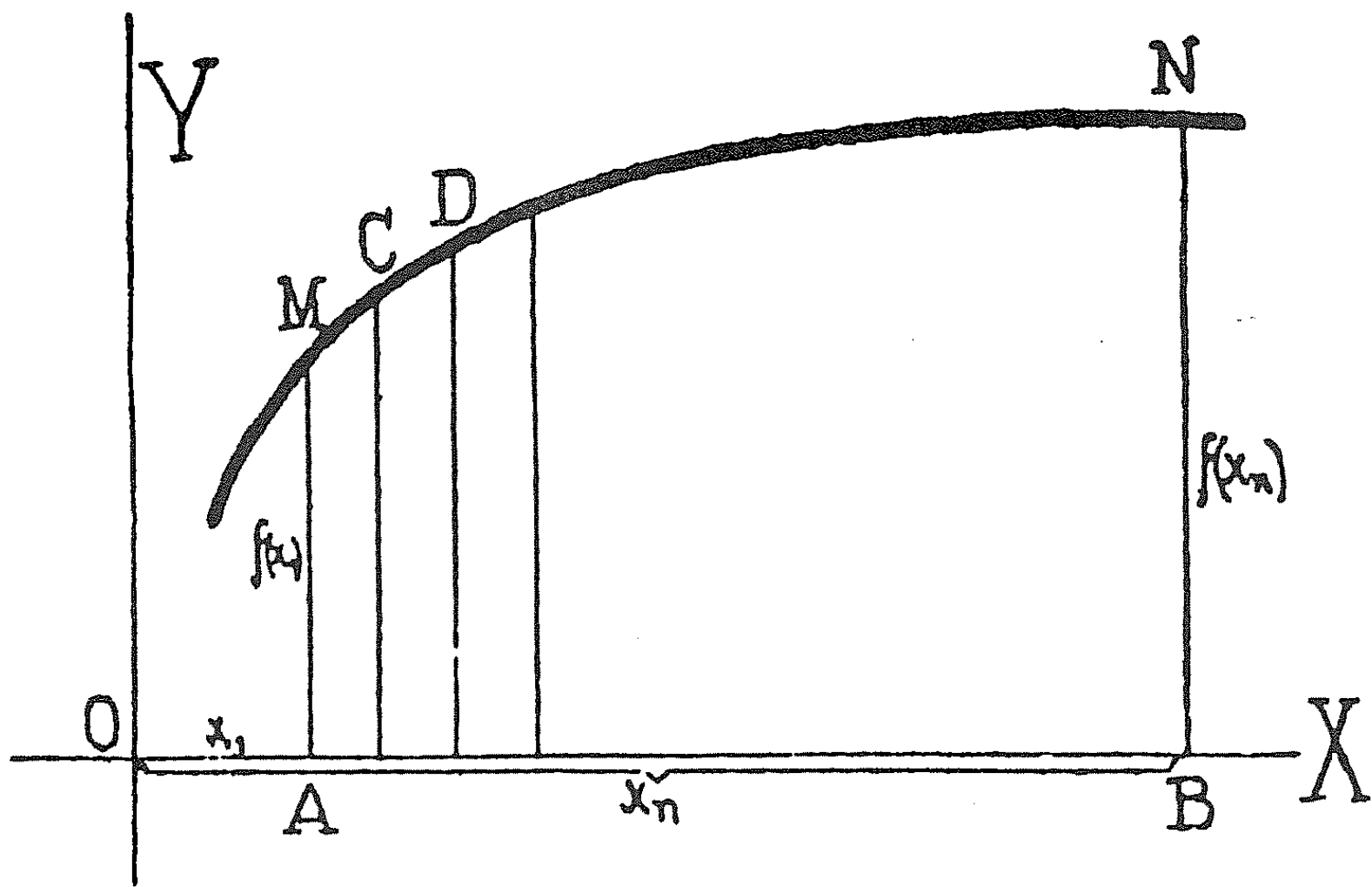
Zavrti premico $3y + 4x + 12 = 0$ okoli tiste točke v tej premici, ki je središču kroga $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ najbližja, in sicer za toliko, da postane premica krogu tangenta, ter določi velikost tega vrteža.”

Na koncu je še sedem strani zanimivih Zgodovinskih dostavkov.

Končno se posvetimo še Aritmetiki in algebri za srednje in višje gimnazijske razrede. Izpopolnil Jakob Zupančič (1910). Tu imamo logaritme, kvadratno enačbo in enačbe višjih stopenj. Veliko je receptov za reševanje posebnih tipov enačb. Imamo tudi *diferencijalni kvocient* in „Pojem o integralu”, ki zelo na hitro vpelje določeni integral in osnovno pravilo integralskega računa. Kot uporaba je navedena prostornina krogle.

Ako razdelimo daljico $x_n - x_1$ na neizmerno veliko enakih delov ter narišemo skoz razdelišča $x_2, x_3, x_4 \dots$ vzporednice z ordinato AM , razpade ploskev $ABNM$ na pravokotnike, katerih osnovnice so neizmerno majhne ($= dx$)

Slika I.



Nato sledijo še aritmetične in geometrijske *postopice*, se pravi zaporedja, in obrestnoobrestni račun. Na koncu so Sestavbe ali kombinacije. Tu so obravnavane permutacije, kombinacije in *premene*, to je variacije. Po vsej verjetnosti iz tombole izvirajo imena, kot so ambe, terne, kvaterne, kvinterne za kombinacije s po dvema, tremi, štirimi in petimi elementi. Imamo še binomsko formulo in Matematično verjetnost, kjer zvemo:

„Dogodek je malo verjeten, če je $v < \frac{1}{2}$, precej verjeten, če je $v > \frac{1}{2}$, negotov, če je $v = \frac{1}{2}$.“

Obravnavana je verjetnost vsote dveh izključujočih se dogodkov in verjetnost produkta neodvisnih dogodkov. Še naloga:

„Kolika je verjetnost, da z dvema kockama prej vržeš dve enaki števili ko pa dve neenaki?“

Spet imamo sedem strani privlačnih Zgodovinskih dostavkov. Na koncu zvemo:

„Izmed *domačih pisateljev matematikov* se večkrat omenjajo:

1. *Andrej Kobal* (Kobavius, rojen v Cirknici 1594, umrl v Trstu 1654). Bil je profesor matematike na jezuitskih šolah v Ljubljani in je spisal knjigo o astronomiji.

2. *Joachim Košutnik* (rojen v Beljaku 1714, umrl v Mariboru 1789) iz rodu jezuitov. Bil je profesor na akademični gimnaziji na Dunaju, pozneje pa v Gradcu vodja zvezdarne. Spisal je l. 1754 knjigo „*Prima elementa Arithmeticae, Algebrae, Geometriae, Trigonometriae planae et sphaericae, Architecturae civilis et militaris*“. (Posneto iz razprave Fridol. Kaučiča „Znameniti Slovenci“.)

3. *Baron Jurij Vega*...

4. *Dr. Franc vitez Močnik*...

Nekatere poznejše izdaje so dobesečno enake starim (z napakami vred), le da so drugi avtorji dodali kako poglavje. Bolj korenito se je predelave geometrije lotil Fran Jeran. Več o tem je v [2].

Precej časa sem posvetil tako ali drugače izstopajočim stranem omenjenih učbenikov. Upoštevati pa moramo, da je bilo takrat slovenski pouk in slovenske učne knjige – še posebno v višjih gimnazijah – treba dobesedno izsiliti. Več Matkovih knjig vsaj v prvi izdaji ni imelo uradnega dovoljenja. Vprašanje je tudi, koliko so bile recenzirane. Zadnje knjige pa so izšle že v času, ko je bil avtor bolan.

Da ne bi bilo napačnega vtisa: večina Matkovega dela je korektna in – posebno v kasnejših razredih gimnazije – dovolj blizu današnjemu gledanju. Vsekakor je treba že na podlagi obdelane snovi in nalog reči, da so pogojevali soliden, obsežen in precej zahteven pouk matematike v takratnih šolah. Razlage v osnovnih šolah, ki je nekajkrat kamen spotike, si v praksi učenci tako in tako večinoma ne zapomnijo ali pa jo interpretirajo po svoje. Naloge pa so večinoma uporabne in zanimive še danes. Blaž Matek ima nedvomno velike zasluge tudi za slovensko terminologijo. Upam, da je iz povedanega vidno, kako visok nivo je pouk matematike dosegel v slovenskih srednjih šolah že pred sto leti.

LITERATURA

- [1] Učbeniki Blaža Matka. Bibliografija je v [2]. Par originalov in precej kopij je v Matematični knjižnici, sicer pa jih najdemo v Šolskem muzeju in NUK.
[2] A. Tiegl, *Ob stoletnici učbenikov Blaža Matka*, DMFA, Ljubljana 1996

NOVE KNJIGE

T. KOŠIR in B. MAGAJNA, *Transformacije v geometriji*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997, 146 str.

Knjiga je visokošolski učbenik geometrije, ki sta ga avtorja napisala po svojih predavanjih na dodiplomskem študiju matematike. Sestavljena je iz treh obsežnejših poglavij o afini, projektivni in evklidski geometriji ter krajšega poglavja o algebraičnih množicah. Za razumno branje te knjige je potrebno poznavanje osnov linearne algebre, s katerimi se študenti seznaniijo v prvem letniku študija matematike, na nekaterih mestih pa je nujno tudi poznavanje nekaterih pojmov iz splošne algebre. Avtorja namreč obravnavata geometrijo (v poljubnem končno razsežnem prostoru) s sredstvi linearne algebre.

Prvi dve poglavji obravnavata sorodno snov kot Vidavova knjiga *Afina in projektivna geometrija*, ki je izšla pred šestnajstimi leti kot prvi učbenik višje geometrije v slovenskem jeziku. Vendar pa je snov tu podana drugače. Avtorja se z algebraičnim pristopom izogneta klasičnim geometrijskim aksiomom, ki so osnova geometričnega pristopa v Vidavovi knjigi. Oba pristopa v prvem poglavju povezuje kratek razdelek o aksiomatski definiciji afine ravnine, v drugem poglavju pa še krajši razdelek o aksiomatski definiciji projektivne ravnine. Kot da slutiti že naslov knjige, avtorja v prvih dveh poglavjih natančneje obravnavata predvsem transformacije afinih in projektivnih prostorov, sama geometrija teh prostorov pa je precej bolj

podrobno obdelana v Vidavovem učbeniku. V prvem poglavju so podane osnove afine geometrije, seznanimo se s pojmi afinega podprostora v vektorskem prostoru, semilinearne preslikave in afine transformacije. Drugo poglavje je precej obsežnejše in poleg osnovnih pojmov projektivne geometrije vsebuje razdelek o dvorazmerju in harmonični četverki, nekaj razdelkov o stožnicah ter dodatek o topologiji realnih projektivnih prostorov.

Tretje poglavje obravnava grupe izometrij evklidskega prostora in je po vsebini sorodno uvodnemu poglavju obsežnega Križaničevega učbenika *Linearna analiza na grupah*. V prvi polovici poglavja se seznanimo z zgradbo splošnih izometrij in afinih transformacij evklidskega prostora, v drugi polovici pa predvsem s končnimi in diskretnimi grupami izometrij ravnine (podrobneje so obdelane frizne grupe), nekoliko pa tudi s končnimi grupami rotacij trirazsežnega prostora.

Zadnje, četrto poglavje je precej krajše in izstopa tako po snovi kot tudi po zahtevnosti in potrebnem predznanju za razumevanje. Obravnava splošne algebraične množice, ki so sicer predmet algebraične geometrije, in je nekakšen algebraičen dodatek linearni geometriji iz prvih treh poglavij. Med drugim vsebuje tudi Hilbertov izrek o bazi in Hilbertov izrek o ničlah.

Knjiga ja napisana matematično korektno, jasno in jedrnato. Vsebuje kar 172 nalog različne težavnosti, ki so razvrščene v zadnje razdelke poglavij. Bralcu bodo pomagale, da osvoji in utrdi predelano snov ter se morda loti takega težjega problema. Žal so le maloštevilne naloge pospremljene z nasveti za reševanje. Knjiga je po besedah avtorjev namenjena predvsem študentom matematike v tretjem letniku pri predmetu geometrija. Koristila bo vsakomur, ki ga zanima geometrija in mu matematika ni tuja, za osvežitev in poglobitev znanja pa jo še posebej priporočam srednješolskim učiteljem matematike.

Boris Lavrič

OBVESTILO

V letošnji prvi številki Obzornika za matematiko in fiziko sta bila na 29. in 30. strani objavljena pravilnika:

- Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam,
- Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi in za popularizacijo teh znanosti

Pisne predloge za priznanja učiteljem in pohvale šolam pošljite do **20. septembra 1997** na naslov: *DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 1001 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 2964.*

Predlogi morajo vsebovati dovolj podatkov, da bodo zadoščali komisiji za vsestransko presojo in tehtno odločitev.

Sekretarka komisije za
pedagoško dejavnost:
Ivana Mulec

Predsednik DMFA Slovenije:
Andrej Čadež