

SN 0473-7466

ODPISANO
1996-3

1996

Letnik 43

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1996

letnik 43, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.600 SIT, za študente 1.150 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 440 SIT, stare številke 330 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometni davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1996 DMFA Slovenije – 1283

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

- Sebiadjungirane rešitve matričnih kvadratnih enačb — The selfadjoint solutions of matrix quadratic equations (Mirko Dobovišek) 65–72
- O simbolnem računanju — On symbolic computation (Sandi Klavžar) 73–77
- Novosti v programu Derive 3 — New features in Derive 3 (Matija Lokar) 78–83
- Optično inducirana difuzija — Light-induced drift (Ivan Kuščer) 84

Nove knjige — New books (Janez Strnad) III

Vesti — News

- In memoriam profesorju Otonu Sajovcu (Anton Suhadolc) 95–96
- Profesor dr. Tomislav Skubic – umrl (Gabrijel Tomšič) 96
- Podiplomski študij za učitelje matematike (Milan Hladnik) III
- Strokovno izpopolnjevanje učiteljev matematike (Milan Hladnik) IV

Na ovitku: J. M. W. Turner, *Povorka čolnov z meglico v daljavi, Benetke*, 1845

SEBIADJUNGIRANE REŠITVE MATRIČNIH KVADRATNIH ENAČB

MIRKO DOBOVIŠEK

Math. Subj. Class. (1991) 15A24

V članku obravnavamo obstoj in klasifikacijo sebiadjungiranih rešitev algebrajske Riccatijeve enačke v algebri $n \times n$ kompleksnih matrik. Množica sebiadjungiranih rešitev v bijektivni korespondenci z množico invariantnih podprostorov določenega operatorja.

THE SELFADJOINT SOLUTIONS OF MATRIX QUADRATIC EQUATIONS

In the paper the existence and the classification of selfadjoint solutions of the algebraic matrix Riccati equation is discussed. All the solutions are in one-to-one correspondence with the set of all invariant subspaces of a certain operator.

0. Uvod

V sestavku bomo obravnavali obstoj in klasifikacijo sebiadjungiranih rešitev algebrajske Riccatijeve enačbe

$$-X^*X + B^*X + X^*B + A = 0, \quad A^* = A \quad (0.1)$$

v algebri $n \times n$ matrik. Članek lahko beremo samostojno, čeprav je nekakšno nadaljevanje članka [1], kjer smo napisali, kje se matrična Riccatijeva enačba pojavi in tudi to, da v uporabi običajno ne nastopa v tako enostavni obliki.

Kompleksne matrike velikosti $n \times n$ imamo lahko za linearne preslikave na $\mathbb{C}^n$ s skalarnim produktom, ki ga bomo označevali s $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zalogo vrednosti linearne preslikave, podane z matriko A , bomo označili z $\text{im } A$, sliko podprostora V pa z $A(V) = \{Ax : x \in V\}$. Sebiadjungirana matrika A je pozitivna, če je $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{C}^n$, in pozitivno definitna, če je $\langle Ax, x \rangle > 0$ za vse neničelne vektorje $x \in \mathbb{C}^n$. Levo odprto polravnino kompleksne ravnine bomo označili s $\pi_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$.

V začetnem razdelku bomo vpeljali osnovno orodje, ki ga potrebujemo pri dokazovanju eksistence sebiadjungiranih rešitev.

1. Enačba Ljapunova

Naj bosta A in C kvadratni $n \times n$ matriki. Matrika C naj bo sebiadjungirana, $C^* = C$. Matrično enačbo

$$XA + A^*X = -C \quad (1.1)$$

imenujemo enačba Ljapunova. Srečamo jo zelo pogosto in ima pomembno vlogo pri obravnavanju stabilnosti sistemov diferencialnih enačb. Tu si oglejmo le najosnovnejšo verzijo izreka Ljapunova.

Izrek 1.1

- a) Naj ima matrika A vse lastne vrednosti na odprti levi polravnini $\pi_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, matrika C pa naj bo pozitivna. Potem ima enačba (1.1) natanko eno rešitev X . Ta rešitev je pozitivna matrika. Če je C pozitivno definitna, je X tudi pozitivno definitna.
- b) Če ima enačba (1.1) pri pozitivno definitni matriki C pozitivno definitno rešitev X , so vse lastne vrednosti matrike A v π_- .

Opomba: Izrek lahko brez velikih težav posplošimo na primere, ko C ni pozitivno definitna, kot tudi na operatorje na neskončno dimenzionalnih prostorih. Operator A tudi ni nujno omejen operator. Seveda pa moramo v tem primeru zapisati enačbo v drugačni obliki.

Dokaz: a) Najprej pokažimo, da ima enačba pri danih pogojih eno samo rešitev.

Znano je, da je vsaka kvadratna matrika podobna spodnjetrokotni matriki. Obstaja torej obrnljiva matrika P , da je $B = P^{-1}AP$ spodnjetrokotna. Če bomo lahko enolično izračunali $Y = P^*XP$, bo to veljalo tudi za X . Ko ti dve zamenjavi vstavimo v enačbo (1.1), dobimo:

$$YB + B^*Y = -P^*CP \quad (1.2)$$

Preslikava $\mathcal{B}$ vektorskega prostora $n \times n$ matrik vase, podana z

$$\mathcal{B} : Y \mapsto YB + B^*Y$$

je linearna. Poiščimo matriko, ki ji pripada. Za bazo v prostoru $n \times n$ matrik vzemimo matrike E_{ij} , ki imajo na ij -tem mestu enico, drugod pa ničle. Očitno je teh n^2 matrik linearno neodvisnih in vsako $n \times n$ matriko lahko izrazimo kot njihovo linearno kombinacijo. V bazo jih postavimo v naslednjem vrstnem redu:

$$E_{11}, E_{12}, E_{13}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, E_{n3}, \dots, E_{nn}.$$

Ko po vrsti izračunamo slike baznih vektorjev, to je matrik E_{ij} , in slike zapišemo kot stolpce v matriko (tokrat bo to $n^2 \times n^2$ matrika), dobimo bločno zgornjetrikotno matriko:

$$\begin{bmatrix} B^T + \overline{b_{11}}I & \overline{b_{21}}I & \overline{b_{31}}I & \cdots & \overline{b_{n1}}I \\ 0 & B^T + \overline{b_{22}}I & \overline{b_{32}}I & \cdots & \overline{b_{n2}}I \\ 0 & 0 & B^T + \overline{b_{33}}I & \cdots & \overline{b_{n3}}I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B^T + \overline{b_{nn}}I \end{bmatrix}$$

Determinanta zgornje matrike je enaka produktu determinant blokov na diagonalni.

$$\det \mathcal{B} = \det(B^T + \overline{b_{11}}I) \cdot \det(B^T + \overline{b_{22}}I) \cdots \det(B^T + \overline{b_{nn}}I).$$

Števila $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ so lastne vrednosti matrike B^T . Ker so vse na odprti levi polravnini, so števila $-\overline{b_{ii}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ na desni polravnini. Determinanta matrike $\mathcal{B}$ je zato od nič različna in preslikava $\mathcal{B}$ je obrnljiva. To pa pomeni, da ima enačba (1.2) za vsako desno stran natanko eno rešitev. S tem pa seveda tudi enačba (1.1).

Da je X sebiadjungiran, ne bo težko videti. Matrika X^* zadošča enačbi $X^*A + A^*X^* = -C$. Če enačbi odštejemo enačbo (1.1), dobimo $(X^* - X)A + A^*(X^* - X) = 0$. Tudi ta enačba ima eno samo rešitev $X^* - X = 0$.

Definirajmo

$$Z = \int_0^\infty e^{A^*t} C e^{At} dt. \quad (1.3)$$

Tu integriramo kar vsak element matrike pod integralom posebej. Vsi so zvezne funkcije t -ja in vsi padajo po absolutni vrednosti dovolj hitro proti 0, da izlimitirani integrali obstajajo. To je zato, ker imajo lastne vrednosti matrike A negativne realne dele. Naslednji račun nam pove, da je Z rešitev enačbe (1.1).

$$\begin{aligned} ZA + A^*Z &= \int_0^\infty \left(e^{A^*t} C e^{At} A + A^* e^{A^*t} C e^{At} \right) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^*t} C e^{At} \right) dt = \left[e^{A^*t} C e^{At} \right]_0^\infty = -C \end{aligned}$$

Z (1.3) smo torej zapisali edino rešitev enačbe (1.1). Ker je

$$\langle Zx, x \rangle = \int_0^\infty \langle C e^{At} x, e^{At} x \rangle dt \geq 0 \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{C}^n,$$

je Z , ki je edina rešitev enačbe (1.1), pozitivna.

Naj bo sedaj matrika C pozitivno definitna. Če matrika X ne bi bila obrnljiva, bi obstajal $x \neq 0$, da je $Xx = 0$. Enakost (1.1) nam da $\langle Ax, Xx \rangle + \langle Xx, Ax \rangle = -\langle Cx, x \rangle$. Potem pa je tudi $\langle Cx, x \rangle = 0$. In ker je C pozitivna, ima pozitivni kvadratni koren $\sqrt{C}$. Iz $\langle Cx, x \rangle = \langle \sqrt{C} \sqrt{C} x, x \rangle = \langle \sqrt{C} x, \sqrt{C} x \rangle = \|\sqrt{C} x\|^2$ dobimo $\sqrt{C} x = 0$. Sledi $Cx = 0$, kar je v nasprotju s tem, da je C pozitivno definitna. Matrika X je torej pozitivno definitna.

b) Naj bo λ lastna vrednost matrike A in x pripadajoči lastni vektor. Iz enačbe (1.1) sledi $\langle Ax, Xx \rangle + \langle Xx, Ax \rangle = -\langle Cx, x \rangle$. Ko upoštevamo, da je x lastni vektor matrike A , dobimo: $(\lambda + \bar{\lambda}) \langle Xx, x \rangle = -\langle Cx, x \rangle$. Ker sta po predpostavki X in C pozitivno definitni matriki, mora biti $\lambda + \bar{\lambda}$ negativno število. S tem smo dokazali, kar smo želeli. ■

2. Riccatijeva algebrajska enačba

V tem razdelku si bomo ogledali, kako s pomočjo reševanja enačbe Ljapunova lahko poiščemo sebiadjungirane rešitve Riccatijeve algebrajske enačbe v algebri $n \times n$ matrik.

Naj bosta A in B $n \times n$ matriki. Matrika A naj bo sebiadjungirana. Enačba, katere sebiadjungirane rešitve iščemo, je

$$-X^2 + B^*X + XB + A = 0. \quad (2.1)$$

Pred izrekom o obstoju sebiadjungiranih rešitev, dokažimo lemo.

Lema 2.1 *Naj bo $\{X_n\}$ zaporedje sebiadjungiranih matrik, za katere velja $X_n \geq X_{n+1} \geq X$, za neko sebiadjungirano matriko X . Potem je zaporedje $\{X_n\}$ konvergentno. Limita Y je sebiadjungirana matrika in $Y \geq X$.*

Dokaz: Lemo bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da istoležni elementi matrik X_n konvergirajo. Označimo element v j -ti vrstici in k -tem stolpcu matrike X_n z $(X_n)_{jk}$. Za poljuben x je zaporedje $\langle X_n x, x \rangle$ padajoče, navzdol omejeno z $\langle X x, x \rangle$, zato je konvergentno.

Označimo z $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ vektor, ki ima na i -tem mestu enojko, druge pa ničle. Diagonalne elemente lahko zapišemo kot $(X_n)_{ii} = \langle X_n e_i, e_i \rangle$. Zato diagonalni konvergirajo. Z izvendiagonalnimi bo več dela. Pokazali bomo, da konvergirajo njihovi realni in njihovi imaginarni deli. Tudi zaporedje

$$\langle X_n(e_j + e_k), (e_j + e_k) \rangle = \langle X_n e_j, e_j \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle X_n e_j, e_k \rangle + \langle X_n e_k, e_k \rangle$$

konvergira. Ker konvergirata tudi prvi in zadnji sumand na desni strani, konvergira tudi zaporedje realnih delov $\operatorname{Re} \langle X_n e_j, e_k \rangle = \operatorname{Re} (X_n)_{jk}$. Za to, da opazimo konvergenco imaginarnih delov, si moramo ogledati zaporedje $\langle X_n(e_j + ie_k), (e_j + ie_k) \rangle$. Ker so vse matrike X_n sebiadjungirane, je $(X_n)_{jk} = \overline{(X_n)_{kj}}$ za vse j in k . Seveda tudi za limite velja isto.

Ker je za vsak $x \in \mathbb{C}$, $\langle (X_n - X)x, x \rangle \geq 0$ za vse n , mora biti tudi $\langle (Y - X)x, x \rangle \geq 0$. Zato je $Y - X \geq 0$. ■

Eksistenco sebiadjungirane rešitve Riccatijeve algebrajske enačbe bomo dobili s pomočjo rekurzivno podanega zaporedja sebiadjungiranih matrik. Ideja dokaza je Newtonova tangentna metoda za iskanje ničel funkcije.

Poglejmo si, kakšna je za realna a in b . Enačba tangente na kvadratno parabolo $y(x) = -x^2 + 2bx + a$ v točki x se glasi $Y - y(x) = 2(b - x)(X - x)$. Pri tangentni metodi postavimo za x_{n+1} ničlo tangente, postavljene na funkcijo v točki x_n . Enačba, iz katere izračunamo x_{n+1} , je $2x_{n+1}(b - x_n) = -x_n^2 - a$. Če kvadratna enačba ima rešitev, je tako dobljeno zaporedje padajoče in omejeno navzdol z ničlo parabole, če smo le za x_0 izbrali število, večje od obeh korenov. Ko delamo z matrikami, moramo seveda paziti na nekomutativnost, namesto deljenja pa nam bo prišla prav enačba Ljapunova.

Izrek 2.2.

- a) Če ima enačba (2.1) sebiadjungirano rešitev, potem ima tudi maksimalno sebiadjungirano rešitev $X_{\max}$ in minimalno sebiadjungirano rešitev $X_{\min}$. To pomeni, da vsaka rešitev X zadošča relaciji

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max}.$$

- b) Kadar pa je A pozitivna, obstaja pozitivna rešitev enačbe (2.1). Če je A pozitivno definitna, je rešitev $X_{\max}$ pozitivno definitna in lastne vrednosti matrike $B - X_{\max}$ so v odprti levi polravnini π_- .

Dokaz. Najprej dokažimo a). Prav gotovo obstaja taka sebiadjungirana matrika X_0 , da ima matrika $B - X_0$ vse lastne vrednosti na odprti levi polravnini. Za X_0 lahko vzamemo kar mnogokratnik identične matrike. Zaporedje sebiadjungiranih matrik definiramo z rekurzivno formulo

$$X_{n+1}(B - X_n) + (B - X_n)^* X_{n+1} = -X_n^2 - A. \quad (2.2)$$

Preveriti moramo le to, da na vsakem koraku res lahko izračunamo X_{n+1} . Enačba (2.1) je enačba Ljapunova. Če so lastne vrednosti matrike $B - X_n$ v π_- , lahko enačbo (2.2) rešimo na X_{n+1} . Dokazovali bomo z indukcijo. Za $n = 0$ je to res. Predpostavimo, da so lastne vrednosti matrike $B - X_n$ na odprti levi polravnini. Za sebiadjungirano rešitev X , ki po predpostavki obstaja, iz (2.2) in iz $-X^2 + XB + B^*X + A = 0$ dobimo

$$(X_{n+1} - X)(B - X_n) + (B - X_n)^*(X_{n+1} - X) = -(X - X_n)^2.$$

Izrek 1.1 pove, da je $X_{n+1} - X \geq 0$.

Naslednja identiteta sledi iz prejšnje po krajšem računu:

$$\begin{aligned} (X_{n+1} - X)(B - X_{n+1}) + (B - X_{n+1})^*(X_{n+1} - X) &= \\ &= -(X_{n+1} - X_n)^2 - (X - X_{n+1})^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ker ne vemo, ali je desna stran obrnljiva matrika, s pomočjo izreka 1.1 ne moremo dokazati, da so lastne vrednosti matrike $B - X_{n+1}$ v π_- . Recimo, da ima $B - X_{n+1}$ lastno vrednost z nenegativnim realnim delom.

$$(B - X_{n+1})x = \lambda x, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad x \neq 0. \quad (2.4)$$

Iz (2.3) dobimo

$$\begin{aligned} \langle (B - X_{n+1})x, (X_{n+1} - X)x \rangle + \langle (X_{n+1} - X)x, (B - X_{n+1})x \rangle &= \\ &= -\|(X_{n+1} - X_n)x\|^2 - \|(X - X_{n+1})x\|^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ko upoštevamo (2.4), ostane

$$(\lambda + \bar{\lambda})\langle (X_{n+1} - X)x, x \rangle = -\|(X_{n+1} - X_n)x\|^2 - \|(X - X_{n+1})x\|^2.$$

Leva stran zgornje enakosti je nenegativna, saj je $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ in $X_{n+1} - X \geq \geq 0$. Potem pa mora biti desna stran enaka 0. Za ta x je zato $X_{n+1}x = = X_nx$. Račun $(B - X_n)x = (B - X_{n+1} + X_{n+1} - X_n)x = \lambda x$ pove, da je prav ta λ že lastna vrednost matrike $B - X_n$, kar pa je protislovje. Zato morajo lastne vrednosti matrike $B - X_{n+1}$ ležati na odprti levi polravnini. Če identiteto (2.2) zapišemo za n , od nje odštejemo (2.2), zapisano za $n+1$, in jo preuredimo, dobimo:

$$(X_n - X_{n+1})(B - X_n) + (B - X_n)^*(X_n - X_{n+1}) = -(X_{n-1} - X_n)^2.$$

Zgornja identiteta pa nam s pomočjo izreka (1.1) pove, da je $X_n - X_{n+1} \geq \geq 0$. Dobili smo torej zaporedje sebiadjungiranih matrik, za katero velja $X_{n+1} \geq X_n$ in $X_n \geq X$ za vse n . Lema pove, da to zaporedje konvergira proti sebiadjungirani matriki $X_{\max}$, ki je očitno rešitev enačbe (2.1). Tako dobljena rešitev je maksimalna, saj velja $X_{\max} \geq X$ za poljubno rešitev X enačbe (2.1).

Minimalna rešitev enačbe (2.1) je $X_{\min} = -Y_{\max}$, kjer je $Y_{\max}$ maksimalna rešitev enačbe $-Y^2 - YB - B^*Y + A = 0$.

b) Vrstica (2.2) pove, da iz $A \geq 0$ sledi $X_{n+1} \geq 0$. Ker velja

$$X_{n+1}(B - X_{n+1}) + (B - X_{n+1})^*X_{n+1} = -A - (X_{n+1} - X_n)^2 - X_{n+1}^2, \quad (2.6)$$

lahko dokažemo, da so lastne vrednosti matrike $B - X_{n+1}$ na odprti levi polravnini, tako kot prej iz (2.5), le da imamo sedaj na desni strani tri nepozitivne člene. Preostali del dokaza eksistence maksimalne rešitve teče kot prej. Dobili smo seveda nenegativno definitno matriko, saj je za vse n veljalo $X_n \geq 0$.

Če je A pozitivno definitna, nam izrek 1.1 s pomočjo identitete

$$X_{\max}(B - X_{\max}) + (B - X_{\max})^*X_{\max} = -X_{\max}^2 - A$$

pove, da so lastne vrednosti matrike $B - X_{\max}$ na odprti levi polravnini. ■

Opomba: Povejmo, da ima enačba (2.1) sebiadjungirano rešitev natanko tedaj, ko je za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(B + i\lambda I)(B + i\lambda I)^* + A \geq 0. \quad (2.7)$$

Dokaz si bralec lahko ogleda v [5]. Pogoji (2.7) se v primeru, ko imamo opraviti s skalarji, zreducira na običajno diskriminanto kvadratne enačbe.

3. Klasifikacija vseh sebiadjungiranih rešitev

Dokaz glavnega izreka bomo opustili, ker je tehnično zahteven. Dokažimo pa izrek, ki pove, kdaj je pogoj v izreku o klasifikaciji vseh rešitev izpolnjen. Potrebovali bomo naslednji identiteti.

Če sta X_1 in X_2 sebiadjungirani rešitvi enačbe (2.1), za njuno razliko $D = X_2 - X_1$ velja:

$$D(B - X_1) + (B - X_2)^* D = 0 \quad (3.1)$$

in

$$D(B - X_1) + (B - X_1)^* D - D^2 = 0. \quad (3.2)$$

Opomba: Identiteta (3.1) nam pojasni, od kod kvadratni enačbi (2.1) ime Riccatijeva enačba. Kot pri diferencialni enačbi, ki jo je obravnaval Jacobo F. Riccati že leta 1724 [6], moramo potem, ko eno rešitev nekako dobimo, za druge rešitve reševati linearno enačbo.

Izrek 3.1. Razlika $\Delta = X_{\max} - X_{\min}$ med maksimalno in minimalno rešitvijo enačbe (2.1) je obrnljiva matrika natanko tedaj, ko ima matrika $B - X_{\max}$ vse lastne vrednosti na odprti levi polravnini.

Dokaz: Naj bo $\Delta = X_{\max} - X_{\min}$ obrnljiva matrika. Iz (3.2) vidimo, da $Y = \Delta^{-1}$ reši enačbo

$$(B - X_{\max})Y + Y(B - X_{\max})^* = -I.$$

Izrek 1.1 pove, da ima matrika $B - X_{\max}$ vse lastne vrednosti v π_- .

Obratno, naj bodo lastne vrednosti matrike $B - X_{\max}$ v π_- in X neka sebiadjungirana rešitev enačbe (2.1). Ker sta X in $X_{\max}$ sebiadjungirani rešitvi, velja za razliko $Z = X_{\max} - X$:

$$Z(B - X_{\max}) + (B - X_{\max})^* Z = -Z^2. \quad (3.3)$$

Ali ima enačba (3.3) kakšno obrnljivo rešitev? Enačba

$$(B - X_{\max})Y + Y(B - X_{\max})^* = -I$$

ima po izreku 1.1 pozitivno definitno, torej obrnljivo rešitev Y . Matrika Y^{-1} je obrnljiva rešitev enačbe (3.3). Tudi Y^{-1} lahko napišemo kot $X_{\max} - \tilde{X}$, za neko sebiadjungirano rešitev $\tilde{X}$ enačbe (2.1). Ker je $\tilde{X} \geq X_{\min}$, je $Y^{-1} = X_{\max} - \tilde{X} \leq X_{\max} - X_{\min} = \Delta$. To pa pove, da je Δ obrnljiv. ■

V naslednjem izreku bomo klasificirali vse rešitve enačbe (2.1) za primer, ko je $\Delta = X_{\max} - X_{\min}$ obrnljiva matrika.

Izrek 3.2. Naj bo Δ obrnljiva matrika in naj bo V_1 poljuben invarianten podprostor za $B - X_{\max}$. Označimo $V_2 = \Delta^{-1}(V_1^\perp)$. Potem je $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{C}^n$. Če s P označimo pripadajoči projektor na V_1 , je

$$X = X_{\max}P + X_{\min}(I - P) \quad (3.4)$$

sebiadjungirana rešitev enačbe (2.1). Še več. Vse sebiadjungirane rešitve enačbe (2.1) dobimo tako in korespondenca med za $B - X_{\max}$ invariantnimi podprostori V_1 in rešitvami je bijektivna.

Opomba: Direktna vsota v izreku ni nujno ortogonalna.

Dokaz izreka lahko bralec najde v [4] ali [7].

Naslednji izrek pa nam bo povedal, da je struktura množice sebiadjungiranih rešitev enačbe (2.1), glede na delno urejenost v množici sebiadjungiranih matrik, kar enaka kot struktura množice invariantnih podprostorov matrike $B - X_{\max}$ glede na inkluzijo.

Izrek 3.3. Naj bo $\Delta = X_{\max} - X_{\min}$ obrnljiva matrika ter X in Y sebiadjungirani rešitvi enačbe (2.1). Označimo pripadajoča invariantna podprostora matrike $B - X_{\max}$ z V_1 oziroma z U_1 . Potem je $U_1 \subseteq V_1$ natanko tedaj, ko je $X \geq Y$.

Dokaz: Naj bosta X in Y rešitvi enačbe (2.1) in $X \geq Y$. Potem je $X_{\max} - Y \geq X_{\max} - X$ in zato $\ker(X_{\max} - Y) \subseteq \ker(X_{\max} - X)$. Po izreku 3.2 sta rešitvama Y in X prirejena invariantna podprostora matrike $B - X_{\max}$. Imenujmo ju U_1 oziroma V_1 . Iz (3.4) vidimo, da je $\ker(X_{\max} - Y) = U_1$ in $\ker(X_{\max} - X) = V_1$. Iz $X \geq Y$ torej sledi $U_1 \subseteq V_1$.

Pa naj bo $U_1 \subseteq V_1$. Ker je $V_2 = \Delta^{-1}(V_1^\perp)$ in $U_2 = \Delta^{-1}(U_1^\perp)$, je $V_2 \subseteq U_2$. Ker je za $x \in V_2$, $Xx = X_{\min}x = Yx$, je $V_2 \subseteq \ker(X - Y)$. Za $x \in V_1$ pa je $Xx = X_{\max}x$. Ker je cel prostor $\mathbb{C}^n$ direktna vsota V_1 in V_2 , lahko vsak $x \in \mathbb{C}^n$ zapišemo kot $x = x_1 + x_2$, kjer je $x_1 \in V_1$ in $x_2 \in V_2$. Račun

$$\begin{aligned} \langle (X - Y)x, x \rangle &= \langle (X - Y)x_1, x_1 \rangle + \langle (X - Y)x_1, x_2 \rangle + \langle (X - Y)x_2, x_1 + x_2 \rangle = \\ &= \langle (X_{\max} - Y)x_1, x_1 \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

pove, da je $X \geq Y$. ■

Enako klasifikacijo vseh sebiadjungiranih rešitev dobimo tudi pri enačbi, ki ima za koeficiente linearne preslikave Hilbertovega prostora vase [2]. Izkaže se tudi, da se enačba obnaša enako tudi tedaj, ko so koeficienti elementi poljubne C^* -algebre. Rešitve so v isti C^* -algebri, klasificiramo pa jih lahko z določeno množico idempotentov [3].

LITERATURA

- [1] M. Dobovišek, *Rešitve Riccatijeve algebrajske enačbe*, OMF **43** (1996), 33–38.
- [2] M. Dobovišek, *Operator Quadratic Equations*, Glas. Mat. **27** (1992), 283–295.
- [3] M. Dobovišek, *The Riccati Algebraic Equation in a Locally C^* -Algebra*, Integr. Equat. Oper. Th. Vol. **16** (1993), 64–81.
- [4] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *On hermitian solutions of the symertic algebraic Riccati equations*, SIAM J. Control and Optim. **24** (1986), 1323–1334.
- [5] P. Lancaster and L. Rodman, *Algebraic Riccati Equations*, Oxford Science Publications, Oxford University Press Inc. 1995, New York.
- [6] J. F. Riccati, *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, Acta Eruditorum Lisiae, 1724.
- [7] J. C. Willems, *Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-**16** (1971), 621–634.

O SIMBOLNEM RAČUNANJU*

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (1991): 68Q40, 68N99

Predstavljene so osnovne značilnosti simbolnega računanja. Nakazane so tudi dileme, ki jih tako računanje prinaša na področje matematičnega izobraževanja.

ON SYMBOLIC COMPUTATION

Basic features of symbolic computation are presented. Its role in mathematical education is also discussed.

1. Uvod

Uporaba „računskih strojev“ pri poučevanju matematike ima v zadnjem času dve glavni prelomnici. Prvo so povzročili kalkulatorji, drugo pa programi za simbolno računanje.

Kalkulatorji so že dolgo med nami. Vsi jih poznamo ter jih znamo tudi bolj ali manj uporabljati. Kljub temu še vedno ni enotnega mnenja, kdaj in kako uporabljati te naprave pri pouku matematike. Nazorno se je to pokazalo na okrogli mizi „Računalnik pri pouku matematike“, ki je potekala v okviru seminarja, s katerega je tudi pričujoči prispevek. V delu razprave, ki se je nanašala na kalkulatorje, smo lahko, če malo pretiravam, slišali ves spekter mnenj med „kalkulatorji od začetka in vedno“ in „kalkulatorji nikoli“.

Simbolno računanje s pomočjo računalnika je naslednji mejnik pri poučevanju matematike. Po mojem mnenju gre še za dosti globlja vprašanja, kot se pojavljajo v zvezi z (ne)uporabo kalkulatorja. Tam se na primer vprašamo, ali je še vedno treba razlagati postopek za množenje večmestnih števil, medtem ko nas simbolno računanje postavi pred dilemo, ali je treba učiti poenostavljanje izrazov? Verjetno bi na slednje vprašanje večina nemudoma odgovorila pritrdilno, morda pa bi kdo potreboval nekaj časa za tehtne argumente. Pa vendar, mar ni to podobno vprašanju, ali naj še vedno učimo „peš“ računanje (kvadratnih) korenov? Saj tega vendar ne učimo več! Kaj pa, če vas kdo vpraša, ali je še vedno treba učiti integriranje racionalnih funkcij?

Da je o (ne)vpeljavi simbolnega računanja k pouku matematike treba začeti resno razmišljati, potrjuje tudi koncept mednarodne mature. Na njej je trenutno dovoljena uporaba grafičnih kalkulatorjev brez alfanumerične tipkovnice in brez možnosti simbolnega računanja. Pred kratkim pa se je na trgu pojavil grafični kalkulator (TI-92), ki ima med drugim vgrajen program za simbolno računanje (Derive) in za nameček še program za geometrijo (CABRI). Derive je vgrajen tudi v serijo Hewlett Packardovih kalkulatorjev.

*Predavanje na seminarju DMFA „Računalnik pri pouku matematike“, Ljubljana, 10. 2. 1996.

Kot sem izvedel, niso vsi izvajalci mednarodne mature zelo natančni pri pregledovanju, katere (grafične) kalkulatorje dijaki dejansko uporabljajo, tako da bi (je) lahko simbolno računanje skozi stranska vrata že vstopilo na to maturo. Zaradi vsega navedenega se zdi dokaj realno predvideti, da bo v nekaj letih simbolno računanje dovoljeno na mednarodni maturi. Če se bo to res zgodilo in bo običajna matura ostala nespremenjena (kot vemo, je pri njej dovoljenih zelo malo pomagala), bodo dijaki z eno oziroma drugo maturo v neenakopraven položaju pri nadaljnjem izobraževanju.

Da bi o navedenih vprašanjih lahko argumentirano razpravljali, moramo najprej vedeti, kaj je simbolno računanje, kaj nam ponuja in kaj so njegove omejitve. Nekaj osnovnih dejstev o tem bomo zapisali v tem sestavku, vsakdo pa se lahko sam odloči, ali bo to preizkusil tudi v praksi. Na koncu sestavka bomo tudi nakazali reševanje maturitetnih nalog s pomočjo programa Derive.

2. Programi za simbolno računanje

Kot pove že ime, **simbolno** računanje pomeni računanje s simboli – torej ne s števili. Osnovni princip delovanja programov za simbolno računanje je, da računajo s simboli, razen če jim ne ukažemo drugače. Tedaj znajo računati tudi **numerično**. Nekaj primerov, ki naj razjasnijo gornja pojma, je zbranih v naslednji tabeli:

Numerično računanje	Simbolno računanje
$11 + 12 = 23$	$12x + 7x - 4x = 15x$
$2^6 - 5 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^2 = 12$	$2^{x+4} - 5 \cdot 2^{x+2} + 7 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x$
$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
$\int_0^1 x dx = 0.5$	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

Opozorimo na še eno pomembno razliko med simbolnim in numeričnim računanjem. Običajni kalkulator izračuna izraz $(1/3) \cdot 3$ kot 0.99999999. Razlog za to je, da najprej (numerično) izračuna $1/3$ in to število zapiše kot „predstavljivo realno število“ 0.33333333. Ko nato to število pomnoži s 3, izračuna že omenjeni rezultat. Program za simbolno računanje pa predstavi število $1/3$ kot ulomek in računanje izraza $(1/3) \cdot 3$ izvede kot množenje ulomkov $(1/3) \cdot (3/1)$. Zato vrne točni rezultat 1.

Programi za simbolno računanje nam običajno omogočajo tudi risanje funkcij, kar je lahko zelo koristno pri poučevanju. Oglejmo si naslednji primer. Najprej narišemo graf neke funkcije, na primer $\sin x$. Nato funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto in na isti sliki v različnih barvah narišemo grafe

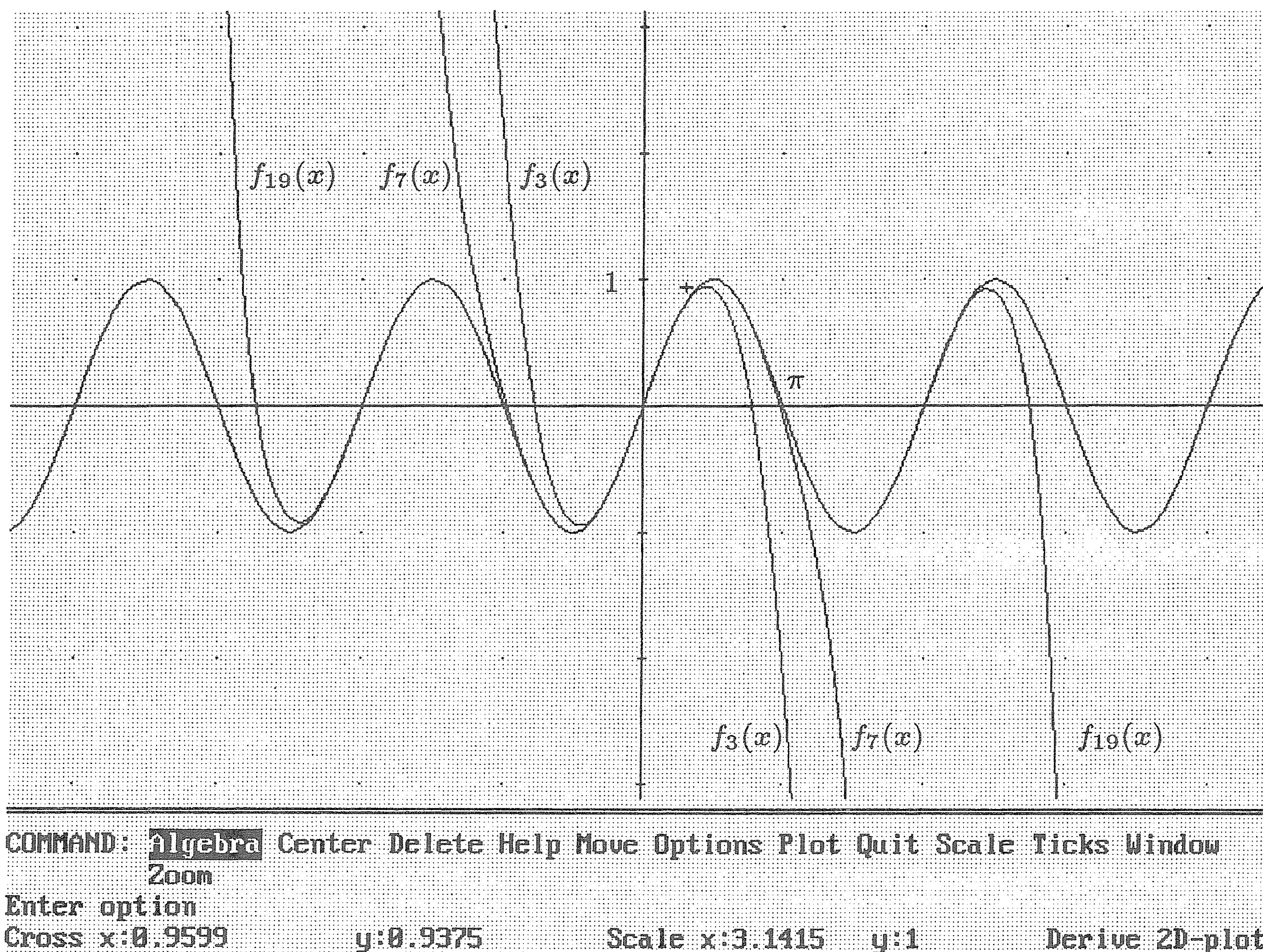
nekaj prvih Taylorjevih približkov. Na spodnji sliki je prikazan rezultat (žal ne v barvah), ki nam da dober občutek, kaj pomeni razviti funkcijo v Taylorjevo vrsto. Razen funkcije $\sin x$ imamo na sliki še Taylorjeve približke

$$f_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$f_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

in

$$f_{19}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots - \frac{x^{19}}{19!}$$



Programi za simbolno računanje seveda niso vsemogočni. Pogosto naletimo na probleme, ki jim niso kos, poleg tega pa se dogaja, da vrnejo napačen rezultat. Brez znanja matematike si tako s temi programi ne moremo kaj dosti pomagati. Najprej moramo programu korektno zastaviti problem, dobljeno rešitev pa moramo tudi pravilno interpretirati. Matematiko bo zato še vedno treba poučevati, verjetno pa bomo morali spremeniti zorni kot tega poučevanja.

Poznamo kar nekaj programov, ki nam omogočajo simbolno računanje. Med najbolj razširjenimi so *Derive*, *Maple* in *Mathematica*.

Maple in Mathematica spadata med najzmogljivejše programe za simbolno računanje. Žal pa zahtevata tudi zelo zmogljivo strojno opremo. Še posebej zahtevna je Mathematica. Razen zmogljivega simbolnega računanja oba programa odlikujejo tudi velike grafične zmogljivosti, ki pridejo najbolj do izraza pri risanju v treh dimenzijah. Programa omogočata tudi programiranje, pri čemer programski jezik v Maple spominja na programski jezik pascal.

Derive je program, ki je sistemsko presenetljivo nezahteven, po drugi strani pa je relativno zelo zmogljiv. V operacijah, ki jih zmore, se Derive lahko mirno kosa s prej omenjenima programoma. Po mnenju večine je to najprimernejši program za uporabo v srednjih šolah. V grobem lahko rečemo, da nam Derive omogoča simbolno računanje do nivoja prvega letnika matematične fakultete (vključno). Tipične naloge, ki jih lahko z njim izvedemo, so: delo z ulomki, razstavljanje izrazov, iskanje ničel (polinomov), risanje grafov funkcij, reševanje enačb, delo z vektorji in matrikami, odvajanje, določeno in nedoločeno integriranje, Taylorjev razvoj, računanje limit in še marsikaj drugega.

Omenili smo, da v Maple in Mathematici lahko tudi programiramo. V Derive tega ne moremo, na voljo imamo le funkcijsko programiranje. Kot primer funkcijskega programiranja navedimo naslednji definiciji:

$$H1(x) := IF(x < -1, 1/x + 2, 1)$$

$$H(x) := IF(x < 1, H1(x), -x^2 + 2),$$

ki določata funkcijo

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2; & x < -1, \\ 1; & -1 \leq x \leq 1, \\ -x^2 + 2; & x > 1. \end{cases}$$

S tem primerom tudi končajmo ta razdelek, saj je o programu Derive Obzornik že pisal [4], pa tudi v tej številki najdemo članek o tem [5].

3. Nekaj nalog z mature

Za konec si oglejmo prvih osem nalog z osnovnega nivoja mature z dne 17.6.1995. Pri reševanju si bomo pomagali s programom Derive. Pri preostalih šestih nalogah s te mature si lahko le obrobno pomagamo s programom, zato teh nalog ne bomo navajali. Na tej maturi bi lahko s pomočjo programa za simbolno računanje ugnali približno polovico nalog.

1. Če od števila b odštejemo dvakratnik števila a , dobimo 2; če zmanjšamo petkratnik števila a za $(b + 1)$, pa 6. Izračunajte števili a in b .
 - Pri tej nalogi moramo znati nastaviti sistem dveh enačb.
 - Sistem enačb rešimo s programom.

2. Za $a = \sqrt{2}$ in $b = \sqrt{3}$ izračunajte vrednost izraza: $\sqrt[3]{\frac{a^6 \cdot \sqrt{64b^2}}{27b}} + \frac{1}{3}(\sqrt{a})^4$.

- Vtipkamo izraz in takoj dobimo rešitev 2.
- V splošnem (za poljubna a in b) moramo razumeti rezultat, ki nam ga vrne program:

$$\frac{2a^2 \operatorname{sign}(b)^{1/3}}{3} + \frac{a^2}{3}.$$

Če v gornjem izrazu omejimo b na nenegativna števila, nam program vrne poenostavljen izraz a^2 . Za $a = \sqrt{2}$ je rezultat seveda 2.

3. Poenostavite izraz: $\sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

- Vtipkamo in dobimo (pravilen) rezultat 0.

4. Dan je polinom $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 5$. Zapišite točko, v kateri graf polinoma seka ordinatno os, in izračunajte enačbo tangente na graf polinoma v točki $T_1(-1, y_1)$.

- Pri tej nalogi nam Derive rabi kot pomožno orodje (npr. za odvajanje polinoma), vsekakor pa moramo vedeti, za kaj pri nalogi gre.

5. Rešite enačbo: $1 + \log_2(4x + 1) = 0$.

- Vtipkamo in dobimo $x = -1/8$.

6. Krožnici s središčem v izhodišču koordinatnega sistema se ena z zunanje in druga z notranje strani dotikata elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Izračunajte ploščino kolobarja med obema krožnicama.

- Pri tej nalogi si s programom ni kaj pomagati.

7. Imamo kompleksno število $z = (1 + 2i)^{-2}$. Izračunajte $|z|$.

- Vtipkamo in dobimo $z = 1/5$.

8. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{2}{x^3}$ in izračunajte ploščino lika med grafom funkcije in osjo x na intervalu $[1, 2]$.

- Program nariše graf funkcije in izračuna vrednost ustreznega določenega integrala. Najmanj, kar moramo vedeti za to nalogo, je, da v drugem delu sprašuje po vrednosti nekega določenega integrala.

LITERATURA

- [1] T. W. Gray in J. Glynn, *Beginner's Guide to Mathematica*, Addison-Wesley, Reading, 1992.
- [2] B. Kutzler, *Introduction to Derive*, Soft Warehouse, Hagenberg, 1994.
- [3] M. Lokar, *Derive, program za simbolično računanje*, Račkova knjižnica 7, Priročniki in učbeniki, DMFA in Zavod RS za šolstvo in šport, Ljubljana, 1991.
- [4] M. Lokar, *Programi za simbolično računanje – Derive*, Obzornik Mat. Fiz. **39** (1992), 1–7.
- [5] M. Lokar, *Novosti v programu Derive 3*, Obzornik Mat. Fiz. **43** (1996), 78–83.
- [6] L. Munda, *Matematična orodja za PC računalnike*, Monitor **3** (1993) 5, 52–60.

NOVOSTI V PROGRAMU DERIVE 3*

MATIJA LOKAR

Math. Subj. Class. (1991) 97B99, 68U30, 68-04

Predstavljene so poglobitve novosti, ki jih je v program za simbolno računanje Derive prinaša različica 3.

NEW FEATURES IN DERIVE 3

The most important new features in Derive Version 3 are presented.

Že nekaj časa imajo tudi v slovenskih šolah program za simbolno računanje Derive. Veliko strokovnjakov meni, da je med vsemi programi, ki znajo simbolno računati, verjetno najprimernejši za uporabo v srednji šoli.

Jeseni 1994 je podjetje Soft Warehouse poslala na trg novo različico programa Derive, in sicer 3.0. Tudi ta je še vedno izredno skromna, kar se tiče zahtev po strojni opremi. Pri sodobnih programi, ki običajno zahtevajo več 10M zlogov prostora na trdem disku in pri katerih delo ni možno, če nimamo vsaj računalnika s procesorjem 486 in 8M pomnilnika, Derive deluje kar malo smešno, saj ga še vedno lahko poganjamo na zaprašenem računalniku tipa XT. Pri tem pa majhnost programa še ne pomeni, da ni zmogljiv. Derive še vedno ostaja med močnejšimi programi za simbolno računanje in se po svojih matematičnih zmogljivostih mirno lahko kosa z Mathematico, Maplom, Macsymo in podobnimi.

Seveda pa so z majhnostjo programa povezane tudi nekatere manj prijetne posledice. Tako uporabniški vmesnik za današnje razmere deluje zastarelo, čeprav raziskave v avstrijskih šolah kažejo, da imajo učenci zelo malo težav z njim. Prilagodljiv menujski sistem, ki je novost v različici 3 (več o tem kasneje), nam tudi omogoča precejšnjo prožnost in odpravi vrsto težav. To nas rešuje tudi težav z vgrajeno pomočjo, ki je precej neuporabna. Prav tako "neprijazno" je delo z datotekami: shranjevanje, nalaganje, izpis na tiskalnik. Vendar je to pač cena, ki jo dobro odtehtajo druge odlike programa.

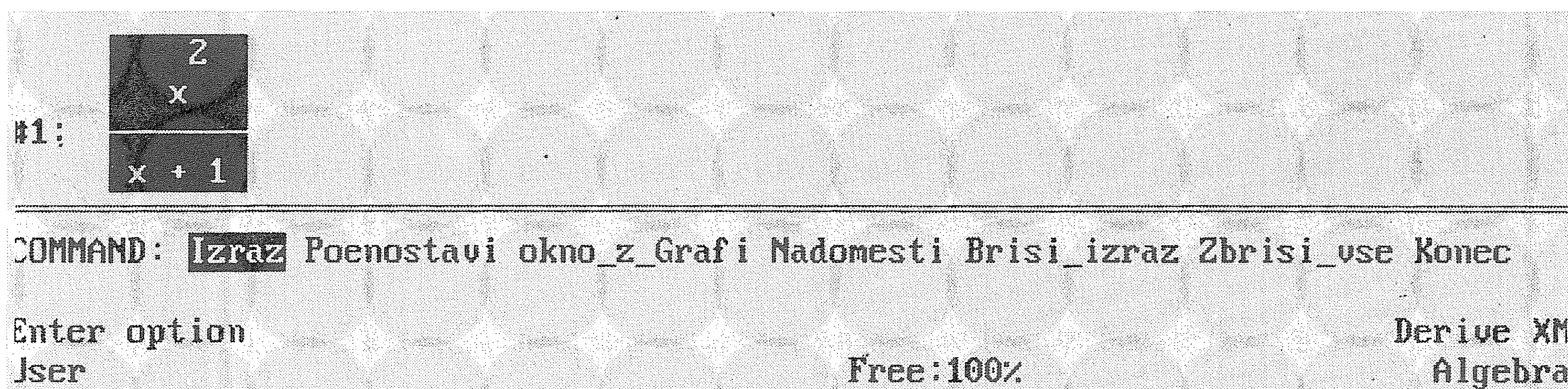
Derive je poleg različice za PC računalnike na voljo tudi na seriji Hewlett Packardovih kalkulatorjev: HP 95LX, 100LX in 200LX. Konec lanskega leta pa se je Derive v malce spremenjeni obliki pojavil še na novem kalkulatorju podjetja Texas Instruments (TI-92). Ta vsebuje še različico programa *Cabri Geometre* in je vsekakor kalkulator, ki je izredno zanimiv za uporabo v šolah.

Poglobitve novosti

Derive 3 prinaša veliko novosti, ki morda na prvi pogled niso najbolj opazne. Običajni uporabnik ob prehodu na to različico mogoče niti ne bo opazil razlik. Vendar obstajajo spremembe, ki vsekakor zaslužijo omembo.

* Predavanje na seminarju DMFA *Računalnik pri pouku matematike*, Ljubljana, 10. 2. 1996.

Za šolsko rabo je verjetno najpomembnejša možnost prilagoditve menujskega sistema.



Poglejmo menujsko vrstico – na njej nas čakajo slovenski izrazi. Torej obstaja Derive v slovenski različici, kot recimo slovenski Word for Windows? Ne, Derive le omogoča, da menijske ukaze prevedemo in preuredimo. Tako Derive lahko zaženemo z

Derive moj.men

V tem primeru se bodo v programu pojavili le tisti ukazi, ki jih bomo navedli v datoteki moj.men, in to z morebiti spremenjenimi imeni. Tak pristop nam ne omogoča le, da poslovenimo ukaze, ampak tudi, da navedemo le nekatere od njih, in pod enim ukazom navedemo ukaz skupaj s podizbiro. Tako smo npr. za ukaz Nadomesti izbrali Manage Substitute. Ustrezna vrstica v .men datoteki je

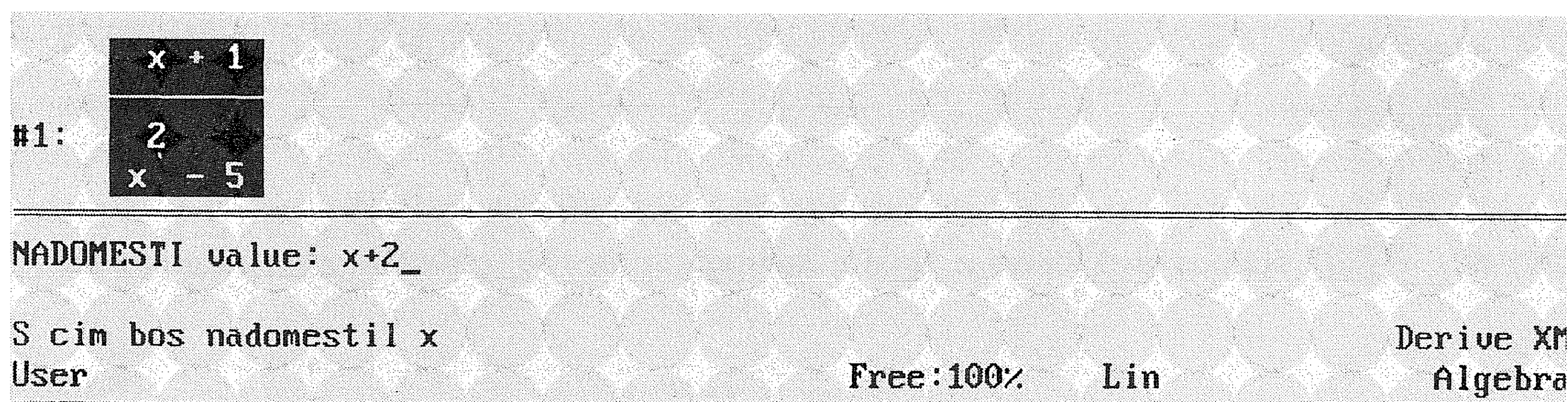
```
("Nadomesti" "Manage" "Substitute")
```

Tako lahko izdelamo povsem svoj menujski sistem, prilagojen našim potrebam. Možno je tudi, da imamo za različne namene pripravljene različne .men datoteke. Za primer, ki ga vidimo na sliki, je datoteka moj.men takale:

```
(("Izraz" "Author")
("Poenostavi" "Simplify")
("okno_z_Grafi" "Plot")
("Nadomesti" "Manage" "Substitute")
("Brisi_izraz" "Remove")
("Zbrisi_vse" "Transfer" "Clear")
("Konec" "Quit"))
(("okno_z_Izrazi" "Algebra")
("Narisi" "Plot"))
```

V prvem delu smo prevedli nekatere ukaze iz osnovnega (algebrskega) okna, v drugem pa iz okna za risanje v dveh dimenzijah. Opozorimo naj, da kadar Derive zaženemo z .men datoteko, nenavedeni ukazi, kot jih poznamo v običajnem programu Derive, niso več dostopni (denimo Factor v osnovnem oknu).

Poleg .men datotek si lahko pripravimo še datoteke s podaljškom .lan. Na to datoteko lahko zapišemo prevode večine sporočil in obvestil, ki jih izpisuje Derive.



Tako smo Derive pognali z

DERIVE moj.lan moj.men

Seveda lahko prevedemo še .hlp datoteko in s tem (skoraj) poslovenimo Derive. Seveda pa bi bilo smiselno, da bi se tega lotili organizirano in bi pripravili enotne vzorce za SLDerive.lan, SLDerive.men in SLDerive.hlp datoteke. Na Fakulteti za matematiko in fiziko sem v okviru izobraževalne delavnice pripravil predlog teh datotek, ki si jih lahko ogledate na WWW strežniku na naslovu [HTTP://WWW.EDUCA.FMF.UNI-LJ.SI](http://WWW.EDUCA.FMF.UNI-LJ.SI).

Risanje

Nekaj zelo zanimivih novosti lahko zasledimo pri risanju.

Sledenje grafu funkcije

Mislím, da je najpomembnejša možnost, da grafični kazalec „zaklenemo“ na graf funkcije. Tako zlahka raziskujemo vrednosti, ki jih funkcija zavzame. Odčitamo ekstreme, ničle in druge značilne točke grafa. Da križec sledi funkciji, dosežemo z ukazom Options/State v oknu za risanje. Tu si izberemo Trace in nastavimo na Yes. Pri tem pa mora biti narisana vsaj ena funkcija. Kakor hitro pobrišemo vse funkcije, ima Trace spet vrednost No. To je razlog, da sledenje funkcij ne spada med stalne nastavitve programa Derive, zato moramo vedno preklopiti na sledenje, potem ko narišemo funkcijo. Zato je zelo priročno, če si zapomnimo, da s funkcijsko tipko F3 preklapljamo med sledenjem in običajnim delom.

Ko sedaj s puščicama levo, desno premikamo križec, ta sledi funkciji. Zato lažje odčitamo vrednosti, ki jih funkcija zavzame. Če je na sliki več grafov funkcij, s puščicama gor in dol preklapljamo med slednjem ene oz. druge funkcije.

Sledenje grafičnega kazalca

Če smo raziskovali funkcijo v oddaljenih točkah, je bilo neprijetno, da smo morali vedno premikati okno, potem ko smo grafični kazalec premaknili v točko zunaj zaslona. Sedaj v Options/State lahko nastavimo, da okno

sledi gibanju kazalca (Follow). Standardno je ta možnost že vključena. Skupaj z možnostjo sledenja funkciji nam ta nastavitev omogoča raziskovanje točk funkcije zunaj trenutnega okna.

Automatična nastavitev skale

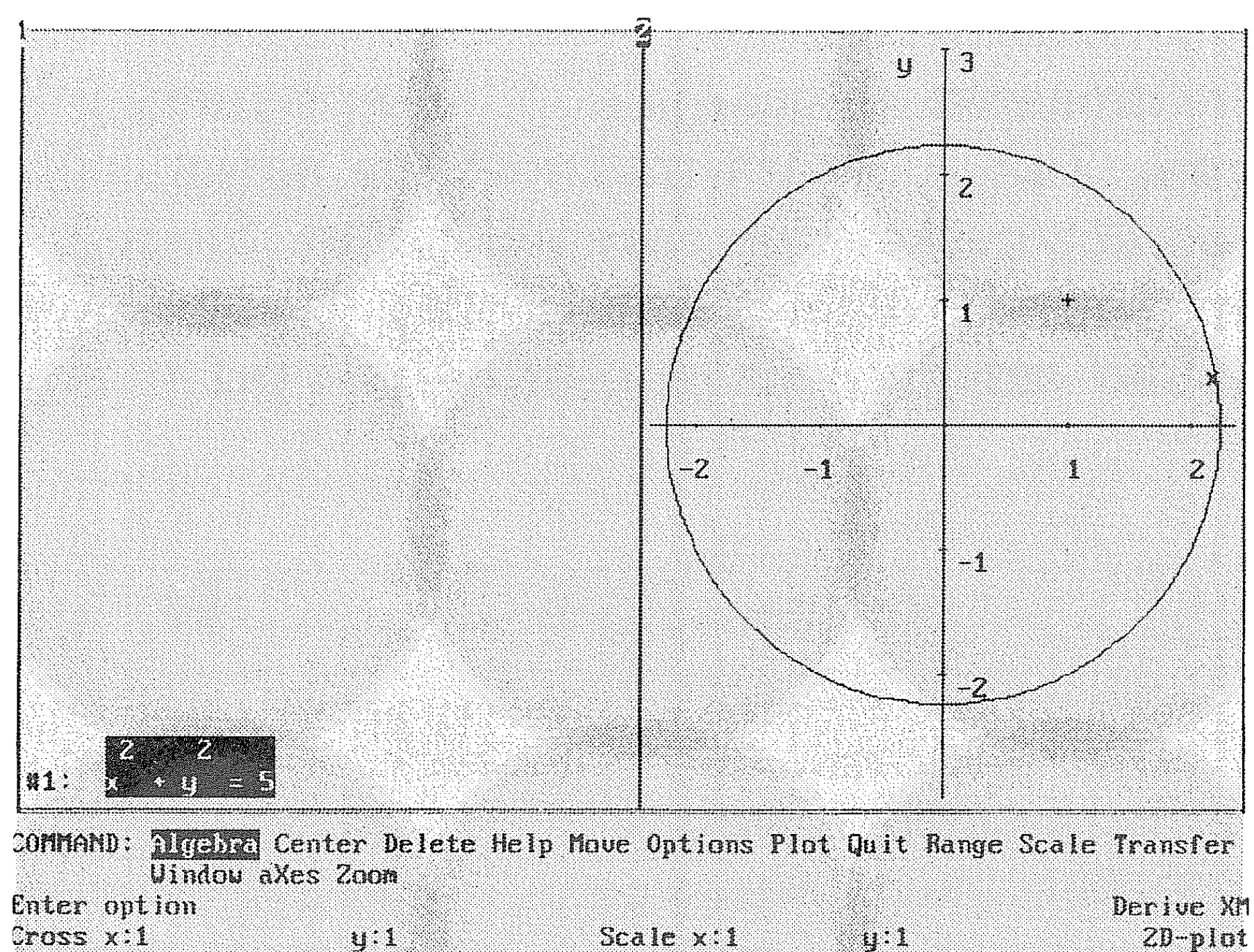
Če v izbiri Scale pri nastavitvi Auto izberemo Yes, to pomeni, da bo program sam poskusil izbrati najprimernejšo skalo na obeh oseh. To nam pride prav predvsem takrat, ko o grafu funkcije ne vemo dosti. Pri običajni nastavitvi morda noben del grafa funkcije ne leži znotraj trenutnega okna ali pa je to premajhno oz. preveliko. Privzeta nastavitev ne predvideva avtomatičnega skaliranja.

Določanje okna

V oknu za risanje je v različici 3 dodan ukaz Range. Ta nam omogoča, da sami določimo meje, v katerih naj se riše graf funkcije. Vrednosti lahko vtipkamo neposredno ali pa sliko zajamemo s pomočjo pravokotnika, ki mu s smernimi puščicami premikamo velikost.

Implicitno risanje

Derive sedaj omogoča neposredno risanje implicitno definiranih funkcij. Tako lahko neposredno narišemo krog. Vnesemo enačbo, npr. $x^2 + y^2 = 5$, jo osvetlimo in z ukazom Plot/Plot narišemo.



Označevanje osi

Derive nam z ukazom Axes omogoča, da spremenimo poimenovanje obeh osi in da izključimo označevanje vrednosti na obeh oseh.

Nove matematične lastnosti

Že tako dolgemu seznamu funkcij in zmožnosti, ki jih ima Derive, so v različici 3 dodali še nekaj novih možnosti. Tako sedaj zna program poenostavljati tudi logične izraze, izdelati pravilnostne tabele, vgrajene so funkcije za delo s polinomi (deljenje, ostanek pri deljenju, največji skupni delitelj), dodan je operator $\pm$, konstanta `unit_circle` (enotski krog), izboljšan

je nadzor nad razstavljanjem izrazov in združevanjem trigonometrijskih izrazov, ... Oglejmo si nekatere:

Deklaracija spremenljivk

Če v programu Derive ne povemo drugače, jemlje Derive spremenljivke kot realne. To vpliva na določene transformacije. Na primeru vidimo, kaj se zgodi ob poenostavitvi izraza #1, če je x realno, kompleksno ali pozitivno realno število.

```
#1:  $\sqrt{x^2}$ 
#2:  $|x|$ 
#3:  $x : \in \text{Complex}$ 
#4:  $\sqrt{x^2}$ 
#5:  $x : \in \text{Real } (0, \infty)$ 
#6:  $\sqrt{x^2}$ 

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove move Window approx
Compute time: 0.1 seconds
Simp(#1)
Free:100%
Derive XM
Algebra
```

V različici 3 je možnost določanja domene spremenljivk (Declare/Variable) še razširjena. Tako obstaja možnost, da spremenljivko določimo kot celoštevilsko ali pa kot neskalarno spremenljivko. Slednje omogoča, da nam za skalarni produkt ni treba uporabljati pike. Uporabo celoštevilskih spremenljivk pa si lahko ogledate na spodnji sliki, pri poenostavljanju izraza $\sin(\pi n)$.

```
#1:  $\sin(\pi \cdot n)$ 
#2:  $\sin(\pi \cdot n)$ 
#3:  $n : \in \text{Integer}$ 
#4:  $\sin(\pi \cdot n)$ 
#5: 0
#6:  $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ 

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove move Window approx
Compute time: 0.0 seconds
User=Simp(User)
Free:100% Ins
Derive XM
Algebra
```

Operator =

V različici 3 je uveden operator $=$. Ta povzroči, da kot naslednji izraz dobimo enačbo, katere leva stran je prvotni izraz, desna pa poenostavljeni izraz. Tako smo za izraz #6 vtipkali $\text{INT}(\cos(x), x) =$.

Stopinje ali radiani

Pri ukazu Manage/Trigonometry je uvedena nova izbira Angle. Ta nam omogoča, da povemo, ali argumente trigonometričnih funkcij izražamo v radianih ali pa v stopinjah.

```
#1: SIN(30)
#2: SIN(30)
#3: -0.988032
#4: Angle := Degree
#5: SIN(30)
#6: 1
      2
```

COMMAND: **Author** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove move Window approx
Compute time: 0.0 seconds
Simp(#5) Free:100% Ins Derive XM Algebra

Druge novosti

Poleg teh novosti je v programu še vrsta drugih. Omenimo, da program sedaj določene operacije izvaja bistveno hitreje, kar nekaj je sprememb pri programerskih ukazih (denimo funkcija, ki vrne števec ulomka, precej funkcij za delo z vektorji). Zelo pomembna je novost, ki smo jo že videli pri naših primerih. V Derive so vpeljali spremenljivke, v katere si zapomnimo določene nastavitve, ki nam jih ni treba več nastavljati s pomočjo menujskih ukazov, ampak neposredno prek vnosa izrazov. Tako si lahko vse značilne nastavitve pripravimo na datoteke in jih ob zagonu programa Derive avtomatsko naložimo.

Poenostavljeno je tudi delo z datotekami, čeprav še ne dosega današnjega standarda. Tako lahko pri ukazih, ki omogočajo izbor imena datoteke, pritisnemo tipko F1 in izberemo datoteko iz izpisanega seznama. Novosti so še podpora barvnega tiskalnika HP DeskJet 500C in 550C, možnost nalaganja več datotek ob zagonu programa, preštevilčenje ukazov, povrnitev pomotoma pobrisanih izrazov, ...

Skratka, novosti je dovolj, da je nova različica vredna nakupa, če že zaradi drugega ne, zaradi prilagodljivega menujskega sistema. Za tiste, ki se ne morete odtrgati od Oken, pa še obvestilo, da je za polet 1996 napovedana različica, ki bo delovala v okolju Windows.

LITERATURA

- [1] S. Klavžar, *O simbolnem računanju*, Obzornik Mat. Fiz. **43** (1996), 73–77.
- [2] B. Kutzler, *Introduction to Derive*, Soft Warehouse, Hagenberg, 1994.
- [3] M. Lokar, *Programi za simbolično računanje Derive*, Obzornik Mat. Fiz. **39** (1992) 1, 1–7.

OPTIČNO INDUCIRANA DIFUZIJA*

IVAN KUŠČER

PACS 32.80.Qk

Svetloba v plinski zmesi povzroči difuzijo, če je njena frekvenca premaknjena od sredine dopplersko razširjene resonančne črte za eno izmed sestavin. Nastali difuzijski tok se da pripravno izraziti z razliko transportnih poti za vzbujeno in za osnovno stanje optično interagirajočih molekul.

LIGHT-INDUCED DRIFT

Light induces diffusion in a gaseous mixture if its frequency deviates from the middle of a Doppler-broadened resonance line of one of the constituents. The resulting diffusive flux is conveniently expressed by aid of the difference of transport mean paths for the excited and ground states of the optically interacting molecules.

1. Opis pojava

Ko me je pred 30 leti neki profesor iz tujine vprašal, s čim se ukvarjam, sem sramežljivo odgovoril, da večidel s kinetično teorijo plinov. „Kaj, ali ni že Boltzmann vsega opravil,” je vzkliknil. – No, ni bilo tako hudo, kajti veliko novega najdemo še dosti kasneje v vrsti monografij s tega področja. Za časa Boltzmann se je teorija omejevala na enoatomne pline [1,2], s čimer niti Boltzmann sam ni bil zadovoljen; saj nas obdajajo v glavnem dvo- in večatomni plini. Vendar se je ustrezna posplošitev Boltzmannove enačbe posrečila šele slabih sto let kasneje, s čimer se je odprla vrsta novih raziskovalnih smeri [3]. V zadnjem času pa so posebne pozornosti deležni kinetični pojavi, ki jih tako v eno- kot v večatomnih plinih sproži svetloba.

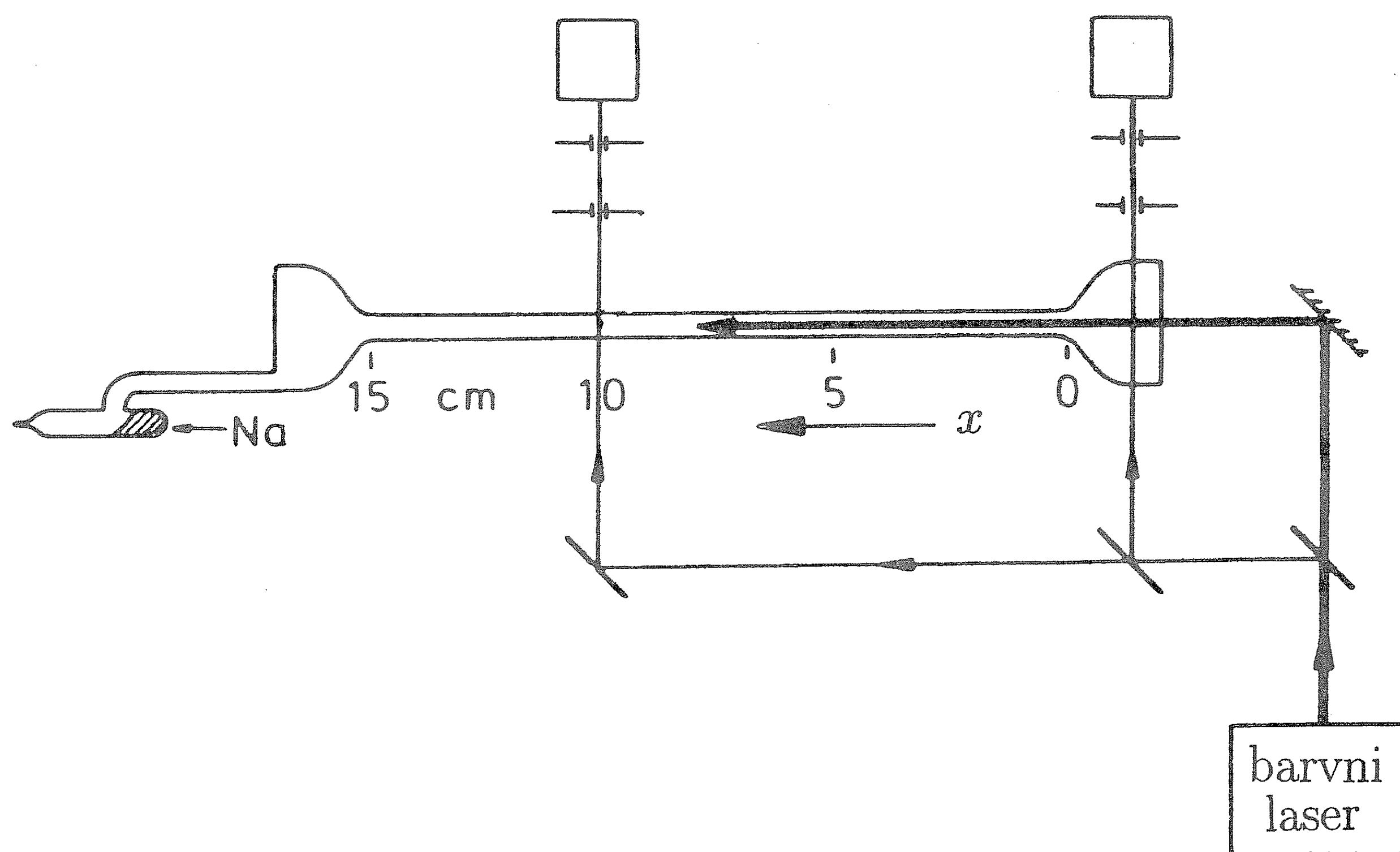
Leta 1979 sta Geljmuhanov in Šalagin iz Novosibirsk napovedala, da svetloba lahko povzroči difuzijo v plinskih zmesih [4]. Poskusi, ki jih je nekaj let kasneje naredila Woerdmanova skupina v Leidenu [5], so prepričljivo potrdili obstoj pojava. Po angleško mu pravijo light-induced drift (LID) in o njem so od tedaj napisali že veliko člankov, tudi dva zbirna [6,7].

Prve eksperimente so naredili z zmesjo argona (številka gostota nekajkrat 10^{17} cm^{-3}) in natrijeve pare (10^{12} cm^{-3}) v 2 mm debeli stekleni cevki (sl. 1). Po dolgem posvetimo skozi njo z lasersko svetlobo (gostota toka nekaj W/cm^2), ki je skoraj v resonanci z atomi natrija, ki pa ji frekvenco lahko nekoliko spreminjamo z akustičnim modulatorjem. Razglasitev sme biti le tolikšna, da je frekvenca svetlobe še vedno znotraj dopplersko razširjene resonančne črte. Resonanco ujamejo tedaj samo atomi, katerih hitrost je pravšnja za nastavljeni Dopplerjev premik. Če je njihova hitrost v smeri svetlobnega curka pozitivna, dobimo resonanco z zvišano frekvenco svetlobe:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_L}{c} \right). \quad (1)$$

* Podiplomsko predavanje, 7. 5. 1996.

Indeks pri v_L naj opomni, da je to hitrost tistih atomov, ki so v resonanci z dano frekvenco (ω) laserske svetlobe. Pravzaprav je to samo komponenta hitrosti v smeri svetlobnega curka – naj bo to smer x – kajti prečni komponenti v_y in v_z na resonančni pogoj ne vplivata.



Slika 1. Poskus z natrijevo paro v argonu. Kvadrata prikazujeta merilnika svetlobe (fotodiodi) [5].

Rumena fluorescenca natrijeve pare pokaže, kaj se potem dogaja. Prav kmalu se vsa para zbere ob vstopni strani cevke. Če premaknemo frekvenco svetlobe na drugo stran ($\omega < \omega_0$), tako da zazvenijo nasprotno usmerjene atomi ($v_L < 0$), se svetleči oblak pomakne proti oddaljenemu koncu cevke, torej v smeri curka. Hitrost oblaka je neverjetna – do več metrov na sekundo. Pometanje atomov z LID je kar se da učinkovito. Tako ni nič čudnega, da so navdušenci ob novoodkritem pojavu že sanjarili o separaciji izotopov. Ali bo kaj iz teh sanj, se pa še ne ve.

Svetlobni tlak ne more biti vzrok pojava, kajti potem bi atomi natrija vselej potovali v smeri curka. Vzrok moramo iskati v spremembi preseka za trke $\text{Na} + \text{Ar}$, če natrijev atom vzbudimo. Valenčni elektron se pri tem preseli na višjo podlupino (s 3S na 3P), tako da se atom nekako napihne in se mu presek poveča. S tem se poveča pogostost trkov, tako da se prosta pot pomanjša.

Obravnavali bomo samo primer, ko je koncentracija natrija majhna, tako da njegovi atomi trkajo v glavnem le z atomi argona. Dokler vlada ravnovesje, ni videti, da bi se natrijeva para kam premikala, ker se ravno toliko njenih atomov giblje na levo kot na desno. Oglejmo si enako velika hitrostna razreda, pri katerih je komponenta hitrosti v intervalih s širino Δv_x pri v_L in pri $-v_L$. Obojni atomi pretečejo v povprečju razdaljo proste

poti, preden trčijo, tako da se skupno težišče vseh teh atomov ne premakne. Po vzbuditvi množice atomov, katerih hitrost v smeri svetlobnega curka je blizu v_L , je drugače. Ti zaradi povečanega preseka v povprečju prej trčijo kot nasprotno usmerjeni, ki so ostali v osnovnem stanju. V povprečju zato natrijevi atomi potujejo nasproti curku.

V zaprti cevki se optično inducirani difuzijski tok natrijevih atomov kajpada kmalu ustavi, s tem da se pojavi koncentracijski gradient. Ta sproži nasprotno usmerjen difuzijski tok, ki uravnovesi prejšnjega. Koncentracijsko razliko natrijeve pare lahko določijo z merjenjem absorpcije. Pri vibracijsko in rotacijsko vzbujenih večatomnih plinih, kjer je pojav dosti šibkejši, pa uporabijo dvojico termistorjev, ki ju vključijo v Wheatstonov mostiček in ki pravzaprav zaznavata razliko toplotnih prevodnosti. Celo koncentracijske razlike v območju 10^{-6} se dajo na ta način še meriti [7].

2. Zametek teorije

Prve teorije pojava so si pomagale bodisi s pogostostjo $\nu(v)$, s katero trkajo natrijevi atomi z argonovimi, ali z ustrezno prosto potjo $l(v) = v/\nu(v)$. Obe količini sta funkciji hitrosti, s katero se atom Na giblje pred trkom. Pogostost trkov izračunamo iz diferencialnega sipalnega preseka za trke Na + Ar, in sicer z integracijo po prostorskem kotu ter s povprečenjem prek Maxwellove porazdelitve argonovih atomov, ob upoštevanju njihove številske gostote n_b [3,8]:

$$\nu(v) = n_b \int d^3 v_b \int 2\pi d(\cos \chi) v_r \sigma(v_r, \chi) \left(\frac{m_b}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m_b v_b^2}{2kT} \right). \quad (2)$$

Maso argonovih atomov (m_b) smo z indeksom ločili od mase natrijevih (m). Navedeni presek je definiran v težiščnem sistemu obeh partnerjev in smo ga izrazili kot funkcijo ustreznega sipalnega kota in relativne hitrosti $v_r = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_b|$. Vrednosti ν za vzbujeno in osnovno stanje bomo kasneje ločili z indeksoma e, g (excited, ground), razlike pa pisali z Δ , torej $\Delta\nu(v) = \nu_e(v) - \nu_g(v)$.

Vedeti moramo še, kolikokrat na sekundo svetloba vzbudi atom Na z neko hitrostjo $\mathbf{v}$, kar naj opiše produkt $PF(v_x - v_L)$. Spektralni faktor F bomo normirali,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v_x - v_L) dv_x = 1. \quad (3)$$

Natančneje povedano: PF naj bo razlika med pogostostjo ekscitacij in stimuliranih deekscitacij. Spontane deekscitacije so tako redke, da jih bomo smeli zanemariti. Faktor F upošteva, da je pogostost prehodov odvisna od razglasitve, torej od razlike med komponento v_x , s katero se giblje atom, in hitrostjo v_L , pri kateri atom ujame sredino resonance. Resonanca ima končno širino zaradi spontane deekscitacije atomov in še zaradi njihovih

trkov. Za zelo ozko resonanco si lahko privoščimo udobno aproksimacijo s funkcijo delta,

$$F(v_x - v_L) \approx \delta(v_x - v_L), \quad (4)$$

kar bomo najraje delali. Bolj realistična je aproksimacija z Lorentzovim profilom, kot se učenno imenuje navadna resonančna krivulja. Polovično širino profila v hitrostnem merilu bomo zaznamovali z Γ , torej

$$F(v_x - v_L) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(v_x - v_L)^2 + \Gamma^2}.$$

Faktor P , ki ga ne bomo razčlenjevali, se izraža s presekom za optično vzbujanje in z gostoto laserskega svetlobnega toka. Če smo daleč pod nasičenostjo, kot bomo v naslednjem privzeli, je P sorazmeren s to gostoto toka.

Začasno privzemimo še, da se natrijev atom bodisi siplje na argonovih izotropno v laboratorijskem koordinatnem sistemu, ali pa, da vsak trk vrne atom v njegovo osnovno stanje. V obeh primerih gibanje po trku ne prispeva več k povprečni potovalni hitrosti u_e vzbujenih atomov. S povprečenjem po njihovi maxwellski porazdelitvi dobimo

$$\begin{aligned} u_e &= P \int F(v_x - v_L) l_e(v) \frac{v_x}{v} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) d^3v \\ &\equiv P \left\langle F(v_x - v_L) \mid l_e(v) \frac{v_x}{v} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

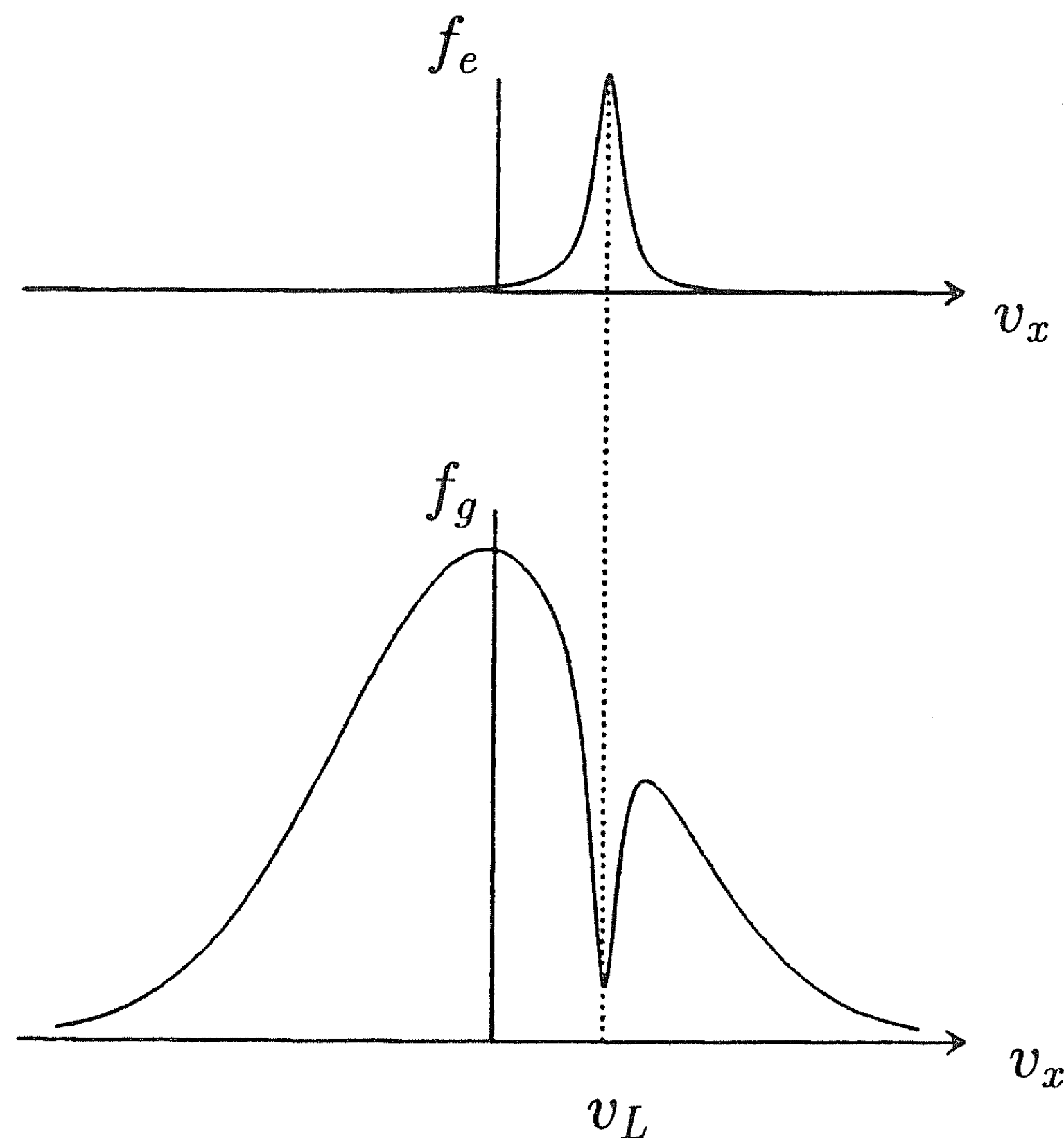
Množili smo pogostost vzbujanja s projekcijo proste poti na smer svetlobnega curka, to je z $l_e v_x / v$. V integralu prepoznamo maxwellsko uteženi notranji produkt dveh funkcij hitrosti, kar upravičuje kratico v drugi vrstici.

Zgodbe še ni konec, ker potujejo tudi atomi, ki so ostali v osnovnem stanju. Če bi bila njihova porazdelitev Maxwelllova, bi v povprečju ne potovali nikamor. Toda laserska svetloba je iz te porazdelitve izžgala vrzel, kjer nekaj atomov manjka. Povprečno potovalno hitrost manjkajočih atomov u_g je treba odšteti, da dobimo hitrost $u(v_L)$, s katero v celoti potuje oblak natrijeve pare:

$$u(v_L) = u_e - u_g = P \left\langle F(v_x - v_L) \mid \Delta l(v) \frac{v_x}{v} \right\rangle. \quad (6)$$

Nadaljnji račun je lahek samo v skrajno idealiziranem primeru, ko F aproksimiramo s funkcijo delta in ko sta obe pogostosti trkov (ν_e , ν_g) konstantni. Vstavimo $l_{e,g}(v)/v = 1/\nu_{e,g}$ in diferencial razstavimo v vzdolžni in radialni faktor: $d^3v = dv_x 2\pi v_\perp dv_\perp$. Ker pri $v_x = \text{const}$ velja $v_\perp dv_\perp = v dv$, opravimo integracijo v (6) tudi drugače:

$$\int \cdots d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{v_x}^{\infty} \cdots 2\pi v dv \right] dv_x.$$



Slika 2. Porazdelitev optično vzbujenih natrijevih atomov glede na njihovo hitrostno komponento v_x (zgoraj), in podobno za tiste v osnovnem stanju (spodaj) [7].

Rezultat je

$$u(v_L) = P\Delta \left(\frac{1}{\nu} \right) \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v_L \exp \left(-\frac{mv_L^2}{2kT} \right). \quad (7)$$

Če je razlika recipročnih ν -jev relativno majhna, jo lahko takole poenostavimo: $\Delta(1/\nu) = -\Delta\nu/\nu^2$.

Namesto da bi določali ali teorijsko izpeljevali pogostost vzbujanja PF , raje merijo izgubo $\Delta I(v_L)$, ki jo gostota svetlobnega toka pretrpi pri prehodu skozi cevko. Ko to delimo s številsko gostoto vzbujanih delcev, z dolžino cevke x in z energijo kvanta, dobimo pogostost vzbujanja, integrirano po spektru:

$$\frac{\Delta I(v_L)}{nx\hbar\omega} = P \langle F(v_x - v_L) \rangle. \quad (8)$$

Lomljeni oklepaj spet ukazuje maxwellsko povprečenje. V primeru ozke resonance se izraz takole poenostavi:

$$\frac{\Delta I(v_L)}{nx\hbar\omega} = P \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp \left(-\frac{mv_L^2}{2kT} \right).$$

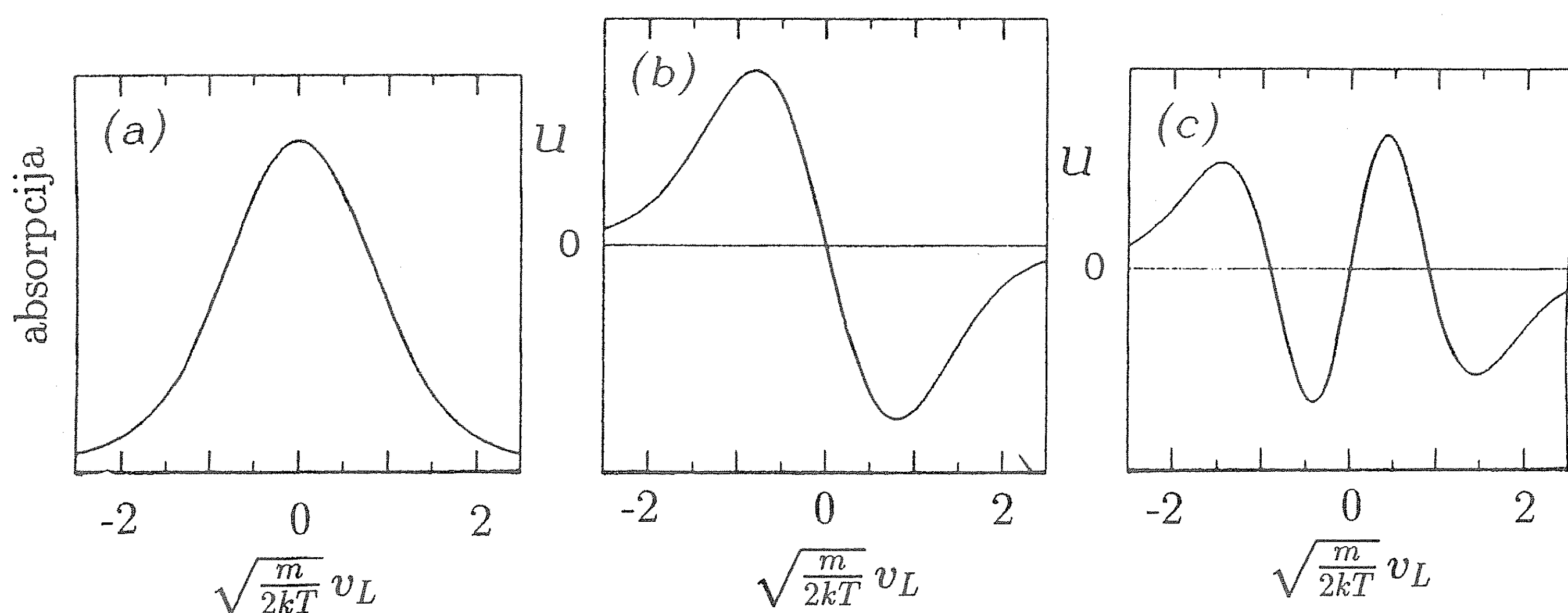
Primerjava z enačbo (7) pokaže, da v primeru konstantnih $\nu_{e,g}$ velja

$$u(v_L) = \Delta \left(\frac{1}{\nu} \right) v_L \frac{\Delta I(v_L)}{nx\hbar\omega}. \quad (9)$$

Koncentracijska razlika, ki se v stacionarnem stanju pojavi med koncema zaprte cevke, je seveda sorazmerna z izračunano potovalno hitrostjo in jo izrazimo z difuzivnostjo (= difuzijskim koeficientom):

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{x}{D} u(v_L). \quad (10)$$

Ko merijo to razliko v odvisnosti od razglasitve laserja, pogosto dobijo krivulje, ki se v okviru skromne dosegljive natančnosti ujemajo z odvodom Dopplerjevega (= Maxwellovega = Gaussovega) profila, kot napovedujeta enačbi (7), ali (10) skupaj z (9) in kot kaže slika 3 levo. S prilagajanjem lahko izluščijo kvocient $\Delta\nu/\nu$, ki ga navedejo kot končni izsledek. Z vprašanjem o pomenu tega kvocienta si pa malokdo beli glavo.



Slika 3. Primeri dopplersko razširjene absorpcijske črte (a) ter dveh krivulj LID: standardne (b) in anomalne (c) [10].

Spočetka se je zdelo, da je samo laserska svetloba zaradi svoje enobarvnosti sposobna vzbuditi difuzijo. Tak vtis pa je napačen, kajti uporabimo lahko tudi svetlobo s širšim spektrom, samo da je njen spektralni profil znotraj uporabljene resonančne črte nesimetričen. Izraz za $u(v_L)$ moramo tedaj integrirati po spektru, da dobimo potovalno hitrost.

3. Transportna pot

Veseli s preprosto interpretacijo opazovanj so pokvarile nestandardne krivulje. Z molekulskimi plini so včasih dobili bodisi narobe obrnjene krivulje ali pa so celo imele tri obračaje namesto enega. To pa ni bil edini povod za iskanje boljše teorije, kajti prej uporabljene poenostavitve so skrajno sumljive. Tista o neskončno ozki resonanci je še razmeroma nedolžna, kajti končno širino zlahka upoštevamo, s tem da naredimo konvolucijo s spektralnim profilom F . To po navadi res delajo. Več skrbi je s privzetkom, da je ν konstanten. Po enačbi (2) dobimo za trde kroglice ($\sigma = \text{const}$), da

ima funkcija $\nu(v)$ hiperboli podoben graf. Potek asimptot je razumljiv: ko v nadtermičnem območju narašča hitrost natrijevega atoma, raste $\nu(v)$ približno linearno, ker so zadetki ob skoraj mirujoče atome Ar sorazmerno bolj in bolj pogosti. Pripomniti je treba, da sta že sami definiciji proste poti in pogostosti trkov dvomljivi. Kadar doseg interakcije ni omejen, sta po klasičnem izračunu presek in z njim pogostost trkov neskončna, prosta pot pa je enaka nič. Lahko se izgovarjamo, da v kvantni mehaniki ni te težave, če interakcija dovolj hitro pojema z razdaljo [9]; tolažba pa ni veliko vredna. Nadalje je sumljiva domneva o izotropnem sipanju, ker nasprotuje izreku o gibalni količini, razen če bi bil natrijev atom neskončno lahek v primeri z argonom. Zaradi svoje končne mase se atom Na tudi po trku v povprečju še giblje v prvotni smeri, čeprav je povprečni vektor hitrosti manjši kot v pred trkom. Tisto, da bi vsak trk že vrnil delec v osnovno stanje, pa po navadi tudi ne drži, zlasti ne za vibracijsko vzbujene molekule.

Obema opisanima težavama se izognemo, če namesto s pogostostjo trkov ali s prosto potjo računamo s transportno potjo [10]. To je nekaj takega kot doseg delca v danem okolju. Zamislimo si tuj delec, ki ga z začetno hitrostjo v spustimo v mirujoč plin. Po prvem trku ne vemo več zagotovo, kam je delec šel, ampak si lahko samo zamislimo verjetnostno porazdelitev, ki jo prikažemo z nekakšnim oblakom. Oblak se razširja in hkrati še vedno leze v smeri začetnega gibanja, ker ima delec v povprečju še nekaj hitrosti v tej smeri. Po mnogih trkih ta vpliv izgine, tako da se oblak ustavi. Še vedno se razširja, kot veleva difuzijska enačba; vendar nam tega ni mar, ampak gledamo samo težišče oblaka. Povprečni premik, ki ga delec naredi v neskončno dolgem času, torej celotni premik, ki ga naredi težišče verjetnostnega oblaka – to je transportna pot $\Lambda(v)$. Seveda ima ta vektor zaradi izotropnosti plina enako smer kot začetna hitrost v , tako da zadošča poznavanje njegove velikosti $\Lambda(v)$. Jasno je tudi, da mora biti to monotona funkcija začetne hitrosti. Tudi pri streljanju v sir narašča doseg krogle monotonno z njeno začetno hitrostjo.

Hudo poenostavljen zgled, ki velja za trde kroglice pri velikih hitrostih, naj nam pojem še približa. Predstavljajmo si, da prepotuje tuj delec v plinu med dvema trkoma pot l , in upoštevajmo, da je povprečni kosinus sipalnega kota v laboratorijskih koordinatah ($\cos \delta$) pozitiven. Slednje pomeni, da je sipanje naprej, to je v hemisfero okrog prvotne smeri, bolj verjetno kot sipanje nazaj. Razume se, da med koti pri zaporednih sipanjih ni korelacije. Med prvim in drugim trkom naredi delec korak z dolžino l , katerega projekcija na začetno smer je v povprečju enaka $l \cos \delta$. Tretji korak projiciramo naprej na drugega in potem šele na prvega, s čimer dobimo faktor $(\cos \delta)^2$. Zdaj že uganemo rezultat:

$$\Lambda = l + l \overline{\cos \delta} + l (\overline{\cos \delta})^2 + \dots = \frac{l}{1 - \overline{\cos \delta}}. \quad (11)$$

Za enake trde kroglice pokaže preprost izračun pri $v \rightarrow \infty$, da je $\overline{\cos \delta} = \frac{2}{3}$, tako da je $\Lambda = 3l$. Za majhne hitrosti zgled ni primeren, ker plin s

svojim termičnim gibanjem hitro zmede gibanje delca. Sploh pa je po zdravi pameti $\Lambda(0) = 0$.

Taki in še drugi modelni izračuni kažejo, da ima krivulja za funkcijo $\Lambda(v)$ od daleč podobno obliko kot za arkustangens. Izjema pa je tako imenovani Rayleighov plin, to je zmes lahkega plina in maloštevilnih težkih delcev, ki v njem doživljajo Brownovo gibanje. Za tak delec se da dokazati, da velja sorazmernost

$$\Lambda = \Lambda' v, \quad \Lambda' = \text{const.} \quad (12)$$

Brez pomišljanja lahko sedaj popravimo izraz (6) za potovalno hitrost pri optično inducirani difuziji:

$$u(v_L) = P \left\langle F(v_x - v_L) \mid \Delta\Lambda(v) \frac{v_x}{v} \right\rangle. \quad (13)$$

Namesto razlike prostih poti vsebuje izraz razliko transportnih poti za delec v vzbujenem in v osnovnem stanju, $\Delta\Lambda = \Lambda_e - \Lambda_g$. Za potovanje delca je pomembno le, kako daleč v povprečju pride po začetnem sunku, ne pa, ali je vmes kaj trčil. Za primer ozke resonance v smislu aproksimacije (4) se izraz poenostavi enako kot prej:

$$u(v_L) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} P v_L \int_{v_L}^{\infty} \Delta\Lambda(v) \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (14)$$

Za Rayleighov model (12) je rezultat še bolj preprost:

$$u(v_L) = P \Delta\Lambda' \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v_L \exp \left(-\frac{mv_L^2}{2kT} \right). \quad (15)$$

Namesto razlike $\Delta(1/\nu) = \Delta l(v)/v$ kot v (7) imamo sedaj $\Delta\Lambda'$. Razložek je hud, kajti pri Rayleighovem (= Brownovem) delcu je $l(v) \approx 0$, medtem ko je $\Lambda' > 0$.

Za nameček si še oglejmo, kako se s transportno potjo izraža difuzivnost. Začnimo z Green-Kubovo formulo, ki povezuje ta koeficient s časovnim integralom hitrostne avtokorelacijske funkcije [11,12],

$$D = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mid \mathbf{v}(0) \rangle dt. \quad (16)$$

Ukazano Maxwellovo povprečje prek vseh prostostnih stopenj plinske zmesi si mislimo izračunano v dveh korakih. Najprej fiksiramo $\mathbf{v}(0)$ in povprečimo po vseh preostalih spremenljivkah, ki opisujejo mikroskopsko stanje plina. Šele nazadnje povprečimo po prostoru vektorja $\mathbf{v}(0)$. Po prvem povprečenju,

ki se tiče samo prvega faktorja v notranjem produktu (16), že lahko opravimo časovno integracijo, s čimer očitno dobimo transportno pot,

$$\int_0^\infty \langle \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{v}(0)} dt = \Lambda(\mathbf{v}(0)). \quad (17)$$

Integrandu smo pripisali, da opisuje pogojno povprečje za izbrani $\mathbf{v}(0)$. V drugem koraku povprečimo po Maxwellovi porazdelitvi po prostoru začetnih hitrosti, pri čemer pa podatek $t = 0$ ni več pomemben. Tako dobimo predelano Green-Kubovo formulo za difuzivnost,

$$D = \frac{1}{3} \langle \Lambda(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{3} \langle \Lambda(v) v \rangle. \quad (18)$$

Formula presenetljivo spominja na tradicionalni izraz

$$D = \frac{1}{3} \bar{l} \langle v \rangle, \quad (19)$$

ki ga še najdemo v kakem zastarelem učbeniku, je pa v tipičnih primerih za kak faktor 2 prenizek. Pri tem uporabimo povprečno termično hitrost difundirajočih delcev, $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$, in t.i. Maxwellovo povprečno prosto pot, $\bar{l} = \langle v \rangle / \langle \nu(v) \rangle$.

4. Nekaj izsledkov

Raziskave optično inducirane difuzije so razkrile marsikaj nepričakovanega. Potovalne hitrosti so pri alkalnih kovinah včasih dosti manjše, kot jih izračunamo iz absorpcijskih presekov. Izkazalo se je, da je do tega prišlo zaradi tako imenovanega hiperfinega prečrpavanja [6]. Zaradi jedrskega spina ($\frac{3}{2}$) se osnovni nivo natrijevega atoma ($^2S_{1/2}$) razcepi na dvoje, namreč na nivo s celotnim (elektronskim + jedrskim) spinom $F = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, in drugim, pri katerem je $F = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Pri trkih skoraj ni medsebojnih prehodov, ker je jedro zaščiteno z elektronskim oblakom. Pač pa so mogoči prehodi po ovinku, če atom vedno na novo vzbujamo in mu dovolimo, da z deekscitacijo preide v enega izmed osnovnih nivojev. Če deluje pri poskusu svetloba samo na enega izmed hiperfinih nivojev, ga vzbujanje kmalu precej izsuši. Tako dobimo lahko tudi globoko pod nasičenjem oslavljen in nelinearen LID.

Več presenečenj je bilo pri večatomnih molekulah, katerih vibracije in rotacije so vzbujali z infrardečo svetlobo iz laserja na CO_2 . Ker so razlike $\Delta\nu/\nu$ tu v območju procentov, je optično inducirana difuzija dosti šibkejša kot pri atomih; kljub temu pa se da zanesljivo meriti. V več primerih so ugotovili krivulje s tremi obračaji kot na sliki 3 desno [13]. Zdelo se je, kot da bi imel tu kvocient $\Delta\nu/\nu$ pri različno močni razglasitvi različen

predznak: pri močni razglasitvi pozitivnega, kot pri normalnem LID, pri šibki pa obrnjenega. Če zaupamo interpretaciji s transportno potjo, moramo sklepati, da se v takih primerih krivulji za $\Lambda_e(v)$ in za $\Lambda_g(v)$ sekata, in sicer tako, da je pri velikih hitrostih $\Delta\Lambda(v) < 0$; pri majhnih pa velja obrnjeni neenačaj. Pri velikem v_L , torej pri močni razglasitvi, poteka integracija v (14) samo po območju, kjer je $\Delta\Lambda$ negativen, tako da dobimo potovalno hitrost z „normalnim“ predznakom. Pri majhnem v_L pa se lahko zgodi, da zmaga obrnjeni preznak. Do domnev, kdaj in zakaj pride do križanja obeh krivulj, ni težko priti [10]. Pri velikih hitrostih se vzbujeni molekuli pozna, da je nekako napihnjena, tako da je $\nu(v)$ povečan in zato $\Lambda(v)$ pomanjšan. Pri majhnih hitrostih pa odloča predvsem rotacijsko stanje molekule. Če je vzbujanje takšno, da se rotacijska vrtilna količina molekule poveča, je učinek podoben kot pri povečanju hitrosti: $\Lambda(v)$ se poveča, tako da je kaj lahko $\Delta\Lambda(v) > 0$.

LID se da uporabiti ne le za ločitev izotopov, ampak tudi za ločitev nuklearno spinskih modifikacij pri molekulskih plinih. Prej so znali ločiti samo orto- in paravodik, zdaj pa se odpira veliko možnosti. Pri ortomodifikaciji molekule CH_3F ima celotni spin treh protonov vrednost $\frac{3}{2}$, pri paramodifikaciji pa $\frac{1}{2}$. Trki le redko povzročijo vmesne prehode. Ker so rotacijski nivoji dopuščeni izmenoma samo za eno ali drugo modifikacijo, ju lahko s primerno izbiro laserske svetlobe selektivno vzbudimo in tako ločimo. Še več: enaka svetloba lahko pomaga pri ugotavljanju ločitve, s tem da merimo absorpcijo v merilni celici, ki je priključena na en konec ločitvene. Celo časovna konstanta za prehod med modifikacijama, ki je v območju ur ali minut, se da na ta način določiti [14].

Pri večatomnih plinih ljudje radi uporabljajo poenostavljeno obliko Boltzmannove enačbe, ki ne upošteva vektorskega značaja vrtilne količine in ki je znana s šifro WCUB (Wang-Chang – Uhlenbeck – de Boer) [3]. Klasično računamo z izotropno pozadelitvijo glede na ta vektor, kvantno pa uporabljamo statistične matrike [15] $(j, m \mid \cdots \mid j', m')$, ki so diagonalne in neodvisne od magnetnega kvantnega števila m . Predstava, da je transportna pot že določena z energijskim nivojem in da ni odvisna od orientacije vrtilne količine $\mathbf{J}$, se opira na prav takšno poenostavitev. Da je tvegana, pa spoznamo pri letečem krožniku, ki ga mečemo v gozdu. Če je os krožnika obrnjena v smer gibanja, bo prej kam zadel, kot če leti počez. Poleg tega moramo pomisliti, da se izotropija glede na vektor $\mathbf{J}$ pri optičnem vzbujanju podre, tako da pride do polarizacije molekul glede na električni vektor. Analiza, ki presega aproksimacijo WCUB, pokaže, da taka ureditev na LID znatno vpliva samo v izjemnih primerih [16]. Tedaj bi tudi morali pričakovati, da se da na pojav vplivati z magnetnim poljem, namreč zaradi povzročene precesije vrtilne količine. Tak vpliv so res opazili, vendar ujemanja s teorijo še niso dosegli [17].

Rad bi še omenil imenitno vlogo, ki naj bi jo LID po mnenju nekaterih imel v astrofiziki. Ugotovili so, da se relativna pogostost devterija v osončju zelo spreminja z razdaljo od Sonca. Na Veneri ga je 1,6% na zunanjih planetih in tudi zunaj v vesolju pa približno 1000-krat manj. Atutov in Šalagin iz Novosibirska [18] sta prišla na misel, da do separacije elementov in tudi izotopov lahko pride zaradi optično inducirane difuzije. Domnevata, da so bolj notranje plasti prasonca sevale v spektru H_2O , in da je ta svetloba povzročila difuzijo enakih molekul v bolj zunanjih plasteh. Do potrebne razglasitve je bojda prišlo zaradi rdečega premika.

Hannelore Bloemink in drugi [19] so v Leidnu z meritvami pokazali, da ima vodna para nekaj spektralnih črt, ki skupaj res dajo LID z zaželenim predznakom in primerno velikostjo. Tudi ocenjeni rdeči premik ima ravno pravšnjo velikost. Vendar je še prezgodaj, da bi razlagi kar zaupali, ker bo treba preveriti astrofizikalne prepostavke.

LITERATURA

- [1] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie, I, II.* (Barth, Leipzig, 1896, 1898).
- [2] *The Boltzmann Equation*, Proc. Intern. Symp. „100 Years Boltzmann Equation”, eds. E. G. D. Cohen, W. Thirring, Springer, Wien, 1973.
- [3] F. R. W. McCourt, J. J. M. Beenakker, W. E. Köhler in I. Kuščer, *Nonequilibrium Phenomena in Polyatomic Gases*, Oxford University Press, 1990, 1991.
- [4] H. Geljmuhanov, A. M. Šalagin, *Pisjma ŽETF*, **29** (1979), 773.
- [5] H. G. C. Werij, J. P. Woerdman, J. J. M. Beenakker, I. Kuščer, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), 2237.
- [6] E. R. Eliel, *Adv. Atom. Molec. Opt. Phys.* **30** (1993) 199.
- [7] L. J. F. Hermans, *Internatl. Rev. Phys. Chem.* **11** (1992) 289.
- [8] S. Chapman, T. G. Cowling, *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge University Press, 1970.
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifšic, *Kvantna mehanika*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1966, §123.
- [10] I. Kuščer, L. J. F. Hermans, P. L. Chapovsky, J. J. M. Beenakker, G. J. van der Meer, *J. Phys. B*, **26** (1993), 2837; I. Kuščer, *Annals of Nuclear Energy* **23** (1996), 330.
- [11] R. Balescu, *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*, Wiley, New York, 1975, § 21.2.
- [12] I. Kuščer, *Obz. mat. fiz.* **41** (1994), 65.
- [13] G. J. van der Meer, J. Smeets, E. R. Eliel, P. L. Chapovsky, L. J. F. Hermans, *Phys. Rev. A* **47** (1993), 529.
- [14] P. L. Chapovsky, *Ž. eksp. teor. fiz.* **97** (1990), 1585; *Phys. Rev. A* **43** (1991), 3624.
- [15] I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota*, Društvo matematikov in fizikov, Ljubljana, 1987.
- [16] I. Kuščer, J. J. M. Beenakker, G. Nienhuis, *J. Phys. B* **27** (1994), 1361.
- [17] E. J. van Duijn, R. N. Nokhai, L. J. F. Hermans, Leiden University, 1996, *preprint*.
- [18] S. N. Atutov, A. M. Šalagin, *Pisjma astron. ž.* **14** (1988), 664.
- [19] H. I. Bloemink, J. M. Boon-Engering, E. R. Eliel, L. J. F. Hermans, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 742.

IN MEMORIAM PROFESORJU OTONU SAJOVCU

Obzornik za matematiko in fiziko je začel s pripravami za zapis o prof. Sajovicu ob njegovi devetdesetletnici leta 1997. Te je prekinila vest v časopisu Delo dne 11. aprila 1996, kjer smo prebrali, da so 10. aprila 1996 položili k zadnjemu počitku prof. Otona Sajovica, upokojenega univerzitetnega profesorja.

Prof. Sajovic se je rodil 6. 8. 1907 v Ljubljani, kjer se je tudi šolal in kjer je diplomiral na matematičnem oddelku Filozofske fakultete dne 4. junija 1929. S presledki je poučeval na srednjih šolah v Varaždinu in Ljubljani od leta 1930 do leta 1946, ko je bil imenovan za izrednega profesorja opisne geometrije na Tehniški fakulteti Univerze v Ljubljani. Leta 1961 je postal redni profesor opisne geometrije. V letu 1971 se je upokojil, po dveh letih je prenehal sodelovati pri pouku na Fakulteti za gradbeništvo, geodezijo in arhitekturo.

Profesor Sajovic je bil odličen učitelj: v srednji šali je poučeval matematiko, opisno geometrijo, fiziko in astronomijo. V tem času, tj. do leta 1946, je samostojno sestavil ali sodeloval pri 8 knjigah; posebno znan je učbenik Trigonometrija in analitična geometrija za srednje šole, Ljubljana 1937, ki je po delih predelan izhajal še pozneje, do leta 1963.

Po imenovanju za izrednega profesorja opisne geometrije je bil dolga leta, vse do leta 1961, edini predavatelj tega predmeta, ki se je takrat poučeval na skoraj vseh tehniških fakultetah. Strokovno se je tedaj prof. Sajovic usmeril predvsem na geometrijo in opisno geometrijo. Spisal je tri knjige, eno v soavtorstvu, s področja opisne geometrije in sestavil Terminološki slovar opisne geometrije. Priobčil je več člankov in recenzij v OMF in drugod, 5 sestavkov z geometrijsko tematiko pa je ostalo neobjavljenih. Prevedel je knjigo K. Petrovića in O. Tomanica Začetne vaje v konstruiranju in čitanju tehničnih risb in imel več predavanj v okviru DMFA Slovenije in drugod.

Prof. Sajovic je dolga leta predaval opisno geometrijo tudi za študente matematike, od leta 1961 da 1963 pa je predaval študentom matematike predmet Geometrija.

Profesor Sajovic je bil znan kot izredno natančen predavatelj, pravičen izpraševalec in vedno naklonjen študentom. Mnogi njegovi študenti matematike imajo lepe spomine na izlete v gore, kamor jih je peljal ob zaključku šolskega leta. Poleg pedagoških kvalitet, ki so bile tedaj splošno znane, je imel še druge velike zasluge za razvoj matematike, kar pa morda ni javno znano. Profesor Sajovic je bil namreč več let predstojnik oddelka za splošne predmete na Tehnični visoki šoli, skrbel je tudi za knjižnico Tehnične fakultete vse do združitve te knjižnice z Matematično knjižnico Oddelka za matematiko, kar se je zgodilo okoli leta 1960. Z izrednim občutkom je naročal matematične knjige in revije iz vseh, tudi modernih področij matematike. Znaten del zaslug za to, da je sedanja Matematična knjižnica res

lepo založena s knjigami in revijami, gre prav prof. Sajovcu. Podpisani je bil skupaj z matematikom F. Lebedincem, ki je kot predavatelj opisne geometrije nasledil prof. Sajovica na FAGG, skoraj 5 let demonstrator za opisno geometrijo. Za njegovo vodstvo po matematični literaturi sem mu iz srca hvaležen.

S profesorjem Sajovcem smo se poslovili še od zadnjega vplivnega univerzitetnega učitelja matematike prvih generacij diplomantov matematike, kamor prištevamo med drugimi tudi prof. Antona Vakslja, prof. Milana Zieglerja in prof. Alojzija Vadrnala. Podrobnejša študija delovanja in vpliva teh kolegov na razvoj matematike še čaka ustrezne obdelave.

Anton Suhadolc

PROFESOR DR. TOMISLAV SKUBIC – UMRL

Letos 10. marca je umrl naš stanovski kolega upokojeni profesor Fakultete za elektrotehniko Tomislav Skubic. Tisti, ki smo sodelovali z njim, smo ga poznali kot odličnega predavatelja, izredno delavnega in zagnanega strokovnjaka na širšem področju matematike.

Tomislav Skubic se je rodil 6. 10. 1930 v Ljubljani. Po maturi na klasični gimnaziji se je leta 1949 vpisal na matematični oddelek takratne Prirodoslovno-matematične fakultete in leta 1953 diplomiral. Po krajšem službovanju na srednjih šolah je v letu 1959 postal asistent za matematiko na oddelku za tehniško fiziko. Letu 1962 je dosegel doktorat tehniških znanosti. Kmalu zatem se je v Zvezni republiki Nemčiji specializiral za delo z enim prvih računalnikov Z-23. Danes lahko rečemo, da je Tomislav Skubic začetnik organiziranega študija računalništva, saj se je kot predavatelj predmeta programiranje za računalnike razdal na številnih fakultetah, drugih znanstvenih in gospodarskih ustanovah ne samo v Ljubljani, ampak tudi po Sloveniji in zunaj nje.

V letih 1963 do 1966 je bil predstojnik računskega centra Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko in se tako posvetil organizaciji tega centra. V teh in nekaj naslednjih letih je sodeloval pri mnogih raziskovalnih nalogah s področja računalnikov in elastomehanike. Seveda je v tem času predaval matematiko na fakulteti za elektrotehniko in je ostal v spominu takratnih slušateljev sicer kot strog, toda odličen učitelj.

Kot tajnik je v Društvu matematikov, fizikov in astronomov zapustil veliko sled. Delo, ki ga je izredno marljivo in zanj s tako znano zagnanostjo opravil v letih 1955 in 1956, je ne samo številčno, ampak tudi organizacijsko okrepilo naše društvo.

Velika aktivnost na le nekaj omenjenih področjih dela je profesorju Tomislavu Skubicu prežgodaj vzela moči. Zadnjih nekaj let je preživel v pokoju in se je v tem času ukvarjal z zanj najlepšim delom – s pomočjo mladim ljudem pri študiju matematike.

Za njegovo učiteljsko in organizacijsko delo smo mu lahko resnično hvaležni. Kot prijetnega, vestnega in delavnega kolega bomo Tomislava Skubica ohranili v lepem spominu.

Gabrijel Tomšič

NOVE KNJIGE

HAWKING S., PENROSE R., *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1996, Isaac Newton Institute series of lectures, 142 str.

S. Hawking zaseda nekdanje Newtonovo profesorsko mesto v Cambridgeu in je zadnje čase znan predvsem po uspešnici *Kratka zgodovina časa*. R. Penrose, profesor matematike na oxfordski univerzi, je tudi napisal zelo popularni knjigi *Cesarjeva nova pamet* in *Sence pameti*. Leta 1994 ta pomembna zastopnika angleške znanosti v vrsti predavanj na cambriškem Newtonovem inštitutu za matematične znanosti razpravljala o tem, ali je mogoče splošno teorijo relativnosti povezati s kvantno mehaniko. Predavanja so si sledila izmenoma in knjiga vsebuje šest predavanj in zaključno razpravo ter uvod M. Atiyaha. Hawking je predaval o klasični teoriji, o kvantnih črnih luknjah in o kvantni kozmologiji, Penrose pa o zgradbi četvernih singularnosti, o kvantni teoriji in četvernem prostoru ter o tvistorskem pogled na četverni prostor. Glede klasične teorije se predavatelja strinjata, o vključitvi kvantne mehanike pa se razhajata. Penrose kot Einstein ne verjame, da je kvantna mehanika končna teorija, in misli, da vesolje ni zaprto in se bo venomer širilo. Hawking pa sprejema kvantno mehaniko in sodi, da bo mogoče začetek vesolja pojasniti z združitvijo s splošno teorijo relativnosti v kvantno teorijo gravitacije pri dodatnem pogoju, da vesolje nima mej. Zapisi sicer ne gradijo na enačbah, vendar zahtevajo več kot samo osnovno znanje splošne teorije relativnosti in kvantne mehanike. Za bralce bo knjiga zanimiva zaradi obeh predavateljev in zaradi tega, ker poskuša oživiti duha nekdanjih javnih disputacij.

Janez Strnad

VESTI

PODIPLOMSKI ŠTUDIJ ZA UČITELJE MATEMATIKE

Diplomante pedagoške smeri matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko in na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani ter druge kandidate z matematično fakultetno izobrazbo vabimo k vpisu na podiplomski študij matematike (izobraževalna smer). Na FMF organiziramo dveletni študij (a) za pridobitev magisterija iz matematike za področje izobraževanja, (b) za pridobitev specializacije iz matematičnega izobraževanja.

Formalni vpis bo v začetku oktobra 1996, prijave pa zaradi evidence zbiramo že prej. Pogoji za vpis je poleg diplome iz matematike povprečna ocena najmanj 8 na dodiplomskem študiju.

Podrobnejše informacije dobite pri prof. dr. Milanu Hladniku (tel. 1766-541) ali v pisarni Oddelka za matematiko in mehaniko FMF, Jadranska 19, Ljubljana (tel. 1766-515).

Milan Hladnik

STROKOVNO IZPOPOLNJEVANJE UČITELJEV MATEMATIKE

Na Oddelku za matematiko in mehaniko FMF pripravljamo v okviru t.i. stalnega strokovnega izpopolnjevanja tako kot doslej tudi za šol. leto 1996/97 ciklus predavanj s skupnim naslovom Izbrana poglavja iz matematike. Namenjen je učiteljem matematike v srednjih šolah. Na teh predavanjih nameravamo predstaviti sodobne matematične metode in njihovo uporabo v znanostih, nove informacijske tehnologije, nove knjige in nove ideje pri pouku matematike v srednji šoli.

Podrobnejši naslovi dveurnih predavanj bodo znani kasneje, okvirni program pa je naslednji:

1. Miha Perman, *Verjetnostni račun*,
2. Mirko Dobovišek, *Kvadratna enačba*,
3. Andreja Prijatelj, *Matematična logika*,
4. Vladimir Batagelj, *Informacijske tehnologije in pouk matematike*,
5. Andrej Blejec, *Statistika*,
6. Milan Hladnik, *Uporaba Fourierovih vrst*,
7. Matjaž Željko, *Geometrija*,
8. Egon Zakrajšek, *Uporabna matematika*,
9. Peter Petek, *Kaotični atraktorji*,
10. Miran Černe, *Analiza*,
11. Damjan Kobal, *Dejavniki motivacije za matematično izobraževanje* (razgovor),
12. *Seminar* (predstavitev seminarskih nalog udeležencev).

Program bomo izvedli v prostorih FMF, Jadranska 21, Ljubljana v treh terminih: konec septembra (predvidoma v četrtek 26.9.1996), novembra (predvidoma v petek 8. in v soboto 9.11.1996) in konec januarja (predvidoma v sredo 29.1.1997).

Novost je obvezna prijava z uradno prijavnico in plačana kotizacija 1500 SIT do 10.9.1996. Pogoji za pridobitev točke v okviru uradnega sistema napredovanja učiteljev pa je obisk vsaj dveh srečanj in aktivna udeležba z izdelavo in zagovorom krajše seminarske naloge iz snovi predavanj, iz metodike srednješolske matematike, iz snovi, ki se obravnava na matematičnih krožkih ipd. ali iz drugih zanimivih in dostopnih področij matematike. Prijavljenim bomo točen urnik predavanj in druga obvestila pošiljali osebno.

Stalno strokovno izpopolnjevanje znanja in izmenjava izkušenj s kolegi sta nujna potreba sodobnega učitelja. Uspehe pri prenašanju znanja matematike na mladi rod pa lahko dosežemo le skupaj. Zato naj velja srednješolskim učiteljem matematike prisrčno in stalno vabilo na strokovna srečanja.

Milan Hladnik