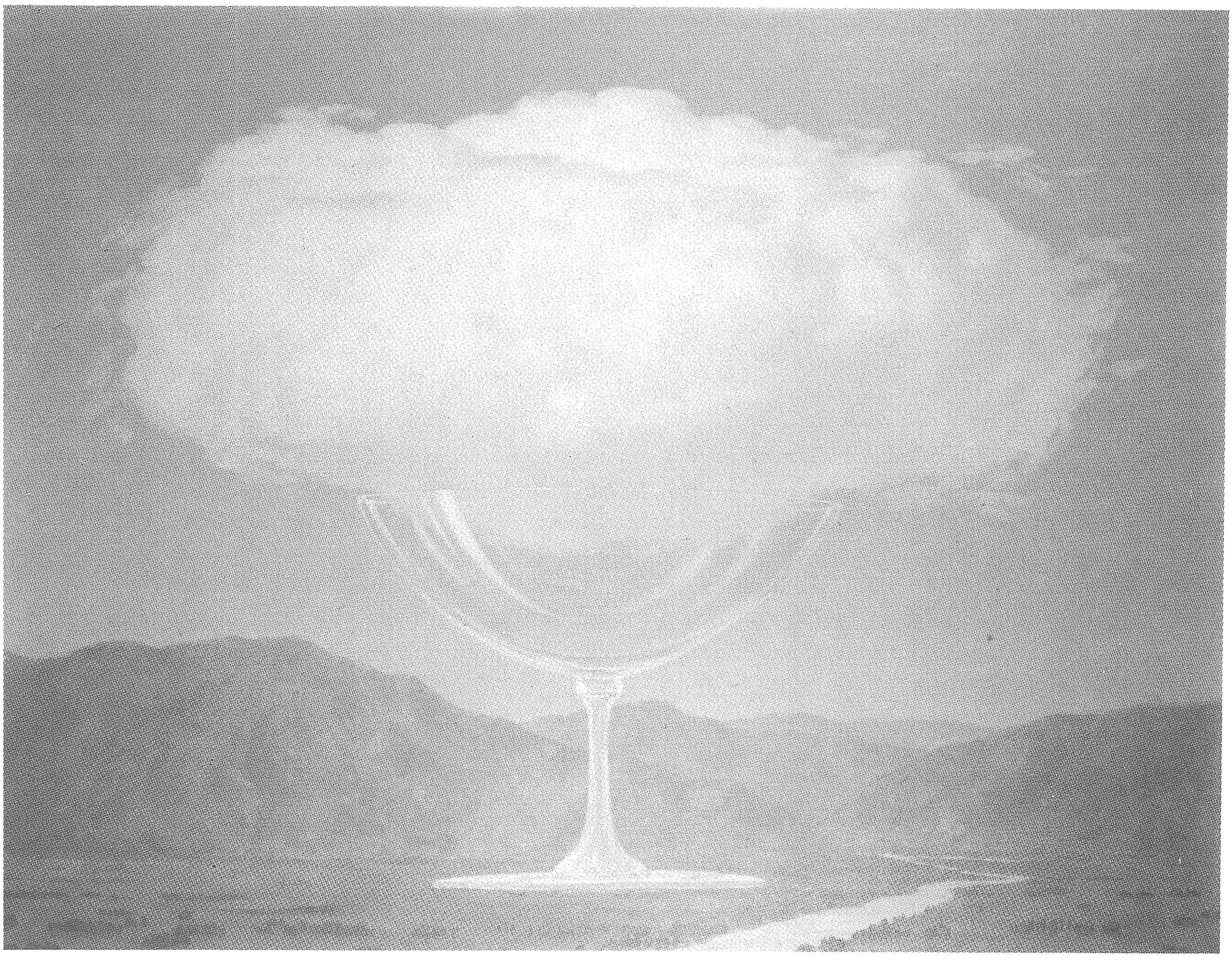
ZDAJA DRUSTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

NTRALNA EKONOMSKA
JIŽNICA Ljubljana
ODPISANO
17/15-6

1995
Letnik 42
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1995

letnik 42, številka 6, strani 181–212

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.100 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.200 SIT, za študente 1.050 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 400 SIT, stare številke 300 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 DMFA Slovenije – 1264 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles Str.–Page

Matematični modeli demokracije — Mathematical models of democracy (Vesna Omladič) 181–192

Caylejevi in Petersenovi grafi — Cayley and Petersen graphs (Marko Lovrečič Saražin) 193–198

Nenavadni interferenčni poskusi: Foton in dva atoma — Unusual interference experiments: One photon and two atoms (Janez Strnad) 199–204

O poučevanju fizike na univerzi — On lecturing physics (Janez Strnad) 205–211

Vesti — News

Dušan Repovš – ambasador znanosti (Matija Cencelj) 212–III

Letno kazalo . . . . . III–IV

Na ovitku: Slika k članku *Matematični modeli demokracije*: R. Magritte, *Občutljivi živec*, 1960.

MATEMATIČNI MODELI DEMOKRACIJE

VESNA OMLADIČ

Math. Subj. Class. (1991): 92H10

Obravnavani so problemi socialne izbire in izrek Arrowa o nemogočem.

MATHEMATICAL MODELS OF DEMOCRACY

Social choice models and an impossibility theorem due to Arrow are discussed.

1. Uvod

V zgodovini je bila matematika povezana predvsem z naravoslovnimi vedami. V družboslovne vede se je njena uporaba širila sprva prek statistike, danes pa v teh vedah postajajo čedalje pomembnejši tudi drugi matematični prijemi. Razlike med uporabo matematike v naravoslovnih vedah in zunaj njih so pogojene z naravo problemov. V naravoslovju so normativne teorije postavljene v idealne okoliščine (npr. vakuum, površine brez trenja), ki se jim da eksperimentalno približati in hkrati lahko aproksimirajo realne situacije. V družboslovju pa je vprašanje, koliko idealizirane situacije lahko aproksimirajo realnost, kakor tudi, kako lahko idealizirane situacije eksperimentalno preverjamo.

Poseben problem so že količine in njihovo merjenje. Medtem ko so v naravoslovju količine (denimo „masa" ali „dolžina" predmeta) večinoma natančno izmerljive, se v družbenih vedah ukvarjamo s kategorijami, kot so „izobrazba" ali „vodstvena sposobnost", za katere ni jasno, kako bi jih merili. Problem je tudi statistična obdelava meritev; za maso in dolžino je naravno privzeti, da sta njuni merjenji porazdeljeni normalno, kar je osnovna predpostavka večine klasičnih statističnih metod, medtem ko je za družboslovne količine ta predpostavka le redko izpolnjena. Celo eden najnatančnejših družbenoekonomskih podatkov, plača posameznega delavca, je obremenjen s kurznimi nihanji, močjo posameznih valut in ne nazadnje z velikimi razlikami v davčnem sistemu, ko ga primerjamo med posamezniki iz različnih držav.

V tem članku se bomo omejili le na en primer matematičnega modelira nja družbenih sistemov, na tako imenovane probleme „socialne izbire" oziroma „skupinskih odločitev". Gre za to, kako lahko v neki družbi od hotenja posameznikov pridemo po čim bolj pravični poti do odločitve vse skupine. Z drugimi besedami, vprašali se bomo po matematičnih modelih demokratičnega odločanja. Pri tem nimamo v mislih le družbe kot celote, temveč tudi njene posamezne dele, kot je na primer upravni odbor kakega podjetja ali kaka komisija, ki o čem odloča.

2. Načelo enostavne večine

Med modeli socialne izbire je najpopularnejše in najpogosteje uporabljano *načelo enostavne večine*. Po tem načelu pogosto odločajo poslovni odbori velikih podjetij ali društev, uporabljajo ga v parlamentih in še marsikje. Delovanje najlaže razložimo na preprostem primeru.

Zgled 1. Denimo, da se neka skupina želi odločiti med dvema alternativama A in B. Nekaterim članom skupine se zdi boljša alternativa A, drugim alternativa B, tretji pa med njima ne vidijo prave razlike. Iz skupine izločimo „indiferentne" ter preštejemo tiste, ki imajo raje možnost A, ter tiste, ki jim je bolj všeč B. Če je več prvih, pravimo, da se skupina odloča za A, če je več drugih, pravimo, da se odloča za B, če pa je obeh enako, pravimo, da je skupina indiferentna oziroma se ne more odločiti. ■

Na tem primeru se zdi to načelo zelo enostavno, naravno in praktično edino možno. Toda življenje je navadno bolj zapleteno in na izbiro imamo lahko tudi po več kot dve alternativi. Že kadar so alternative tri, ni jasno, kako posplošiti načelo enostavne večine. Zaradi enostavnosti izražanja vpeljimo nekaj pojmov. Vsem posameznikom v skupini, ki o čem odloča, recimo *volivci*. Nadalje zapišimo relacijo „alternativa A je i-temu volivcu bolj všeč kot B" na kratko: $A \succ_i B$. Tem relacijam bomo rekli *preferenčne relacije volivcev*. Tu ne dovolimo možnosti, da bi bil kak volivec med dvema alternativama indiferenten. Relacije so torej asimetrične. Ta pogoj sicer v realnih situacijah pogosto ni izpolnjen. Kaj lahko se zgodi, da so ljudje med nekaterimi izbirami ravnodušni. Včasih lahko ta problem premostimo takole: Smiselno je privzeti, da je relacija „volivec je ravnodušen med alternativama A in B" ekvivalenčna, zato lahko množico vseh alternativ razdelimo na ekvivalenčne razrede in potem gledamo preferenčno relacijo le med temi ekvivalenčnimi razredi alternativ. Navadno privzamemo tudi, da se volivec lahko izjasni glede poljubnega para alternativ, da so torej relacije sovisne. Predpostavimo še, da so tranzitivne, to pomeni, da za poljubne tri alternative A, B in C velja za vsak i, da iz $A \succ_i B$ in $B \succ_i C$ sledi $A \succ_i C$. Naše preferenčne relacije so torej sovisne, asimetrične in tranzitivne, kar pomeni, da nam množico alternativ (vsaka po svoje) strogo linearno urejajo [4]. Glede na relacije $\succ_i$ razpade skupina volivcev na več podskupin. V nadaljnjem bomo večkrat uporabljali naslednji primer:

Zgled 2. Denimo, da skupina volivcev razpade le na tri podskupine glede na to, kako volivci razvrščajo tri alternative A, B in C: v podskupino (1) uvrstimo tiste volivce i, za katere je $A \succ_i B \succ_i C$, v podskupino (2) tiste, za katere $B \succ_i C \succ_i A$, v podskupino (3) pa tiste, za katere je $C \succ_i A \succ_i B$. Hitro lahko preštejemo, da imamo v splošnem lahko do šest takih podskupin, če nihče ni indiferenten med nobenima alternativama, sicer pa do trinajst. ■

Kako naj odločimo, kaj je bolj všeč skupini, če poznamo velikosti vseh podskupin? Naj vzamemo kot rešitev kar relacijo tiste skupine, ki je

najštevilnejša, pa čeprav obsega le nekaj več kot trinajstino cele skupine? To ni videti naravna posplošitev načela enostavne večine za primer treh alternativ. Druga možnost je, da za poljubni dve alternativi obvelja relacija $\succ$ za skupino natanko tedaj, kadar glasuje za to relacijo več članov skupine kot za nasprotno. Kadar obstaja alternativa, ki jo v primerjavi z vsako drugo alternativo ocenjuje večina volivcev kot boljšo, ji rečemo *Condorcetov zmagovalec*. Ta ne obstaja vselej.

Zgled 3. Denimo, da skupina volivcev razpade ravno na tri podskupine iz drugega zgleda, ki pa so vse tri enako močne. Tedaj za celo skupino velja $A \succ B$ z dvotretjinsko večino, $B \succ C$ prav tako z dvotretjinsko večino, pa tudi $C \succ A$ z dvotretjinsko večino. Tako dobljena relacija za skupino je torej netranzitivna. V takem primeru govorimo o „neracionalni odločitvi" skupine. ■

To je verjetno eden od glavnih razlogov, zakaj pojma enostavne večine navadno ne posplošujemo na ta način. Eden od načinov, ki se uporablja, je *glasovanje po parih z izločanjem*. To pomeni, da najprej izberemo dve alternativi ter glasujemo med njima, nato pa zavržemo tisto, ki je dobila manj glasov, „zmagovalko" primerjamo s tretjo itd.

Zgled 4. Poglejmo si, kaj bi dobili v primeru iz tretjega zgleda. Če najprej izbiramo med A in B, bi zmagala alternativa A, zato bi zavrgli B in v drugem krogu, ko bi se pomerili alternativi A in C, bi zmagala slednja. Toda če bi začeli z B in C, bi hitro ugotovili zmago alternative A in v primeru prvega glasovanja med A in C bi zmagala alternativa B. ■

Na tem primeru smo torej videli, da o zmagi posamezne alternative ne odloča samo večinsko mnenje v skupini, temveč tudi „glasovalna procedura", to je, v kakšnem vrstnem redu so posamezne možnosti dane na glasovanje.

V političnem odločanju so zelo popularne *dvokrožne volitve*. V prvem krogu volitev zmaga alternativa, ki je najbolj všeč večini, torej več kot polovici volivcev. Če take alternative ni, se v drugem krogu pomerita le tisti dve alternativi, ki sta dobili največ glasov v prvem krogu. Tudi ta metoda ni brez pomanjkljivosti.

Zgled 5. Denimo, da alternative A, B in C podskupina (1) šestih volivcev rangira $A \succ B \succ C$, podskupina (2) petih volivcev meni, da je $C \succ A \succ B$, podskupina (3) štirih se odloči za $B \succ C \succ A$ in podskupina (4) dveh postavi $B \succ A \succ C$. V prvem krogu volitev dobita A in B po 6 glasov, C pa le 5. Ker nima nihče potrebne večine 9 glasov od 17, se v drugem krogu pomerita alternativi A in B, zmaga pa alternativa A z 11 glasovi proti 6. Kaj pa se zgodi, če pred volitvami volivci iz podskupine (1) prepričajo volivce iz podskupine (4), da svoje rangiranje uskladijo z njihovim, to pomeni, da spremenijo svojo preferenco med alternativama A in B v korist A. Ta dogodek okrepi pozicije alternative A, toda kaj se zgodi na volitvah? V prvem krogu dobi A 8 glasov, B samo 4 in C 5. V drugem krogu se torej zdaj pomerita A in C, zmaga pa C z 9 glasovi proti 8. Navidezna okrepitev pozicij alternative A je torej v resnici preprečila njeno zmago [3]. ■

3. Bordovo štetje

Potem ko so ljudje ugotovili pomanjkljivosti večinskega odločanja, so se poskušali domisliti „boljših" metod. Eden od teh poskusov je tudi *Bordovo štetje* in njegove posplošitve. Ideja je v tem, da vsak volivec vse alternative, med katerimi se odloča, uredi po vrsti, pravimo, da jih rangira. Vsak rang, to je zaporedno število alternative v tej ureditvi od najbolj do najmanj zaželene, pa da alternativi določeno število točk, npr. pri osnovnem Bordovem štetju dobi tista, ki je volivcu najbolj všeč, 1 točko, druga 2, itd. Ti rangi se potem seštejejo in zmaga tista alternativa, ki ima najmanjšo vsoto točk. Možno je seveda tudi kakšno drugačno točkovanje. V splošnem pravimo tej in podobnim metodam „metode vrstičnih vsot", ker si predstavljamo range razvrščene v matriko, katere vrstice so alternative, stolpci pa volivci. Bordovo štetje je torej le poseben primer metode vrstičnih vsot, ko točkujemo kar z rangi.

Zgled 6. V primeru iz tretjega zgleda bi člani prve podskupine ocenili alternativo A z eno točko, B z dvema in C s tremi, v drugi podskupini bi tem alternativam dali 3, 1 oziroma 2 točki, v tretji pa 2, 3 oziroma 1 točko. Ko bi sešteli točke, bi vse tri alternative dobile po $6n$ točk, kjer je n velikost vsake enako velike podskupine. Bordovo štetje bi nam v tem primeru povedalo, da se skupina med temi tremi alternativami ne more odločiti, kar se za ta primer zdi edini smiselni rezultat. ■

Pa še eno dobro lastnost ima Bordovo štetje. Opazujmo tri izmed alternativ A, B in C in denimo, da smo po Bordovem štetju dobili za hotenja skupine $A \succ B$ in $B \succ C$. To pomeni, da je vsota rangov alternative A nižja od vsote rangov alternative B, slednja pa je nižja od vsote rangov alternative C. Od tod dobimo, da je vsota rangov alternative A tudi nižja od vsote rangov alternative C, zato velja $A \succ C$. Bordovo štetje nam torej vselej da tranzitivno relacijo. Vendar tudi Bordovo štetje ni brez napak. Eden od glavnih problemov tega pravila je, da je njegov rezultat odvisen od izbora alternativ, ki smo jih vzeli v obzir. To ilustrirajmo na preprostem zgledu.

Zgled 7. Spet si oglejmo naš primer izbiranja med tremi alternativami iz drugega zgleda in spet denimo, da se naša skupina razdeli le v tri podskupine, le da tokrat privzemimo, da so v podskupinah (1) in (2) po štirje volivci, v podskupini (3) pa le trije. Vse range zapišimo v matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tokrat dobi alternativa A vsoto rangov 22, alternativa B vsoto rangov 21, alternativa C pa vsoto rangov 23. Zmaga torej alternativa B, na drugem mestu je A, na zadnjem pa C. Ker je C na zadnjem mestu, bi moralo biti

najbrž vseeno, če smo jo že od vsega začetka iz igre izpustili in Bordovo štetje uporabili le na prvih dveh. Toda v tem primeru dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

tako da dobi alternativa A vsoto rangov 15, alternativa B pa 18, torej je zdaj skupini „bolj všeč" alternativa A kot alternativa B. Tudi dodajanje novih alternativ bi lahko spremenilo razvrstitev med prejšnjimi alternativami. Vzemimo, da smo trem alternativam dodali še četrto alternativo D, ki jo člani podskupin (1) in (2) rangirajo na zadnje mesto, le v podskupini (3) jo uvrstijo na tretje mesto, tako da prehiti alternativo B. Matrika rangov postane zdaj

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zato ima alternativa A zdaj vsoto rangov enako 22, alternativa B jo ima 24, alternativa C 23, alternativa D pa 41. Čeprav nihče od ocenjevalcev ni spremenil svojega vrstnega reda glede prvih treh alternativ in čeprav je četrta alternativa pristala globoko na zadnjem mestu, je „zmešala štrene" prvim trem, saj je zdaj alternativa B pristala komaj na tretjem mestu, zmagala pa je alternativa A. ■

Zaradi tega in drugih problemov obstajajo mnogi poskusi izboljšanja vo litvenih postopkov. Med temi naj omenimo *Nansenov* in *Coombov algoritem*, ki ležita nekje med Bordovim rangiranjem in načelom enostavne večine. V obzir vzamemo najprej vse možne alternative. Volivci jim določijo range, nato pa v Nansenovem algoritmu izločimo tiste alternative, ki imajo največjo vsoto rangov, v Coombovem pa tiste, ki jih največ volivcev uvrsti na zadnje mesto. Zdaj ponovimo ta postopek na preostalih alternativah. Zmaga tista alternativa, ki ostane neizločena. Potem ko pridemo do „zmagovite" alternative, celotni postopek ponovimo na preostalih. Tako dobimo drugo alternativo, itd.

Zgled 8. Uporabimo Nansenov in Coombov algoritem na štirih alternativah iz sedmega zgleda. Rezultat Nansenovega postopka bo bralec hitro razbral iz že izračunanih vsot rangov z le še nekaj dodatnega dela. Dobil bo $A \succ B \succ C \succ D$. Poglejmo si še, kakšno rangiranje nam da Coombov postopek. Najprej izločimo alternativo D, ki jo je na zadnje mesto rangiralo 8 volivcev. Na drugem koraku izločimo alternativi C in A, ki imata vsaka po štiri zadnji mesti, medtem ko jih ima B le tri. Tako smo prišli do „zmagovite" alternative B. Zdaj ponovimo postopek na preostalih alternativah. V prvem koraku izločimo alternativo D, v drugem pa alternativo A, torej pristane na drugem mestu alternativa C. Po njeni izločitvi rangirajo vsi volivci preostali dve alternativi na isti način, zato dobi alternativa A

tretje, alternativa D pa četrto mesto. Opazimo, da nam v tem primeru ta dva postopka alternative strogo linearno uredita, a vsak postopek drugače. ■

Tudi Nansenov in Coombov algoritem ne delujeta vselej. V šestem zgledu bi morali, denimo, že takoj na prvem koraku po obeh postopkih izločiti vse tri alternative, saj bi imele vse enako število zadnjih mest in isto vsoto rangov. V osmem zgledu pa sta nam obe metodi alternative rangirali. Obstajajo zadostni pogoji na število volivcev in število alternativ, ko se to vselej zgodi. V šestem zgledu je število volivcev deljivo s tri, kar je hkrati enako številu alternativ. V sedmem zgledu pa je število volivcev praštevilo 11, ki je večje od števila alternativ 4. V takem primeru Coombov algoritem vselej deluje. Bralec, ki ga zanima teorija števil, bo z lahkoto dokazal, da Coombov algoritem deluje, brž ko je najmanjše praštevilo, ki deli število volivcev, večje od števila alternativ. Podobni izreki veljajo tudi za Nansenovo metodo.

4. Glasovanje z vetom

Tudi kadar je izmed 100 volivcev ena alternativa bolj všeč 51, druga pa 49 volivcem, zmaga po načelu enostavne večine prva, pa čeprav sta obe skupini volivcev približno enako močni. Eno od načel, ki so ravno nasprotna temu načelu, je pravica manjšine, da prepreči „zmago" katerekoli alternative z uporabo veta. Če je pravica veta univerzalna, lahko seveda prepreči vsako odločitev, če pa je število volivcev razmeroma majhno v primerjavi s številom alternativ (to je nekako ravno nasprotna situacija od tiste, v kateri deluje Coombov algoritem) in če sme vsak volivec uporabiti veto le v omejenem številu primerov, lahko glasovanje z vetom privede do nekega rezultata.

Primer takega algoritma je *pravilo proporcionalnega veta*. Bodi n število volivcev in a število alternativ. Volivci naj se razdelijo v koalicije, to je skupine „enako mislečih". To lahko pomeni, da vsi volivci ene koalicije rangirajo alternative enako, ni pa nujno. Označimo s k moč neke koalicije. Tedaj za maksimalno število pravic do veta te koalicije razglasimo tisto največje celo število $v(k)$, ki je strogo manjše od števila ka/n. To je primer *funkcije veta*, ki ji rečemo *proporcionalna funkcija veta*. Hitro se lahko prepričamo, da je ta funkcija superaditivna, saj za poljubni moči koalicij k_1 in k_2 velja $v(k_1)+v(k_2) \leq v(k_1+k_2)$. Funkcija veta s to lastnostjo spodbuja volivce k tvorjenju čim večjih koalicij.

Če pri neki alternativi B obstaja neka potencialna koalicija K volivcev moči k in neka množica $\mathcal{A}$ alternativ moči $a - v(k)$, za katero velja, da je za vsako alternativo $A \in \mathcal{A}$ in za vsakega volivca $i \in K$ izpolnjeno $A \succ_i B$, potem ima ta potencialna koalicija moč veta, s katero lahko izloči vsako alternativo, ki ni v $\mathcal{A}$, med drugim torej tudi alternativo B. Vse tiste alternative, za katere taka potencialna koalicija in taka družina alternativ ne obstajata, pa uvrstimo v *srž funkcije veta* v. V splošnem

za neko funkcijo veta ne vemo, ali ima neprazno srž. Za proporcionalno funkcijo veta pa se izkaže, da je njena srž vselej neprazna. Izkaže se tudi, da ima neka superaditivna funkcija veta neprazno srž natanko tedaj, kadar je majorizirana s proporcionalno funkcijo veta. V tem smislu je torej proporcionalna funkcija veta hkrati tudi optimalna funkcija veta, saj daje vsaki koaliciji največje možno tako število pravic do veta, ki nas še zmerom privede do neprazne množice alternativ, za katere veto ni bil uporabljen. Rešitev konkretnega glasovanja s pravico veta je potem neka neprazna množica alternativ, to je srž uporabljene funkcije veta. [3]

Zgled 9. V primeru treh volivcev in štirih alternativ je proporcionalna funkcija veta kar $v(k) = k$. Denimo, da volivci rangirajo alternative takole: $A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D$, $A \succ_2 D \succ_2 C \succ_2 B$, $D \succ_3 B \succ_3 C \succ_3 A$. Ker vsak volivec lahko uporabi eno pravico do veta, jo bo vsak uporabil za tisto alternativo, ki mu je najmanj všeč. „Zmagala" bo torej alternativa C, ki ni nikoli na zadnjem mestu. Opazimo pa, da ima to rangiranje tudi Condorcetovega zmagovalca. To je alternativa A, ki je celo dvotretjinski večini volivcev bolj všeč kot katerakoli druga. Vidimo torej, da nas večinsko načelo lahko pripelje do povsem drugačnega rezultata kot manjšinsko. ■

Zgled 10. V primeru petih volivcev in petih alternativ pa je proporcionalna funkcija veta enaka $v(k) = k - 1$. Tokrat naj volivci rangirajo alternative takole: Za $i = 1, 2$ naj bo $A \succ_i B \succ_i C \succ_i D \succ_i E$, za preostale pa $E \succ_3 A \succ_3 B \succ_3 C \succ_3 D$, $D \succ_4 E \succ_4 A \succ_4 B \succ_4 C$, $C \succ_5 D \succ_5 E \succ_5 \succ_5 A \succ_5 B$. Tokrat nimamo Condorcetovega zmagovalca. Kako pa je s sržjo veta? Alternativo E lahko izloči koalicija $\{1, 2\}$. Za potencialno koalicijo $\{1, 2, 3\}$ obstaja množica alternativ $\{A, B, C\}$, ki je boljša od D, do nje pa lahko pride s svojima dvema pravicama do veta; to eliminira alternativo D. Podobno lahko koalicija $\{1, 2, 3, 4\}$ s tremi pravicami veta doseže izbor alternativ $\{A, B\}$, velika koalicija pa izbor alternative A. Srž veta bo torej vsebovala kvečjemu alternativo A, ker pa je vselej neprazna, je v njej natanko alternativa A. Srž veta pa lahko vsebuje tudi več kot eno alternativo, kot se zgodi na primeru iz tretjega zgleda. ■

5. Funkcije socialne izbire

Problemi skupinskega odločanja in množica možnih načinov glasovanja kar kličejo po sistematični obravnavi vseh teh pravil. Poglejmo si podrobneje enega najpogosteje citiranih prijemov. Označimo z $\mathcal{A}$ neko (končno) množico alternativ, z V pa neko (končno) množico volivcev. Nadalje označimo z $\mathcal{L}$ množico vseh možnih strogo linearnih ureditev na $\mathcal{A}$, ki smo jim rekli tudi rangiranja. *Funkcija socialne izbire* je vsaka prireditev, ki rangiranjem alternativ vseh volivcev priredi rangiranje alternativ cele skupine. To je torej neka funkcija iz $\mathcal{L}^V$ v $\mathcal{L}$. Za tako funkcijo pa bi si želeli, da izpolnjuje nekatere naravne zahteve, ki jim pravimo aksiomi. Elementom $\mathcal{L}^V$ bomo rekli *preferenčni profili*, $\succ_s$ pa naj označuje relacijo stroge

linearne urejenosti, ki jo obravnavana funkcija izbire priredi preferenčnemu profilu $\succ \in \mathcal{L}^V$, ali bolj natančno povedano, funkcija socialne izbire priredi poljubnemu naboru preferečnih relacij posameznih volivcev $\succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_n$ preferenčno relacijo skupine $\succ_s$. Za to funkcijo bi si želeli, da izpolnjuje naslednje aksiome:

Aksiom 1 *(Paretovo načelo).* Denimo, da za dve alternativi A in B velja, da je $A \succ_i B$ za vse volivce i. Funkcija socialne izbire naj postavi $A \succ_s B$ za vsak tak preferenčni profil.

Aksiom 2 *(Usklajenost po parih).* Če za dva preferenčna profila $\succ$ in $\succ'$ velja, da vsak volivec alternativi A in B ureja v obeh profilih enako, potem mora tudi $\succ_s$ urejati ti dve alternativi enako kot $\succ'_s$.

Aksiom 3 *(Monotonost).* Če pri nekem preferenčnem profilu $\succ$ velja $A \succ_s B$ in za preferenčni profil $\succ'$ velja $A \succ'_i B$ za vse tiste volivce i, za katere je $A \succ_i B$, potem je tudi $A \succ'_s B$.

Aksiom 4 *(Odsotnost diktatorja).* Ne obstaja tak volivec i, da bi v vseh preferenčnih profilih zanj veljalo, da se $\succ_s$ povsem ujema z $\succ_i$.

Vse metode glasovanja, ki smo jih doslej prikazali, so imele kako pomanjkljivost. Nekatere niso dale tranzitivne skupinske relacije (večinsko načelo iz tretjega zgleda), mnoge niso vselej definirane (Nansenov in Coombov algoritem), nekatere niso usklajene po parih (Bordovo štetje) ali pa niso monotone (dvokrožni volilni postopek iz petega zgleda). Paretovo načelo, ki je najbolj nesporno, v glavnem izpolnjujejo. Zahteva po odsotnosti diktatorjev je videti prav tako nesporna. Poudarimo naj, da aksiom 4 ne izključuje samo očitnih, temveč tudi morebitne skrite diktatorje. Diktator je vsakdo, katerega volja se vselej ujema z voljo skupine, pa čeprav se sam in drugi volivci te njegove vloge ne zavedajo. Na vprašanje, ali lahko dobimo tako funkcijo socialne izbire, ki bo zadoščala tem štirim, dokaj naravnim zakonitostim, je odgovor žal negativen. To je prvi dokazal Arrow [1], primerjaj tudi [3] in [2].

Izrek Arrowa o nemogočem. *Za nobeni končni množici več kot dveh alternativ in vsaj dveh volivcev ne obstaja funkcija socialne izbire, ki zadošča tem štirim aksiomom.*

Dokaz. Denimo, da imamo skupino K volivcev z naslednjo lastnostjo: Obstajata dve taki alternativi A in B, da za vsak preferenčni profil $\succ$ velja, da iz $A \succ_i B$ za vse $i \in K$ in $B \succ_j A$ za vse $j \notin K$ sledi $A \succ_s B$. Vsaki skupini volivcev, za katero je izpolnjen ta pogoj, pravimo odločilna skupina za preferenco A nad B. Ker je po Paretovem načelu množica vseh volivcev taka skupina za poljubni dve alternativi, je družina vseh odločilnih skupin neprazna. Med njimi morajo obstajati tudi minimalne odločilne skupine. Tako bomo rekli vsaki skupini volivcev, ki je odločilna za neki par alternativ, nobena manjša skupina pa ni odločilna za noben par alternativ.

S protislovjem bomo dokazali, da vsaka taka minimalna skupina vsebuje natanko enega volivca. Pa denimo, nasprotno, da imamo v neki minimalni odločilni skupini K za preferenco A nad B več kot enega volivca. Označimo z i nekega izbranega volivca iz te skupine, s $K' \neq \emptyset$ preostanek te skupine in z L množico vseh tistih volivcev, ki niso v skupini K. Nadalje izberimo katerokoli tretjo alternativo C ter si oglejmo katerikoli preferenčni profil z lastnostjo: $A \succ_i B \succ_i C$, $C \succ_j A \succ_j B$, $B \succ_k C \succ_k A$ za vse $j \in K'$ in vse $k \in L$, če jih je kaj. Ker je skupina $K = K' \cup \{i\}$ odločilna za preferenco A nad B, mora biti $A \succ_s B$, ker pa je minimalna, skupina K' ni več odločilna za noben par alternativ, torej tudi ne za preferenco C nad B. Ker velja $C \succ_j B$ za $j \in K'$, medtem ko ti dve alternativi vsi drugi volivci ocenjujejo ravno nasprotno, mora biti $B \succ_s C$ in po tranzitivnosti tudi $A \succ_s C$. Ker se torej socialna izbira ujema s preferenco volivca i na alternativah A in C v nasprotju z odločitvijo preostalih, je $\{i\}$ odločilna skupina za A nad C v nasprotju z minimalnostjo skupine K. Odslej naj bo torej $\{i\}$ odločilna skupina za preferenco A nad B. Pri dokazovanju, da je i nujno diktator, bomo najprej premislili, da je ta „skupina" odločilna za poljuben par alternativ. V ta namen izberimo poljubno alternativo $C \neq A, B$ in preferenčni profil, za katerega $A \succ_i B \succ_i C$ ter $B \succ_j C \succ_j A$ za vse $j \neq i$. Po Paretovem načelu je $B \succ_s C$, ker i odloča (za A nad B), je $A \succ_s B$ in po tranzitivnosti $A \succ_s C$, torej zaradi usklajenosti po parih i odloča tudi o preferenci A nad C. Izberimo zdaj poljubno alternativo $D \neq A, C$ in preferenčni profil, za katerega je $D \succ_i A \succ_i C$ in $C \succ_j D \succ_j A$ za vse $j \neq i$. Spet je po Paretovem načelu $D \succ_s A$, ker i odloča (za A nad C), je $A \succ_s C$ in po tranzitivnosti ter usklajenosti po parih $D \succ_s C$. Iz dejstva, da i odloča o preferenci A nad B, smo tako izpeljali, da isti volivec odloča tudi o preferenci D nad C, kjer sta bili C in D poljubni alternativi, če je le $C \neq A$. Primer $C = A$ pa lahko dobimo s ponovitvijo prvega od teh dveh postopkov. To pa že pomeni, da volivec i odloča o vseh preferencah. Dejstvo, da je diktator, zdaj takoj sledi iz monotonosti. ■

6. Skupinske merljive vrednostne funkcije

Izrek Arrowa o nemogočem ima mnoge posplošitve. Tudi če pogoje nekoliko omilimo, še zmerom velja. Zahteva po strogo linearnem urejanju „skupinske" preference je, denimo, nebistvena, saj tudi funkcija socialne izbire, ki bi alternative šibko urejala in zadoščala vsem štirim aksiomom, ne obstaja. Tu smo navedli le najbolj enostavno varianto izreka Arrowa, da bi bil problem, ki je zelo globok, čim jasnejši. V „tržnih" pogojih pa le lahko dobimo funkcijo, ki je v skladu z vsemi štirimi aksiomi. Pod „tržnimi" pogoji razumemo situacijo, v kateri imajo volivci enotno merilo, s katerim se izražajo njihove preference. Takemu merilu pravimo *merljiva vrednostna funkcija*, to je neka preslikava v iz množice alternativ v realna števila, ki zadošča določenim pogojem. Privzamemo, da znajo volivci povedati ne

samo to, katera izmed danih alternativ jim je bolj všeč od kakšne druge, temveč znajo tudi povedati, za koliko jim je neka alternativa bolj všeč od druge. Volivec zna skratka vsaki alternativi A določiti neko vrednost $v(A)$, pri čemer je $A \succ B$ natanko tedaj, kadar je $v(A) > v(B)$. Pa ne samo to, zahtevamo tudi, da za poljubne alternative A, B, C in D velja, da je zamenjava alternative B z alternativo A volivcu bolj všeč kot zamenjava alternative D z alternativo C natanko tedaj, kadar je $v(A) - v(B) > v(C) - v(D)$. Seveda pomeni $v(A) = v(B)$, da je volivec med alternativama A in B indiferenten. Hitro se prepričamo, da je tako definirana relacija indiferentnosti ekvivalenčna, zato podobno, kot smo omenili že v drugem razdelku, lahko študiramo preferenčno relacijo le na ekvivalenčnih razredih alternativ. V tem primeru dobimo spet preferenčno relacijo, ki alternative strogo linearno ureja. Če pa tega ne storimo, preferenčna relacija ni nujno sovisna, torej nam alternative le strogo delno ureja. [4]

Obstoj in enoličnost take merljive vrednostne funkcije sta v splošnem vprašljiva. Med pogoji, ki jih potrebujemo, je tudi ta, da je alternativ veliko, točneje, da zadoščajo nekemu pogoju, ki mu navadno pravijo „pogoj rešljivosti“: Za poljubne alternative A, B in C mora obstajati taka alternativa D, da je zamenjava alternative B z alternativo A volivcu enako všeč kot zamenjava alternative D z alternativo C, pa tudi taka alternativa E, da je zamenjava alternative B z alternativo A volivcu bolj všeč kot zamenjava alternative C z alternativo E. Tako situacijo imamo npr., kadar volivec vse meri z denarjem. Če je njegova vrednost alternative A enaka 100 d.e. (denarnih enot), vrednost alternative B 200 d.e. in vrednost alternative C 500 d.e., potem lahko za D vzame alternativo „prejeti 600 d.e.” za E pa alternativo „prejeti 400 d.e.”. Ta pogoj je med bistvenimi tehničnimi pogoji, ki zagotavljajo obstoj merljive vrednostne funkcije ter njeno enoličnost do pozitivnega faktorja in aditivne konstante. Natančna izpeljava teh dejstev bi presegla okvir tega dela in se ji tu ne bomo posvetili. [2]

Denimo zdaj, da se o dani množici alternativ vseh n volivcev zna izreči tako, da obstajajo njihove merljive vrednostne funkcije, in označimo funkcijo i-tega volivca z v_i. Vsaka od teh relacij nam alternative strogo delno ureja. Naslednji izrek je verjetno prvi dokazal R. L. Keeney, glej [Fre].

Izrek. *Naj bo w taka diferenciabilna funkcija n spremenljivk, da so vsi njeni prvi parcialni odvodi povsod strogo pozitivni. Tedaj pravilo $A \succ_s B$ natanko tedaj, kadar je $w(v_1(A), \ldots, v_n(A)) > w(v_1(B), \ldots, v_n(B))$, strogo delno ureja alternative in izpolnjuje štiri aksiome iz prejšnjega razdelka.*

Dokaz. O tem, da tako definirana relacija alternative strogo delno ureja, se lahko hitro prepričamo, saj je tranzitivna in asimetrična. Označimo vektorsko funkcijo $\mathbf{v}(A) = (v_1(A), \ldots, v_n(A))$, da lahko pišemo krajše

$w(v_1(A), \ldots, v_n(A)) = w(\mathbf{v}(A))$. Po Taylorjevi formuli za funkcije n spremenljivk dobimo

$$w(\mathbf{v}(B)) = w(\mathbf{v}(A)) + (\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A), \operatorname{grad} w(A)) + R, \qquad (*)$$

(primerjaj [6]), kjer je R ostanek, ki gre s kvadratom norme razlike $\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A)$ proti nič. Če za vse volivce i velja $v_i(B) > v_i(A)$, potem ima v skalarnem produktu v enačbi $(*)$ prvi vektor vse komponente strogo pozitivne, isto pa velja tudi za gradient, in zato je skalarni produkt pozitiven. Tako dobimo najprej $w(\mathbf{v}(B)) > w(\mathbf{v}(A))$ za vse take alternative, pri katerih je norma razlike $\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A)$ dovolj majhna. Z običajnimi metodami hitro ugotovimo, da mora $w(\mathbf{v}(B)) > w(\mathbf{v}(A))$ veljati za vse alternative z lastnostjo $v_i(B) > v_i(A)$ za vse i. Tako pokažemo veljavnost Paretovega načela. Pogoj usklajenosti po parih je avtomatično izpolnjen, saj je že definicija relacije socialne izbire taka, da upošteva le dve alternativi hkrati. Za dokaz monotonosti spet uporabimo enačbo $(*)$. Če v njej držimo vse vrednosti $v_j(B)$ pri $j \neq i$ konstantne, vrednost $v_i(B)$ pa povečujemo, dobimo zaradi stroge pozitivnosti gradienta, da se vrednost funkcije w povečuje. Z indukcijo zdaj opravimo še s primerom, ko je svojo preferenco do alternative B izboljšalo po več volivcev. Tudi pri dokazu, da nimamo diktatorja, bomo uporabili enačbo (*). Denimo, da je i-temu volivcu bolj všeč alternativa A kot alternativa B. Tedaj je $v_i(B) - v_i(A) < 0$ in zato je i-ti produkt v skalarnem produktu enačbe $(*)$ strogo negativen. Toda vrednostne funkcije preostalih volivcev lahko izberemo še poljubno. Ko bomo za $v_j(B) - v_j(A)$ pri $j \neq i$ izbrali dovolj velike pozitivne vrednosti, bomo dobili $w(\mathbf{v}(B)) > w(\mathbf{v}(A))$. ■

Poudarimo naj, da skupinska preferenčna funkcija, ki jo dobimo s pomočjo funkcije w, ni več merljiva vrednostna funkcija. Poleg tega nam stroga pozitivnost vseh odvodov zagotavlja ne samo, da med volivci ni diktatorjev, ampak tudi, da ni oligarhij, to je takih koalicij, ki bi po uskladitvi svojih notranjih interesov lahko svojo voljo vsilile preostalim volivcem. Ta rezultat ima svojo uporabo v ekonomiji. Pri določanju funkcije w pa lahko naletimo na določene probleme. Vzeli bi lahko npr.

$$w(\mathbf{v}(A)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} w_i v_i(A)\right),$$

kjer so w_i „uteži; torej pozitivna števila, ki merijo vpliv i-tega volivca na funkcijo socialne izbire. Poleg teh števil je vpliv i-tega volivca odvisen tudi od umerjenosti „njegove" merljive vrednostne funkcije. Najbolj enostavno in „pošteno" bi bilo vzeti vse uteži enake, če bi vedeli, da so vsi volivci svoje vrednostne funkcije enako umerili. Žal nam to v splošnem ni znano.

7. Zaključek

Izrek Arrowa o nemogočem ima v družbenih vedah zelo različen odmev. Nekateri raziskovalci so mnenja, da dokazuje, da je demokracija protisloven pojem in da torej ne obstaja. Spet drugi se navdušujejo nad tem ali onim konkretnim volitvenim algoritmom in poskušajo pozabiti na njegove slabosti. Na ozkem področju sprejemanja skupnih odločitev, za katere se dajo najti dobro usklajene merljive vrednostne funkcije vseh volivcev, se dajo preference skupine dobiti celo na „demokratičen" način.

Obstajajo pa tudi raziskovalci, ki so mnenja, da bi se bilo treba problema lotiti z drugega konca. Po njihovem mnenju bi bilo tudi v družbenih vedah treba privzeti soroden filozofski pristop k definicijam količin kot v naravoslovnih vedah. Seveda ne moremo pričakovati tako natančnih definicij, kot je denimo: „Koeficient trenja je razmerje med silo, ki je potrebna za premikanje telesa po horizontalni podlagi z enakomerno hitrostjo, ter silo teže tega telesa", ali „Rdeča je tista svetloba, ki ima valovno dolžino $0,6878\mu$". Družboslovne količine bodo le redko merljive na tri in več decimalk natančno. Pričakujemo pa lahko definicije pojava s pomočjo primerjanja sorodnih pojavov, kot denimo: „Trenje je pojav, ki ga opazimo, ko vlečemo telo po horizontalni podlagi. Tudi če se telo premika z enakomerno hitrostjo, moramo za to porabiti določeno silo, ki je odvisna od teže telesa in hrapavosti telesa in podlage." Še bližje definiciji, kakršno bi lahko pričakovali v družboslovju, je naslednja definicija rdeče barve: „Rdeča barva je tisto, kar je skupno naslednjim pojavom: (1) Luč na semaforju, ki se prižge, tik preden se promet ustavi. (2) Tisto, kar priteče iz prsta, kadar se urežemo. (3) Zrel paradižnik." [5]

Tudi problema, kaj je demokracija, bi se bilo v tem smislu torej treba lotiti na podoben način, kot se dela v naravoslovnih znanostih. Treba bi bilo vzeti konkretne sisteme, za katere menimo, da delujejo demokratično, in jih raziskovati. Potem bi bilo treba ugotoviti načela, na katerih delujejo, in ta načela razglasiti za demokratična. To pomeni, da vzamemo skupne lastnosti konkretnih pojavnih oblik nekega pojava za definicijo tega pojava. Seveda je tu vse skupaj dosti težje kot v naravoslovju, saj se tam lahko, potem ko že spoznamo neko idealno zakonitost, tej idealni situaciji eksperimentalno poljubno približamo in tako zakonitost temeljito preverimo. V družboslovju te možnosti navadno ni, vendar je tu opisana pot do družboslovne definicije demokracije morda edino, kar nam ostane.

LITERATURA

[1] K. J. Arrow, *Družbena izbira in vrednote posameznikov*, Študentska organizacija Univerze v Ljubljani, 1994 (sl. prevod).

[2] S. French, *Decision theory: An introduction to the mathematics of rationality*, 2nd ed. Chichester: Ellis Horwood, 1993.

[3] H. Moulin, *The strategy of social choice*. Amsterdam: North-Holland, 1983.

[4] N. Prijatelj, *Matematične strukture I*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1964.

[5] A. Rapaport, *Problems of normative and descriptive decision theories*, Math. Social Sci. **27** (1994), 31–47.

[6] I. Vidav, *Višja matematika I*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1968.

CAYLEJEVI IN PETERSENOVI GRAFI

MARKO LOVREČIČ SARAŽIN

Math. Subj. Class. (1991): 05C25

Cayleyjevi grafi so razred grafov s posebno lepimi lastnostmi, od katerih je zanimiva predvsem simetrija, ki izhaja iz njihove temeljne zveze z grupami. Petersenov graf pa je v teoriji grafov gotovo najbolj znan (lahko bi rekli tudi „zloglasen") graf zaradi svojih številnih, včasih lepih, včasih pa tudi presenetljivih in nenavadnih lastnosti. Ena od njih je precej „velika" simetrija, čeprav graf ni Cayleyjev. Obstaja posplošitev Petersenovega grafa, ki porodi neskončno družino „posplošenih Petersenovih grafov". Nedavno so ugotovili, kateri od njih so Cayleyjevi. Na koncu prispevka bomo podali kratek dokaz tega rezultata.

CAYLEY AND PETERSEN GRAPHS

Cayley graphs are a class of graphs with particularly nice properties. Surely their symmetry, which is due to the intrinsic connection with groups, is the most interesting. The Petersen graph is perhaps the most well-known (one can possibly try to say „infamous") graph within graph theory, because of its numerous nice, surprising, or even strange properties. One of them is relatively „high" symmetry, although the graph is not a Cayley graph. There exists a generalization of the Petersen graph which produces an infinite family of „generalized Petersen graphs". Recently, it has been shown which of them are Cayley graphs. We are going to present a short proof of this result at the end of this paper.

1. Grupe in grafi

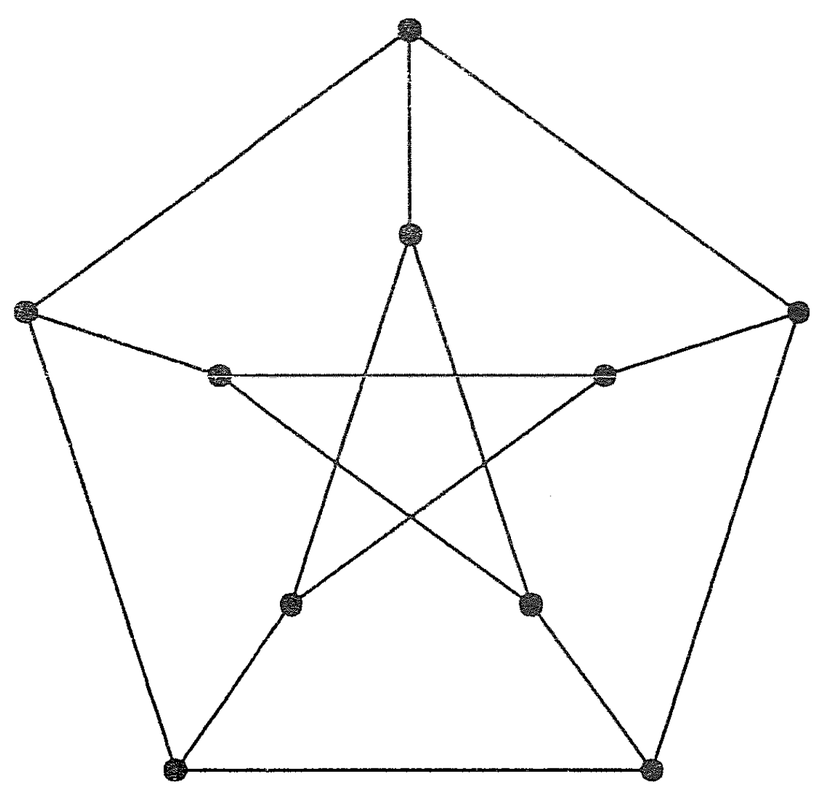
Matematiki dobro poznamo neprecenljivo vrednost slikovnih predstavitev abstraktnih struktur, ki jih raziskujemo. Med matematičnimi strukturami prav gotovo zavzema pomembno mesto pojem *grupe*. Zdi se, da je bil A. Cayley [1] prvi, ki si je grupe narisal, verjetno zato, da si je laže predstavljal njihovo strukturo. Za dano grupo je naredil *graf*, ki je od grupe podedoval simetrijo. Grafu, ki ga naredimo iz neke grupe, moderno rečemo *Cayleyjev graf*. Ker bomo v nadaljevanju govorili bolj o grafih kot o grupah, si poglejmo natančne definicije nekaterih pojmov, ki jih bomo uporabljali.

Za *graf* X potrebujemo neko neprazno množico $V(X)$, katere elemente imenujemo *točke*, ter množico $E(X)$ (neurejenih) parov točk, ki jim pravimo *povezave*. Omejili se bomo le na *končne* grafe, tj. take, ki imajo končno mnogo točk. Naravno si je predstavljati graf kot množico točk v ravnini, pri čemer so nekateri pari točk povezani z (ne nujno ravnimi) črtami, kot to določa množica povezav. Primer vidimo na sliki 1. Tukaj nas seveda zanima zveza med grupami in grafi, zatorej si oglejmo, kako „merimo" simetrijo grafa. Naj bo X neki graf. Bijektivna preslikava ϕ množice $V(X)$ nase (tj. permutacija množice $V(X)$) je *avtomorfizem grafa* X, če ohranja povezave v obe smeri. Povedano bolj natančno, ϕ je avtomorfizem natanko takrat, kadar velja:

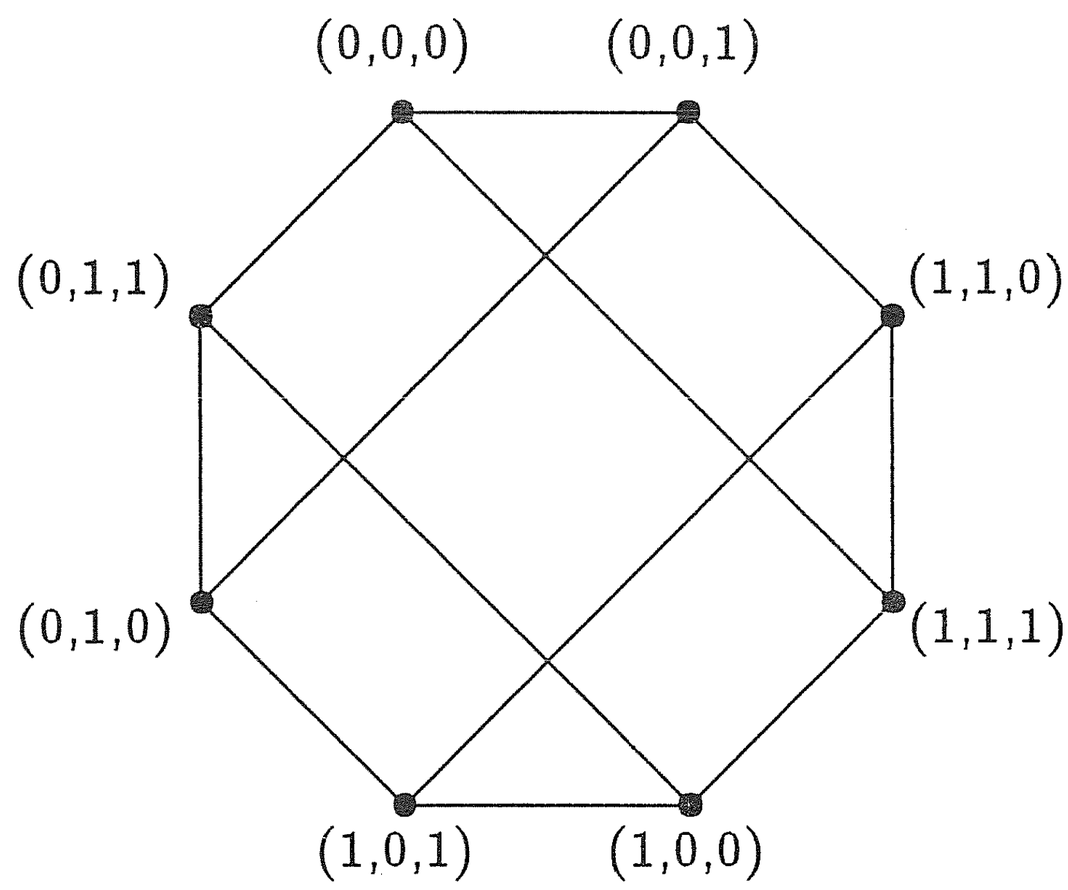
$$\forall x, y \in V(X) : \{x, y\} \in E(X) \iff \{\phi(x), \phi(y)\} \in E(X).$$

Ni težko videti, da je množica $\mathrm{Aut}(X)$ vseh avtomorfizmov grafa X grupa, operacija pa je pri tem običajno komponiranje preslikav. Z drugimi besedami, $\mathrm{Aut}(X)$ je podgrupa v simetrični grupi $S_{V(X)}$ vseh permutacij množice točk grafa X. Simetrijo grafa X torej lahko merimo z obsežnostjo njegove grupe avtomorfizmov. Bolj splošno lahko definiramo *izomorfizem* med grafoma X in Y kot bijektivno preslikavo iz $V(X)$ v $V(Y)$, ki ohranja povezave v obe smeri. Seveda v tem primeru pravimo, da sta X in Y *izomorfna* in ju v abstraktnem smislu ne razlikujemo. Toliko o grafih na splošno.

Kaj pa je potem Cayleyjev graf? Začnimo z neko abstraktno grupo G. Potrebujemo še množico generatorjev $S \subset G$, za katero mora veljati $1 \notin S$ ter $\sigma \in S \Rightarrow \sigma^{-1} \in S$, pri čemer 1 označuje nevtralni element v G, σ^{-1} pa obratni element. *Cayleyjev graf* $C(G,S)$ grupe G pri množici generatorjev S ima za točke elemente grupe G, točki $\gamma, \delta \in G$ pa sta sosedni, če in samo če je $\gamma^{-1}\delta \in S$. Z drugimi besedami, točka γ je sosedna natanko s točkami $\gamma\sigma$, kjer $\sigma \in S$. Besedno zvezo *Cayleyjev graf* bomo nadomeščali s kratico CG. Za zgled lahko vzamemo grupo $G = \mathbb{Z}_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\}$ in $S = \{\sigma, \sigma^2\}$; očitno je tedaj $C(G,S)$ trikotnik, tj. graf na treh točkah s tremi povezavami. Še en primer vidimo na sliki 2. Iz definicije je razvidno, da ima lahko ista grupa več različnih CG, kar je odvisno od izbire množice generatorjev. Pri CG je zanimivo tudi to, da najdemo začetno grupo kot podgrupo v grupi avtomorfizmov grafa. Vsakemu $\gamma \in G$ namreč lahko priredimo avtomorfizem grafa $C(G,S)$ s predpisom $\alpha \mapsto \gamma\alpha$, kjer je α poljubna točka grafa (tj. element v G). Ta lastnost kaže na tesno zvezo CG z grupami.



Slika 1. Petersenov graf



Slika 2. $C(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\})$.

Vendar stvar ni tako enostavna, kot se zdi na prvi pogled. Definicija grafa je tako zelo splošna, da omogoča obstoj grafov, ki so v smislu simetrije lahko kar precej „čudni". Poleg tega se izkaže, da ne moremo vsakega grafa

izraziti kot CG neke grupe. Zgled za to je kar graf na sliki 1, ki se imenuje po J. Petersenu, čeprav ni bil on prvi, ki ga je omenjal (glej npr. [6]).

O tem, da Petersenov graf P s slike 1 ni CG, se prepričamo na naslednji način. Recimo, da je $P = C(G, S)$. Vemo, da obstajata le dve neizomorfni grupi z desetimi elementi, in sicer ciklična $\mathbb{Z}_{10}$ ter diedrska $\mathbb{D}_5$. Graf P je *kubičen*, kar pomeni, da ima vsaka točka natanko tri sosede, zatorej $|S| = 3$. Očitno mora biti vsaj en element množice S reda 2. Najprej vzemimo, da je $G = \mathbb{Z}_{10} = \{1, a, \ldots, a^9\}$. Ta grupa ima le en element reda 2, in sicer a^5, od koder sledi, da mora biti $S = \{a^i, a^{-i}, a^5\}$, kjer je i enak 1, 2, 3 ali 4. V nobenem od štirih primerov ne dobimo grafa P. Predpostavimo, da je $G = \mathbb{D}_5 = \{1, a, \ldots, a^4, b, ab, \ldots, a^4b\}$, pri čemer $a^5 = b^2 = 1$ in $ba = a^4b$. Ker lahko z notranjimi avtomorfizmi vsak element reda 2 grupe $\mathbb{D}_5$ preslikamo v element b, lahko predpostavimo, da $b \in S$. Če je $S = \{a^i, a^{-i}, b\}$, potem je i lahko enak 1 ali 2, toda v nobenem od obeh primerov dobljeni graf ni P. Preostane še primer, ko S vsebuje tri elemente reda 2, npr. $S = \{b, a^ib, a^jb\}$. Uporabili bomo naslednjo lastnost grafa P: poljubni različni točki sta bodisi sosedni ali pa obstaja tretja, ki je sosedna z obema. To se pravi, da lahko generiramo vse elemente grupe G s komponiranjem največ dveh elementov množice S, torej $G = S \cup (S \cdot S)$. Toda v S so le trije elementi reda 2 (grupa G, ki je diedrska, jih vsebuje pet), v $S \cdot S$ pa se nahajajo le potence elementa a. To protislovje pove, da grafa P ni mogoče izraziti kot CG.

Ta graf ima še vrsto drugih presenetljivih lastnosti. Ker ni CG, se zdi, da njegova simetrija ni tako bogata. Toda njegova grupa avtomorfizmov kaže drugačno sliko. Za vsak par točk namreč obstaja avtomorfizem, ki preslika eno v drugo. To se pravi, da so vse točke tega grafa enakovredne, nobena se ne odlikuje nad drugimi. Še več, ista lastnost velja tudi za povezave. Pravimo, da je Petersenov graf *tranzitiven po točkah* in tudi *po povezavah.* Zgodba pa se tu še ne konča, vendar je ne bomo nadaljevali. Povejmo le, da je ta graf še „bolj" tranzitiven, in sicer *3-tranzitiven* [9].

Ker torej obstajajo grafi, ki niso CG, nas seveda zanima, kako bi pri poljubnem danem grafu ugotovili, ali je CG ali ne. Sabidussi [8] je našel kriterij, s katerim je mogoče določiti, ali ima graf Cayleyjevo lastnost ali ne. Najprej pa še nekaj definicij. Če je Δ poljubna množica, označimo z S_Δ njeno simetrično grupo, tj. grupo vseh permutacij množice Δ. Grupa G je *permutacijska*, če je podgrupa kake simetrične grupe. Npr. $\mathrm{Aut}(X)$ je permutacijska grupa na množici točk grafa X. Pri permutacijskih grupah je mogoče govoriti o tranzitivnosti: grupa G je *tranzitivna* na množici Δ natanko tedaj, ko za vsaka $x, y \in \Delta$ obstaja tak $\gamma \in G$, da je $\gamma(x) = y$. Če zahtevamo še več, da za vsak par x, y obstaja *natanko en* γ, ki preslika x v y, potem grupo G imenujemo *regularna grupa.* Brž se prepričamo, da ima regularna grupa natanko toliko elementov kot množica točk, na kateri deluje.

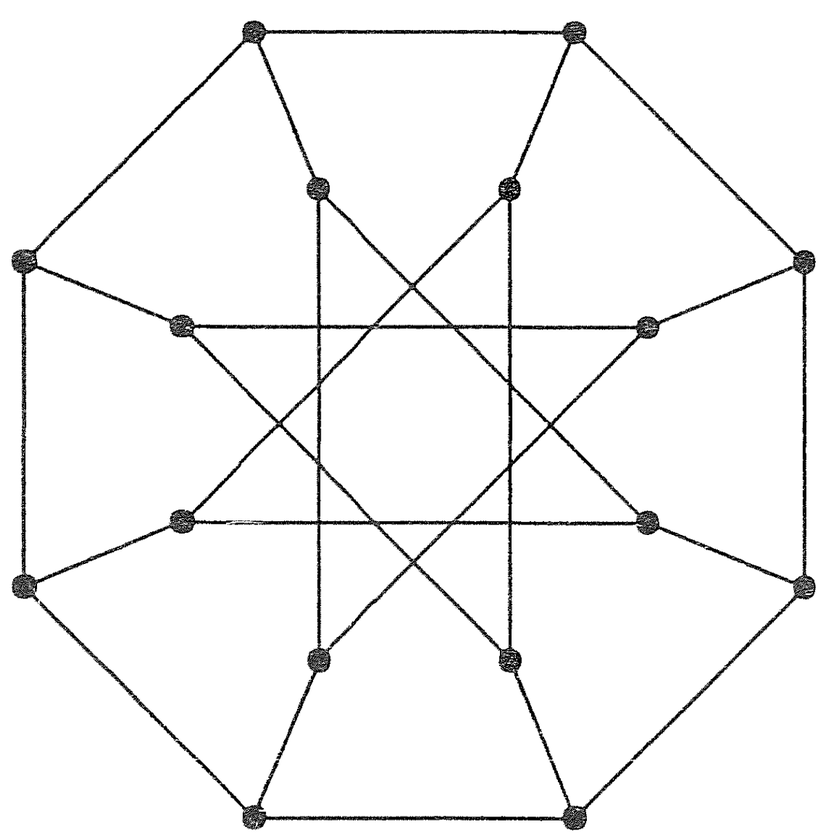
Izrek 1 (Sabidussi). *Graf X je CG natanko takrat, kadar* $\mathrm{Aut}(X)$ *vsebuje podgrupo, ki je regularna na množici točk $V(X)$.*

Dokaz. Če je $X = C(G, S)$ Cayleyjev, potem $\mathrm{Aut}(X)$ vsebuje podgrupo, izomorfno G, in ta je očitno regularna. Nasprotno, bodi X graf, pri katerem

$\mathrm{Aut}(X)$ vsebuje regularno podgrupo G. Izberimo točko $x_0 \in V(X)$ in označimo njene sosede z $x_1, \ldots, x_k$. Zaradi regularnosti pri vsakem $i = 1, \ldots, k$ obstaja natanko en $\gamma_i \in G$, da je $\gamma_i(x_0) = x_i$. Naj bo $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_k^{-1}\}$. Trdimo, da je X izomorfen grafu $C(G, S)$. Vsaki točki $y \in V(X)$ namreč lahko zaradi regularnosti grupe G priredimo natanko en $\gamma_y \in G$, da je $\gamma_y(x_0) = y$. Ker vsak avtomorfizem slika sosedne točke v sosedne, sta točki $y, z \in V(X)$ sosedni natanko tedaj, ko obstaja tak sosed x_i točke x_0, da je $z = \gamma_y(x_i)$. Ampak $z = \gamma_z(x_0)$ in $x_i = \gamma_i(x_0)$, zato je $z = \gamma_y(x_i) \Leftrightarrow \gamma_z(x_0) = \gamma_y(\gamma_i(x_0))$. Zaradi regularnosti grupe G je vsak avtomorfizem iz G natanko določen že s sliko ene točke, torej $\gamma_z = \gamma_y\gamma_i$. To pa je ekvivalentno pogoju $\gamma_y^{-1}\gamma_z = \gamma_i$ oziroma $\gamma_y^{-1}\gamma_z \in S$, kar pomeni, da sta γ_y, γ_z sosedna v $C(G, S)$. Potemtakem je predpis $y \mapsto \gamma_y$ res izomorfizem grafov X in $C(G, S)$. ■

Ta kriterij lahko uporabimo, če dobro poznamo grupo avtomorfizmov danega grafa. Treba pa je pripomniti, da je določitev $\mathrm{Aut}(X)$ iz X v splošnem težak problem.

2. Posplošeni Petersenovi grafi



Slika 3. Graf $P(8, 3)$.

Če pogledamo sliko 1, se nam prikrade ideja o posplošitvi Petersenovega grafa na naslednji način. Namesto dveh koncentričnih „krogov" s po petimi točkami vzamemo dva s po n točkami, kjer lahko $n \geq 3$ še poljubno izberemo. Točke na zunanjem krogu povežemo zaporedoma, na notranjem pa vsako drugo (ali vsako tretjo, četrto, ...). Nato povežemo še ustrezne točke zunanjega in notranjega kroga. Dobljeni graf je torej določen z dvema parametroma: n (polovičnim številom točk) ter k, ki pove, kako preskakujemo točke v notranjem krogu. Stroga definicija pa je naslednja: izberimo $n \geq 3$ in $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, za množico točk vzemimo $\{x_i, y_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, povezave pa naj bodo $\{x_i, x_{i+1}\}, \{x_i, y_i\}, \{y_i, y_{i+k}\}$. Dobljeni graf imenujemo *posplošeni Petersenov graf* $P(n, k)$. Kot zgled omenimo graf $P(5, 2)$, ki je ravno Petersenov graf s slike 1, in graf $P(8, 3)$ na sliki 3. To posplošitev si je izmislil Watkins [10], nekatere primere pa so uporabljali tudi že prej. Sodeč po konstrukciji se zdi simetrija teh grafov dokaj podobna. Resnica je nekoliko drugačna, kajti nimajo vsi grafi $P(n, k)$ vseh lastnosti grafa $P(5, 2)$. Frucht, Graver in Watkins [5] so izračunali grupe avtomorfizmov za vse grafe $P(n, k)$ in ugotovili, da je njihova simetrija v splošnem bolj revna. Grupa $\mathrm{Aut}(P(n, k))$ je izomorfna diedrski grupi $\mathbb{D}_n$,

razen v redkih primerih, ko je bogatejša, kot bomo kmalu videli. Presenetljivo je, da so nekateri med temi grafi CG in da sta karakterizacijo CG med posplošenimi Petersenovimi grafi objavila Nedela in Škoviera šele nedavno [7]. Še bolj pa je presenetljivo, da je mogoče omenjeni rezultat dokazati precej krajše, če se naslonimo na Sabidussijev kriterij ter na rezultate Fruchta *et al.* [5]. Na koncu pričujočega prispevka bomo to tudi storili.

Povzemimo bistvene rezultate iz [5], ki jih bomo pri tem potrebovali. Označimo z A grupo avtomorfizmov grafa $P(n,k)$. Ni se težko prepričati, da A vsebuje avtomorfizma α („rotacijo") in β („zrcaljenje"), ki sta definirana z $\alpha(x_i) = x_{i+1}$, $\alpha(y_i) = y_{i+1}$, $\beta(x_i) = x_{-i}$ in $\beta(y_i) = y_{-i}$. Definirajmo γ s predpisom $\gamma(x_i) = y_{ki}$ in $\gamma(y_i) = x_{ki}$. Brž vidimo, da $\gamma \in A$ natanko tedaj, ko je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$.

Izrek 2 (Frucht *et al.*). *Graf $P(n,k)$ je tranzitiven po točkah, če in samo če je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ ali pa je $(n,k) = (10,2)$.*

Seveda je vsak CG tranzitiven po točkah, kar sledi neposredno iz izreka 1. Potemtakem gornji izrek določa, kateri med posplošenimi Petersenovimi grafi so kandidati za CG.

Izrek 3 (Frucht *et al.*). *Če (n,k) ni enak nobenemu od $(4,1)$, $(5,2)$, $(8,3)$, $(10,2)$, $(10,3)$, $(12,5)$ oziroma $(24,5)$, potem velja naslednje:*

- *Če je $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$, potem*

$$A = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^n = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \beta\alpha\beta = \alpha^{-1}, \gamma\beta = \beta\gamma, \gamma\alpha\gamma = \alpha^k \rangle. \tag{1}$$

- *Če je $k^2 \equiv -1 \pmod{n}$, potem*

$$A = \langle \alpha, \gamma \mid \alpha^n = \gamma^4 = 1, \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha^k \rangle. \tag{2}$$

V tem primeru je $\beta = \gamma^2$.

Tukaj je simbol $\langle \delta, \varepsilon, \ldots \mid \ldots \rangle$ *prezentacija* grupe, generirane z $\delta, \varepsilon, \ldots$ Čeprav nobeden od dokazov obeh izrekov ni pretežak, ju na tem mestu ne bomo navajali.

3. Kateri posplošeni Petersenovi grafi so CG?

Kot smo že povedali, je bil v [7] objavljen naslednji rezultat:

Izrek 4 (Nedela *et al.*). *Graf $P(n,k)$ je CG natanko takrat, kadar je $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$.*

Dokaz. Po izreku 2 mora biti $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ ali $(n,k) = (10,2)$, če naj bo $P(n,k)$ CG. Najprej si oglejmo sedem (po izreku 3) izjemnih grafov, kamor spada tudi $P(10,2)$. $P(4,1)$ je skelet navadne kocke, za katerega je znano, da je CG (glej sliko 2). Grafi $P(8,3)$, $P(12,5)$ in $P(24,5)$ so prav

tako CG, kot sledi iz Fosterjevega *Cenzusa* [4] in iz rezultatov Coxeterja [2,3]. Nasprotno pa Petersenov graf $P(5,2)$ ni CG in enako velja tudi za $P(10,2)$, ki je skelet dodekaedra. Preostane še graf $P(10,3)$, za katerega je Watkins [11] ugotovil, da tudi ni CG.

Zdaj pa privzemimo, da $P(n,k)$ ni enak nobeni od zgoraj naštetih sedmih izjem. Najprej obravnavajmo primer, ko je $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$. Naj bo $B = \langle \alpha, \gamma \rangle$ podgrupa grupe $A = \mathrm{Aut}(P(n,k))$, generirana z elementoma α in γ. Po ((1)) je $\alpha\gamma = \gamma\alpha^k$, zato je $|B| = |V(P(n,k))| = 2n$. Točko x_0 preslikamo v x_i z avtomorfizmom α^i, v y_i pa z $\alpha^i\gamma$, kar pomeni, da je B regularna podgrupa v A. Torej je graf $P(n,k)$ po izreku 1 CG.

Preostane nam še primer, ko je $k^2 \equiv -1 \pmod{n}$. Recimo, da v A obstaja regularna podgrupa B. Iz ((2)) sledi, da v A obstajata natanko dva avtomorfizma, ki preslikata točko x_0 nazaj nase, in sicer identični avtomorfizem id (ki nasploh preslika vsako točko nazaj nase) ter γ^2. Ker je B podgrupa, vsebuje id, ker pa je tudi regularna, ne vsebuje γ^2. Ampak to je mogoče le, če $\gamma \notin B$. Podobno obstajata v A natanko dva avtomorfizma, ki preslikata x_0 v y_0, namreč γ in γ^{-1}, in natanko eden od njiju se mora nahajati v B. Toda malo prej smo ugotovili, da $\gamma \notin B$ (torej tudi $\gamma^{-1} \notin B$)! To protislovje pove, da v A ne moremo najti regularne podgrupe, in po izreku 1 graf $P(n,k)$ ni CG. ■

LITERATURA

[1] A. Cayley, *The theory of groups: Graphical representations*, Amer. J. Math. **1** (1878) 174–176.

[2] H. S. M. Coxeter, *The generalized Petersen graph $P(24,5)$*, Comput. Math. Appl. Part B **12** (1986) 579–583.

[3] H. S. M. Coxeter, *Regular complex polytopes (2nd ed.)*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.

[4] *The R. M. Foster's Census of Connected Symmetric Trivalent Graphs*, Charles Babbage Research Center, Winnipeg 1988.

[5] R. Frucht, J. E. Graver in M. E. Watkins, *The groups of the generalized Petersen graphs*, Proc. Camb. Phil. Soc. **70** (1971) 211–218.

[6] D. A. Holton in J. Sheehan, *The Petersen Graph*, Australian Mathematical Society Lecture Series **7**, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[7] R. Nedela in M. Škoviera, *Which generalized Petersen graphs are Cayley graphs?*, J. Graph Theory **19** (1995) 1–11.

[8] G. Sabidussi, *On a class of fixed-point-free graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958) 800–804.

[9] W. T. Tutte, *A family of cubical graphs*, Proc. Camb. Phil. Soc. **43** (1947) 459–474.

[10] M. E. Watkins, *A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs*, J. Comb. Theory **6** (1969) 152–164.

[11] M. E. Watkins, *Vertex-transitive graphs that are not Cayley graphs. Cycles and Rays*, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 301. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1990, 243–256.

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI
FOTON IN DVA ATOMA

JANEZ STRNAD

PACS 33.50.Dq

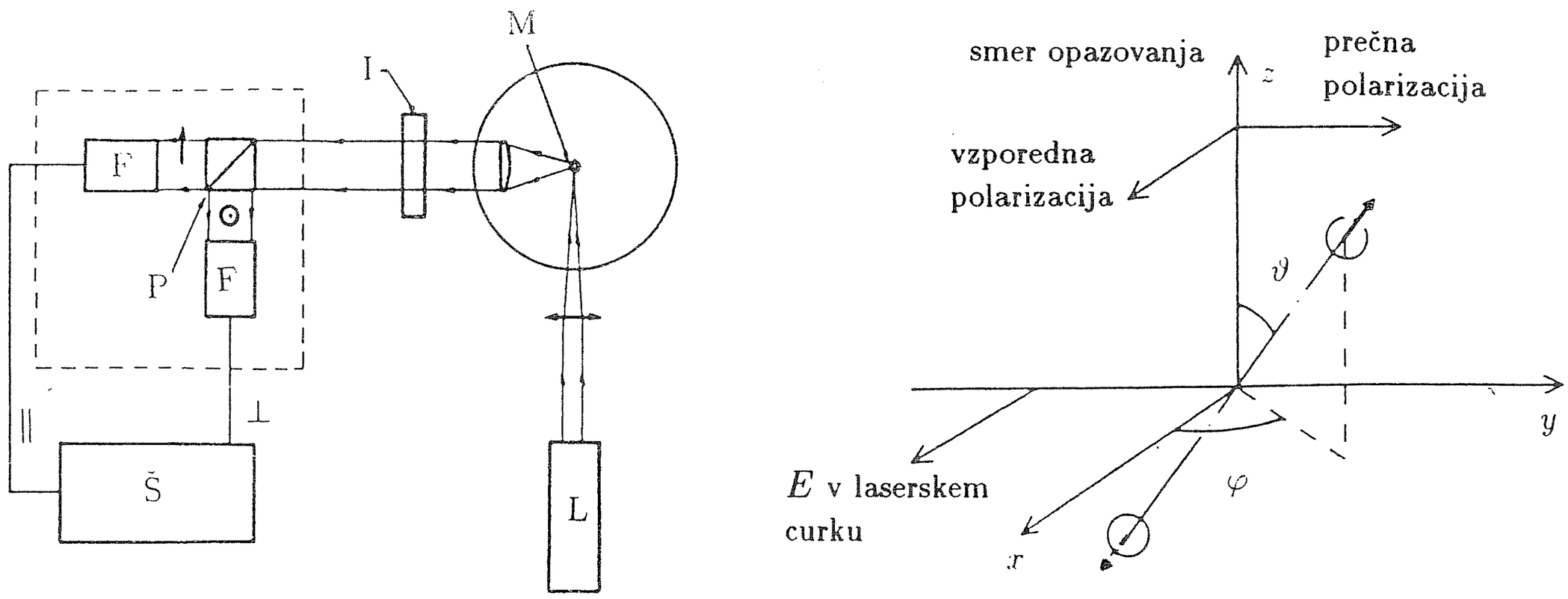
Časovni potek sevanja, ki sledi razcepu kalcijeve molekule s svetlobo, je mogoče pojasniti z interferenco. V klasičnem približku izhajata iz obeh atomov delni valovanji in interferirata. V polklasičnem približku je treba upoštevati, da sta atoma v prepletenem stanju. V kvantni elektrodinamiki imamo opraviti z interferenčnim pojavom, pri katerem si en sam foton delita dva atoma.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS
ONE PHOTON AND TWO ATOMS

The time dependence of radiation following the photodissociation of a calcium molecule can be explained by interference. In the classical approximation coherent waves are emitted from both atoms and interfere. In the semi-classical approximation an entangled state of both atoms has to be introduced. In quantum electrodynamics we have an interference effect where a single photon is shared by two atoms.

Namesto da bi opazovali krajevno odvisnost gostote energijskega toka v valovanju, lahko v posebnem primeru interferenco ugotovimo s časovno odvisnostjo gostote energijskega toka v nastalem valovanju. Poskus je dokaj zahteven [1]–[3]. Curek molekul kalcija izhaja skozi odprtino s premerom 0,5 mm iz pečice pri temperaturi dobrih 1100 °C. V pravokotni smeri svetijo na curek s stabiliziranim kriptonovim ionskim laserjem s povprečno močjo 60 mW (sl. 1). Laser daje sunke z razpolovno širino 120 ps s frekvenco 82,3 MHz. V linearno polariziranem valovanju je jakost električnega polja vzporedna s smerjo molekulskega curka. Valovno dolžino laserja $\lambda_0 = 406,7$ nm izberejo tako, da ostane eden izmed atomov, na katera sevanje razcepi molekulo, v osnovnem stanju $^1S_0$, drugi pa v prvem vzbujenem stanju $^1P_0$. Pri prehodu iz tega vzbujenega stanja v osnovno stanje seva atom kalcija svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 422,7$ nm, ki ji ustreza energija fotona 2,934 eV. Disociacijska energija molekule Ca_2 meri 0,136 eV. Energija fotona v laserski svetlobi 3,049 eV je za 0,021 eV premajhna, da bi krila disociacijo molekule in prehod atoma v prvo vzbujeno stanje. To razliko prispeva prehod molekule iz višjega vzbujenega vrtilnega ali morebiti nihajnega stanja v nižje vzbujeno stanje. Pri temperaturi 1400 K je za to na voljo dovolj energije, saj meri kT 0,12 eV. Preostalo energijo, v povprečju 0,1 eV, si razdelita atoma v enakih deležih v obliki kinetične energije.

Izsevano svetlobo pri prehodu atoma kalcija iz vzbujenega stanja v osnovno zberejo z lečo. Svetlobo vodijo skozi interferenčni filter, ki prepusti samo svetlobo z valovno dolžino na ozkem pasu okoli valovne dolžine λ_0 in izloči sipano lasersko svetlobo, ter skozi polarizator. Polarizator zasučejo tako, da prepušča linearno polarizirano valovanje z jakostjo električnega polja v isti smeri, kot ga ima v laserskem curku. Svetlobo zaznavajo z občutljivo fotopomnoževalko v smeri, ki je pravokotna na molekulski in na



(a) (b)

Slika 1. Zasnova poskusa [1]: M molekulski curek, L laser, I interferenčni filter, P polarizator v obliki kocke, F fotopomnoževalki, $\|$ vzporedna in $\perp$ prečna polarizacija, Š števec (a). Koordinatni sistem postavimo tako, da ima curek molekul smer osi x, laserski curek smer osi y in opazujemo svetlobo iz smeri osi z. Jakost električnega polja v laserskem curku ima smer osi x (b).

laserski curek. Zakasnitev po tem, ko laserski sunek razcepi molekule na dva atoma, merijo s konverterjem časa, ki je priključen na računalnik, tako da prevzame ta vlogo večkanalnega analizatorja.

Najprej uporabimo klasični približek. Sevata oba atoma in valovanji interferirata. Računamo kot pri Youngovem poskusu, le da razmik med "režama" s časom enakomerno narašča. V polklasičnem približku vzamemo, da začneta atoma sevati v trenutku, ko se molekula razdeli, in sevata z enako fazo valovanje z valovno dolžino λ in z razpadnim časom τ. V laboratorijskem opazovalnem sistemu se gibljeta atoma s hitrostma $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$, tako da se oddaljujeta drug od drugega s hitrostjo $2v$ in razdalja med njima s časom narašča: $a = 2vt$. Atoma, od katerih prevzame vsak polovico preostale energije, se gibljeta s hitrostjo $v = (2{\cdot}0,05\ \mathrm{eV}/40\ \mathrm{u})^{1/2} = 490\ \mathrm{m/s}$.

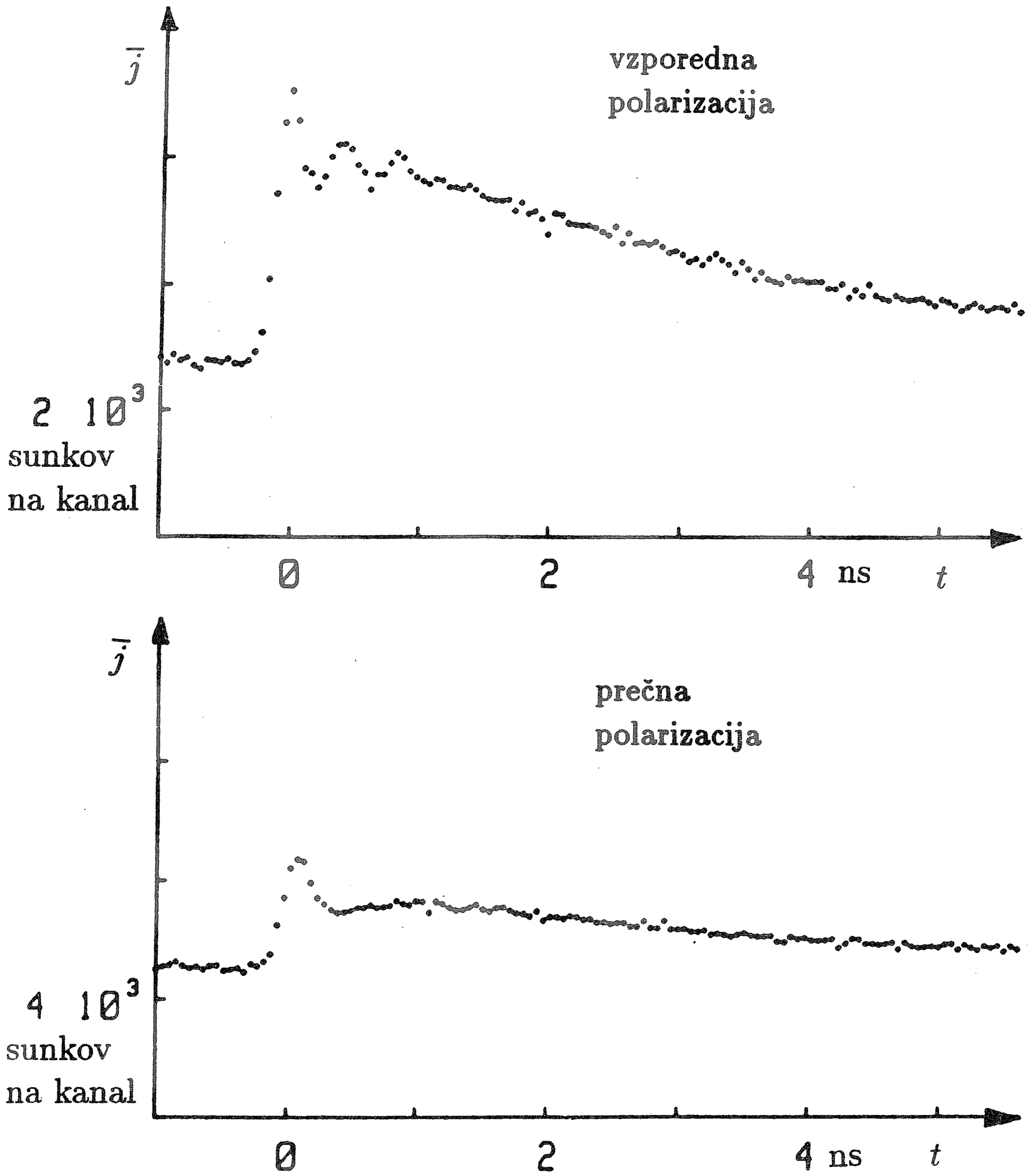
V ravnini, ki vsebuje oba atoma in vpadni laserski curek, pod kotom ϑ_0 proti zveznici prispevata prvi in drugi atom k jakosti električnega polja (sl. 3):

$$E \propto \mathrm{e}^{-t/2\tau}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} + \mathrm{e}^{-t/2\tau}\,\mathrm{e}^{i(kr+k\delta r-\omega t)} = \mathrm{e}^{-t/2\tau}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}(1+\mathrm{e}^{ik\delta r}). \quad (1)$$

Izraz, ki vsebuje razliko poti δr, zapišemo kot $k\delta r = 2\pi\delta r/\lambda = 2\pi a\cos\vartheta_0/\lambda$. Gostoto svetlobnega toka izračunamo s kvadratom absolutne vrednosti električnega polja

$$j \propto E^*E \propto \mathrm{e}^{-t/\tau}[2+(\mathrm{e}^{ik\delta r}+\mathrm{e}^{-ik\delta r})] = 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}[1+\cos(2\pi\cdot 2vt\cos\vartheta_0/\lambda)].$$

Premica, po kateri odletita vsaksebi atoma, v laboratorijskem opazovalnem sistemu v splošnem ne leži v ravnini laserskega curka in smeri opazovanja. Pri splošni legi zveznice atomov je v tem sistemu gostota svetlobnega toka odvisna še od polarnega kota ϑ, ki prevzame vlogo kota ϑ_0, in od



Slika 2. Izmerjena gostota povprečnega svetlobnega toka v odvisnosti od zakasnitve t po razcepu kalcijeve molekule s svetlobo. Zakasnitev merijo po laserskem sunku, ki razcepi molekulo. Pri vzporedni polarizaciji so merili 300 s, pri prečni pa dvakrat tolikšen čas. Razpadni čas τ atoma kalcija v prvem vzbujenem stanju meri 4,7 ns. Širina kanala ustreza 50 ps [3].

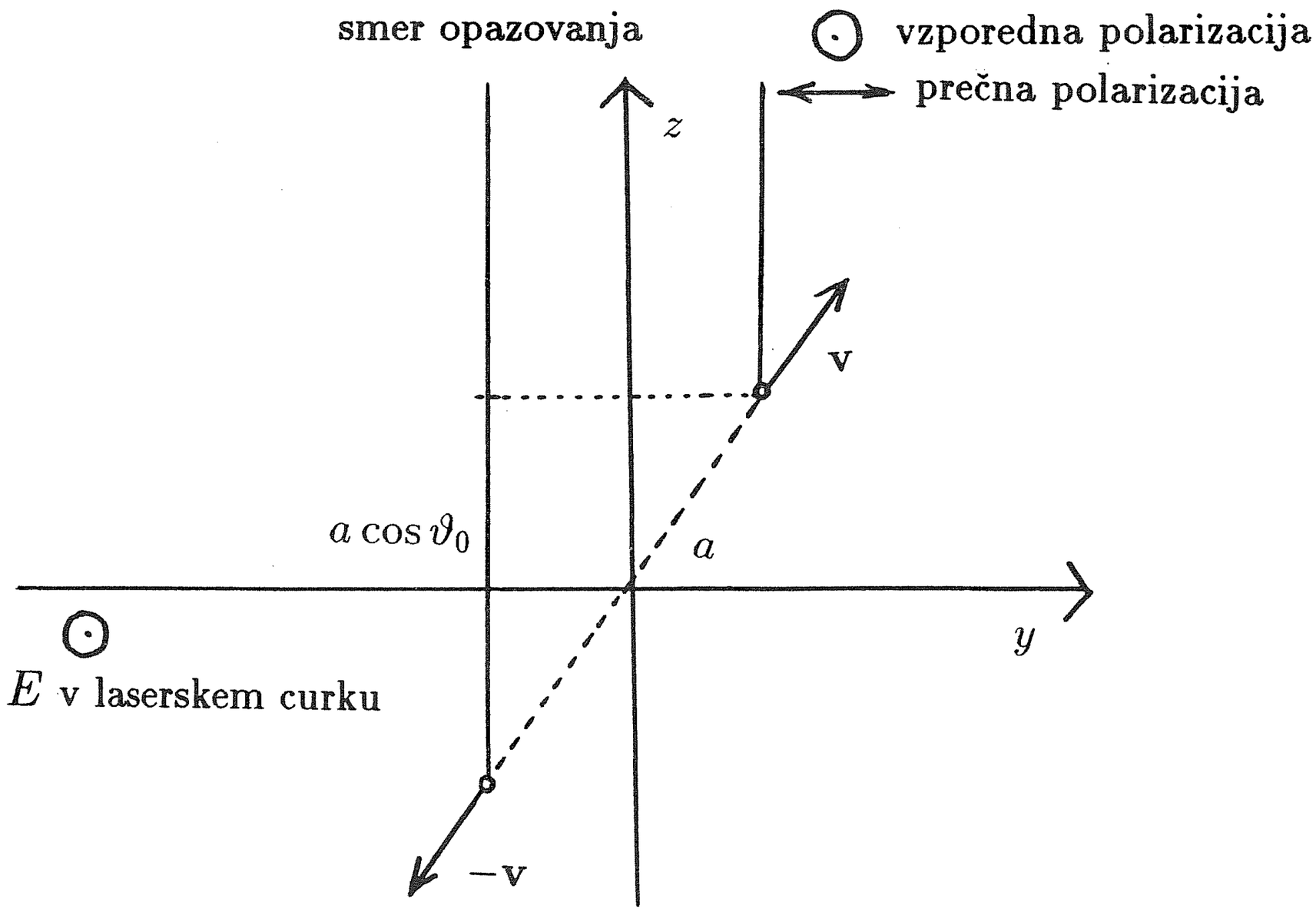
azimuta φ (sl. 1):

$$j(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta,\varphi)[1 + \cos(4\pi vt\cos\vartheta/\lambda)].$$

Funkcija $f(\vartheta,\varphi)$ je dokaj zapletena in je ne kaže podrobno navajati [4]. Z izidi merjenja moramo primerjati povprečje te gostote za mogoče lege zveznice atomov po vsem prostorskem kotu

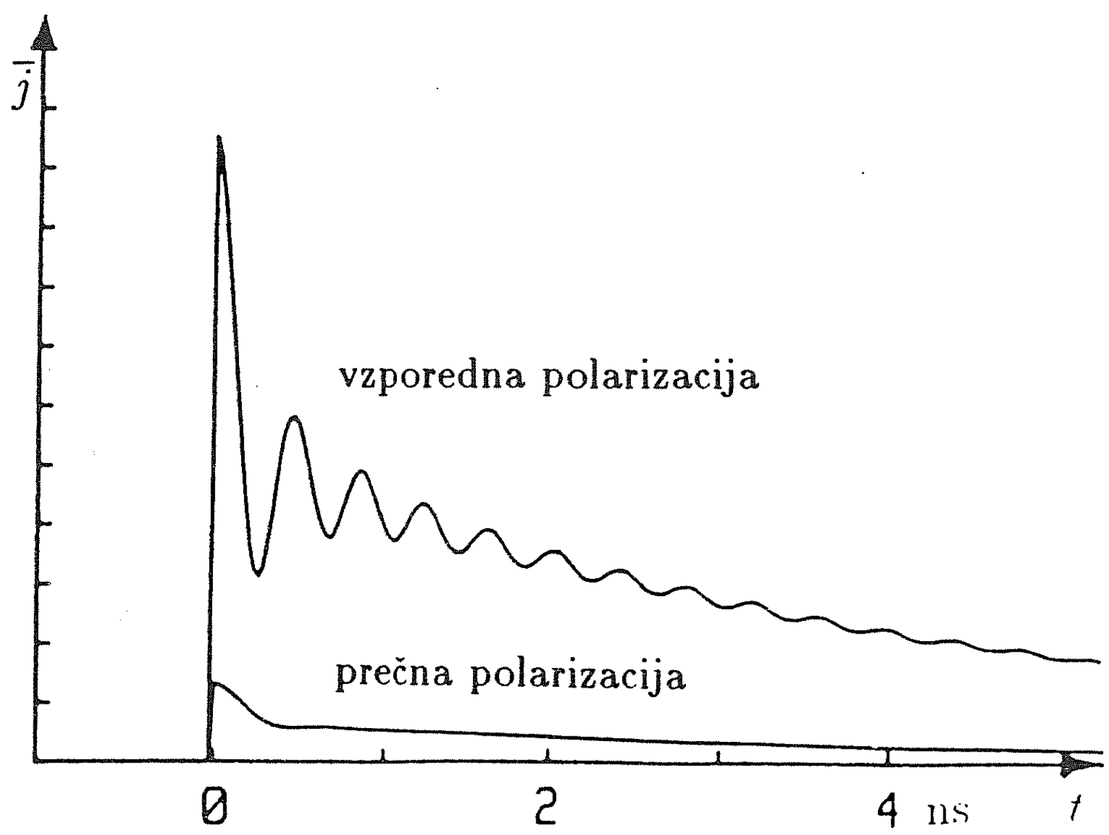
$$\bar{j} = \int j(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi\,.$$

Povprečje ne vsebuje več kotov (sl. 4). Njegov časovni potek okvirno pojasnimo, če uvidimo, da po integriranju po azimutu φ preostane Fourierova



Slika 3. V posebnem primeru, ko zveznica atomov leži v ravnini vpadnega laserskega curka in smeri, iz katere opazujemo, je geometrijska razlika poti valovanj iz prvega in drugega kalcijevega atoma enaka $\delta r = a\cos\vartheta_0$. Za ta primer velja $\vartheta = \vartheta_0$ in $\varphi = 0$. Atoma kalcija se v razpadnem času $\tau = 4,7$ ns oddaljita samo za dobrih 5 μm ali za 12 valovnih dolžin opazovane svetlobe.

transformacija funkcije spremenljivke $4\pi v\cos\vartheta/\lambda$. Predvsem so pomembni primeri, ko leži zveznica atomov blizu smeri opazovanja pri kotu $\vartheta = 0$. Funkcija, ki jo transformiramo, narašča, ko se spremenljivka bliža $4\pi v/\lambda$, in pade, ko spremenljivka doseže to vrednost. V transformirani funkciji se zato pojavi nekaj vrhov in dolin.



Slika 4. V splošnem zveznica atomov ne leži v ravnini laserskega curka in smeri, iz katere opazujemo. S smerjo opazovanja tvori kot ϑ, njena projekcija na ravnino laserskega curka in pravokotnice na smer opazovanja pa tvori s to pravokotnico kot φ. Z merjenji moramo primerjati povprečno gostoto svetlobnega toka $\bar{j}$, ki jo dobimo kot povprečje po prostorskem kotu.

Izidi merjenja se zadovoljivo skladajo z napovedjo. Zaradi končne ločljivosti naprave okoli 180 ps so izmerjeni vrhovi seveda manj ostri. Iz merjenj izhaja za hitrost enega izmed atomov v laboratorijskem sistemu v povprečju $v = (550 \pm 35)$ m/s, malo več, kot je dala ocena. Časovni razmik med sosednjima vrhovoma v gostoti svetlobnega toka pri vzporedni

polarizaciji meri po diagramu (385 ± 25) ps in se zelo dobro ujema z napovedano vrednostjo $\lambda/2v = 384$ ps.[1]

Za nekoliko globlji vpogled uporabimo polklasični približek, v katerem obravnavamo elektromagnetno valovanje v okviru Maxwellove elektrodinamike in atoma v okviru kvantne mehanike. Pred sevanjem opišemo sistem obeh atomov, na katera foton razcepi molekulo kalcija, z valovno funkcijo

$$\Psi(1,2,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_o(1,t)\psi_v(2,t) + \psi_v(1,t)\psi_o(2,t)]. \tag{2}$$

Indeks o valovne funkcije atoma ψ ustreza osnovnemu stanju, indeks v pa vzbujenemu stanju, indeks 1 ustreza prvemu atomu, indeks 2 pa drugemu. V sestavljenem stanju sistema atomov sta prepleteni obe za posamični atom dosegljivi stanji. Valovna funkcija sistema (2) preide vase, ko zamenjamo prvi atom z drugim in drugega s prvim. S tem smo upoštevali spoznanje, da prehoda, pri katerem izseva foton prvi atom, ne moremo razločiti od prehoda, pri katerem ga izseva drugi atom.

Pri električnih dipolnih prehodih, h katerim sodi tudi fotonski razcep molekule, se parnost spremeni. Sistem obeh atomov pred sevanjem v stanju z valovno funkcijo (2) lahko nastane le iz molekule v stanju z lihim kvantnim številom rotatorja. Samo kvantno število l namreč določa parnost stanja molekule $(-1)^l$ [5]. Za jakost električnega polja pripelje to do enake oblike kot klasični približek z enako fazo (1). Sevanje je linearno polarizirano v smeri, ki se ujema s smerjo jakosti električnega polja v vpadnem laserskem valovanju.

Po tem premisleku smo opisali doslej le sevanje z vzporedno polarizacijo, v katerem je jakost električnega polja vzporedna z električnim poljem v laserskem curku. Sevanje pa ima lahko tudi prečno polarizacijo, ko je jakost električnega polja pravokotna na električno polje v laserskem curku. Sistem atomov je namreč pred sevanjem lahko tudi v stanju z valovno funkcijo

$$\Psi(1,2,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_o(1,t)\psi_v(2,t) - \psi_v(1,t)\psi_o(2,t)], \tag{2'}$$

ki spremeni znak, ko zamenjamo atoma drugega z drugim. Sistem atomov v tem stanju lahko nastane le iz molekule v stanju s sodim kvantnim številom rotatorja. To pripelje do jakosti električnega polja:

$$E \propto \mathrm{e}^{-t/2\tau}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} - \mathrm{e}^{-t/2\tau}\,\mathrm{e}^{i(kr+k\delta r-\omega t)} = \mathrm{e}^{-t/2\tau}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}(1-\mathrm{e}^{ik\delta r}) \tag{1'}$$

z nasprotno fazo. Valovanje je linearno polarizirano z jakostjo električnega polja prečno na smer električnega polja v laserskem curku. Račun teče dalje po isti poti kot pri vzporedni polarizaciji. Pri tem so pomembni predvsem primeri, ko leži zveznica atomov blizu pravokotnice na smer opazovanja pri kotu $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$. Fourierova transformacija funkcije, o kateri smo govorili, od

[1] Spremenljivko zapišemo v obliki $4\pi v/\lambda = 2\pi/t_0$, pa uvidimo, da ima $t_0 = \lambda/2v$ vlogo periode.

največje vrednosti pri spremenljivki 0 monotono pada proti nič pri $4\pi v/\lambda$, ko je $\cos\vartheta = 1$.

V klasičnem približku si lahko nazorno predstavljamo, da v atomih težišče negativnega naboja in pozitivni naboj nihata v smeri električnega polja v laserskem curku. Ko sta atoma še zelo blizu skupaj, se pri vzporedni polarizaciji valovanji najbolj ojačita. Do tega pride, če sevata atoma z enako fazo. Pri prečni polarizaciji pa se morata v tem primeru valovanji uničiti, saj nihajoči dipol, s katerim opišemo atoma, ko sta zelo blizu skupaj, ne seva v smeri nihanja. Do tega pride, če atoma sevata z nasprotno fazo.

O polarizaciji smo povedali nekaj več, ker so na opisane pojave postali pozorni, ko so izmerili večjo polarizacijo sevanja pri fotonskem razcepu molekul, kot so pričakovali. To so pojasnili s prepletenima stanjema (2) in (2'). Šele nazadnje so zasledovali časovni potek sevanja in opisali pojav kot interferenčni poskus, pri katerem si foton delita dva atoma.

Interferenčna slika pri navadnih interferenčnih poskusih utegne biti precej bolj prepričljiva kot časovni potek pri opisanem poskusu (sl. 2). Vendar je slednji zanimiv, ker je pri njem vpleten en foton in smemo brez pomislekov govoriti o interferenčnem poskusu z enim fotonom. Samo eden od obeh kalcijevih atomov preide iz prvega vzbujenega stanja v osnovno stanje in pri tem izseva foton. Sklepa ne omaja to, da smo, kot je v polklasičnem približku v navadi, prebili brez fotonov. Kot je značilno za ta pribižek, vpeljemo energijo sevanja $h\lambda/c$ prek energijske razlike atoma v prvem vzbujenem in v osnovnem stanju. Račun v okviru kvantne elektrodinamike pripelje do enakega izida, le da je precej bolj zapleten [1]–[3].

Ali bi pri tem poskusu lahko ugotovili, kateri atom je izseval foton s tem, da bi določili gibalno količino enega in drugega atoma potem, ko je eden izmed njiju izseval foton? Zaradi odriva izsevanega fotona z gibalno količino h/λ se je namreč za toliko spremenila gibalna količina atoma, ki je izseval foton. V ta namen bi morali izmeriti razliko gibalnih količin atomov, na katera je razpadla molekula, z manjšo efektivno napako od h/λ. Toda po Heisenbergovi neenačbi $\delta x \delta p > h$ bi bila v tem primeru lega atomov δx določena manj natančno kot na λ in zato ne bi opazili interference. Opisani poskus se odlikuje prav po tem, da je lego obeh atomov mogoče dokaj natančno določiti, njune gibalne količine pa ne.

LITERATURA

[1] J. Vigue, P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Polarisation of calcium atomic fluorescence due to a coherence effect in the photodissociation of Ca_2 molecules*, J. Physique Lett. **42** (1981), 531.

[2] J. Vigue, J. A. Beswick, M. Broyer, *Coherence effects in the polarisation of the light emitted by photofragments*, J. Physique **44** (1983), 1225.

[3] P. Grangier, A. Aspect, J. Vigue, *Quantum interference effect for two atoms radiating a single photon*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 418.

[4] G. J. Diebold, *Interference in atomic fluorescence following photodissociation of homonuclear diatomic molecules*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 1344.

[5] J. Strnad, *Fizika*, 4. del, DMFA, Ljubljana 1986. str. 14, 22.

O POUČEVANJU FIZIKE NA UNIVERZI

JANEZ STRNAD

PACS 01.30.Pp

Izkušnje pri dolgoletnem poučevanju v prvem in drugem letniku študentov fizike utegnejo biti koristne tudi za druge učitelje fizike. Pomembno se zdi uvideti, da izjave o poučevanju fizike večinoma niso take, da bi jih lahko preskusili in s preskusom ovrgli.

ON LECTURING PHYSICS

Experiences accumulated in many years of lecturing physics for physics freshman and sophomores may be of some value for physics teachers. It is important to realize that statements in physics education are mainly not of the kind that could be tested and falsified.

Uvod

Poučevanje se močno razlikuje od raziskovanja. Raziskovanje razkriva novo in presega ustaljeno, poučevanje pa ustaljeno izroča mlajšim rodovom. Vendar pa si na univerzi ni mogoče zamisliti drugega brez prvega. Poučevanje izostri misli, spodbuja, da globlje dojamemo osnove, povežemo med seboj posamezne dele fizike in si ustvarimo celovit pregled, koristno izpolni čas, ko nismo razpoloženi za raziskovanje. Raziskovanje pripelje do tega, da podrobno spoznamo ozko območje in načine raziskovanja na njem, omogoči, da se dokopljemo do znanja, do katerega se drugi morda še niso dokopali, si pridobimo samozavest. Toda večina priznava, da se zavzeto raziskovanje in zavzeto poučevanje ovirata, če k drugemu šteje tudi pisanje učnih knjig. Najbrž zato Richard Feynman in Lev Landau nista sama napisala svojih knjig. Tako je tudi zato, ker današnji fizik navadno kot učitelj v nižjih letnikih ne predava tistega, kar raziskuje. Velikokrat sodi oboje celo na različni področji. Da so za poučevanje potrebna drugačna nagnjenja kot za raziskovanje, uvidimo po tem, da za predavanje nekaterih zelo znanih fizikov, Hermanna von Helmholtza, Maxa Plancka, Nielsa Bohra in drugih, njihovi študenti niso našli dobre besede.

Ali je mogoče primerjati poučevanje s poustvarjanjem? V glasbi solist požanje priznanje, ki ga skladatelj ob svojem času pogosto ni dobil. Ali je tudi v fiziki dobra poustvaritev več vredna kot povprečno originalno delo? Ali mora imeti učitelj podobno kot glasbenik posebne lastnosti? Ali se rodi ali priuči? Vsa ta široka vprašanja izvirajo od fizikov, a mogoče je reči, da niso posebej prizadevno iskali odgovorov. Fizika pač bolj zanimajo ožja vprašnja, ki so tesneje povezane s fiziko.

Fizika

Za fiziko in za druge veje naravoslovja so značilne izjave, ki jih je mogoče preskusiti in ki jih preskus ovrže, če mu nasprotujejo. Izjave take vrste

[1] Po prispevku na 1. kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije oktobra 1994 v Ljubljani

najdemo v učbenikih, monografijah in revijah in o njih razpravljajo na znanstvenih sestankih. V načelu je pri tem mogoče doseči soglasje ali vsaj jasno večinsko mnenje.

Izjave z določenega območja, ki so prestale vse preskuse, skupaj z definicijami in dogovori povežemo v fizikalne teorije, s katerimi je mogoče opisati pojave v naravi in v določenih okoliščinah napovedati izide poskusov. Sprejete fizikalne teorije imajo že dalj časa ustaljeno obliko, medtem ko nekatere nove teorije šele nastajajo. S tem smo pravzaprav opisali fiziko kot znanost, a včasih pravijo temu *trdo jedro fizike* ali *javna fizika* ali *fizika kot ustanova*, če je treba poudariti, da stoji za tem nenehno in neprizanesljivo preskušanje.

Območja okoli trdega jedra fizike lahko štejemo k *okolici fizike*. Večina fizikov se te okolice zaveda in o njej razmišlja, precej manj pa jih o njej razpravlja v širšem krogu ali piše. V okolici ni mogoče doseči takega soglasja kot v trdem jedru. Tudi ni enotnega pogleda na to, kako je okolica fizike sestavljena. Različni razpravljavci omenjajo kot del okolice *osebno fiziko* ali *fiziko v nastajanju*, *poklicne poglede*, *pogled na svet*, *fizikalno prepričanje*. V osebni fiziki izjave še niso tako dozorele, da bi jih mogli jasno oblikovati, sporočiti drugim in preskusiti. Ta del, ki bi ga lahko imeli za nekakšno fizikalno podzavest, se pokaže predvsem pri odkrivanju novega. Poklicni pogledi so povezani z odločitvami za študij fizike, za raziskovanje v njej, za izbiro ožjega področja, za vrsto in način raziskovalnega dela, končno obliko dela ter vrsto in obliko objave. Pri tem raziskovalca omejujejo in ga silijo v izbiro vrste in načina raziskovanja ter druge izbire zahteve tistega, ki omogoča ali podpira raziskovanje. Pogled na svet zajema trditve v zvezi z naravo, ki ne nasprotujejo značilnim izjavam v fiziki, ki pa jih ni mogoče neposredno preskusiti. Nekateri ga štejejo k filozofiji fizike ali metafiziki. Fizikalno prepričanje sestavljajo zelo splošne misli, *teme*, ki raziskovalca usmerjajo in hkrati omejujejo. Kdo se bo pustil voditi prostorsko-časovnemu opisu pojavov, drugi ohranitvenim zakonom, tretji zlomljeni simetriji. Pogosto fizika vodi misel, da je kaka teorija ali njen del napačen ali nepopoln. Nekateri fiziki stavijo predvsem na nazorne predstave, drugi se zanesejo predvsem na enačbe. Ta poteza izhaja tudi iz fizikovega značaja in povezuje podzavest in prepričanje.

Poučevanje

Poučevanje fizike ni samostojna veja znanosti kot fizika. Značilne izjave, ki zadevajo poučevanje fizike, večinoma niso take vrste, da bi jih bilo mogoče preskusiti in ovreči. O poučevalskih izjavah ni mogoče doseči niti približno tako širokega soglasja kot o izjavah v trdem jedru fizike. Medtem ko je trdo jedro fizike eno samo za ves svet, za poučevanje fizike tega ni mogoče trditi. Različne države imajo različne šolske sisteme in v vsaki državi je glede na namen nekaj različnih vrst šol. Odgovori na poučevalska vprašanja so vezani na državo, vrsto šole in včasih tudi na čas.

Na odnos med poučevanjem fizike in trdim jedrom fizike obstajata skrajna pogleda. Prvi se ne ozira posebej na fiziko in po njem sodi poučevanje fizike v splošno pedagogiko, ki obravnava poučevanje nasploh in ki vključuje sestavine psihologije in sociologije. Drugi postavi v ospredje fiziko in mu je poučevanje domala del okolice trdega jedra fizike. Pri presoji uporabnosti obeh pogledov si lahko pomagamo s preprostim priporočilom, naj o poučevanju fizike na določeni stopnji ne razpravlja, kdor ne obvlada fizike vsaj na tisti stopnji. Iz tega izhaja, da je prvi pogled uporaben za nižjo stopnjo šole, na primer za prvo polovico osnovne šole, drugi pa za višje stopnje, posebno za univerzo.

Ali obstaja *okolica poučevanja fizike*, podobno kot obstaja okolica trdega jedra fizike? Če na vprašanje odgovorimo pritrdilno, lahko po zgledu okolice fizike poskusimo ločiti poučevalsko podzavest, poklicni odnos do poučevanja, pogled na poučevanje, poučevalsko prepričanje. Že v okolici fizike je težko razmejiti eno področje od drugega, še teže je to storiti pri poučevanju. Tako kot v raziskovanju, se oblikujejo nove zamisli tudi v poučevanju najprej v poučevalski podzavesti. Poklicni pogledi so povezani z odločitvami za študij za učitelja fizike, za delo na določeni vrsti šole, za delo v krožkih in druge dejavnosti, med katere sodi tudi pisanje učnih knjig. V tem pogledu učitelja na eni strani omejujeta program in učni načrt, na drugi strani pa mu lajšata izbiro. Pogled na poučevanje zajema izhodišča o poučevanju fizike, ki ne nasprotujejo izjavam iz njenega trdega jedra. Sem sodi tudi odnos do preverjanja znanje. Poučevalsko prepričanje sestavljajo zelo splošne misli, ki usmerjajo učitelja in ga omejujejo. Tudi pri poučevanju pride do izraza to, da se nekateri učitelji opirajo predvsem na nazorne predstave, drugi na enačbe.

Zapisanih izjav ne moremo preskusiti, kot preskušamo izjave v fiziki. Posameznik jih po svojem premisleku sprejme ali odkloni. V pogovoru pravimo, da je pri tem vpleten „okus". To morda odvrača učitelje fizike od tega, da bi v širšem krogu razpravljali ali pisali o okolici poučevanja fizike, kot odvrača fizike od tega, da bi v širšem krogu razpravljali ali pisali o okolici trdega jedra fizike. V zvezi s svojim delom namreč niso vajeni zagovarjati izjav, ki so odvisne od osebne presoje, in jih ponujati drugim ali jih celo vsiljevati. Izjave o poučevanju fizike, ki jih ni mogoče preskusiti in s preskusom ovreči, so lahko le neobvezne. Take so tudi izjave v tem zapisu, ki naj bralca le spodbudijo, da bo sam razmišljal in si ustvaril svoje mnenje. To, da večina izjav v poučevanju fizike ni tako trdnih, kot so navadno izjave v fiziki, je ključno spoznanje. Pozornost smo mu posvetili, ker lahko traja precej časa, preden se posameznik dokoplje do njega. Iz tega izhaja, da se poučevanja fizike vsaj v celoti ni mogoče naučiti, naučiti se je mogoče le fizike. Razprave o poučevanju, ki s poudarkom zastopajo eno samo stališče, so tako v osnovi nekoristne. Izkušnje tudi kažejo, da skrajna stališča niso plodna. Stališče, ki se ga ne da preskusiti, je mogoče vsiljevati samo z oblastjo, ideologijo in drugim, s čimer se fiziki in učitelji fizike poklicno niso vajeni ukvarjati.

Poučuje vsak po svoje

Učitelji se razlikujemo po osebnih lastnostih in po znanju. Zato si vsak ustvari svojo okolico poučevanja in išče svoje odgovore na poučevalska vprašanja. Na eni strani želi v čim večji meri slediti svojim pogledom, na drugi ga omejuje dvoje: ne sme zaiti v nasprotje s trdim jedrom fizike in voditi se mora dati programu.

Pri iskanju lastnih odgovorov učitelju zelo koristi izmenjevanje izkušenj z domačimi kolegi. Vendar zaradi osebnostnih razlik teh izkušenj ne more v celoti neposredno prevzeti. Tudi izmenjavanje izkušenj s tujimi kolegi, branje tujih učbenikov, poučevalskih revij in učnih programov in udeležba na mednarodnih poučevalskih sestankih je nadvse koristna. Učitelj lahko veliko pridobi, če o spodbudah kritično razmisli s svojega stališča. Vendar velikokrat ne more pričakovati neposredne pomoči že zaradi razlik v okolju, šolskem sistemu, programu. Zato na določena poučevalska vprašanja ne kaže iskati splošno veljavnih in trdnih odgovorov, ki bi bili obvezni za vse učitelje fizike. Vendar pa je o takih vprašanjih le vredno razpravljati, če se zavedamo, da ni mogoče priti do obveznih sklepov. Ne samo da razprava spodbudi k razmišljanju zainteresirane učitelje, v nekaterih primerih lahko ponudi tudi nekaj mogočih odgovorov, med katerimi učitelj izbira po svoji presoji.

Izkušnje

Izkušnje pri poučevanju so osebne. Fizik pa ni vajen v zvezi s svojim delom v pisanju uporabljati prve osebe ednine. Toda v tem primeru ni pomoči. Svoje izkušnje sem pridobil v dolgoletnem poučevanju fizike na Oddelku za fiziko, najprej v prvem letniku, nato v drugem in potem izmenoma v obeh. Nazadnje se je pridružil še Razvoj fizike v tretjem letniku. V prvem letniku ni bilo težav z določitvijo obsega in prijema. Obseg so določala predavanja prejšnjih učiteljev in predvsem zbirka demonstracijskih poskusov, ki so sestavljali jedro predavanja. Precej časa sem potreboval, da sem se zavedel vloge demonstracijskih poskusov. Pripravni so za to, da ilustriramo kak zakon, nakažemo, kako kaj izmerimo in kako podatke uredimo, da razbijemo enoličnost predavanja, posebno če poskus ne gre po načrtu. Iz merjenj pri poskusih – posebno pri preglednih demonstracijskih poskusih z nezahtevnimi napravami – pa ni mogoče naravnost izpeljati zakona. Poleg merjenj si je treba izmišljati tvegane domneve in jih preskušati z nadaljnjimi merjenji. S poskusi, posebno pa ne z enim demonstracijskim poskusom, ni mogoče ničesar „dokazati".

Meje je določalo tudi matematično znanje novincev. Vsi tedaj niso znali odvajati in integrirati, kot znajo zdaj, a na to se ni bilo mogoče ozirati. Pač pa se je bilo treba izogniti tenzorjem in vektorski analizi. Tako na primer ni mogoče resno obdelati vztrajnostnega tenzorja ali napetostnega in deformacijskega tenzorja ali vektorskega potenciala.

V tej zvezi kaže omeniti težavo, ki se je večkrat pokazala v obliki vprašanj. Študente je podrobneje kaj zanimalo in se niso zadovoljili s pripombo, da bodo o tem slišali več v višjih letnikih. V takem primeru je pogosto pomagal okvirni opis z besedami o tem, kaj jih čaka. Česa več si navadno tudi zaradi časovne stiske ni bilo mogoče privoščiti.

Več dvomov je bilo o vrstnem redu. Vrstnega reda poglavij: mehanika, toplota, elektrika, optika, atomika sicer ni kazalo spreminjati. Vprašanje pa je bilo na primer, ali pride valovanje za toploto ali pred njo. Potrebujemo notranjo energijo in izentropno stisljivost, da razumemo zvok in določimo njegovo hitrost v plinu. Zato bi bilo ugodno mehanično valovanje obdelati po toploti. Vendar je zaradi tega, ker je mehanično valovanje pač povezano z mehaniko, prevladala odločitev, da pride na vrsto pred toploto. Ali naj se elektrika začne z elektrostatiko ali z električnim tokom? Ali sodi magnetno polje pred električno? V tem pogledu pridejo na dan težave zaradi enot iz mednarodnega sistema. Nazadnje sem ubral nekašno srednjo pot: uvodnemu odstavku o električnem toku, napetosti in uporu sledi električno polje in nato magnetno. Taka odstopanja sodijo v svobodo izbire, ki jo nasploh imajo predavatelji.

Obsežne ankete v prvem letniku so pokazale, da se zdi študentom fizike vrstni red zelo malo pomemben, če predavanja sistematično pokrijejo vso predvideno snov. Poglavje o atomiki je pozneje odpadlo, ko so prenehali predmet poslušati študenti matematike in kemije in so ga poslušali samo še študenti fizike.

S fiziko v drugem letniku je bilo nekoliko drugače. Predmet sam in njegov obseg in prijem pri predavanjih sta pri nas in v svetu manj ustaljena. Zato sem povprašal člane tedanje katedre za fiziko, kaj mislijo o tem. Ali naj predmet predvsem opisuje pojave ali naj tudi ponudi zasnove teorij, ki jih bodo dalje razvila predavanja v višjih letnikih? Velika večina je priporočila drugo možnost.

Po predavanjih v obeh letnikih je nastal učbenik v štirih delih, ki ga študenti fizike še uporabljajo. Z današnjimi izkušnjami bi ga napisal nekoliko drugače. Večkrat se pisanja lotijo učitelji bolj na začetku poklicne poti, ko se še ne zavedajo dobro, koliko dela jih čaka in kakšne nevarnosti prežijo nanje. Z učbeniki je najbrž zares tako, da jih kaže napisati čim pozneje, a ne odlašati s pisanjem predolgo, kajti lahko se zgodi, da se ga potem sploh ne bi lotili.

Iz predavanj in učbenika izhaja, da se bolj opiram na enačbe in računanje. To ni presenetljivo, ker sem raziskoval v teoretični fiziki. Kljub temu poskušam enakovredno obdelati tudi nazorne predstave, ker nekateri študenti stavijo nanje. Take predstave marsikdaj pomagajo narediti korak naprej, a pogosto tudi zavedejo. Vendar ne mislim, da mora biti poučevanje fizike za študente fizike za vsako ceno preprosto in vezano samo na nazorne predstave, čeprav se zdi morda na prvi pogled tak prijem bolj priljuden.

Prepričan sem, da je treba povedati „resnico in samo resnico", a ni mogoče povedati „vse resnice". Zaradi tega se je treba včasih, posebno pri

predavanjih, omejiti na poseben primer in se odpovedati splošni obdelavi. Pri tem poskušam jasno povedati, o katerem posebnem primeru teče razprava. Fizika v nasprotju s pravom „ne pozna resnic, ampak samo svoje slike prilagaja naraščajočim izkušnjam." Zato mi nekoliko meglena „resnica" pomeni pač tisto, kar v določenem času vem. Pri tem obstaja nevarnost, da me študenti napačno razumejo, kljub temu da si prizadevam, da jih ne bi zavedel. Vendar to breme ni tako težko, saj so vsakogar od nas že kaj napačno naučili, pa je s časom sam zavrgel napake ne glede na to, od kod so prišle.

V primerih, ko obstajajo o kaki pomembni stvari različna stališča, ki ne nasprotujejo fizikalnim spoznanjem, poskušam študente, posebno bodoče profesorje fizike, seznaniti s temi stališči in poudariti prednosti in slabosti enih in drugih. Posebej jih opozorim na to, kaj sodi v trdo jedro fizike in kaj v okolico. V okviru tega drugega lahko študenti po svoji presoji izberejo možnost, ki jim ustreza.

Na predavanjih in pri pisanju učbenikov so na začetku spodrsljaji neizbežni. Neprijetne niso najhujše napake, ker je te razmeroma lahko odkriti, ampak majhne, prikrite napake ali nečiste in zavajajoče trditve. Te je včasih mogoče izločiti šele, ko spoznamo tudi predmete iz višjih letnikov, pa še tedaj je treba dostikrat skrbno premisliti. V tem pogledu so posebno koristne pripombe in opozorila kolegov in študentov. Na srečo je učbenik nastajal počasi. Prvo različico prvih dveh delov sem tipkal sam, drugih precej obsežnejših prav tako ciklostilnih pa ne več. S popravki slednje so nastala skripta, ki so izšla pri Univerzitetni založbi v dveh izdajah. Prvi in drugi del, ki obsegata fiziko iz prvega letnika in ki ju uporabljajo tudi nekateri drugi študenti, sta izšla v tisku in bosta letos doživela osmi natis. Od izdaje do izdaje je uspelo popraviti vse več napak. V nekaterih izdajah priča kaka bela lisa o spodrsljaju, na primer glede nihanja dipolov v snovi pri Brewstrovem zakonu. Zdaj je ta lisa zopet prekrita in ob njej in na drugih mestih, na primer pri iztekanju plina iz posode pod višjim tlakom, so navedeni članki v Obzorniku za matematiko in fiziko, ki so težavno mesto podrobneje osvetlili.

Na drugi strani to, da je napak vse manj, poleg velikih stroškov duši željo po večjih spremembah. Nekoliko drugače je s 3. in 4. delom učbenika, ki vsebujeta snov drugega letnika in ki sta izšla v tipkopisu šele v 4. in 2. natisu. Posebno v 4. delu motijo številne tipkovne napake. Morda bo mogoče izdatno predelani izdaji pripraviti v tisku.

Zgodovina fizike

Tudi v zvezi z Razvojem fizike se pojavi vprašanje: Ali ima zgodovina fizike kakšno vlogo v poučevanju? Pri učenju bi prišel prav preprost in pregleden niz dogodkov, ki sledijo drug drugemu, kot učinek sledi vzroku. Vendar številni zgledi kažejo, da je zgodovina fizike kot obala morja: čim natančneje pogledamo, tem več zalivov in polotokov vidimo. Neuspešnih zamisli je veliko več kot uspešnih. Z nekaj pretiravanja bi lahko rekli, da se fizika zaradi svoje narave „uči na napakah". Pogosto pripomore k

uspehom naključje. Fizik goji *fizikovo* – *diahronično* – zgodovino fizike, ko presoja nekdanje dogodke z današnjega gledišča. Nasprotno se zgodovinar v *zgodovinarjevi* – *sinhronični* – zgodovini fizike poskuša vživeti v vsako obdobje in presoja s tedanjega gledišča. Toda celo svoje zgodovine fizik ne more tako poenostaviti, da bi bila v vseh delih koristna za poučevanje. To bi lahko dosegel le, če bi jo ponaredil. Iz takih nagibov so se rodile pravljice, da je Galileo Galilei prišel do zakona za prosto padanje, ko je spuščal kamne s poševnega stolpa v Pisi, da je Isaac Newton odkril gravitacijski zakon in razklon bele svetlobe med prisilnimi počitnicami v rodnem kraju, ko je bila cambriška univerza zaprta zaradi kuge, da je Olaus Rømer prvi navedel hitrost svetlobe.

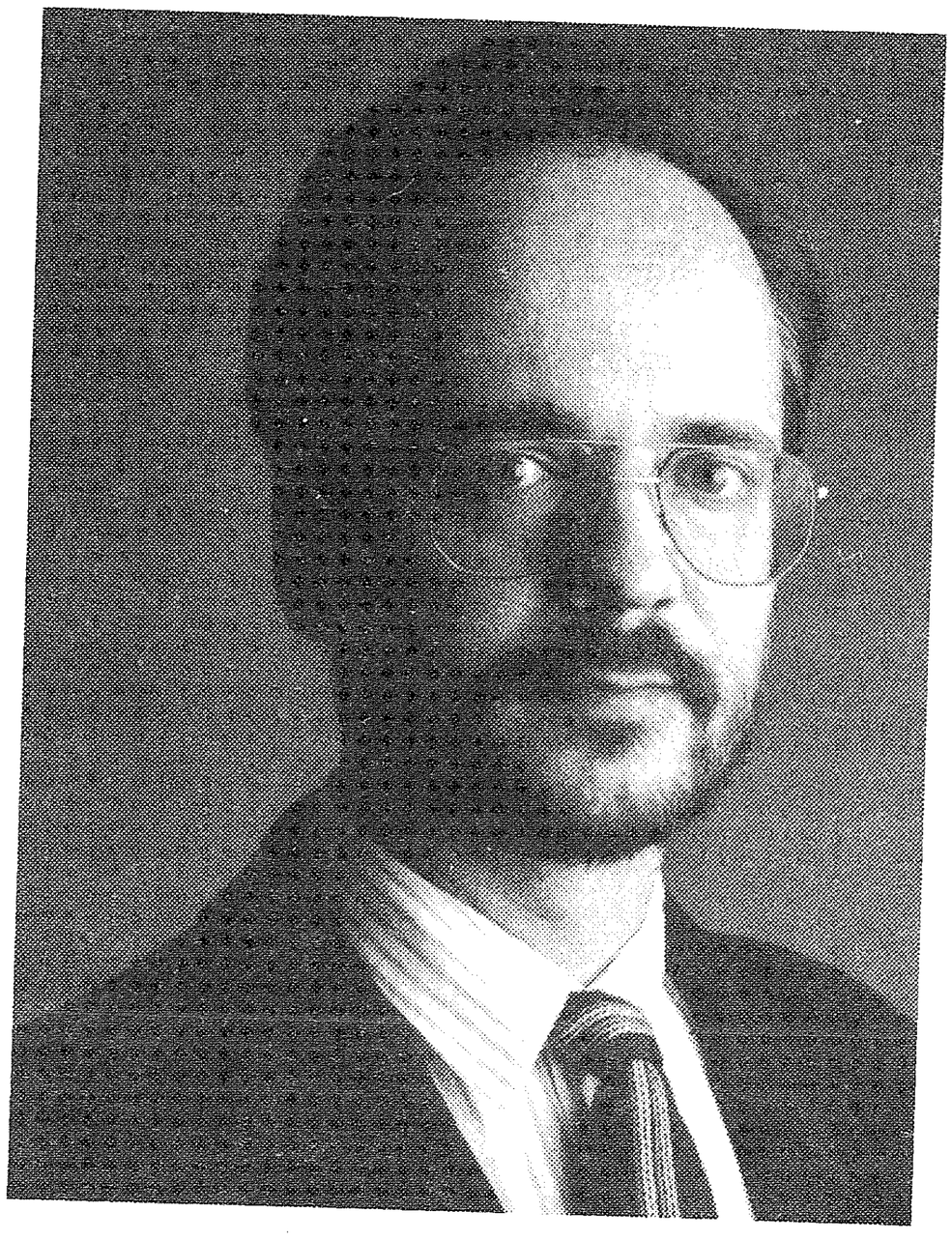
Nekateri celo mislijo, da bi utegnilo pogosto sklicevanje na neprirejeno zgodovino fizike študente ovirati pri učenju. Za študente fizike in predvsem za bodoče učitelje pa je vredno omeniti zgodovinski razvoj, potem ko že znajo nekaj fizike. S tem si ustvarijo boljši pregled in spoznajo, kako so veje fizike med seboj povezane. Tudi je včasih mogoče bolje razumeti težave študentov na kakem mestu, ki je zavrlo razvoj. Poleg tega številne zablode budijo občutek za previdnost, ki naj bi sploh bil pomembna lastnost učitelja.

Nefizikalne pripombe

Najneprijetnejši del poučevanja so izpiti. Izpiti so sploh nekaj posebnega. Redko kdo bo zanikal, da so potrebni. A po tem, ko so opravljeni, se zdi, kot da bi bili odveč. Na izpitu ne študent ne učitelj nista plodovita. Vendar so izpiti zanimivi s širšega vidika. Učitelj lahko preskuša svoje sodbe o znanju nekdanjih študentov tako, da zasleduje njihovo poklicno pot. Pokazalo se je, da je bilo v vsakem prvem ali drugem letniku študente mogoče razdeliti na skupino zelo dobrih in na skupino preostalih študentov. Skoraj brez izjeme so prvi pozneje dosegli velik poklicni uspeh. Zdi se, da so bile ocene v drugi skupini manj zanesljive vsaj glede napovedi poklicnega uspeha. Mimogrede je vredno omeniti, da tisti maloštevilni študenti fizike, ki so imeli težave s prepisovanjem, v splošnem niso dosegli manjšega poklicnega uspeha, so pa po drugih lastnostih med kolegi na slabem glasu. Družba je bolj zapletena kot narava in za kako tehtnejšo ugotovitev je vzorec premajhen. Najbrž pa tudi učitelj fizike ne sme razkriti vseh posebnosti nekdanjih študentov. Včasih mu je tisto, kar ve, še tako v breme. Moti ga na primer, da ima precej dober pregled o zmožnostih sedanjih srednješolskih učiteljev fizike, ko so bili še študenti.

Poučevanje ponuja še druge zanimive izkušnje, čeprav ga na splošno ne cenimo toliko kot raziskovanje. Učitelju prinaša posebno zadovoljstvo, ko nekateri od njegovih študentov postanejo njegovi kolegi in ga kot raziskovalci in kot učitelji prekosijo. Žal po tem, kar smo o poučevanju povedali, ni mogoče ugotoviti, koliko je to res zasluga učiteljev. R. P. Feynman je že vedel, zakaj je navedel Gibbonsa: „Poučevanje je rekdokdaj dokaj učinkovito, razen v tistih srečnih okoliščinah, ko je domala odveč.” Na srečo tega skrajnega mnenja ni mogoče preskusiti.

DUŠAN REPOVŠ – AMBASADOR ZNANOSTI



Letos je dobil priznanje Ambasador Republike Slovenije v znanosti tudi matematik prof. dr. Dušan Repovš. To priznanje podeljuje ministrstvo za znanost od leta 1991 ljudem, ki so s svojim znanstvenim delom prispevali k promociji naše države.

Prof. Repovš se je rodil leta 1954 v Ljubljani, kjer je tudi diplomiral. Že pred diplomo je nekaj časa študiral v Moskvi. Po diplomi je bil najprej podiplomski študent v Zagrebu, potem pa je odšel v ZDA, kjer je leta 1983 doktoriral na Florida State University. Istega leta je postal tudi docent za matematiko na ljubljanski univerzi, kjer od leta 1993 kot redni profesor uči topologijo in geometrijo na Pedagoški fakulteti. Kot gostujoči profesor je učil tudi na University of Texas v Austinu in na Mednarodnem centru za teoretično fiziko v Trstu. Aktivno sodeluje z vodilnimi znanstveniki z vsega sveta, še posebej iz Amerike in Rusije. Skupaj z njimi je prišel do precej zelo odmevnih rezultatov v geometrijski topologiji. Njegov strokovni opus je izjemen, obsega že čez petsto različnih objav, od tega prek petdeset v uglednih tujih matematičnih revijah. Na univerzah po vsem svetu je imel že okrog sto vabljenih predavanj in kakšnih dvajset plenarnih predavanj na večjih mednarodnih konferencah. Je recenzent več znanih matematičnih revij. Med nagradami, ki jih je dobil, sta gotovo najpomembnejši nagradi moskovskega Matematičnega inštituta Steklova v letih 1988 in 1991, ki ju je dobil skupaj s sodelavcema A. N. Dranišnikovim in E. V. Ščepinom.

V okviru seminarja za geometrijsko topologijo, ki ga vodi, pogosto predavajo znani matematiki z vsega sveta in tudi njemu gre zasluga, da je med mladimi spet več zanimanja za topologijo.

Glavnino del prof. dr. Repovša lahko uvrstimo nekako v dve področji topologije. Eno je topologija (posplošenih) mnogoterosti nizkih dimenzij, drugo pa teorija dimenzije. Povejmo nekaj malega o ozadju teh, širši javnosti manj znanih, področij matematike.

Topološka n-mnogoterost je prostor, ki je lokalno homeomorfen n-razsežnemu evklidskemu prostoru. Eno osrednjih vprašanj geometrijske topologije je bilo, kako prepoznati topološke mnogoterosti. Najprej so našli rešitev v višjih dimenzijah ($n > 4$). Na 3-dimenzionalnem primeru je uspešno delal

prof. dr. Repovš – najprej je v svoji disertaciji rešil problem za širok razred prostorov, nato pa je v naslednjih desetih letih, skupaj z R. J. Davermannom, našel popoln odgovor na to zanimivo vprašanje. Dokazala sta, da topološke 3-mnogoterosti karakterizira relativno preprosta lastnost splošne lege za zvezne preslikave končno mnogo diskov B^2 v dani prostor. Omeniti pa moramo tudi njegov dokaz 4-dimenzionalnega kriterija celularnosti, ki je pomembno orodje pri študiju topoloških 4- mnogoterosti.

Teorija dimenzij je veliko starejša veja topologije, saj sta jo zasnovala K. Menger in P. S. Urysohn že v dvajsetih letih tega stoletja. Če se omejimo na, denimo, kompaktne metrične prostore (kompakte), se vse klasične definicije dimenzije ujemajo (na splošnih topoloških prostorih pa niso ekvivalentne). Po eni od definicij ima prostor X dimenzijo $\dim X \leq n$, če za vsako zaprto podmnožico $A \subset X$ in vsako zvezno preslikavo $f : A \to S^n$ te množice v n-dimenzionalno sfero obstaja zvezna razširitev preslikave f na ves prostor X. Funkcija dim ima (predvsem na kompaktih) mnogo pričakovanih lepih lastnosti, pripravi pa nam tudi kako presenečenje. Omenimo le, da ne velja vselej enakost $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$, kot bi človek pričakoval, ampak je v splošnem pravilna samo neenakost $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$: že v tridesetih letih je L. S. Pontrjagin našel par 2-dimenzionalnih kompaktov, katerih produkt je 3-dimenzionalen. Kasneje so uvedli še kohomološko dimenzijo prostora X nad poljubno Abelovo grupo G. Definicija je podobna zgornji, le da namesto sfere S^n vzamemo Eilenberg-MacLaneov prostor $K(G, n)$. Ta dimenzija pa se tudi na kompaktih v splošnem ne ujema z zgoraj omenjeno dimenzijo.

Prof. dr. Repovš je uspešno raziskoval probleme obeh vrst dimenzije. Tako je na primer pri klasični dimenziji proučeval lastnosti splošne lege za zvezne preslikave kompaktov. Pri kohomološki dimenziji pa je proučeval enega najtežjih odprtih problemov iz teorije celičastih preslikav, in sicer problem višanja dimenzij. Skupaj z W. J. Mitchellom in E. V. Ščepinom je dosegel velik napredek v edinem nerešenem primeru – v dimenziji 4.

Nagrajencu želimo še naprej veliko uspehov!

Matija Cencelj

Obzornik za matematiko in fiziko 42 (1995) številke 1–6, str. 1–212

Članki – matematika

Koalgebre in izrek o kanoničnem razcepu vektorskega prostora — Coalgebras and The Primary Decomposition Theorem for a Linear Transformation (Tomaž Košir) 1–7

O kartezičnem produktu grafov — On Cartesian products of graphs (Janez Žerovnik) 8–16

Kako napisati matematični tekst — How to write a mathematical text (Milan Hladnik) 25–III

Zveznost in odvedljivost — Continuity and differentiability (Miran Černe) 33–37

Kompresija slik s fraktali — Fractal image compression (Mojca Indihar Štemberger) 38–50

Liejevi ideali — Lie ideals (Matej Brešar) 65–71

Končno razsežni arhimedski delno urejeni vektorski prostori — Finite dimensional archimedean partially ordered vector spaces (Boris Lavrič) 97–106
Barvanje povezav grafa, latinski kvadrat in problem urnika — Edge colourings, latin squares and the timetable problem (Jasna Čer-Titan) 107–117
Matematični modeli demokracije — Mathematical models of democracy (Vesna Omladič) 181–192
Caylejevi in Petersenovi grafi — Cayley and Petersen graphs (Marko Lovrečič Saražin) 193–198

Članki – fizika

Superprevodnost — Superconductivity (Marjan Logar) 17–24
Termodinamika v posebni teoriji relativnosti — Thermodynamics in special relativity (Janez Strnad) 51–58
Električni in magnetni potencial gibajočega se nabitega delca — Electrical and magnetic potential of a moving charged particle (Primož Potočnik) 72–79
Einstein in kvanti — Einstein and quanta (Janez Strnad) 80–87
Nenavadni interferenčni poskusi: Interferenca dveh fotonov — Unusual interference experiments: Two-photon interference (Janez Strnad) 118–125
Nenavadni interferenčni poskusi: Foton in dva atoma — Unusual interference experiments: One photon and two atoms (Janez Strnad) 199–204
O poučevanju fizike na univerzi — On lecturing physics (Janez Strnad) 205–211

1. kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – okrogle mize

Urednikova beseda (Zvonko Trontelj) 129
Pospeševalniki 129–132
Pouk matematike v osnovni in srednji šoli 133–141
Energetika in okolje 141–154
Slovenski matematiki in fiziki po svetu 154–167
Univerza – inštituti – industrija 167–XX

Nove knjige

Zvonimir Bohte, Numerično reševanje linearnih enačb (Egon Zakrajšek) IV
C. Pfefferman, R. Pfefferman, S. Wainger, Essays on Fourier analysis in honour of Elias M. Stein (Anton Suhadolc) 71
Boris Lavrič, Delno urejeni vektorski prostori (Roman Drnovšek) 126–127
Petar Pavešić, The Hopf invariant one problem (Jože Vrabec) 127–128

Vesti, novice, obvestila, vabila

Dogovor o vzajemnosti med DMFA in AMS (Peter Legiša) 16
Obvestilo študentom (Andreja Šafarič) IV
46. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman) 59–61
Profesor Peter Gosar – častni član društva (Janez Strnad) 61–62
Sedemdeset let profesorja Josipa Grassellija – častnega člana društva (Milan Hladnik) 63–64
Častni član društva Dušan Modic (Martina Koman) 64–VII
Profesor Niko Prijatelj – častni član društva (Peter Legiša) ..... VII–VIII
Kaj je ECMI (Zvonimir Bohte) 88–93
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1994 (Martina Koman) 93–XII
Novi člani društva v letu 1994 (Martina Koman) XV
Razpis za priznanja učiteljem (Ivana Mulec) ..... XV–XVI
Vabilo (Egon Zakrajšek) XVI
Dušan Repovš – ambasador znanosti (Matija Cencelj) 212–XXIII

Utrinek (izbral Janez Strnad) 87