

477/10 4

TEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

1995

Letnik 42

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1995

letnik 42, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.100,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.200,– SIT, za študente 1.050,– SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 DMFA Slovenije – 1253

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

- Končno razsežni arhimedski delno urejeni vektorski prostori — Finite dimensional archimedean partially ordered vector spaces (Boris Lavrič) 97–106
- Barvanje povezav grafa, latinski kvadrat in problem urnika — Edge colourings, latin squares and the timetable problem (Jasna Čer-Titan) 107–117
- Nenavadni interferenčni poskusi: Interferenca dveh fotonov — Unusual interference experiments: Two-photon interference (Janez Strnad) 118–125

Vesti — News

- Novi člani društva v letu 1994 (Martina Koman) III
- Razpis za priznanja učiteljem (Ivana Mulec) III–IV
- Vabilo (Egon Zakrajšek) IV

Nove knjige — New books (Roman Drnovšek, Jože Vrabec) 126–127, 127–128

Na ovitku: Delovno srečanje in 47. občni zbor društva bo 20. in 21. oktobra letos v hotelu Lek v Kranjski gori. Glej tudi vabilo na zadnji strani ovitka.

KONČNO RAZSEŽNI ARHIMEDSKI DELNO UREJENI VEKTORSKI PROSTORI

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 06F25, 13J25

V članku obravnavamo nekatere posplošitve arhimedske lastnosti realne osi na končno razsežne delno urejene vektorske prostore. Te posplošitve opišemo s topološkimi lastnostmi pozitivnega stožca.

FINITE DIMENSIONAL ARCHIMEDEAN PARTIALLY ORDERED VECTOR SPACES

In this note we consider some generalizations of the archimedean property of the real number field to finite dimensional partially ordered vector spaces, and characterize them by topological properties of the positive cone.

1. Delno urejeni vektorski prostori

Najprej zabeležimo nekaj preprostih pojmov iz splošne teorije urejenosti in opredelimo pojem delno urejenega vektorskega prostora.

Naj bo M dana neprazna množica. Binarno relacijo $\leq$ (manjše ali enako) na M imenujemo *relacija delne urejenosti*, kadar je *refleksivna* ($a \leq a$ za vsak $a \in M$), *antisimetrična* (iz $(a \leq b$ in $b \leq a)$ sledi $a = b$) in *tranzitivna* (iz $(a \leq b$ in $b \leq c)$ sledi $a \leq c$). Kadar je na M dana relacija delne urejenosti $\leq$, imenujemo M (ali par $(M, \leq)$) *delno urejena množica*.

Delna urejenost $\leq$ določa s predpisom

$$a < b \iff (a \leq b \text{ in } a \neq b), \quad a, b \in M,$$

na M relacijo $<$ (manjše). Zanikanje zveze $a \leq b$ zaznamujemo z $a \not\leq b$, odnos $a < b$ pa zanikamo z $a \not< b$. Namesto $a \leq b$ pišemo tudi $b \geq a$ (b je večji ali enak a), namesto $a < b$ pa $b > a$ (b je večji od a).

Elementa a in b delno urejene množice M sta *primerljiva*, kadar velja bodisi $a \leq b$ bodisi $b \leq a$.

Vsaka neprazna množica je delno urejena z relacijo enakosti. To relacijo imenujemo *trivialna urejenost*. V njej je vsak element primerljiv le sam s sabo. Kadar sta poljubna elementa delno urejene množice M primerljiva, pravimo, da je M *linearno urejena*. Če za vsak par $a, b \in M$ obstajata v M elementa

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\},$$

je M *mreža*. Vsaka neprazna končna podmnožica mreže ima najmanjšo zgornjo mejo in največjo spodnjo mejo, vsaka linearno urejena množica pa je mreža za isto relacijo urejenosti. O osnovnih lastnostih mrež se lahko bralec pouči v knjigah [3] in [5].

Neprazna podmnožica N delno urejene množice M na naraven način podeduje urejenost iz M . Podedovano delno urejenost imenujemo *inducirana urejenost*.

Definicija 1. Delno urejen vektorski prostor je realen vektorski prostor V z dano relacijo delne urejenosti $\leq$ na V , ki ustreza naslednjima pogojema:

$$x, y \in V, x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \text{za vsak } z \in V \quad (1)$$

$$x, y \in V, x \leq y \implies rx \leq ry \quad \text{za vsak realen } r \geq 0. \quad (2)$$

Če je pri tem V z urejenostjo $\leq$ mreža, imenujemo V *Rieszov prostor* ali *vektorska mreža*. Delno urejen vektorski prostor je torej Rieszov natanko takrat, kadar ima vsak par njegovih elementov supremum in infimum.

Vsak vektorski prostor s trivialno urejenostjo očitno postane delno urejen vektorski prostor. Najenostavnejši delno urejen vektorski prostor z netrivialno urejenostjo je enorazsežni realni prostor $\mathbb{R}$, urejen na običajen način. Zahtevi (1) in (2), ki določata usklajenost med algebrskima operacijama in delno urejenostjo prostora V , sta pravzaprav vzeti iz tega primera.

Naj bo V delno urejen vektorski prostor. Množico $P = \{x \in V : x \geq 0\}$ imenujemo *pozitivni stožec* prostora V , njene elemente pa *pozitivni elementi*.

V primeru naravno urejenega prostora $\mathbb{R}$ je pozitivni stožec množica vseh nenegativnih realnih števil $\mathbb{R}^+$. Iz zahteve (1) sledi, da za poljubna elementa x in y iz delno urejenega vektorskega prostora V s pozitivnim stožcem P velja ekvivalenca $x \leq y \iff y - x \in P$. Poleg tega iz (1) zaradi tranzitivnosti relacije $\leq$ sledi, da je pozitivni stožec P zaprt za seštevanje, s pomočjo pogoja (2) pa vidimo, da je P zaprt za množenje z nenegativnimi realnimi števili. Z uporabo antisimetričnosti in refleksivnosti relacije $\leq$ ter zahteve (1) lahko hitro dokažemo enakost $P \cap (-P) = \{0\}$. Navedene lastnosti pozitivnega stožca P povzemimo v naslednjo definicijo.

Definicija 2. Podmnožica P realnega vektorskega prostora je *stožec*, kadar zadošča naslednjim pogojem:

$$P + P \subseteq P, \quad (3)$$

$$\mathbb{R}^+ P \subseteq P, \quad (4)$$

$$P \cap (-P) = \{0\}. \quad (5)$$

Opišimo zdaj vse relacije delne urejenosti na danem realnem vektorskem prostoru, ki ustrezajo zahtevama (1) in (2).

Izrek 3. Naj bo P podmnožica realnega vektorskega prostora V . Potem lahko V delno uredimo tako, da postane delno urejen vektorski prostor s pozitivnim stožcem P , natanko takrat, kadar je P stožec. Pri tem je delna urejenost enolično določena s P .

Dokaz. Tik pred tem izrekom smo ugotovili, da pozitiven stožec P delno urejenega vektorskega prostora ustreza pogojem (3), (4), (5) in je tedaj stožec.

Za dokaz nasprotne smeri ekvivalence privzemimo, da P zadošča tem trem pogojem. Če naj bo V delno urejen vektorski prostor s pozitivnim

stožcem P , je relacija $\leq$ določena z zahtevo $x \leq y \iff y - x \in P$. Dokažimo, da je V s takó določeno relacijo $\leq$ res delno urejen vektorski prostor. Ker za vsak $x \in V$ velja $x - x = 0 \in P$, je relacija $\leq$ refleksivna. Denimo, da za $x, y \in V$ velja $x \leq y$ in $y \leq x$. Potem razlika $y - x$ pripada $P \cap (-P) = \{0\}$, torej $x = y$. Relacija $\leq$ je antisimetrična. Dokažimo, da je tudi tranzitivna. Če velja $x \leq y$ in $y \leq z$, je

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in P + P \subseteq P,$$

torej $x \leq z$. Relacija $\leq$ očitno ustreza pogoju (1). Naj bo $x \leq y$ in $r \in \mathbb{R}^+$. Potem je $ry - rx = r(y - x) \in \mathbb{R}^+ P \subseteq P$, od tod pa že sledi (2). ■

Po izreku 3 obstaja bijektivna korespondenca med družino vseh stožcev prostora V in družino vseh delnih urejenosti na V , ki napravijo iz V delno urejen vektorski prostor. Družini nista prazni, saj je $P = \{0\}$ stožec, ki določa na V trivialno delno urejenost. Iz pogojev (3) in (4) sledi, da je stožec konveksna množica. Še več, hitro se lahko prepričamo, da je konveksna podmnožica P realnega vektorskega prostora stožec natanko takrat, kadar izpolnjuje pogoja (4) in (5).

Če je P stožec vektorskega prostora V , je množica $P - P = \{x - y : x \in P, y \in P\}$ očitno vektorski podprostor, ki ga v V generira P . Stožec P je tudi stožec podprostora $P - P$ in v njem določa inducirano delno urejenost. Podobno velja za poljuben vektorski podprostor $U \subseteq V$. Če je P stožec prostora V , je $P \cap U$ stožec podprostora U in v njem določa inducirano urejenost. Podprostor Rieszovega prostora, opremljen z inducirano urejenostjo, ni nujno Rieszov. Takšen je na primer podprostor $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ standardno urejenega prostora $\mathbb{R}^2$ (pozitivni stožec standardno urejenega prostora $\mathbb{R}^2$ je na sliki 1a).

Neposredno iz definicije Rieszovega prostora sledi, da v njem veljata identiteti

$$x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z), \quad x \wedge y + z = (x + z) \wedge (y + z).$$

Prav tako očitno je, da za poljubna elementa x in y Rieszovega prostora ter realno število $r \geq 0$ veljata formuli

$$r(x \vee y) = rx \vee ry, \quad r(x \wedge y) = rx \wedge ry.$$

Podobni formuli za $r \leq 0$ prepustimo bralcu.

Če je V Rieszov prostor in $x \in V$, imenujemo $x^+ = x \vee 0$ pozitivni del in $x^- = (-x) \vee 0$ negativni del elementa x .

Trditev 4. Naj bo V Rieszov prostor in $x \in V$. Potem velja

$$x = x^+ - x^- \quad \text{in} \quad x^+ \wedge x^- = 0.$$

Pozitivni stožec Rieszovega prostora torej generira ves prostor.

Dokaz. Prva enakost sledi iz računa

$$x + x^- = x + (-x) \vee 0 = 0 \vee x = x^+,$$

pri dokazu druge pa uporabimo prvo enakost

$$x^+ \wedge x^- = (x + x^-) \wedge x^- = x \wedge 0 + x^- = 0,$$

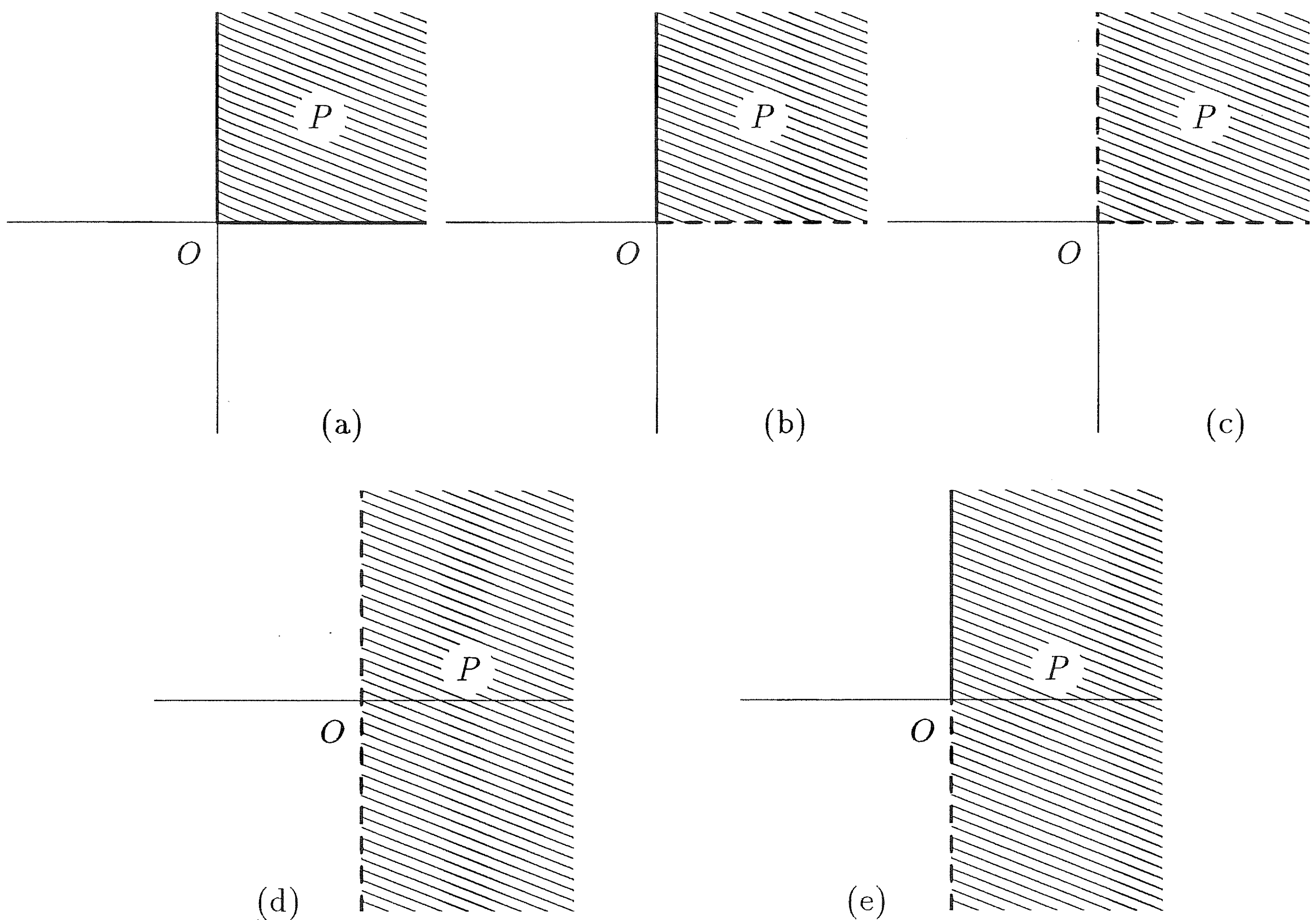
za zadnji enačaj pa še preprosto identiteto $-x^- = x \wedge 0$. ■

Definicija 5. Preslikava $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ je *izomorfizem* delno urejenih vektorskih prostorov V_1 in V_2 , kadar je linearna in bijektivna ter ustreza zahtevi

$$x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y); \quad x, y \in V_1.$$

Linearna bijekcija $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ je izomorfizem natanko takrat, kadar velja enakost $\phi(P_1) = P_2$, kjer je P_i pozitivni stožec prostora V_i , $i = 1, 2$. Bralec se bo zlahka prepričal tudi o naslednji lastnosti izomorfizmov. Če sta V_1 in V_2 Rieszova prostora, za izomorfizem ϕ veljata enakosti

$$\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y), \quad \phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y), \quad x, y \in V_1.$$



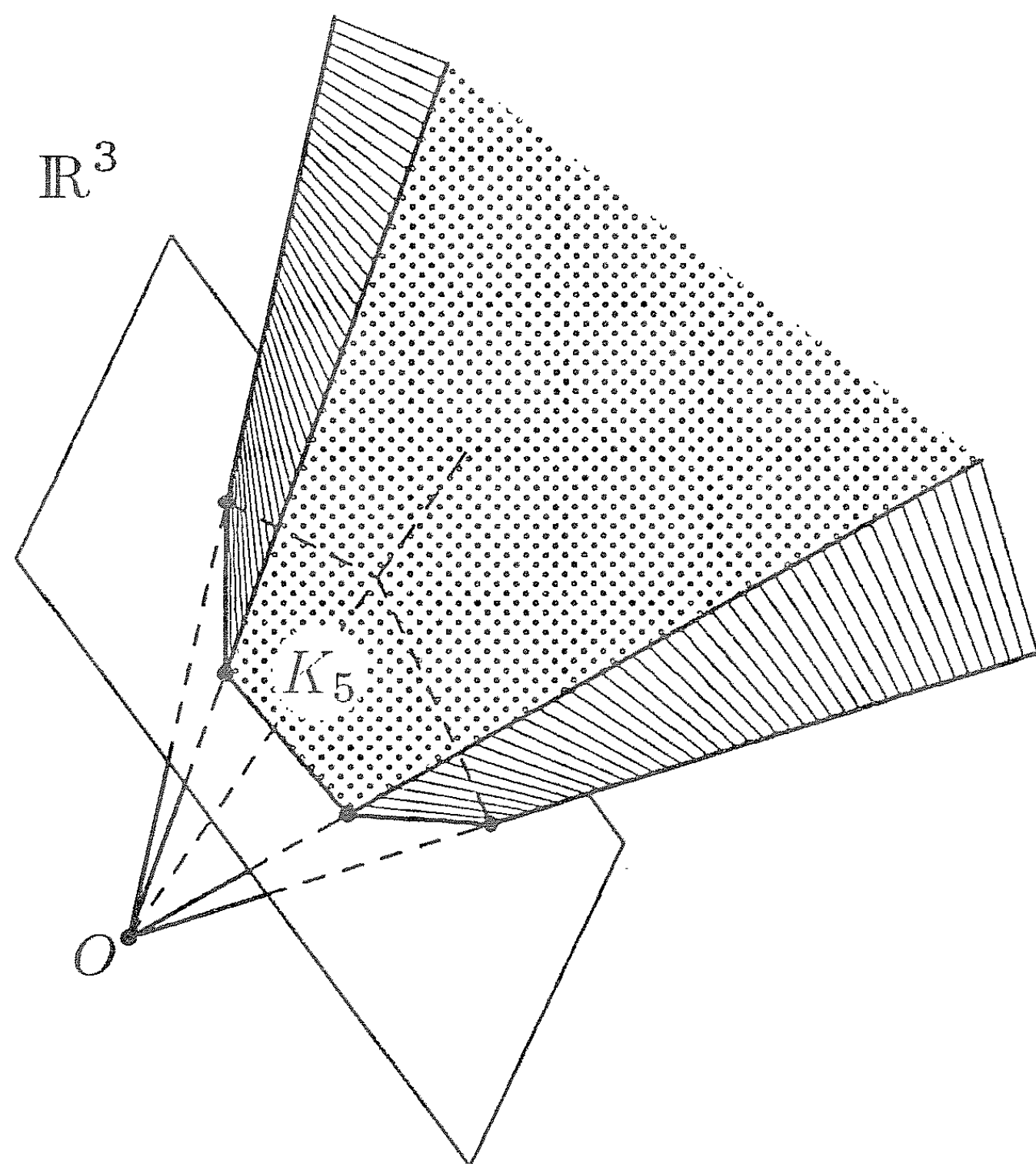
Slika 1

Oglejmo si nekaj primerov končno razsežnih delno urejenih vektorskih prostorov. V enorazsežnem prostoru $\mathbb{R}$ so le trije stožci: $\{0\}$, $\mathbb{R}^+$ in $-\mathbb{R}^+$. Delno urejena vektorska prostora, ki ju določata drugi in tretji stožec, sta izomorfna. Od tod sledi, da je vsak netrivialno urejen enorazsežen delno urejen vektorski prostor izomorfen naravno urejenemu prostoru $\mathbb{R}$ in je tedaj Rieszov prostor.

Poiščimo zdaj vse netrivialne stožce ravnine $\mathbb{R}^2$. Stožci, ki generirajo enorazsežne podprostore, so natanko vsi poltraki s krajiščem 0. Naj bo P poljuben stožec, ki generira $\mathbb{R}^2$. Potem P vsebuje točko 0 in notranjost konveksnega kota z ogliščem v 0, lahko pa še kak robni poltrak. Če je kot iztegnjen, je v P kvečjemu eden od robnih poltrakov s krajiščem 0, če pa je oster, sta lahko oba v P . Od tod brž sledi, da obstaja sedem neizomorfnih dvorazsežnih delno urejenih vektorskih prostorov. Pet jih ima dvorazsežne pozitivne stožce (glej sliko 1), le dva sta Rieszova prostora, (a) in (e).

Izbira stožcev v trirazsežnem prostoru je precej pestrejša. Dovolj jih je, da določajo neskončno paroma neizomorfni delno urejeni vektorski prostori. Takšni so na primer stožci $P_n = \mathbb{R}^+ K_n$, $n = 3, 4, \dots$, pri čemer je K_n konveksen n -kotnik s take ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki ne vsebuje 0 (glej sliko 2). Z uporabo izreka 7.13 iz knjige [2] se da dokazati, da obstajajo le štirje paroma neizomorfni trirazsežni Rieszovi prostori.

Oglejmo si še nekaj pomembnejših končno razsežnih delno urejenih vektorskih prostorov.



Slika 2

Primeri 6. 1. Množica $P = (\mathbb{R}^+)^n$ je stožec vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$ in ga opremi s tako imenovano standardno urejenostjo. Relacija $\leq$ je določena z ekvivalenco

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n.$$

Standardno urejeni prostor $\mathbb{R}^n$ je Rieszov. Mrežni operaciji lahko računamo po komponentah.

2. S stožcem $P = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n \cup \{0\}$ postane $\mathbb{R}^n$ delno urejen vektorski prostor, v katerem velja ekvivalenca

$$(x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 < y_1, \dots, x_n < y_n.$$

Ta prostor ni Rieszov, čeprav stožec P generira ves prostor $\mathbb{R}^n$.

3. Stožec

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ ali } (\exists k : x_k > 0 \text{ in } x_i = 0 \text{ za vsak } i < k)\}$$

določa na $\mathbb{R}^n$ tako imenovano *leksikografsko urejenost*. Zanja velja

$$(x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n)$$

natanko takrat, kadar $x \neq y$ in je $x_k < y_k$ za najmanjši k , pri katerem $x_k \neq y_k$. Leksikografska urejenost je očitno linearna.

4. Naj bo $\mathbb{R}^{n,n}$ vektorski prostor vseh realnih kvadratnih matrik reda $n > 1$. Potem je množica pozitivno semidefinitnih matrik

$$P = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = A^\top, x^\top A x \geq 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}^n\}$$

stožec, ki v $\mathbb{R}^{n,n}$ generira podprostor simetričnih matrik Sim_n . Prostora $\mathbb{R}^{n,n}$ in Sim_n , urejena s stožcem P , nista Rieszova.

Naj bo V končno razsežni realni vektorski prostor in $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ poljubna linearna bijekcija. Evklidsko topologijo lahko s ϕ prenesemo na prostor V , tako da postane ϕ homeomorfizem. Na ta način vsaka linearna bijekcija ϕ generira na V isto topologijo (glej na primer [4]), ki jo bomo v nadaljevanju imenovali *standardna topologija* prostora V . Ker vsaka norma na V določa standardno topologijo, bomo pri dokazovanju navadno predpostavili, da je V normiran. Zaprto kroglo s polmerom r in s središčem v 0 bomo zaznamovali s K_r , torej $K_r = \{x \in V : \|x\| \leq r\}$.

Zabeležimo topološko karakterizacijo stožcev, ki generirajo ves končno razsežni prostor.

Trditev 7. *Naj bo P stožec končno razsežnega prostora V , opremljenega s standardno topologijo. Potem P generira V natanko takrat, kadar ima neprazno notranjost.*

Dokaz. Naj P generira V in naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza prostora V . Potem zaradi $P - P = V$ velja $v_i = x_i - y_i$, kjer je $x_i \in P$ in $y_i \in P$ za indekse $i = 1, \dots, n$. Iz ogrodja $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ izberimo bazo $z_1, \dots, z_n$ prostora V . Izomorfizem $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$, opredeljen s predpisom

$$\phi(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i z_i,$$

preslika $(\mathbb{R}^+)^n$ v P , saj so vsi z_i v P . Ker je ϕ homeomorfizem in točka $(1, \dots, 1)$ leži v notranjosti stožca $(\mathbb{R}^+)^n$, njena slika $\sum_{i=1}^n z_i$ leži v notranjosti stožca P .

Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da je x notranja točka stožca P . Izberimo število $\varepsilon > 0$, tako da za vsak vektor y iz krogle $K_\varepsilon = \{y \in V : \|y\| \leq \varepsilon\}$ velja $x + y \in P$. Potem za vsak $y \in K_\varepsilon$ velja

$$y = (x + \tfrac{1}{2}y) - (x - \tfrac{1}{2}y) \in P - P.$$

Od tod zaradi $V = \mathbb{R}^+ K_\varepsilon$ sledi $V = P - P$, torej P generira V . ■

Naj bo M podmnožica končno razsežnega vektorskega prostora V . Notranjost množice M v podprostoru (s standardno topologijo), ki ga razpenja M v prostoru V , imenujemo *relativna notranjost* in zaznamujemo z $\text{rel int } M$.

Posledica 8. *Vsak stožec končno razsežnega vektorskega prostora ima neprazno relativno notranjost.*

2. Končno razsežni arhimedski vektorski prostori

Arhimedsko lastnost realne osi lahko na različne načine posplošimo na delno urejene vektorske prostore. Najprej opredelimo in si oglejmo najbolj neposredno posplošitev.

Definicija 9. Delno urejeni vektorski prostor V (oziroma njegov pozitivni stožec) ima lastnost A_0 , kadar za vsak $x > 0$ in vsak $y > 0$ iz V obstaja tak $n \in \mathbb{N}$ (odvisen od x in y), da je $nx > y$.

Neposredno iz definicije sledi, da se lastnost A_0 delno urejenega vektorskega prostora deduje na podprostor, opremljen z inducirano urejenostjo.

Kateri stožci končno razsežnega vektorskega prostora imajo lastnost A_0 ? Na sliki 1 sta le dva takšna stožca, (c) in (d). Bralec se lahko takoj prepriča, da ima v primeru 6 le delno urejeni prostor 2 lastnost A_0 . V vseh teh primerih stožec vsebuje eno samo točko s svojega roba, in sicer točko 0. Podoben rezultat velja tudi v splošnem primeru.

Izrek 10. *Netrivialno delno urejen končno razsežni vektorski prostor V s pozitivnim stožcem P ima lastnost A_0 natanko takrat, kadar vsak strogo pozitiven element leži v relativni notranjosti stožca P .*

Dokaz. Ker je stožec P netrivialen, iz posledice 8 sledi, da njegova relativna notranjost ni prazna. Predpostavimo, da ima V lastnost A_0 in vzemimo poljuben $x \in P \setminus \{0\}$ ter poljuben $y \in \text{rel int } P$. Zaradi A_0 obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $nx > y$. Izberimo dovolj majhno število $\varepsilon > 0$, da je

$$y + K_\varepsilon \cap (P - P) \subseteq P.$$

Potem za vsak $z \in K_{\varepsilon/n} \cap (P - P)$ velja $y + nz \in P$ in zato

$$x + z = (x - \tfrac{1}{n}y) + (\tfrac{1}{n}y + z) \in P + P \subseteq P.$$

Od tod sledi, da leži x v relativni notranjosti stožca P .

Za dokaz nasprotne smeri ekvivalence predpostavimo, da velja $P \setminus \{0\} \subseteq \text{relint } P$, in vzemimo poljubna elementa u in v iz $P \setminus \{0\}$. Potem obstaja tako število $\varepsilon > 0$, da je $u + K_\varepsilon \cap (P - P) \subseteq P$. Za dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ tedaj velja $u - \frac{1}{n-1}v \in P$, od tod pa že sledi $nu > v$. ■

Za Rieszov prostor je lastnost A_0 zelo restriktivna. Velja namreč naslednji rezultat.

Izrek 11. *Netrivialen Rieszov prostor V z lastnostjo A_0 je enorazsežen in tedaj izomorfen $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da je prostor V linearno urejen. Denimo, da elementa x in y iz V nista primerljiva. Potem $z = x - y$ ustreza pogoju $z^+ > 0$ in $z^- > 0$, zato obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $nz^+ > z^-$. Od tod sledi $\frac{1}{n}z^- \leq z^+ \wedge z^- = 0$, kar pa ni res. Prostor V je torej res linearno urejen.

Vzemimo zdaj poljubna elementa $u > 0$ in $v > 0$. Množica $M = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda u > v\}$ zaradi lastnosti A_0 ni prazna. Ker je navzdol omejena z 0, obstaja $r := \inf M$. Če bi veljalo $ru > v$, bi za dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ imeli $n(ru - v) > u$ in zato $(r - \frac{1}{n})u > v$. To ni res, zato je $ru \leq v$. Podobno bi v primeru $ru < v$ našli tak $n \in \mathbb{N}$, da bi veljalo $n(v - ru) > u$, in tako prišli do protislovja $(r + \frac{1}{n})u < v$. Torej je $ru = v$. Poljubna pozitivna elementa sta linearno odvisna, odkoder sledi, da je prostor V enorazsežen. ■

Pojem arhimedske urejenosti je torej smiselno (vsaj za Rieszove prostore) posplošiti še na kak drug način kot z lastnostjo A_0 . Oglejmo si tri takšne posplošitve.

Definicija 12. Delno urejen vektorski prostor V s pozitivnim stožcem P ima lastnost A_1 , kadar velja sklep:

če je $x, y \in V$ in $nx \leq y$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ potem je $x \leq 0$,

lastnost A_2 , kadar velja sklep:

če je $x, y \in V$ in $nx \leq y$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$ potem je $x = 0$,

in lastnost A_3 , kadar velja sklep:

če je $x, y \in P$ in $nx \leq y$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ potem je $x = 0$,

Iz lastnosti A_1 očitno sledi A_2 , iz A_2 pa A_3 . Brez težav se lahko prepričamo, da tudi iz lastnosti A_0 sledi A_3 . Že s sliko 1 se lahko prepričamo, da so vse štiri lastnosti različne in da je delno urejen vektorski prostor lahko brez njih. Če prostor $\mathbb{R}^2$ uredimo s stožcem (a), ima lastnost A_1 , nima pa lastnosti A_0 . Če ga uredimo s stožcem (b) ali (c), ima lastnost A_2 , nima pa lastnosti A_1 , če pa je urejen s stožcem (d), ima lastnost A_3 , vendar nima lastnosti A_2 . Stožec (e) določa na $\mathbb{R}^2$ linearno urejenost, ki nima nobene od omenjenih lastnosti. Bralec lahko za vajo premisli, kako je s temi lastnostmi v prostorih iz primera 6, ter dokaže, da se vse dedujejo na podprostore.

V Rieszovem prostoru je z navedenimi posplošitvami arhimedske lastnosti manj sitnosti. Kako je z lastnostjo A_0 , zvemo iz izreka 11, zato primerjajmo le lastnosti A_1 , A_2 in A_3 . Vzemimo v ta namen elementa x in y Rieszovega prostora V z lastnostjo A_3 , ki za vsak $n \in \mathbb{N}$ ustrezata pogoju $nx \leq y$. Potem je $nx^+ \leq y^+$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in zato $x^+ = 0$. Torej velja $x \leq 0$, prostor V pa ima potemtakem lastnost A_1 . Od tod seveda takoj sledi, da se vse tri lastnosti ujemajo. Kadar ima Rieszov prostor lastnost A_1 , A_2 ali A_3 , pravimo, da je *arhimedski*.

Končno razsežne arhimedske Rieszove prostore je tik pred drugo svetovno vojno karakteriziral ruski matematik Judin [1]. Dokazal je naslednji pomemben rezultat, ki ga tu navajamo brez dokaza.

Izrek 13. *Končno razsežen arhimedski Rieszov prostor dimenzije n je izomorfen standardno urejenemu prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz izreka 13, ki pa se precej razlikuje od Judinovega, lahko bralec najde v knjigi [2]. Lotimo se spet lastnosti A_1 , A_2 in A_3 v splošnem končno razsežnem prostoru. Pri karakterizaciji delno urejenih prostorov z lastnostjo A_1 oziroma A_2 si bomo pomagali z naslednjim rezultatom.

Lema 14. *Naj bo P stožec v končno razsežnem vektorskem prostoru V , opremljenem s standardno topologijo. Če je x relativno notranja točka stožca P in y točka iz njegovega zaprtja $\overline{P}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $x + ny \in P$.*

Dokaz. Naj bo število $\varepsilon > 0$ dovolj majhno, da je množica $(x + K_\varepsilon) \cap (P - P)$ vsebovana v stožcu P . Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo $y_n \in (y + K_{\varepsilon/n}) \cap P$. Od tod zaradi $y \in \overline{P} \subseteq P - P$ (podprostor $P - P$ je končno razsežen in zato zaprt) sledi

$$z_n = x + n(y - y_n) \in (x + K_\varepsilon) \cap (P - P) \subseteq P$$

in zato

$$x + ny = z_n + ny_n \in P + \mathbb{R}^+ P = P$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. ■

Izrek 15. *Naj bo V končno razsežen delno urejen vektorski prostor, opremljen s standardno topologijo. Potem veljajo naslednje ekvivalence:*

- (a) *V ima lastnost A_1 natanko takrat, kadar je stožec P zaprt.*
- (b) *V ima lastnost A_2 natanko takrat, kadar je zaprtje $\overline{P}$ stožec.*
- (c) *V ima lastnost A_3 natanko takrat, kadar velja $P \cap (-\overline{P}) = \{0\}$.*

Dokaz. (a). Naj ima prostor V lastnost A_1 . Dokazati moramo inkluzijo $\overline{P} \subseteq P$. Vzemimo poljuben $y \in \overline{P}$. Po posledici 8 stožec P vsebuje relativno notranjo točko x , torej po lemi 14 za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $n(-y) \leq x$ in tedaj zaradi A_1 velja $y \in P$.

Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da je stožec P zaprt in da za elementa x in y iz V ter vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $nx \leq y$. Potem je $\frac{1}{n}y - x \in P$, zaradi zaprtosti P pa od tod sledi

$$-x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}y - x) \in P,$$

torej velja $x \leq 0$.

(b). Brez težav se lahko prepričamo, da je množica $\overline{P}$ zaprta za seštevanje in za množenje s pozitivnimi števili. Naj ima prostor V lastnost A_2 . Vzemimo poljuben element $y \in \overline{P} \cap (-\overline{P})$, spomnimo se, da P po posledici 8 vsebuje relativno notranjo točko x , in uporabimo lemo 14 za elementa $\pm y \in \overline{P}$. Dobimo $x \pm ny \in P$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ker pa ima V lastnost A_2 , od tod sledi $y = 0$. Zaprtje $\overline{P}$ je torej stožec.

Dokažimo še nasprotno implikacijo. Naj bo $\overline{P}$ stožec, za elementa x in y iz V ter vsak $m \in \mathbb{Z}$ pa naj velja $mx \leq y$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\frac{1}{n}y \pm x \in P$ in zato $\pm x \in \overline{P}$. Ker je $\overline{P}$ stožec, od tod sledi $x = 0$, torej ima V lastnost A_2 .

(c). Naj presek $P \cap (-\overline{P})$ vsebuje neničelni element u , v pa naj bo poljuben element iz relativne notranjosti stožca P . Potem elementa $x = v$ in $y = -u$ ustrezata pogoju leme 14, torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $v - nu \in P$ in tedaj $0 < nu \leq v$. Prostor V potemtakem nima lastnosti A_3 .

Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da je $P \cap (-\overline{P}) = \{0\}$, in vzemimo pozitivna elementa x in y iz V , ki za vsak $n \in \mathbb{N}$ ustrezata pogoju $nx \leq y$. Potem je $x \in P$ in $\frac{1}{n}y - x \in P$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato $x \in P \cap (-\overline{P})$. Torej velja $x = 0$, prostor V pa ima lastnost A_3 . ■

Lastnosti A_0 in A_1 sta neodvisni, ob izrekih 10 in 15 pa zaslutimo, da sta težko združljivi. Realna os ima obe lastnosti, v naslednjem rezultatu pa bomo spoznali vse delno urejene vektorske prostore z lastnostma A_0 in A_1 .

Trditev 16. *Naj bo V delno urejen vektorski prostor s pozitivnim stožcem P . Potem ima V lastnosti A_0 in A_1 natanko takrat, kadar obstaja tak element $x \in V$, da velja $P = \mathbb{R}^+x$. Če stožec P generira prostor V in ni trivialen, je V izomorfen standardno urejeni realni osi $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Zadošča dokazati, da P ne vsebuje dveh linearno neodvisnih vektorjev. Denimo torej, da sta vektorja x in y iz V linearno neodvisna in pozitivna. Dvorazsežni podprostor U , napet na x in y ter opremljen z inducirano urejenostjo, ima lastnosti A_0 in A_1 . Stožec $P \cap U$ generira U , zato po izreku 10 vsebuje eno samo točko s svojega roba, po izreku 15 pa je zaprt. Če upoštevamo klasifikacijo po definiciji 5, vidimo, da je stožec P bodisi trivialen bodisi poltrak s krajiščem 0. ■

LITERATURA

- [1] A. I. Judin, *Rešenje dvouh problem teorii poluuporjadočennyh prostranstv*, Dokl. AN SSSR **23** (1939), 418–422.
- [2] B. Lavrič, *Delno urejeni vektorski prostori*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995.
- [3] N. Prijatelj, *Matematične strukture II*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1967.
- [4] A. Suhadolc, *Linearni topološki prostori*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1979.
- [5] I. Vidav, *Algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1989.

BARVANJE POVEZAV GRAFA, LATINSKI KVADRAT IN PROBLEM URNIKA

JASNA ČER-TITAN

Math. Subj. Class. (1991): 05C15, 05B15, 90C27.

V članku najprej predstavimo uravnoteženo barvanje povezav grafov. V nadaljevanju obravnavamo redukcijo latinskih kvadratov, osnutek pravokotnika in interpretacijo tega na problemu urnika.

EDGE COLOURINGS, LATIN SQUARES AND THE TIMETABLE PROBLEM

Balanced edge colourings are described and applied to reductions of latin squares and outline rectangles. It is also demonstrated how these results can be interpreted in the school timetable problem.

1. Uvod

Urniki so na današnjih šolah problem, ki dela sive lase tako učiteljem, ki ga ob množici zahtev poskušajo čimbolj približati idealnemu, kot učencem, katerih želje so vedno drugačne od realnosti. Vsak človek ve, da na svetu ni nobena stvar idealna. Tudi urnik ni izjema. Obstajajo pa določeni pripomočki oz. metode, s katerimi lahko stvarino (v tem primeru urnik) poenostavimo in si tako olajšamo pot sestavljanja. Skrajšati pa poti ne moremo. Obstajajo določene metode oz. pripomočki, ki nam skušajo olajšati problem razporejanja učiteljev in razredov v proste učilnice v času, ko na šoli poteka pouk, t.j. problem urnika.

Pri razporejanju je treba upoštevati razpoložljiva sredstva (specializirane učilnice, projekcijska sredstva, računalniška oprema, ...) in druge podatke (število ur pouka v posameznem dnevu na šoli, število ur, ki jih ima posamezen učitelj v posameznem razredu, ...).

Ker ima problem urnika veliko pogojev (zahtev), ga lahko vidimo kot več optimizacijskih problemov, [6], [7], [10], ki jih v splošnem ne moremo združiti v en sam problem, ker so kriteriji za ciljno funkcijo lahko različni. Naj navedem le nekaj primerov: razredi naj nimajo prostih ur, učitelji naj imajo kvečjemu eno ali dve prosti uri na teden, naravoslovni predmeti naj bodo razporejeni v jutranjih urah, nekateri učitelji morajo imeti nekatere dneve proste zaradi drugih obveznosti zunaj šole, predmeti z več urami na teden morajo biti enakomerno razporejeni v tednu, šola naj bo odprta minimalni čas, in še bi lahko naštevali.

Obstaja splošen model [5], kjer je problem urnika definiran kot urejena enajsterka:

$$\langle T, C, W, p, E, L, g, h, r, I, A_0 \rangle,$$

pri čemer je T (končna) množica učiteljev, C (končna) množica razredov, $W = \{\text{Po, To, Sr, Če, Pe}\}$, $p : W \rightarrow \mathbb{N}$ in $p(w)$ pomeni število ur pouka v dnevu w , E (končna) množica vseh učilnic,

$$L \subseteq (2^T \setminus \{\emptyset\}) \times (2^C \setminus \{\emptyset\}) \times (2^E) \times \mathbb{N}$$

in pomeni množico vseh različnih predmetov, $g : T \times W \rightarrow \mathbb{N}$, kjer $g(t, w) = m$ pomeni, da učitelj t na dan w izvaja do m ur pouka, $h : E \rightarrow \mathbb{N}$, kjer $h(e)$ definira dnevno zmogljivost vsake učilnice, $r : L \rightarrow \mathbb{N}$, kjer $r(l) = q$ pomeni, da je predmet l q -krat na teden, $I \subseteq T \times C \times E \times W \times \mathbb{N}$ pomeni vse razvrstitve, ki so prepovedane, in končno je $A_0 \subseteq L \times W \times \mathbb{N}$, kjer $(l, w, i) \in A_0$ pomeni, da predmet l na dan w izvajamo od i -te ure dalje.

Ta splošna formulacija se težko napiše, težje posluša in še težje prebere – žal je preveč zahtevna, da bi lahko našli enostaven in učinkovit algoritem za izdelavo urnika. Zato so mnogi avtorji vpeljali različne poenostavljene modele problema urnika. Glej [2], [5], [8], [9].

Oglejmo si npr. Gotliebov model problema urnika razred–učitelj [9], kjer je $T = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha\}$ množica učiteljev, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_\beta\}$ množica razredov in $H = \{h_1, h_2, \dots, h_\sigma\}$ množica ur. Podana je še matrika zahtev $R = [r_{ij}]$, razsežnosti $\alpha \times \beta$, kjer je $r_{ij} \geq 0$ in je r_{ij} enako številu ur, ko se učitelj t_i sreča z razredom c_j .

Omejitvene zveze so opisane z matrikama D in E :

$D = [d_{ik}]$ je matrika razsežnosti $\alpha \times \sigma$, kjer je

$$d_{ik} = \begin{cases} 1; & \text{učitelj } t_i \text{ v uri } h_k \text{ ne more imeti pouka} \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases} \quad (1)$$

Podobno je $E = [e_{jk}]$ matrika razsežnosti $\beta \times \sigma$, kjer je

$$e_{jk} = \begin{cases} 1; & \text{razred } c_j \text{ v uri } h_k \text{ ne more imeti pouka,} \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases} \quad (2)$$

Prej določena srečanja so opisana z množicami

$$P_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha; \quad j = 1, 2, \dots, \beta.$$

Množice P_{ij} so definirane s

$$P_{ij} = \begin{cases} \{h_k \mid h_k \in H, \text{ učitelj } t_i \text{ se sreča z razredom } c_j \text{ v uri } h_k, \\ \emptyset; & r_{ij} = 0 \text{ ali ni prej določenih srečanj, ki} \\ & \text{vsebujejo } t_i \text{ in } c_j. \quad \blacksquare \end{cases} \quad (3)$$

Če ste zdaj pričakovali mnogo lažji model, se vam pričakovanje ni izpolnilo – tudi ta poenostavljeni model je še vedno težak. Več o tem lahko najdete v [1].

Tukaj zahteve za urnik predstavimo kot osnutek pravokotnika C , urnik sam pa kot latinski kvadrat L , ki ga lahko reduciramo na C . To bi bil lahko poenostavljen Gotliebov model problema urnika razred–učitelj brez omejitvenih zvez in prej določenih srečanj. S pomočjo nepristranskih barvanj povezav dvodelnega grafa pokažemo, da je mogoče C vedno dopolniti do L , da je C redukcija L . Dokaz je konstruktiven, torej nam daje postopek za sestavljanje urnika.

Preostali del članka je sestavljen takole. V naslednjem poglavju definiramo uravnoteženo barvanje povezav grafa G in dokažemo pomemben izrek o eksistenci tega barvanja. V 3. poglavju podamo definicijo latinskega kvadrata, njegove redukcije, definiramo osnutek pravokotnika in dokažemo, da lahko vsak osnutek pravokotnika dopolnimo do latinskega kvadrata. V zadnjem poglavju pa opišemo, kako lahko to uporabimo pri sestavljanju urnika.

2. Uravnoteženo barvanje grafa

Ker so za vsak začetek potrebna orodja za operiranje, bomo tudi tu najprej vpeljali oznake in definicije, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Graf G je urejen par $G(V, E)$, kjer je V končna množica točk, E pa (multi)množica neurejenih parov točk, povezav. Točki sta sosednji, če med njima obstaja povezava. Povezavi sta sosednji, če imata skupno krajišče. Barvanje povezav grafa je takšno prirejanje barv povezavam, da sosednji povezavi dobita različni barvi.

Običajno bomo imeli graf $G = G(V, E)$ z večkratnimi povezavami in brez zank.

Stopnja točke $v \in V$ je število povezav, ki izhajajo iz v .

Dvodelni graf je graf, katerega točke lahko razdelimo v dve množici, v katerih ni nobenih povezav; povezave so samo med tema dvema množicama.

Sprehod v grafu je končno zaporedje $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$, kjer so v_i točke, e_i pa povezave, tako da sta za vsak i , $1 \leq i \leq k$, točki v_{i-1} in v_i krajišči povezave e_i .

Imejmo graf $G = G(V, E)$ z večkratnimi povezavami in brez zank. Naj bo dano poljubno barvanje povezav grafa G , torej sta sosednji povezavi lahko tudi iste barve. Za vsako točko $v \in V$ naj bo $C_i(v)$ množica povezav barve i z enim krajiščem v točki v in za vsak par točk $u, v \in V$, $u \neq v$, naj bo $C_i(u, v)$ množica povezav med u in v barve i .

Definicija 1. Barvanje povezav grafa G se imenuje nepristransko, če za vse točke $v \in V$ velja

$$(\alpha) \quad \max_{1 \leq i < j \leq k} \left| |C_i(v)| - |C_j(v)| \right| \leq 1,$$

in se imenuje uravnoteženo, če velja (α) in poleg tega za vse pare točk $u, v \in V$, $u \neq v$, velja še

$$(\beta) \quad \max_{1 \leq i < j \leq k} \left| |C_i(u, v)| - |C_j(u, v)| \right| \leq 1. \quad \blacksquare$$

Torej, povedano bolj po domače: barvanje povezav je nepristransko, če se barve pojavljajo, kolikor je mogoče enakomerno v vsaki točki, in je uravnoteženo, če je nepristransko in so barve porazdeljene, kolikor je mogoče enakomerno na vsakem paru sosednjih točk.

V nadaljevanju bomo potrebovali le nepristransko barvanje. Naslednji pomemben izrek za uravnotežena barvanja je dokazal de Werra [11]. Ker dokaz ni nič daljši, kot če bi se izrek nanašal le na nepristranska barvanja, si ga oglejmo v celoti.

Izrek 1. *Poljuben dvodelni graf ima za vsak $k \geq 1$ uravnoteženo barvanje povezav s k barvami.*

Dokaz. Pobarvajmo povezave grafa tako, da bo veljal pogoj (β) . Pogoj (β) se nanaša le na vsak par točk posebej, zato je to seveda mogoče. To barvanje bomo prilagodili tako, da bo veljal pogoj (α) , ne da bi prekršili pogoj (β) .

Predpostavimo, da za neko točko v velja

$$\max_{1 \leq i < j \leq k} \left| |C_i(v)| - |C_j(v)| \right| > 1.$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je ta maksimum dosežen za barvi 1 in 2 in da velja $|C_1(v)| > |C_2(v)| + 1$. Naj bo P maksimalni sprehod $v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_h, v_h$ (kjer je e_i povezava, ki veže v_{i-1} in v_i , $e_i \neq e_j$ za $i \neq j$), za katerega velja:

- (i) e_1 ima barvo 1;
- (ii) $e_1, e_2, \dots, e_h$ imajo izmenoma barve 1 in 2;
- (iii) $|C_1(v_i, v_{i+1})| = \begin{cases} |C_2(v_i, v_{i+1})| + 1; & i \text{ sod,} \\ |C_2(v_i, v_{i+1})| - 1; & i \text{ lih,} \end{cases} \quad (4)$
- (iv) P uporabi le eno povezavo od vsake večkratne povezave. (Posamezne točke pa se lahko pojavijo večkrat v P .)

Točka v ima neko sosedo v_1 , za katero je $|C_1(v, v_1)| = |C_2(v, v_1)| + 1$, ker je $|C_1(v)| > |C_2(v)| + 1$ in velja pogoj (β) . Zato je $h \neq 0$. Ravno tako velja $v_h \neq v_0$, ker v dvodelnem grafu $v_j = v_0$ pomeni, da je j sod in obe barvi bi se pojavili enakokrat. Tako bi po večkratnih povezavah spet prišli v v_0 , od koder bi lahko nadaljevali s sprehodom, ker je $|C_1(v)| > |C_0(v)| + 1$.

Če v sprehodu P zamenjamo barvi 1 in 2, s tem vsaj za ena zmanjšamo število parov barv, za katere je $\left| |C_i(v)| - |C_j(v)| \right|$ maksimalno. To pa ne vpliva na

$$\max_{1 \leq i < j \leq k} \left| |C_i(v_t)| - |C_j(v_t)| \right|,$$

če je $0 < t < h$. Pri tem seveda mora biti izpolnjen pogoj (β) .

Če je h lih, ima e_h barvo 1. Ker je sprehod P maksimalen, je za vsako sosedo x točke v_h število večkratnih povezav (v_h, x) barve 1 večje ali enako številu večkratnih povezav (v_h, x) barve 2. To pomeni, da se barva 1 v točki v_h pojavi vsaj enkrat več kot barva 2, saj je $|C_1(v_{h-1}, v_h)| = |C_2(v_{h-1}, v_h)| + 1$. Kratek razmislek pokaže, da se zaradi tega pri zamenjavi barv 1 in 2 ne poveča količina

$$\max_{1 \leq i < j \leq k} \left| |C_i(v_h)| - |C_j(v_h)| \right|.$$

Podobna trditev velja, če je h sod. S ponavljanjem tega postopka na preostalih točkah v končnem številu korakov dosežemo uravnoteženo barvanje. ■

3. Latinski kvadrati in osnutki pravokotnikov

Pa smo spet na novem začetku, tokrat tretjega poglavja. Ta pa s seboj prinaša seveda nove definicije.

Definicija 2. *Latinski kvadrat* L velikosti n je matrika razsežnosti $n \times n$, katere elementi so simboli $1, 2, \dots, n$, kjer v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopi vsak simbol natanko enkrat. ■

Definicija 3. *Kompozicija* C naravnega števila n je zaporedje $(c_1, c_2, \dots, c_r)$ naravnih števil, za katero velja $c_1 + c_2 + \dots + c_r = n$. ■

Naj bodo $P = (p_1, p_2, \dots, p_u)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_v)$ in $S = (s_1, s_2, \dots, s_w)$ tri dane kompozicije naravnega števila n . To pomeni, da je $n = p_1 + p_2 + \dots + p_u$, $n = q_1 + q_2 + \dots + q_v$ in $n = s_1 + s_2 + \dots + s_w$.

Redukcija latinskega kvadrata L velikosti n po modulu (P, Q, S) je matrika razsežnosti $u \times v$, ki jo dobimo iz L z združitvijo vrstic $p_1 + \dots + p_{i-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_i$, $1 \leq i \leq u$, stolpcev $q_1 + \dots + q_{j-1} + 1, \dots, q_1 + \dots + q_j$, $1 \leq j \leq v$ in simbolov $s_1 + \dots + s_{k-1} + 1, \dots, s_1 + \dots + s_k$, $1 \leq k \leq w$. Bolj natančno vpeljemo pojem redukcije latinskega kvadrata takole:

Za $1 \leq \lambda \leq u$, $1 \leq \mu \leq v$ in $1 \leq \xi \leq n$ naj bo $x(\lambda, \mu, \xi)$ število, ki pove, kolikokrat se simbol ξ pojavi v množici celic

$$\{(i, j) : p_1 + \dots + p_{\lambda-1} + 1 \leq i \leq p_1 + \dots + p_\lambda, \\ q_1 + \dots + q_{\mu-1} + 1 \leq j \leq q_1 + \dots + q_\mu\}$$

in za $1 \leq k \leq w$ naj bo

$$x_k(\lambda, \mu) = x(\lambda, \mu, s_1 + \dots + s_{k-1} + 1) + \dots + x(\lambda, \mu, s_1 + \dots + s_k).$$

Nabralo se je že kar precej stvari, ki pa omogočajo zapis naslednje definicije.

Definicija 4. *Redukcija latinskega kvadrata* L po modulu (P, Q, S) je matrika razsežnosti $u \times v$, katere celice so iz množice z w simboli, npr. $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_w\}$, in kjer celica (λ, μ) vsebuje simbol τ_ν natanko $x_\nu(\lambda, \mu)$ -krat. ■

Treba je poudariti, da celice matrike, ki jo dobimo z redukcijo latinskega kvadrata, tvorijo multimnožice simbolov.

Dobljeno redukcijo latinskega kvadrata L po modulu (P, Q, S) lahko seveda ponovno reduciramo z združitvijo vrstic, stolpcev in simbolov.

Postopek redukcije latinskega kvadrata si oglejmo na primeru. V tabeli 1 je dan latinski kvadrat L , kjer je $n = 11$.

Naj bo $u = 5$, $v = 4$, $w = 3$, $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 3, 2, 2)$, $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (3, 4, 2, 2)$ in $S = (s_1, s_2, s_3) = (4, 2, 5)$. V tabeli 1 je

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tabela 1. Latinski kvadrat L

α, α, α	$\beta, \beta, \beta, \gamma$	γ, γ	α, α
α, α, β	$\gamma, \gamma, \gamma, \gamma$	γ, γ	α, γ
α, β, β	$\gamma, \gamma, \gamma, \gamma$	α, α	α, α
β, β, γ	$\gamma, \gamma, \gamma, \gamma$	α, γ	α, α
β, γ, γ	$\alpha, \alpha, \alpha, \alpha$	α, α	α, β
γ, γ, γ	$\alpha, \alpha, \gamma, \gamma$	α, α	β, β
γ, γ, γ	$\gamma, \gamma, \gamma, \gamma$	α, β	β, γ
α, γ, γ	$\alpha, \alpha, \alpha, \alpha$	β, β	γ, γ
γ, γ, γ	$\alpha, \alpha, \alpha, \beta$	β, γ	γ, γ
α, α, α	$\alpha, \alpha, \alpha, \beta$	γ, γ	γ, γ
α, α, γ	$\beta, \beta, \beta, \gamma$	γ, γ	γ, γ

Tabela 2. Redukcija L po modulu (P, Q, S)

tudi že označena razdelitev celic za redukcijo po modulu (P, Q, S) , kot jo določata P in Q .

Simbole znotraj vsake celice uredimo po velikosti in S nam pove, da 1, 2, 3, 4 zamenjamo z $\alpha = \tau_1$, 5, 6 z $\beta = \tau_2$ ter 7, 8, 9, 10, 11 z $\gamma = \tau_3$. Tako dobimo redukcijo L po modulu (P, Q, S) (glej tabelo 2).

Imejmo matriko C razsežnosti $u \times v$, katere celice so multimnožice simbolov iz množice $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_w\}$. Za λ , $1 \leq \lambda \leq u$, μ , $1 \leq \mu \leq v$ in ν , $1 \leq \nu \leq w$, označimo z ρ_λ število simbolov skupaj s ponovitvami v vrstici λ , s c_μ označimo število simbolov skupaj s ponovitvami v stolpcu μ in s σ_ν označimo število, ki pove, kolikokrat se simbol τ_ν pojavi v C .

Definicija 5. Matrika C je *osnutek pravokotnika*, če za neko naravno število n in za vse λ , $1 \leq \lambda \leq u$, μ , $1 \leq \mu \leq v$ in ν , $1 \leq \nu \leq w$, veljajo naslednje lastnosti:

- (i) n deli ρ_λ , c_μ in σ_ν ;
- (ii) celica (λ, μ) vsebuje $\frac{1}{n^2} \rho_\lambda c_\mu$ simbolov (skupaj s ponavljanji);

- (iii) $\frac{1}{n^2}\rho_\lambda\sigma_\nu$ je število nastopov simbola τ_ν v vrstici λ ;
 (iv) $\frac{1}{n^2}c_\mu\sigma_\nu$ je število nastopov simbola τ_ν v stolpcu μ . ■

Primer za osnutek pravokotnika lahko vidimo v tabeli 2, kjer je $u = 5$, $v = 4$, $w = 3$, $\alpha = \tau_1$, $\beta = \tau_2$ in $\gamma = \tau_3$.

Da ima matrika iz tabele 2 za $n = 11$ vse lastnosti iz definicije 5, lahko prav hitro preverimo. Velja $\rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = \rho_5 = 22$ in $\rho_3 = 33$, $c_1 = 33$, $c_2 = 44$ in $c_3 = c_4 = 22$, $\sigma_1 = 44$, $\sigma_2 = 22$ in $\sigma_3 = 55$. Lastnosti (i)–(iv) definicije 5 lahko sedaj neposredno preverimo.

Trditev 2. [4] *Redukcija latinskega kvadrata L po modulu (P, Q, S) je osnutek pravokotnika. Pri tem velja:*

- (v) $P = (p_1, p_2, \dots, p_u) = (\frac{\rho_1}{n}, \frac{\rho_2}{n}, \dots, \frac{\rho_u}{n})$;
 (vi) $Q = (q_1, q_2, \dots, q_v) = (\frac{c_1}{n}, \frac{c_2}{n}, \dots, \frac{c_v}{n})$;
 (vii) $S = (s_1, s_2, \dots, s_w) = (\frac{\sigma_1}{n}, \frac{\sigma_2}{n}, \dots, \frac{\sigma_w}{n})$;
 (viii) $\sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^v c_\mu = \sum_{\nu=1}^w \sigma_\nu = n^2$.

Dokaz. Da je redukcija latinskega kvadrata L po modulu (P, Q, S) osnutek pravokotnika, je jasno iz definicij 4 in 5. Iskano naravno število n je razsežnost latinskega kvadrata L .

Ker je $\rho_\lambda = np_\lambda$ za vsak λ , $1 \leq \lambda \leq u$, $c_\mu = nq_\mu$ za vsak μ , $1 \leq \mu \leq v$ in $\sigma_\nu = ns_\nu$ za vsak ν , $1 \leq \nu \leq w$, veljajo zveze (v), (vi) in (vii).

Pokažimo še, da velja tudi (viii). Ker so $P = (p_1, p_2, \dots, p_u)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_v)$ in $S = (s_1, s_2, \dots, s_w)$ kompozicije števila n , velja

$$\sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda = \sum_{\lambda=1}^u np_\lambda = n \sum_{\lambda=1}^u p_\lambda = n \cdot n = n^2$$

in podobno za drugi dve enakosti v (viii). ■

Veljavnost trditve 2 smo videli tudi na primeru iz tabele 2.

Z uporabo izreka 1 dobimo naslednji rezultat:

Izrek 3. [4] *Za vsak osnutek pravokotnika C obstajajo latinski kvadrat L in kompozicije P , Q ter S , tako da je C redukcija latinskega kvadrata L po modulu (P, Q, S) .*

Dokaz. Če z x označimo število elementov v C , je

$$x = \sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^v c_\mu = \sum_{\lambda=1}^u \sum_{\mu=1}^v \frac{1}{n^2} \rho_\lambda c_\mu.$$

Potem je

$$x = \frac{1}{n^2} \sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda \left(\sum_{\mu=1}^v c_\mu \right) = \frac{x}{n^2} \sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda = \frac{x^2}{n^2}.$$

Zato je $x = n^2$.

Predpostavimo sedaj, da je $u < n$. Pokazali bomo, da lahko osnutek pravokotnika C dobimo iz osnutka pravokotnika C' razsežnosti $(u+1) \times v$ z združitvijo celic dveh vrstic, in sicer tako, da vsak par celic v teh dveh vrsticah, ki sta v istem stolpcu, poistovetimo. Z drugimi besedami to pomeni, da naredimo redukcijo C' po modulu (P^*, I, I) , kjer je P^* kompozicija, ki ima razen ene dvojke same enice, I pa trivialna kompozicija števila n , $I = (1, 1, \dots, 1)$. Če ta postopek ponavljamo na vrsticah, podobno na stolpcih in nato še na simbolih, vidimo, da lahko C dobimo iz osnutka pravokotnika razsežnosti $n \times n$ na n simbolih; to je z redukcijo latinskega kvadrata po modulu (P, Q, S) za neke kompozicije P , Q in S .

Ker je $u \neq n$, n deli $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_u$ in $\frac{\sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda}{n} = n$, obstaja vsaj en λ , za katerega je $\frac{\rho_\lambda}{n} > 1$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\frac{\rho_u}{n} \geq 2$. Želimo tvoriti osnutek pravokotnika C' z razdelitvijo zadnje vrstice v C v dve novi vrstici. V ta namen konstruiramo dvodelni graf G z množicama točk $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v\}$ in $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_w\}$, kjer je točka γ_μ povezana s točko τ_ν z y povezavami natanko tedaj, ko se simbol τ_ν pojavi y -krat v celici (u, μ) v C . Potem je stopnja točke γ_μ število simbolov v celici (u, μ) , vključno s ponavljanji, t.j. $\frac{\rho_u c_\mu}{n^2}$. Stopnja točke τ_ν pa je število nastopov simbola τ_ν v vrstici u v C , t.j. $\frac{\rho_u \sigma_\nu}{n^2}$.

Sedaj lahko po izreku 1 grafu G nepristransko pobarvamo povezave z $\frac{\rho_u}{n}$ barvami, npr. $1, 2, \dots, \frac{\rho_u}{n}$. Potem ima vsaka točka γ_μ natanko

$$\frac{n}{\rho_u} \left(\frac{1}{n^2} \rho_u c_\mu \right) = \frac{1}{n} c_\mu$$

povezav barve 1 in vsaka točka τ_ν ima natanko

$$\frac{n}{\rho_u} \left(\frac{1}{n^2} \rho_u \sigma_\nu \right) = \frac{1}{n} \sigma_\nu$$

povezav barve 1. Sedaj razdelimo vrstico u v C v dve vrstici u^* (to bo vrstica $u+1$ v C') in u^{**} (to bo vrstica u v C') tako, da postavimo x -krat simbol τ_ν v celico (u^*, μ) natanko tedaj, ko x povezav barve 1 povezuje točki γ_μ in τ_ν , in da postavimo y -krat simbol τ_ν v celico (u^{**}, μ) natanko tedaj, ko y povezav barve, različne od 1, povezuje točki γ_μ in τ_ν .

Preverimo sedaj, da je C' osnutek pravokotnika. Naj bo $\rho'_\lambda = \rho_\lambda$, $1 \leq \lambda < u$, $\rho'_u = \rho_u - n$ in $\rho'_{u+1} = n$. Nadalje naj bo $c'_\mu = c_\mu$, $1 \leq \mu \leq v$, $\tau'_\nu = \tau_\nu$ in $\sigma'_\nu = \sigma_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$. Potem seveda n deli ρ'_λ , c'_μ in σ'_ν . Tako je pogoj (i) definicije 5 za C' izpolnjen. Pogoj (ii) definicije 5 velja, ker celica (u, μ) v C' vsebuje

$$\frac{1}{n^2} c_\mu (\rho_u - n) = \frac{1}{n^2} c'_\mu \rho'_u$$

simbolov in celica $(u + 1, \mu)$ v C' vsebuje

$$\frac{1}{n}c_\mu = \frac{1}{n^2}\rho'_{u+1}c'_\mu$$

simbolov. Prav tako velja pogoj (iv). Vsak simbol τ_ν se v vrstici u v C' pojavi

$$\frac{1}{n^2}\sigma_\nu(\rho_u - n) = \frac{1}{n^2}\rho'_u\sigma'_\nu$$

-krat in v vrstici $(u + 1)$ v C' se pojavi

$$\frac{\sigma_\nu}{n} = \frac{1}{n^2}\rho'_{u+1}\sigma'_\nu$$

-krat. Tako je izpolnjen tudi pogoj (iii) definicije 5 za vrstici u in $u + 1$ v C' . Ker se preostale vrstice C' ujemajo z vrsticami v C , velja pogoj (iii) za celoten C' . Tako je C' osnutek pravokotnika. ■

4. Uporaba pri problemu urnika

Šele zdaj pa prihajamo v del, zaradi katerega lahko članek nosi naslov, ki ga ima. Tudi tu, hočeš nočeš, ne gre brez definicij.

3	1,2	4,5						8,9		6,7
6		7		1,2,3		8,9	4,5			
		2,3	6	4	9			1	7,8	5
9	3		4		7,8	5,6				1,2
1,2	8				4	3	6,7		5	9
8				9		1,4		5,6,7	2,3	
		1			5,6	2,7	8,9	3,4		
5	6	8	7,9		1			2		3,4
	7,9		1,2,3	5					4,6	8
4,7		6	5,8				2,3		1,9	
	4,5	9		6,7,8	2,3		1			

Tabela 3. Urnik T

Definicija 6. Urnik $T = [t_{ij}]$ je matrika razsežnosti $n \times n$, kjer so t_{ij} iz množice simbolov $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_b\}$, $b \leq n$. V vsaki celici (i, j) je lahko več simbolov (tudi nič), toda v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu se vsak simbol pojavi natanko enkrat (vrstice ustrezajo učiteljem, stolpci razredom, simboli pa uram). ■

Tako definiran urnik je zelo podoben latinskemu kvadratu. Razlike so minimalne: pri urniku je število različnih simbolov lahko manjše od števila vrstic oz. stolpcev; v latinskem kvadratu je v vsaki celici natanko en simbol,

medtem ko je v urniku v posamezni celici lahko več simbolov, lahko pa so tudi prazne. (Primer urnika glej v tabeli 3.)

Definicija 7. Redukcija urnika T po modulu (P, Q, S) je matrika razsežnosti $u \times v$, ki jo iz T dobimo tako, kot je opisano v definiciji 4. ■

Postopek redukcije urnika si oglejmo na naslednjem primeru. Vzemimo urnik T iz tabele 3, kjer je $n = 11$ in $b = 9$.

Naj bo $u = 5$, $v = 4$, $w = 3$, $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 3, 2, 2)$, $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (3, 4, 2, 2)$ in $S = (s_1, s_2, s_3) = (4, 2, 3)$. Podobno kot pri latinskem kvadratu je v tabeli 3 že označena razdelitev celic za redukcijo po modulu (P, Q, S) , kot jo določata P in Q . Simbole znotraj vsake celice spet uredimo po velikosti in S nam pove, da 1, 2, 3, 4 zamenjamo z $\alpha = \tau_1$, 5, 6 z $\beta = \tau_2$ ter 7, 8, 9 z $\gamma = \tau_3$. Tako dobimo redukcijo T po modulu (P, Q, S) (glej tabelo 4).

$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\gamma$	$\alpha\alpha\alpha\gamma\gamma$	$\alpha\beta\gamma\gamma$	$\beta\gamma$
$\alpha\alpha\alpha\gamma$	$\alpha\alpha\beta\beta\beta\gamma\gamma\gamma$	α	$\alpha\alpha\beta\gamma\gamma$
$\alpha\alpha\alpha\gamma\gamma$	$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$	$\alpha\alpha\beta\beta\beta\gamma\gamma\gamma\gamma$	$\alpha\alpha\beta\gamma$
$\beta\beta\gamma\gamma\gamma$	$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\gamma\gamma$	α	$\alpha\alpha\alpha\beta\gamma$
$\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$	$\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\gamma$	$\alpha\alpha\alpha$	$\alpha\gamma$

Tabela 4. Redukcija T po modulu (P, Q, S)

Vzemimo sedaj matriko D razsežnosti $u \times v$, katere celice so množice simbolov iz $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_w\}$. Celice so lahko tudi prazne. Za λ , $1 \leq \lambda \leq u$, μ , $1 \leq \mu \leq v$ in ν , $1 \leq \nu \leq w$, označimo z ρ_λ število simbolov skupaj s ponovitvami v vrstici λ , z c_μ označimo število simbolov skupaj s ponovitvami v stolpcu μ in z d_ν označimo število, ki pove, kolikokrat se simbol τ_ν pojavi v D .

Definicija 8. Matrika D je *osnutek urnika*, če za neki naravni števili n in b in za vse λ , $1 \leq \lambda \leq u$, μ , $1 \leq \mu \leq v$ in ν , $1 \leq \nu \leq w$ veljajo naslednje lastnosti:

- (i) b deli ρ_λ in c_μ ;
- (ii) n deli d_ν ;
- (iii) $\frac{\rho_\lambda d_\nu}{nb}$ je število nastopov simbola τ_ν v vrstici λ ;
- (iv) $\frac{c_\mu d_\nu}{nb}$ je število nastopov simbola τ_ν v stolpcu μ . ■

Za osnutek urnika velja analogen rezultat kot trditev 2 za osnutek pravokotnika.

Trditev 4. [3] Redukcija urnika T po modulu (P, Q, S) je osnutek urnika in ima naslednje lastnosti:

- (v) $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_u) = (bp_1, bp_2, \dots, bp_u)$;
- (vi) $(c_1, c_2, \dots, c_v) = (bq_1, bq_2, \dots, bq_v)$;

$$(vii) \quad (d_1, d_2, \dots, d_w) = (ns_1, ns_2, \dots, ns_w);$$

$$(viii) \quad \sum_{\lambda=1}^u \rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^v c_\mu = \sum_{\nu=1}^w d_\nu = nb. \blacksquare$$

V primeru iz tabele 4 je $\rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = \rho_5 = 18$, $\rho_3 = 27$, $c_1 = 27$, $c_2 = 36$, $c_3 = c_4 = 18$, $d_1 = 44$, $d_2 = 22$, $d_3 = 33$. Ker je $\rho_\lambda = bp_\lambda$ in $c_\mu = bq_\mu$, je $b = 9$ in iz $d_\nu = ns_\nu$ dobimo, da je $n = 11$. Lastnosti (iii) in (iv) osnutka urnika sta izpolnjeni. Prav tako veljajo točke (v), (vi), (vii) in (viii) trditve 4.

Z uporabo izreka 1 dobimo analogen rezultat tudi za urnik.

Izrek 5. [3] *Za vsak osnutek urnika D obstaja urnik T in kompozicije P , Q ter S tako, da je D redukcija urnika T po modulu (P, Q, S) . $\blacksquare$*

Ker dokaz izreka 5 poteka enako kot dokaz izreka 3, ga lahko mirno izpustimo. Videli smo, da lahko urnik preoblikujemo podobno kot latinski kvadrat. To preoblikovanje (redukcija) pa nam dá idejo, kako sploh sestavljati urnik. Najprej zasnujemo osnutek urnika, v katerem so upoštevani npr. vsi učitelji slovenskega jezika skupaj, vsi matematiki skupaj, ..., vsi dopoldanski razredi skupaj, vsi popoldanski razredi skupaj, ... Ko menimo, da je osnutek urnika ustrezen, ga dopolnimo do celotnega urnika.

Nekaj sivih las bo tudi po tem članku, saj bi bil svet brez sivih las pač preveč idealen, idealnega pa, kot sem povedala na začetku, ni moč doseči. Upam pa, da jih bo bistveno manj (sivih las namreč), kar bi bil kar dober začetek. Tokrat brez definicij ...

LITERATURA

- [1] J. Čer-Titan: *Urn timer kot optimizacijski problem*, magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta v Mariboru, 1995.
- [2] C. C. Gotlieb: *The construction of class-teacher timetables*, Proceedings IFIP Congress 1962 (Amsterdam, 1963) 73–77.
- [3] A. J. W. Hilton: *School timetables*, Annals of Discrete Math. **11** (1981) 177–188.
- [4] A. J. W. Hilton: *The reconstruction of latin squares with applications to school timetabling and to experimental design*, Mathematical Programming Study **13** (1980) 68–77.
- [5] F. Kitagawa in H. Ikeda: *An existential problem of weight-controlled subset and its application to school timetable construction*, Discrete Math. **72** (1988) 195–211.
- [6] S. Klavžar, M. Lokar, M. Petkovšek in T. Pisanski: *Izbrana poglavja iz računalništva, 2. del, Diskretna optimizacija*, Matematični rokopisi **15**, DMFA SRS, Ljubljana, 1986.
- [7] E. L. Lawler: *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [8] J. Lions: *A counter-example for Gotlieb's method for the construction of school timetables*, Comm. ACM **9** (1966) 697–698.
- [9] G. A. Neufeld in J. Tartar: *Graph coloring conditions for the existence of solutions to the timetable problem*, Comm. ACM **17** (1974) 450–453.
- [10] C. H. Papadimitriou in K. Steiglitz: *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [11] D. de Werra: *On a particular conference scheduling problem*, Canad. J. Operational Res. and Information Processing **13** (1975) 308–315.

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI INTERFERENCA DVEH FOTONOV

JANEZ STRNAD

PACS 42.50.Wm

Dvofotonske interferenčne poskuse omogoča parametrično ojačevanje svetlobe, pri katerem se podvoji valovna dolžina. Izide merjenja pojasni idealiziran poskus. Napovedi je zanimivo primerjati z računom v okviru klasične elektrodinamike in jih podpreti z računom v okviru kvantne elektrodinamike.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS TWO-PHOTON INTERFERENCE

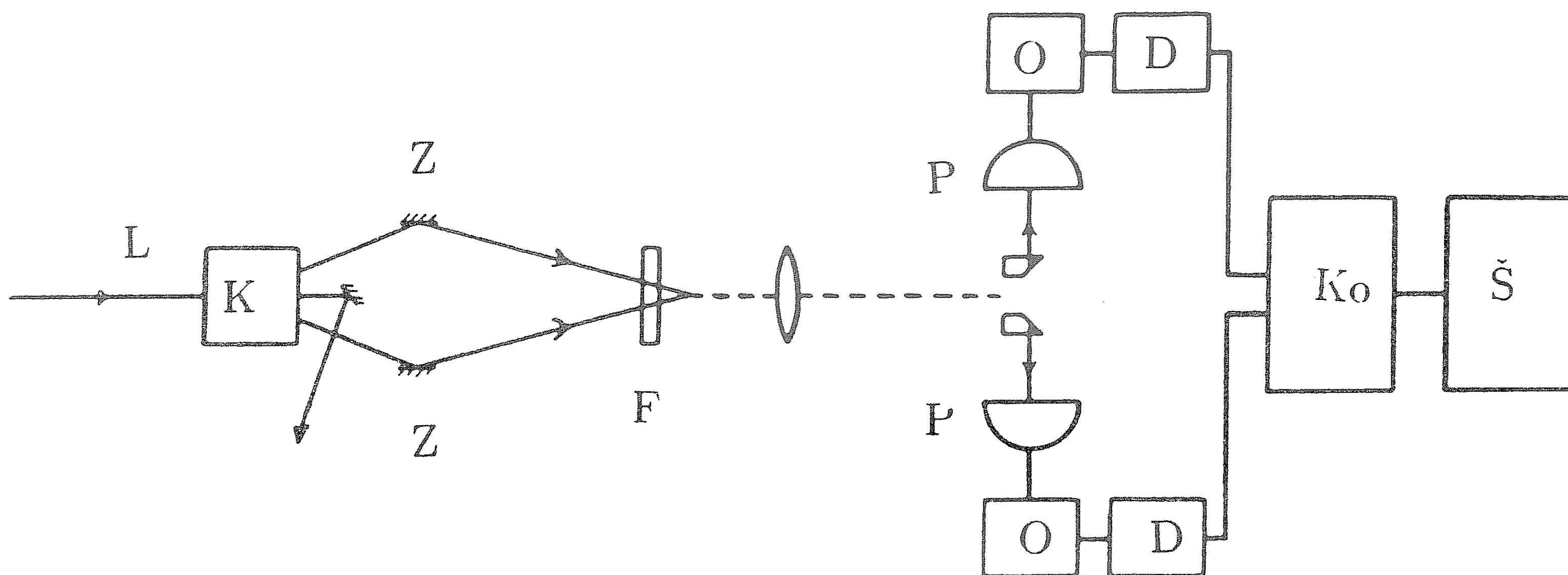
Two-photon interference experiments can be performed by means of down-conversion of light. Measurements can be interpreted by means of an idealized experiment. Predictions are compared with a calculation within classical electrodynamics and backed up with a calculation within quantum electrodynamics.

Nenavadni interferenčni poskusi so doslej zajeli same *enofotonske* in *enodelčne* poskuse. Pri njih merimo gostoto svetlobnega toka ali štejemo fotone ali delce z enim merilnikom. Pri tem o izidu poskusa odloča količina, ki vsebuje produkt dveh amplitud. Preden do kraja izčrpamo zalogo nenavadnih poskusov te vrste, je vredno obdelati tudi kak *dvofotonski* ali *dvodelčni* interferenčni poskus. Pri poskusih te vrste zaznavamo fotone ali delce z dvema merilnikoma in štejemo koincidence. Pri tem o izidu poskusa odloča količina, ki vsebuje produkt štirih amplitud. V zadnjem času so naredili precej posrečenih dvofotonskih interferenčnih poskusov, ki so pripeljali do zanimivih merenj. Po tej poti bomo tudi bolje razumeli ozadje izjav o interferenci enega ali dveh fotonov [1]. Želja, da bi v tem primeru sploh ne uporabljali pojma foton, nas bi spravila v precejšnjo zadrego.

Vse interferenčne poskuse pojasnimo z načelom superpozicije. Pri dvofotonskih in dvodelčnih interferenčnih poskusih imajo bistveno vlogo dvofotonska ali dvodelčna stanja, ki jih je E. Schrödinger pred časom imenoval *prepletena* in jih imel za značilno potezo kvantne mehanike. Do srede osemdesetih let je bilo daleč najpomembnejše prepleteno stanje singletno stanje dveh fotonov ali elektronov [2]. Singletno stanje dveh fotonov nastane na primer po dveh zaporednih prehodih atoma s sevanjem iz vzbujenega stanja s spinom 0 prek vmesnega stanja s spinom 1 v osnovno stanje s spinom 0.

Od srede osemdesetih let dobijo prepleteno stanje na nov način. Z ultravijolično svetlobo obsevajo kristal, katerega dielektričnost je odvisna od jakosti električnega polja, in se v njem zaradi parametričnega ojačevanja podvoji valovna dolžina svetlobe. Misliti si smemo, da foton ultravijolične svetlobe rodi dva fotona rdeče svetlobe v prepletenem stanju. Poskus te vrste sta naredila R. Ghosh in L. Mandel leta 1987 [3].

Svetlobni curek iz ionskega argonovenega laserja z valovno dolžino

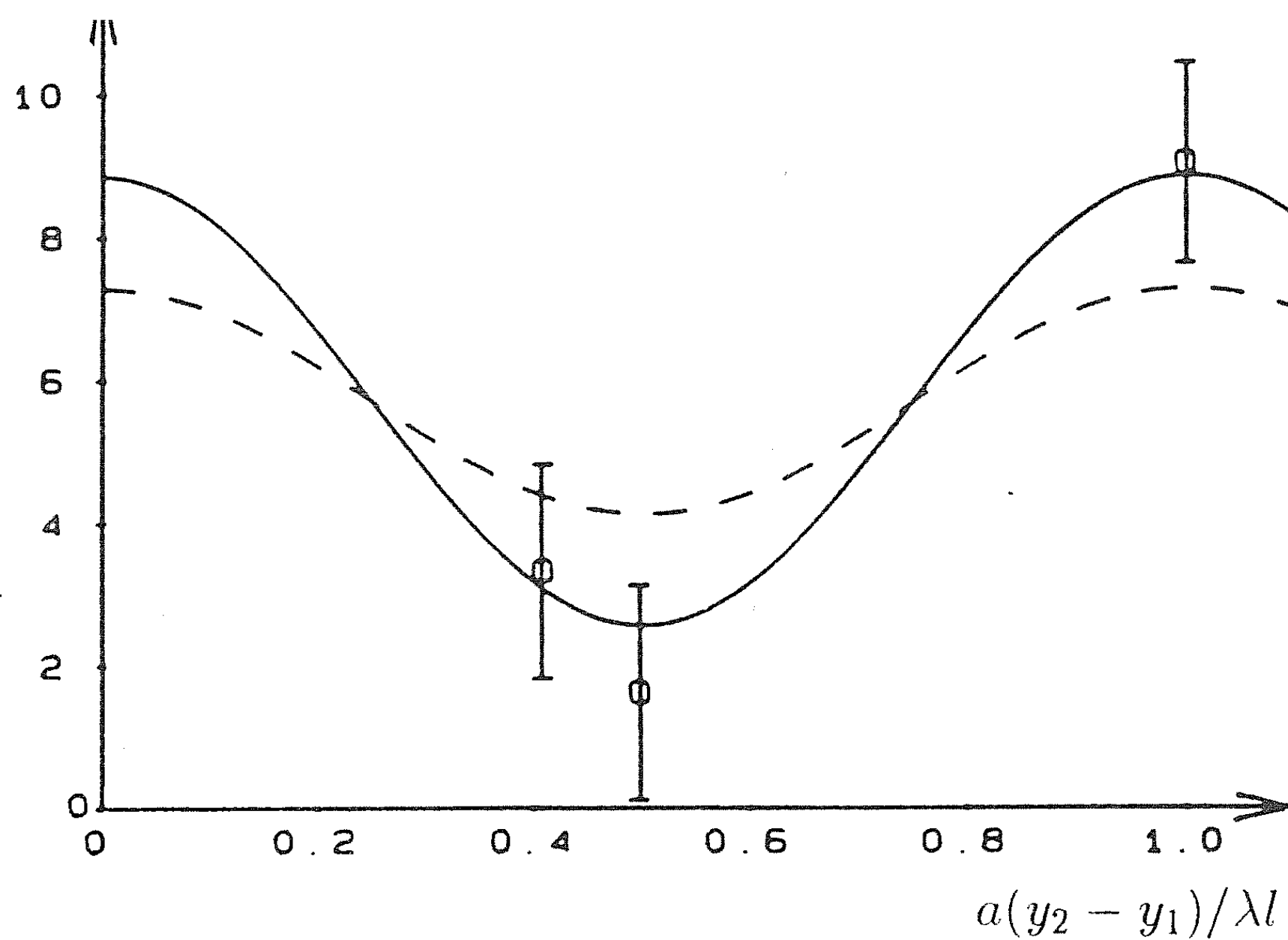


Slika 1. Naprave pri dvofotonskem interferenčnem poskusu R. Ghosha in L. Mandla: L curek ultravijolične svetlobe iz argonovega laserja, K kristal litijevega jodata, Z zrcali, F interferenčni filter, P fotopomnoževalki, O ojačevalnika, D diskriminatorja, Ko konverter, Š koincidenčni števec [3].

351,1 nm je zadel poldrugi centimeter debel kristal litijevega jodata LiIO_3 . Iz njega sta izhajala curka svetlobe z valovno dolžino 702 nm pod kotom $3,3^\circ$ glede na smer vpadne svetlobe (sl. 1). Preostalo ultravijolično svetlobo so izločili z zrcalcem. Curka sta se odbila na zrcalih, šla skozi interferenčni filter, ki je izločil sipano ultravijolično svetlobo, in se sestala na 1,1 m oddaljeni ravnini pod kotom 2° . Z lečo so preslikali to ravnino v drugo ravnino, v kateri so zajeli svetlobo po 0,14 mm debeli stekleni ploščici in jo vodili na fotopomnoževalki. Čelni ploskvi teh ploščic sta imeli vlogo vstopnih zenic obeh merilnikov. Sunke iz merilnikov so ojačili, oblikovali in vodili na vhoda pretvornika. Ta je dal digitalni podatek o času med obema sunkoma. Sunka, ki sta si sledila v manjšem časovnem razmiku od 5 ns, so šteli kot koincidence. Merili so število koincidencev v odvisnosti od razmika vstopnih zenic merilnikov $y_2 - y_1$. Potem ko so izločili naključne koincidence in temni tok fotopomnoževalk, so dobili število pravih koincidencev (sl. 2). Izidi merjenja so se kar dobro prilegali napovedi.

Interferenčne „slike“ pri dvofotonskih poskusih ne moremo zaznati pri opazovanju na enem samem zaslonu. Kamorkoli po zaslonu prestavimo merilnik, povsod prešteje v enakem času enako število fotonov. Dvofotonske interferenčne „slike“ in dvofotonskih interferenčnih „prog“ ni mogoče ujeti na film. V teh zvezah imajo „slika“ in „proge“ drugačen pomen kot pri enofotonskih interferenčnih poskusih. „Slika“ in „proge“ je pri dvofotonskih poskusih mogoče ugotoviti le tako, da hkrati zaznavamo fotone s prvim in z drugim merilnikom in oboje neposredno primerjamo, torej opazujemo koincidence.

Izid pojasnimo najprej z idealiziranim dvofotonskim interferenčnim poskusom [4]. Pet vzporednih zaslonov je postavljenih v enakih razmikih l , po dva in dva levo in desno od srednjega zaslona s svetlobnim izvirom, ki seva na eno in drugo stran. Po skrajnem desnem zaslonu predstavljamo de-



Slika 2. Izid merjenja pri poskusu R. Ghosha in L. Mandla. Na navpično os je naneseno število koincidenč na uro, na vodoravno os pa $(y_2 - y_1)/(\lambda l/a)$ z $\lambda l/a = 0,34$ mm. Sklenjena krivulja ustreza enačbi (4b) z $\Delta y_1 = 0,14$ m in črtkana krivulja klasični napovedi (6). Merjenja se ujemajo s kvantno, ne s klasično napovedjo [3].

sni merilnik, na primer fotopomnoževalko, in po skrajnem levem enak levi merilnik. Med tema zaslonoma je na desni od zaslona z izviro zaslon z vzporednima režama R in S v razmiku a simetrično glede na os in na levi enak zaslon z režama S' in R' (sl. 3). Vzemimo, da v izviru seva atom, ki miruje, hitro drugega za drugim dva fotona s približno enako energijo. Zaradi ohranitve gibalne količine odletita fotona približno v nasprotnih smereh. Če gre desni foton skozi režo R, gre levi skozi rezo R', in če gre desni foton skozi rezo S, gre levi skozi rezo S'. V Schrödingerjevi sliki, v kateri sicer časovno odvisnost prevzamejo valovne funkcije, je za dvofotonski značaj poskusa odločilno prepleteno stanje [4]:

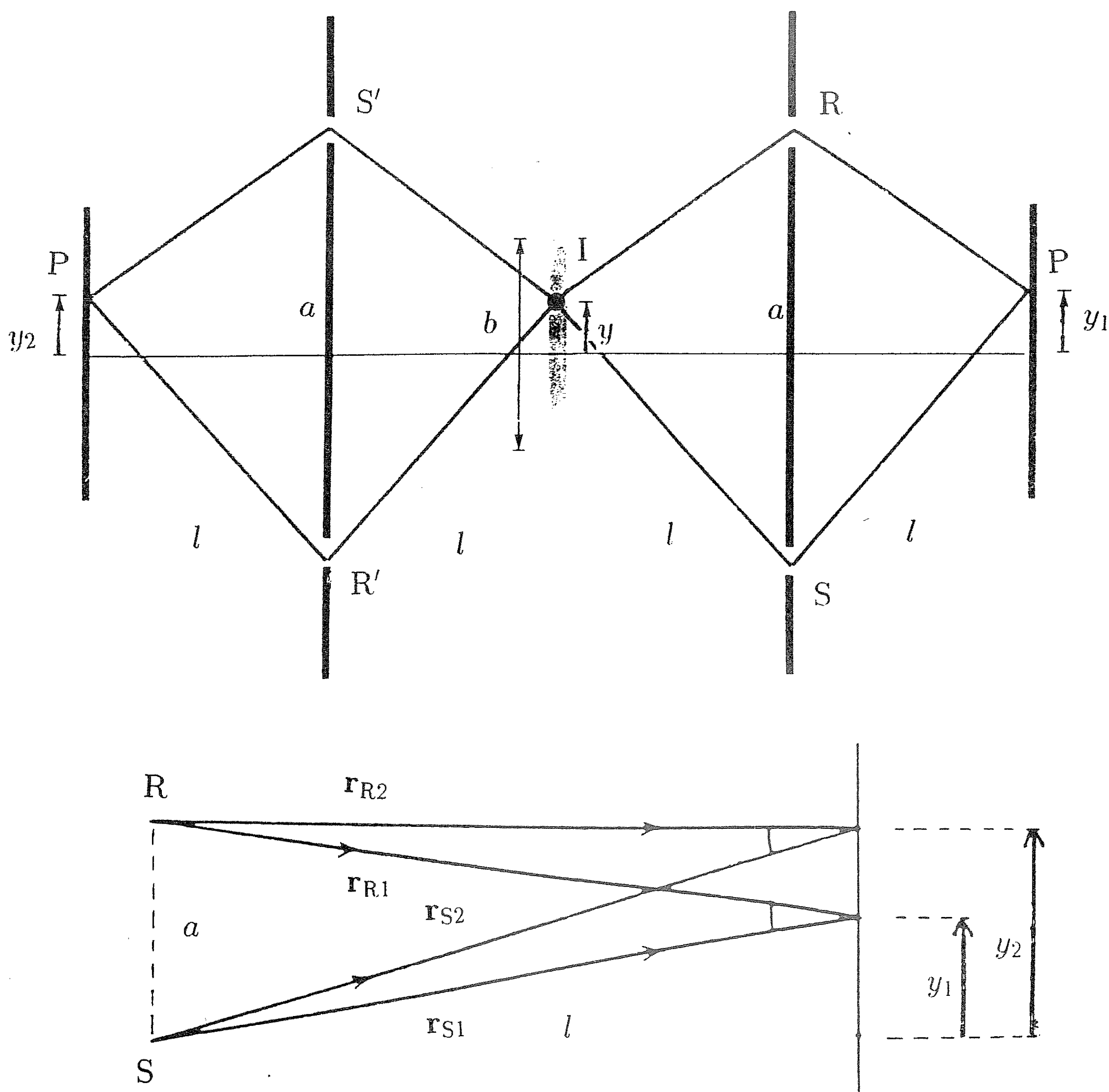
$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_R(1)\psi_{R'}(2) + \psi_S(1)\psi_{S'}(2)]. \quad (1)$$

Pri tem opiše 1 svetlobo, ki potuje proti desni, 2 svetlobo proti levi, indeksi pa zaznamujejo ustrezno rezo. Stanja ni mogoče opisati samo s prvim ali samo z drugim členom ali sploh s produktom teh stanj v krajevnem prostoru.

Naj bo atom, ki seva, v višini y nad osjo. Razlika poti od izvira do desnih rež meri:

$$\begin{aligned} & [l^2 + (\frac{1}{2}a + y)^2]^{1/2} - [l^2 + (\frac{1}{2}a - y)^2]^{1/2} = \\ & = l[1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a + y)^2 - 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a - y)^2] = (a/l)y, \end{aligned}$$

če je $a/l = \alpha \ll 1$. K razliki poti od izvira do desnega merilnika v višini y_1 nad osjo prispeva še en tak člen, sorazmeren z y_1 , tako da je skupna razlika poti od izvira do desnega merilnika $\delta r_1 = (a/l)(y + y_1)$. Podobno izračunamo razliko poti od izvira skozi zgornjo ali spodnjo rezo do levega merilnika v višini y_2 nad osjo: $\delta r_2 = (a/l)(y + y_2)$.



Slika 3. Pet zaslonov z izvirom I, paroma rež R in S ter S' in R' in merilnikoma P pri idealiziranem poskusu [4] (zgoraj) in neodvisna izvira R in S v klasičnem in kvantnoelektrodinamičnem računu (spodaj).

Amplitudo valovanja ob desnem merilniku sestavimo kot vsoto amplitud za pot skozi režo R in za pot skozi režo S, saj ne moremo ugotoviti, skozi katero režo gre valovanje. Polovico fazne razlike pripišemo eni, drugo polovico pa drugi poti. Tako je amplituda valovanja ob desnem merilniku sorazmerna z

$$e^{i[k(r+\delta r/2)-\omega t]} + e^{i[k(r-\delta r/2)-\omega t]} \propto 2 \cos\left(\frac{1}{2}k\delta r_1\right). \quad (2)$$

Pri tem je $k = 2\pi/\lambda$ in smo nazadnje izraz z imaginarnim eksponentom $e^{i(kr-\omega t)}$ skrili kar v sorazmernostni koeficient, ker bo dal 1, ko bomo računali kvadrat absolutne vrednosti amplitude. Podobno je amplituda v valovanju ob levem merilniku sorazmerna z $2 \cos\left(\frac{1}{2}k\delta r_2\right)$.

Višine sevajočega atoma v izviru v resnici ne poznamo. Atomi so porazdeljeni po vsem izviru, za katerega vzamemo, da sega od $-\frac{1}{2}b$ pod osjo do $\frac{1}{2}b$ nad njo. Zato moramo upoštevati vse mogoče višine sevajočih

atomov in sešteti prispevke k amplitudi iz vseh delov izvira:

$$\Psi(y_1) \propto \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y + y_1)\right] dy = (4l/kab) \sin\left(\frac{1}{4}kab/l\right) \cos\left(\frac{1}{2}kay_1/l\right). \quad (3)$$

Pri zelo majhnem izviru, ko velja $b/l \ll \lambda/a$, preide enačba v

$$\Psi(y_1) \propto \cos\left(\frac{1}{2}kay_1/l\right). \quad (3a)$$

Gostota svetlobnega toka je sorazmerna s kvadratom absolutne vrednosti amplitude: $\cos^2(\frac{1}{2}kay_1/l)$. Na desnem zaslonu dobimo v tem primeru znano Youngovo interferenčno sliko, značilno za enofotonski interferenčni poskus. V njej se vrhovi pojavijo pri višinah, za katere velja $y_1 = N\lambda l/a$, če je $N = 1, 2, \dots$. Pogoji smo vajeni zapisati v obliki $a\beta = N\lambda$, ki velja, če je kot $\beta = y_1/l$ dovolj majhen. Račun bi lahko ponovili tudi za levi zaslon. Tudi na njem bi opazili Youngovo interferenčno sliko $\cos^2(\frac{1}{2}kay_2/l)$.

Pri zelo velikem izviru, ko velja $b/l \gg \lambda/a$, postane amplituda $\Psi(y_1)$ zelo majhna. To velja tudi za amplitudo $\Psi(y_2)$. Na desnem in levem zaslonu zgineta interferenčna slika, ker prispeva k njej svetloba iz različnih delov izvira, ki jim ustrezajo različne razlike poti.

Po načelu superpozicije se v naslednjem koraku zanimamo za produkt obeh amplitud. V splošnem moramo upoštevati prispevke iz vseh delov izvira in torej integrirati po izviru:

$$\begin{aligned} \Psi(y_1, y_2) &\propto \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y + y_1)\right] \cdot \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y + y_2)\right] dy = \\ &= \frac{1}{2b} \int \cos\left[k(a/l)\left(y + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right)\right] dy + \frac{1}{2b} \int \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y_2 - y_1)\right] dy = \\ &= \frac{a}{kbl} \sin\left[\frac{1}{2}k(a/l)b\right] \cdot \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y_1 + y_2)\right] + \frac{1}{2} \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y_2 - y_1)\right] \quad (4) \end{aligned}$$

Pri zelo majhnem izviru, ko velja $b/l \ll \lambda/a$, preide amplituda v

$$\Psi(y_1, y_2) \propto \cos\frac{1}{2}k(a/l)y_1 \cdot \cos\frac{1}{2}k(a/l)y_2 \propto \Psi(y_1)\Psi(y_2). \quad (4a)$$

V tem primeru dobimo na levem in na desnem zaslonu običajni Youngovi interferenčni sliki.

Drugače je pri zelo velikem izviru, ko velja $b/l \gg \lambda/a$ in preostane samo drugi člen v enačbi (4):

$$\Psi(y_1, y_2) \propto \cos\left[\frac{1}{2}k(a/l)(y_2 - y_1)\right]. \quad (4b)$$

V tem primeru niti na levem niti na desnem zaslonu ne opazimo Youngove interferenčne slike. Zasledimo pa pojav nove vrste, če opazujemo hkrati na obeh zaslonih in ugotavljamo koincidence obeh merilnikov. Verjetnost za koincidence je

$$\begin{aligned} |\Psi(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 &\propto \cos^2 \left[\frac{1}{2} k(a/l)(y_2 - y_1) \right] dy_1 dy_2 = \\ &= \frac{1}{2} \{1 + \cos [k(a/l)(y_2 - y_1)]\} dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (5)$$

če sta dy_1 in dy_2 zelo majhni širini vstopnih zenic obeh fotonских merilnikov. Nazadnje smo zapisali verjetnost za koincidence v obliki, ki jasno pokaže, da dobimo veliko koincidence, če velja $y_2 - y_1 = N\lambda l/a$, a da ni koincidence, če velja $y_2 - y_1 = (2N + 1)\lambda l/2a$.

Fotona z veliko verjetnostjo zadene zaslon v bližini točk, v katerih je razlika poti skozi reži R-S in skozi reži R'-S' enaka celemu večkratniku valovne dolžine. To nenavadno spoznanje si je mogoče nazorno pojasniti s predstavo, da je s tem, ko zadene eden izmed fotonov prvi zaslon v določeni točki, povezana amplituda s sinusno odvisnostjo za lego sevajočega atoma – nekakšna navidezna uklonska mrežica. Prek nje postane lega točke, v kateri drug foton zadene drugi zaslon, odvisna od lege prve točke, ko ugotavljamo koincidence. Račun za idealizirani poskus jasno pokaže, da se enofotonska interferenčna slika in dvofotonska interferenčna „slika“ izključujeta. Če je izvir dovolj majhen, da opazimo prvo, ne moremo opazovati druge, če je izvir dovolj velik, da opazimo drugo, pa ne moremo opazovati prve.

Do enakega sklepa pripelje tudi Heisenbergova neenačba za prečno koordinato in prečno komponento gibalne količine. Za nedoločenost prečne koordinate postavimo višino izvira b in za nedoločenost ustrezne komponente gibalne količine kar $\delta p = \hbar \delta k$. Iz $b \delta k \gtrsim 1$ pri velikem izviru, ko velja $b \gg \lambda l/a$, za relativno nedoločenost sledi $\delta k/k < a/l$. Svetloba pride do ene ali druge reže, ne pa do obeh hkrati, tako da ne moremo opazovati enofotonske interferenčne slike. Nasprotno pa pri majhnem izviru, ko velja $b \ll \lambda l/a$, za relativno nedoločenost sledi $\delta k/k > a/l$. Svetloba pride do obeh rež hkrati in lahko opazujemo enofotonsko interferenčno sliko na enem ali drugem zaslonu. Vendar ni mogoče zagotoviti, da gre drugi foton skozi režo R', če gre prvi skozi režo R, in da gre drugi foton skozi režo S', če gre prvi skozi režo S. To pa pokvari dvofotonsko prepleteno stanje (1).

Pri pravem poskusu širina vstopnih zenic ni zelo majhna. Nezahteven račun da pri enako širokih vstopnih zenicah $\Delta y_1 = \Delta y_2$:

$$\begin{aligned} &\int_{y_1 - \Delta y_1/2}^{y_1 + \Delta y_1/2} \int_{y_2 - \Delta y_2/2}^{y_2 + \Delta y_2/2} |\Psi(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 \propto \\ &\propto \left\{ 1 + \frac{\sin^2 (ka\Delta y_1/2l)}{(ka\Delta y_1/2l)^2} \cos [k(a/l)(y_2 - y_1)] \right\} (\Delta y_1)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Interferenčna „slika” je zaradi tega nekoliko zabrisana. Idealizirani poskus, ki dopušča pregledne račune, brez težav prevedemo v opisani poskus, če levo polovico naprave v mislih preklopimo na desno in namesto rež, ki ju osvetljuje izvir, mislimo na atoma, ki sevata neodvisno drug od drugega, ali na neodvisna izvira iz velike množice atomov.

Kaj pa napove pri takem poskusu klasična elektrodinamika? Opazujmo valovanje iz dveh neodvisnih svetil R in S, ki interferirata na oddaljenem zaslonu v točki z višino y_1 [5]. Jakost električnega polja na zaslonu sestavimo iz prispevkov dveh atomov (sl. 3) tako, da nekoliko razširimo enačbo (2):

$$\begin{aligned} E(y_1) &= E_{R1} e^{i[k(r+\delta r_2/2)-\omega t+\phi]} + E_{S1} e^{i[k(r-\delta r_2/2)-\omega t+\theta]} = \\ &= e^{i(kr-\omega t)} [E_{R1} e^{i(k\delta r_1+\phi)} + E_{S1} e^{i(-k\delta r_1+\theta)}]. \end{aligned} \quad (2')$$

Fazna razlika v enem in drugem valovanju je značilna za neodvisno sevajoča atoma in amplitudi E_{R1} in E_{S1} sta realni. Po stari navadi polovico razlike poti pripišemo prvemu, drugo polovico pa drugemu prispevku. Kvadrat absolutne vrednosti $E(y_1)^* E(y_1) = E_{R1}^2 + E_{S1}^2 + 2E_{R1}E_{S1} \cos(k\delta r_1 + \phi - \theta)$ zapišemo kot $j(y_1) = j_{R1} + j_{S1} + 2\sqrt{j_{R1}j_{S1}} \cos(k\delta r_1 - \phi + \theta)$, če zaznamujemo z j ustrezno gostoto svetlobnega toka iz enega atoma. Gostoto svetlobnega toka, ki ga izmeri merilnik, dobimo kot povprečje po množici atomov. Vzemimo, da sevata izvira stacionarna svetlobna tokova, ki imata na zaslonu gostoti $\langle j_{R1} \rangle$ in $\langle j_{S1} \rangle$. Fazna razlika $\phi - \theta$ za različne pare atomov zavzame vse mogoče vrednosti na intervalu od 0 do 2π , tako da je povprečje kosinusnega člena enako nič: $\langle j_1 \rangle = \langle j_{R1} \rangle + \langle j_{S1} \rangle$. Ni enofotonske interferenčne slike.

V točki z višino y_2 zapišemo kvadrat absolutne vrednosti $E(y_2)^* E(y_2)$ kot $j(y_2) = j_{R2} + j_{S2} + 2\sqrt{j_{R2}j_{S2}} \cos(k\delta r_2 - \phi + \theta)$. Drugi merilnik v tej točki meri gostoto svetlobnega toka $\langle j(y_2) \rangle$. Ker sta oba merilnika v majhni razdalji v primeri z oddaljenostjo od izvirov, pri gostotah svetlobnih tokov ni treba razlikovati med indeksom 1 in indeksom 2. Korelacijo med obema merilnikoma podaja količina:

$$\langle j(y_1)j(y_2) \rangle = \langle j_{R1}^2 \rangle + \langle j_{S1}^2 \rangle + 2\langle j_{R1} \rangle \langle j_{S1} \rangle \cos[k(a/l)(y_2 - y_1)],$$

če vstavimo $\delta r_2 - \delta r_1 = (a/l)(y_2 - y_1)$. Vsi drugi členi pri računanju povprečja čez množico zaradi spremenljive fazne razlike $\phi - \theta$ nič ne prispevajo. Če sta tokova stacionarna in sta izvira R in S enaka, imamo naposled

$$\langle j(y_1)j(y_2) \rangle \propto 1 + \frac{1}{2} \cos k(a/l)(y_1 - y_2). \quad (6)$$

Koeficient pred kosinusom je manjši od $\frac{1}{2}$, če izvira sevata različni gostoti svetlobnega toka. Klasična interferenčna „slika” pri dvofotonskem poskusu je vselej bolj zabrisana kot kvantna. Zaradi končne širine vstopnih zenic

se tudi pri tem pred kosinusnim členom pojavi enak dodatni faktor kot v enačbi (5).

Nazadnje nakažimo še račun v okviru kvantne elektrodinamike. Del operatorja jakosti električnega polja s pozitivnimi frekvencami [6] razdelimo na prvi člen, ki zadeva sevanje atoma R, in na drugi, ki zadeva sevanje atoma S:

$$\hat{E}^+(y_1) = \hat{a}_R e^{i\mathbf{k}_R \mathbf{r}_{R1}} + \hat{a}_S e^{i\mathbf{k}_S \mathbf{r}_{S1}}. \quad (7)$$

$\hat{a}_R$ in $\hat{a}_S$ sta anihilacijska operatorja, konstantni koeficient in časovno odvisnost pa smo izpustili. Gostoto svetlobnega toka v točki z višino y_1 da povprečna vrednost operatorja $\hat{E}^-(y_1)\hat{E}^+(y_1)$, ki smo ga spravili v zvezo s *fotonskimi korelacijami prvega reda* [6]. Gostoto koincidenc da povprečna vrednost operatorja $\hat{E}^-(y_1)\hat{E}^-(y_2)\hat{E}^+(y_2)\hat{E}^+(y_1)$, ki smo ga spravili v zvezo s *fotonskimi korelacijami drugega reda*. Povprečni vrednosti izračunamo za prepleteno stanje $|1_R 1_S\rangle = |1\rangle_R |1\rangle_S$. Prvi del tega *Fockovega stanja* zadeva sevanje atoma R in drugi sevanje atoma S. Dela ležita v dveh različnih Hilbertovih prostorih, v katerih delujeta operatorja $\hat{a}_R$ in $\hat{a}_S$. Tako stanje ustreza stanju (1) v krajevnem prostoru. Pri tem je v Heisenbergovi sliki, v kateri sicer časovno odvisnost prevzamejo operatorji, odločilen za dvofotonski značaj poskusa iz dveh delov sestavljeni operator jakosti električnega polja (7). Za gostoto energijskega toka dobimo konstanto, za gostoto koincidenc pa enačbo (4b). To nas prepriča, da smo ravnali prav, ko smo pri idealiziranem poskusu računali s produktom amplitud, medtem ko v klasičnem računu uporabimo produkt gostot svetlobnega toka.

LITERATURA

- [1] R. Glauber, *Diracov slavni rek o interferenci: foton ali dva?* Obzornik mat. fiz. **42** (1995).
- [2] J. Strnad, *Fizika, 3. del*, DZS, Ljubljana 1988, str. 285.
- [3] R. Ghosh, L. Mandel, *Observation of nonclassical effects in the interference of two photons*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1903; R. Ghosh, C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel, *Interference of two photons in parametric down conversion*, Phys. Rev. A **34** (1986) 3962.
- [4] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Zeilinger, *Multiparticle interferometry and the superposition principle*, Phys. Today **46** (1993) 22 (8); M. A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger, *Two-particle interferometry*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2209.
- [5] L. Mandel, *Photon interference and correlation effects produced by independent quantum sources*, Phys. Rev. A **28** (1983) 1983.
- [6] J. Strnad, *Na pot v kvantno elektrodinamiko*, DMFA, Ljubljana 1986, str. 116, 140, 143.

LAVRIČ, B., DELNO UREJENI VEKTORSKI PROSTORI, Postdiplomski seminar iz matematike, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1995, 154 str.

Začetek teorije o delno urejenih vektorskih prostorih sega v drugo polovico tridesetih let tega stoletja. Splošna teorija, ki je nastajala v okviru funkcionalne analize, se je kmalu osamosvojila, vendar se z njo vseskozi tesno povezuje. Knjiga podaja pregled najpomembnejših rezultatov predvsem algebraičnega dela teorije. Nastala je po predavanjih, ki jih je imel avtor v šolskem letu 1994/95 na tretji stopnji študija raziskovalne smeri matematike.

Delo je razdeljeno na osem poglavij. Bežno si oglejmo, kaj obravnavajo. Prvo poglavje podaja osnovne lastnosti delno urejenih množic. Pisec nam predstavi posplošitev Dedekindove konstrukcije realnih števil iz racionalnih na delno urejene množice. V razdelku o upodobitvi distributivne mreže dokaže znameniti Stoneov izrek o upodobitvi Boolove algebre. Drugo poglavje obravnava temeljne lastnosti delno urejenih vektorskih prostorov. Najpomembnejši rezultat poglavja pravi, da za vsak krepko arhimedski delno urejen vektorski prostor obstaja Dedekindova napolnitev. Tretje poglavje se loteva Rieszovih prostorov (ali vektorskih mrež). Delno urejen vektorski prostor je Rieszov prostor, kadar je mreža, torej takrat, kadar ima vsak par elementov največjo spodnjo mejo (infimum) in najmanjšo zgornjo mejo (supremum). Pisec geometrijsko opiše stožce, ki v vektorskem prostoru določajo strukturo Rieszovega prostora. Poglavje sklene z razdelkom o (σ -) Dedekindovo polnih Rieszovih prostorih. V četrtem poglavju so podrobneje obdelani ideali in pasovi v Rieszovih prostorih. Spoznamo tudi, kako delno uredimo kvocientni prostor delno urejenega vektorskega prostora. Pozitivne preslikave med Rieszovimi prostori so tema petega poglavja. Med drugim se seznanimo z Rieszovimi homomorfizmi, tj. linearnimi preslikavami, ki ohranjajo mrežni operaciji infimum in supremum. Šesto poglavje obravnava projekcijske lastnosti Rieszovih prostorov. Freudenthalov spektralni izrek je eden najpomembnejših rezultatov v knjigi. V naslednjem poglavju avtor najprej razišče osnovne lastnosti praidealov in maksimalnih idealov, nato nas seznani s pojmom spektra Rieszovega prostora. V zadnjem, verjetno najzahtevnejšem poglavju pa se posveti upodobitvam Rieszovih prostorov. Dokaže pomembne rezultate japonskih matematikov Amemiye, Yoside, Maede in Ogasaware. Med konkretnimi primeri Rieszovih prostorov je v knjigi podrobneje obdelana družina funkcijskih prostorov.

Delo je napisano natančno in jedrnato. Izbrušen slog pisanja, skrbno izbran vrstni red podajanja snovi in kratki pretehtani dokazi rezultatov so znane avtorjeve značilnosti. Vendarle pa mora bralec, kot je običajno za tovrstne publikacije, marsikatero podrobnost razjasniti sam. Poleg tega je za razumevanje knjige potrebno poznavanje osnovnih pojmov iz linearne algebre, topologije in funkcionalne analize.

Roman Drnovšek

PAVEŠIĆ, P., THE HOPF INVARIANT ONE PROBLEM, Post-dipl. seminar iz matematike, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1995, 56 str.

V matematiki se večkrat primeri, da se za več na pogled zelo raznorodnih problemov izkaže, da imajo „isto korenino“, to je, da se dajo prevesti na skupen osnovni problem. Taka skupina problemov je posebno opazna takrat, ko tistega osnovnega problema daljši čas nihče ne zna rešiti. Pričujoča knjižica prikazuje enega takih primerov. Osnovni problem je topološki in je znan pod imenom, ki je naslov knjižice.

Povejmo na kratko, za kaj gre. Najbolje bo, če začnemo kar z istim problemom, kot pisec knjižice. Ta problem je postavil Hamilton v drugi polovici prejšnjega stoletja. Na videz ni v nikakršni zvezi s topologijo: za katera naravna števila n je mogoče na evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ definirati tako bilinearno (a ne nujno komutativno ali asociativno) množenje vektorjev, da dobimo realno algebro brez deliteljev nič? Iz prejšnjih stoletij so znane takšne algebre za $n = 1$ (realna števila), $n = 2$ (kompleksna števila), $n = 4$ (Hamiltonovi kvaternioni) in $n = 8$ (Cayleyevi oktonioni), nikomur pa se ni posrečilo konstruirati take algebre za kak drug n .

In zdaj k topologiji! Za vsako naravno število n naj S^n označuje n -razsežno enotsko sfero, to je množico točk v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, ki so za 1 oddaljene od izhodišča. Okoli leta 1935 je švicarski matematik Heinz Hopf definiral pravilo, po katerem vsaki zvezni preslikavi $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ ($n > 1$) pripada „karakteristično“ celo število, ki ga danes imenujemo *Hopfova invarianta* preslikave f in ga označujemo s $H(f)$. Hopf je dokazal, da je $H(f) = H(g)$, če sta preslikavi $f, g: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ homotopni; da za vsak $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ in vsako celo število k obstaja tak $g: S^{2n-1} \rightarrow S^n$, da je $H(g) = k H(f)$ (v resnici je pokazal več: H določa homomorfizem homotopske grupe $\pi_{2n-1}(S^n)$ v aditivno grupo celih števil); da je $H(f) = 0$, če je število n liho; da za vsak sod n zavzame „funkcija“ H vrednost 2 (in zato vse sode vrednosti); in da H zavzame tudi vrednost 1 (in zato vse cele vrednosti), če na $\mathbb{R}^n$ obstaja struktura realne algebre brez deliteljev nič, torej vsaj za $n = 2, 4, 8$. Problem Hopfove invariante 1 je: dokazati, da samo za $n \in \{2, 4, 8\}$ obstaja taka zvezna preslikava $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$, da je

$H(f) = 1$, ali – ekvivalentno – da med evklidskimi prostori samo $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^8$ dopuščajo strukturo algebre brez deliteljev nič. Ta problem je rešil angleški topolog Frank Adams leta 1960. Njegov dosežek velja za enega velikih triumfov matematike v tem stoletju.

V pričujoči knjižici je natančneje razloženo vse, kar smo površno povedali zgoraj, in prikazan je dokaz Adamsovega izreka; ne originalni dokaz, temveč kasnejša poenostavitev, ki jo je prispeval drug znamenit (libanonsko-)angleški topolog Michael Atiyah. Knjižica je napisana za bralca, ki je seznanjen z osnovami splošne, geometrične in algebraične topologije (npr. za diplomanta teoretske smeri študija matematike na ljubljanski univerzi); posebej, pisec pričakuje, da bralec pozna pojme: mnogoterost, CW kompleks, homotopska grupa, (ko)homološka grupa. Drugi potrebni (še vedno dokaj osnovni) pojmi algebraične topologije so v knjižici razloženi, seveda samo v obsegu, ki je potreben tu, in večinoma brez podrobnih dokazov: kohomološki produkt in kohomološki kolobar, kohomološke operacije in Steenrodovi kvadrati, vektorski svežnji in njihova homotopska klasifikacija, topološka K -teorija, Adamsove operacije, Puppejeva eksaktna zaporedja. Vse to sestavlja dokaz Adamsovega izreka v širšem pomenu besede; dokaza v ožjem pomenu je samo za dve strani.

Mislim, da je pisec dokaj posrečeno izbral, koliko povedati o vsaki stvari in kaj izpustiti. Izognil se je nevarnosti, da bi se delo izrodilo v naštevanje definicij in dejstev, in tudi nevarnosti, da bi s podrobnostmi preutrudil tudi najbolj motivirane bralce. Knjižico toplo priporočam vsakomur, ki bi se želel posvetiti topologiji. Tu se bo po bližnjici seznanil s celo vrsto pojmov in resnic, ki jih bo prej ali slej potreboval; čisto brez truda pa seveda tudi tu ne bo šlo in poleg tega bo marsikaj treba kasneje temeljiteje preštudirati v primernem učbeniku. Za povprečnega matematika, ki ne ve nič ali skoraj nič o algebraični topologiji, bo ta knjižica pretrd oreh. Toda tudi tak bo lahko z zanimanjem prebral prvo, uvodno poglavje, v katerem je zastavljen osnovni problem, in 5., zadnje poglavje, v katerem je prikazanih nekaj primerov uporabe Adamsovega izreka; gre za tele probleme, ki imajo „isto korenino“ kot problem Hopfove invariante 1: 1) Katere sfere S^n je mogoče opremiti s strukturo zvezne grupe ali polgrupe z enoto, ali širše, na katerih S^n je mogoče definirati zvezno množenje tako, da bo obstajal nevtralni element? 2) Katere sfere so paralelizabilne? 3) Na katerih prostorih $\mathbb{R}^n$ (ali $\mathbb{C}^n$) obstaja vektorski produkt, podoben običajnemu vektorskemu produktu na $\mathbb{R}^3$? 4) Katere sfere dopuščajo skoraj kompleksno strukturo? 5) Pri katerih naravnih številih r in n ($r < n$) ima splošni sistem r linearnih enačb z n neznankami (torej sistem, v katerem so koeficienti spremenljivke) kako rešitev, ki je zvezno odvisna od koeficientov?

Jože Vrabec

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1994

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 41 novih članov, društvo je zapustilo 61 članov. Novi člani društva so:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| 1714. ARH Maja | 1735. PAHOVNIK Jana |
| 1715. BLUMAUER Polona | 1736. PERHAVEC Suzana |
| 1716. BOJADŽIEV Boštjan | 1737. PETELIN Boris |
| 1717. BRDAR V. Uroš | 1738. POTOČAR Jožica |
| 1718. COKAN Tomaž | 1739. PREGL Majda |
| 1719. ČAMPELJ Borut | 1740. ROVTAR Jože |
| 1720. ČEBULAR Anja | 1741. SOTLAR Romualda |
| 1721. DOLINAR Gregor | 1742. STEFANOVSKA Aneta |
| 1722. DOMINKO Ciril | 1743. ŠENK Matija |
| 1723. FAJMUT Angela | 1744. ŠKRINAR-MAJDIČ Majda |
| 1724. FRANTAR Saša | 1745. TKALČIČ Diomira |
| 1725. GOLEŽ Tine | 1746. TURNŠEK Aleksej |
| 1726. GREGORČIČ Emi | 1747. ULES Vanja |
| 1727. HAJNŠEK Aleš | 1748. URŠIČ Marko |
| 1728. HRŽICA Lojzka | 1749. VEŠLIGAJ Špela |
| 1729. ILDE Frank | 1750. VREČAR Simon |
| 1730. KITEK Marija | 1751. ZALAR Borut |
| 1731. LEDINŠEK Biserka | 1752. ŽAGAR Emil |
| 1732. MIDDEN Van Dr. Ir. H. J. P. | 1753. ŽUMER Iva |
| 1733. MIZORI-ZUPAN Tatjana | 1754. ŽVANUT Breda |
| 1734. MORI Danuška | |

Martina Koman

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije,
Komisija za pedagoško dejavnost, objavlja

RAZPIS ZA PRIZNANJA UČITELJEM

V skladu s pravili o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi lahko prejme priznanje član DMFA Slovenije, ki

- s svojim delom izboljša pouk matematike, fizike, astronomije ali računalništva v osnovni ali srednji šoli,
- razširja zanimanje za svoj predmet med učenci, jih uspešno uči, vodi in usmerja njihovo delo v krožkih, tako da dosegajo vidne uspehe v šoli in na tekmovanjih,

- sodeluje s članki, učbeniki in drugimi učnimi in strokovnimi knjigami predvsem pri društvenih publikacijah in s tem izdatno prispeva k popularizaciji svojega predmeta ali k izboljšanju poučevanja.

Podružnice DMFA Slovenije, aktive matematikov in fizikov na šolah in posamezne člane društva prosimo, da pošljejo **do 1. oktobra 1995** pisne predloge z osebnimi podatki kandidatov in podrobnimi utemeljitvami njihovega dela Komisiji za pedagoško dejavnost DMFA Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64.

Ivana Mulec

VABILO

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z Zavodom RS za šolstvo in šport vabi vse matematike, fizike in astronome na

DELOVNO SREČANJE IN 47. OBČNI ZBOR DRUŠTVA,

ki bo 20. in 21. oktobra 1995 v hotelu Lek v Kranjski gori.

Program:

petek, 20.10.1995 dopoldne

	Fizika	uporabna matematika	pedagoška matematika
9.00	Norma Mankoč Borštnik: Ali je prostor-čas, v katerem živimo, več kot štirirazsežen?	Tomaž Pisanski: Mostovi med geometrijo in grafi	Zlatan Magajna: Ali lahko učimo matematiko?
10.00	Lidija Babič: Viteški turnir mladih fizikov	Vladimir Batagelj: Razvrščanje v skupine	Peter Legiša: Znanje matematike v srednji šoli
11.00	Člani maturitetne skupine: Razgovor o maturi iz fizike	Dušan Pagon: Matematika z elektronskimi preglednicami	Mara Cotič, Tatjana Hodnik: Spremembe pouka na začetku šolanja

popoldne

16.00 Janez Strnad: Jožef Stefan, ob 160-letnici rojstva

17.30 Jože Rakovec: Od Navier-Stokesove enačbe do napovedi vremena

sobota, 21.10.1995

9.00 Občni zbor

14.00 Ekskurzija, obisk Stefanove rojstne hiše pri sv. Petru v Celovcu

Predsednik DMFA Slovenije
Egon Zakrajšek