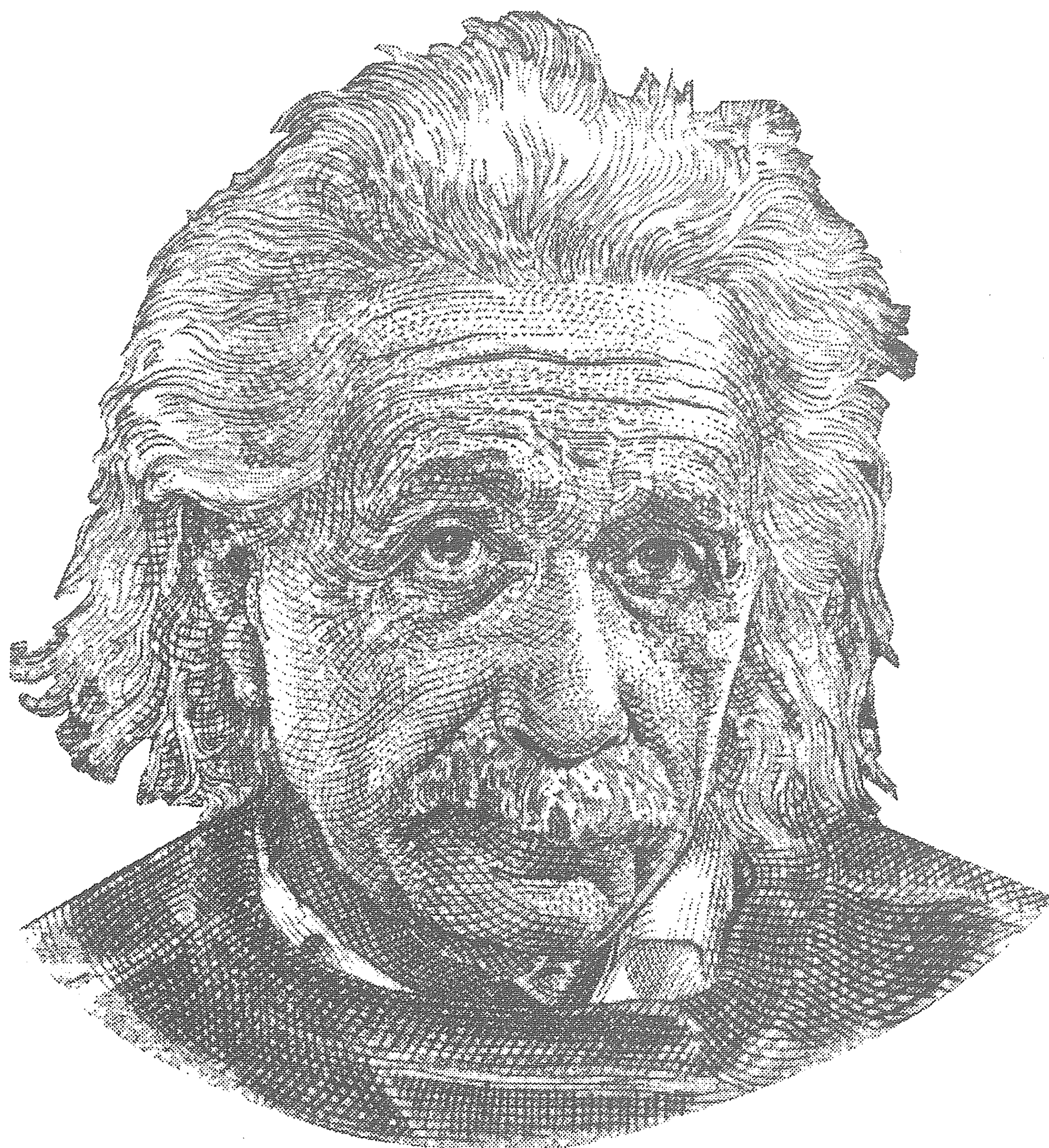


1995

Letnik 42

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1995

letnik 42, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.100,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.200,– SIT, za študente 1.050,– SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 DMFA Slovenije – 1251

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.—Page

Liejevi ideali — Lie ideals (Matej Brešar) 65–71

Električni in magnetni potencial gibajočega se nabitega delca — Electrical and magnetic potential of a moving charged particle (Primož Potočnik) 72–79

Einstein in kvanti — Einstein and quanta (Janez Strnad) 80–87

Nove knjige — New books (Anton Suhadolc) 71

Vesti — News

Kaj je ECMI (Zvonimir Bohte) 88–93

Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1994 (Martina Koman) 93–IV

Utrinek (izbral Janez Strnad) 87

Na ovitku: Albert Einstein z bankovca za 5 izraelskih funtov iz leta 1968 (k članku na strani 80).

LIEJEVI IDEALI

MATEJ BREŠAR

Math. Subj. Class. (1991) 17B60, 16S50, 16W10

Članek predstavi pojem Liejevega ideala asociativnega kolobarja. Izpeljana je povezava z dvostranskimi ideali. Na primeru kolobarja kvadratnih matrik je prikazana uporabnost te povezave.

LIE IDEALS

The paper presents the notion of a Lie ideal of an associative ring. The connection with two-sided ideals is derived. The applicability of this connection is illustrated on the ring of quadratic matrices.

Naj bo $\mathcal{K}$ asociativen kolobar. Element

$$[x, y] = xy - yx$$

imenujemo *komutator* ali *Liejev produkt* elementov x in y iz $\mathcal{K}$. V $\mathcal{K}$ nadomestimo prvotni produkt z Liejevim produktom, seštevanje pa ohranimo. Ker očitno veljata enakosti $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ in $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$, sta izpolnjena distributivnostna zakona. Vendar novo množenje ni nujno asociativno. Tako $\mathcal{K}$ v splošnem postane neasociativen kolobar. Po drugi strani pa ima Liejevo množenje nekatere lepe lastnosti, ki jih asociativno množenje ponavadi nima. Tako velja:

$$\begin{aligned} [x, x] &= 0, \\ [x, y] &= -[y, x], \\ [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] &= 0.^1 \end{aligned}$$

Prvi formuli sta očitni. Zadnjo, ki se imenuje *Jacobijeva identiteta*, preverimo z računom.

Zapišimo še pomembno formulo

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z],$$

ki povezuje Liejev produkt s prvotnim, asociativnim produktom.

Vsako podmnožico kolobarja $\mathcal{K}$, ki je za seštevanje podgrupa $\mathcal{K}$ in je zaprta za Liejev produkt, imenujemo *Liejev podkolobar* kolobarja $\mathcal{K}$. V

¹ Omenimo naj, da vsak (v splošnem neasociativen) kolobar, v katerem ima množenje našte tri lastnosti, imenujemo *Liejev kolobar*. Druga formula se v definiciji sicer ne navaja, saj sledi neposredno iz prve formule. Teorija Liejevih kolobarjev in algeber je pomemben del algebre.

okviru teorije asociativnih kolobarjev se o splošnih Liejevih podkolobarjih ne da povedati prav veliko. To pa ne velja za posebno zvrst Liejevih podkolobarjev, ki jih obravnava ta članek. Vpeljimo jih:

Definicija. Naj bo $\mathcal{L}$ podmnožica asociativnega kolobarja $\mathcal{K}$. Če je $\mathcal{L}$ za seštevanje podgrupa $\mathcal{K}$ in če za poljubna $a \in \mathcal{L}$ in $x \in \mathcal{K}$ velja $[a, x] \in \mathcal{L}$, potem $\mathcal{L}$ imenujemo *Liejev ideal* kolobarja $\mathcal{K}$.

Oglejmo si nekaj primerov Liejevih idealov. Prva dva sta takoj razvidna.

Primer 1. Vsak dvostranski ideal je tudi Liejev ideal.

Primer 2. Center $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$ kolobarja $\mathcal{K}$ je Liejev ideal. Prav tako je Liejev ideal tudi vsaka podmnožica centra $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$, ki je za seštevanje podgrupa $\mathcal{K}$.

Primer 3. Iz danih Liejevih idealov $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ kolobarja $\mathcal{K}$ lahko konstruiramo nova Liejeva ideala. Prvi je vsota $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \{a_1 + a_2 | a_1 \in \mathcal{L}_1, a_2 \in \mathcal{L}_2\}$. Označimo z $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ podgrupo $\mathcal{K}$ za seštevanje, generirano z vsemi komutatorji oblike $[a_1, a_2]$, kjer je $a_1 \in \mathcal{L}_1$ in $a_2 \in \mathcal{L}_2$ ($[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ je torej množica vseh vsot takih komutatorjev). S pomočjo Jacobijeve identitete vidimo, da je $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$ Liejev ideal. Dvostranska ideala $\mathcal{I}_1$ in $\mathcal{I}_2$ tako porodita Liejev ideal $[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2]$, ki ni nujno dvostranski ideal (glej naslednja primera).

Primer 4. Z $\mathcal{M}_n$ bomo označevali kolobar kvadratnih matrik reda $n \geq 2$ z elementi iz obsega $\mathcal{O}$. Zaradi enostavnosti se bomo omejili na primer, ko je $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ ali $\mathcal{O} = \mathbb{C}$, čeprav marsikaj v nadaljevanju povedanega (vključno z naslednjimi vrsticami) velja tudi za splošnejše obsege.

Spomnimo se, da vsoti vseh diagonalnih elementov kvadratne matrike pravimo sled matrike. Sled matrike A bomo označevali s $\text{sl}(A)$. Preslikava $A \mapsto \text{sl}(A)$ je očitno linearen funkcional na prostoru $\mathcal{M}_n$. Jedro tega funkcionala, torej množico vseh kvadratnih matrik reda n s sledjo 0, bomo označevali s sl_n^2 . Jedro vsakega netrivialnega linearne funkcionala na $\mathcal{M}_n$, tako tudi množica sl_n , je vektorski podprostor $\mathcal{M}_n$ razsežnosti $n^2 - 1$. Znano formulo $\text{sl}(AB) = \text{sl}(BA)$, ki velja za poljubni matriki $A, B \in \mathcal{M}_n$, lahko zapišemo v obliki $\text{sl}([A, B]) = 0$. Od tod takoj sledi, da je sl_n Liejev ideal kolobarja $\mathcal{M}_n$. Splošneje, vsaka podmnožica $\mathcal{M}_n$, ki vsebuje sl_n in je podgrupa za seštevanje, je Liejev ideal. Taka je npr. množica vseh matrik iz $\mathcal{M}_n$ s celoštevilskimi sledmi, ki se bo pojavila tudi v nadaljevanju (glej posledico 3).

Pokažimo, da je $\text{sl}_n = [\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n]$. Ker je sled vsakega komutatorja enaka 0, je seveda $[\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n] \subseteq \text{sl}_n$. Označimo z E_{ij} matriko, ki ima na križišču i -te vrstice in j -tega stolpca element 1, povsod drugod pa ničle. Unija množice vseh matrik oblike E_{ij} , kjer $i \neq j$, z množico vseh matrik oblike $E_{11} - E_{ii}$, kjer $i \neq 1$, ima $n^2 - 1$ elementov, je linearno neodvisna in

² Oznaka je kratica za specialna linearna Liejeva algebra; podobnost z besedo sled je le naključna.

je vsebovana v prostoru sl_n . Zato je baza tega prostora. Iz enakosti $E_{ij} = [E_{ij}, E_{jj}]$, ki velja za $i \neq j$, in $E_{11} - E_{ii} = [E_{1i}, E_{i1}]$, ki velja za $i \neq 1$, razberemo, da je ta baza vsebovana v $[\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n]$. Ker je $[\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n]$ očitno vektorski podprostor $\mathcal{M}_n$, od tod sledi $\text{sl}_n \subseteq [\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n]$.

Mimogrede omenimo zanimiv in pomemben primer Liejevega podkolobarja kolobarja $\mathcal{M}_n$, ki pa ni Liejev ideal. To je množica vseh poševno simetričnih matrik, torej matrik A z lastnostjo $A^T = -A$, kjer A^T označuje transponirano matriko matrike A .

Primer 5. Naj bo $\mathcal{H}$ obseg realnih kvaternionov. Lahko je videti, da je $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = \{ai + bj + ck | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Primer 6. Naj bo $\mathcal{K}$ poljuben kolobar. S $\mathcal{P}$ označimo podgrupo $\mathcal{K}$ za seštevanje, generirano z vsemi idempotenti iz $\mathcal{K}$. Pokažimo, da je $\mathcal{P}$ Liejev ideal kolobarja $\mathcal{K}$. Očitno je dovolj, če preverimo, da za poljuben element x iz $\mathcal{K}$ in poljuben idempotent p iz $\mathcal{K}$ velja $[p, x] \in \mathcal{P}$. Račun pokaže, da sta $p_1 = p + px - pxp$ in $p_2 = p + xp - pxp$ idempotentna. Zato je $[p, x] = p_1 - p_2 \in \mathcal{P}$.

Primer 7. Z izrazom *komutativen Liejev ideal* seveda mislimo na Liejev ideal, v katerem poljubna elementa komutirata. Oglejmo si primer. Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar kvadratnih matrik reda 2 z elementi iz obsega s karakteristiko 2 (za vsak element a iz obsega torej velja $a = -a$). Z $\mathcal{L}$ označimo množico vseh matrik oblike

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Lahko je preveriti, da je $\mathcal{L}$ komutativen Liejev ideal, ki ni vsebovan v $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$. Ta primer je zanimiv v povezavi z lemo spodaj.

Enostavnejši primeri komutativnih Liejevih idealov so podmnožice centra kolobarja, ki so podgrupe za seštevanje. Pokažimo, da so pri razmeroma šibkih pogojih le-te tudi edini primeri.

Lema. Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar, v katerem je $a\mathcal{K}a \neq \{0\}^3$ in $2a \neq 0$ za vsak neničeln $a \in \mathcal{K}$. Potem je vsak komutativen Liejev ideal kolobarja $\mathcal{K}$ vsebovan v $\mathcal{Z}(\mathcal{K})$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{L}$ komutativen Liejev ideal kolobarja $\mathcal{K}$. Izberimo poljuben element $a \in \mathcal{L}$ in dokažimo, da $a \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$.

Ker je množica $[a, \mathcal{K}]$ vsebovana v $\mathcal{L}$, vsi njeni elementi komutirajo z a . Iz formule $[a, xy] = [a, x]y + x[a, y]$ zato sledi, da je $a([a, x]y + x[a, y]) = ([a, x]y + x[a, y])a$ za vse $x, y \in \mathcal{K}$. Ker a komutira tudi z $[a, x]$ in $[a, y]$, lahko to enakost zapišemo v obliki $2[a, x][a, y] = 0$. Po predpostavki je to mogoče le takrat, ko je $[a, x][a, y] = 0$. Če v tej enakosti zamenjamo y z yx

³ Kolobarje $\mathcal{K}$ z lastnostjo $a\mathcal{K}a \neq 0$ za vsak $a \neq 0$ imenujemo *polprakolobarji*. V literaturi se kot definicija pogosteje navaja ekvivalentni pogoj, da $\mathcal{K}$ ne vsebuje nilpotentnih idealov.

in uporabimo formulo $[a, yx] = [a, y]x + y[a, x]$, dobimo $[a, x]\mathcal{K}[a, x] = \{0\}$. Torej pa je $[a, x] = 0$ za poljuben $x \in \mathcal{K}$, torej je $a \in \mathcal{Z}(\mathcal{K})$.

Bolj zanimivi so nekomutativni Liejevi ideali. Naslednji izrek pove, da so ti v tesni zvezi z dvostranskimi ideali.

Izrek. *Naj bo $\mathcal{L}$ nekomutativen Liejev ideal kolobarja $\mathcal{K}$. Potem obstaja tak neničeln dvostranski ideal $\mathcal{I}$ kolobarja $\mathcal{K}$, da je $[\mathcal{I}, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{L}$.*

Dokaz. Vpeljimo množico

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{u \in \mathcal{K} \mid [u, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{L}\}.$$

Dokazati moramo, da $\tilde{\mathcal{L}}$ vsebuje neničeln dvostranski ideal kolobarja $\mathcal{K}$.

Očitno je $\tilde{\mathcal{L}}$ za seštevanje podgrupa $\mathcal{K}$. Seveda je $\mathcal{L} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$, saj je $\mathcal{L}$ Liejev ideal. Od tod sledi, da je $\tilde{\mathcal{L}}$ Liejev ideal.

Naj bosta $u, v \in \tilde{\mathcal{L}}$. Za poljuben $x \in \mathcal{K}$ je potem $[u, vx], [v, xu] \in \mathcal{L}$ in zato

$$[uv, x] = [u, vx] + [v, xu] \in \mathcal{L}.$$

Torej je $uv \in \tilde{\mathcal{L}}$. Dokazali smo, da je Liejev ideal $\tilde{\mathcal{L}}$ zaprt tudi za običajno množenje, torej je podkolobar kolobarja $\mathcal{K}$.

Naj bo $\mathcal{I}$ dvostranski ideal kolobarja $\mathcal{K}$, generiran z $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$. Po predpostavki je $\mathcal{L}$ nekomutativen, zato $\mathcal{I} \neq \{0\}$. Pokažimo, da je $\mathcal{I} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$. Dokazati moramo, da za poljubne $a, b \in \mathcal{L}$ in $x, y \in \mathcal{K}$ velja $[a, b] \in \tilde{\mathcal{L}}$, $[a, b]x \in \tilde{\mathcal{L}}$, $y[a, b] \in \tilde{\mathcal{L}}$ in $y[a, b]x \in \tilde{\mathcal{L}}$. Prva izmed naštetih lastnosti očitno velja, saj je $\mathcal{L}$ Liejev ideal, vsebovan v $\tilde{\mathcal{L}}$. Ker je $\tilde{\mathcal{L}}$ podkolobar, iz enakosti $[a, b]x = [a, bx] - b[a, x]$ sledi, da je $[a, b]\mathcal{K} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$. Podobno vidimo, da je $\mathcal{K}[a, b] \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$. Nazadnje velja še

$$\begin{aligned} y[a, b]x &= [y[a, b], x] + xy[a, b] \in \\ &[\mathcal{K}[a, b], \mathcal{K}] + \mathcal{K}[a, b] \subseteq [\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{K}] + \tilde{\mathcal{L}} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

S tem je izrek dokazan. ■

Naš naslednji cilj je opisati Liejeve ideale kolobarja $\mathcal{M}_n$. Potrebovali bomo nekaj lastnosti tega kolobarja:

- (a) $A\mathcal{M}_nA \neq \{0\}$, če $A \in \mathcal{M}_n$ in $A \neq 0$;
- (b) $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n) = \mathcal{O}I$, kjer je I identiteta;
- (c) $\mathcal{M}_n$ in $\{0\}$ sta edina dvostranska ideala kolobarja $\mathcal{M}_n$.

Vse tri lastnosti so dobro znane, njihovi dokazi pa enostavni; zato jih prepuščamo bralcu. S pomočjo enakosti $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ bo delo lažje.

Posledica 1. *Naj bo množica $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_n$ podgrupa $\mathcal{M}_n$ za seštevanje. Potem je $\mathcal{L}$ Liejev ideal kolobarja $\mathcal{M}_n$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{L} \supseteq \text{sl}_n$ ali $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}I$.*

Dokaz. Če je $\mathcal{L} \supseteq \mathfrak{sl}_n$ ali $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{OI}$, je $\mathcal{L}$ gotovo Liejev ideal (glej primera 2 in 4).

Naj bo $\mathcal{L}$ Liejev ideal. Če je komutativen, potem iz leme ter trditev (a) in (b) takoj sledi, da je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{OI}$. Naj bo torej $\mathcal{L}$ nekomutativen. Izrek in trditev (c) povesta, da tedaj $\mathcal{L}$ vsebuje Liejev ideal $[\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n]$. Pokazali smo že (glej primer 4), da je $[\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n] = \mathfrak{sl}_n$.

Ker je razsežnost podprostora $\mathfrak{sl}_n$ enaka $n^2 - 1$, razsežnost podprostora $\mathcal{OI}$ pa enaka 1, iz posledice 1 takoj sledi tale ugotovitev.

Posledica 2. *Edini Liejevi ideali kolobarja $\mathcal{M}_n$, ki so hkrati vektorski podprostori $\mathcal{M}_n$, so $\{0\}$, $\mathcal{OI}$, $\mathfrak{sl}_n$ in $\mathcal{M}_n$.*

Na podoben način razmislimo, da so $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\{ai + bj + ck \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ in $\mathcal{H}$ edini Liejevi ideali obsega realnih kvaternionov $\mathcal{H}$, ki so hkrati realni podprostori.

Vsaka matrika iz $\mathcal{M}_n$ se lahko zapiše kot linearna kombinacija projektorjev (t.j. idempotentnih matrik) iz $\mathcal{M}_n$. Najlaže to vidimo tako, da na ta način zapišemo vse matrike E_{ij} , ki so baza prostora $\mathcal{M}_n$. Matrike E_{ii} so že same projektorji, medtem ko za $i \neq j$ velja $E_{ij} = \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2$, kjer sta $P_1 = E_{ii} + E_{ij}$ in $P_2 = E_{ii} - E_{ij}$ projektorja. Manj očiten je odgovor na tole vprašanje: Katere matrike so linearne kombinacije projektorjev s celoštevilskimi koeficienti? Sled vsake take matrike mora biti celo število, saj je taka sled vsakega projektorja (natančneje, sled vsakega projektorja je enaka njegovemu rangju – to sledi iz dejstva, da imajo podobne matrike iste sledi, in iz diagonalne oblike projektorja, katerega edini lastni vrednosti sta 0 in 1). Velja pa tudi obratno.

Posledica 3. *Matrika $A \in \mathcal{M}_n$ je linearna kombinacija projektorjev s celoštevilskimi koeficienti natanko tedaj, ko je njena sled celo število.*

Dokaz. Ugotovitev iz primera 6 lahko povemo takole: Množica $\mathcal{P}$ vseh linearnih kombinacij projektorjev s celoštevilskimi koeficienti je Liejev ideal. Posledica 1 zato pove, da $\mathcal{P}$ vsebuje vse matrike s sledjo 0. Naj bo A poljubna matrika s celoštevilsko sledjo. Sled matrike $A - \text{sl}(A)E_{11}$ je enaka 0, zato je $A - \text{sl}(A)E_{11} \in \mathcal{P}$; potem pa je tudi $A = (A - \text{sl}(A)E_{11}) + \text{sl}(A)E_{11} \in \mathcal{P}$.

Kot zanimivost omenimo, da je izražanje omejenih linearnih operatorjev na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru s pomočjo projektorjev – presenetljivo – enostavnejše. Vsak tak operator je namreč vsota petih projektorjev [3].

Naj bo $A \in \mathcal{M}_n$. Z $\mathcal{L}(A)$ označimo linearno lupino vseh matriki A podobnih matrik. Elementi množice $\mathcal{L}(A)$ so torej vsote $\sum_{i=1}^k \lambda_i T_i^{-1} A T_i$, kjer so $\lambda_i \in \mathcal{O}$ in so $T_i \in \mathcal{M}_n$ obrnljive matrike. S pomočjo posledice 2 bomo za poljubno matriko A natančno opredelili $\mathcal{L}(A)$. Pomagali si bomo tudi z eksponentno funkcijo. Spomnimo se, da za poljubno matriko $X \in \mathcal{M}_n$

definiramo matriko e^X kot vsoto vrste $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ (tu je $X^0 = I$). Dobro je znano, da je matrika e^X obrnljiva in da je njen inverz matrika e^{-X} .

Posledica 4. Naj bo $A \in \mathcal{M}_n$.

- (i) Če je $A = 0$, potem je $\mathcal{L}(A) = \{0\}$.
- (ii) Če je $A \in \mathcal{OI}$ in $A \neq 0$, potem je $\mathcal{L}(A) = \mathcal{OI}$.
- (iii) Če je $A \in \mathfrak{sl}_n$ in $A \neq 0$, potem je $\mathcal{L}(A) = \mathfrak{sl}_n$.
- (iv) Če $A \notin \mathfrak{sl}_n$ in $A \notin \mathcal{OI}$, potem je $\mathcal{L}(A) = \mathcal{M}_n$.

Dokaz. Naj bo B poljubna matrika iz prostora $\mathcal{L}(A)$. Lahko je videti, da je tudi vsaka matriki B podobna matrika vsebovana v $\mathcal{L}(A)$. Če je $X \in \mathcal{M}_n$ poljubna matrika, je torej $e^{-X} B e^X - B \in \mathcal{L}(A)$. Zato je s predpisom

$$f(\lambda) = \lambda^{-1}(e^{-\lambda X} B e^{\lambda X} - B)$$

definirana funkcija iz $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ v $\mathcal{L}(A)$. Z razvojem v vrsto dobimo

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^{-1}((I - \lambda X + \frac{\lambda^2}{2!} X^2 - \dots) B (I + \lambda X + \frac{\lambda^2}{2!} X^2 + \dots) - B) = \\ &= \lambda^{-1}((B + \lambda[B, X] + \frac{\lambda^2}{2!} [[B, X], X] + \dots) - B) = \\ &= [B, X] + \frac{\lambda}{2!} [[B, X], X] + \dots \end{aligned}$$

Iz tega zapisa razberemo, da je $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = [B, X]$. Ker je $f(\lambda) \in \mathcal{L}(A)$ za vsak $\lambda \neq 0$ in ker je $\mathcal{L}(A)$ kot končno razsežen vektorski prostor zaprta množica, lahko sklenemo, da je $[B, X] \in \mathcal{L}(A)$. Torej je $\mathcal{L}(A)$ Liejev ideal.

Ker je $\mathcal{L}(A)$ hkrati vektorski prostor, je po posledici 2 lahko le eden izmed štirih prostorov $\{0\}$, $\mathcal{OI}$, $\mathfrak{sl}_n$ ali $\mathcal{M}_n$.

Trditev (iv) je sedaj očitna. Naj bo $A \in \mathfrak{sl}_n$. Ker imajo podobne matrike iste sledi, je $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathfrak{sl}_n$. Če $A \neq 0$, tako ni druge možnosti, kot da je $\mathcal{L}(A) = \mathfrak{sl}_n$. Torej velja trditev (iii). Trditvi (i) in (ii) sta trivialni. Dokaz je končan. ■

Omenili smo že, da je vsaka kvadratna matrika linearna kombinacija projektorjev. S pomočjo posledice 4 lahko dokažemo precej več. Naj bo P poljuben projektor ranga k , kjer je $1 \leq k \leq n-1$. Vsaka podobna matrika je prav tako projektor ranga k . Ker je $\text{sl}(P) = k \neq 0$ in ker $P \notin \mathcal{OI}$, iz trditve (iv) posledice 4 sledi tale rezultat.

Posledica 5. Naj bo k poljubno naravno število, manjše od n . Vsaka kvadratna matrika reda n je linearna kombinacija projektorjev ranga k .

Na koncu povejmo, da bi lahko uporabnost zveze med Liejevimi in dvostranskimi ideali ilustrirali na precej splošnejših kolobarjih, kot je kolobar

matrik $\mathcal{M}_n$ (glej prvo poglavje Hersteinove⁴ knjige [1] in njegov članek [2]). Toda tedaj bi članek bil nemara manj razumljiv in pregleden. Do dobljenih rezultatov o kolobarju matrik bi se seveda dalo dokopati tudi s standardnimi metodami linearne algebre. Na primeru kolobarja $\mathcal{M}_n$ smo želeli le ponazoriti, kako učinkovita je lahko povsem elementarna teorija kolobarjev.

LITERATURA

- [1] I. N. Herstein, *Topics in ring theory*, The University of Chicago Press, Chicago, 1969.
 - [2] I. N. Herstein, *On the multiplicative group of a Banach algebra*, Sympos. Math. 8 (1972), 227–232.
 - [3] C. Percy, D. Topping, *Sums of small numbers of idempotents*, Mich. Math. J. 14 (1967), 453–465.
-

⁴ I. N. Herstein (1923–1988), ameriški matematik židovskega rodu, je bil eden najbolj uveljavljenih strokovnjakov za teorijo nekomutativnih kolobarjev. Znan je tudi kot pisec izvrstnih knjig z različnih področij algebre ter mentor mnogih priznanih matematikov. Glavne ideje, na katerih temelji ta članek, lahko pripišemo njemu.

NOVE KNJIGE

ESSAYS ON FOURIER ANALYSIS IN HONOUR OF ELIAS M. STEIN, C. Pfefferman, R. Pfefferman, S. Wainger, Editors. Princeton Mathematics Series No. 42, Princeton University Press 1995, Princeton, New Jersey. 384 str.

Kot razberemo iz naslova, je knjiga posvečena prof. E. M. Steinu ob njegovi šestdesetletnici. Delo obsega 15 poglavij, vsako je napisal drug avtor. Večji del so ali sodelavci ali učenci prof. Steina. Vsako od 15 poglavij obravnava področje matematične analize, h kateremu je Stein znatno prispeval, pri nekaterih je celo bistveno vplival na njihov razvoj.

Naj omenimo nekaj teh področij. Stein je dokazal močno posplošitev izreka o interpolaciji linearnih zveznih operatorjev v L^p prostorih. Izredno pomembni so njegovi prispevki v teoriji reprezentacij polenostavnih Liejeveih grup, kar je pomembno tudi za teoretično fiziko. Prispeval je k razvoju Fourierovih transformacij v Hardyjevih prostorih in k teoriji singularnih integralnih transformacij. Dobršen del svojega raziskovanja je posvetil teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk in študiju parcialnih diferencialnih enačb, ki se pri tem naravno pojavijo. Zanimivi so njegovi rezultati o odvajanju funkcij in o lastnostih prostorov tipa Soboljeva in Besova.

Z zgornjimi kratkimi navedbami še zdaleč nismo izčrpali vseh področij, na katerih je prof. Stein deloval in še deluje, saj je doslej objavil 143 člankov in monografij.

Knjiga daje poleg pregleda znanstvenega dela slavljenca tudi lep pregled stanja znanja na področjih matematične analize, ki jih prispevki obravnavajo.

Anton Suhadolc

ELEKTRIČNI IN MAGNETNI POTENCIAL GIBAJOČEGA SE NABITEGA DELCA

PRIMOŽ POTOČNIK

Math. Subj. Class. (1991) 78A35, 78A25

Članek obravnava problem računanja električnega in magnetnega potenciala gibajočega se delca. Poudarek je na strogi matematični izpeljavi formul. Končni rezultat nam omogoča s preprosto numerično metodo izračunati električni in magnetni potencial, ki ga delec povzroči.

ELECTRICAL AND MAGNETIC POTENTIAL OF A MOVING CHARGED PARTICLE

The problem of computing the electrical and magnetic potential of a moving charged particle is considered. The formulas are proved with mathematical exactness. The final result enables us to compute the EM potential by a simple numerical method.

Pričujoči članek je nastal na pobudo profesorja S. Pahorja, ki poskuša s svojimi predavanji že kar nekaj let študentom matematike prikazati matematiko, kot jo vidi fizik. V članku pa bom podal primer, kako na fizikalni problem gleda matematik. Pri reševanju fizikalnih nalog se večkrat zadovoljimo le s formalno izpeljavo rešitve, ne meneč se za to, ali so bili vsi koraki v izpeljavi povsem upravičeni. Fizika takšen prijem ne moti, saj ima vedno pri roki zanesljivega sodnika pravilnosti svojega dela — poskus. Mislim pa, da je zanimivo (tako za matematika kakor za fizika), da sem in tja kakšen problem obdelamo z vso matematično strogostjo. Kot bo pokazal obravnavani primer, je sam formalni račun ponavadi mnogo enostavnejši od strogega dokaza njegove pravilnosti, ki dostikrat zahteva uporabo ne povsem trivialnih matematičnih sredstev.

Mislimo si, da je električni naboj zvezno porazdeljen po prostoru in da njegovo gostoto v vsakem trenutku opisuje skalarno polje $\rho(\mathbf{r}, t)$. Gostoto električnega toka opišimo z vektorskim poljem $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Privzemimo še, da je naboj pred časom $t = 0$ miroval. Iz teh podatkov bi radi izračunali električno in magnetno polje v danem trenutku in na danem kraju. Računanja se lotimo posredno, prek potencialnih količin $A(\mathbf{r}, t)$ in $\phi(\mathbf{r}, t)$, za kateri pri vsakem času t velja:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } A(\mathbf{r}) \text{ in } \left(\mathbf{E} + \frac{\partial A}{\partial t} \right)(\mathbf{r}) = - \text{grad } \phi(\mathbf{r}).$$

Iz maxwelskih enačb se da izpeljati, da $\mathbf{A}$ in ϕ zadoščata enačbama

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \text{ in } \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Pri tem z izrazom $\Delta \mathbf{A}$ označimo tako imenovani vektorski Laplaceov odvod, ki je enak navadnemu Laplaceovemu odvodu, uporabljenemu po komponentah. Z uporabo Fourierove in Laplaceove transformacije pridemo do rešitve, izražene z integralom po integracijski spremenljivki $\mathbf{r}'$, ki teče po vsem prostoru. (Vsi integrali v nadaljevanju bodo integrirani po vsem prostoru.) Za dodatne informacije v zvezi s to izpeljavo naj si bralec ogleda [6].

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1a)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1b)$$

Kaj pa, če naboj ni porazdeljen zvezno? Za primer se lotimo sledeče naloge.

Nabit delec z nabojem e se giblje po poti, ki jo podaja funkcija $s(t)$. Delec naj pred časom $t = 0$ miruje. V naravi si težko predstavljamo pot, ki ne bi bila zvezno odvedljiva, saj gibanja teles uravnava 2. Newtonov zakon, v katerem nastopa drugi odvod poti po času. V skladu s tem brez škode predpostavimo, da je funkcija s vsaj enkrat zvezno odvedljiva in njen odvod označimo standardno z $\mathbf{v}$. Poleg tega nam narava podaja še eno omejitev, namreč hitrost v ne sme nikoli doseči svetlobne hitrosti c . Takšna je torej naša naloga. Kako naj se je lotimo?

Nabit delec si ponavadi idealizirano predstavljamo kot točkast naboj, torej naboj, ki je *skoncentriran* v neki točki. Ta predstava pa se na žalost ne sklada najbolje z jezikom gostote električnega naboja. Zato si pomagajmo drugače. Delec si predstavljajmo kot kroglico z majhnim polmerom a . Znotraj te kroglice naj bo naboj porazdeljen enakomerno. Čim manjši polmer vzamemo (denimo $\frac{a}{n}$ za čim večje naravno število n), bolj bo ta slika ustrezala idealizirani predstavi točkastega naboja. Za vsako naravno število n definirajmo funkcijo:

$$\delta_n(\mathbf{x}) := \frac{3n^3}{4\pi a^3} \quad \text{za} \quad |\mathbf{x}| \leq \frac{a}{n} \quad \text{in} \quad \delta_n(\mathbf{x}) := 0 \text{ sicer.}$$

Te funkcije so *normirane*:

$$\int \delta_n(\mathbf{x}) dV = 1.$$

S temi definicijami gostoto električnega naboja in tokov zapišemo takole:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= e \delta_n(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= e \mathbf{v}(t) \delta_n(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)).\end{aligned}$$

S temi podatki lahko po formulah (1) določimo količini ϕ in $\mathbf{A}$. Ker poteka računanje količine $\mathbf{A}$ analogno, bomo v nadaljevanju obravnavali le ϕ . Razmislili smo že, da večanje števila n daje vse boljšo sliko dejanskega stanja. Zato lahko upravičeno pričakujemo, da obstaja limita

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\delta_n(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1')$$

in da je to količina, ki jo iščemo. Zračunajmo zgornji integral. V ta namen uvedimo substitucijo $\mathbf{r}'' := \mathbf{h}(\mathbf{r}')$, kjer je $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikava, definirana s predpisom

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}\right). \quad (2)$$

Definirajmo posebej še $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ s predpisom

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}\right). \quad (3)$$

Vidimo, da velja

$$\mathbf{h} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \mathbf{g}. \quad (4)$$

Preslikava $\mathbf{x} \mapsto t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}$ je diferenciable povsod razen v točki $\mathbf{r}$. Zato sta povsod, razen v tej točki, diferenciable tudi preslikavi $\mathbf{g}$ in $\mathbf{h}$. Kasneje bomo dokazali, da je preslikava $\mathbf{h}$ bijektivna in da je njena Jacobijeva matrika $J\mathbf{h}$ povsod nesingularna (razen v točki $\mathbf{r}$, kjer sploh ne obstaja). Uporabimo izrek o inverzni preslikavi, ki nam pove, da je preslikava $\mathbf{h}$ difeomorfizem povsod razen na množici z enim samim elementom, se pravi na množici z mero nič. To bo upravičilo substitucijo pod integralskim znakom. Dokaza izrekov o inverzni preslikavi in substituciji v integralu lahko bralec najde v [1] na straneh 348 in 357 ali pa v [2] na straneh 221 in 252.

Upoštevajmo (1') in (2) ter zapišimo:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\delta_n(\mathbf{h}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\delta_n(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\det J\mathbf{h}(\mathbf{r}')|} dV''.\end{aligned} \quad (1'')$$

Zadnji integral integrira po spremenljivki $\mathbf{r}''$, oznaka $\mathbf{r}'$ pa stoji namesto $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{r}'')$.

Označimo

$$f(\mathbf{r}'') := \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\det \mathbf{J} \mathbf{h}(\mathbf{r}')|}.$$

Naša naloga je izračunati limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(\mathbf{x}) \delta_n(\mathbf{x}) dV. \quad (5)$$

Če je f zvezna v točki 0, je ta limita, kot bralec, ki je seznanjen s teorijo distribucij, gotovo ve, enaka vrednosti funkcije f v točki 0. O tem se lahko hitro prepričamo takole:

Vzemimo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v točki 0, obstaja naravno število n , da velja sklep $|\mathbf{x}| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(0)| < \varepsilon$. Tedaj za $m \geq n$ velja naslednja ocena:

$$\begin{aligned} \left| \int f(\mathbf{x}) \delta_m(\mathbf{x}) dV - f(0) \right| &= \left| \int f(\mathbf{x}) \delta_m(\mathbf{x}) dV - \int f(0) \delta_m(\mathbf{x}) dV \right| = \\ &= \left| \int (f(\mathbf{x}) - f(0)) \delta_m(\mathbf{x}) dV \right| \leq \int |f(\mathbf{x}) - f(0)| \delta_m(\mathbf{x}) dV < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pri zgornjem računu smo seveda upoštevali, da so integrali funkcij δ_m enaki 1. Tako smo res dokazali zgornjo formulo.

Kdaj pa je v našem primeru f nezvezna v točki 0? Veljati mora $\mathbf{r} - \mathbf{h}^{-1}(0) = 0$ ali ekvivalentno $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0$ oziroma $\mathbf{r} = \mathbf{s}(t)$. Z drugimi besedami, funkcija f je v 0 nezvezna le tedaj, ko hočemo računati električni potencial v točki, v kateri se trenutno nahaja naboj. Tedaj je funkcija f v 0 neomejena in hitro se prepričamo, da je neomejeno tudi zaporedje integralov (5). Za fizika pričakovan rezultat.

Zgornji razmisleki nam povedo, da lahko računamo električni potencial ϕ po formuli

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\det \mathbf{J} \mathbf{h}(\mathbf{r}')|} \quad \text{pri } \mathbf{h}(\mathbf{r}') = 0. \quad (1''')$$

Kot vidimo, moramo vsakič, ko računamo ϕ , rešiti enačbo $\mathbf{h}(\mathbf{r}') = 0$ in nato še izračunati Jacobijevo determinanto preslikave $\mathbf{h}$ v rešitvi te enačbe.

Lotimo se najprej računanja Jacobijeve matrike preslikave $\mathbf{h}$. Kot smo že napovedali, bo obstajala povsod, razen v točki $\mathbf{r}$. V nadaljevanju tega računa naj bo $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$. Upoštevajmo (4) in dobimo:

$$\mathbf{J} \mathbf{h}(\mathbf{r}') = \mathbf{J} \text{Id}_{\mathbb{R}^3_2}(\mathbf{r}') - \mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{r}') = \mathbf{I} - \mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{r}').$$

Od tod dalje bi lahko računali klasično, tako da bi razpisali vse preslikave po komponentah v kartezijskem koordinatnem sistemu. Vendar se bomo tega

lotili elegantneje, brez računanja po komponentah. Preslikavo $\mathbf{g}$ zapišimo kot kompozitum:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r} - \mathbf{x}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|} & \mathbb{R} & \xrightarrow{x \mapsto t - \frac{1}{c}x} & \mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{r}' & \longmapsto & \mathbf{r} - \mathbf{r}' & \longmapsto & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| & \longmapsto & t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \longmapsto \mathbf{g}(\mathbf{r}'). \end{array}$$

Kot vidimo, bomo potrebovali Jacobijevo matriko preslikave

$$a : \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}| \quad \text{ali} \quad a(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Izračunajmo:

$$\frac{\partial a}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|}.$$

Tako dobimo:

$$\mathbf{J} a(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T}{|\mathbf{x}|}.$$

Upoštevajmo še enakost $\mathbf{J} \mathbf{s}(t) = \mathbf{v}(t)$ in verižno pravilo ter zapišimo:

$$\mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{r}') = \mathbf{v}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot (-I) = \frac{\mathbf{v}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{c} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

$\mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{r}')$ je torej diada, se pravi matrika ranga 1. Zračunajmo njen spekter in operatorsko normo. Ker je rang enak 1, je 0 dvojna lastna vrednost. Katera je tretja? Označimo

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{c}, \quad \mathbf{y} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Upoštevajmo asociativnost matričnega produkta in enačimo matrike dimenzije 1 s skalarji. Tedaj je

$$\mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{r}') \mathbf{z} = (\mathbf{x} \mathbf{y}^T) \mathbf{z} = \mathbf{x} (\mathbf{y}^T \mathbf{z}) = (\mathbf{y}^T \mathbf{z}) \mathbf{x}.$$

Iz tega je razvidno, da je $\mathbf{y}^T \mathbf{x}$ lastna vrednost pri lastnem vektorju $\mathbf{x}$. S pomočjo neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskega lahko ocenimo tudi operatorsko normo.

$$\|\mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{r}') \mathbf{z}\| = \|(\mathbf{y}^T \mathbf{z}) \mathbf{x}\| = |\mathbf{y}^T \mathbf{z}| \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{x}\|.$$

To pa pomeni

$$\|J g(\mathbf{r}')\| \leq \left\| \frac{\mathbf{v}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c} \right\| \cdot \left\| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\| < 1. \quad (6)$$

Zaradi enostavnosti nadaljnjega računa bomo dodatno privzeli še to, da je hitrost delca ves čas omejena z neko konstantno hitrostjo, manjšo od svetlobne hitrosti. V tem primeru so norme $\|J g(\mathbf{r}')\|$ enakomerno omejene za vse $\mathbf{r}'$ z neko vrednostjo, ki je manjša od 1.

Zdaj, ko poznamo lastne vrednosti preslikave g , z lahkoto izračunamo determinanto Jacobijeve matrike preslikave h . Spomniti se moramo, da je determinanta matrike enaka produktu njenih lastnih vrednosti. Lastne vrednosti matrike $J h(\mathbf{r}')$ pa so zaradi (4) enake $1 - \lambda_i$, kjer so λ_i lastne vrednosti matrike $J g(\mathbf{r}')$. Te pa smo že izračunali:

$$\begin{aligned} \det J h(\mathbf{r}') &= (1 - 0)(1 - 0)(1 - \mathbf{y}^T \mathbf{x}) = \\ &= 1 - \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 1 - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\mathbf{v}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c}. \end{aligned} \quad (7)$$

Sedaj lahko to upoštevamo v formuli (1''') in zapišemo končni rezultat:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T \mathbf{v}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\mathbf{v}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T \mathbf{v}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}. \end{aligned}$$

Pri tem moramo seveda za $\mathbf{r}'$, ki nastopa v zgornjem izrazu, vstaviti rešitev enačbe $h(\mathbf{r}') = 0$ oziroma rešitev enačbe $\mathbf{r}' = \mathbf{s}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})$.

Da pa bo ta rezultat res dokazan, moramo preveriti še naslednje:

1. Jacobijeva matrika preslikave h je povsod, kjer je definirana, tudi neregularna.

2. Preslikava $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je bijektivna.

Prva točka je jasna posledica formule (7) in tega, da je $\|\mathbf{y}\| = 1$ in $\|\mathbf{x}\| < 1$.

Z drugo točko pa bomo imeli nekaj več dela.

Izberimo poljuben $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Če nam uspe najti $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, da bo $\mathbf{b} = h(\mathbf{r}')$, in če za vsak $\mathbf{b}$ obstaja le en tak $\mathbf{r}'$, bo s tem bijektivnost dokazana. Takšen $\mathbf{r}'$ mora zadoščati enačbi

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right).$$

Povedano drugače, preslikava $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definirana s predpisom

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \mathbf{s} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c} \right),$$

mora imeti natanko eno negibno točko. To lastnost pa nam bo zagotovil Banachov skrčitveni princip (glej [4]), če le dokažemo, da je preslikava Φ skrčitev. Iščemo torej število $q < 1$, da bo za poljubna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ veljalo

$$\|\Phi \mathbf{x} - \Phi \mathbf{y}\| \leq q \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (*)$$

Zaradi privzetka, da se hitrost delca nikoli ne približa svetlobni hitrosti, obstaja tako število $q < 1$, da je $\frac{\|\mathbf{v}(t)\|}{c} \leq q$ v vsakem trenutku t . Neenakost (6) nam tedaj zagotavlja, da velja

$$\|\mathbf{J} \Phi(\mathbf{x})\| \leq q, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{r}. \quad (8)$$

saj se preslikavi Φ in $\mathbf{g}$ ločita le za konstanto in imata zato enaki Jacobijeve matriki.

Dokažimo sedaj tole pomožno

Trditev. Naj bosta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ dve točki v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ in naj bo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preslikava, ki je zvezna v vsaki točki daljice zveznice točk $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$. Denimo, da je $\mathbf{F}$ še diferenciable v vsaki notranji točki te zveznice. Tedaj velja ocena

$$\|\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y}\| \leq \sup_{\vartheta \in (0,1)} \|\mathbf{J} \mathbf{F} (\vartheta \mathbf{x} + (1 - \vartheta) \mathbf{y})\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (9)$$

Opomba. Analogna trditev velja tudi za preslikave med splošnimi Banachovimi prostori, ki imajo smerni odvod v smeri zveznice. Kogar zanima splošnejši primer, naj si ogleda [3], stran 472.

Dokaz. Definirajmo funkcijo

$$f(\vartheta) = (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y})^T \cdot \mathbf{F} (\vartheta \mathbf{x} + (1 - \vartheta) \mathbf{y}).$$

Ta funkcija je po predpostavkah zvezna na zaprtem intervalu $[0, 1]$ in odvedljiva na odprtem intervalu $(0, 1)$. Dodatno ima še lastnost

$$f(1) = (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y})^T \cdot \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad f(0) = (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y})^T \cdot \mathbf{F}\mathbf{y}.$$

Z uporabo verižnega pravila dobimo njen odvod v točki ϑ :

$$f'(\vartheta) = (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y})^T \cdot \mathbf{J} \mathbf{F} (\vartheta \mathbf{x} + (1 - \vartheta) \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Uporabimo Lagrangeov izrek in dobimo, da za neki $\vartheta_o \in (0, 1)$ velja

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y})^T \cdot (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y}) &= f(1) - f(0) = \\ &= f'(\vartheta_o) = (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y})^T \cdot \mathbf{J}\mathbf{F}(\vartheta_o\mathbf{x} + (1 - \vartheta_o)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Iz tega pa sledi ocena

$$\|\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y}\| \cdot \sup_{\vartheta \in (0,1)} \|\mathbf{J}\mathbf{F}(\vartheta\mathbf{x} + (1 - \vartheta)\mathbf{y})\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

S tem je trditev dokazana.

Vrnimo se k našemu problemu. Vzemimo poljubni točki $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ in najprej privzemimo, da točka $\mathbf{r}$ (kjer Φ ni diferenciable) ne leži v notranjosti njune zveznice. (Lahko pa je $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ ali $\mathbf{y} = \mathbf{r}$.) V tem primeru nam relacijo (*) zagotavlja pravkar dokazana trditev in ocena (8). Če pa se točka $\mathbf{r}$ znajde ravno med $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, lahko ocenjujemo v dveh delih

$$\|\Phi\mathbf{x} - \Phi\mathbf{y}\| \leq \|\Phi\mathbf{x} - \Phi\mathbf{r}\| + \|\Phi\mathbf{r} - \Phi\mathbf{y}\| \leq q(\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\| + \|\mathbf{r} - \mathbf{y}\|) = q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

saj sta vektorja $\mathbf{x} - \mathbf{r}$ in $\mathbf{r} - \mathbf{y}$ kolinearna in enako usmerjena. S tem smo dokazali, da je preslikava Φ res skrčitev in zato $\mathbf{h}$ res bijekcija.

Tako, poravnali smo vse dolgove in upravičili vse korake naše izpeljave. Postavi pa se vprašanje, kako izpeljane rezultate uporabiti pri konkretnem računanju.

Opazimo lahko, da bi bili izrazitvi za količini ϕ in $\mathbf{A}$ relativno enostavni, če bi le znali enostavno določiti $\mathbf{r}'$. Kako torej rešiti enačbo

$$\mathbf{r}' = \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) ?$$

Izkaže se, da je že pri enostavnih poteh $\mathbf{s}(t)$ analitično reševanje težko. Zato pa se kar sama ponuja numerična pot z uporabo navadne iteracije (glej [5]). Konvergenca te metode bo tem hitrejša, čim manjša bo norma $\|\mathbf{J}\Phi(\mathbf{x})\|$. Ta pa bo tem manjša, čim manjša bo hitrost delca v primeri s svetlobno hitrostjo.

LITERATURA

- [1] M. H. Protter, C. B. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, New York 1977.
- [2] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [3] A. N. Kolmogorov, C. V. Fomin, *Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza*, Nauka, Moskva 1968.
- [4] Jože Vrabec, *Metrični prostori*, DMFA, Ljubljana 1990.
- [5] Zvonimir Bohte, *Numerične metode*, DMFA, Ljubljana 1991.
- [6] Philip R. Wallace, *Mathematical Analysis of Physical Problems*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1972

EINSTEIN IN KVANTI

JANEZ STRNAD

PACS 01.65.+g

Fiziki so kvante elektromagnetnega polja sprejeli več kot dvajset let po tem, ko jih je vpeljal M. Planck. Celo A. Einstein je v prizadevanju, da bi jih razumel, v prvi polovici tega časa nekajkrat spremenil mnenje. Bežen pogled na ta del razvoja fizike omogoči tudi, da vsaj delno razumemo sedanje predstavne zadrege.

EINSTEIN AND QUANTA

Physicists accepted quanta of the electromagnetic field more than twenty years after they were introduced by M. Planck. Even A. Einstein in the first half of this period in his struggle to understand them several times changed his opinion. A cursory glance at this part of the development of physics also enables one to understand better, at least partially, contemporary conceptual difficulties.

Uvod

Energijske kvante je prvič omenil Max Planck decembra 1900 na zasedanju pruske akademije znanosti, ko je z njimi pojasnil ozadje svojega zakona za spektralno gostoto v sevanju črnega telesa [1]. Pred tem je leta 1872 L. Boltzmann uporabil diskretne vrednosti hitrosti, torej tudi diskretne vrednosti kinetične energije, za molekule, da je lahko uporabil svoje statistične enačbe za plin. Že leta 1899 je M. Planck izračunal konstanto h iz Wienovega izraza za spektralno gostoto. Oktobra 1900 je zapisal svoj zakon, ki ga je potem čez mesec dni pojasnil z energijskimi kvanti z energijo $h\nu$. Spočetka jih je v Boltzmannovem duhu imel zgolj za pomožne računske količine in je bil prepričan o valovni naravi svetlobe.

Fluktuacije

Leta 1901 je Albert Einstein osamljen začel objavljati članke iz teoretične fizike. Prvi o površinski napetosti in drugi o kontaktni napetosti nista imela nobenega trajnega učinka [2]. V letih od 1902 do 1904 je v člankih z naslovi *Kinetična teorija toplotnega ravnovesja in drugega zakona termodinamike* [3], *Teorija osnov termodinamike* [4] in *K splošni molekulski teoriji toplote* [5] poskusil razčistiti osnove termodinamike v okviru statistične mehanike. S tem se je lotil težavnega osnovnega vprašanja, v katerem je bilo težko doseči napredek. Ti članki niso vplivali na razvoj fizike. Na koncu tretjega članka je izpeljal povprečni kvadratni odmik energije od njene povprečne vrednosti, ne da bi vedel za delo J. W. Gibbsa [5].

Izpeljava je tekla po običajni poti [6]. V večjem termodinamičnem sistemu pri dani temperaturi omejimo majhen del in ugotavljamo njegovo

energijo W . Njena povprečna vrednost je določena kot

$$\langle W \rangle = \frac{\int W \exp(-W/kT) \rho(W) dW}{\int \exp(-W/kT) \rho(W) dW}.$$

Pri tem je $\rho(W)$ gostota stanj. Izraz odvajamo po temperaturi in dobimo

$$\sigma_W^2 = \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle = kT^2 \partial \langle W \rangle / \partial T. \quad (1)$$

Einstein je poudaril, da je kvadrat efektivnega odmika (1) mera za toplotno stabilnost sistema in da je sistem tem manj stabilen, čim večji je odmik. „Absolutna konstanta k določa torej termično stabilnost sistema. Nazadnje ugotovljena zveza je zanimiva zato, ker ne vsebuje več nobene količine, ki bi spominjala na osnovne privzetke. [...] Če bi bilo mogoče določiti povprečno vrednost kvadrata fluktuacij, bi nazadnje ugotovljena enačba dovolila, da natančno določimo absolutno konstanto. To pa pri sedanjem stanju našega znanja ni mogoče.”

Za idealni enoatomni plin velja $\langle W \rangle = \frac{3}{2} N k T$, če je N število molekul v posodi. Kvadrat relativnega efektivnega odmika energije od njene povprečne vrednosti $\sigma_W^2 / \langle W \rangle^2 = 1 / \frac{3}{2} N$ ni odvisen od prostornine. Drugače je pri sevanju, za katero je $\langle W \rangle = 4 V \sigma T^4 / c$, če uporabimo Stefanov zakon in je σ Stefanova konstanta [7]. V tem primeru je kvadrat relativnega efektivnega odmika energije $\sigma_W^2 / \langle W \rangle^2 = k c / V \sigma T^3$ po pričakovanju tem večji, čim manjša je prostornina. Po Einsteinovem mnenju lahko zato „sploh samo pri fizikalnih sistemih ene same vrste iz izkušnje domnevamo, da jim ustreza energijska fluktuacija, to je pri praznem prostoru, izpolnjenem s temperaturnim sevanjem.”

Sklep je poskusil dodatno utemeljiti. Ocenimo rob kocke s sevanjem, v kateri postane relativni efektivni odmik energije enak 1. Iz enačbe (1) izhaja $V^{1/3} = (k c / \sigma)^{1/3} / T = 0,0042 \text{ m} \cdot \text{K} / T$. To je blizu valovne dolžine, pri kateri je spektralna gostota največja in ki je po Wienovem zakonu $0,0029 \text{ m} \cdot \text{K} / T$. Oboje se po velikostni stopnji sklada in Einstein je članek sklenil z ugotovitvijo, da ujemanja pri veliki splošnosti privzetkov ne gre pripisati naključju.

Mimogrede dodajmo, da s Stefanovo konstanto $\sigma = 2 \pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2$ sledi $V^{1/3} = (15 / 2 \pi^5)^{1/3} h c / k T = 0,290 h c / k T$. Za valovno dolžino pri vrhu spektralne gostote $d j / d \lambda$ dobimo $0,201 h c / k T$, pri vrhu spektralne gostote $d j / d \nu$ pa $0,354 h c / k T$ [7]. Einsteinovi oceni roba kocke, ki je med obema valovnima dolžinama, na prvi pogled ni kaj očitati. Načelno pa je v okviru klasične statistične mehanike sporna, saj za sevanje podobno kot za idealni plin velja $\sigma_W^2 / \langle W \rangle^2 = 1 / N$, če za N vzamemo število neodvisnih nihajnih načinov [2].

Čeprav Einsteinovi članki iz statistične mehanike pred letom 1905 niso imeli izrazitega osebnega pečata in bi jih danes zlahka pripisali komu drugemu, so bili pomembni za njegov osebni razvoj in za poznejšo usmeritev.

Posebno zadnji, najkrajši članek ga je napeljal na to, da je začel razmišljati o sevanju in o Planckovem delu, ki ga je v njem prvič citiral, o pomenu „univerzalne konstante” in o odvisnosti termodinamičnih količin od prostornine. „Einstein je v prvih dveh [statističnih] člankih hotel postaviti statistične temelje termodinamike, vendar mu to ni uspelo. Dobro, da se je odvrnil od temeljnih spoznanj”, pravi A. Pais [2]. Vse tri statistične članke je mogoče imeti za neposredno pripravo na članek o svetlobnih kvantih [8] in posredno na članek o Brownovem gibanju, ki ju je Einstein skupaj s člankom o teoriji relativnosti objavil v svojem „čudežnem letu” 1905. Članki iz tega leta so že nosili njegov neizbrisen pečat in bi si danes težko predstavljali, da bi jih napisal kdo drug.

Leta 1909 se je Einstein k fluktuacijam vrnil v člankih z naslovom *K sedanjemu stanju problema sevanja* [10] in *O razvoju naših pogledov na bistvo in zgradbo sevanja* [11]. Najprej je osnovno enačbo (1) izpeljal po svoje. Sistem pri konstantni temperaturi razdelimo na majhen del, ki mu priredimo količine brez indeksa, in na preostanek, ki mu priredimo količine z indeksom 1. Povprečno energijo sestavljenega sistema razdelimo na ustrezni povprečni energiji: $W + W_1$, pri katerih pa zdaj opustimo ostre oklepaje. Enako storimo z entropijo sestavljenega sistema: $S + S_1$. Naj se energiji za ΔW in ΔW_1 odmakneta od povprečnih ravnovesnih vrednosti W in W_1 , pa se entropija sestavljenega sistema odmakne od ravnovesne vrednosti za

$$\Delta S + \Delta S_1 = \frac{\partial S}{\partial W} \Delta W + \frac{\partial S_1}{\partial W_1} \Delta W_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial W^2} (\Delta W)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial W_1^2} (\Delta W_1)^2 + \dots$$

Odvode izračunamo v ravnovesju. Energija sestavljenega sistema se ohrani in velja $\Delta W + \Delta W_1 = 0$. V ravnovesju je $\partial S / \partial W = \partial S_1 / \partial W_1 (= 1/T)$, tako da prva dva člena na desni strani ne prispevata nič. Odvajajmo zvezi $\partial S / \partial W = 1/T$ in $\partial S_1 / \partial W_1 = 1/T$ po energiji: $\partial^2 S / \partial W^2 = -T^{-2} \partial T / \partial W$ in $\partial^2 S_1 / \partial W_1^2 = -T^{-2} \partial T / \partial W_1$. Odvoda $\partial W / \partial T$ in $\partial W_1 / \partial T$ podajata toplotni kapaciteti pri konstantni prostornini majhnega dela in preostanka sistema. Iz $V \ll V_1$ izhaja $\partial W / \partial T \ll \partial W_1 / \partial T$, tako da preostane

$$\Delta S + \Delta S_1 = \Delta S = -(\Delta W)^2 / 2(\partial W / \partial T) T^2.$$

Boltzmannovo enačbo $\Delta S = k \ln (P/P_0)$ obrnemo in enačbo

$$P = P_0 \exp (\Delta S / k) = P_0 \exp [-(\Delta W)^2 / 2k(\partial W / \partial T) T^2]$$

pojasnimo takole: P je verjetnost, da ima majhen del sistema entropijo ΔS , če je P_0 verjetnost, da naletimo na ta sistem v ravnovesnem stanju. Verjetnost podaja potemtakem Gaussova krivulja s kvadratom razpolovne širine $\sigma_W^2 = kT^2 \partial W / \partial T$, kar se ujema z enačbo (1).

Neposredno zatem je izračunal kvadrat efektivnega odmika energije v sevanju črnega telesa po Planckovem zakonu. Omejimo se na sevanje na ozkem frekvenčnem pasu $\Delta \nu$ okoli frekvence ν . Mislimo si, da so stene votline

neprepustne za sevanje na tem pasu, vse drugo sevanje pa prepuščajo. Sevanju na ozkem frekvenčnem pasu v votlini ustreza po Planckovem zakonu energija [7]:

$$W_\nu = \Delta W = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3[\exp(h\nu/kT) - 1]} V \Delta\nu.$$

Wienov približek $W_\nu = 8\pi h\nu^3 \exp(-h\nu/kT) V \Delta\nu / c^3$ velja pri velikem kvocientu ν/T , Rayleigh-Jeansov približek $W_\nu = 8\pi\nu^2 V \Delta\nu / c^3$ pa pri majhnem kvocientu ν/T .

Z enačbo (1) dobimo kvadrat efektivnega odmika energije od njene povprečne vrednosti na ozkem frekvenčnem pasu:

$$\sigma_W^2 = h\nu W_\nu + \frac{c^3 W_\nu^2}{8\pi\nu^2 V \Delta\nu}. \quad (2)$$

Kvadrat relativnega efektivnega odmika

$$\frac{\sigma_W^2}{W_\nu^2} = \frac{h\nu}{W_\nu} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V \Delta\nu}$$

sestavljata dva člena. Prvi, $W_\nu/h\nu = 1/N_\nu$, je enak obratni vrednosti števila kvantov $\Delta N = N_\nu$ na opazovanem frekvenčnem pasu in je podoben kot pri idealnem plinu. Pravimo, da je značilen za „delce“. Drugi je enak obratni vrednosti števila stanj v sevanju na tem frekvenčnem pasu. Zanj pravimo, da je značilen za valovanje. V Wienovem približku se pojavi samo prvi člen, v Rayleigh-Jeansovem približku pa samo drugi.

Svetlobni kvanti

Vrnimo se v leto 1905 k članku o svetlobnih kvantih [8]. V njem je Einstein izhajal od spoznanja, da izraz za entropijo sevanja pri dovolj visoki frekvenci in dovolj majhni gostoti energije, ko velja za spektralno gostoto Wienov približek, spominja na izraz za entropijo idealnega plina. Entropijo sevanja na ozkem frekvenčnem pasu dobimo z enačbo $S_\nu = \int dW_\nu/T + \text{konst.}$ Iz Wienovega približka izračunamo obratno vrednost temperature: $1/T = (k/h\nu) \ln(c^3 W_\nu / 8\pi h\nu^3 V \Delta\nu)$ in z integriranjem dobimo $S_\nu = -(kW_\nu/h\nu)[\ln(c^3 W_\nu / 8\pi h\nu^3 V \Delta\nu) - 1] + \text{konst.}$ Iz tega izhaja odvisnost entropije sevanja na ozkem frekvenčnem pasu od prostornine:

$$S_\nu - S_{\nu 1} = (kW_\nu/h\nu)(\ln V - \ln V_1) = k \ln(V/V_1)^{N_\nu}.$$

$N_\nu = W_\nu/h\nu$ je število kvantov na ozkem frekvenčnem pasu in entropija S_ν ustreza prostornini sevanja V .

Na drugi strani iz Boltzmannove enačbe za entropijo idealnega plina $S_\nu - S_{\nu 1} = k \ln(V/V_1)^N$, če je $P = (V/V_1)^N$, sledi verjetnost, da naletimo

na eno od N molekul v prostornini V , ki je majhen del prostornine posode V_1 . Do enake enačbe pridemo, ko izračunamo spremembo entropije idealnega plina pri reverzibilni izotermni spremembi.

Za Einsteina so bili tedaj svetlobni kvanti delci, ki jih je dobil s krajevno kvantizacijo elektromagnetnega sevanja. „Zares se mi zdi, da lahko opazovanja ‚sevanja črnega telesa‘, fotoluminiscence, tvorbe katodnih žarkov z ultravijolično svetlobo in drugih skupin pojavov, ki zadevajo izsevanje ali spreminjanje svetlobe, bolje razumemo ob privzetku, da je energija v svetlobi nezvezno porazdeljena po prostoru. Po privzetku, ki ga bomo tu obdelali, v razširjajočem se svetlobnem curku, izhajajočem iz točke, energija ni zvezno porazdeljena na vse večjo in večjo prostornino, ampak sestoji iz končnega števila kvantov, ki so lokalizirani v točkah prostora in ki se gibljejo, ne da bi se delili, in se absorbirajo ali nastanejo le kot celote.[...] Enobarvno sevanje majhne gostote (v okviru veljavnosti Wienove sevalne enačbe) se v toplotnoteoretičnem pogledu vede tako, kot da bi obstajalo izmed seboj neodvisnih energijskih kvantov z velikostjo $h\nu$.” [8]

Einstein tedaj ni nasprotoval valovni teoriji svetlobe. Ker ni mogel postreči s fizikalno sliko o svetlobi, ki bi vsebovala obe lastnosti, je „hevristično” „sprejel začasni privzetek za boljše razumevanje treh pojavov.” [9] S svetlobnimi kvanti je pojasnil Stokesov zakon, po katerem je frekvenca fluorescentne svetlobe manjša ali kvečjemu enaka frekvenci vpadne svetlobe, fotoefekt in ionizacijo zraka z ultravijolično svetlobo. Pri fotoefektu je po ohranitvi energije postavil enačbo za kinetično energijo najhitrejših izbitih elektronov.

Einstein enačbe za fluktuacije energije v sevanju (2) v članku [8] ni zapisal, prvič jo je navedel štiri leta pozneje [10]. Ali je enačbo poznal že pred tem? Domnevajo, da jo je morda poznal že leta 1904 ob pisanju članka [5], ne da bi jo navedel. Vendar nastane pri branju članka [5] vtis, da tedaj Einstein še ni prišel tako daleč. Fluktuacij v [5] namreč ni mogoče povezati ne s prvim ne z drugim členom v enačbi (2). Enačbo (2) pa je utegnil poznati, preden je poslal v objavo članek [8], v katerem je navedel spektralno gostoto po Planckovem zakonu in se pozneje omejil na Wienov približek. S tem bi dokaj neprisiljeno pojasnili, zakaj je v tem članku na treh mestih poudaril, da se je omejil na Wienov približek.

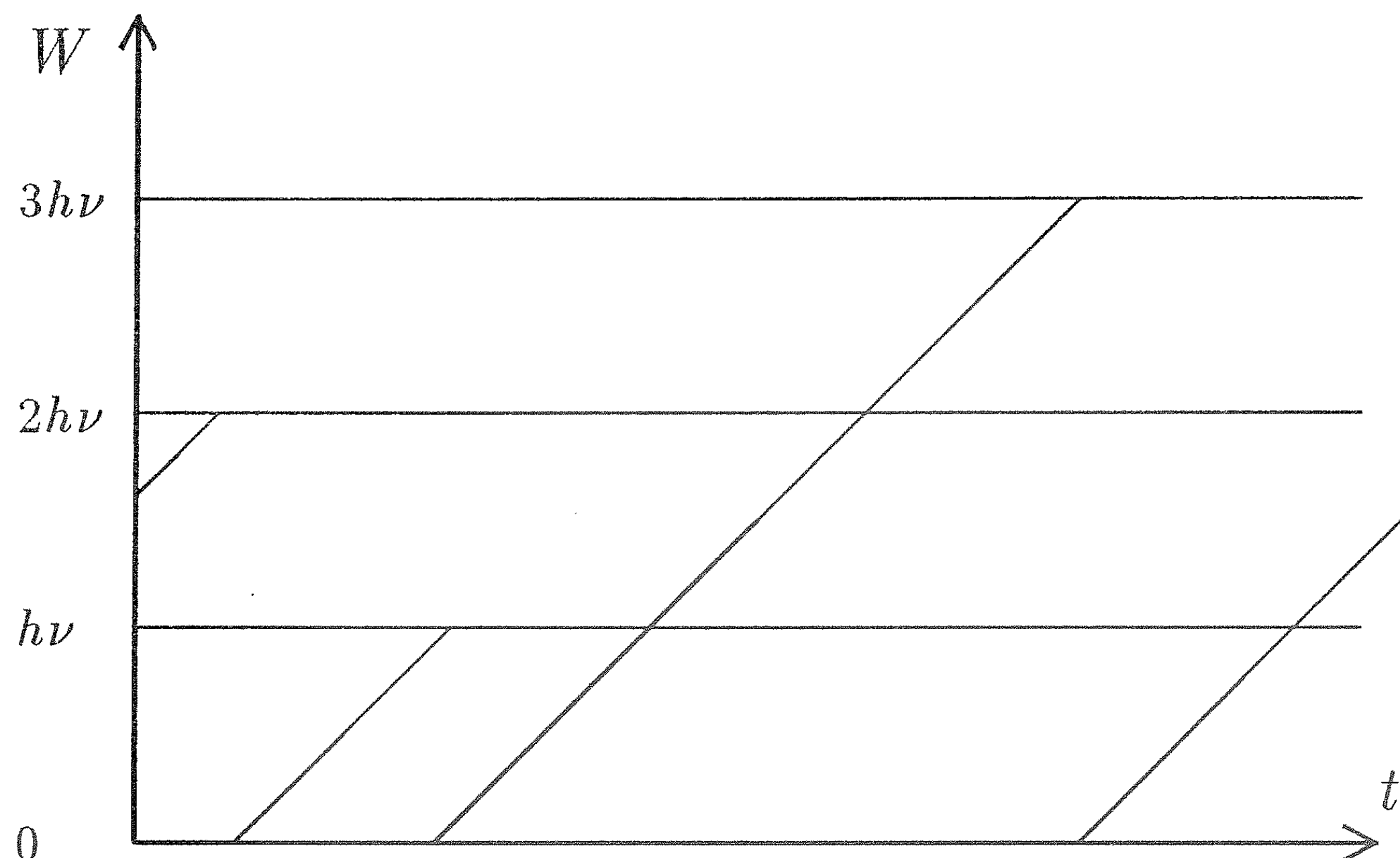
Nadaljnji razvoj

M. Planck si je prizadeval, da bi kvante spravil s klasično fiziko. V svoji drugi teoriji iz leta 1911 je računal, da lahko oscilatorji v steni votline zvezno absorbirajo energijo iz sevanja, a jo nezvezno sevajo [12]. Energijske kvante je dobil torej tako, da je časovno kvantiziral sevanje (sl. 1). Po tej poti je izpeljal svoj zakon, prišel do ničelne energije $\frac{1}{2}h\nu$ in okvirno pojasnil

fotoefekt. Za povprečno energijo oscilatorja pri frekvenci ν je dobil

$$W = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} + \frac{1}{2}h\nu.$$

Kmalu je prišel do prepričanja, da ničelna energija nima fizikalnega pomena.



Slika 1. Planck je v svoji drugi teoriji iz leta 1911 časovno kvantiziral sevanje: oscilatorji v steni votline zvezno absorbirajo energijo, a jo nezvezno sevajo [12].

Leta 1910 se je Einstein začasno odvrnil od svetlobnih kvantov, ne pa od kvantov v sistemih delcev z maso. Z L. Hopfom je poskušal Planckov zakon izpeljati na klasični osnovi. Na Planckovo drugo teorijo se je leta 1913 odzval zelo medlo, češ da bo prihodnost pokazala, ali je na pravi poti, čeprav je Planckova časovna kvantizacija nasprotovala njegovi prostorski. Istega leta je z O. Sternom Planckov zakon „izpeljal neprisiljeno, čeravno ne strogo, brez privzetkov o nezveznosti.” Tedaj sta zapisala, da je „ničelna energija verjetna”. Poskrbi namreč, da preide v Rayleigh-Jeansovem približku povprečna energija v klasično vrednost kT , če razvijemo $\exp(h\nu/kT) = 1 + h\nu/kT + \frac{1}{2}(h\nu/kT)^2$.

Po vpeljavi Bohrovega modela je leta 1914 zahteval nezveznost, ampak samo pri delcih z maso. Šele v letih 1916 in 1917 se je vrnil k svetlobnim kvantom s tremi članki, od katerih sta dva nosila enak naslov, *Emisija sevanja in absorpcija po kvantni teoriji* [13] in *H kvantni teoriji sevanja* [14]. V njih je prvič obravnaval gibalno količino kvantov. „Če telo izseva energijo W , dobi odziv W/c , če gre izsevana energija vsa v isto smer. Če pa je sevanje prostorsko simetrično, na primer s krogelnim valovanjem, sploh ni odziva. Ta alternativa ima vlogo tudi pri kvantni teoriji sevanja.” O gibalni količini sevanja je govoril zelo previdno, kot da delcu z maso nič ne bi želel prirediti gibalne količine in mu s tem dati značaja običajnih delcev. Upošteval je dve stanji atomov, ločil spontano sevanje od stimuliranega in potem za ta pojava

in absorpcijo zahteval detajlno ravnovesje, kakor počnemo to še danes [7]. Prek Planckovega zakona je prišel do izrazov za verjetnost na prehod za časovno enoto za spontano in stimulirano sevanje in absorpcijo. Odtlej ni več dvomil o obstoju kvantov, čeprav o njih ni nehal razmišljati.

Vseh teh petdeset let zavestnega razmišljanja me ni približalo odgovoru na vprašanje: „Kaj so fotoni?“. Dandanes že vsak Cipek ali Capek misli, da to ve, a se moti.

A. Einstein leta 1951 v pismu M. Bessu

Med drugimi fiziki se zamisel o energijskih kvantih dolgo ni uveljavila. Spočetka se je komaj kak fizik odločil za Einsteinov pogled iz leta 1905.

V celoti lahko rečemo, da je komaj kak problem, s katerimi je sodobna fizika tako bogata, h kateremu Einstein ni znatno prispeval. Da je včasih v svojih spekulacijah streljal mimo cilja, na primer v svoji domnevi o svetlobnih kvantih, mu ne kaže zameriti, saj brez tveganja celo v najbolj eksaktnih znanostih ni mogoče vpeljati zares nove zamisli.

M. Planck, W. Nernst, H. Rubens, E. Warburg, Predlog za izvolitev A. Einsteina v prusko akademijo znanosti, 1913

Tega ni spremenil niti poskus, pri katerem je Robert Millikan leta 1915 z merjenji podprl Einsteinovo enačbo za največjo kinetično energijo elektronov pri fotoefektu. Večina fizikov je zamisel sprejela šele po letu 1922, ko je Arthur Compton pojasnil po njem imenovani pojav. Tega leta je Einstein za razlago fotoefekta dobil Nobelovo nagrado za leto 1921. Mimogrede kaže omeniti, da so raziskovalci rentgenske svetlobe opisovali njene učinke, na primer ionizacijo v zraku, z *iglastim sevanjem*, ki že z imenom namiguje na krajevno kvantizacijo. Leta 1926 je G. N. Lewis po zgrešenem premisleku za svetlobni kvant predlagal ime foton, ki se je razmeroma hitro uveljavilo. To ime s končnico, značilno za delec, je prispevalo k širjenju slike, da je svetloba sestavljena iz delcev, ki jim je mogoče določiti lego v prostoru.

Zares imamo zdaj dovolj podprto spoznanje, da potuje energija v sevanju (vsaj pri visokih frekvencah) v obrokih, katerih vsak se giblje po določeni poti, skladno z mehaničnimi zakoni [...]. Neumestno se zdi govoriti o tej domnevni enoti kot o delcu svetlobe [...], če upoštevamo, da preživi samo majhen del življenja kot prenašalec sevalne energije, medtem ko preostali čas ostaja pomembna gradbena enota v atomu. [...] Zato si dovoljujem predlagati za ta domnevni novi atom, ki ni svetloba, a ima bistveno vlogo pri vsakem sevalnem pojavu, ime foton.

G. N. Lewis, *Conservation of photons*, Nature **118** (1926), 874

Prvi so kvantizirali elektromagnetno polje P. A. M. Dirac (1927) ter W. Pauli, P. Jordan in W. Heisenberg (1928). Kvantno elektrodinamiko, v kateri so fotoni pravzaprav doma, so razvili do konca štiridesetih let.

Planck in Einstein, sta kljub temu da sta zastopala različna stališča, bolj vplivala drug na drugega, kot bi mislili na prvi pogled. Poleg tega sta

se njuni stališči o sevanju s časom zelo spreminjali. V tem je mogoče videti enega izmed vzrokov za to, da je bila zamisel o kvantih sprejeta tako pozno. Drugega lahko vidimo v tem, da so Maxwelllovo elektrodinamiko sprejeli šele pred kratkim in so bili zato o valovni naravi svetlobe trdno prepričani.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Einstein in Planckov zakon*, Obzornik. mat. fiz. **26** (1979), 74.
- [2] A. Pais, *Subtle is the Lord... The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford 1982.
- [3] A. Einstein, *Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik*, Ann. Phys. **9** (1902), 417.
- [4] A. Einstein, *Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik*, Ann. Phys. **11** (1903), 170.
- [5] A. Einstein, *Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme*, Ann. Phys. **14** (1904), 345.
- [6] I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota*, DMFA, Ljubljana 1987.
- [7] J. Strnad, *Fizika*, 4. del, DMFA, Ljubljana 1985.
- [8] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, Ann. Phys. **17** (1905), 132.
- [9] A. Bents, W. Kuhn, J. Seibert, *Albert Einsteins Vorstellungen über das Wesen des Lichtes bis 1917*, Vorträge, Physikertagung, Bonn 1969, W. Kuhn (ur.), DPG, Giessen 1989, str. 164.
- [10] A. Einstein, *Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems*, Phys. Zeitschr. **10** (1909), 185.
- [11] A. Einstein, *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung*, Phys. Zeitschr. **10** (1909), 817.
- [12] M. Planck, *Eine neue Strahlungshypothese*, Verh. d. D. Phys. Ges. **13** (1911), 138.
- [13] A. Einstein, *Strahlungs-Emission und Absorption nach der Quantentheorie*, Verh. d. D. Phys. Ges. **18** (1916), 318.
- [14] A. Einstein, *Zur Quantentheorie der Strahlung*, Mitt. Phys. Ges. Zürich **16** (1916), 47, Phys. Zeitschr. **18** (1917), 121.

UTRINEK

Preiskal sem obširno delo tega pisca, in ni mi uspelo najti kake sledi bistroumnosti, ostrosti ali učenosti, s katero bi nadomestil pomanjkanje zmožnosti za trdno razmišljanje ali mirno in potrpežljivo raziskovanje... Ta rokopis nas ne pouči o kaki novi resnici, ne razreši nobenega nasprotja, ne razgrne nobenih nenavadnih dejstev, ne predlaga nobenega novega poskusa in ne vodi do nobenih novih raziskovanj... Ker ta članek ne vsebuje ničesar, kar bi zaslužilo ime eksperimenta ali odkritja, in zares nima prav nobene druge vrednosti, ga vsekakor sprejmite v vašo revijo, kjer se bo pridružil množici drugih ničvrednih in nepomembnih člankov, ki jih prinaša.

Oceno članka, v katerem je Thomas Young na začetku 19. stoletja oživil valovno teorijo svetlobe, je napisal zdaj že popolnoma pozabljeni Henry Brougham. Še dobro, da je uredniki niso upoštevali.

Izbral in prevedel *Janez Strnad*

KAJ JE ECMI

1. Uvod

Kratica ECMI pomeni: The European Consortium for Mathematics in Industry. V prevodu se to imenuje Evropsko združenje za matematiko v industriji. V tem članku bomo povzeli najpomembnejše informacije iz brošure, ki jo je izdalo to združenje.

Matematika je imela kot univerzalni znanstveni jezik vedno pomembno vlogo v tehniki in tehnologiji, vse bolj pa jo uporabljajo tudi pri raznih komercialnih problemih in problemih varovanja okolja.

Evropska industrija je vse bolj odvisna od visokih tehnologij in potrebe po matematičnem znanju pri raziskovanju in razvoju lahko samo rastejo. Čedalje več podjetij spoznava, da lahko matematične in računalniške simulacije nadomestijo zelo drage eksperimente pri razvijanju in oblikovanju njihovih proizvodov, obenem pa povečajo prilagodljivost raznim zahtevam. Te simulacije vodijo do optimizacije samega proizvodnega procesa, obenem pa omogočajo upoštevanje omejitev, ki jih narekuje varnost in skrb za okolje. Za učinkovito izvedbo teh simulacij so potrebna obsežna matematična znanja, ki vključujejo identifikacijo problema, matematično formulacijo, matematično analizo in poenostavitev problema za učinkovito numerično reševanje. Vsem tem postopkom pravimo matematično modeliranje. Tudi prikaz izračunanih rezultatov v smiselni obliki, razumljivi inženirju v proizvodnji, zahteva tako tehnična znanja kot sposobnost komuniciranja s strokovnjaki z različnih področij.

Zahteve po novih matematičnih znanjih so spodbudile zanimanje za tako imenovano industrijsko matematiko. Sodelovanje z industrijo je postalo del raziskovalnih aktivnosti številnih skupin matematikov po svetu.

2. Ustanovitev združenja

Leta 1986 je deset takšnih skupin v Evropi ustanovilo ECMI z namenom, da bi ponudile svoje kolektivno znanje in sposobnosti evropski industriji. Članice ECMI so vedele, da imajo različna podjetja v raznih deželah podobne tehnične probleme in da se dajo mnoga matematična znanja uporabiti v različnih industrijskih aplikacijah. Zato so bile prepričane, da bo lahko evropska industrija uspešno tekmovala na svetovnih trgih le, če bo temeljito izrabila svoje matematične potenciale. Nobena evropska država sama najbrž nima dovolj matematičnega znanja za to. Toda ECMI lahko omogoči temeljito pokritje ustreznih matematičnih področij in njihovih raznovrstnih uporab.

Leta 1994 je ECMI sestavljalo 11 koordinacijskih centrov, ki jih navajamo po abecednem redu njihovih držav:

Država	Ime centra	Sedež
Avstrija	Johannes Kepler Universität	Linz
Danska	Technical University of Denmark	Lyngby
Finska	Rolf Nevanlinna Institute	Helsinki
Francija	Université Joseph Fourier	Grenoble
Irska	University of Limerick	Limerick
Italija	Istituto Matematico U. Dini	Firenze
Nemčija	Universität Kaiserslautern	Kaiserslautern
Nizozemska	Eindhoven University of Technology	Eindhoven
Norveška	Norwegian Institute of Technology	Trondheim
Švedska	Chalmers University of Technology and University of Göteborg	Göteborg
Velika Britanija	Mathematical Institute	Oxford

Evropska skupnost je ECMI močno podprla s programi, kot so COMETT, ERASMUS in HCM. Glavni cilji združenja ECMI so bili oblikovani tako, da so ustrezali potrebam evropske industrije. Povzamemo jih lahko v treh točkah.

1. Pospešiti uporabo matematičnih modelov v industriji.

Inženirji, uporabni znanstveniki in matematiki, ki delajo v industriji, lahko mnogo pridobijo s sodelovanjem z univerzitetnimi uporabnimi matematiki, ki imajo ustrezna znanja in sposobnosti. To sodelovanje se lahko razširi tudi na razvoj matematičnih modelov v biologiji, geologiji, študiju okolja in bančništvu.

2. Vzgajati „industrijske matematike“.

V evropski industriji primanjkuje industrijskih matematikov. Tisti, ki že delajo v industriji, se morajo nenehno dodatno izobraževati, spoznavati najnovejše ideje in metode. Izobraževalni centri v desetih evropskih državah organizirajo krajše tečaje za trenutne potrebe in dvoletne podiplomske študije Matematika v industriji. Tako stalno skrbijo za nove kadre v industriji.

3. Delovati na evropskem nivoju.

Tako univerzitetni potenciali za Matematiko v industriji kot potrebe industrije so razpršeni po vsej Evropi. Izmenjava študentov in profesorjev je zato nujna tako za izobraževanje kot tudi za raziskovanje in sodelovanje z industrijo. Evropska skupnost spodbuja ECMI, da vključi tudi ustrezne skupine iz vzhodne Evrope kot pridružene članice.

3. Pomoč industriji

ECMI neposredno pomaga evropski industriji raznih oblikah.

1. Identifikacija problema in formulacija.

Velika podjetja poznajo svoje probleme. Ti navadno niso formulirani v obliki, ki bi omogočala uporabo najprimernejšega matematičnega modela.

Manjša podjetja se svojih problemov pogosto niti ne zavedajo ali ne vedo, da jih je mogoče matematično formulirati. Združenje ECMI je povezalo v mrežo pet svojih centrov v Eindhovnu, Kaiserslauternu, Linzu, Milanu in Oxfordu z osmimi pridruženimi centri z imenom „Matematika kot industrijski vir“. Mrežo finančno podpira Evropska skupnost. Ta projekt organizira redne industrijske dneve in tedne študijskih skupin v različnih evropskih mestih. K sodelovanju so povabljeni industrijska podjetja. Na industrijskih dnevih dajejo univerzitetne članice mreže primere, kaj lahko matematika stori za reševanje industrijskih problemov, in organizirajo razgovore o posameznih področjih uporabe. Na tedne študijskih skupin so povabljeni industrijska podjetja, ki pošiljajo tja svoje predstavnike. Ti predstavijo probleme za tako imenovano delavnico, kjer naj bi jih predstavniki univerz in študentov poskušali pripeljati do rešitve. Obenem so organizirana posamezna predavanja in seminarji o ustreznih matematičnih in numeričnih metodah. Namen obeh vrst srečanj je prikazati industrijske probleme matematičnim strokovnjakom in nakazati pot do matematične rešitve.

2. Identifikacija strokovnega nasveta.

Učinkovito reševanje določenega problema pogosto zahteva uporabo najnovejših raziskovalnih dosežkov na raznih matematičnih področjih. Zato ni presenetljivo, da posamezni uporabni matematiki nimajo vsega potrebnega znanja. Združenje ECMI je organiziralo evropsko raziskovalno mrežo, ki omogoča združitev strokovnjakov s širokega geografskega področja. Strokovnjaki oblikujejo majhne ekspertne skupine za razvoj analize matematičnih problemov, ki so bili predstavljeni na industrijskih dnevih. Te skupine lahko sodelujejo tudi na tednih študijskih skupin. Neposredno pomoč pri iskanju strokovnih nasvetov daje tudi ECMI Secretariat s sedežem v Eindhovnu.

3. Obdelava problema in rešitev.

Ko je problem iz realnega sveta s pomočjo ekspertnih skupin formuliran v matematični obliki, je treba reševanje pripeljati do faze računalniškega izpisa, ki predstavlja rešitev ali prikaz rešitve danega problema. Tedaj se lahko izkaže, da je treba matematični model preoblikovati v bolj splošno ali bolj konkretno obliko, kar narekuje zahtevana oblika informacije o rešitvi. Ta del reševanja zahteva zelo vneto raziskovalno skupino in ECMI si prizadeva, da bi v vsakem od naštetih centrov v mreži imeli mladega navdušenca, ki bi skrbel za uspešno realizacijo dobljenih rešitev problemov, ki jih obdeluje njegov center. Skupaj bi ti raziskovalci oblikovali evropsko skupino mladih uporabnih matematikov za industrijske aplikacije, ki bi si sčasoma morali pridobiti tudi izkušnje pri komunikacijah z osebjem iz industrije.

4. Usposabljanje diplomiranih matematikov.

V zadnjem času je opazno vse večje povpraševanje po industrijskih matematikih, ki morajo biti posebej usposobljeni. Združenje ECMI je v ta namen uvedlo poseben podiplomski študijski program z imenom Matematika za industrijo. Jedro programa obsega modeliranje in osnovne matematične metode in je skupno za vse izobraževalne centre, kjer se ta program izvaja.

Program je razdeljen na module, učni jezik je angleščina. To omogoča izmenjavo študentov in učiteljev med učnimi centri. Izmenjavo financirajo evropski programi. Študenti imajo tudi priložnost opraviti tri- do šestmesečno prakso v industriji druge države, kar je financirano na isti način, sofinancira pa tudi industrija.

Izpeljava tega dveletnega podiplomskega študija s ciljem skupnega kvalitetnega standarda, skupne filozofije in podobnih učnih programov v vseh učnih centrih zahteva določene organizacijske napore. Združenje ECMI je prepričano, da bo evropska industrija uspešne absolvente teh programov zelo potrebovala, saj bodo neposredno uporabni.

5. Dopolnilno usposabljanje strokovnjakov iz industrije.

Skupaj z napredkom računalniške tehnologije se razvijajo nove matematične ideje in metode za njihovo realizacijo. Če bodo industrijski matematiki želeli biti uspešni v industriji, bodo morali spremljati nove dosežke v matematiki. Združenje ECMI ima program kratkih tečajev, ki tečejo v mnogih evropskih deželah s ciljem posodobiti znanje uporabnih raziskovalcev, zaposlenih v industriji. Ti tečaji so prilagodljivi, običajno osredotočeni na eno matematično področje z ustrezno uporabo. Trajajo navadno dva do tri dni. Podjetje lahko predlaga študij določenega področja in tečaj se lahko organizira pri njih, če je za temo dovolj zanimanja. Navadno je na teh tečajih uporabljen nacionalni jezik, če pa predavatelji prihajajo iz drugih evropskih držav, je jezik praviloma angleščina.

6. Spodbujanje študentov k iskanju zaposlitve v evropski industriji.

Mnoga industrijska podjetja pričakujejo, da imajo diplomanti dve leti praktičnega usposabljanja pri reševanju industrijskih problemov. Podiplomski program združenja ECMI to omogoča na način, ki vključuje tudi študij in prakso v drugih evropskih deželah. Še več, ECMI organizira redna srečanja, na katerih uporabni matematiki obravnavajo nove uporabe matematike v industriji in koristne nove ideje v matematiki sami.

Združenje ECMI izdaja tudi glasilo z imenom *Newsletter*, ki ga dobivajo vsi člani združenja in tisti, ki se za to članstvo zanimajo. V tem glasilu so poleg zanimivih strokovnih informacij tudi podatki o novih članih, imena in naslovi uradnih predstavnikov in obvestila o organiziranih srečanjih. Letos bo na primer v Hamburgu (od 3. do 7. julija) že tretji kongres tega združenja, ki je sicer vsaka štiri leta.

4. Izobraževalni program Matematika za industrijo

Izobraževalni program Matematika za industrijo je skupen program sodelujočih institucij. Osnovni namen je omogočiti diplomiranim matematikom in drugim, ki imajo opravljen matematično usmerjen dodiplomski študij, da si pridobijo usposobljenost, ki je potrebna za uspešno delo matematika v industriji.

To usposabljanje zahteva na eni strani dobro poznavanje matematičnih metod, na drugi strani pa sposobnost uporabljati te metode pri reševanju

problemov iz industrije. Pomembno je tudi privzgojiti sposobnost komuniciranja s strokovnjaki, ki imajo drugačno osnovno vzgojo.

Da bi ta program dosegel oba cilja, morajo študenti podiplomci opraviti naslednje obveznosti.

1. Obvezno je skupno jedro programa, ki obsega osem razdelkov. Vsak razdelek sestavlja 20 ur predavanj skupaj z ustreznimi vajami. Namen skupnega jedra je omogočiti študentu obvladanje osnovnih matematičnih orodij. Ta so obravnavana tako, da zasledujejo neposredni cilj: reševanje problemov in modeliranje. To skupno jedro je možno absolvirati v vseh sodelujočih institucijah.

2. Izbrati je treba ustrezno število izbirnih tem, ki skupaj obsegajo vsaj 8 razdelkov.

3. Praktično usposabljanje v matematičnem modeliranju je praviloma organizirano v posebnih seminarjih za modeliranje. Združenje ECMI dodatno vsako leto organizira teden modeliranja, kjer se študenti iz različnih sodelujočih ustanov srečujejo in delajo v skupinah pri reševanju konkretnih industrijskih problemov.

4. Ob koncu študija je treba izdelati projekt, ki zahteva vsaj pol leta dela ob reševanju konkretnega industrijskega problema. To delo naj bi opravili v meddisciplinarni skupini, ki vključuje tudi strokovnjake iz industrije. Zaželeno je, da delo pri projektu pokaže kandidatovo sposobnost modeliranja in formuliranja industrijskega problema v matematični obliki, sposobnost reševanja problema z ustreznimi metodami in sposobnost prikazovanja rezultatov in zaključkov v obliki in na način, ki je razumljiv in koristen za naročnika. Delo je pozitivno ocenjeno, če ustreza standardom stroke v vseh naštetih pogledih.

5. Zadnja zahteva je, da študent prebije del študija ali čas izdelave projekta v tujini pri kaki drugi sodelujoči instituciji.

Študenti, ki uspešno končajo ta program, dobijo od ustreznega odbora združenja certifikat.

5. Stalno strokovno izpopolnjevanje

Nekaj let študija na univerzi ne more več dati ustrezne osnove za delo v poklicu za vse življenje. Za to je potrebno stalno izobraževanje, kar še posebej velja za raziskovalce in razvijalce v industriji z vse bolj naprednimi tehnologijami. Eden izmed ciljev združenja ECMI je prispevati k temu izobraževanju na področju industrijske matematike. Pri financiranju tega projekta sodeluje tudi Evropska skupnost.

Glavni cilji projekta stalnega izpopolnjevanja so: določiti primerne predmete za nadaljnje usposabljanje industrijskih matematikov; načrtovati njihove vsebine in način izvajanja; pri tem tesno sodelovati z industrijo in izobraževanje omejiti na članstvo v ECMI. To poteka v treh fazah. Najprej je treba industriji predstaviti načrtovane tečaje, nato po tesnem sodelovanju z industrijo predlagati in izpeljati izboljšane tečaje, obenem

pa izvajati že dobro vpeljane predmete. Pri tem je treba skrbeti za to, da so tečaji usmerjeni v neposredno uporabo, v poglobljanje razumevanja osnovnih principov in v uporabo sodobnih pripomočkov.

Doslej je bilo organiziranih že prek 60 tečajev. Naštejmo le nekatere: načrtovanje proizvodnje, CAGD (računalniško podprto geometrijsko načrtovanje), analiza slik, hidrodinamika, kontrola kvalitete in izgorevanje.

Glede na to, da so posamezne univerze bolj usposobljene za izpeljavo nekaterih tečajev kot druge, pogosto prihaja do izmenjave tečajev med njimi, kar daje temu izobraževanju še posebej vseevropski značaj.

6. Članstvo

Predsednik združenja ECMI in člani sveta so voljeni vsaki dve leti in pol. Praviloma te funkcije krožijo med ustanovitvenimi članicami. Sekretariat združenja ECMI je stalen. Njegov naslov je:

Prof. R. M. M. Mattheij,
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven,
The Netherlands.

Za podjetja je letna članarina 500 ekujev. Zanje dobivajo ECMI Newsletter, imajo popust pri kotizacijah na konferencah, ki jih organizira ECMI, možnost najemanja usposobljenih strokovnjakov, dostop do vseh izobraževalnih programov in do mreže raziskovalne pomoči in baze podatkov.

Za univerze je letna članarina 120 ekujev s podobnimi pravicami.

Tudi posamezniki lahko postanejo člani ECMI. Zanje je letna članarina 30 ekujev. Imajo podobne pravice kot ustanove.

Oddelek za matematiko in mehaniko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani je postal član ECMI leta 1994.

Zvonimir Bohte

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1994*

Pedagoška fakulteta – Maribor

2. stopnja

Matematika – fizika

22. Berk Jože	Metrika GBL – geometrije
23. Brbre Breda	Identitete v kolobarjih in algebrah
24. Cvetrežnik Karmen	Evklidska ravnina in Riemannova sfera
25. Frangež Stanislava	O celoštevilskih funkcijah
26. Ištoković Jolanda	Newtonova metoda v kompleksni ravnini
27. Jelenko Melita	Praideali in praradikal
28. Jug Mira	Fluktuacije v holesteričnih tekočih kristalih

* Seznam diplomantov iz leta 1993 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. 41 (1994) 3.

29. Letonja Nevenka	Pregled gravitacijskih in kapilarnih valov na vodnem površju
30. Orehovec Damir	Izoperimetrična neenakost
31. Orthaber Suzana	Abstraktna Cauchyjeva naloga
32. Senekovič Jožef	Linearne in ciklične kode
33. Tement Jelena	Vpeta drevesa in Steinerjev problem
34. Toplak Stanislav	Harmonične funkcije
35. Vešligaj Špela	Dokazi pri pouku matematike
36. Vrenčur Dušanka	Volilna in Catalanova števila
37. Zinrajh Darko	Predlog eksperimenta za potrditev izreka o vrtilni količini
38. Žižek Darinka	Polinomi z najmanjšimi normami

Pedagoška fakulteta – Ljubljana

2. stopnja

Fizika – tehnika

4. Ilič Goran	Uporaba planetarija CELESCOPE za pouk fizike v osnovni šoli
5. Jaklič Eva	Merjenje barvne temperature
6. Theuerschuh Polonca	Računalnik pri pouku in projekt „PETRA”

Fizika – kemija

5. Krajnik Karla	Primer vrednotenja nivojev znanja iz organske kemije, ki jih predpisuje katalog za 8.r. OŠ
6. Laharnar Marija	Primerjalna analiza rezultatov testiranja pojmov iz organske kemije v OŠ in SŠ
7. Ristič Alenka	Sinteza in karakterizacija aluminofosfatnega molekulskega sita strukturnega tipa 5, eksperimentalna predstavitev lastnosti izbranih elementov in njihovih spojin (bor, aluminij, silicij, kositer, arzen)
8. Sebenik Majda	Elektrokemija v osnovnošolskih in srednješolskih programih kemije in fizike

Matematika – fizika

23. Andolšek Helena	Metaciklične grupe
24. Bavdek Mojca	Aproksimacija z verižnimi ulomki
25. Česen Irena	1-regulirani grafi 3. stopnje
26. Čebular Anja	Besselove funkcije s polovičnimi indeksi
27. Frantar Saša	Formalne potenčne vrste in Stirlingova števila druge vrste
28. Gašperšič Marko	Kvaternioni
29. Jagodic Neža	Vesolje v barvah
30. Jereb Andreja	Različni načini obravnave nekaterih matematičnih preslikav v OŠ in 1.r. SŠ
31. Mlakar Mateja	Cayleyevo število
32. Malovrh Lea	Postavljanje vprašanj pri izbranih poglavjih matematike
33. Ošlaj Mateja	Načrtovane naloge z različnimi geometrijskimi orodji
34. Orešnik Vera	Catalanova števila
35. Orešič Nina	Klasifikacija podgrup grupe $PSN(2, Q)$
36. Prašnikar Nataša	Fleksibilna učna diferenciacija pouka matematike v 5. razredu osnovne šole
37. Pristov Andreja	Prostor in čas
38. Škrbec Zdenka	Kapaciteta splošnega troosnega elipsoida

- | | |
|--------------------|--|
| 39. Šabec Nataša | Različni načini obravnave nekaterih matematičnih preslikav v OŠ in 1.r. SŠ |
| 40. Velkavrh Maja | Popolne preslikave končnih grup |
| 41. Vujič Goran | Neenakost s sredinami |
| 42. Vidmar Karmen | Terminologija v matematičnih učbenikih za OŠ |
| 43. Zalaznik Irena | Polarizacija svetlobe |

Matematika – tehnika

- | | |
|-----------------|--|
| 2. Oblak Irma | Matematična obdelava antropomorfne robotske roke |
| 3. Pleško Darja | Vpliv specifičnega treninga na razvoj matematičnih pojmov v OŠ |

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika – uporabna smer

- | | | |
|---------------------|-------------------|--------------------|
| 262. Pogačnik Živa | 267. Žagar Karmen | 272. Šircelj Karin |
| 263. Šinko Franc | 268. Brvar Darko | 273. Vrečar Simon |
| 264. Pokorn Marjeta | 269. Knez Simona | 274. Wedam Maja |
| 265. Peterle Polona | 270. Ivanuša Blaž | |
| 266. Kopač Irena | 271. Vevar David | |

2. stopnja Matematika – pedagoška smer

- | | |
|----------------------|--|
| 4. Prašnikar Neuvirt | Janja Izoperimetrična neenakost in njena stabilnost |
| 5. Breznik Maja | Kompleksne simetrične, antisimetrične in ortogonalne matrike |
| 6. Bolka Marija | Ocene lastnih vrednosti matrik |
| 7. Rudman Robert | Simetrije in tapetne grupe |
| 8. Čič Andreja | Jacobsonov radikal |
| 9. Colnerič Monika | Konveksne funkcije |
| 10. Horvat Valerija | Iracionalna števila |

Matematika – uporabna smer

- | | |
|------------------------|---|
| 455. Škerlak Smiljana | Aproksimacija in interpolacija funkcij z jezikom mathematica |
| 456. Mandelj Matjaž | Zasnova podatkovne baze kupcev v Tobačni Ljubljana |
| 457. Klabjan Diego | Verjetnostni algoritem za računanje prostornine konveksnega telesa v $\mathbb{R}^n$ |
| 458. Bašar Barbara | Voronojevi diagrami |
| 459. Baumgartner Anton | Rotagrafi |
| 460. Kobal Anamarija | Analitične množice v poljskih prostorih |
| 461. Žagar Emil | Racionalne parametrične krivulje |
| 462. Kukovič Nataša | Hiperekspontne rešitve diferencialnih enačb |
| 463. Belehar Erika | Središča v grafih |
| 464. Logar Tomaž | Linearno programiranje z metodami središčne poti |
| 465. Križnič Damijana | Struktura popolnih grafov |
| 466. Masnoglav Bogomir | Praideali v algebri operatorjev na Hilbertovem prostoru |
| 467. Brešar Boštjan | C*-algebre multiplikatorjev |
| 468. Prezelj Jasna | Vlaganje grafov v projektivno ravnino v linearnem času |
| 469. Marolt Jasna | Absolutno sumabilni operatorji in faktorizacija skozi Hilbertov prostor |
| 470. Prelovšek Uroš | Asimptotska analiza koeficientov rodovnih funkcij |

- | | |
|----------------------|---|
| 471. Kišek Renata | Raznoterosti in radikalski ideali |
| 472. Krašovec Sabina | Konveksne množice v Hilbertovih prostorih |
| 473. Krančan Alenka | Injektivni moduli in kolobarji koeficientov |
| 474. Ozbič Tatjana | Karakterizacija integralskih operatorjev do unitarne ekvivalence |
| 475. Rome Mojca | Prostori Soboljeva za primer funkcij, definiranih na enotski krožnici |
| 476. Pažin Dragan | Množenje matrik na transputerskem sistemu |
| 477. Jakhel Črtomir | Problem izbire optimalne košarice |
| 478. Boštjančič Ada | Centralnosimetrične matrike |
| 479. Zupančič Metka | H_∞ kontrola |
| 480. Šafarič Andreja | Analiza in spektralna sinteza na lokalno kompaktnih grupah |
| 481. Čop Jernej | Problem n teles |
| 482. Gogala Andrej | Invariante končnih grup |
| 483. Lozej Mateja | Banachove algebre in spektralna analiza |

Matematika – teoretična smer

- | | |
|--------------------|--|
| 6. Lebič Hanka | Intervalne funkcije |
| 7. Zidar Peter | Knuth-Bendixov algoritem |
| 8. Bauer Andrej | Seifertovi vlaknati prostori |
| 9. Dolinar Gregor | Križni produkti za von Neumannove algebre |
| 10. Malešič Matjaž | Matrično monotone funkcije končnega reda |
| 11. Kuzma Bojan | Perturbacije omejenih operatorjev |
| 12. Kolar Matej | Doob-Meyerjeva dekompozicija podmartingala |

Matematika – smer računalništvo z matematiko

- | | |
|------------------|--|
| 1. Čampelj Borut | Izomorfizem grafov z omejeno večkratnostjo lastnih vrednosti |
|------------------|--|

Fizika – pedagoška smer

- | | |
|-------------------|---|
| 135. Korošak Dean | Demonstracijsko merjenje svetlobne hitrosti |
|-------------------|---|

Fizika – tehnična smer

- | | |
|-----------------------|---|
| 593. Berkopec Aleš | Problem proste površine v toku viskozne tekočine |
| 594. Tasič Izidor | Obdelava slik pri NMR tomografiji |
| 595. Posel Robert | Tunelsko mikroskopske raziskave nukleacije zlata na kristalih NbSe ₂ in WTe ₂ |
| 596. Duh Andrej | Selektivno vzbujanje magnetizacije v šibkem magnetnem polju |
| 597. Zdešar Urban | Določanje zgornje meje rentgenskega spektra na osnovi absorpcije |
| 598. Kožar Jasmina | Opredelitev optičnih lastnosti premazov na sončne zbiralnike s pomočjo teorije Kubelke in Munka |
| 599. Ramšak Nina | Tunelska mikroskopija nanometrskih skupkov srebra na NbSe ₂ in grafitov |
| 600. Stepišnik Matjaž | Moduliranje laserske svetlobe z metodo motenega totalnega odboja |
| 601. Batagelj Alen | Merjenje koncentracij z Rutherfordovim sipanjem |
| 602. Lotrič Uroš | Raziskave ureditve in dinamike verižnih molekul v nematične tekočem kristalu |
| 603. Bohinc Klemen | Dirackov spinor in elektrodinamika iz petdimenzionalne gravitacije |
| 604. Pezdir Gorazd | Spektrometrija EXAFS vmesnih produktov pri sintezi visokotemperaturnega superprevodnika (Cu, Ba, Y) |

- | | |
|--------------------------|---|
| 605. Mohorič Aleš | Meritev lastne difuzije molekul z NMR v močnem nehomogenem magnetnem polju |
| 606. Jevšenak Peter | Fizikalni model detektorja nevtronov |
| 607. Jeraj Robert | Postavitev sistema za testiranje pozicijsko občutljivih silicijevih detektorjev |
| 608. Mencinger Jure | Konvekcija v pravokotni kotanji s prečnim gradientom |
| 609. Oštir-Sedej Krištof | Konstrukcija pogona in umeritev štirikristalnega rentgenskega spektrometra |
| 610. Grešovnik Igor | Inverzna numerična analiza deformabilnih teles |
| 611. Čuk Barbara | Oksidacija tankih plasti kroma |
| 612. Petkovšek Rok | Absolutne meritve dolžinskih etalonov |
| 613. Kavčič Matjaž | Meritev satelitskih prehodov v Ti pri ionizaciji z 0,7 1,5 MeV |
| 614. Kovačič Uršula | Meritev polmera liposomov s fotonsko korelacijsko spektroskopijo |
| 615. Volk Tomaž | Detekcija vrtenja magnetnega polja jedrske magnetizacije |
| 616. Bovcon Robert | Merjenje transporta v liposome vgrajenih snovi v kožo z metodami elektronske paramagnetne resonance |
| 617. Groznik Ana | Izboljšanje ločljivosti dvojne resonance na osnovi prepovedanih prehodov |
| 618. Vidmar Tim | Konsistentnost modela za opis sevalnega zajetja nukleonov |

Fizika – meteorologija

- | | |
|---------------------|--|
| 57. Jerman Jure | Sistematične neinstrumentalne napake pri merjenju padavin z meteorološkim radarjem |
| 58. Gregorič Gregor | Statistična napoved minimalne temperature s Kalman Bucyjevim filtrom |
| 59. Strajnar Uroš | Diagnoza lege frontalnih con v vertikalnih presekih troposfere nad Evropo |

3. stopnja

Matematika – izobraževalna smer

- | | |
|-----------------------|---|
| 7. Pavletič Marino | Cayley-Kleinove geometrije |
| 8. Robnik Alojz | Funkcijski račun za hermitske in sorodne elemente v Banachovi algebri |
| 9. Brilej Roman | Izrek K. A. M. |
| 10. Marc-Kobal Tadeja | Fourierove vrste distribucij |

Matematika – raziskovalna smer

- | | |
|----------------------------|---|
| 65. Kokol-Bukovšek Damjana | Direrencialni polinomi |
| 66. Petek Tatjana | Polinomski sistemi |
| 67. Bernik Janez | Izomorfizmi modulov ter lokalna in globalna podobnost |

Mehanika – interdisciplinarna smer

- | | |
|----------------------|---|
| 6. Deželak Ferdinand | Raziskava nekaterih pojavov v sobni akustiki Fizika elektrooptika |
|----------------------|---|

Fizika – elektrooptika

- | | |
|------------------|---|
| 141. Arnšek Aleš | Gravitacija na majhnih razdaljah Biofizika |
| 142. Božič Bojan | Teoretska podlaga metode za določanje upogibnosti konstant fosfolipidne membrane s tvorbo cevastega izrastka Fizika trdne snovi |

- | | |
|------------------------------|--|
| 143. Cvetko Dean | Structure and order of (110) f.c.c. surfaces studied by the atom scattering |
| 144. Jagličič Zvonko | Detekcija jedrske magnetne resonance z dc SQUID-om |
| 145. Pribakovič-Borštnik Ana | Modifikacija površine NbSe ₂ s tunelskim mikroskopom |
| 146. Serša Igor | Slikanje električnih tokov z magnetno resonanco |
| 147. Zupan Aleš | Metoda gostotnih funkcionalov v lokalizirani bazi |
| 148. Skvarč Jure | Radonografija |
| 149. Vrbančič-Kopač Nataša | Študij izotropne faze mikroskopsko omejenih tekočih kristalov z jedrsko magnetno resonanco devterija |
| 150. Pelicon Primož | Interakcije po trku v Augerjevih spektrih žlahtnih plinov pri vzbujanju z lahкими ioni Fizika jedra in osnovnih delcev |
| 151. Vodenik Branko | Načrtovanje, izgradnja in testiranje sistema detektorjev Čerenkova |
| 152. Podobnik Tomaž | Tvorba pionskih parov pri dvofotonskih reakcijah |
| 153. Medin Gordana | Določanje aktivnosti ⁹⁰ Sr z merjenjem Čerenkovega sevanja v aerogelu Fizika jedrska tehnika |
| 154. Jordan Cizelj | Romana Ocena pogostnosti izpustov raziskovalnega reaktorja z verjetnostnimi varnostnimi metodami |
| 155. Tiselj Iztok | Modeliranje dvofaznega kritičnega toka v šobi |

Doktorati – fizika

- | | |
|-----------------------|---|
| 130. Bajc Borut | Študij procesa v modelih z mezonskimi in kvarkovskimi prostostnimi stopnjami |
| 131. Cizelj Leon | Ocenjevanje uspešnosti vdrževanja uparjalnikov s pomočjo verjetnostne mehanike loma |
| 132. Čepič Mojca | Antiferoelektrični tekoči kristali |
| 133. Jamnik Janko | Vpliv fazne meje na impendanco trdnih ionskih prevodnikov |
| 134. Jazbinšek Vojko | Modeliranje tokovnih izvorov magnetnega polja srca ob upoštevanju realnih robnih pogojev |
| 135. Križnič Ervin | Tvorba pri dvofotonskih interakcijah s spektrometrom ARGUS |
| 136. Kutnjak Brigita | Feroelektrični tekoči kristali v zunanjem magnetnem in električnem polju |
| 137. Kutnjak Zdravko | Dielektrična spektroskopija protonskih in devteronskih stekel |
| 138. Majaron Boris | Dinamika energijskih prenosov v sistemu Yb ³⁺ , Er ³⁺ fosfatno steklo |
| 139. Muševič Igor | Študij elementarnih ekscitacij v feroelektričnem tekočem kristalu |
| 140. Planinšič Gorazd | Slikanje prostorske porazdelitve relaksacijskih časov z magnetno resonanco v šibkem magnetnem polju |
| 141. Poberaj Igor | Sklopitev med nosilci naboja in optičnimi fononi v YBa ₂ Cu ₃ O |
| 142. Remškar Maja | Rast in interkalacija srebra pri naparevanju na kristale dihalogenidov prehodnih kovin |
| 143. Verbovšek Anton | Infrardeča singularnost kvantne kromodinamike pri sipanju kvarka na antikvaru |
| 144. Zalar Boštjan | Raziskave statičnih in dinamičnih lastnosti psevdospinskih stekel z jedrsko magnetno in jedrsko kvadrupolno resonanco |

Martina Koman