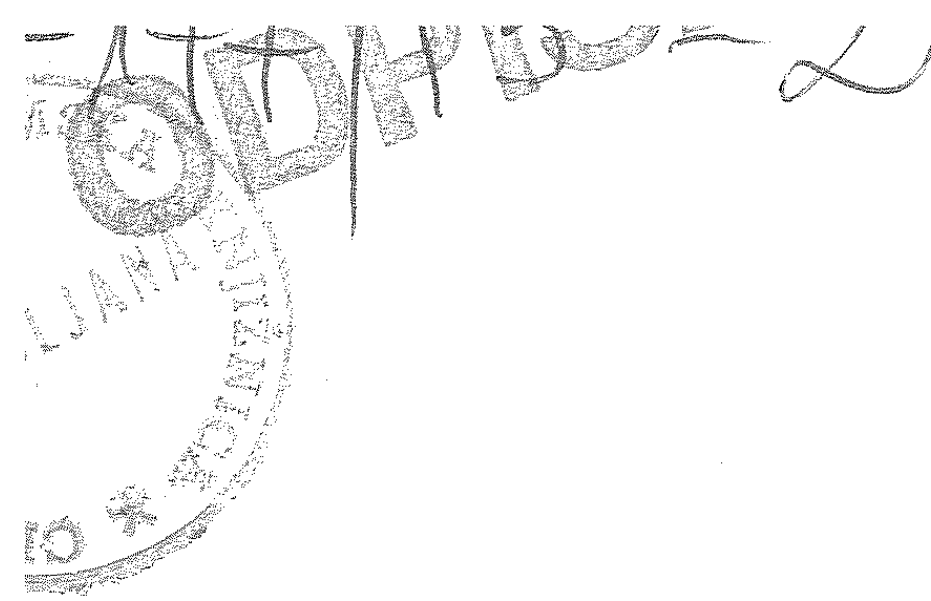


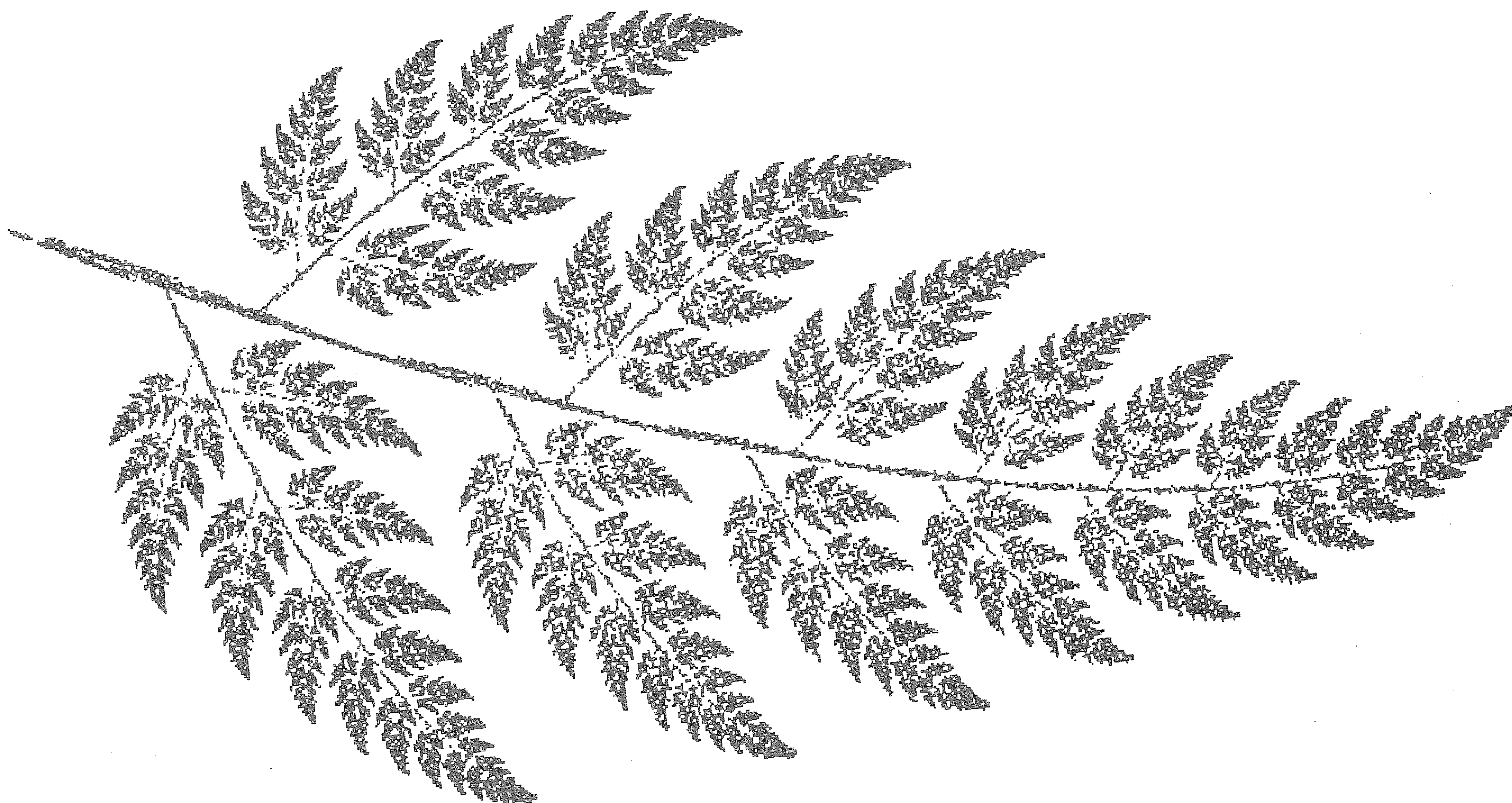


1995

Letnik 42

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1995

letnik 42, številka 2, strani 33–64

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema $\text{\O}$ Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.100,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.200,– SIT, za študente 1.050,– SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 DMFA Slovenije – 1237

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Zveznost in odvedljivost — Continuity and differentiability (Miran Černe) 33–37

Kompresija slik s fraktali — Fractal image compression (Mojca Indihar Štemberger) 38–50

Termodinamika v posebni teoriji relativnost — Thermodynamics in special relativity (Janez Strnad) 51–58

Vesti — News

46. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman) 59–61

Profesor Peter Gosar – častni član društva (Janez Strnad) 61–62

Sedemdeset let profesorja Josipa Grassellija – častnega člana društva (Milan Hladnik) 63–64

Častni član društva Dušan Modic (Martina Koman) 64–III

Profesor Niko Prijatelj – častni član društva (Peter Legiša) III–IV

Na ovitku: Slika k članku na strani 38.

ZVEZNOST IN ODVEDLJIVOST

MIRAN ČERNE

Math. Subj. Class. 26A27, 26E10

V sestavku predstavimo nekaj povsem konkretnih primerov zveznih, a nikjer odvedljivih funkcij na realni osi.

CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY

In this note we present some explicit examples of continuous nowhere differentiable functions on the real line.

1. Uvod

Pojma zveznost in odvedljivost funkcij na realni osi $\mathbb{R}$ sta vsaj formalno znana že srednješolcem, marsikateri študent naravoslovnih znanosti pa bi pritrdil dejstvu, da je vsaka odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$ tudi zvezna. Kaj pa obratno? Ali so zvezne funkcije vedno tudi odvedljive? Seveda ne! Funkcija absolutna vrednost

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

je verjetno najbolj znan primer zvezne funkcije na $\mathbb{R}$, ki ni odvedljiva v točki 0. Toda če pobrskamo po primerih funkcij, ki jih študentje srečajo na vajah iz matematike, bi lahko mirne duše zatrdili, da so vse zvezne funkcije na $\mathbb{R}$ skoraj povsod tudi odvedljive. Ali je to vedno res? Kdorkoli vzame v roke knjigo J. Vrabec: Metrični prostori [5], lahko na strani 179 prebere naslednji presenetljiv izrek:

Izrek 1. *Naj bo I zaprt interval. Množica zveznih funkcij $I \rightarrow \mathbb{R}$, ki niso odvedljive v nobeni točki iz I , vsebuje residualno podmnožico Banachovega prostora $(C(I), \| \cdot \|_\infty)$.*

Spomnimo se, da je podmnožica polnega metričnega prostora M residualna, če jo lahko zapišemo kot presek števne družine povsod gostih odprtih množic v M . Omenimo naj tudi, da je bistveni tehnični del dokaza gornjega izreka Bairov izrek [5, str. 177], ki pravi, da je vsaka residualna podmnožica polnega metričnega prostora M (v tem primeru prostora zveznih funkcij na I , opremljenega s topologijo enakomerne konvergence) povsod gosta v M . Torej ne samo da funkcije, ki so zvezne in nikjer odvedljive, obstajajo, takih funkcij je tudi zelo veliko. Če pa jih je zelo veliko, bi morali biti sposobni kakšno tudi eksplicitno poiskati.

2. Primeri zveznih, nikjer odvedljivih funkcij na $\mathbb{R}$

Primer zvezne, a nikjer odvedljive funkcije na realni osi, ki ga bomo obravnavali, je nekoliko prirejen primer funkcije, ki jo je leta 1930 konstruiral B. L. Van der Waerden. Originalna funkcija je predstavljena v knjigi [4, str. 353], naš primer pa je iz knjige [1, str. 38], vendar tam vse podrobnosti dokaza neodvedljivosti funkcije niso podane.

Naj bo funkcija φ definirana s predpisom

$$\varphi(x) := |x|$$

za vsak x iz intervala $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ in periodično nadaljevana za ostale realne vrednosti, t.j.

$$\varphi(x+1) = \varphi(x)$$

za vsako realno število x . Torej φ je periodična funkcija na $\mathbb{R}$ s periodo 1. Očitno je φ zvezna na vsej realni osi ter zanjo velja

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Če bi funkcijo φ poimenovali po videzu in obliki njenega grafa, bi bilo ustrezno ime zanjo „žaga z zobmi višine $\frac{1}{2}$ in širine 1”. Ideja, kako dobiti zvezno, a nikjer odvedljivo funkcijo na realni osi, pa je ta, da na ustrezen način seštejemo žage z vedno manjšimi in ožjimi zobmi.

Trditev 2. Funkcija

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^{2n}x)}{2^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

je zvezna, a nikjer odvedljiva na $\mathbb{R}$.

Dokaz. Zaradi lastnosti (1) funkcije φ ima vrsta (2) absolutno konvergentno majoranto

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^{2n}x)}{2^{2n}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varphi(2^{2n}x)|}{2^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{3} \quad (x \in \mathbb{R})$$

in potemtakem vrsta (2) konvergira enakomerno na vsej realni osi. Torej je funkcija f zvezna na $\mathbb{R}$.

Pokažimo sedaj, da f ni nikjer na $\mathbb{R}$ odvedljiva. Ker je funkcija φ periodična s periodo 1, je taka tudi funkcija f . Ker je φ soda funkcija, je

tudi f soda. Potemtakem je dovolj, da pokažemo neodvedljivost funkcije f na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$. Naj bo torej $a \in [0, \frac{1}{2}]$ poljubno realno število in naj bo

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} \quad (3)$$

njegov dvojiški zapis. Torej za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja ali $a_j = 0$ ali pa $a_j = 1$. Zapis realnega števila a v obliki (3) vedno obstaja, ni pa nujno enoličen. Enoličnost dosežemo, če za zapis (3) postavimo zahtevo, da za neskončno mnogo indeksov $j \in \mathbb{N}$ velja $a_j = 0$. Za vsako naravno število $m \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$h_m := \begin{cases} \frac{1}{2^{2m}} ; a_{2m} = 0 \\ -\frac{1}{2^{2m}} ; a_{2m} = 1 . \end{cases}$$

Tako nedvomno velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0 .$$

Naš cilj je sedaj za vsak $m \in \mathbb{N}$ izračunati diferenčni kvocient

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m} . \quad (4)$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$2^{2n}a = \sum_{j=1}^{2n} 2^{2n-j} a_j + \sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-2n}} ,$$

tako da upoštevajoč periodičnost funkcije φ velja

$$\varphi(2^{2n}a) = \varphi\left(\sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-2n}}\right) .$$

Ker je v zapisu (3) zaradi naše zahteve o enoličnosti neskončno mnogo koeficientov a_j enakih 0, velja, da je

$$\sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-2n}} < \frac{1}{2}$$

natanko tedaj, ko je $a_{2n+1} = 0$. Tako dobimo, upoštevajoč definicijo funkcije φ ,

$$\frac{\varphi(2^{2n}a)}{2^{2n}} = \begin{cases} \sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} ; a_{2n+1} = 0 \\ \frac{1}{2^{2n+1}} - \sum_{j=2n+2}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} ; a_{2n+1} = 1 . \end{cases}$$

Oglejmo si še pripadajoči izraz za $a + h_m$. Podoben račun kot zgoraj nam da

$$\varphi(2^{2n}(a + h_m)) = \varphi\left(\sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-2n}} + 2^{2n} h_m\right). \quad (5)$$

Hitro lahko opazimo, da je v primeru, ko je $m < n + 1$, izraz (5) zaradi periodičnosti funkcije φ enak

$$\varphi\left(\sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-2n}}\right).$$

V primeru, ko pa je $m \geq n + 1$, se spomnimo definicije števil h_m in ugotovimo, da je izraz

$$\sum_{j=2n+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-2n}} + 2^{2n} h_m$$

vedno nenegativen ter strogo manjši od $\frac{1}{2}$ natanko tedaj, ko je $a_{2n+1} = 0$. Zatorej je

$$\frac{\varphi(2^{2n}(a + h_m))}{2^{2n}} = \begin{cases} \frac{\varphi(2^{2n}a)}{2^{2n}} ; m < n + 1 \\ \frac{\varphi(2^{2n}a)}{2^{2n}} + h_m ; m \geq n + 1, a_{2n+1} = 0 \\ \frac{\varphi(2^{2n}a)}{2^{2n}} - h_m ; m \geq n + 1, a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

in diferenčni kvocient

$$\frac{\varphi(2^{2n}(a + h_m)) - \varphi(2^{2n}a)}{2^{2n} h_m}$$

je enak

$$\begin{cases} 1 ; m \geq n + 1, a_{2n+1} = 0 \\ -1 ; m \geq n + 1, a_{2n+1} = 1 \\ 0 ; m \leq n. \end{cases}$$

Potemtakem je izraz (4) enak lihemu celemu številu tedaj, ko je m lih, in sodemu celemu številu, ko je m sod. Limita izrazov (4), ko gre m prek vsake meje, torej ne more obstajati. ■

Sklenimo sestavek z nekaterimi zgodovinskimi dejstvi iz [3, str. 402]. Obstaja Bolzanov rokopis iz leta 1834, v katerem je konstruirana taka zvezna

funkcija na končnem intervalu I , za katero naj bi Bolzano dokazal, da ni odvedljiva na neki povsod gosti podmnožici intervala I . Kasneje se je izkazalo, da ta funkcija pravzaprav ni odvedljiva v nobeni točki intervala I . Leta 1890 je Cell  rier objavil članek, v katerem je dokazal, da je za vsako dovolj veliko sodo naravno število a funkcija

$$F_a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \sin(a^n x)$$

zvezna, a nikjer odvedljiva na $\mathbb{R}$. Obstajajo pa podatki, ki navajajo na to, da naj bi Cell  rier odkril to funkcijo   e leta 1830. Pri vsem tem navajanju zveznih, a nikjer odvedljivih funkcij na realni osi ne moremo mimo družine zveznih funkcij

$$F_{a,b}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (6)$$

kjer je a liho naravno število in b realno število iz odprtega intervala $(0, 1)$. To družino je prvi obravnaval Weierstrass. Dejstvo, da so vse funkcije $F_{a,b}$ zvezne, je zaradi pogoja $b \in (0, 1)$ očitno, Weierstrass pa je okoli leta 1875 dokazal, da za funkcije $F_{a,b}$ pri vrednostih parametrov a in b , za katera velja $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, v nobeni točki realne osi ne obstaja limita diferenčnega kvocienta niti v posplošenem smislu, t.j. niti v tem smislu, da je limita končna ali pa neskončna. Dovolj preprost in razumljivo napisan dokaz neodvedljivosti teh funkcij v klasičnem smislu je podan v [4, str. 351–352].

Kaj pa optimalnost Weierstrassovega pogoja na parametra a in b , t.j. ali obstajajo kakšne vrednosti parametrov a in b , ki ne zadoščajo pogoju $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, pripadajoče funkcije $F_{a,b}$ pa so vseeno povsod neodvedljive. Hitro lahko opazimo, da so v primeru, ko je $ab < 1$, vse funkcije $F_{a,b}$ zvezno odvedljive. V tem primeru ima namreč vrsta, ki jo dobimo,   e vrsto (6) odvajamo po členih, absolutno konvergentno majoranto. Da so s tem zajete vse vrednosti parametrov a in b , pri katerih je funkcija $F_{a,b}$ odvedljiva vsaj v eni točki realne osi, sledi iz rezultata angle  skega matematika Hardyja, ki je leta 1916 dokazal neodvedljivost funkcij $F_{a,b}$ na vsej realni osi   e pri pogoju $ab \geq 1$, [2, str. 258].

LITERATURA

- [1] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisco 1964.
- [2] E. Hewit, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1965.
- [3] E. W. Hobson, *The theory of functions of real variable*, Part II, Dover publications, New York 1957.
- [4] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford University Press 1958.
- [5] J. Vrabec, *Metri  ni prostori*, Matematika-Fizika **31**, DMFA, Ljubljana 1990.

KOMPRESIJA SLIK S FRAKTALI

MOJCA INDIHAR ŠTEMBERGER

Math. Subj. Class. (1991) 28A80

Predstavimo zelo kvalitetno kompresijo v računalniku predstavljenih slik s pomočjo fraktalske transformacije.

FRACTAL IMAGE COMPRESSION

Very efficient fractal image compression is presented.

1. Uvod

Decembra 1992 je Microsoft izdal CD z naslovom „Microsoft Encarta”. To je multimedijška enciklopedija, ki vsebuje ogromno zbirko člankov, animacij, grafov, fotografij in atlas. Na tem CD-ju je sedem ur glasbe, 100 animacij in 800 barvnih zemljevidov z možnostjo povečevanja. Vsebuje tudi več kot 7000 fotografij rož, ljudi, mest, oblakov, živali... Slike so zelo kvalitetne. Vse to je shranjeno v 600 Mbyte podatkov. Takšna gostota podatkov je možna, ker so vse slike in fotografije shranjene v obliki fraktalov.

Slike so v računalniku predstavljene tako, da za vsako točko na sliki porabimo 24 bitov (v tem primeru imamo 2^{24} barvnih odtenkov). Za 24-bitno sliko velikosti 340×200 tako potrebujemo približno 200 kbyte. S pomočjo klasičnih metod komprimiranja, ki temeljijo predvsem na diskretni kosinusi transformaciji, jo lahko zmanjšamo na približno 50 kbyte, s fraktalsko transformacijo pa kar na 10 kbyte. V najboljših primerih lahko sliko komprimiramo celo na $1/500$ njene velikosti. Kompresija traja od 16 sekund do 2 minuti, dekompresija pa manj kot eno sekundo (podatki iz leta 1991).

Metodo kompresije slik s fraktali sta leta 1988 patentirala M. Barnsley in A. Sloan in je zaščitena. Osnovna ideja je takšna, da sliko razdelimo na kvadratke in potem iz omejene množice fraktalov izberemo tistega, katerega atraktor se najbolj prilega originalu.

Raziskovanje o fraktalski kompresiji poteka pri *Iterated Systems, Inc., Norcross, Georgia*. Algoritem ni v celoti objavljen, saj je v Ameriki zaščitena s patentom. Podjetje prodaja cenejšo programsko opremo *Images Incorporated*, ki zadostuje za preizkušanje metode na slikah z 256 nivoji sivine. Obstajajo tudi predstavitve dekompresije fraktalsko komprimiranih slik (datoteke s končnico FIF), npr. program FIFDEMO, ki sta mu priloženi še dve komprimirani sliki. Prva zavzame v komprimirani obliki 15 kbyte, v dekomprimirani pa 768 kbyte, druga pa 10 kbyte v komprimirani in 192 kbyte v dekomprimirani obliki.

Dekomprimirana slika je vizualno dovolj dobra aproksimacija originala, ima pa še eno zelo pomembno lastnost, to je neodvisnost od ločljivosti, kar nam omogoči poljubno povečevanje delov slike in dekomprimiranje na večjo ločljivost, kot jo je imel original.

Dokazov izrekov in trditev ne bom navajala, vsi pa so na voljo v [1] in [2].

2. Matematični modeli za slike realnega sveta

Množico slik realnega sveta označimo z R , njene elemente pa z I . Imajo naslednje lastnosti:

1. $I \in R$ ima nosilec, to je množica

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad a < b, c < d,$$

in fizikalno dimenzijo $(b - a) \times (d - c)$.

2. I ima kromatične attribute, kot so barve in intenzivnost svetlobe, ki so povezani s podmnožicami slike.
3. I je neodvisna od ločljivosti.
4. Če iz slike $I \in R$ izrežemo pravokotnik, katerega robovi so vzporedni z robovi nosilca, dobimo spet sliko realnega sveta.
5. R je zaprta za raztegovanje in krčenje, zrcaljenje, rotiranje oziroma R je zaprta za poljubno inverzibilno afino transformacijo.

Slike realnega sveta lahko predstavimo z različnimi matematičnimi modeli.

1. Za črne slike na beli podlagi uporabimo model, kjer podamo črne objekte na sliki kot kompaktne množice.
2. Sliko, na kateri so odtenki sive barve, podamo z nosilcem X in funkcijo $f : X \rightarrow [0, 255] \subset \mathbb{R}$. Pri tem $f(x, y)$ pomeni svetlost slike v točki (x, y) .
3. Sivo sliko lahko predstavimo tudi z neko normalizirano mero μ . Celotna svetloba, ki jo odbija neka podmnožica nosilca A , je

$$\int_A d\mu.$$

Cela slika odbija ravno enoto svetlobe, saj je mera μ normalizirana.

4. Barvno sliko predstavimo tako, da jo razdelimo na rdečo, zeleno in modro komponento (RGB) ter obravnavamo vsako posebej kot sivo sliko.

3. Kompresija slik z IFS fraktali

Za razlago algoritma za kompresijo črno-belih slik (to so slike, na katerih sta le črna in bela barva) potrebujemo metrični prostor $(H(\mathbb{R}^2), h(\text{evklidska}))$. Prostor H je Hausdorffov.

Definicija 1. Naj bo (X, d) poln metrični prostor. Potem $H(X)$ označuje prostor, katerega točke so kompaktne podmnožice X , različne od prazne množice.

Definicija 2. Naj bo (X, d) poln metrični prostor, $x \in X$ in $B \in H(X)$. Potem je razdalja med točko x in množico B

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Definicija 3. Naj bo (X, d) poln metrični prostor in $A, B \in H(X)$. Razdaljo $h(A, B)$ med množicama A in B definiramo takole:

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

in

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Funkcijo h imenujemo *Hausdorffova metrika*.

Definicija 4. *Iteracijski funkcijski sistem (IFS)* je sestavljen iz polnega metričnega prostora (X, d) in končne množice krčitev $w_n : X \rightarrow X$ s krčitvenimi faktorji s_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Označimo ga z

$$\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Krčitveni faktor za IFS je

$$s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Naslednji izrek združuje glavne lastnosti iteracijskih funkcijskih sistemov.

Izrek 5. Naj bo $\{X, w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ IFS s krčitvenim faktorjem s . Potem je preslikava $W : H(X) \rightarrow H(X)$, definirana z

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \quad \forall B \in H(X),$$

krčitev na polnem metričnem prostoru $(H(X), h(d))$ s krčitvenim faktorjem s , to je

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C), \quad \forall B, C \in H(X).$$

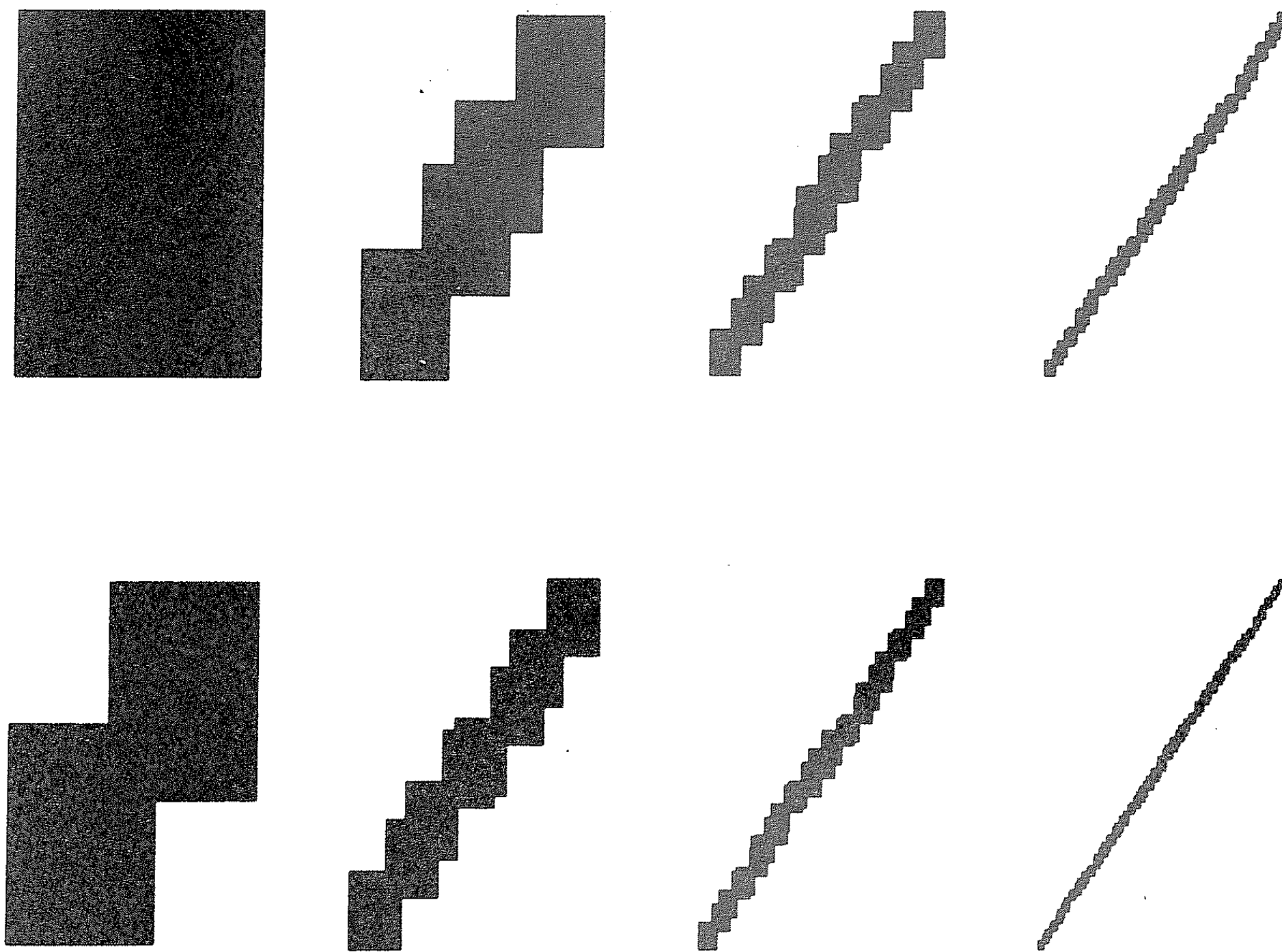
Preslikava W ima enolično določeno fiksno točko $A \in H(X)$, za katero velja

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A).$$

Fiksno točko dobimo z

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$$

za katerokoli množico $B \in H(X)$.



Slika 1. Algoritem fotokopirnega stroja

Definicija 6. Fiksno točko preslikave W iz gornjega izreka imenujemo *atraktor* iteracijskega funkcijskega sistema.

IFS fraktal je atraktor nekega iteracijskega funkcijskega sistema. Omejili se bomo na sisteme, kjer bo $X = \mathbb{R}^2$, krčitve $w_1, w_2, \dots, w_n$ pa bodo afine preslikave na $\mathbb{R}^2$.

Primer za atraktor IFS je trikotnik Sierpinskega, ki je fiksna točka iteracijskega funkcijskega sistema $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$, kjer so w_i afine preslikave na $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po gornjem izreku lahko atraktor za IFS konstruiramo z naslednjim algoritmom, ki ga imenujemo **algoritem fotokopirnega stroja**.

Izberemo kompaktno množico $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ in jo preslikamo s preslikavami $w_1, w_2, \dots, w_N$. Dobimo množico

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^N w_i(A_0),$$

ki jo spet preslikamo. Na vsakem koraku torej konstruiramo množico

$$A_{n+1} = W^{n+1}(A_0) = \bigcup_{i=1}^N w_i(A_n), \text{ za } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zaporedje $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ konvergira k atraktorju za IFS glede na Hausdorffovo metriko (slika 1).

Mislamo si, da imamo fotokopirni stroj, ki zna avtomatično delati poljubne afine transformacije. S takšnim fotokopirnim strojem lahko konstruiramo atraktor poljubnega iteracijskega funkcijskega sistema tako, da preslikano sliko znova preslikuje, dokler se ne spreminja več.

Osnovna ideja algoritma za kompresijo črno-belih slik z IFS fraktali je poiskati IFS fraktal, katerega atraktor je podoben dani sliki. Realiziramo jo lahko kot posledico naslednjega izreka:

Izrek 7 (izrek o kolažu). *Naj bodo dani poln metrični prostor (X, d) , $T \in H(X)$ in $\varepsilon \geq 0$. Izberemo IFS $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ s krčitvenim faktorjem $0 \leq s < 1$, tako da velja*

$$h\left(T, \bigcup_{n=1}^N w_n(T)\right) \leq \varepsilon,$$

kjer je $h(d)$ Hausdorffova metrika. Potem je

$$h(T, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s},$$

kjer je A atraktor za IFS. Oziroma

$$h(T, A) \leq \frac{1}{1-s} h\left(T, \bigcup_{n=1}^N w_n(T)\right), \quad \forall T \in H(X).$$

Če želimo najti IFS, katerega atraktor je podoben dani množici, moramo po izreku o kolažu najti množico transformacij, krčitev na ustreznem prostoru, znotraj katerega dana množica leži, tako da bo unija (ali kolaž) slik dane množice, preslikanih s posamezno transformacijo, podobna dani množici. Podobnost merimo s Hausdorffovo metriko.

Algoritem za kompresijo črno-belih slik se začne s ciljno sliko T , ki leži v množici X . Na tej sliki uporabimo afino transformacijo

$$w_1(\mathbf{x}) = w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{t}_1.$$

Njene koeficiente inicializiramo na vrednosti:

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0.25, \quad e_1 = f_1 = 0.$$

Sliko $w_1(T)$ predstavimo na monitorju v neki drugi barvi. Predstavlja štirikrat manjšo kopijo množice T , ki je postavljena bliže koordinatnemu izhodišču.

Potem uporabnik interaktivno prilagodi koeficiente tako, da s pomočjo miške ali kakšne druge interaktivne tehnike množico $w_1(T)$ premika, rotira,

zrcali, povečuje, zmanjšuje... Pri tem uporablja le afine transformacije. Cilj je $w_1(T)$ transformirati tako, da leži prek dela T . Ko je $w_1(T)$ ustrezno postavljena, se shranijo spremenjeni koeficienti transformacije w_1 . Pomembno je, da je kopija $w_1(T)$ manjša od originala T , sicer transformacija w_1 ne bi bila krčitev.

Potem uporabimo novo afino transformacijo w_2 na množici T in dobimo kopijo $w_2(T)$. Spet prilagodimo $w_2(T)$ tako, da pokrije tisti del množice T , ki ga $w_1(T)$ ne pokriva. Prekrivanja med $w_1(T)$ in $w_2(T)$ so dovoljena, vendar se jih raje izogibamo.

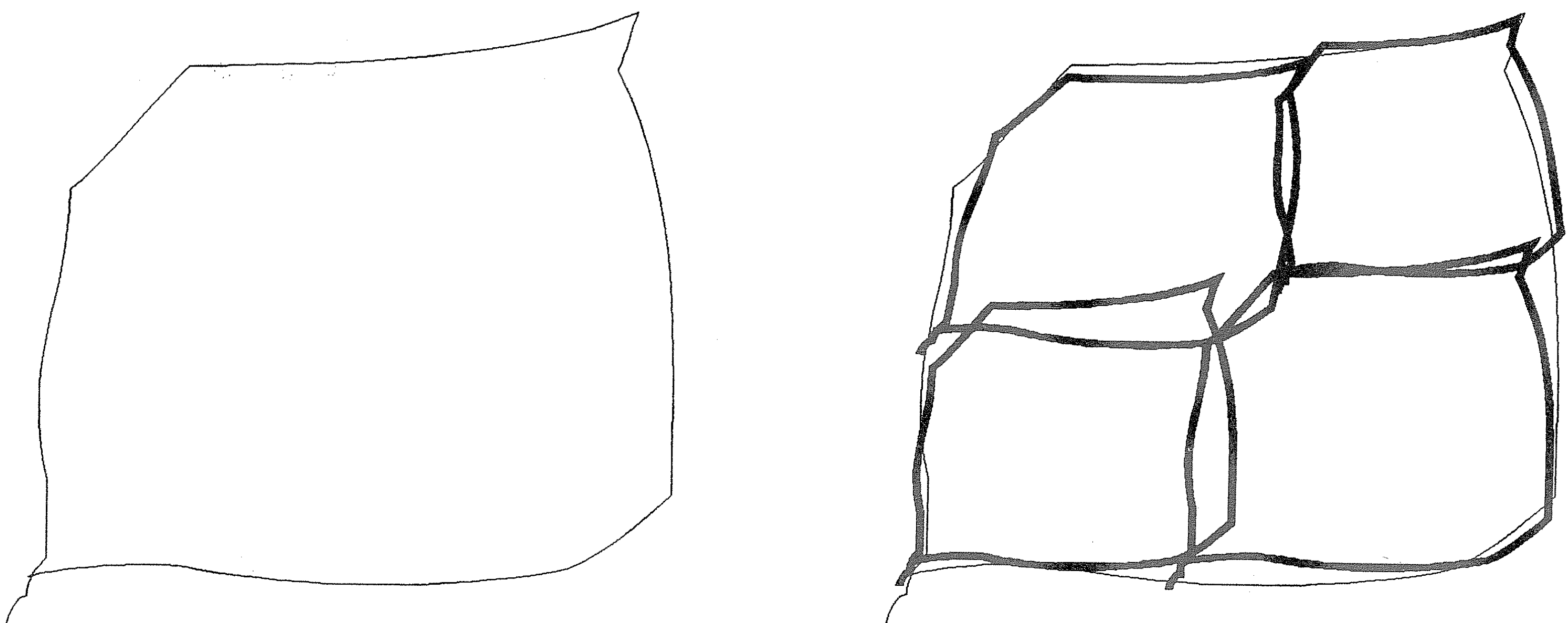
Tako uporabnik določi množico afinih transformacij $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ z lastnostjo, da sta si originalna množica T in množica

$$\tilde{T} = \bigcup_{n=1}^N w_n(T)$$

vizualno blizu. N naj bo čim manjši. Po izreku o kolažu je atraktor A za IFS

$$\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

tudi vizualno blizu originala T (slika 2). Če je $T = \tilde{T}$, je $A = T$.



Slika 2. Kompresija črno-belih slik

A ni le aproksimacija za T , ampak je tudi od ločljivosti neodvisen model za T .

Ker majhne spremembe parametrov povzročijo majhne spremembe na atraktorju, lahko atraktor z njimi še izboljšujemo.

3.1. Kompresija sivih slik

Če želimo risati fraktale, ki niso le črne slike na beli podlagi, moramo razširiti definicijo iteracijskega funkcijskega sistema z verjetnostmi.

Definicija 8. *Iteracijski funkcijski sistem z verjetnostmi* je sestavljen iz IFS

$$\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

in množice števil

$$\{p_1, p_2, \dots, p_N\},$$

za katera velja

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 \quad \text{in} \quad p_i > 0, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N.$$

Števila p_i so verjetnosti in so povezana s transformacijami w_i .

Definicija 9. Mera μ je *normalizirana*, če je $\mu(X) = 1$.

Definicija 10. Naj bo P množica normaliziranih mer na X . *Hutchinsonova metrika* d_H na P je definirana z

$$d_H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X f d\mu - \int_X f d\nu : f \in C(X), \right. \\ \left. |f(x) - f(y)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X \right\}.$$

Izrek 11. *Prostor (P, d_H) je kompakten metričen prostor.*

Definicija 12. Naj bo $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ IFS z verjetnostmi. *Markov operator* je funkcija $M : P \rightarrow P$, definirana z

$$M(\nu) = p_1 \nu \circ w_1^{-1} + p_2 \nu \circ w_2^{-1} + \dots + p_N \nu \circ w_N^{-1}.$$

Izrek 13 (Hutchinsonov izrek). *Naj bo $M : P \rightarrow P$ Markov operator, kjer ima vsaka preslikava krčitveni faktor s_i in $s = \max\{s_i\}$. Potem je M krčitev s krčitvenim faktorjem s glede na Hutchinsonovo metriko na P . To je*

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s \cdot d_H(\nu, \mu), \quad \forall \nu, \mu \in P.$$

Velja še, da obstaja enolična mera $\mu \in P$, za katero velja $M\mu = \mu$. Če je $\nu \in P$, potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(\nu) = \mu$$

glede na Hutchinsonovo metriko na P .

Definicija 14. Mero μ iz zgornjega izreka imenujemo *invariantna mera* za IFS z verjetnostmi.

Izrek 15 (izrek o kolažu za mere). *Naj bo $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ IFS z verjetnostmi in μ njegova invariantna mera. Naj bo*

$0 < s < 1$ njegov krčitveni faktor, $M : P(X) \rightarrow P(X)$ pa Markov operator. $\mu \in P(X)$ naj bo poljubna mera. Potem je

$$d_H(\nu, \mu) \leq \frac{1}{1-s} d_H(\nu, M(\nu)).$$

Tudi če obravnavamo fraktale kot mere, imamo algoritem fotokopirnega stroja, s pomočjo katerega lahko poiščemo atraktor za IFS z verjetnostmi. Iščemo torej rešitev enačbe $M\mu = \mu$, kjer je M Markov operator.

Mislimo si, da imamo sivo sliko. V eni sekundi se od nje odbije določena količina svetlobe. Predstavljajmo si, da je vir svetlobe prilagojen tako, da se odbije enotno število fotonov na sekundo. Fotoni se odbijajo od posameznih delov slike različno, kar je odvisno od svetlosti ali temnosti posameznih delov slike. Svetli deli slike odbijajo relativno veliko fotonov, temni pa malo. Uvedimo funkcijo μ (mero), ki predstavlja količino belega pigmenta v različnih delih slike. μ priredi vrednosti podmnožicam slike in ne le točkam. Za podmnožico slike S je celotna količina belega pigmenta v S ali število odbitih fotonov enako $\mu(S)$.

Mero μ lahko predstavimo tudi kot gostoto verjetnosti: če naključno izberemo foton, je $\mu(S)$ verjetnost, da se je odbil od množice $S \subset X$.

Predstavljajmo si fotokopirni stroj s štirimi lečami in štirimi filtri, ki ustreza IFS z verjetnostmi

$$\{X; w_1, w_2, w_3, w_4; p_1, p_2, p_3, p_4\}.$$

Preslikamo sivo sliko, ki ustreza meri ν . Svetloba, ki jo slika odbija, pada na štiri leče, ki ustrezajo afinim preslikavam w_1, w_2, w_3 in w_4 . Na izhodni strani imamo fotografski papir, na katerega pada svetloba skozi leče. Pri tem pa potuje še skozi filtre, ki ustrezajo verjetnostim p_1, p_2, p_3 in p_4 . Vsaka leča ima svoj filter. Slika, ki jo dobimo na fotografskem papirju, je narejena tako, da se svetlosti seštevajo na področjih, kjer se slike, dobljene s posameznimi afinimi preslikavami, prekrivajo. Rezultat te preslikave je $M(\nu)$.

Imamo torej fizično implementacijo Markovega operatorja M . Algoritem fotokopirnega stroja za sive slike dela tako, da najprej pravilno nastavi leče in filtre glede na IFS z verjetnostmi. Nato pa zaporedoma preslikuje vhodno sliko ν . Dobimo zaporedje

$$M^1(\nu), M^2(\nu), M^3(\nu), \dots,$$

ki konvergira k meri μ , za katero velja $M(\mu) = \mu$ in je fiksna točka Markovega operatorja. V praksi bi proces ustavili, ko bi dobili sliko, ki se ne bi več spreminjala. Fiksna točka μ ni odvisna od začetne mere ν .

Na podlagi izreka o kolažu za mere lahko najdemo IFS z verjetnostmi, katerega atraktor je blizu dani sivi sliki (sliko predstavimo z mero τ). Poiskati moramo takšno množico afinih krčitev, da bo $M(\tau)$ vizualno blizu

originalni sliki τ . Podobnost merimo s Hutchinsonovo metriko. Atraktor kontroliramo tako, da prilagajamo parametre IFS z verjetnostmi.

Osnovna ideja tega algoritma je naslednja: mislimo si, da imamo fotokopirni stroj za sive slike s poljubnim številom leč in filtrov. Najprej nastavimo verjetnost p_1 na 1, vse druge verjetnosti pa na 0. Transformacijo w_1 in verjetnost p_1 prilagodimo tako, da je izhodna slika kolikor mogoče dobra aproksimacija za τ . Potem dovolimo, da je $p_2 > 0$, spet prilagodimo w_2 in p_2 tako, da je $p_1\tau \circ w_1^{-1} + p_2\tau \circ w_2^{-1}$ kolikor mogoče dobra aproksimacija za večji del slike. Dodamo še več afinih preslikav w_i z verjetnostmi p_i . Paziti moramo na to, da so vse preslikave krčitve. Ko je izhodna slika $M(\tau)$ dovolj podobna originalu τ , vse verjetnosti pomnožimo z izrazom $(p_1 + p_2 + \dots + p_N)^{-1}$. Ko imamo IFS z verjetnostmi, z algoritmom fotokopirnega stroja poiščemo njegov atraktor. Po izreku o kolažu za mere je ta podoben originalni sliki τ .

4. Kompresija s fraktalsko transformacijo

Do zdaj opisani algoritem ne deluje avtomatsko, ampak uporabnik interaktivno določa parametre preslikav. Če teorijo iteracijskih funkcijskih sistemov posplošimo tako, da zmanjšamo domene afinih preslikav w_i na podmnožice celega prostora, dobimo lokalne IFS. S pomočjo teh izpeljemo avtomatični algoritem za kompresijo slik s fraktali.

Definicija 16. Naj bo (X, d) poln metričen prostor in $w_i : R_i \rightarrow X$ lokalna krčitev, katere domena R_i je neprazna podmnožica X , za $i = 1, 2, \dots, N$. *Lokalni iteracijski funkcijski sistem* je

$$\{X; w_i : R_i \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Število $s = \max\{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ je njegov *krčitveni faktor*.

Naj bo S množica vseh podmnožic X . Definiramo lahko operator $W_{local} : S \rightarrow S$ z

$$W_{local}(B) = \bigcup_{i=1}^N w_i(R_i \cap B), \quad \forall B \in S.$$

Če za neko množico $A \subset X$ velja

$$W_{local}(A) = A,$$

jo imenujemo atraktor. Vendar pa lokalni IFS nima nujno atraktorja, lahko pa ima več različnih. Če sta A in B atraktorja za lokalni IFS, je tudi $A \cup B$ njegov atraktor, kar pomeni, da je v primeru obstoja atraktorja to največji atraktor, ki vsebuje vse manjše. Dobimo ga z unijo vseh atraktorjev za W_{local} .

Tudi za lokalne IFS veljajo podobni izreki kot za IFS, vendar so teoretično bolj zapleteni.

Za kompresijo črno-bele slike, predstavljene z množico $G \subset X$, dobimo fraktalski model takole:

X prekrijemo z majhnimi kvadrati in tiste, ki imajo z G neprazen presek, označimo z D_i za $i = 1, 2, \dots, N$. Potem za $i = 1, 2, \dots, N$ poiščemo lokalno afino preslikavo $w_i : R_i \rightarrow X$ s krčitvenim faktorjem s , za katero velja

$$w_i(R_i) = D_i$$

in

$$w_i(R_i \cap G) \simeq D_i \cap G.$$

Za kriterij podobnosti uporabljamo Hausdorffovo metriko.

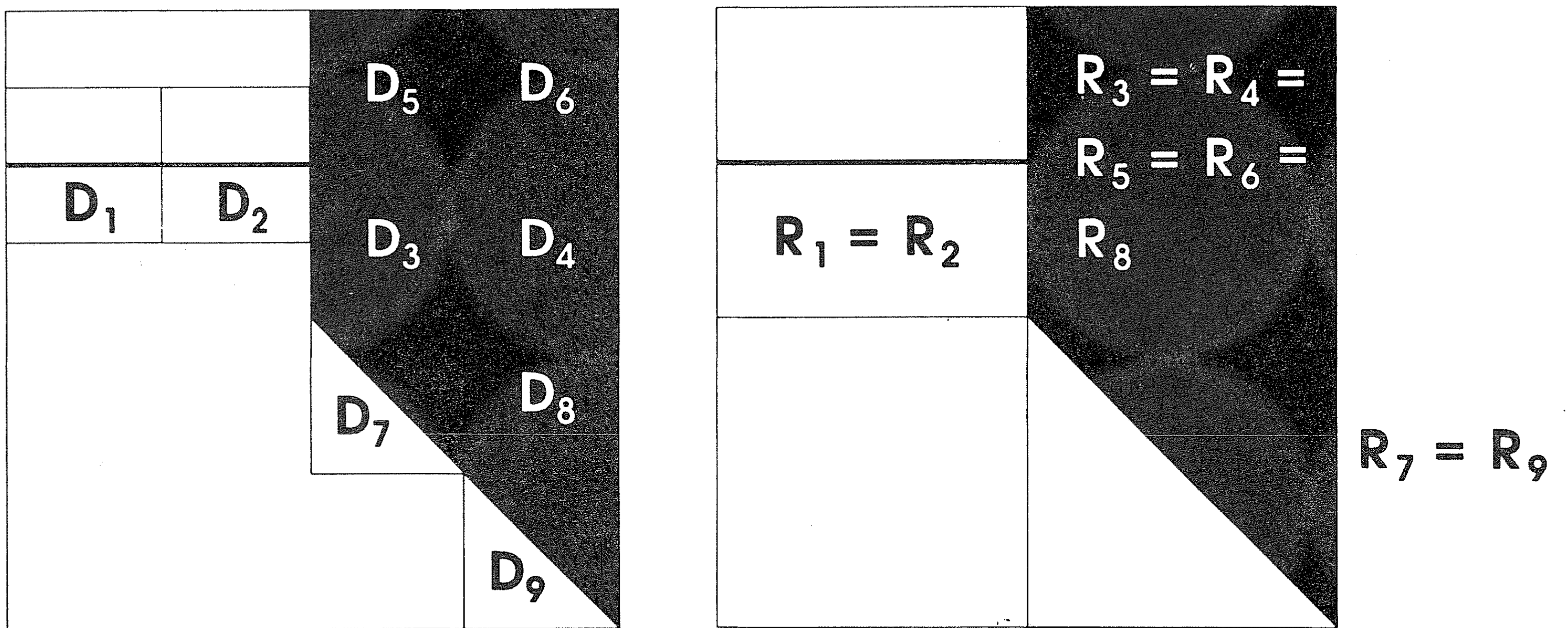
oznaka	matrika	opis
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	identiteta
1	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	zrcaljenje prek osi z
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	zrcaljenje prek osi x
3	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	rotacija za 180°
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	zrcaljenje prek premice $y = x$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	rotacija za 90°
6	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	rotacija za 270°
7	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	zrcaljenje prek premice $y = -x$

Tabela 1. Linearne transformacije za avtomatično fraktalsko kompresijo.

V praktični aplikaciji je preslikava w_i oblike

$$w_i(\cdot) = 0.5\mathbf{A} \cdot + \mathbf{t},$$

kjer je $\mathbf{A}$ ena izmed linearnih transformacij iz tabele 1. Potem je R_i majhen kvadrat, dvakrat večji od D_i . Če so vsi bloki D_i , $i = 1, 2, \dots, N$ enako veliki, potem lahko lokalni IFS popolnoma določimo s tem, da za vsak i podamo



Slika 3. Kompresija črno-bele slike s fraktalsko transformacijo.

x in y koordinati (D_x, D_y) levega spodnjega oglišča D_i , koordinati levega spodnjega oglišča R_i , to je (R_x, R_y) in številko preslikave (slika 3).

Glavne korake algoritma za avtomatsko fraktalsko kompresijo slik lahko podamo tako:

1. Podamo binarno sliko G , ki je podmnožica $X \subset \mathbb{R}^2$.
2. G prekrijemo z bloki D_i tako, da se ti ne prekrivajo med seboj. Množica $\{D_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ mora prekrivati celo množico G .
3. Poiščemo množico blokov R , za katere velja $R \cap G \neq \emptyset$. Omejimo množico L vseh možnih levih spodnji oglišč teh blokov tako, da je končna. Za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ definiramo množico T_i lokalnih afinih krčitev, ki preslikajo R na D_i :

$$T_i = \{w(D_i, R_x, R_y, j) : (R_x, R_y) \in L; j = 0, 1, \dots, 7\},$$

kjer je $w(D_i, R_x, R_y, j)$ afina krčitev gornje oblike z domeno R , sliko D_i in j -to linearno preslikavo iz tabele 1.

4. Za vsak i izberemo tisto preslikavo $w \in T_i$, ki minimizira Hausdorffovo razdaljo

$$h(w_i(R \cap G), D_i \cap G).$$

To pomeni, da za vsak blok D_i izberemo ustrezen blok R in preslikavo tako, da bo transformirani del slike najbolj podoben originalu.

Komprimirana slika je torej zapisana v obliki lokalnega IFS. Dekomprimiramo jo tako, da narišemo atraktor.

Preprosto avtomatsko kompresijo sivih slik lahko dobimo z uporabo afinih transformacij oblike

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ Q_i \end{bmatrix},$$

kjer so a_i , b_i , c_i in d_i koeficienti matrik iz tabele 1 pomnoženi z 0.5, P pa je fiksno pozitivno število. Bloke R izbiramo iz neke končne množice, original pa razdelimo na 16 blokov D_i .

Potem je lokalni IFS, s katerim bomo komprimirali sliko, popolnoma določen s številko bloka na originalu, R_x , R_y , Q_i in številko preslikave iz tabele 1.

Barvno sliko komprimiramo tako, da jo razdelimo na RGB komponente, potem pa obravnavamo vsako od njih kot sivo sliko.

5. JPEG kompresija slik

Zaradi prenosa slik in njihove uporabe v različnih aplikacijah so potrebni standardi za njihov format. Za to skrbi JPEG (*Joint Photographic Experts Group*), to je združenje, ki je nastalo kot rezultat sodelovanja med dvema komitejema, CCITT (*International Telegraph and Telephone Consultative Committee*) in ISO (*International Standards Organization*), na področju prenosa in kompresije različnih formatov slik.

Najbolj razširjena metoda kompresije je kompresija z diskretno kosinusno Fourierjevo transformacijo. Sestavljena je iz naslednjih korakov:

1. Sliko razbijemo na bloke velikosti 8×8 in vsak blok transformiramo z diskretno kosinusno Fourierjevo transformacijo.
2. Dobimo podatke, ki jih kodiramo s Huffmanovo kodo ali pa z aritmetičnim kodiranjem s pomočjo IFS fraktalov.

Za aritmetično kodiranje konstruiramo poseben IFS

$$\{[0, 1] \subset \mathbb{R}; w_1, w_2, \dots, w_N\},$$

kjer so preslikave $w_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ afine krčitve oblike

$$w_i(x) = p_i x + t_i, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N$$

z

$$t_i = p_{i-1} + p_{i-2} + \dots + p_1 \quad \text{in} \quad t_1 = 0.$$

Za tako izbrane afine preslikave velja

$$[0, 1] = \bigcup w_i([0, 1])$$

in

$$w_i([0, 1]) \cap w_j([0, 1]) = \emptyset, \quad \text{za } i \neq j.$$

Naj bo

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$$

beseda, ki jo želimo kodirati. To naredimo takole (slika 4):

1. Izberemo x_0 iz intervala $[0, 1)$.
2. Točko x_0 preslikamo z afino preslikavo w_{σ_1} in dobimo točko

$$x_1 = w_{\sigma_1}(x_0).$$

3. Točko x_1 preslikamo z afino preslikavo w_{σ_2} in dobimo točko

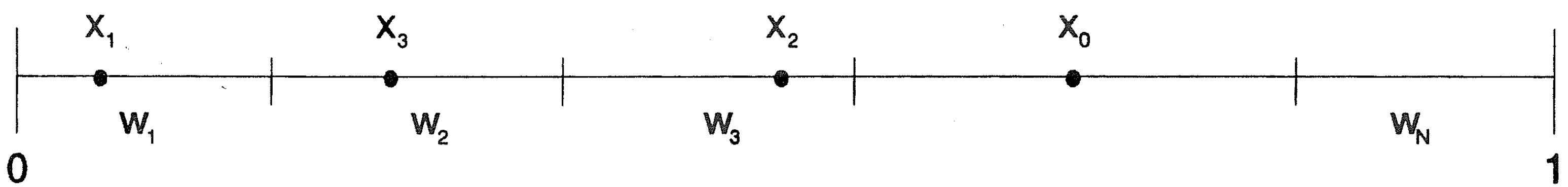
$$x_2 = w_{\sigma_2}(x_1) = w_{\sigma_2}(w_{\sigma_1}(x_0)).$$

4. Nadaljujemo tako in dobimo točko

$$x_k = w_{\sigma_k} \circ w_{\sigma_{k-1}} \circ \dots \circ w_{\sigma_1}(x_0).$$

Komprimirana informacija je sestavljena iz zadnje točke x_k , dolžine besede k in parametrov preslikav w_i .

$$\sigma=132$$



Slika 4. Aritmetično kodiranje

Za dekompresijo potrebujemo inverzne funkcije

$$w_i^{-1}(x)$$

glede na to, v katerem intervalu leži x . Za vsak $i = k, k-1, \dots, 1$ si zapomnimo σ_i glede na to, v sliki katere izmed afinih preslikav w_i leži točka x_i .

LITERATURA

- [1] M. F. Barnsley, *Fractal Image Compression*, AK Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [2] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
- [3] M. Leonard, *Color Image Compression Finally Heads For Maturity*, Electronic Design, May 23, 1991.

TERMODINAMIKA V POSEBNI TEORIIJ RELATIVNOST

JANEZ STRNAD

PACS 03.30.+p

Do relativistične termodinamike ne vodi ena sama pot. Dokler obstaja več mogočih poti, lahko le zahtevamo, da so brez notranjih nasprotij. Od predlaganih transformacij za termodinamične količine je nekatere mogoče postaviti na skupno osnovo. Morda se bo ena od teh poti skladala s prihodnimi poskusi. Kaže, da je mogoče natančna merjenja prasevanja preprosto opisati samo po eni izmed predlaganih poti.

THERMODYNAMICS IN SPECIAL RELATIVITY

There is no straightforward approach to relativistic thermodynamics. As there are more approaches one can demand internal consistency only. Out of the proposed transformations for quantities of thermodynamics some important ones can be considered on a common footing. Future experiments may favour one of the approaches. Apparently, accurate measurements of the cosmic microwave background can be simply described by one of the proposed approaches only.

Uvod

Posebna teorija relativnosti je okvir, na katerega napnemo druge veje fizike. Iz Newtonove mehanike pridemo po tej poti do relativistične mehanike, Maxwellova elektrodinamika pa je že usklajena s posebno teorijo relativnosti. Bolj poredko napnemo na okvir termodinamiko. Korak pa je vreden truda, ker je *relativistična termodinamika* zanimiva sama po sebi in je prešla tudi zanimiv razvoj. Razprava o njenih vprašanjih še ni končana. V zadnjem času postajajo merjenja tako natančna, da bi bilo mogoče nekatere enačbe relativistične termodinamike že preskusiti.

Najprej se vprašajmo, kako se pri prehodu iz inercialnega opazovalnega sistema v drug tak sistem transformira za termodinamiko značilna količina, na primer temperatura ali toplota. V lastnem opazovalnem sistemu Σ termodinamični sistem miruje. Izhodišče inercialnega opazovalnega sistema Σ' z vzporednimi koordinatnimi osmi se s konstantno hitrostjo v_0 giblje po osi x , ki je skupna z osjo x' . V tem opazovalnem sistemu se termodinamični sistem giblje s hitrostjo $-v_0$ po osi x' .

Vpeljimo absolutno temperaturo s plinskim termometrom. Po zakonu relativnosti splošna plinska enačba velja v obeh inercialnih opazovalnih sistemih v enaki obliki:

$$pV = (m/M)RT, \quad pV' = (m/M)RT'.$$

V drugi enačbi smo upoštevali, da so masa plina m , kilomolska masa M , splošna plinska konstanta R in tlak p invariante. Za tlak mirujoče tekočine pot do tega spoznanja nakaže dodatek (D2). Iz zapisane enačbe torej izhaja, da se temperatura transformira kot prostornina (D3):

$$T' = T/\gamma_0, \quad \gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}. \quad (1)$$

Nato vpeljimo temperaturo v kinetični teoriji plinov za enoatomni plin z notranjo energijo:

$$W = \frac{3}{2}RT, \quad W' = \frac{3}{2}RT'.$$

V tem primeru se temperatura transformira kot energija (D1):

$$T' = \gamma_0 T. \quad (2)$$

Nazadnje razširimo zahtevo, da je temperatura dveh delov termodinamičnega sistema v toplotnem ravnovesju enaka, na dela sistema, ki se drug proti drugemu gibljeta. Zahteve ne moremo opreti na merjenja, saj si ne predstavljamo, kako bi se prepričali, da sta zares enaki temperaturi delov sistema, ki se drug glede na drugega hitro gibljeta. Zanimiva pa je zato, ker podaja še tretjo možnost:

$$T' = T. \quad (3)$$

Temperatura je invarianta in tališča in vrelišča so za snov značilni podatki ne glede na to, ali se sistem giblje ali ne.

Termodinamično vpeljemo temperaturo prek Carnotove krožne spremembe:

$$T/T_0 = Q/Q_0. \quad (4)$$

Q je toplota, ki jo prejme stroj pri višji temperaturi T , in Q_0 toplota, ki jo odda pri nižji temperaturi T_0 . Enačba, zapisana v opazovalnem sistemu Σ' , zagotovi, da se oddana ali prejeta toplota transformira enako kot temperatura. V prvem primeru velja torej

$$Q' = Q/\gamma_0, \quad (1a)$$

v drugem

$$Q' = \gamma_0 Q \quad (2a)$$

in v tretjem

$$Q' = Q. \quad (3a)$$

Za enačbo (4) stoji enačba o spremembi entropije pri reverzibilni izotermni spremembi: $\Delta S = Q/T$. V okviru statistične mehanike izrazimo entropijo z verjetnostjo, zato sta entropija in njena sprememba invarianti. Pri tem se opremo na misel, da izrazimo verjetnost vselej kot pogostost (delno frekvenco), ki ne sme biti odvisna od izbire opazovalnega sistema. Enačbe (1a), (2a) in (3a) izhajajo iz enačb (1), (2) in (3), če se opremo na invariantnost entropije. Zapisane dvojice enačb nasprotujejo druga drugi, kar nas spravi v zadrego.

Dve leti po izidu posebne teorije relativnosti je M. Planck izpeljal enačbo (1) [1]. Enačbo je podprl A. Einstein in izčrpno povzel Planckovo stališče [2]. Zamislimo si krožno spremembo v štirih korakih.

1. V lastnem inercialnem opazovalnem sistemu Σ opazovani termodinamični sistem prejme toploto Q od toplotnega rezervoarja pri temperaturi T . Mislamo si, da se zaradi dovedene toplote v njem pri konstantnem tlaku stali nekaj trdnine in se zaradi tega zanemarljivo malo spremeni prostornina. Lastna energija termodinamičnega sistema se od mc^2 poveča na $mc^2 + Q$, če je m njegova začetna masa.
2. V inercialnem opazovalnem sistemu Σ termodinamični sistem pospešimo do hitrosti v_0 v smeri osi x , da naposled miruje v inercialnem opazovalnem sistemu Σ' . Zato porabimo delo, ki je enako kinetični energiji $(mc^2 + Q)(\gamma_0 - 1)$.
3. V opazovalnem sistemu Σ' termodinamični sistem odda pri temperaturi T' toploto Q' toplotnemu rezervoarju, ki v tem opazovalnem sistemu miruje. Da bi mogla toplota Q , kakor jo opazujemo v opazovalnem sistemu Σ , preiti v opazovalnem sistemu Σ' , moramo opraviti dodatno delo. V zakonu gibanja $F = dP/dt$ moramo upoštevati relativistično gibalno količino $P = \gamma_0 v_0 Q/c^2$ za maso Q/c^2 , ki ustreza toploti. „Translacijska sila“ F mora opraviti delo $Fds = \gamma_0 v_0 Q ds/c^2 dt = \gamma_0 v_0^2 Q/c^2$, če naj se gibalna količina ne spremeni. Ko termodinamični sistem odda toploto, ima zopet prvotno lastno energijo mc^2 .
4. Termodinamični sistem zaustavimo, da zopet miruje v opazovalnem sistemu Σ , in dobimo kot delo povrnjeno kinetično energijo $mc^2(\gamma_0 - 1)$.

Pri krožni spremembi mora biti v opazovalnem sistemu Σ vsota dovedenega dela in dovedene toplote enaka vsoti odvedenega dela in odvedene toplote:

$$Q + (mc^2 + Q)(\gamma_0 - 1) = \gamma_0 Q v_0^2 / c^2 + Q' + mc^2(\gamma_0 - 1).$$

Iz enačbe sledi transformacija (1a) za toploto in zaradi invariantnosti entropije transformacija (1) za temperaturo.

Več kot pol stoletja je veljal Planckov sklep. V šestdesetih letih pa ga je kritiziral H. Ott [3] in neodvisno od njega H. Arzeliés [4]. Prvi je ponovil krožno spremembo, a trdil, da v 3. koraku ne smemo vključiti dela „translacijske sile“. Spustil je prvi člen na desni strani zadnje enačbe in prišel do transformacije (2a) za toploto in z invariantnostjo entropije do transformacije (2) za temperaturo. S tem se je povečalo zanimanje za vprašanje. Številni članki so podprli enačbi (2) in (2a). Pozneje se je oglasil P. Landsberg, ki je obdržal Planckovo transformacijo za toploto (1a), a je za temperaturo zahteval invariantnost (3) [5]. N. G. van Kampen pa je zagovarjal invariantno toploto (3a), temperaturo (3) in entropijo [6]. Bolj nenavadnih predlogov ne kaže omeniti [7], [8].

Zaprta sistem

Čez nekaj časa se je uveljavilo spoznanje, da imajo temperature, za katere veljajo različne transformacije, pač različen pomen, ne da bi bila katera izmed njih prava in druga napačna [9], [10], [11]. Za termodinamični sistem so posebno pomembne stene, zato ga imenujemo *zaprt*. Opazujmo na primer plin v valjasti posodi, ki v opazovalnem sistemu Σ miruje z geometrijsko osjo v smeri osi x . V opazovalnem sistemu Σ' se posoda giblje s hitrostjo $-v_0$ v smeri osi x' . V tem opazovalnem sistemu sila desne stene deluje v smeri gibanja in dovaja termodinamičnemu sistemu moč $p'Z'v_0 = pZv_0$. Pri tem je $Z = Z'$ ploščina osnovne ploskve, ki je pravokotna na smer gibanja in zato invariantna. Stena na levi deluje na plin v nasprotni smeri gibanja in odvaja od termodinamičnega sistema moč pZv_0 . Energijski tok se sklene po vzdolžnih stenah posode.

Pri namišljenem poskusu v lastnem opazovalnem sistemu Σ osnovni ploskvi sočasno odmaknimo pravokotno na os x . V opazovalnem sistemu Σ' se osnovni ploskvi ne odmakneta sočasno. Enačba $t' = \gamma_0(t - v_0x/c^2)$, v katero vstavimo $t = 0$, pokaže, da se leva stena (pri $x_l = -\frac{1}{2}l$) odmakne $\delta t' = \gamma_0 v_0 l / c^2$ pozneje kot desna (pri $x_d = \frac{1}{2}l$), če je l lastna dolžina valja.

V opazovalnem sistemu Σ' dobi torej termodinamični sistem od prečnih sten sunek sile

$$-p'Z'\delta t' = -\gamma_0 v_0 p Z l / c^2 = -\gamma_0 v_0 p V / c^2;$$

$V = Zl$ je lastna prostornina posode. Zaradi tega ima termodinamični sistem dodatno gibalno količino, ki smo jo izračunali. V celoti je v tem opazovalnem sistemu gibalna količina termodinamičnega sistema

$$P'_x = -\gamma_0 m v_0 - \gamma_0 v_0 p V / c^2 = -\gamma_0 v_0 W / c^2 - \gamma_0 v_0 p V / c^2 = -\gamma_0 v_0 H / c^2,$$

če zaznamujemo s $H = W + pV$ entalpijo termodinamičnega sistema. Tolikšno gibalno količino dobimo s transformacijo četverca $(H/c, \mathbf{P})$, saj je $P'_x = \gamma_0(P_x - v_0 H / c^2) = -\gamma_0 v_0 H / c^2$, ker je v lastnem opazovalnem sistemu Σ gibalna količina $\mathbf{P}$ enaka nič. Račun pokaže, da je treba pri zaprtem termodinamičnem sistemu uporabiti četverec $(H/c, \mathbf{P})$. Nasprotno je pri *neodvisnem* sistemu, na primer točkastem telesu, treba uporabiti četverec gibalne količine $(W/c, \mathbf{P})$. Kot zaprt termodinamični sistem je mogoče v tem smislu obravnavati tudi trdno telo ali kroglo plina ali kapljevine, ki jo veže gravitacija, čeprav ti sistemi nimajo sten.

Delo tlaka v opazovalnem sistemu Σ' izračunamo tako, da najprej iz enačbe $H' = \gamma_0 H$ ali $W' + p'V' = \gamma_0(W + pV)$ poiščemo:

$$W' = \gamma_0 W + \gamma_0 p V - p V / \gamma_0 = \gamma_0(W + p V v_0^2 / c^2).$$

Velja $dA = dW = -pdV$, če ne dovajamo toplote, in je dalje

$$\begin{aligned} dA' = dW' &= \gamma_0 dW + \gamma_0(p dV + V dp) v_0^2 / c^2 = -\gamma_0(1 - v_0^2 / c^2) p dV + \\ &+ \gamma_0(v_0^2 / c^2) V dp = -p dV / \gamma_0 + \gamma(v_0^2 / c^2) V dp = -p' dV' + (\gamma_0^2 v_0^2 / c^2) V' dp'. \end{aligned}$$

Delo tlaka v opazovalnem sistemu Σ' vsebuje poleg znanega izraza $-p'dV'$ še dodatni člen $z V'dp'$. Tudi do tega pride, ker sili prečnih sten v opazovalnem sistemu Σ' ne začneta delovati sočasno, če začneta delovati sočasno v lastnem opazovalnem sistemu Σ . Zapisana transformacija opozori na posebnost termodinamičnih sistemov. V posebni teoriji relativnosti jih moramo obravnavati drugače kot sisteme z dvema delcema, ki smo jih sicer v tej teoriji vajeni.

Kovariantna vpeljava temperature

Transformacije za temperaturo (1)–(3), do katerih smo prišli po različnih poteh, nas vznemirjajo in silijo k poskusom, da bi jih izpeljali iz skupne osnove. Nakažimo to izpeljavo. Običajno vzamemo, da je notranja energija termodinamičnega sistema z eno sestavino in eno fazo enolična funkcija entropije in prostornine ali entalpije in tlaka. Temperaturo vpeljemo potem kot $T = (\partial W / \partial S)_V$ ali $T = (\partial H / \partial S)_p$. V okviru posebne teorije relativnosti sta obe enačbi uporabni samo v lastnem opazovalnem sistemu Σ , v katerem termodinamični sistem miruje. Enačbi lahko uporabimo v opazovalnem sistemu Σ' , v katerem se termodinamični sistem giblje, če vključimo v razpravo neko dodatno količino, za katero zahtevamo, da je konstantna: $K' = K$. Z njo postavimo $W' = W'(S', V', K')$ in $H' = H'(S', p', K')$ ter določimo temperaturo v opazovalnem sistemu Σ' kot

$$T' = \left(\frac{\partial W'}{\partial S'} \right)_{V'K'} \quad \text{ali} \quad T' = \left(\frac{\partial H'}{\partial S'} \right)_{p'K'}. \quad (5)$$

Na splošno privzamemo še, da sta entropija in tlak invariantna.

Po rezultatih uvidimo, da moramo za Planckovo transformacijo izbrati za K gibalno količino, a za Ottovo transformacijo hitrost, ki v posebni teoriji relativnosti ni sorazmerna z gibalno količino. V prvem primeru izrazimo energijo s samimi ekstenzivnimi spremenljivkami. Po Planckovo imamo tedaj zaradi druge enačbe (5):

$$T' = \left(\frac{\partial H'}{\partial S'} \right)_{p'P'} = \left(\frac{\partial H'}{\partial S} \right)_{pP} = \frac{H}{H'} \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{pP} = \frac{T}{\gamma_0}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je invariantna velikost četverca $H'^2 - c^2 P'^2 = H^2 - c^2 P^2$ in da velja pri nespremenjeni gibalni količini $P = P'$ po odvajanju $H'dH' = HdH$ in $dH' = (H/H')dH = dH/\gamma_0$. Po Ottovo je prav tako po drugi enačbi (5)

$$T' = \left(\frac{\partial H'}{\partial S'} \right)_{p'v'} = \left(\frac{\partial H'}{\partial S} \right)_{pv} = \gamma_0 \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p = \gamma_0 T,$$

saj je $dH' = \gamma_0 dH$, če je hitrost v_0 nespremenjena. Mogoče je potemtakem reči, da sta Planck in Ott temperaturo vpeljala na enaki osnovi, le da je

prvi zahteval, da je konstantna gibalna količina, in drugi, da je konstantna hitrost.

Bralcu se lahko zazdi, da je taka razprava zgubila zvezo z merjenji. Razpravo smo začeli s privzetkom, ki je lahko dokaj samovoljen, in poskrbeli le za to, da je bilo izvajanje usklajeno z enačbami posebne teorije relativnosti. Vendar se že kaže možnost, da bodo merjenja odločila, kateri privzetki so bolj pripravi.

Prasevanje

Merjenje toplote je v splošnem dokaj nenatančno in tudi temperaturo teles je težko natančno meriti. Enačbe (1), (2) ali (3) bi bilo mogoče naravnost preskusiti, če bi merili temperaturo vsaj z relativno natančnostjo $\pm v_0^2/2c^2$, če upoštevamo samo drugi člen Taylorjeve vrste v (1) ali (2). Veliko bolj natančno je merjenje prasevanja, pri katerem se pojavi kvocient v_0/c tudi linearno. V lastnem opazovalnem sistemu Σ je prasevanje izotropno in podaja odvisnost spektralne gostote od temperature T Planckov zakon [12]. Za opazovalca v sistemu Σ' , ki se giblje v opazovalnem sistemu Σ s hitrostjo v_0 , pa prasevanje ni izotropno. Zanj je pri kotu ϑ glede na smer gibanja spektralna gostota tudi določena s Planckovim zakonom, le da se v njem pojavi efektivna temperatura T' , ki je odvisna od kota ϑ :

$$T' = T\gamma_0(1 - v_0 \cos \vartheta/c). \quad (6)$$

Do enačbe pridemo po dokaj dolgi izpeljavi. V njej upoštevamo, da je število fotonov, ki jih prešteje merilnik v opazovalnem sistemu Σ' v določenem času, invariantno [13]. To število izrazimo z vstopno zenico merilnika, ozkim frekvenčnim pasom, majhnim prostorskim kotom, ki ga zajame merilnik, in časom štetja v opazovalnem sistemu Σ' . Naštete podatke iz tega opazovalnega sistema skrbno povežemo z ustreznimi podatki v opazovalnem sistemu Σ . Upoštevamo še transformacijo četverca $(\omega/c, \mathbf{k})$, v katerem je $\omega = 2\pi\nu$ krožna frekvenca, ν frekvenca in $\mathbf{k}$ valovni vektor z velikostjo $k = \omega/c$. Enačbi

$$\nu' = \gamma_0\nu \left(1 - \frac{v_0 \cos \vartheta}{c}\right), \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + v_0/c}{1 + v_0 \cos \vartheta'/c} \quad (7)$$

poznamo iz Dopplerjevega pojava in astronomske aberacije [14].

Do enačbe (6) pa je mogoče priti preprosto po Ottovi poti [15]. Najprej prvo enačbo (7) pomnožimo s Planckovo konstanto in prepoznamo v $W' = h\nu'$ energijo fotona v opazovalnem sistemu Σ' ter v $W = h\nu$ energijo fotona v opazovalnem sistemu Σ . Z enačbo $W' = \gamma_0 W(1 - v_0 \cos \vartheta/c)$ vpeljemo temperaturo v opazovalnem sistemu Σ' kovariantno po prvi enačbi (5):

$$T' = \left(\frac{\partial W'}{\partial S'}\right)_{V'} = \left(\frac{\partial W}{\partial S}\right)_V \gamma_0(1 - v_0 \cos \vartheta/c) = T\gamma_0(1 - v_0 \cos \vartheta/c).$$

Kot ϑ in velikost v_0 namreč ostaneta nespremenjena. Sevanje v Vesolju smemo imeti za zaprt termodinamični sistem. Nekdaj je bilo namreč v

toplotnem ravnovesju s snovjo in se je tedanja oblika spektra ohranila, le da se je zaradi širjenja Vesolja znižala temperatura.

Z drugo enačbo (7) izrazimo kot ϑ s kotom ϑ' , ki ga izmerimo v opazovalnem sistemu Σ' , in razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$T' = T/\gamma_0(1 + v_0 \cos \vartheta'/c) = T(1 - v_0 \cos \vartheta'/c + \frac{1}{2}v_0^2 \cos^2 \vartheta'/c^2 + \dots).$$

Navadno spremenimo še znak pred hitrostjo v_0 , da je temperatura sevanja iz predela, proti kateremu se Osončje giblje (za $\vartheta' = 0$), višja. Z zadnjo enačbo so na osnovi merjenj z radiometri na umetnem satelitu COBE (COsmic Background Explorer) ugotovili, da se Osončje giblje glede na opazovalni sistem, v katerem je prasevanje izotropno, s hitrostjo (365 ± 18) km/s proti točki v ozvezdju Leva [16]. Poznejša natančnejša merjenja so razkrila, potem ko so izločili sevanje Galaksije, fluktuacije v prasevanju, ki izvirajo z zgodnjih razvojnih stopenj Vesolja. To, da za obdelavo merjenj uporabljajo enačbo, ki jo je mogoče dobiti po Ottovi poti, daje tej poti določeno prednost. Po Planckovi poti namreč ni mogoče priti do preproste in uporabne enačbe [13]. Ali bodo izpopolnjena merjenja v prihodnosti pokazala, da je Ottovo transformacijo (2) po fizikalni strani edina smiselna?

Dodatek

Za inercialna opazovalna sistema Σ in Σ' , katerih izhodišči se pokrijeta v trenutku $t = t' = 0$, velja *Lorentzova transformacija*:

$$t' = \gamma_0(t - v_0x/c^2), \quad x' = \gamma_0(x - v_0t), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Z njo hitro ugotovimo, da se razsežnosti v vzdolžni smeri skrčijo. Leva meja prizmatičnega telesa naj bo pri $x_l = \frac{1}{2}l$ in desna pri $x_d = \frac{1}{2}l$, da je lastna dolžina telesa l . Iz obratne transformacije $x = \gamma_0(x' + v_0t')$ dobimo v trenutku $t' = 0$ za $x'_l = -\frac{1}{2}l/\gamma_0$ in $x'_d = \frac{1}{2}l/\gamma_0$, tako da je v opazovalnem sistemu Σ' dolžina telesa v smeri gibanja $l' = x'_d - x'_l = l/\gamma_0$ skrčena. Prečne razsežnosti telesa se ne spremenijo, ker velja $y' = y$ in $z' = z$.

Transformacijo za silo dobimo iz zakona gibanja $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$, ki stopi na mesto drugega Newtonovega zakona. V njem je $\mathbf{P} = m\gamma\mathbf{v}$ relativistična gibalna količina in $\gamma = (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/c^2)^{-1/2}$. Za neodvisno točkasto telo sestavljata polna energija W in relativistična gibalna količina četverec $(W/c, \mathbf{P})$, katerega komponente se transformirajo kot komponente četverca (ct, x, y, z) . Tako dobimo za energijo $W' = \gamma_0(W - v_0P_x)$ in v lastnem opazovalnem sistemu s $P_x = 0$:

$$W' = \gamma_0 W. \quad (\text{D1})$$

Transformacijo za komponente sile dobimo po zakonu relativnosti: $F'_x = dP'_x/dt' = \gamma_0(dP_x - v_0dW/c^2)/\gamma_0(dt - v_0dx/c^2) = (F_x - v_0dW/c^2dt)/(1 - v_0v_x/c^2)$ in $F'_y = dP'_y/dt' = dP_y/\gamma_0(dt - v_0dx/c^2) = F_y/\gamma_0(1 - v_0v_x/c^2)$.

V lastnem opazovalnem sistemu je $v_0 = 0$ in $dW/dt = 0$, torej

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = F_y/\gamma_0 \quad F'_z = F_z/\gamma_0.$$

Za tretjo komponento smo dodali podobno enačbo kot za drugo.

Kako se transformira tlak v mirujoči tekočini? Opazujmo v inercialnem opazovalnem sistemu Σ' mejno ploskev telesa v obliki pravokotnika s stranicama y' in z' , na katerega deluje sila F'_x , in še mejno ploskev v obliki pravokotnika s stranicama x' in z' , na katerega deluje sila F'_y . Za tlak dobimo z zapisanimi transformacijami:

$$p' = F'_x/y'z' = F_x/yz = p, \quad p' = F'_y/x'z' = (F_y/\gamma_0)/(xz/\gamma_0) = F_y/xz = p. \quad (\text{D2})$$

Tretja enačba $p' = F'_z/x'y' = p$ je podobna drugi. Tlak je invarianta.

Za prostornino kvadra, ki miruje v opazovalnem sistemu Σ , dobimo z zapisanimi zvezami v opazovalnem sistemu Σ' :

$$V' = x'y'z' = (x/\gamma_0)yz = xyz/\gamma_0 = V/\gamma_0. \quad (\text{D3})$$

LITERATURA

- [1] M. Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme*, Sitzungsber. d. kgl. Preuss. Akad. d. Wissenschaft (1907), 542.
- [2] A. Einstein, *Über das Relativitätsprinzip und aus demselben gezogene Folgerungen*, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 4 (1907), 411.
- [3] H. Ott, *Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperatur*, Z. Phys. **175** (1963), 70.
- [4] H. Arzeliés, *Transformation relativiste de la temperature et de quelques autres grandeurs thermodynamiques*, Nuovo Cimento **35** (1965), 792.
- [5] P. T. Landsberg, *Does a moving body appear cool?*, Nature **212** (1966), 571.
- [6] N. G. van Kampen, *Relativistic thermodynamics of moving systems*, Phys. Rev. **173** (1969), 295.
- [7] L. G. Taff, *A relativistic transformation of temperatures*, Phys. Lett. A **27** (1968), 605.
- [8] P. T. Landsberg, *Thought experiment to determine the special relativistic temperature transformation*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 149.
- [9] E. B. Stuart, B. Gal-Or, A. J. Brainard (ur.), *A Critical Review of Thermodynamics*, Mono Book, Baltimore 1970.
- [10] H. Callen, G. Horwitz, *Relativistic thermodynamics*, Am. J. Phys. **39** (1971), 938.
- [11] D. ter Haar, H. Wergeland, *Thermodynamics and statistical mechanics in the special theory of relativity*, Physics Reports **1** (1971), 31.
- [12] J. Strnad, *Fizika*, IV. del, DMFA, Ljubljana 1986, str. 38.
- [13] R. B. Partridge, D. T. Wilkinson, *Isotropy and homogeneity of the universe from measurements of the cosmic microwave background*, Phys. Rev. Lett. **18** (1967), 557; P. J. E. Peebles, D. T. Wilkinson, *Comment on the anisotropy of the primeval fireball*, Phys. Rev. **174** (1968), 2168.
- [14] J. Strnad, *Fizika*, III. del, DMFA, Ljubljana 1992, str. 90, 43–45.
- [15] R. Aldrovandi, J. Gariel, *On the riddle of the moving thermometers*, Phys. Lett. A **170** (1992), 5.
- [16] G. F. Smoot in drugi, *Preliminary results from the COBE microwave radiometers: large angular scale isotropy of the cosmic microwave background*, Astrophys. J. **371** (1991), 1.

46. OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

V Ljubljani ni bilo občnega zbora našega Društva več kot 20 let. Za prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je razumljivo, da je bil v glavnem mestu Slovenije, občni zbor pa je bil v sklopu kongresa. (Poročilo o kongresu z razpravami in zaključku okroglih miz bo izšlo posebej.)

Vsako leto nas za vedno zapusti nekaj članov našega društva. Spominu vsem umrlim, zlasti pa častnemu članu društva prof. Ivanu Štalcu, smo namenili minuto spomina.

Občni zbor je izvolil delovno predsedstvo, poleg predsednika Mitja Rosina še članici Zvonko Alt in Vesno Harej.

Najbolj slovesen del občnega zbora je podelitev priznanj in izvolitev častnih članov. Društvena priznanja za delo z mladimi so letos dobili: Vilko Domanjko, profesor matematike na Gimnaziji Bežigrad v Ljubljani, Ivan Kozinc, profesor matematike in fizike na Srednji tehnični šoli v Celju, Marija Lukšič, učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Center v Novem mestu, Nada Razpet, profesorica matematike, zaposlena v Zavodu RS za šolstvo in šport, Irena Rosa, učiteljica matematike na Osnovni šoli Dušana Bordona v Kopru, in Marija Šavor, učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Gustava Šiliha v Velenju.

Občni zbor je soglasno potrdil predlog za častne člane. Častni člani so postali Peter Gosar, Josip Grasselli, Dušan Modic in Niko Prijatelj.

Poročila o delu društva so napisana v biltenu 46. občnega zbora. Obseg dela v društvu se neprestano veča. Zelo aktivno delujejo komisije in sekcije: komisija za pedagoško dejavnost, komisija za popularizacijo matematike in fizike v osnovni in srednji šoli s tekmovanji, poletno šolo za osmošolce in raziskovalnimi dnevi za srednješolce. Ta skrbi tudi za udeležbo na mednarodni olimpiadi za matematiko in za fiziko. Glede na število prebivalcev v Sloveniji in s tem manjšo možnost izbire tekmovalcev sta slovenski ekipi na obeh olimpiadah dosegli zelo dobro uvrstitev. Komisija za razvedrilno matematiko vključuje v državno tekmovanje že petošolce iz osnovne šole, najstarejšo skupino pa sestavljajo študenti, absolventi in odrasli. Žal pa je delo sekcije za uporabno matematiko in fiziko čutiti le ob občnih zbora društva, ob katerih potekajo strokovni seminarji. Da ti dve sekciji povsem ne zaživita, je verjetno vzrok tudi v pestrosti dela matematikov in fizikov v inštitutih in industriji.

Nacionalni komite za fiziko ima v programu zahtevne naloge: razširiti delovanje društva tudi na raziskovalno in aplikativno področje, aktivno povezati fizike z različnih področij in različnih regij, poiskati stike s fiziki bližnjih dežel in držav Evropske skupnosti, tesnejše sodelovanje z mednarodnimi fizikalnimi društvi. Tudi nacionalni komite za matematiko je že navezal stike

z mednarodnimi in evropskimi matematičnimi društvi. Oba nacionalna komiteja sta opravila veliko dela pri pripravi na prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Obseg dela v nacionalnih komitejih se bo še povečal.

Tudi podružnice v Kopru, Mariboru in Celju se lahko pohvalijo z uspešno dejavnostjo.

Komisija za tisk je tudi lani izdajala knjige in učbenike v svojih zbirkah, skupaj 53 naslovov. Nekatere od teh knjig pritegnejo širši krog bralcev, tudi učbeniki in zbirke nalog so vedno dobrodošli. Žal pa se Presek ne more več pohvaliti z visoko naklado in se zato otepa z izgubo.

V razpravi o poročilih je predsednik društva Franc Cvelbar opozoril člane, da je ministrstvo za šolstvo in šport dokončalo obnovo Plemljeve hiše. Ta je sedaj namenjena za izobraževalne in raziskovalne programe članov ali skupin našega društva in ministrstva za šolstvo in šport. Hiša je odprta tudi za individualne člane. Prijave članov za bivanje v Plemljevi hiši sprejema na ministrstvu za šolstvo in šport ga. Katarina Valenci, Ljubljana, Župančičeva 6, tel (061) 1765-443. Za obisk Plemljeve spominske sobe se je treba dogovoriti z Osnovno šolo dr. Josipa Plemlja na Bledu, Seliška 3, tel. (064) 77-861. Plemljeva hiša je na Prešernovi cesti 39.

Člani so na občnem zboru razpravljali o statutu društva, o položaju učiteljev. Sklepi občnega zbora so rezultat te razprave.

Nadzorni odbor je pregledal finančno poslovanje društva prek žiro računa in blagajne društva ter ugotovil, da je bilo poslovanje pravilno. Predlagal je razrešnico staremu odboru.

Nato so člani društva izvolili nov upravni odbor, v katerem so: predsednik Egon Zakrajšek, podpredsednica Nada Razpet, v komisiji za pedagoško dejavnost je sekretarka za matematiko Ivana Mulec, za fiziko Maruša Potočkar. Sekretarji komisije za popularizacijo so: matematika v osnovni šoli – Aleksander Potočnik, fizika v osnovni šoli – Jelislava Sakelšek, matematika v srednji šoli – Darjo Felda, fizika v srednji šoli – Ciril Dominko, astronomija – Tomaž Zwitter, razvedrilna matematika – Izidor Hafner, predavanja za učence – Blaža Cedilnik, vodja raziskovalnih dni za fiziko – Branko Borštnik, vodja raziskovalnih dni za matematiko – Matjaž Željko. Sekretar komisije za uporabno matematiko je Marko Razpet, za uporabno fiziko Dušan Brajnik in za informiranje Martina Koman. Člana upravnega odbora sta tudi predsednika nacionalnih komitejev za matematiko in za fiziko. Podružnice delegirajo v upravni odbor po enega predstavnika.

V nacionalnem komiteju za matematiko je predsednik Peter Legiša, člana sta Bojan Hvala in Dragan Marušič; v nacionalnem komiteju za fiziko je predsednica Norma Mankoč-Borštnik, člani pa so Janez Ferbar, Andrej Čadež, Marko Robnik in Danilo Zavrtanik. Člani ostalih komisij so: Statutarna komisija – Tomaž Pisanski, Sergej Pahor, Bojan Magajna; finančna komisija – Darjo Felda, Izidor Hafner in Ciril Dominko; komisija za društvena priznanja – predsednik društva in člana komisije za pedagoško dejavnost; komisija za častne člane – predsednik društva, tajnik Ivan Pavliha

ter člana Anton Suhadolc in Janez Strnad; zastopnika DMFA Slovenije v odboru za Plemljevo hišo – Peter Vencelj in Alenka Plestenjak; zastopnik društva v odboru za spominsko sobo Jurija Vege – Tomaž Pisanski. V nadzornem odboru je predsednica Darka Hvastija, člana pa sta Mitja Rosina in Janez Krušič. V častnem razsodišču društva so Ivan Vidav, Peter Gosar in Dušan Modic.

Občni zbor društva je sprejel naslednje sklepe.

1. Potrdil je sklepe in zahteve okrogle mize o pouku matematike v osnovni in srednji šoli:
 - 1.1. zahtevo po višjih plačah za močno deficitarne poklice na področju izobraževanja
 - 1.2. podporo univerzama v prizadevanju za odpiranje mest za univerzitetne učitelje in asistente, ki bodo delali na področju izobraževanja
 - 1.3. zahtevo po sistemski ureditvi financiranja podiplomskega študija, saj bodo šolnine odvrnile potencialne kandidate.
 - 1.4. zahtevo, da naj se uredi financiranje permanentnega izobraževanja
2. Ostali sklepi:
 - 2.1. definira naj se dejavnost pedagoške sekcije za fiziko, ki naj aktivno spremlja problematiko pri pouku fizike in opozarja nanjo
 - 2.2. pedagoška komisija naj vpliva na splošno sprejemljivi potek sprejemanja šolske zakonodaje
 - 2.3. občni zbor se strinja s pobudo in jo podpira, da bi se nagrade za pedagoško delo odslej imenovala po Francu Močniku
 - 2.4. uredi naj se pravni status komisije za tisk
 - 2.5. statut društva je treba dopolniti – uskladiti s statuti mednarodnih organizacij, v katere se vključujemo, treba pa je počakati na nov zakon o društvih
 - 2.6. občni zbor je sprejel pravilnik o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike
 - 2.7. kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije naj bo vsakih pet let.

V prostorih Cankarjevega doma, tam sta bila kongres in občni zbor, je bila razstava 200-letnica *Thesaurusa* Jurija Vege in nastanek logaritmov, ki sta jo pripravila Agica Tiegl in Anton Suhadolc. Popoldan je bila v Zagorici, rojstnem kraju Jurija Vege, proslava 200-letnice Popolne zakladnice logaritmov Jurija Vege, ki jo je organiziralo turistično društvo Dolsko.

Martina Koman

PROFESOR PETER GOSAR – ČASTNI ČLAN DRUŠTVA

Peter Gosar je bil rojen leta 1923 v Ljubljani. Leta 1951 je diplomiral iz predmetne skupine fizika in matematika in leta 1956 obranil doktorsko disertacijo. Leta 1953 je začel delati v laboratoriju za polprevodnike na Inštitutu za elektroizveze v Ljubljani in leta 1957 postal sodelavec Instituta J. Stefan. Dve leti se je izpopolnjeval v laboratoriju za magnetizem in fiziko

trdnih snovi v Bellevueju v Franciji. Ob tem se je ukvarjal s teorijskimi raziskovanji; najprej se je zanimal za polprevodnike, nato pa se je njegovo zanimanje razširilo na več območij fizike trdnih snovi. Dve leti je raziskoval in predaval na univerzi Severne Karoline v Chapel Hillu. Leta 1966 je bil izvoljen za izrednega profesorja in leta 1971 za rednega profesorja. Slovenska akademija znanosti in umetnosti ga je leta 1969 izvolila za dopisnega člana in leta 1976 za rednega člana. Leta 1964 je dobil Kidričevo nagrado.

Raziskovalno delo profesorja Gosarja v fiziki trdnih snovi je bilo zelo raznolično. V fiziki ledu je raziskoval protonsko prevodnost ledu in prvi vpeljal ionske energijske pasove. Obravnaval je majhne polarone, gibljivost elektronov v molekulskih kristalih, reorientacijo paraelastičnih centrov, linearni in nelinearni odziv, električno prevodnost amorfnih snovi, korelirano preskakovanje elektronov in vrzeli v polprevodnikih, metodo Greenovih funkcij in drugo. S svojim raziskovalnim delom, o katerem priča več kot petdeset člankov v mednarodnih raziskovalnih revijah, si je pridobil mednarodni ugled in njegove članke velikokrat navajajo. O svojem delu je pogosto poročal na mednarodnih znanstvenih sestankih, velikokrat z vabljenimi predavanji. Obiskal je tudi številne univerze in laboratorije.

Pedagoško delo profesorja Gosarja se je od predavanja fizike trdnih snovi razraslo na predavanja drugih predmetov na dodiplomskem in podiplomskem študiju na Oddelku za fiziko. Poleg tega je predaval še na podiplomskem študiju Fakultete za elektrotehniko. Njegova predavanja so veljala pri študentih in profesorjih za vzor dobrih predavanj: bila so dobro pripravljena in kljub zahtevnosti razumljiva in zanimiva. Zelo pomembna je bila vloga profesorja Gosarja kot predsednika komisije in glavnega izpraševalca pri diplomskih in magistrskih izpitih. Bil je mentor številnim diplomantom, magistrantom in doktorantom. Tudi sicer je rad vsakomur odgovoril na vprašanje.

Profesor Gosar se je izkazal pri organizaciji pedagoškega in raziskovalnega dela na vseh ravneh. Sprejel je številne dolžnosti na Institutu J. Stefan, na Oddelku za fiziko in na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in drugod in jih požrtvovalno in uspešno opravljal.

Profesor Gosar je sodeloval v delu Društva matematikov, fizikov in astronomov. V letih od 1960 do 1965 je bil član uredniškega odbora Obzorika za matematika in fiziko in leta 1970/71 predsednik društva. Velikokrat je predaval na društvenih seminarjih in drugih prireditvah, ki jih je organiziralo društvo za svoje člane in za dijake. Sam je organiziral seminarja o fizikalni optiki in mehaniki tekočin v letih 1971 in 1975. Napisal je tudi več člankov s strokovno vsebino.

Profesor Peter Gosar je s svojim delom in s svojo osebnostjo dal neizbrisen pečat raziskovalnemu delu v fiziki in pedagoškemu delu v naši domovini in pomembno sodeloval pri delu Društva matematikov, fizikov in astronomov.

Janez Strnad

SEDEMDESET LET PROFESORJA JOSIPA GRASSELLIJA – ČASTNEGA ČLANA DRUŠTVA

Profesorja Grasselija pozna slovenska javnost po eni strani kot strokovnjaka za teorijo števil, ki jo je kot avtor več knjig in člankov populariziral med mladimi kot le redkokateri drug slovenski matematik svojo disciplino, po drugi strani pa kot dolgoletnega izvrstnega predavatelja visokošolske matematike.

Rojen je bil pred sedemdesetimi leti, 24. novembra 1924, v Šentjakobu pri Celju. Potem ko je leta 1951 diplomiral iz matematike na filozofski fakulteti v Ljubljani, je nekaj let poučeval na gimnazijah v Murski Soboti in v Celju, nato pa je leta 1957 postal najprej asistent na Tehniški visoki šoli in po doktoratu leta 1961 kmalu tudi docent za matematiko na tedanjem matematično-fizikalnem oddelku novoustanovljene Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Leta 1973 je bil izvoljen za izrednega, leta 1978 pa za rednega profesorja. Do upokojitve leta 1991 je bil zaposlen kot univerzitetni učitelj na Oddelku za matematiko in mehaniko ljubljanske univerze.

Profesor Grasseli je napisal doslej pet samostojnih knjig. Pionirsko delo med njimi so njegove *Osnove teorije števil*, ki so izšle v zbirki Sigma (davnega) leta 1966. V isti zbirki je izdal še *Diofantske enačbe* (1984) in *Diofantske približke* (1992). Za reprezentativno zbirko monografij Matematika-fizika je leta 1983 prispeval *Algebraična števila*, čez dve leti pa še učbeniško gradivo *Teorija števil*. Kot prevajalec je sodeloval pri prevodu Devlinove Nove zlate dobe matematike (1993). Poleg tega pa je tudi avtor obsežnega poglavja o linearni algebri v Višji matematiki II iz leta 1975, ki je kasneje, leta 1986, izšla kot samostojna publikacija. Vsi njegovi teksti so napisani privlačno in razumljivo.

Čeprav je deloval tudi kot raziskovalec (na osnovi svoje disertacije je leta 1964 objavil v domači reviji Publications of the Department of mathematics znanstveno razpravo o sebi adjungiranih elementih Banachove algebre brez enote in bil nosilec ali sodelavec pri nekaj raziskovalnih nalogah), je pomembnejši kot avtor številnih strokovnih člankov. Po letu 1957 je v Obzorniku in v Preseku objavil 23 prispevkov, deloma iz analize, v glavnem pa iz teorije števil. V njih je obdelal raznovrstne zanimive teme, od takih, ki so dostopne mladim brez posebnega poznavanja višje matematike, do težjih vprašanj, povezanih z aktualnimi znanstvenimi dognanji (npr. o Fermatovem izreku).

Drugo, kar zaznamuje profesorja Grassellija, je njegovo delo univerzitetnega učitelja. Dolga leta je predaval kemikom in kemijskim tehnologom, pa tudi tekstilcem, farmacevtom in gradbenikom, tako da je matematično vzgojil veliko generacij inženirjev. Poleg konkretnega znanja jih je učil matematičnega razmišljanja in jim poskušal vcepiti potrebo po eksaktni formulaciji problemov, ki se pojavijo v tehniških strokah. Bivši študentje se ga spominjajo in ga spoštujejo kot mirnega in prijaznega, sicer strogega, a izjemno korektnega predavatelja. Iz študentskih ust menda čezenj nikoli ni prišla beseda pritožbe.

Študente matematike je dalj časa učil linearno in splošno algebro ter vodil več seminarjev. Med njimi je bil ves čas priljubljen tudi kot mentor študentom pri diplomskih delih, saj so radi izbirali teme z njegovega področja. Samo v letih od 1976 do 1989 je kot mentorja sodeloval pri 35 diplomah iz algebre in teorije števil. Zadnja leta je imel za podiplomske študente izobraževalne smeri dva različna specialna tečaja iz teorije števil, tretjega pa pričenja prav v tem šolskem letu, ko je sicer dokončno prenehal redno predavati na dodiplomski stopnji. Tako vidimo, da je pri sedemdesetih letih še vedno aktiven, kot pisec oziroma prevajalec matematičnih tekstov in kot predavatelj.

V prejšnjih časih je imel v okviru Društva matematikov, fizikov in astronomov več predavanj za srednješolce in tudi za učitelje matematike po srednjih in osnovnih šolah. Z njimi je, razumljivo, spet največkrat posegel v teorijo števil, področje svojega stalnega strokovnega zanimanja in ljubezni.

Kot vzoren pedagog z odgovornim odnosom do dela, slušateljev in kolegov je zgled tudi svojim sodelavcem. Ni se izogibal niti različnim administrativnim in drugim obveznostim, ki so neizogibni sestavni del proforskega poklica. Tako je bil od decembra 1967 do marca 1970 predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in skoraj v istem času, od 1969 do 1971, predstojnik Oddelka za matematiko in fiziko na FNT, večkrat tudi član različnih odborov in delegacij. Svoje dolžnosti je opravljal potrpežljivo, skoraj neopazno, vendar tako kot drugo delo vestno in z veliko mero odgovornosti.

Profesor Grasselli spada med tiste ljudi, ki se nikoli ne silijo v ospredje, vendar brez njihovega neutrudnega dela noben sistem ne more delovati. Tako je tudi on v svoji poklicni karieri nosil na svojih plečih sorazmerno velik del bremena, ki ga je usoda naložila prvi povojni generaciji slovenskih matematikov. Skromen, kot je, tega verjetno nikoli ne bi priznal, toda za uveljavitev matematike na Slovenskem nima majhnih zaslug. Tega se zavedamo tudi njegovi sodelavci, člani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, zato smo ga na občnem zboru izvolili za častega člana društva. Ob visokem osebnem jubileju mu želimo še veliko zdravih in ustvarjalnih let.

Milan Hladnik

ČASTNI ČLAN DRUŠTVA DUŠAN MODIC

Dušana Modica poznajo učitelji matematike in fizike s številnih seminarjev in srečanj, na katerih je nesebično razdajal svoje znanje in izkušnje ter ljubezen do svojega poklica. Že leta 1953 je organiziral tečaj za matematiko in fiziko za učitelje osnovnih šol Novem mestu. Ko pa je pri društvu postal leta 1969 sekretar komisije za pedagoško dejavnost, je seminarje organiziral po vsej Sloveniji. Na aktivih in seminarjih je sodeloval do leta 1986.

Veliko svojega prostega časa je posvetil opremljanju fizikalnega laboratorija. Njegov laboratorij je bil osnova za postavitev standardov za opremljanje naravoslovnih učilnic, številni učitelji fizike so si po njegovem zgledu urejali fizikalno zbirko za vaje in demonstracijske poskuse.

Ko je bil sekretar za pedagoško dejavnost, je poskrbel za uvoz zbirke Teltron za šole in pripravil seminarje za učitelje skupaj z navodili. Ti seminarji so bili v Novem mestu, Ljubljani, Mariboru, Murski Soboti, Škofji Loki, Kopru, Celju. Pomagal je z nasveti za izvedbo eksperimentalnih vaj za učence, njegovi koristni napotki so bili vzpodbuda marsikateremu učitelju fizike. Pri uvajanju usmerjenega izobraževanja je bil član odbora, ki je pripravljal SVIO program iz fizike.

Naravoslovni dnevi, ki jih je izvajal na Srednji zdravstveni šoli v Ljubljani, so bili osnova za izvedbo teh dni po vsej Sloveniji. Za šolske namene je sam izdelal modele pljuč, srca in ledvic.

Mlajšim kolegom – učiteljem matematike in fizike je bil odličen mentor, saj jih ni samo vodil, ampak so se skupaj pripravljali na pouk, sestavljali fizikalne vaje za učence.

Bil je eden glavnih pobudnikov za ustanovitev tretje stopnje študija na FNT oddelku za fiziko za profesorje fizike in v prvi generaciji tudi sam študiral.

Od leta 1974 do 1981 je bil podpredsednik društva in je skrbel za finančne zadeve. Od leta 1968 do 1975 je bil član Sveta FNT. Od leta 1980 do 1983 je bil član komisije za Plemljev dom, za člane društva je organiziral bivanje v Plemljevi hiši.

Organiziral je tekmovanja iz matematike in fizike, bil organizator občnih zborov v Šmarjeških Toplicah in Novem mestu. Za nadarjene učence je organiziral matematične krožke. Skrbel je za razširjanje publikacij DMFA in drugo strokovno in poljudno-znanstveno literaturo. Bil je eden prvih mentorjev dijakom, ki so se pripravljali na tekmovanje v okviru gibanja Znanost mladini.

Leta 1970 je dobil društveno priznanje za delo z mladimi, priznanje za delo v društvu ob 30- in 40-letnici društva ter dvakrat državni odlikovanji.

Martina Koman

PROFESOR NIKO PRIJATELJ – ČASTNI ČLAN DRUŠTVA

Profesor Niko Prijatelj je letos januarja dopolnil triinsedemdeset let. Poskusimo na kratko opisati njegove nemajhne zasluge za razvoj slovenske matematike.

Stržen njegovega dela je predvsem poučevanje matematike. Začel je kot pripravnik na gimnaziji že leta 1945. Poučeval je na gimnazijah v Ljubljani in v Postojni, eno leto celo na tehniški srednji šoli v Sarajevu. Metodiko pouka matematike je predaval najprej na Višji pedagoški šoli (1954–57), od leta 1955 do 1961 pa tudi na naravoslovni fakulteti. Od leta 1957 je bil

zaposlen samo še na univerzi, od leta 1960 kot predavatelj. Po doktoratu (1961) je postal docent, leta 1970 izredni in leta 1977 redni profesor.

Profesor Prijatelj je znan in priljubljen kot odličen predavatelj. Njegovi nastopi so do kraja izdelani, izredno razumljivi in prilagojeni občinstvu.

Poznamo ga kot človeka, ki je v Slovenijo prinesel s svojimi knjigami in predavanji vedenje o dotlej manj znanih področjih matematike, kot sta matematična logika in matematične strukture. Knjige Uvod v matematično logiko, Matematične strukture I, II in III so imele velik vpliv na razvoj stroke. Pozneje jim je dodal še knjigo Uvod v matematično analizo I. del ter Osnove matematične logike v treh delih. Vse knjige odlikuje velika jasnost podajanja.

Na univerzi je predaval kemikom, nato pa matematikom in fizikom. Oddelku za matematiko je pomagal pri predavanjih tudi po odhodu v pokoj.

Objavil je okrog dvajset znanstvenih in strokovnih člankov. Znanstveni članki so s področja algebre, natančneje $*$ -regularnih kolobarjev in karakterizacije Hilbertovih prostorov. Strokovni članki pa obravnavajo razne zanimive matematične teme in kažejo širino njegovega interesa.

V letih 1963–66 je bil direktor Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Bil je eden redkih Slovencev, ki so za nas uspešno delovali v beograjskih telesih. Ima namreč velike zasluge za zgraditev inštitutske stavbe na Jadranski 19.

V letih 1955–65 je bil član uredniškega odbora Obzornika za matematiko in fiziko, v letih 1975–76 pa predsednik DMFA. Bil je prvi predsednik Komisije za tisk DMFA. Zastopal je matematiko v Raziskovalni skupnosti.

Ne moremo mimo njegovih zaslug za popularizacijo matematike. Predaval je srednješolcem, predvsem pa srednješolskim profesorjem, ki so ga zmeraj znova prosili za pomoč pri društvenih seminarjih in pri permanentnem izobraževanju.

Profesor Prijatelj je z mnogimi originalnimi predlogi poskušal doseči izboljšanje pouka in ugodnejši položaj matematike v družbi. Prvi je, potem ko je k sodelovanju pritegnil strokovna društva, podal res dober predlog za obnovo srednje šole. Njegova prizadevanja prav gotovo niso in ne bodo v daljšem časovnem obdobju ostala brez uspeha, kljub raznim oviram in nasprotovanju birokracije.

Posebno vlogo je imel profesor Prijatelj kot vodja seminarja iz osnov matematike. Na ta seminar so hodili tudi mnogi nematematiki, npr. filozofi. Tu se je še enkrat izkazala širina njegove izobrazbe. Tako je profesor Prijatelj postavil most med matematiko in nekaterimi družbenimi vedami, vsaj na tem segmentu. Tudi sicer je profesor Prijatelj znan kot neodvisen in pogumen razumnik, ki z zanimivimi in premišljenimi esei bogati naše intelektualno ozračje. Slovenska matematika je lahko hvaležna, da jo profesor Prijatelj tako dobro zastopa kot javni delavec.

Peter Legiša