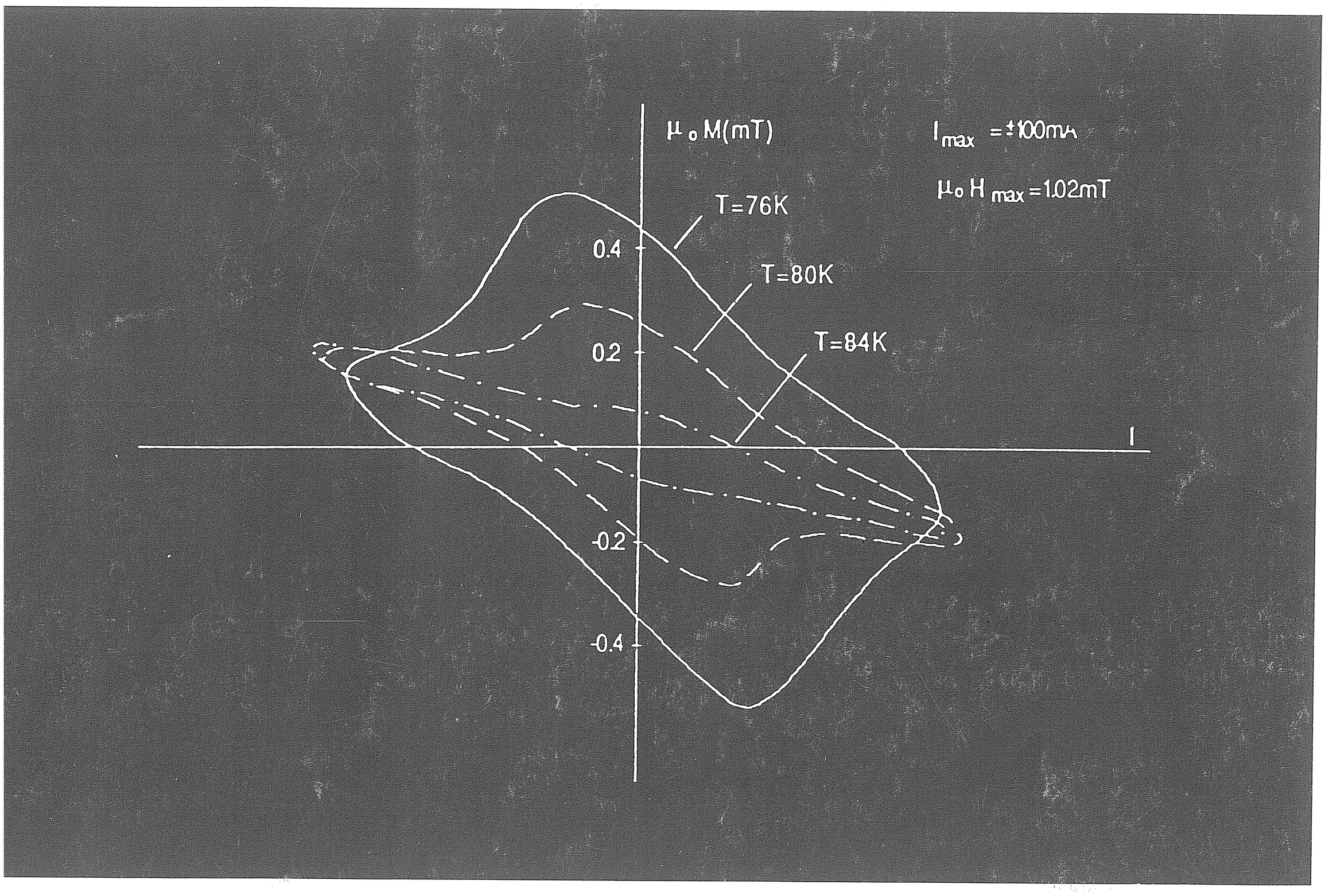
ENTRALNA EKONOMSKA
NJIŽNICA Ljubljana
ODPISAN

TEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

1995
Letnik 42
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



BZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 42 • ŠT. 1 • STR. 1–32 • JANUAR 1995

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1995

letnik 42, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.100,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.200,– SIT, za študente 1.050,– SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1995 DMFA Slovenije – 1229 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

CENTRALNA EKONOMSKA
KNJIŽNICA Ljubljana

ODPISANO R-177/95-1

CENTRALNA EKONOMSKA KNJIŽNICA LJUBLJANA

165138

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Koalgebre in izrek o kanoničnem razcepu vektorskega prostora — Coalgebras and The Primary Decomposition Theorem for a Linear Transformation (Tomaž Košir) 1–7

O kartezičnem produktu grafov — On Cartesian products of graphs (Janez Žerovnik) 8–16

Superprevodnost — Superconductivity (Marjan Logar) 17–24

Kako napisati matematični tekst — How to write a mathematical text (Milan Hladnik) 25–III

Nove knjige — New books (Egon Zakrajšek) IV

Vesti — News

Dogovor o vzajemnosti med DMFA in AMS (Peter Legiša) 16

Obvestilo študentom (Andreja Šafarič) IV

Na ovitku: Slika 7 k članku na strani 17. Magnetizacija vzorca za izbrane temperature, $I_{\max} = 100$ mA, $\mu_0 H_{\max} = 1{,}02$ mT.

KOALGEBRE IN IZREK O KANONIČNEM RAZCEPU VEKTORSKEGA PROSTORA

TOMAŽ KOŠIR

Math. Subj. Class. (1991) 15A21, 16W30

Izrek o kanoničnem razcepu vektorskega prostora na spektralne podprostore za linearno preslikavo je dokazan s pomočjo metod teorije koalgeber.

COALGEBRAS AND THE PRIMARY DECOMPOSITION THEOREM FOR A LINEAR TRANSFORMATION

The Primary Decomposition Theorem for a linear transformation is proved using coalgebraic techniques.

1. Uvod

Namen tega članka je predstaviti strukturo koalgebre in njeno vlogo v spektralni teoriji linearnih preslikav. Kot ilustracijo bomo dokazali izrek o kanoničnem razcepu vektorskega prostora. Ta izrek je dobro znan in je eden od osnovnih izrekov spektralne teorije. Naj ga predstavimo.

Denimo, da je A linearna preslikava na končno razsežnem vektorskem prostoru V nad kompleksnimi števili. Če je λ lastna vrednost linearne preslikave A, imenujemo jedro V_λ linearne preslikave $(A-\lambda I)^d$ *spektralni podprostor* za A pri λ. Pri tem je d tako število, da sta jedri linearnih preslikav $(A-\lambda I)^d$ in $(A-\lambda I)^{d+1}$ enaki. Izrek o kanoničnem razcepu vektorskega prostora V pove, da je V direktna vsota vseh spektralnih podprostorov linearne preslikave A. Oglejmo si enostaven primer. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{1}$$

in $\lambda \neq \mu$. Potem je $V_\lambda = \left\{ [\,\alpha\ \beta\ 0\,]^T;\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ spektralni podprostor pri λ in $V_\mu = \left\{ [\,0\ 0\ \alpha\,]^T;\ \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ spektralni podprostor pri μ. V tem posebnem primeru potem izrek o kanoničnem razcepu vektorskega prostora pove, da je $V = \mathbb{C}^3 = V_\lambda \oplus V_\mu$.

Klasično dokažemo izrek o kanoničnem razcepu s študijem preslikave $V \otimes \mathbb{C}[x] \to V$, ki slika $v \otimes p \longmapsto p(A)\,v$. Tu je $\mathbb{C}[x]$ algebra polinomov nad poljem kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Klasični dokaz lahko najdemo npr. v [6, §6.8]. Omenjeni prijem je uporabljen tudi v [9, §VII.12], kjer pa naš izrek ni eksplicitno naveden. V tem članku bomo prikazali vlogo koalgeber pri dokazu izreka o kanoničnem razcepu. Teorija koalgeber se je izkazala za učinkovito pri formuliranju spektralnih lastnosti linearnih preslikav, matričnih polinomov, ipd. (glej [3], [4]). Še posebej pa je bila prav teorija koalgeber tista, ki je vodila k novim rezultatom v večparametrski spektralni teoriji [5]. Z

večparametrsko spektralno teorijo so se ukvarjali tudi slovenski matematiki (npr. [2]) in o tem objavljali tudi v Obzorniku [8]. Mi bomo o vlogi koalgeber v večparametrski spektralni teoriji pisali kasneje.

2. Struktura koalgebre

Vektorski prostor $\mathcal{B}$ je *koalgebra*, če je opremljen z linearnima preslikavama $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ in $\varepsilon : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, za kateri veljata
(i) *koasociativnost*: $(\Delta \otimes I_{\mathcal{B}})\,\Delta = (I_{\mathcal{B}} \otimes \Delta)\,\Delta$
in
(ii) *zakon koenote*: $(\varepsilon \otimes I_{\mathcal{B}})\,\Delta = I_{\mathcal{B}} = (I_{\mathcal{B}} \otimes \varepsilon)\,\Delta$.
Tu smo z $I_{\mathcal{B}}$ označili identično preslikavo na $\mathcal{B}$. Preslikavo Δ imenujemo *koprodukt* in preslikavo ε *koenota.*

Oglejmo si enostaven primer koalgebre. Naj bo $\mathcal{B}$ dvorazsežen vektorski prostor z bazo $\{z_0, z_1\}$, opremljen z linearnima preslikavama $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ in $\varepsilon : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, določenima s predpisi

$$\Delta z_0 = z_0 \otimes z_0 \quad \text{in} \quad \Delta z_1 = z_1 \otimes z_0 + z_0 \otimes z_1 \tag{2}$$

ter

$$\varepsilon\,(z_i) = \delta_{i0}\,. \tag{3}$$

Tu je δ_{ij} Kroneckerjev simbol. Zlahka se prepričamo, da za Δ velja

$$(\Delta \otimes I_{\mathcal{B}})\,\Delta z_0 = z_0 \otimes z_0 \otimes z_0 = (I_{\mathcal{B}} \otimes \Delta)\,\Delta z_0$$

in

$$(\Delta \otimes I_{\mathcal{B}})\,\Delta z_1 = z_1 \otimes z_0 \otimes z_0 + z_0 \otimes z_1 \otimes z_0 + z_0 \otimes z_0 \otimes z_1 = (I_{\mathcal{B}} \otimes \Delta)\,\Delta z_1\,.$$

Tako smo pokazali koasociativnost. Podobno preverimo tudi zakon koenote:

$$(\varepsilon \otimes I_{\mathcal{B}})\,\Delta z_0 = z_0 = (I_{\mathcal{B}} \otimes \varepsilon)\,\Delta z_0$$

in

$$(\varepsilon \otimes I_{\mathcal{B}})\,\Delta z_1 = z_1 = (I_{\mathcal{B}} \otimes \varepsilon)\,\Delta z_1.$$

Zgornji primer je poseben primer koalgeber, ki bodo pomembne v nadaljevanju. Le-dobimo iz algeber s posebno konstrukcijo. Struktura algebre na končno razsežnem vektorskem prostoru porodi namreč strukturo koalgebre na dualnem prostoru.

Denimo, da je $\mathcal{A}$ končno razsežna algebra z enoto 1. Produkt v algebri $\mathcal{A}$ je binarna operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Ker v algebri $\mathcal{A}$ velja distributivnost in ker lahko v produktu izpostavimo skalarje, potem sledi, da produkt določa linearno preslikavo $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, torej $\mu\,(a \otimes b) = ab$ za $a, b \in \mathcal{A}$. Poleg te preslikave je za nas pomembna še linearna preslikava $e : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, definirana

s pravilom $e(\alpha) = \alpha 1$. Asociativnost v algebri $\mathcal{A}$ je ekvivalentna enakosti preslikav

$$\mu(\mu \otimes I_{\mathcal{A}}) = \mu(I_{\mathcal{A}} \otimes \mu) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} . \tag{4}$$

Za preslikavi μ in e veljata še enakosti

$$\mu(e \otimes I_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{A}} = \mu(I_{\mathcal{A}} \otimes e) , \tag{5}$$

ki ju imenujemo zakon enote.

Dualni prostor, to je prostor linearnih preslikav $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, označimo s simbolom $\mathcal{A}^*$. Ker je $\mathcal{A}$ končno razsežna algebra, je preslikava $\varphi : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \to (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$, ki je podana s predpisom

$$(\varphi(f_1 \otimes f_2))(a_1 \otimes a_2) = f_1(a_1) f_2(a_2) \tag{6}$$

za $f_1, f_2 \in \mathcal{A}^*$ in $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ in razširjena linearno za poljuben $f \in \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$ in $a \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, izomorfizem. Ker je preslikava φ (kanonični) izomorfizem, bomo odslej idenficirali prostora $\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$ in $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$.

Na vektorskem prostoru $\mathcal{A}^*$ potem podamo (kanonično) strukturo koalgebre s koproduktom in koenoto

$$\Delta = \mu^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \quad \text{in} \quad \varepsilon = e^* : \mathcal{A}^* \to \mathbb{C} . \tag{7}$$

Koasociativnost in zakon koenote sledita iz enakosti (4) in (5) za dualne preslikave upoštevaje identifikacijo ((6)). Koalgebro $\mathcal{A}^*$ skupaj s preslikavama Δ in ε, ki ju dobimo iz algebre $\mathcal{A}$ po zgoraj opisanem postopku, imenujemo *dualna koalgebra* algebre $\mathcal{A}$. Omenimo še, da je opisana „dualnost" s strukturo algebre izvor imena koalgebra.

Oglejmo si poseben primer konstrukcije koalgebre iz algebre. Naj bo (q) ideal v $\mathbb{C}[x]$, generiran s polinomom $q(x) = (x - \lambda)^{k+1}$, in $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]/(q)$. Razred polinoma $(x - \lambda)^j$ v $\mathcal{A}$ označimo s simbolom x_j^λ. Potem je množica $\left\{x_0^\lambda, x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda\right\}$ baza vektorskega prostora $\mathcal{A}$. Njej dualna baza

$$\left\{z_0^\lambda, z_1^\lambda, \ldots, z_k^\lambda\right\} \tag{8}$$

je določena s predpisom $z_i^\lambda\left(x_j^\lambda\right) = \delta_{ij}$. Za produkt $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ velja

$$x_{r+s}^\lambda = \mu\left(x_r^\lambda \otimes x_s^\lambda\right) .$$

Če je $r + s \geq k$, potem je

$$\mu\left(x_r^\lambda \otimes x_s^\lambda\right) = \left[(x - \lambda)^{r+s}\right] = 0 .$$

Tu je $[h]$ razred polinoma h v $\mathcal{A}$. Koprodukt Δ in koenota ε za koalgebro $\mathcal{A}^*$ sta podana v (7). Ker velja

$$\left(\mu^* z_i^\lambda\right)\left(x_r^\lambda \otimes x_s^\lambda\right) = z_i^\lambda\left(\mu\left(x_r^\lambda \otimes x_s^\lambda\right)\right) = z_i\left(x_{r+s}^\lambda\right) = \delta_{i,r+s}$$

in

$$\left(\sum_{j=0}^{i} z_j^\lambda \otimes z_{i-j}^\lambda\right)\left(x_r^\lambda \otimes x_s^\lambda\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} z_j^\lambda\left(x_r^\lambda\right) z_{i-j}^\lambda\left(x_s^\lambda\right) = \sum_{j=0}^{i} \delta_{jr}\delta_{i-j,s} = \delta_{i,r+s}\,,$$

sledi, da $\Delta z_i^\lambda = \sum_{j=0}^{i} z_j^\lambda \otimes z_{i-j}^\lambda$. Podobno velja $\varepsilon z_i^\lambda = \delta_{i0}$, ker je $\left(e^* z_i^\lambda\right)(1) = z_i^\lambda(1) = \delta_{i0}$. Koalgebra $\mathcal{A}^*$ je pomembna v nadaljevanju, zato bomo zanjo vpeljali posebno oznako $\mathcal{B}_\lambda^{(k)}$. Opozorimo še, da je koalgebra, ki smo jo spoznali na začetku razdelka in je določena s praviloma (2) in (3), enaka koalgebri $\mathcal{B}_\lambda^{(1)}$.

Sledeči izrek je dokazan v bolj splošni obliki v [4]. To je poseben primer izreka o kanoničnem razcepu koalgebre na nerazcepne podkoalgebre (glej [1], [7] za splošen primer).

Izrek 1. *Naj bo $p(x) = (x-\lambda_1)^{k_1+1}(x-\lambda_2)^{k_2+1}\cdots(x-\lambda_r)^{k_r+1}$ razcep polinoma $p \in \mathbb{C}[x]$ na linearne faktorje. Potem je $\mathcal{A}_p = \mathbb{C}[x]/(p)$ končno razsežna algebra in dualna koalgebra $\mathcal{B}_p = \mathcal{A}_p^*$ je direktna vsota koalgeber $\mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)}$, to je*

$$\mathcal{B}_p = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)}\,. \tag{9}$$

Dokaz. Naj bo $\mathcal{A}_{\lambda_i} = \mathbb{C}[x]/\left((x-\lambda_i)^{k_i+1}\right)$ za $i = 1,2,\ldots,r$. Za polinom $h \in \mathbb{C}[x]$ označimo s $[h]_p$ njegov razred v $\mathcal{A}_p$ in s $[h]_i$ razred polinoma h v $\mathcal{A}_{\lambda_i}$. Potem je preslikava $\psi\left([h]_p\right) = ([h]_1, [h]_2, \ldots, [h]_r)$ homomorfizem $\mathcal{A}_p \to \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{A}_{\lambda_i}$, saj velja $[\alpha g + \beta h]_i = \alpha[g]_i + \beta[h]_i$. Če je $[h]_i = 0$ za vsak i, potem sledi, da polinom $(x-\lambda_i)^{k_i+1}$ deli h in tako $[h]_p = 0$. Preslikava ψ je zato injektivna. Ker sta razsežnosti prostorov $\mathcal{A}_p$ in $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{A}_{\lambda_i}$ obe enaki $r + \sum_{i=1}^r k_i$, je ψ tudi surjektiven in tako izomorfizem. Nato sledi, da $\mathcal{A}_p^* \cong (\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{A}_{\lambda_i})^* \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{A}_{\lambda_i}^* = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)}$. Ker sta $\mathcal{A}_p$ in $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{A}_{\lambda_i}$ izomorfni algebri, sta potem $\mathcal{B}_p$ in $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)}$ izomorfni koalgebri.

To velja, ker so algebre $\mathcal{A}_p$ in $\mathcal{A}_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, r$, končno razsežne in ker so $\mathcal{B}_p$ in $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ njim dualne koalgebre. ■

Naj bosta $\mathcal{A}_p$ in $\mathcal{B}_p$ kot v gornjem izreku. Pomembno vlogo v nadaljevanju bo imela preslikava $D : \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}_p$, podana s predpisom

$$(Df)\left([h]_p\right) = f\left([xh]_p\right) \tag{10}$$

za $f \in \mathcal{B}_p$ in $h \in \mathbb{C}[x]$. Preslikava D je dual preslikave „množenje z x" na algebri $\mathcal{A}_p$.

3. Izrek o kanoničnem razcepu

Linearni preslikavi A na vektorskem prostoru V nad $\mathbb{C}$ priredimo preslikavo $A - D : V \otimes \mathcal{B}_p \to V \otimes \mathcal{B}_p$, kjer je $\mathcal{B}_p$ koalgebra, definirana v izreku 1. Tu smo preslikavo $A \otimes I_{\mathcal{B}}$ označili kar s črko A in preslikavo $I_V \otimes D$ s črko D. Jedro preslikave $A - D : V \otimes \mathcal{B}_p \to V \otimes \mathcal{B}_p$ označimo s simbolom $\mathcal{R}_p$.

Naj bo $p(x) = x^d - p_{d-1}x^{d-1} - \ldots - p_0$. Potem linearni funkcionali $f_i \in \mathcal{B}_p$, definirani s predpisom

$$f_i\left(\left[x^j\right]_p\right) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots d-1)\,, \tag{11}$$

tvorijo bazo prostora $\mathcal{B}_p$. Tu je $[h]_p$ razred polinoma h v $\mathcal{A}_p$. Iz (10) in (11) sledi po kratkem računu, da

$$Df_0 = p_0 f_{d-1} \quad \text{in} \quad Df_i = f_{i-1} + p_i f_{d-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, d-1)\,. \tag{12}$$

Trditev 2. *Vektor $v = \sum_{i=0}^{d-1} v_i \otimes f_i$ je element v $\mathcal{R}_p$ natanko tedaj, ko velja*

$$v_i = A^i v_0 \quad (i = 0, 1, \ldots, d-1) \quad \textit{in} \quad p(A)\, v_0 = 0\,. \tag{13}$$

Dokaz. Z uporabo enakosti (12) dobimo

$$(A - D)\, v = \sum_{i=0}^{d-1} A v_i \otimes f_i - \left(\sum_{i=1}^{d-1} v_i \otimes f_{i-1} + \sum_{i=0}^{d-1} p_i v_i \otimes f_{d-1}\right)\,.$$

Ker so funkcionali $\{f_i\}_{i=0}^{d-1}$ linearno neodvisni, sledi, da je $(A - D)\, v = 0$ natanko tedaj, ko velja

$$A v_i = v_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, d-2) \quad \text{in} \quad A v_{d-1} = \sum_{i=0}^{d-1} p_i v_i\,. \tag{14}$$

Enakosti (13) so ekvivalentne enakostim (14), in tako je dokaz končan. ■

Naslednji izrek je pomemben za povezavo med razcepom (9) in kanoničnim razcepom prostora V na spektralne podprostore linearne preslikave A.

Izrek 3. *Naj bo p minimalni polinom linearne preslikave A in ε koenota za $\mathcal{B}_p$. Potem je zožitev $\overline{\varepsilon} : \mathcal{R}_p \to V$ preslikave $I_V \otimes \varepsilon$ obrnljiva.*

Dokaz. Naj bo $p(x) = x^d - p_{d-1}x^{d-1} - \ldots - p_0$. Potem ima koalgebra $\mathcal{B}_p$ bazo $\{f_i\}_{i=0}^{d-1}$ podano z (11). Definirajmo sedaj linearno preslikavo $\eta : V \to \mathcal{R}_p$ s predpisom $\eta(v) = \sum_{i=0}^{d-1} A^i v \otimes f_i$. Potem sledi iz (12), da

$$D\eta(v) = \sum_{i=1}^{d-1} A^i v \otimes f_{i-1} + \sum_{i=0}^{d-1} A^i v \otimes p_i f_{d-1} \,. \tag{15}$$

Ker je $p(A) = 0$, je desna stran v (15) enaka

$$\sum_{i=0}^{d-2} A^{i+1} v \otimes f_i + \sum_{i=0}^{d-1} A^d v \otimes f_{d-1} = A\eta(v) \,.$$

Tako smo pokazali, da $\eta(v) \in \mathcal{R}_p$ za vsak vektor $v \in V$. Ker velja $\overline{\varepsilon}(\eta(v)) = v$ za $v \in V$, je preslikava $\overline{\varepsilon}$ surjektivna. Naj bo sedaj $u = \sum_{i=0}^{d-1} v_i \otimes f_i \in \mathcal{R}_p$. Potem sledi iz trditve 2, da $u = \sum_{i=0}^{d-1} A^i v_0 \otimes f_i$. Ker velja $\eta(\overline{\varepsilon}(u)) = \eta(v_0) = \sum_{i=0}^{d-1} A^i v_0 \otimes f_i = u$, je preslikava $\overline{\varepsilon}$ tudi injektivna. Dokaz je tako končan. ■

Kot posledico izreka 1 dobimo sedaj v naslovu omenjeni izrek o kanoničnem razcepu na spektralne podprostore. Naj bo

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1+1} (x - \lambda_2)^{k_2+1} \cdots (x - \lambda_r)^{k_r+1}$$

razcep minimalnega polinoma preslikave A na linearne faktorje, jedro preslikave $A - D : V \otimes \mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)} \to V \otimes \mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)}$ pa označimo s simbolom $\mathcal{R}_{\lambda_i}$.

Izrek 4. *Naj bo A linearna preslikava na vektorskem prostoru V in p njen minimalni polinom. Potem velja*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i},$$

kjer $V_{\lambda_i} = \overline{\varepsilon}(\mathcal{R}_{\lambda_i})$. Vektorski podprostor V_{λ_i} je spektralni podprostor za A pri λ_i, to je, V_{λ_i} je jedro preslikave $(A - \lambda_i I)^{k_i+1}$.

Dokaz. Izrek 1 pove, da velja $\mathcal{B}_p = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{B}_{\lambda_i}^{(k_i)}$. Potem sledi $\mathcal{R}_p = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{R}_{\lambda_i}$. Ker je preslikava $\overline{\varepsilon}$ obrnljiva, nato dobimo tudi $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}$.

Da so vektorski podprostori V_{λ_i} invariantni za A in da je V_{λ_i} jedro preslikave $(A-\lambda_i I)^{k_i+1}$, je posledica trditve 2. ■

Za konec si oglejmo še poseben primer. Naj bo A kot v (1) in naj bo $\{e_1, e_2, e_3\}$ standardna baza prostora $\mathbb{C}^3$. Minimalni polinom za A je $p(x) = (x-\mu)(x-\lambda)^2$. Iz izreka 1 sledi, da $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_\mu^{(0)} \oplus \mathcal{B}_\lambda^{(1)}$. Naj bosta $\{z_0^\mu\}$ in $\left\{z_0^\lambda, z_1^\lambda\right\}$ bazi koalgeber $\mathcal{B}_\mu^{(0)}$ in $\mathcal{B}_\lambda^{(1)}$ določeni kot v (8). Poiščimo sedaj $\mathcal{R}_\mu$ in $\mathcal{R}_\lambda$. Vektorski prostor $\mathbb{C}^3 \otimes \mathcal{B}_\mu^{(0)}$ ima bazo $\{e_i \otimes z_0^\mu;\ i = 1,2,3,\}$ in v tej bazi je

$$(A-D)\,|_{V\otimes\mathcal{B}_\mu^{(0)}} = \begin{bmatrix} \lambda-\mu & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nato sledi, da $\mathcal{R}_\mu = \{\alpha e_3 \otimes z_0^\mu;\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ in $V_\mu = \{[\,0\ 0\ \alpha\,];\ \alpha \in \mathbb{C}\}$. Vektorski prostor $V \otimes \mathcal{B}_\lambda^{(1)}$ ima bazo $\left\{e_i \otimes z_j^\lambda;\ i = 1,2,3; j = 0,1\right\}$. V tej bazi imamo

$$(A-D)\,|_{V\otimes\mathcal{B}_\lambda^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-\lambda \end{bmatrix}.$$

Potem je $\mathcal{R}_\lambda = \left\{\alpha e_1 \otimes z_0^\lambda + \beta\left(e_2 \otimes z_0^\lambda + e_1 \otimes z_1^\lambda\right);\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$ in tako

$$V_\lambda = \{[\,\alpha\ \beta\ 0\,];\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}\,.$$

Zahvala. Profesorju Luziusu Grunenfelderju se zahvaljujem za razgovore, ki so vodili k nastanku tega članka.

LITERATURA

[1] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Univ. Press, 1980.
[2] Z. Bohte, *Numerično reševanje nekaterih dvoparametričnih problemov lastnih vrednosti*, Spominski zbornik A. Kuhlja, str. 17–28, SAZU, Ljubljana, 1982.
[3] G. Cigler, *Linearno rekurzivna zaporedja*, diplomsko delo, Oddelek za matematiko, Univ. v Ljubljani, 1992, samozaložba.
[4] L. Grunenfelder, M. Omladič, *Linearly recursive sequences and operator polynomials*, Lin. Alg. Appl. **182** (1993), 127–145.
[5] L. Grunenfelder, T. Košir, *An algebraic approach to multiparameter spectral theory*, še neobjavljeno.
[6] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear algebra*, 2. izdaja, Prentice Hall, 1971.
[7] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York, 1969.
[8] G. Tomšič, *Novejši rezultati večparametrskih problemov*, Obzornik nat. fiz. **33** (1986), 81–86.
[9] I. Vidav, *Algebra*, 2. natis, DMFA Ljubljana, 1980.

O KARTEZIČNEM PRODUKTU GRAFOV

JANEZ ŽEROVNIK

Math. Subj. Class. (1991) 05C85, 68Q25, 68Q22

Povzamemo nekaj rezultatov v zvezi s prepoznavanjem kartezičnega produkta grafov.

ON CARTESIAN PRODUCTS OF GRAPHS

Some classical and some new results on recognizing Cartesian product graphs are surveyed.

1. Uvod

Pred dobrimi tremi desetletji je odmevni Sabidussijev članek o ‚množenju grafov' [11] spodbudil živahno raziskovanje produktov grafov. Med prvimi rezultati so bili dokazi (ne)enolične faktorizacije za različne produkte, dokazi izreka o rekonstrukciji za nekatere družine grafov in klasifikacija vseh asociativnih produktov[1]. V zadnjem desetletju so produkti grafov ponovno postali zelo zanimivo raziskovalno področje, predvsem zaradi vprašanj, povezanih z obstojem in učinkovitostjo algoritmov[2]. S produkti grafov se posredno ali neposredno ukvarja tudi lepo število prispevkov slovenskih matematikov[3].

Produkt dveh grafov je graf, katerega množica točk je kartezični produkt množic točk faktorjev. Pravilo, ki določi povezave v produktnem grafu, je mogoče izbrati na več načinov. Izkaže se, da obstaja natanko dvajset različnih asociativnih produktov. Če upoštevamo še nekatere enostavne zveze med njimi in zahtevamo, da so povezave produkta odvisne od obeh faktorjev, pa ostane pet različnih produktov, ki jih je smiselno študirati: leksikografski produkt, krepki produkt, kategorični produkt (imenovan tudi tenzorski, direktni ali šibki produkt), kartezični produkt (ali vsota grafov) in ekvivalenčni produkt ([9, str. 28]).

---

[1] Za končne kartezične produkte sta enoličnost faktorizacije dokazala Sabidussi in neodvisno Vizing, za splošne (tudi neskončne) produkte pa Imrich in Miller. Izrek o enolični faktorizaciji krepkega produkta so dokazali Dörfler in Imrich ter McKenzie. Imrich je opisal vse primere, v katerih obstaja enolična faktorizacija glede na leksikografski produkt. Izrek o rekonstrukciji kartezičnega produkta je dokazal Dörfler. Imrich in Izbicki sta klasificirala vse asociativne produkte. Več bibliografskih podatkov o teh (in kasneje omenjenih rezultatih) lahko bralec dobi v [9] in [13].

[2] Winkler ter neodvisno Feigenbaum, Herschberger in Schäffer so objavili dva različna polinomska algoritma za faktorizacijo grafa glede na kartezični produkt. Tudi za faktorizacijo glede na krepki produkt je znan polinomski algoritem. Časovna zahtevnost faktorizacije glede na leksikografski produkt je enaka časovni zahtevnosti testiranja izomorfizma grafov. Bralcu, ki si želi spoznati ali osvežiti osnovne pojme o učinkovitosti algoritmov, predlagamo učbenika [7] ali [2].

[3] V podatkovni bazi MathReview najdemo prek dvajset abstraktov člankov slovenskih avtorjev, v katerih so omenjeni produkti grafov. Med avtorji ali soavtorji so (po abecednem redu) Vladimir Batagelj, Sandi Klavžar, Aleksander Malnič, Dragan Marušič, Bojan Mohar, Matjaž Omladič, Tomaž Pisanski, John Shawe-Taylor in Jože Vrabec.

V sestavku se omejimo na kartezični produkt, pri katerem so povezave določene takole: z x_1, x_2 označimo točki faktorja G in z y_1, y_2 točki faktorja H. Točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) produkta, ki ga označimo z $G \square H$, sta povezani natanko tedaj, ko sta točki v enem od faktorjev povezani, v drugem pa enaki. Zaradi asociativnosti lahko na ta način definiramo kartezični produkt končnega števila faktorjev. Kasneje bomo navedli posplošitev te definicije za kartezični produkt poljubnega števila faktorjev.

Poleg povsem teoretične zanimivosti je študij algoritmov za faktorizacijo grafov zanimiv tudi z bolj praktičnega stališča. Probleme, ki se pojavljajo v najrazličnejših kontekstih, na primer pri operacijskih raziskavah, je pogosto mogoče prevesti na probleme kombinatorične optimizacije, mnogi med njimi pa zahtevajo tudi izračun kakšne invariante grafa, ki je na ustrezen način prirejen problemu. Računanje mnogih grafovskih invariant je v splošnem NP-težko, kar nekoliko poenostavljeno rečeno pomeni, da ne poznamo nobenega polinomskega algoritma za tak problem in da je zelo verjetno, da tak algoritem sploh ne obstaja. Če pa vemo, da ima graf kakšno posebno strukturo, se pogosto izkaže, da je mogoče katerega od sicer težkih problemov vendarle ugnati z algoritmom, ki je dovolj hiter za praktično uporabo. Na primer, če je graf kartezični produkt dveh faktorjev in iščemo njegovo barvnost (kromatično število, $\chi(G)$), lahko poiščemo faktorje grafa, izračunamo barvnost vsakega od faktorjev in upoštevamo enostavno zvezo med barvnostjo kartezičnega produkta in njegovih faktorjev: $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

2. Kartezični produkt

Graf je kombinatorični objekt, ki je določen z množico točk in množico povezav. Množico točk grafa G bomo označili z $V(G)$ ali V, množico povezav pa z $E(G)$ ali E. Množica povezav $E(G)$ je množica parov $\{x, y\}$ različnih točk. Točkama x in y rečemo *krajišči* povezave $\{x, y\}$. Graf H je *podgraf* grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in je $E(H) \subseteq E(G)$. Graf H je *induciran* (ali porojen) podgraf grafa G, če je povezava $\{x, y\}$ grafa G v H, brž ko sta v H njeni krajišči x in y. Naj bo H podgraf grafa G. Podgraf, ki ga H inducira v G, dobimo tako, da grafu H dodamo vse povezave med pari točk iz H, ki so povezane v G. *Sprehod* v grafu G je (končno) zaporedje povezav $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}$, v katerem imata poljubni dve zaporedni povezavi skupno točko. Graf je *povezan*, če med poljubnim parom točk iz $V(G)$ obstaja sprehod. Sprehod, v katerem se vsaka točka pojavi največ enkrat, je *pot*. Razdalja $d_G(x, y)$ med točkama x in y v grafu G je dolžina najkrajše poti med x in y. Če med točkama x in y ni nobene poti s končno dolžino, potem definiramo $d_G(x, y) = \infty$. Graf je povezan natanko tedaj, ko je $d_G(x, y) < \infty$ za poljuben par točk x, $y \in V(G)$.

Graf G lahko obravnavamo tudi kot unijo $V(G) \cup E(G)$ in potem zapišemo kar $x \in G$ namesto $x \in V(G)$ in $e \in G$ namesto $e \in E(G)$.

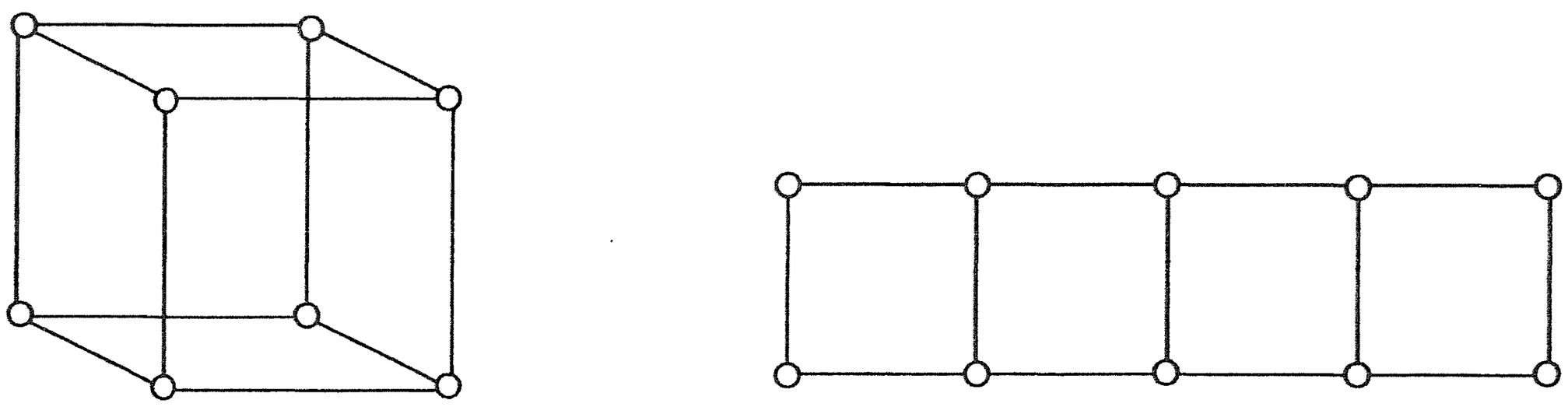
Naj bo G_ι, $\iota \in I$ družina grafov. Potem je *kartezični produkt* $G = \square_{\iota \in I} G_\iota$ graf, kjer velja:

(i) $V(G)$ je kartezični produkt množic $V(G_\iota)$. Z drugimi besedami lahko rečemo, da je $V(G)$ množica funkcij $x : \iota \mapsto x_\iota$, $x_\iota \in V(G_\iota)$, iz množice indeksov I v unijo $\cup_{i \in I} V(G_\iota)$.

(ii) $E(G)$ je množica parov $\{x, y\}$ različnih točk G, za katere obstaja tak indeks $\kappa \in I$, da je $\{x_\kappa, y_\kappa\} \in E(G_\kappa)$ in velja $x_\iota = y_\iota$ za vse $\iota \in I \setminus \{\kappa\}$.

V primeru, ko imamo samo dva faktorja, recimo G in H, dobimo običajno definicijo za (končni) kartezični produkt $G \square H$. Kartezični produkt grafov je komutativen in asociativen, enota zanj je trivialni graf (z eno točko in brez povezav).

Enostavni primeri kartezičnih produktov so kvadrat, ogrodja kocke, hiperkock in prizem ter celoštevilska mreža, ki jo dobimo kot produkt dveh neskončnih poti. Na sliki 1 vidimo graf ‚ogrodje kocke', ki ga dobimo kot kartezični produkt treh grafov K_2 in produkt poti P_5 z grafom K_2. Definicijo grafa hiperkocke in zanimiv primer uporabe kartezičnega produkta najdemo v [10].



$\mathbf{K_2 \square K_2 \square K_2}$ $\qquad$ $\mathbf{K_2 \square P_5}$

Slika 1. Dva enostavna primera sestavljenih grafov.

Produkt končno mnogo grafov je povezan natanko tedaj, ko so povezani vsi faktorji. Produkt neskončno mnogo netrivialnih grafov pa je prav gotovo nepovezan, saj nujno vsebuje točke, ki se razlikujejo v neskončno mnogo koordinatah. Tak par točk pa ne more biti povezan s končno potjo, saj vsaka povezava povezuje točki, ki se razlikujeta samo v eni koordinati. Zato je naravno definirati šibki kartezični produkt.

Naj bo G_ι, $\iota \in I$ množica povezanih grafov in $a \in V(\square_{\iota \in I} G_\iota)$. *Šibki kartezični produkt* $G = \square^a_{\iota \in I} G_\iota$ je povezana komponenta grafa $G = \square_{\iota \in I} G_\iota$, ki vsebuje točko a.

Kaj hitro se vidi, da je $\square^a G_\iota = \square^b G_\iota$ natanko tedaj, ko se točki a in b razlikujeta v največ končno mnogo koordinatah.

Primer produkta s števno mnogo faktorji je *šibka neskončno dimenzionalna kocka.* To je graf, katerega točke so vsa neskončna zaporedja ničel in enic, v katerih je končno mnogo enic, dve zaporedji pa sta povezani, ko se razlikujeta v enem členu zaporedja. Šibko neskončno dimenzionalno kocko dobimo kot kartezični produkt števno mnogo grafov K_2.

Temeljni izrek o faktorizaciji glede na kartezični produkt so dokazali vsak zase Sabidussi [11] in Vizing [12] za produkte končno mnogo faktorjev ter Imrich [4] in Miller [8] za šibki produkt.

Izrek 1 (Sabidussi, Vizing, Miller, Imrich). *Vsak povezan graf je mogoče enolično (do izomorfizma in do vrstnega reda faktorjev) zapisati kot (šibki) kartezični produkt.*

3. Relacije na povezavah grafa

V tem razdelku bomo definirali relacije σ, θ, δ in τ nad množico povezav grafa. V nadaljevanju bomo videli njihovo uporabo pri prepoznavanju kartezičnih produktov.

Najprej definirajmo relacijo σ na $E(G)$, ki ji bomo rekli *produktna relacija.* Naj bo $G = \square^a_{\iota\in I} G_\iota$. Imenujmo $e = \{u, v\}$ G_κ*-povezava*, če e povezuje točki u in v, ki se razlikujeta v koordinati κ. Očitno potem velja $u_\iota = v_\iota$ za vse koordinate $\iota \neq \kappa$, za koordinato κ pa $\{v_\kappa, u_\kappa\} \in E(G_\kappa)$. Po definiciji sta povezavi e in f v relaciji $\sigma(\square^a_{\iota\in I} G_\iota)$, če obstaja tak indeks ι, da sta e in f G_ι-povezavi.

Ni se težko prepričati, da je $\sigma(\square^a_{\iota\in I} G_\iota)$ ekvivalenčna relacija.

Graf je v splošnem mogoče na več načinov zapisati kot kartezični produkt. Ogrodje kocke je na primer mogoče zapisati kot produkt treh K_2 ali pa kot produkt $C_4 \square K_2$. Vsak od teh zapisov določa neko relacijo $\sigma()$ na množici povezav grafa G. Zaradi enoličnosti faktorizacije vemo, da obstaja najfinejša relacija, inducirana s kakšnim zapisom grafa v obliki kartezičnega produkta. To relacijo imenujemo σ_G. Po drugi strani pa lahko iz znane relacije σ na očiten način dobimo faktorizacijo grafa G. Vse povezave enega ekvivalenčnega razreda σ_G namreč pripadajo vložitvam istega faktorja, katerakoli povezana komponenta grafa, ki je induciran na teh povezavah, pa je izomorfna faktorju.

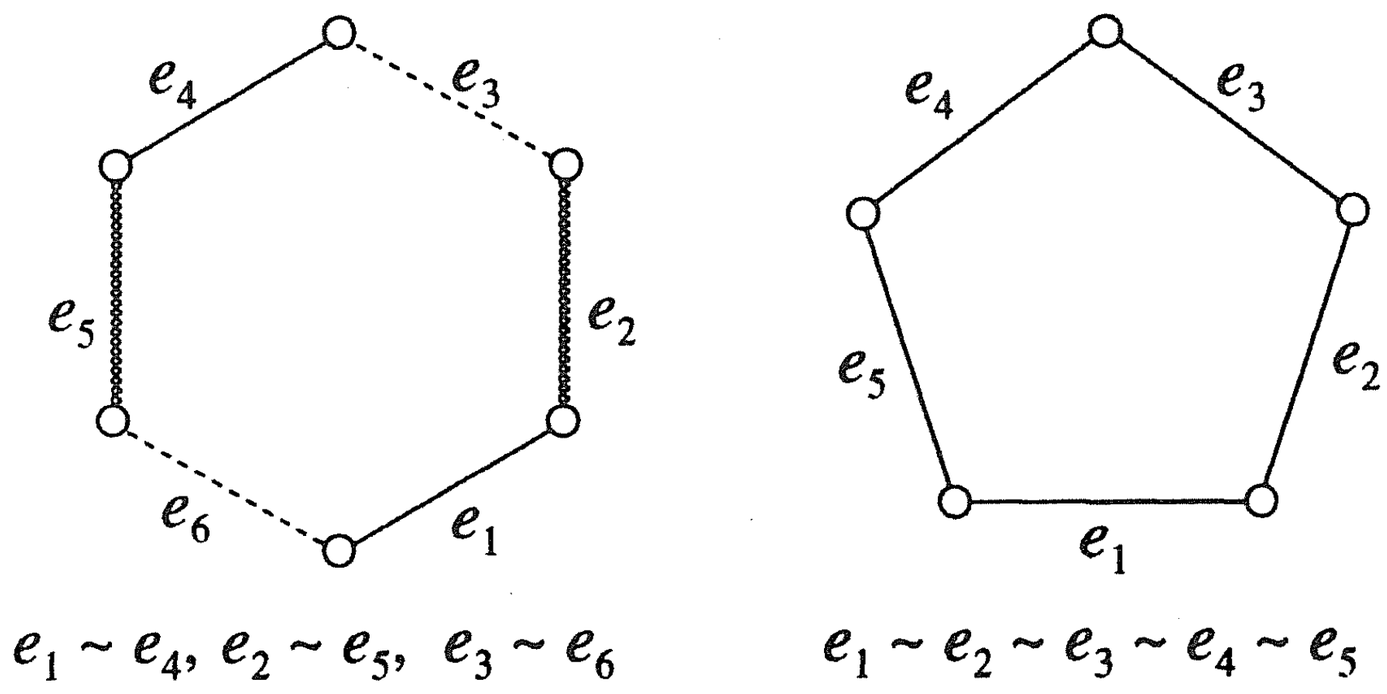
Graf G, na katerem ima relacija σ_G samo en ekvivalenčni razred, imenujemo *pragraf.* Če ima ta relacija vsaj dva ekvivalenčna razreda, je graf *sestavljen.*

Poljubni sosednji povezavi, ki sta v različnih faktorjih nekega kartezičnega produkta, morata razpenjati *kvadrat.* Bolj natančno povedano: k paru sosednjih povezav $e = \{x, y\}$, $f = \{x, z\}$ mora v produktnem grafu obstajati taka točka w, da je graf, induciran na točkah x, y, z, w, izomorfen ciklu dolžine 4. Očitno mora biti vsak par nasprotnih povezav takega kvadrata v različnih σ_G-ekvivalenčnih razredih.

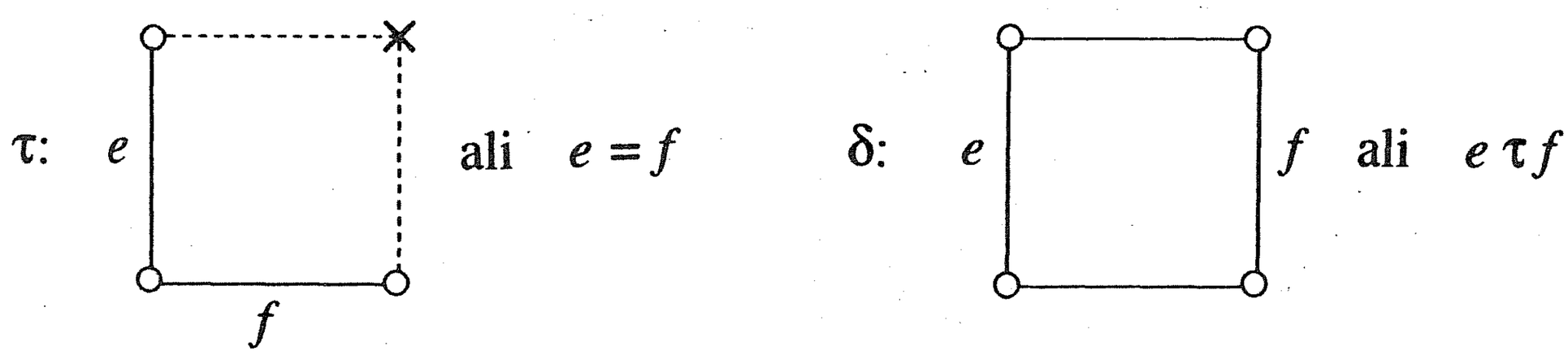
Relacija θ na $E(G)$ je definirana takole: za poljuben par povezav $e = \{x, y\}$, $e' = \{x', y'\} \in E$ je $e\theta e'$ natanko tedaj, ko je

$$d(x, x') + d(y, y') \neq d(x, y') + d(x', y)\,.$$

Očitno je relacija θ simetrična in refleksivna, njena tranzitivna ovojnica $\theta^\star$ je torej ekvivalenčna relacija. Relacijo θ sta Graham in Winkler [3] uporabila pri študiju izometričnih vložitev grafa v produktne grafe. Izkaže



Slika 2. Ekvivalenčni razredi relacije $\theta^\star$ na ciklih C_6 in C_5.



Slika 3. Definiciji relacij τ in δ.

se, da relacija $\theta^\star$ ‚identificira' lihe cikle, v sodih ciklih pa je v relaciji samo par nasproti si ležečih povezav (glej sliko 2).

Definirajmo še dve relaciji. Povezavi e in f sta v relaciji τ, če je izpolnjena ena od naslednjih dveh zahtev:

(1) e in f sta sosednji povezavi in v grafu ni nobenega induciranega kvadrata, ki bi vseboval e in f.

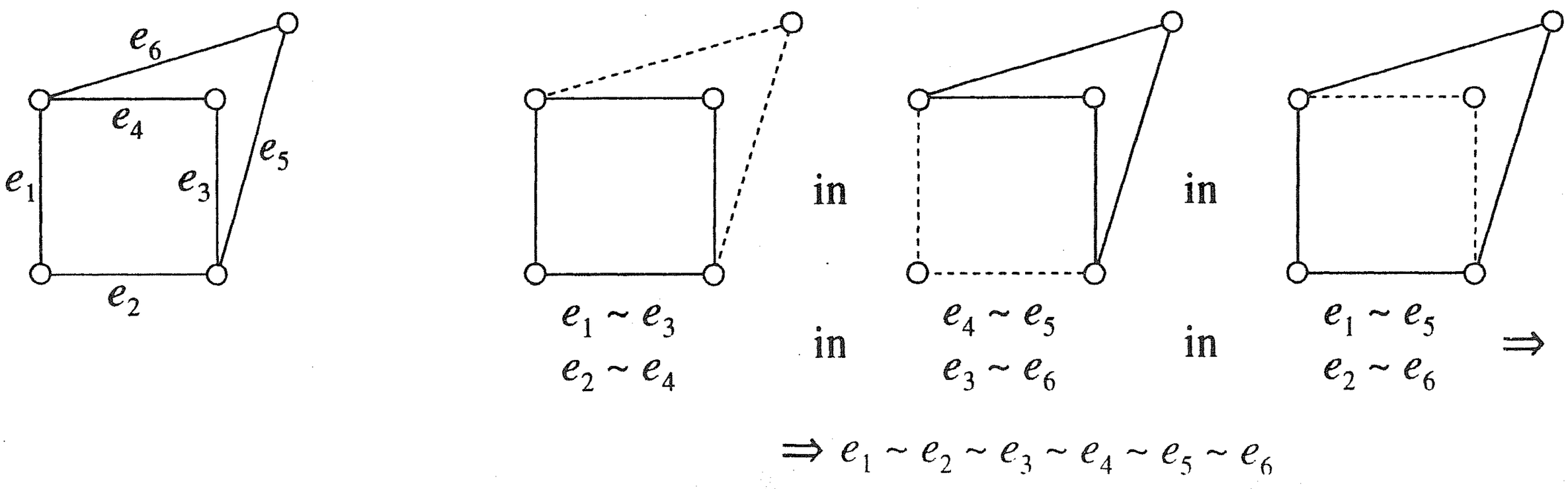
(2) $e = f$.

Povezavi e in f sta v relaciji δ, če je izpolnjena ena od naslednjih dveh zahtev:

(1) $e\tau f$.

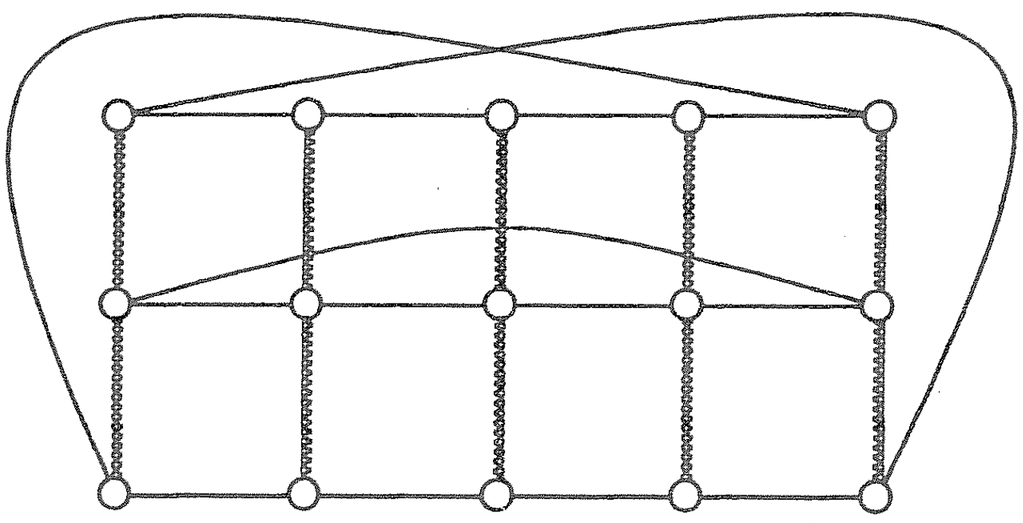
(2) e in f sta nasprotni povezavi v kvadratu brez diagonal.

Relaciji τ in δ sta refleksivni in simetrični. Torej sta njuni tranzitivni ovojnici $\tau^\star$ in $\delta^\star$ ekvivalenčni relaciji.

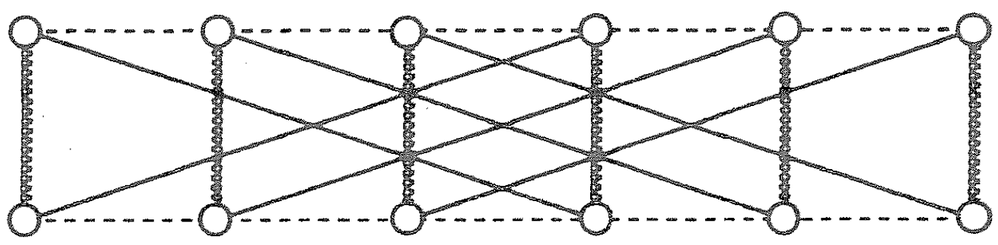


Slika 4. Če sta sosednji povezavi v različnih ekvivalenčnih razredih $\delta^\star$, potem razpenjata natanko en kvadrat brez diagonal.

Po definiciji relacije δ vsak par sosednjih povezav, ki pripadata različnima ekvivalenčnima razredoma $\delta^\star$, razpenja kvadrat brez diagonal. Hitro se vidi še več: če sosednji povezavi pripadata različnima ekvivalenčnima razredoma $\delta^\star$, je tak kvadrat enoličen. Če bi bila taka kvadrata dva, takoj vidimo, da morajo vse povezave ležati v istem ekvivalenčnem razredu $\delta^\star$. Ideja dokaza je skicirana na sliki 4. Recimo, da povezavi e_1 in e_2 razpenjata dva kvadrata. Potem mora biti $e_1 \ \delta^\star \ e_2$. (Na sliki 4 smo relacijo $\delta^\star$ označili z $\sim$.) Pravimo, da je ekvivalenčna relacija na povezavah grafa *lokalno produktna*, če vsak par sosednjih povezav, ki pripadata različnima ekvivalenčnima razredoma, razpenja natanko en kvadrat. Brez težav se prepričamo, da je lokalno produktna tudi vsaka ekvivalenčna relacija, ki vsebuje $\delta^\star$. Prav tako ni težko videti, da σ_G vsebuje δ, torej je tudi σ_G lokalno produktna relacija. Ni presenetljivo, da je lokalna produktnost relacije prešibka lastnost, da bi taka relacija že določila, ali je graf sestavljen ali ne.



Slika 5. Pragraf z dvema $\delta^\star$-ekvivalenčnima razredoma.



Slika 6. Pragraf s tremi $\delta^\star$-ekvivalenčnimi razredi.

Na slikah 5 in 6 vidimo razbitje množic povezav na ekvivalenčne razrede relacije $\delta^\star$ na dveh preprostih pragrafih. V prvem primeru imamo skoraj produkt $P_3 \square P_5$, le dodatne tri povezave so preveč ‚zavozlane'. Če poskusimo te tri povezave poravnati, začno ‚nagajati' druge tri. Graf je torej lepo simetričen in ima lokalno strukturo kartezičnega produkta. Pragraf na sliki 6 ni ‚zavozlan', le povezav ima preveč. V nadaljevanju bomo videli, koliko ‚manjka' lokalno produktni relaciji do produktne relacije σ_G.

4. Konveksnost relacije

Naj bo H podgraf v G. Če so vse najkrajše poti v grafu G med poljubnim parom točk iz H tudi v H, potem rečemo, da je H *konveksen* podgraf (v G)

Na prvi pogled bi bilo naravno definirati, da je relacija na množici povezav konveksna, če so podgrafi, ki jih inducirajo njeni ekvivalenčni razredi, konveksni. Vendar se izkaže, da je bolj uporabna naslednja, nekoliko močnejša definicija.

Naj bo γ ekvivalenčna relacija na $E(G)$ z ekvivalenčnimi razredi E_ι, $\iota \in I$. Po definiciji je relacija γ *konveksna*, če je za poljubno podmnožico

$K \subseteq I$ konveksna vsaka povezana komponenta grafa, ki je induciran na $\bigcup_{\iota \in K} E_\iota$.

Za nas sta najpomembnejši konveksni relaciji produktna relacija σ_G in relacija $\theta^\star$. Dokažimo, da je $\theta^\star$ konveksna relacija. Začnimo z lemo, ki je temelj celotne teorije izometričnih vložitev v kartezične produkte grafov [3] [5].

Lema 2 (Graham in Winkler). *Naj bo P ena od najkrajših poti med točkama a in b grafa G in Q poljubna druga pot med a in b. Potem je $|P \cap E_\iota| \leq |Q \cap E_\iota|$ za poljubni ekvivalenčni razred E_ι relacije $\theta^\star$.*

Dokaz. Za poljubno trojico točk $x, y, z \in V(G)$ definirajmo

$$f_x(y,z) = d_G(x,y) - d_G(x,z)\,,$$

kjer je $d_G(u,v)$ razdalja v grafu G. Ker za d_G velja trikotniška neenakost, dobimo $|f_u(y,z) - f_v(y,z)| \leq 2$ za poljubno povezavo $\{u,v\} \in E(G)$. Nadalje iz definicije θ sledi, da je $f_u(y,z) = f_v(y,z)$, če je natanko ena od povezav $\{u,v\}$, $\{y,z\}$ v E_ι.

Naj bo P dana s povezavami $\{x_1,x_2\}$, $\{x_2,x_3\}, \ldots, \{x_{m-1},x_m\}$, kjer smo označili $a = x_1$ in $b = x_m$. Definirajmo

$$g(u) = \sum_{\{x_i,x_{i+1}\} \in P \cap E_\iota} f_u(x_i,x_{i+1})\,.$$

Očitno je $g(u) = g(v)$, če je $\{u,v\} \in E \setminus E_\iota$. Za $\{u,v\} \in E_\iota$ pa dobimo

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &= |\sum_{\{x_i,x_{i+1}\} \in P \cap E_\iota} f_u(x_i,x_{i+1}) - f_v(x_i,x_{i+1})| \leq \\ &\leq |\sum_{\{x_i,x_{i+1}\} \in P} f_u(x_i,x_{i+1}) - f_v(x_i,x_{i+1})| = \\ &= |f_u(x_1,x_m) - f_v(x_1,x_m)| \leq 2\,, \end{aligned}$$

ker je $f_u(x_i,x_{i+1}) = f_u(x_i,x_{i+1})$ za $\{x_i,x_{i+1}\} \notin E_\iota$.

Naj bo število povezav na poti P, ki so v E_ι, enako k. Potem je $g(a) = -k$ in $g(b) = k$. Ko u teče po poljubni poti Q od a do b se vrednost $g(u)$ spremeni od $-k$ do $+k$, torej za $2k$. Ker se vrednost g lahko spremeni samo vzdolž povezav iz E_ι in ker se g vsakič spremeni za največ 2, mora biti na Q vsaj k povezav iz ekvivalenčnega razreda E_ι. ■

Trditev 3. *$\theta^\star$ je konveksna relacija.*

Dokaz. Recimo, da $\theta^\star$ ni konveksna relacija. Potem morata obstajati uniji ekvivalenčnih razredov relacije $\theta^\star$, recimo F_1 in $F_2 = E \setminus F_1$, in par točk, recimo u in v, tako da obstaja pot Q med u in v, ki je vsa vsebovana v F_2, $Q \cap F_1 = \emptyset$, in najkrajša pot P med u in v, ki seka F_1. Obstaja torej

vsaj ena povezava $e \in P \cap F_1$. Označimo z $E_\iota \subseteq F_1$ ekvivalenčni razred, v katerem je e. Potem je

$$|P \cap E_\iota| > |Q \cap E_\iota| = 0\,.$$

Po prejšnji lemi pa je vedno $|Q \cap E_\iota| \geq |P \cap E_\iota|$, protislovje. Torej mora biti relacija $\theta^\star$ konveksna. ■

5. Konveksnost in faktorizacija

Iz definicije konveksne relacije ni očitno, da mora biti presek poljubne množice konveksnih relacij konveksna relacija. Vsaj za lokalno produktne ekvivalenčne relacije pa je to mogoče pokazati.

Lema 4 [6]. *Naj bo γ_j, $j \in J$, poljubna množica lokalno produktnih konveksnih relacij. Potem je presek $\gamma = \cap_{j \in J} \gamma_j$ konveksna relacija.*

Zato lahko definiramo *konveksno ogrinjačo* $\mathcal{C}(\rho)$ lokalno produktne relacije ρ kot najmanjšo konveksno relacijo, ki vsebuje ρ. Formalno zapisano: $\gamma = \mathcal{C}(\rho)$, če je γ konveksna, vsebuje δ in ρ in če za poljubno konveksno relacijo $\gamma' \supseteq \rho$ velja $\gamma \subseteq \gamma'$. S pomočjo prejšnje leme lahko pokažemo, da poljubna lokalno produktna konveksna ekvivalenčna relacija na množici povezav $E(G)$ povezanega grafa G inducira neko razbitje G na šibki kartezični produkt. Ker je vsaka ekvivalenčna relacija, ki vsebuje δ, lokalno produktna, se izkaže, da enolično faktorizacijo povezanega grafa G na prafrafe glede na šibki kartezični produkt določa ravno konveksna ogrinjača relacije δ. Krajše, $\sigma_G = \mathcal{C}(\delta)$. Ker je $\theta^\star$ konveksna relacija, lahko zahtevo po konveksnosti relacije σ_G zapišemo tudi takole:

$$\sigma_G = (\delta \cup \theta)^\star\,.$$

Dokazi presegajo okvire tega sestavka, zato jih opuščamo. Zadnjo zvezo lahko razumemo tudi kot preprosto navodilo za računanje relacije σ_G, torej za faktorizacijo, kar naravnost iz definicij δ in θ. Dobljeni algoritem je seveda polinomski in naravno vzporeden. Za končne produkte je Feder [1] dokazal še več: $\sigma_G = (\tau \cup \theta)^\star$. Iz doslej povedanega je tudi to mogoče enostavno izpeljati za šibki kartezični produkt, saj velja

Lema 5. *Naj konveksna ekvivalenčna relacija γ vsebuje τ. Potem γ vsebuje δ.*

Dokaz. Naj bosta e in f sosednji povezavi. Če v G ni nobenega kvadrata, ki bi vseboval e in f, potem po definiciji hkrati velja $e\tau f$ in $e\delta f$. Naj bosta zdaj e in f na nekem kvadratu, e' in f' pa naj bosta njima nasprotni povezavi. Po definiciji δ je $e\delta e'$ in $f\delta f'$. Želimo pokazati, da je tudi $e\gamma e'$ in $f\gamma f'$. Sedaj uporabimo konveksnost relacije γ. Recimo, da e in e' nista v istem ekvivalenčnem razredu relacije γ. Če je e edina povezava iz ekvivalenčnega razreda, imenujmo ga E_1, na kvadratu $\{e, f, e', f'\}$, smo

prišli v protislovje s konveksnostjo $E \setminus E_1$. Če pa je e in vsaj ena od povezav f, f' v ekvivalenčnem razredu E_1, potem mora biti, spet zaradi konveksnosti γ, vsaka povezava kvadrata v razredu E_1. Torej mora biti $e\gamma e'$. Podobno izpeljemo še $f\gamma f'$. ■

Iz leme 5 in prej naštetih posledic leme 4 pa takoj sledi

Izrek 6. *Naj bo G poljuben povezan graf. Potem je $\sigma_G = (\tau \cup \theta)^\star = \mathcal{C}(\tau)$.*

LITERATURA

[1] T. Feder, *Product Graph Representations*, J. Graph Theory **16** (1992), 467–488.

[2] M. Garey, D. Johnson, *Computers and Intractability*, W. H. Freeman and Co., San Francisco 1979.

[3] R. L. Graham, P. M. Winkler, *On Isometric Embeddings of Graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 527–536.

[4] W. Imrich, *Über das schwache Kartesische Produkt von Graphen*, J. Combin. Theory Ser. **B**:11 (1971), 1–6.

[5] W. Imrich, *Embedding Graphs into Cartesian Products*, Graph Theory and Applications: East and West, Annals of the New York Academy of Sciences, vol. **576** (1989), 266–274.

[6] W. Imrich, J. Žerovnik, *Factoring Cartesian-Product Graphs*, J. Graph Theory **18** (1994), 557–567.

[7] J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, DMFA, Ljubljana 1986.

[8] D. J. Miller, *Weak Cartesian Product of Graphs*, Colloq. Math. **21** (1970), 55–74.

[9] S. Klavžar, *Grafovski retrakti*, doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, 1990.

[10] S. Klavžar, *Dinamični lokacijski problem*, Obzornik mat. fiz. **41** (1994), 178–186.

[11] G. Sabidussi, *Graph Multiplication*, Math. Z. **72** (1960), 446–457.

[12] V. G. Vizing, *The Cartesian Product of Graphs*, Vyčisl. Syst. **9** (1963), 30–43 (in Russian) [Angleški prevod: Comp. El. Syst. **2** (1966), 352–365].

[13] J. Žerovnik, *Some algorithmic results pertaining to Cartesian product graphs*, doktorska disertacija, Tehniška univerza Gradec, 1994.

Članek je nekoliko razširjen referat s prvega kongresa DMFA, ki je bil v Ljubljani od 20. do 22. oktobra 1994. Zahvaljujem se Sandiju Klavžarju za skrbno branje besedila in predlagane izboljšave.

VESTI

Dogovor o vzajemnosti med DMFA in AMS

Konec februarja smo dobili obvestilo, da je sprejet dogovor o recipročnosti med Društvom matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Ameriškim matematičnim društvom (American Mathematical Society ali kratko AMS). Tako se naši člani lahko vključijo v AMS po ugodnejših pogojih. Za leto 1995 tako po zagotovilih predstavnice AMS znižana članarina (uvrstili so nas med dežele s šibko valuto) znaša le 16 ameriških dolarjev. Seveda pa za to znižano članarino dobite lahko le eno od uradnih glasil AMS in se morate torej odločiti med Bulletin in Notices. Ustrezne formularje lahko dobite pri Petru Legiši, Jadranska 19, Ljubljana, tel. 265-061.

Peter Legiša

SUPERPREVODNOST

MARJAN LOGAR

Pacs 74.55.+h, 01.30.Pp

Opisani so preprosti poskusi z visokotemperaturnimi superprevodniki, s katerimi obravnavamo le elektromagnetne pojave, ki so merjenjem najbolj dostopni.

SUPERCONDUCTIVITY

Some simple experiments with high T_c superconductors are described dealing only with electromagnetic phenomena where the measuring can be easily performed.

1. Uvod

Visokotemperaturni superprevodniki omogočajo poskuse, ki so bili še pred nekaj leti težko izvedljivi. Zaradi velikega zvišanja kritičnih temperatur je ta pojav pritegnil zanimanje širokega kroga javnosti. Zato ne bo odveč, da tej temi posvetimo ta neprezahtevni zapis.

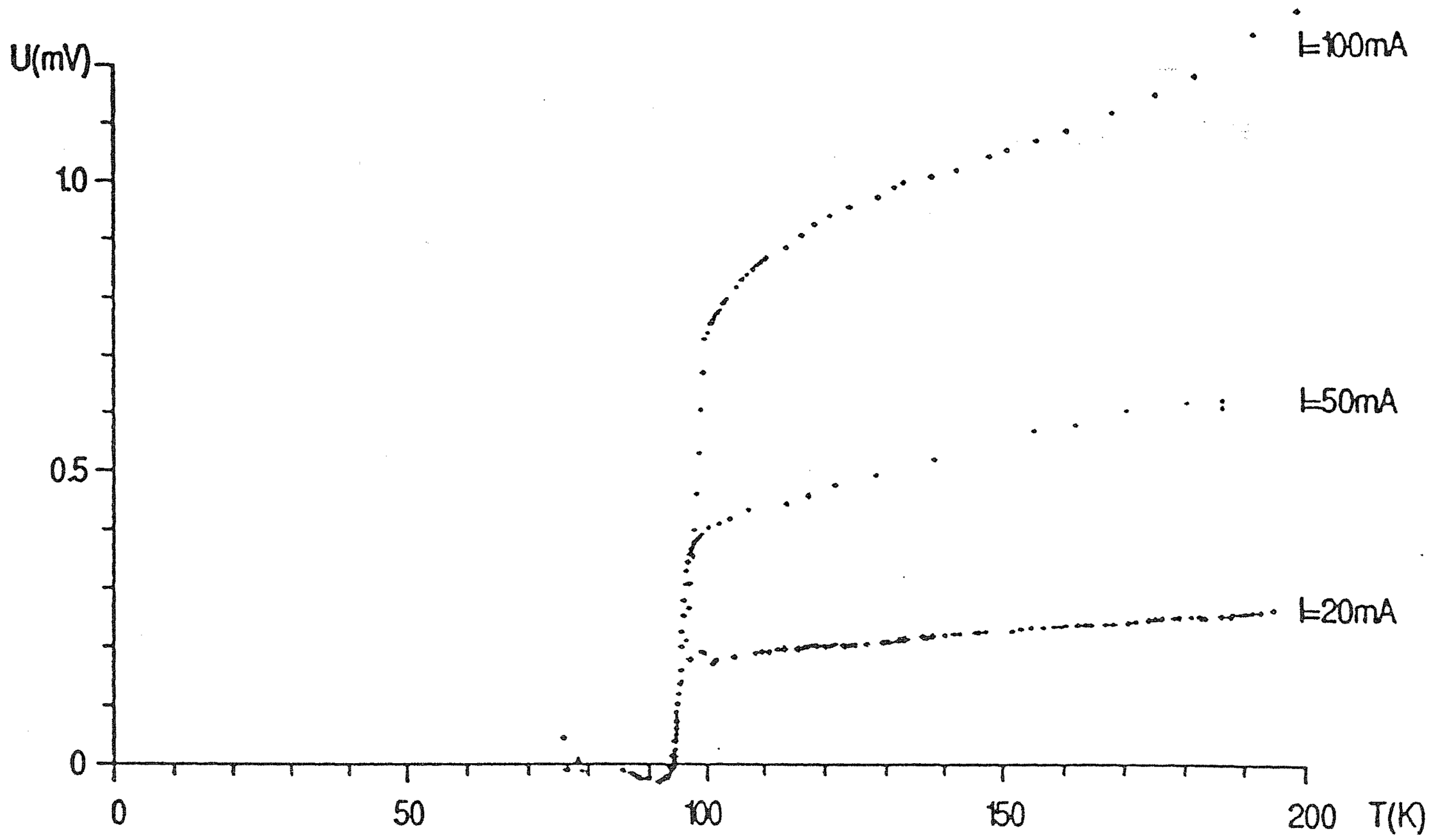
Opisani poskusi in meritve so bili opravljeni na Oddelku za nizkotemperaturne raziskave Raziskovalne družbe Joanneum v Gradcu poleti 1989 in 1990.

Z njimi demonstriramo osnovne lastnosti superprevodnikov. Uporabljeni superprevodniki so imeli sestavo $YBa_2Cu_3O_7$, ki se razlikujejo od superprevodnikov 1. in 2. vrste. Ta razlika se pokaže pri kvantitativnem obravnavanju, pri kvalitativnih demonstracijah pa ni bistvene razlike med njimi. Osnove delovanja superprevodnosti najdemo drugod [1,2,3].

2. Prehod iz normalnega v superprevodno stanje

Med bolj znanimi lastnostmi superprevodnikov je prenehanje upornosti v superprevodnem stanju. Precej nazoren, četudi ne najbolj natančen prikaz te spremembe je mogoče dobiti z merjenjem padca napetosti na superprevodniku, ko skozenj teče stalen tok, medtem ko temperaturo znižamo pod kritično.

Superprevodnik v obliki cevke z žičkami za napetost in tok smo vstavili v bakreno cevko zaradi izenačitve temperature po površini in zaradi zaščite cevke in kontaktov ter vse skupaj postavili v kriostat s tekočim dušikom. S približevanjem superprevodnika gladini tekočega dušika se je njegova temperatura nižala in z njo upor. Ta je upadal najprej počasi, v bližini kritične temperature T_c pa se je strmo znižal proti nič, kar priča o prehodu v superprevodno stanje. Kritična temperatura za dani superprevodnik ni odvisna od toka, dokler ta ne preseže kritične vrednosti. To je razvidno s slike 1, kjer je $U(T)$ padec napetosti na superprevodniku pri dani temperaturi sorazmeren z uporom.



Slika 1. Upadanje upora z nižanjem temperature, T_c ni odvisna od toka.

3. Sila na superprevodnik v magnetnem polju

Zanimiv in privlačen poskus je prikaz lebdečega superprevodnika v magnetnem polju. Zaradi na površju induciranega toka, ki prepreči prodiranje zunanjega magnetnega polja v notranjost, magnetna sila na ta tok premakne superprevodnik v območje šibkejšega polja.

Mogoče je opazovati lebdenje superprevodnika nad magnetom in tudi obratno [4–8]. Za uspešno demonstracijo je potreben dovolj močan magnet, vendar so s stabilnostjo ravnovesne lege težave. Zaradi majhne oddaljenosti superprevodnika od magneta pa je kvantitativno obravnavanje nemogoče. Z drugačno razporeditvijo smo se temu izognili.

Tuljavo kot vir magnetnega polja smo namestili tik ob superprevodnik v obliki tablete, obešene na dveh nitkah tako, da sta se njuni vodoravno ležeči osi ujemali, ko ni delovala magnetna sila. Po vključitvi je magnetno polje odrinilo tableto približno v vodoravni smeri, saj sta bili nitki dolgi v primerjavi z odmikom. S povečanjem toka skozi tuljavo se je večal odmik tablete od tuljave. Silo na tableto smo izračunali iz ravnovesnih pogojev.

V nadaljevanju smo računali, kot da se tableta odmakne v vodoravni smeri in da se njena geometrijska os ujema z geometrijsko osjo tuljave. Tako poenostavljen valjno simetričen problem omogoča, da iz predpostavljene porazdelitve magnetnega polja in električnega toka v tableti določimo tok ter izračunamo silo nanj. Tok je porazdeljen po vsej površini tablete. Vendar prispevka zaradi toka po prednji in zadnji strani tablete prispevata le nekaj odstotkov k skupni sili. Zato si oglejmo le silo zaradi toka po obodu tablete.

Če superprevodnik 1. vrste, ki povsem izrine magnetno polje iz svoje notranjosti, postavimo v magnetno polje tuljave Bt, ki ima zaradi osne simetrije le dve komponenti $\vec{B}_t = (B_{tr}, 0, B_{tz})$, se v njem zaradi Meissnerjevega pojava inducira tok, ki povzroča tako magnetno polje B_i, da je v no-

tranjosti vsota obeh nič: $\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_i = 0$. Videti je, kot da bi superprevodnik iz svoje notranjosti iztisnil polje. (Pri tem zanemarimo magnetno polje tik pod površjem v t.i. vdorni globini z velikostno stopnjo 10^{-8} m.)

Iz robnih pogojev za skupno polje na površini superprevodne tablete sledi, da je tangentna komponenta magnetnega polja nezvezna:

$$\vec{n} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{dI}{ds} \tau \,.$$

Pri tem smo upoštevali zvezo $B = \mu_0 H$ ter dejstvo, da v superprevodniku 1. vrste ni magnetnega polja. Integral magnetne napetosti po zunanji površini plašča v smeri polja in znotraj, kjer ni polja, da skupen tok po plašču tablete:

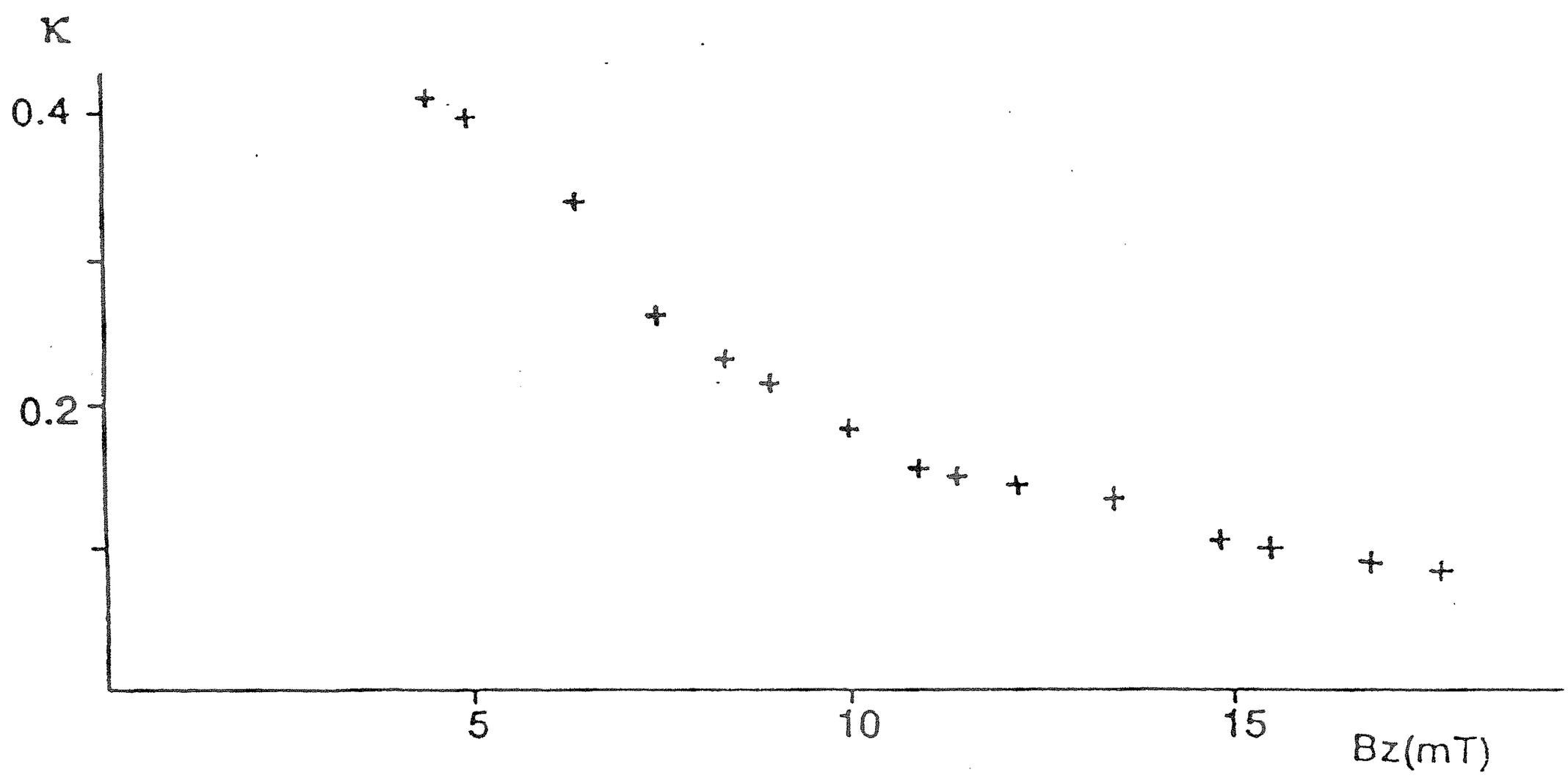
$$B(R)h = (B_{tz}(R) + B_{iz}(R))h = \mu_0 I \,,$$

kjer sta R in h polmer in debelina tablete. Komponento magnetnega polja induciranega toka $B_{iz}(R)$ ocenimo zaradi Meissnerjevega pojava kar s komponento magnetnega polja tuljave $B_{tz}(R)$. Od tod sledi za tok po plašču tablete vrednost

$$I = \frac{2h}{\mu_0} B_{tz}(R) \,.$$

Magnetno silo na tok I dobimo z enačbo $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. Zaradi valjne simetrije ostane le osna komponenta:

$$F = 2\pi R B_{tr}(R)\, I(R) = \frac{4\pi R h}{\mu_0} B_{tr}(R)\, B_{tz}(R) \,.$$



Slika 2. Razmerje med izmerjeno in izračunano silo na superprevodno tableto v odvisnosti od osne komponente magnetnega polja tuljave. Kvocient κ hkrati predstavlja delež izrinjenega magnetnega polja.

Vendar pa izrinjenje magnetnega polja v visokotemperaturnih superprevodnikih ni popolno, saj v tableti inducirani tok s svojim poljem ne kompenzira povsem zunanjega magnetnega polja. Če upoštevamo, da je tok v resnici manjši za faktor κ, lahko ta faktor ocenimo s kvocientom med izmerjeno in izračunano silo: $\kappa = \frac{F_{\mathrm{mer}}}{F}$. Zaradi manjšega induciranega toka je manjše tudi njegovo polje in kvocient k daje tako tudi delež iz superprevodnika izrinjenega magnetnega polja, kar kaže slika 2.

4. Poskusi s superprevodnim obročem

S superprevodnim obročem je mogoče preprosto izvesti nazorne poskuse, ki so razumljivi tudi srednješolcem brez globljega poznavanja osnov superprevodnosti.

Prikaz induciranih tokov.

Ko na superprevodni obroč v normalnem stanju postavimo magnet, zaznamo signal s Hallovo sondo, pritrjeno v osi obroča. Na obroč nalijemo tekoči dušik in ga tako ohladimo pod T_c. Signal začne naraščati, ko obroč prehaja v superprevodno stanje in tako izrinja magnetno polje iz svoje notranjosti v luknjo obroča. Po odstranitvi magneta ostane le signal zaradi superprevodnega obroča, vendar iste smeri kot poprej signal od magneta in obroča.

Če zatem obroč obrnemo, signal spremeni le smer, ne pa velikosti. Obroč se obnaša kot prenosna tokovna zanka.

Zemeljsko magnetno polje.

Če v normalnem stanju ohlajeni obroč, ležeč na Hallovi sondi, obrnemo, se zaradi zasuka obroča v zemeljskem magnetnem polju vedno pojavi enak signal. Iz enačbe $\Delta F = 2BS$ dobimo za B vrednost $5 \cdot 10^{-5}$ T, ki dovolj dobro predstavlja navpično komponento zemeljskega magnetnega polja.

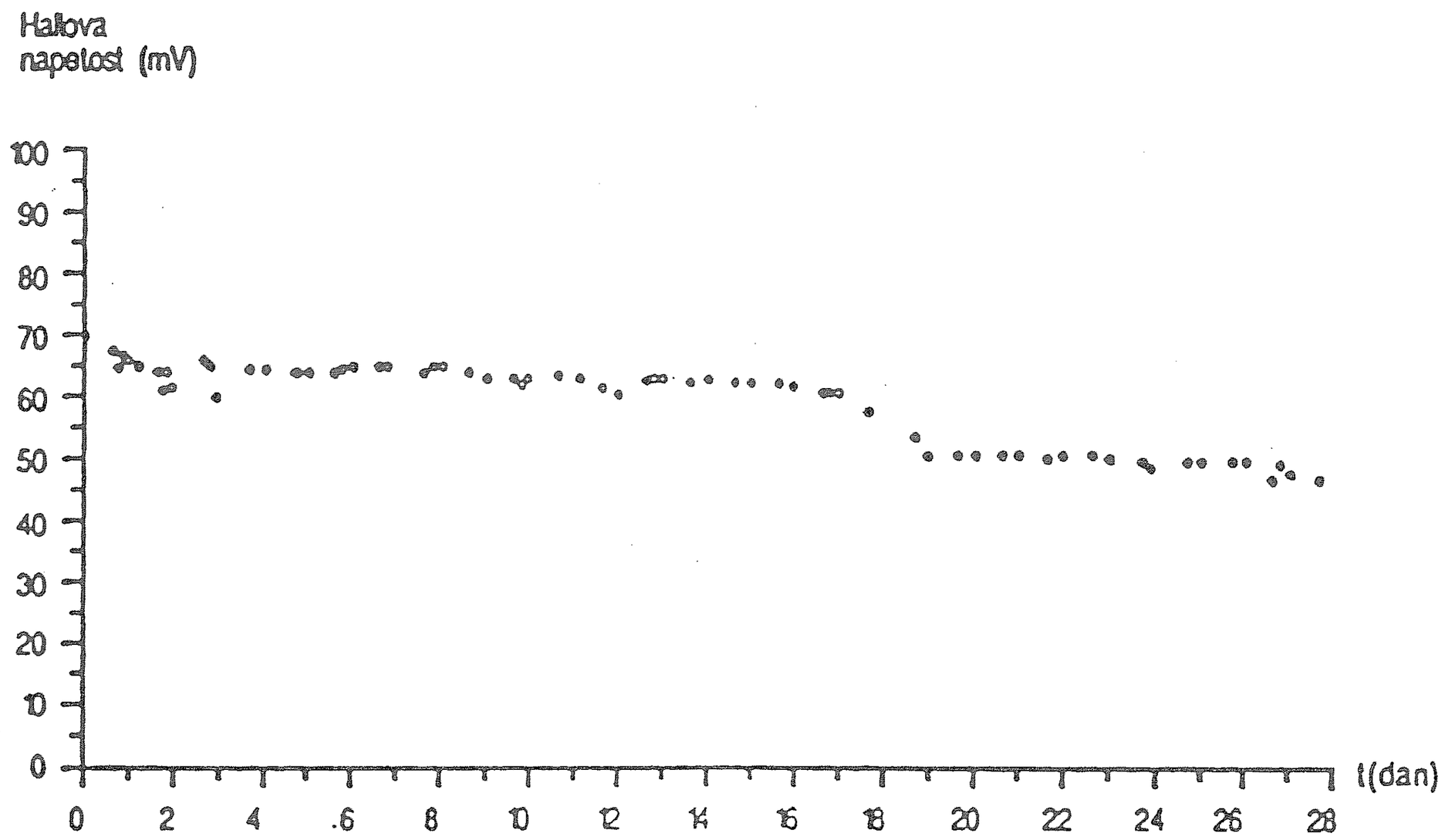
Časovno pojemanje trajnega toka v superprevodnem obroču.

Ob prehodu superprevodnika iz normalnega v superprevodno stanje se lahko upravičeno vprašamo, ali je upornost res povsem izginila ali pa se je tako znižala, da je zaradi končne občutljivosti naših merilnih naprav ne moremo več zaznati.

Magnetno polje v osi superprevodnega obroča, v katerem je tekel tok, je počasi slabelo. Če je to posledica upornosti obroča, je mogoče določiti zgornjo vrednost upora obroča s pomočjo enačbe

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-Rt/L},$$

kjer sta R in L upor in induktivnost obroča. V njem smo inducirali tok, ga vstavili v kriostat ter nato štiri tedne merili tok v obroču prek magnetnega polja v njegovi osi. Slika 3 kaže pojemanje magnetnega polja v osi obroča.



Slika 3. Pojemanje magnetnega polja v osi obroča s časom.

Kljub raztresenosti izmerjenih vrednosti je očitno stalno pojemanje magnetnega polja. Na posameznih mestih se pojavijo bolj skokovite spremembe, ki jih lahko povzročijo nevidne razpoke, katerih posledica je sprememba razporeditve toka v obroču, česar pa v računu ni mogoče upoštevati.

Induktivnost obroča smo ocenili kar s spodnjo enačbo, kot da tok teče enakomerno porazdeljen po obroču:

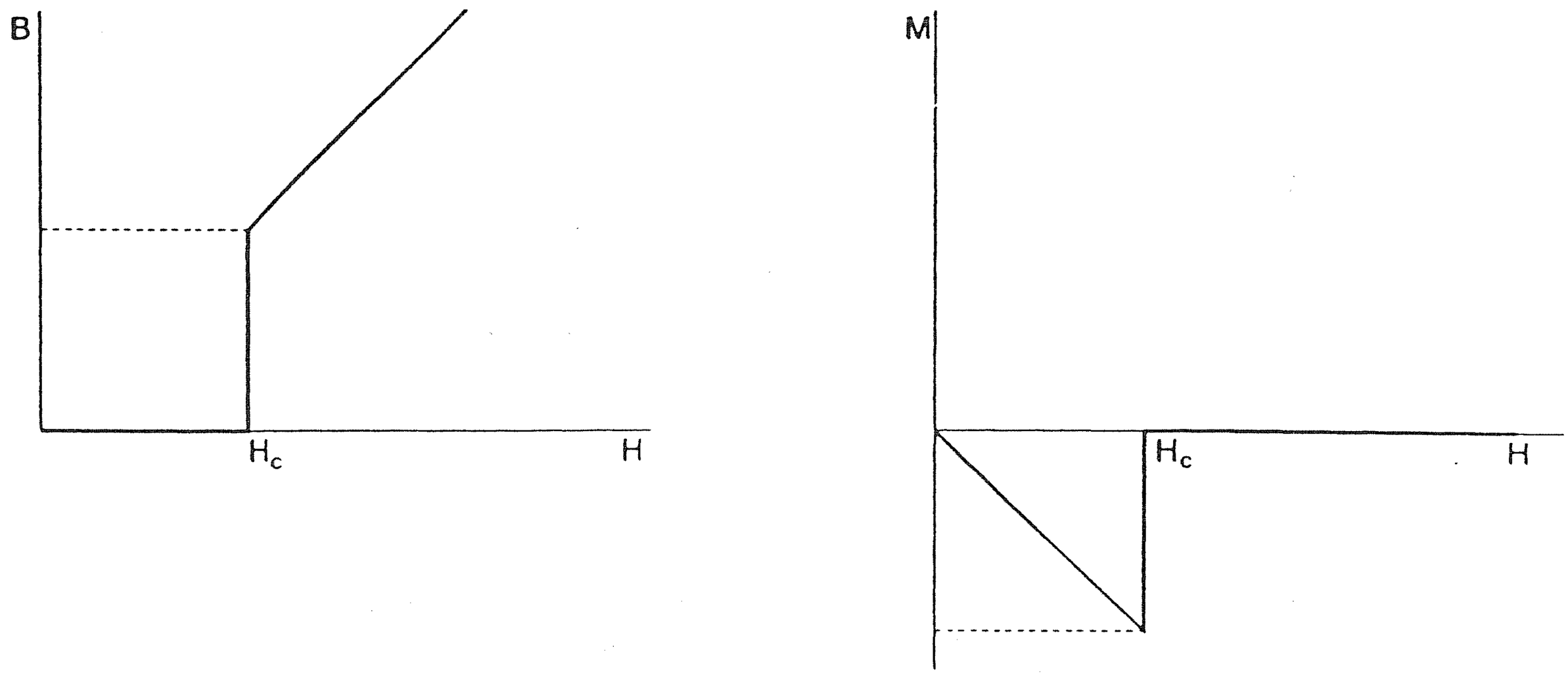
$$L = \mu_0 \frac{\pi}{24} \frac{d_2^4 - 4d_2 d_1^3 + 3d_1^4}{h(d_1 - d_2)^2},$$

in zanjo dobili $1{,}8 \cdot 10^{-8}$ H. Pri tem sta d_1 in d_2 notranji in zunanji premer, h pa višina obroča. Iz naklona, ki ustreza začetnim osemnajstim dnevom, smo za upor dobili $0{,}96 \cdot 10^{-15}\ \Omega$, za zadnjih deset dni pa $1{,}15 \cdot 10^{-15}\ \Omega$. Ustrezen relaksacijski čas $\frac{L}{R}$ je pri tem približno sedem mesecev. Za primerjavo povejmo še, da bi obroč iz bakra enakih dimenzij imel upor $2{,}6 \cdot 10^{-5}\ \Omega$, kar je za 10 desetiških redov več.

5. Magnetizacija visokotemperaturnih superprevodnikov

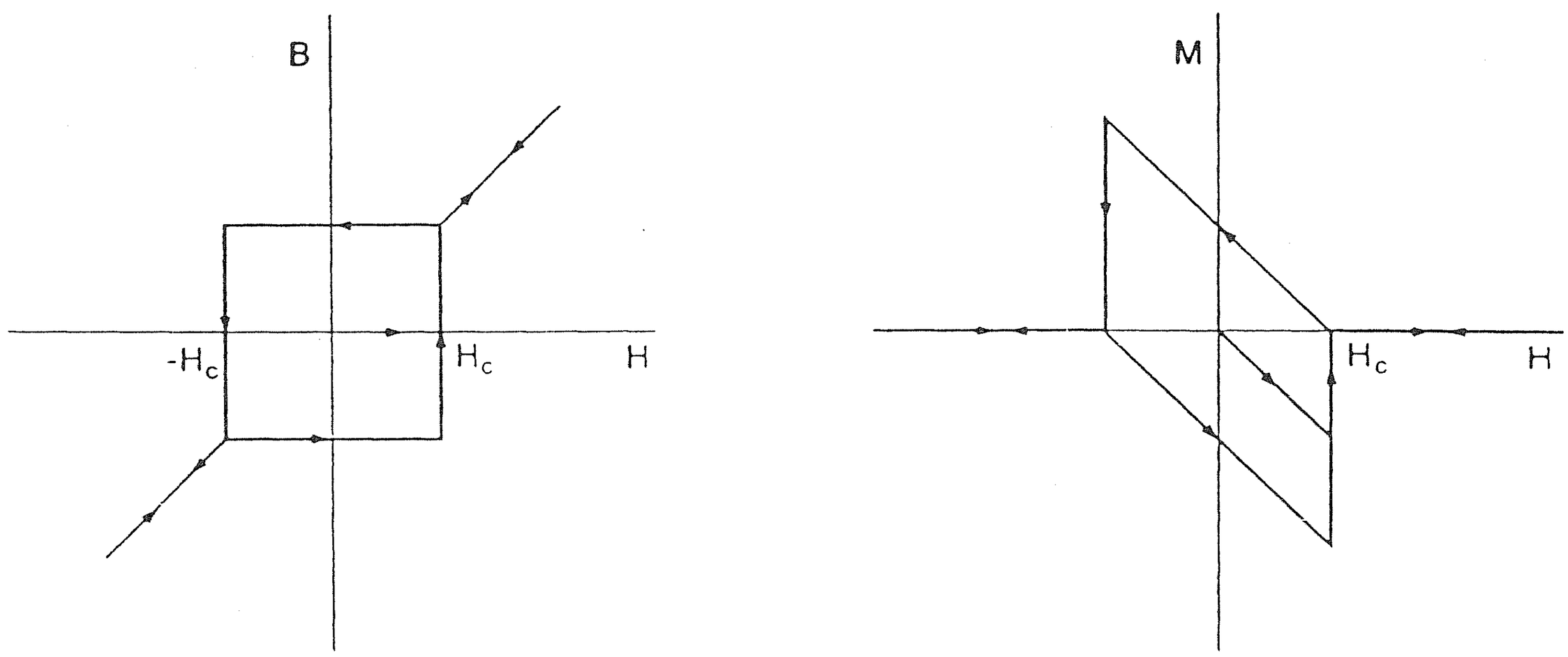
Pri visokotemperaturnih superprevodnikih ni popolnega Meissnerjevega pojava, kot je pri superprevodnikih 1. vrste, pač pa, kadar so v magnetnem polju, kažejo lastnosti superprevodnikov in idealnih prevodnikov.

Superpevodnik 1. vrste v zunanjem magnetnem polju, manjšem od kritičnega, po svoji površini inducira tok, katerega magnetno polje v notranjosti superprevodnika (magnetizacija $\vec{M}$) kompenzira zunanje magnetno polje. Skupno polje je tedaj $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, kjer je $\vec{H}$ jakost zunanjega polja. V notranjosti superprevodnika je $\vec{B} = 0$, ko H narašča proti kritični jakosti polja H_c, saj M narašča v nasprotni smeri. Ko H preseže H_c, na površini inducirani tok preneha teči, magnetizacija pade na nič in magnetno polje prodre v notranjost (slika 4).



Slika 4. Gostota magnetnega polja in magnetizacija v superprevodniku 1. vrste v odvisnosti od zunanjega polja. Črtkano je prikazan odziv idealnega prevodnika ob zmanjševanju zunanjega polja.

Ko zunanje polje zmanjšujemo proti nič, se pri H_c spet pojavi superprevodnost. B in M se po isti poti vračata v začetno stanje. Tukaj se pojavi razlika med superprevodnikom 1. vrste kot popolnim diamagnetikom in idealnim prevodnikom. Slednji bi ob zmanjšanju polja pod H_c obdržal magnetni pretok v svoji notranjosti, kar na sliki 4 kaže črtkana črta. Na sliki 5 sta prikazani ustrezna histerezna zanka in magnetizacija snovi z lastnostmi popolnega diamagnetika in idealnega prevodnika.

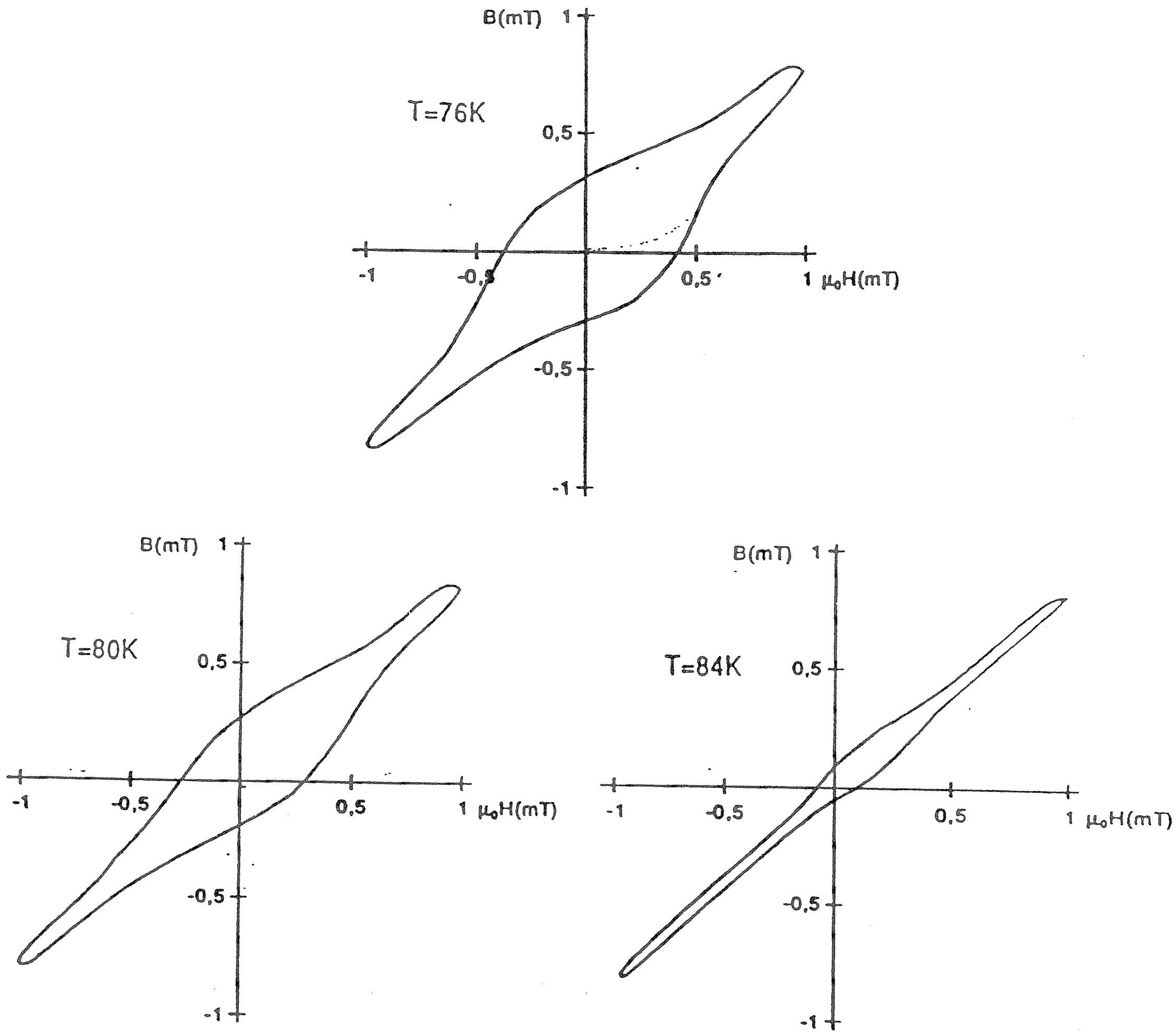


Slika 5. Histerezna zanka in magnetizacija superprevodnika, ki ujame magnetni pretok.

Visokotemperaturni superprevodniki kažejo takšne lastnosti, čeprav pri njih ni idealnega Meissnerjevega pojava. Če jih postavimo v zunanje magnetno polje, to prodre skozi območja normalne faze, skozi območja superprevodne faze pa ne. Pojavi se le delno izrinjenje ali zasenčenje zunanjega magnetnega polja. Z merjenjem gostote magnetnega polja v vzorcu je mogoče določiti povprečno magnetizacijo vzorca in tako tudi „kvaliteto" Meissnerjevega pojava.

Vzorec smo pripravili iz dveh tablet $YBa_2Cu_33O_7$ s premeroma 15,7 mm oziroma 15,5 mm ter višinama 3,9 mm oziroma 4,3 mm. Za merjenje magnetnega polja „v snovi" smo pripravili sendvič iz dveh superprevodnih tablet s Hallovo sondo med njima.

S spreminjanjem magnetnega polja tuljave magnetno polje med tabletama pokaže histerezo. Histerezne krivulje se spreminjajo s temperaturo vzorca (slika 6). Pri temperaturah nad T_c histereza povsem izgine. Iz enačbe $B = \mu_0(H + M)$ lahko izračunamo magnetizacijo M kot funkcijo zunanjega magnetnega polja, v katerem sta tableti, ali pa tudi kar kot funkcijo toka skozi tuljavo pri različnih temperaturah. Rezultati potrjujejo pričakovanja (slika 7). Koničasti repi v 2. in 4. kvadrantu na sliki 7 kažejo, da magnetizacija v normalnem stanju ni povsem enaka nič, kot je to pri idealizirani histerezni zanki (slika 5b), temveč narašča približno sorazmerno z zunanjim poljem.



Slika 6. Histerezne krivulje za izbrane temperature:
x os: zunanje magnetno polje ($\mu_0 H$) med -1 mT in $+1$ mT
y os: magnetno polje med tabletama (B).

Čeprav magnetnega polja nismo merili v superprevodniku, pač pa v tanki reži med dvema tabletama, domnevamo, da se izmerjeno magnetno

polje ne razlikuje veliko od polja v superprevodniku samem, saj je bila debelina Hallove sonde manj kot milimeter, s tem pa je bila tudi reža med tabletama majhna v primerjavi z njunima premeroma. Vidimo, da visokotemperaturni superprevodniki le delno izrinejo magnetno polje iz svoje notranjosti, kot smo že ugotovili pri sili na superprevodno tableto (slika 2). Največja vrednost negativne magnetizacije ($\mu_0 M = 0,5$mT) predstavlja le 50% največje vrednosti zunanjega magnetnega polja in se dobro ujema z največjo vrednostjo koeficienta κ za najšibkejše polje.

6. Sklep

Opisani poskusi s superprevodniki so lahko deloma demonstracijske narave, mogoče pa jih je izvesti tudi kot laboratorijske vaje. Seveda je za te treba že nekaj kriogenske opreme. V prvo skupino sodi prehod iz normalnega v superprevodno stanje, zatem le kvalitativen, a zelo učinkovit prikaz sile na superprevodnik, ponazoritev izrinjenja magnetnega polja iz obroča in ocena velikosti zemeljskega magnetnega polja.

V drugo skupino lahko postavimo merjenje upornosti ob prehodu iz normalnega v superprevodno stanje, merjenje sile na superprevodno tableto in razmišljanje o tokovni porazdelitvi v njej ter ob primerni opremljenosti laboratorija tudi merjenje histereznih krivulj pri različnih temperaturah. Časovno pojemanje trajnega toka v obroču in ocena upornosti bi bila zaradi trajanja primerna vaja za manjšo skupino.

Visokotemperaturni superprevodniki so pritegnili zanimanje širokega kroga javnosti. Zato lahko sklepni misli profesorja Strnada [9], da „je hotel prispevek le zbuditi zanimanje za superprevodnost, izzvati k razmišljanju in napeljati k dodatnemu branju", dodamo, da je naloga šole sedaj to zanimanje izrabiti, ga usmeriti in s tem pridobiti nove možnosti za poživitev in posodobitev pouka.

LITERATURA

[1] F. Cirkler, *Supraprevodnost*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953), 155.

[2] L. N. Cooper, *Teorija superprevodnosti*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962), 61.

[3] B. Slivnjak, *Supraprevodniki I. in II. vrste*, Obzornik mat. fiz. **19** (1972), 11.

[4] E. H. Brandt, *Rigid levitation and suspension of high-temperature superconductors by magnets*, Am. J. Phys. **58**(1) Jan. 1990.

[5] G. Koppelmann, J. Linders, H. Rehnert, *Experimente mit Hochtemperatur-Supraleitern in Magnetfeldern*, Didaktik der Physik, 1990.

[6] W. M. Saslow, *How a superconductor supports a magnet, how magneticaly "soft" iron attracts a magnet and eddy currents for uninitiated*, Am. J. Phys. **59**(1), Jan. 1991.

[7] E. A. Early et al., *Demonstrating superconductivity at liquid nitrogen temperature*, Am. J. Phys. **56**(1), July 1988.

[8] V. Osegura, R. Perez, J. Cruz, *Demonstration of possible applications of the Meissner effect using new High-T_c superconductors*, Eur. J. Phys. **10** (1989), 19–21.

[9] J. Strnad, *Superprevodnost*, Obzornik mat. fiz. **40** (1993), 110.

KAKO NAPISATI MATEMATIČNI TEKST

MILAN HLADNIK

Math. Subj. Class. (1991): 00-01

Članek podaja nekaj osnovnih napotkov za pisanje matematičnih tekstov in z resničnimi primeri iz študentskih seminarskih nalog opozarja na pogoste napake in pomanjkljivosti.

HOW TO WRITE A MATHEMATICAL TEXT

Some basic instructions for writing mathematical texts are given together with examples of frequent errors and flaws taken from students' seminary works.

Obzornik je že objavil članke o problematiki strokovnega pisanja (glej [5], [6]), vendar se zdi vseeno koristno, da od časa do časa nove generacije spomnimo na pravila dobrega pisanja. Kadar namreč vzamemo v roke pisni izdelek, seminarsko ali diplomsko nalogo, včasih tudi rokopis kakega matematičnega članka, ki naj bi ga objavili v slovenski reviji, smo pogosto razočarani, ne toliko nad vsebino kot nad načinom, kako je sicer primerna in zanimiva tema predstavljena. Avtor je imel morda dobro zamisel in je tudi vedel, kaj hoče povedati, vendar je to storil tako nespretno, z nepravilno uporabo besed in brez trdne logične povezave, da je tekst postal nerazumljiv in nejasen ali pa je celo izgubil smisel.

V tem sestavku zato skušamo opozoriti bodoče avtorje matematičnih tekstov, zlasti študente, ki morajo pisati te ali one matematične sestavke, na osnovna pravila in tudi na pogoste napake (vsi citati slabih stavkov so vzeti iz resničnih študentskih izdelkov). Seveda si ne lastimo izključne pravice do sodbe o pravilnem pisanju in nikakor ni naš namen, da bi o tem učili izkušene pisce. Pravila, ki jih navajamo na naslednjih straneh, so povzetek znanih besedil o tej temi (glej [3], [1], [2]), tako rekoč bolj ali manj oseben izbor iz dostopne literature. Kdo drug bi morda poudaril kakšno drugo pravilo, kaj dodal, izpustil ali celo spremenil.

1. Osnovna pravila

Smisel zapisane ali izgovorjene (javne) besede je *komunikacija* med ljudmi, to je *sporočanje* (misli, idej) med posamezniki. Zanima nas le komunikacija v znanosti, natančneje v *matematiki*. Drugače kakor pri drugih vrstah komuniciranja, ko gre včasih (npr. v politiki) tudi za angažiranje ljudi, vplivanje na njihova čustva itd., je v znanosti edini namen komunikacije *razlaga* (snovi). Razlagati pa pomeni razkrivati, ne skrivati. Torej je treba bralcu ali poslušalcu (prejemniku sporočila) delo čimbolj *olajšati* in ne otežiti. Predvsem je treba povečati njegovo zanimanje in vpogled (v snov).

Če želimo, da bo komunikacija uspešna, si moramo najprej odgovoriti na tri preprosta in naravna vprašanja: *Kaj* želimo sporočiti? *Komu*? *Kako*? (Vprašanje, *zakaj* to počnemo, pustimo v tem razmišljanju ob strani. Če svojih misli ne bi želeli sporočati drugim, bi pač molčali, ne bi svojih

prispevkov pošiljali v objavo oziroma ne bi aktivno sodelovali na seminarjih ali pisali diplomskih del.)

1. *Kaj* je vsebina (matematičnega) teksta? O čem želimo pisati? Ali sploh imamo kaj povedati? Ali snov dobro poznamo?

Halmos [3] trdi, da sta dva razloga, zakaj je tekst vsebinsko slab: (a) avtor nima ničesar povedati (ni prave vsebine), (b) avtor želi povedati preveč stvari (hkrati). Obstaja preprost test, s katerim ugotovimo, ali ima sestavek vsebino: skušajmo pripraviti čim krajši povzetek teksta; če tega ne zmoremo, prave vsebine verjetno ni.

Prvo pravilo: **Pišimo le o stvareh, ki jih dobro poznamo!**

2. *Komu* je sporočilo namenjeno? Za koga pišemo? Pred očmi je vedno treba imeti bralca in njegove potrebe. Kakšno je njegovo znanje? Kaj mu je treba še dodatno povedati? Predvideti je treba njegove težave in mu jih vnaprej olajšati.

Kuščer [5] pravi: „Misli si, da ti bralec ves čas med pisanjem gleda čez rame."

Drugo pravilo: **Ne pozabimo, za koga pišemo!**

3. *Kako* napisati tekst, da bo njegov namen dosežen? Predvsem ga je treba napisati *brez napak* (matematičnih, vsebinskih), *jasno in pregledno* ter (po možnosti) *zanimivo*. Skratka, napisati ga je treba v *dobrem slogu*.

Tretje pravilo: **Namen sporočila je razlaga, zato se izogibajmo vsem nejasnostim!**

V tem sestavku si bomo podrobneje ogledali značilnosti jasnega in preglednega pisanja. Da je treba pisati brez napak, je samo po sebi razumljivo, vprašanje zanimivosti pa ni tako preprosto. Kako se piše zanimivo? Kaj sploh je za koga zanimivo? Verjetno je za nas lahko nekaj zanimivo le, če se navezuje na zadevo, ki jo vsaj nekoliko poznamo. Nekaj, o čemer slišimo prvič in ni podobno nobeni stvari, o kateri smo že kdaj slišali, nam ne more zbuditi zanimanja. Seveda pa tudi premlevanje samih znanih reči na znan način ni posebno privlačno.

2. Odlike jasnega in preglednega izražanja

Najpomembnejše odlike dobrega sloga so poleg pravilnega pisanja in zanimivosti zlasti še naslednje:

(a) čvrsta organiziranost teksta,
(b) pravilen in lep jezik,
(c) natančnost izražanja,
(d) preprostost in razumljivost,
(e) iskrenost,
(f) inteligentnost,
(g) primerna oblika.

Oglejmo si te točke po vrsti. Vsaka od njih prispeva k večji *jasnosti* sporočila.

(a) **Čvrsta (in premišljena) organiziranost teksta.** To je morda od vsega najpomembnejše. Kaj vse spada pod dobro organiziranost?

1. Treba je izbrati primeren, nikakor ne predolg *naslov* teksta ter naslove posameznih poglavij in razdelkov. Odločiti se je treba, *kje bo kaj.* Sploh pa moramo premisliti, kaj je primerno *vključiti* v tekst in tudi, kaj *izpustiti.* Vedno navedemo le, kar je potrebno in koristno za bralca.

2. Izbrati moramo pameten (logičen) *vrstni red* podajanja snovi in premisliti, kaj potrebujemo prej, kaj kasneje. Dobro si je napraviti *načrt*, morda kar diagram poteka, kot je v navadi pri računalniškem programiranju.

3. Tekstu moramo dati *prave poudarke*, se pravi, da ne smemo izgubljati preveč besed s postranskimi zadevami. Z njimi bralca zgolj odvračamo od bistva. Zelo pomemben je primeren *uvod*, v katerem je treba poudariti *namen* in na kratko pojasniti *vsebino* teksta, da bo bralec takoj vedel, kaj lahko v njem pričakuje. To velja v manjši meri tudi za posamezne razdelke in celo odstavke. Prva in zadnja besedašta najvažnejši, ker ju večina bralcev najprej prebere, zato nikar pisati splošnih fraz, ki nič ne povedo!

4. Včasih nastane problem, *kako* sploh *začeti.* Vendar je to v resnici preprosto. Nekaj možnosti: a) napišemo kratek povzetek teksta, b) formuliramo problem, c) podamo domnevo, d) navedemo potrebno in zanimivo dejstvo, ki takoj vodi k jedru sestavka, e) začnemo s primerom, f) postavimo definicijo, g) zastavimo zanimivo vprašanje, h) skušamo odgovoriti na šest znanih in vselej možnih vprašanj (kdo, kaj, kje, kdaj, kako, zakaj). Edini pravili pri tem sta: prvič, *čimprej preiti k bistvu* zadeve, in drugič, *graditi na bralčevem znanju.* Če npr. začnemo preveč abstraktno, bralca odbijemo, ker ne ve, za kaj gre, in to zanj ni zanimivo.

5. Dobra organiziranost se kaže tudi med samim tekstom.

Kadar preidemo k novi temi, jo na kratko *uvedemo.* Tudi *stavke* med seboj *povezujemo* z besedami, kot so: „Tedaj...", „Potem ...", „Torej...", „Dobimo..." Stavki morajo logično slediti drug iz drugega. Bralcu mora biti v vsakem trenutku jasen status vsake trditve v tekstu (glej točko (e)).

Formulacije izrekov naj bodo jasne in čim krajše, po možnosti v enem stavku. Morebitne potrebne hipoteze, če jih je preveč, navedemo že prej (ali le enkrat, pri prvem izreku).

Priporočljivo je izrek najprej komentirati in šele nato formalno dokazati. Včasih seveda komentar ni potreben.

Izreke, trditve in definicije navadno *oštevilčimo* zaradi kasnejšega sklicevanja nanje. Ni pa treba, zlasti pri krajših sestavkih, s tem pretiravati. Sploh pa naj bo čim manj oštevilčenj raznih formul. Sklicujmo se le nazaj, vendar ne tik za izrekom. Včasih je bolje kakšno stvar (definicijo, rezultat) ponoviti. Znane izreke imenujmo (npr. Banachov izrek, Zornova lema itd.).

K dobri organiziranosti spadajo tudi razne malenkosti, ki so včasih zelo pomembne za (boljše) razumevanje.

Izogibajmo se *dodatnemu pojasnjevanju*, kot npr. v stavku „Če je n dovolj velik, velja $|a_n| < \varepsilon$, kjer je $\varepsilon > 0$." To je povrh še zavajajoče, saj je običajno n odvisen od števila ε in ne obratno.

Ne začenjajmo stavka *s simbolom*, npr.: „n-ti člen zaporedja naj bo...", „A ima moč kontinuuma." Vsak simbol, če se le da, uvedimo z imenom, torej raje: „Množica A ima moč kontinuuma." Imenovanje simbola je pomembno tudi zaradi natančnosti in jezika (pregibanje besed, lažja izgovarjava), npr.: „Vzemimo poljuben element [množice] A.", „Če je Y linearen podprostor [v, prostora] X,..." itd.

Ne pišimo *zaporednih simbolov*, ki so med seboj ločeni le s presledkom ali vejico, npr.: „Naj bo za vsak $x \in A$ $F(x)$ množica tistih...". Bolje: „Naj bo za vsak $x \in A$ množica $F(x)$ definirana z..." ali „Za vsak $x \in A$ naj bo $F(x)$ množica tistih..."

6. Čvrste logične zgradbe ne dosežemo že pri prvem zapisu. Načrt sestavka, organizacijsko shemo *dobro premislimo* in če je treba, tekst *večkrat napišimo*. Halmos priporoča pisanje (in planiranje) *v spirali* (glej [3]): Najprej napišemo 1. razdelek in se lotimo drugega. Ugotovimo, da je treba v 1. razdelku marsikaj popraviti, zato ga napišemo ponovno, končamo tudi 2. razdelek ter se lotimo tretjega. Nato (po potrebi) ponovno napišemo 1., 2. in 3. razdelek itd. Držimo se torej zaporedja 1-12-123-1234-12... Veliko dela? Res je, toda nič ne pomaga. Profesor Kuščer pravi v [5]: „Kdor meni, da je že njegov prvi zapis dober, je bodisi genialen bodisi (bolj verjetno) ošaben." Danes, ko so nam na voljo računalnik in različni programi za urejanje tekstov, ki omogočajo dodatno popravljanje in dodajanje besedil, je to delo veliko lažje kot nekoč.

(b) Pravilen in lep (slovenski) jezik. Držimo se *standardov* knjižnega jezika, slovnice in pravilne skladnje. Upoštevajmo *natančen pomen besed* in pišimo *tekoče*.

1. *Slovnična pravilnost* je gotovo pomembna. Upoštevati je treba nekatere posebnosti slovenskega jezika (pregibanje besed, uporaba dvojine, dvojno zanikanje, pravilna raba ločil itd.). Uporabljajmo pravopis! Pri tem lahko včasih nastanejo hudi problemi. Pravilno je na primer reči „Množica A ni nikjer gosta.", ne pa „Množica A je nikjer gosta." (angleško „The set A is nowhere dense."). Toda kako naj prejšnji stavek zanikamo? Predlog: „Množica A je nekje gosta."

Pogosta napaka je nepravilna raba besed *vsak* in *noben*, kot npr. v stavku „Množica A_i ne vsebuje odprte krogle – za vsak i." iz neke seminarske naloge. Mišljeno je bilo seveda: „...za noben i.", kar dokazuje pomišljaj (brez njega bi stavek razumeli v smislu, da „množica A_i za kakšen indeks i ne vsebuje odprte krogle"). Vidimo torej, kako je za pravilno razumevanje potrebna natančnost pri izražanju. Čeprav matematikom ta ne bi smela biti tuja, pri pisanju pogosto delamo napake.

2. *Lep in tekoč jezik* priča o avtorjevem posluhu za jezik. Naštejmo nekaj pravil.

Vedno pišimo cele stavke, tudi če vsebujejo matematične izraze. Le-te imamo za del stavka, tudi če so pisani sredinsko; za njimi postavljamo ločila v skladu s pravopisnimi pravili. Stavek zapišimo tako, da ga bomo lahko tudi gladko prebrali.

Stavki naj bodo med seboj povezani z ustreznimi besedicami. Seveda morajo biti v istem odstavku tudi vsebinsko povezani (Kuščer [5]: „Ne lepiti skupaj neodvisnih misli.").

Izogibajmo se „grdim" (se pravi, v knjižnem jeziku prepovedanim ali nepriporočljivim) besedam, kot so: „izgleda", „se nahaja", „nastopi", „postopamo", „s pomočjo", „služi", „smatramo", „obnašanje" in še mnoge druge.

Tujke lahko uporabljamo. Ni jih dobro na silo sloveniti oziroma si izmišljati svojih, po vsej sili originalnih prevodov. Če nimamo lepih, že uveljavljenih slovenskih izrazov, je bolje (bolj razumljivo) uporabiti tujko.

Pogostna besedna zveza „tako da" zveni angleško („such that"), npr. v stavku „Potem obstaja funkcija f, tako da so vse njene vrednosti..." Bolje: „Potem obstaja taka funkcija f, da so vse njene..." Seveda se tudi zvezi „tako da" ne moremo vselej izogniti.

Uporabljajmo čim manj okrajšav za običajne besede. Grdo je npr.: „Če je $\varepsilon > 0$ za $\forall n > m \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$." Znake simbolne logike (implikacije, kvantifikatorje itd.) prihranimo za tekste, ki so namenjeni logiki, v običajnem matematičnem besedilu pa raje uporabljajmo normalne slovenske izraze, katerih okrajšave naj bi bili omenjeni simboli, torej „vsak" namesto $\forall$, „sledi" namesto $\Rightarrow$ itd. Poleg tega je omenjeni stavek, tudi če ga zapišemo „po slovensko", lep primer nerazumljivega izražanja. Bralec naj za vajo sam poskuša razvozlati njegovo vsebino in morda odkriti, kaj je avtor imel v mislih, pa je zaradi nenatančne uporabe besed in matematičnih izrazov povsem zgrešil smisel.

V navadi je pisava v prvi osebi množine („Pokažimo...", „Če postavimo...", „Definirajmo..." itd.). To je bolj objektivističen način pisanja, poleg tega pa daje nekakšen občutek povezanosti med avtorjem in bralcem oziroma občutek sodelovanja bralca pri matematičnem ustvarjanju. Izjema je dopustna pri izrazito osebnih, npr. spominskih, zapisih.

(c) Natančnost izražanja. To je zelo pomemben princip. Zajema *pravilno in usklajeno rabo* besed in simbolov, *popolnost* stavkov, formulacij in argumentov ter *navajanje virov.* Paziti pa je treba, da natančnosti ne zamenjamo s pedantnostjo, ki pomeni pretirano skrb za točno izražanje.

1. *Pravilna in usklajena raba besed in simbolov.* Uporabljajmo *prava* imena in *razločujmo* med koncepti. Npr.: Množica $\{x; x \leq 1\}$ je krogla, ne sfera. Obrat implikacije $A \Rightarrow B$ ni $A \not\Rightarrow B$.

Razločujmo med funkcijo in njeno vrednostjo, npr.: „Funkcija $x^2 + 1$ je soda." ni dobro, bolje „Funkcija $x \mapsto x^2 + 1$ je soda." Prav tako ni dobro reči „množica z mero $\mu = 0$"; μ je namreč funkcija, samo njena vrednost na dani množici je 0. Razločujmo med zaporedjem (kot funkcijo) in njegovo zalogo vrednosti (kot množico); ne pišimo „Unija zaporedja merljivih množic je merljiva množica.", ampak npr. raje „Števna unija merljivih množic je merljiva množica."

K tej točki spada tudi navedba *pravega* vzroka (razloga, argumenta). Poglejmo si npr. stavek „Ker sta x in y obrnljiva, sta v (algebri) B tudi xy

in $(xy)^{-1}$." Produkt xy gotovo ni v B zaradi obrnljivosti elementov x in y, temveč zato, ker je algebra B zaprta za množenje.

Nekatere besede imajo v vsakdanjem jeziku drugačen pomen, zato je treba pri formulaciji paziti, da se izražamo nedvoumno. Spominjam se, da sem nekoč še kot asistent dal študentom naslednjo nalogo „Pri poljubnem realnem številu a izračunajte determinanto matrike..." Elementi v matriki so bili odvisni od parametra a in mišljeno je bilo, naj študentje nalogo rešijo splošno. Ali je sploh treba povedati, da je tri četrt študentov poljubnost števila a razumelo dobesedno in si izbralo $a = 1$ (kar, mimogrede rečeno, glede izračuna determinante niti ni bila najpreprostejša možnost)?

Ne uporabljajmo besed v prenesenem pomenu, zlasti se izogibajmo mrtvim rečem pripisovati lastnosti, ki jih imajo ljudje, npr. „Rezultati kažejo...", „S stališča kompleksnih števil...", „Tako definirana metrika se često sklicuje na krepko topologijo v X." Zadnji stavek je tudi do skrajnosti izumetničen (glej točko (d)).

Posebna težava je z (oziralnimi) zaimki; dobro moramo paziti, na kaj se nanašajo. Primer: „Če je število x večje od y, ga zmanjšamo." „Spektralni radij je tisti najmanjši radij zaprtega diska s središčem v koordinatnem izhodišču, ki vsebuje ves spekter." Pomislimo s tem v zvezi na poučen primer, ki ga navaja Kuščer v [5]: „Če otrok ne mara svežega mleka, ga skuhaj." Ali, kot je rekel mojster kovač svojemu vajencu: „Vzel bom podkev iz ognja. Ko ti bom pokimal z glavo, krepko udari po njej." [4]. Žal ne vemo, kaj se je potem zgodilo s kovačem.

Pomembna je tudi *usklajena* raba besed in oznak. V ulomku a/b sta a in b števec in imenovalec, v kvocientu pa deljenec in delitelj. V enačbi je x neznanka, v enakosti pa spremenljivka. Surjekcija f preslika množico A na množico B (in ne v množico B). Taka usklajenost spada tudi v notranjo estetiko (glej točko (g)).

2. *Popolnost stavkov, formulacij in argumentov.* Vse pojme in simbole, ki jih uporabljamo, moramo pred tem *definirati.*

Ne uporabljajmo *odprtih stavkov* in nevezanih spremenljivk. Prav tako ne smemo mešati vezanih in nevezanih spremenljivk. Npr. „Pokazati moramo, da je [za vsak $x \in A$] množica $F(x)$ kompaktna." (Tu je bila $F(x)$ definirana za vsak x iz neke množice A, element x pa prej ni bil posebej izbran.)

Zaradi nepopolnosti in *površnosti* lahko pride do napake: „Zaprt podprostor je druge kategorije." (v sebi, ne pa v celem prostoru), „Funkcija je enakomerno zvezna." (treba je povedati kje, na katerem intervalu), „Velja $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0$, $x \in A$ in dovolj velika m in n." (Ali sta m in n odvisna od x ali ne? Kaj pomeni „dovolj velika"?), „Za vse x obstaja tak y ..." (Bolje „za vsak x", prav pa je „obstaja y, da za vse x velja...", kar ima seveda drug pomen). Naslednji stavek, ki ga pogosto dam študentom kot negativen zgled, je nepopoln in zato napačen, poleg tega pa tudi izumetničen. „Za vsako podmnožico A v X velja, da je njeno zaprtje množica vseh takih $x \in X$, za katere obstaja konvergentno zaporedje (a_n) s členi v A." Kako bi to prav in lepše (krajše) povedali?

Popolnost argumentov pomeni, da česa ne pozabimo dokazati. Za dokaz trditve „S predpisom $Tx = y$ je podan omejen linearen operator iz l^1 v l^2." moramo npr. preveriti, ali T sploh preslikuje iz l^1 v l^2, ali je preslikava linearna in ali je omejena v smislu normiranih prostorov.

Pišimo tako, da *izpolnimo pričakovanja bralca.* Če npr. napišemo „ne samo...", mora slediti „ampak tudi...", ali „na eni strani...", kasneje „na drugi strani...", itd. Če omenimo več reči z namenom, da jih bomo pozneje obdelali, moramo to res storiti (v istem vrstnem redu in popolno).

3. *Navajanje virov.* Tudi to spada k natančnosti (vestnosti, popolnosti). Kadar kaj privzamemo, vedno navedimo vir (razen za splošno znana dejstva). Med tekstom označimo vir samo s številko v oglatem oklepaju. Na koncu je seznam literature, kjer so citirani bistveni podatki o virih.

(d) Preprostost in razumljivost. To je še en, prav tako važen princip, ki prispeva k jasnosti.

1. Glavno pravilo je *ne pisati izumetničenih* in dolgih, nepreglednih *stavkov* (Kuščer [5]: „Povej tako, kot bi povedal preprost človek."). Nekaj zgledov izumetničenih in kompliciranih formulacij smo že imeli. Tu je še nekaj resničnih cvetk: „Naj obstajata dva elementa x in y, pri pogoju, da je $x \neq y$.", „Če je $x \in B$, potem je $x + x - x^2 = x + x - x = x$, ker je x idempotent.", „Jasno je, da če je $F = \cap_p F_p$, potem je $mF > 0$." Začetniki pogosto uporabljajo zvezo „velja, da je ...", namesto da bi preprosto rekli „velja ..."

2. Izogibajmo se *nepotrebnim besedam*, kot npr. v naslednjih dveh zgledih: „Če je n *dano* naravno število...", „Enačba *nam* pove..." Omenjanje nepotrebnih (irelevantnih) reči zavaja. Npr. „V *enostavni* komutativni algebri *z enoto* velja $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$." Izogibajmo se *ponavljanju*, prav tako praznemu besedičenju, uvajanju nepotrebne terminologije in simbolov itd. Ponavljanje istih reči (dokazov), kot tudi pretirano pojasnjevanje, prej škodi kot koristi.

3. Bodimo torej *kratki*, vendar spet ne preveč, ne odsekani. Kuščer pravi [5]: „Ne pišimo, kot da bi pisali uradni list." Stavki naj bodo lepo, tekoče povezani. Nizanje formul drugo za drugo kot na tabli je pogosta napaka začetnikov. Ko pišemo, skušajmo vsako misel, vključno z matematičnimi izrazi in formulami, naglas prebrati.

4. K preprostosti spada tudi *izogibanje* (pretirani) *abstrakciji* (vsaj na začetku) in izhajanje iz *konkretnih primerov* (navesti primere, protiprimere, ilustrirati, zbuditi zanimanje). „Če napišeš dvakrat tako konkretno, kot misliš, da je potrebno, je še vedno samo pol toliko konkretno, kot bi moralo biti" [2].

(e) Iskrenost. Namen razlage *ni zavajati* bralca, niti nenamerno, še manj pa seveda namerno. Kaj mislimo z iskrenostjo oziroma poštenostjo?

1. *Nepošteno* do bralca je npr., če neko razlago ali izpeljavo preskočimo, uporabljajoč frazo „očitno je" ali „lahko je videti", sami pa smo se z njo

mučili ves teden. Tudi če je avtorju zadeva povsem očitna, to morda ne velja za bralca? Pa tudi avtorjevo razumevanje se s časom zmanjšuje. Iz izkušnje vemo, da nam čez mesec dni lastni tekst ni več tako domač in argumentacija ne več tako zelo nazorna. Vedno velja pravilo: če že napišemo „očitno je", se prepričajmo, da je stvar vsaj pravilna! Pogosto so namreč prav „očitne resnice" vir napak, ker jih nihče ne preverja. Z uporabo besede očitno moramo biti torej zelo previdni. Če se kdaj izkaže, da kljub našemu zatrjevanju zadeva sploh ni očitna, izgubimo bralčevo zaupanje in le-ta nam zlepa ne bo več verjel na besedo.

2. Drugo pravilo iskrenosti oziroma poštenosti do bralca pravi, da moramo pri vsaki napisani misli ali trditvi pojasniti, kakšen je njen položaj v tekstu. Morda je to le naša domneva (povejmo!), morda je splošno znana resnica (povejmo!). Morda ni tako splošno znana resnica, vendar za nas ni toliko pomembna, da bi jo dokazali (povejmo in citirajmo vir, kjer lahko bralec najde dokaz!). Morda jo bomo dokazali kasneje (povejmo!). Morda se jo da izpeljati iz prejšnjih rezultatov na podoben način, kot smo to storili v obravnavanem primeru, pa ne želimo ponavljati argumenta (povejmo in prepustimo dokaz bralcu z nekaj nujno potrebnimi napotki).

3. Pazimo, da bo tekst *primeren* in uravnotežen, da ne izdaja zlagane lahkotnosti o težkih rečeh ali da nima videza težavnosti, če je v resnici ni. Skratka: ne zavajajmo bralca!

(f) **Inteligentnost**. Ne pozabimo, da ne pišemo za računalnik, stroj, ampak za inteligentno bitje – človeka. Zato si zapomnimo naslednje:

1. Marsikatero preprosto preverjanje in izračunavanje sicer znanih reči izpustimo (seveda povejmo, da izpuščamo podrobnosti). Te bo bralec sam dopolnil, če je zainteresiran, ali pa bo včasih verjel na besedo.

2. Tudi v dokazih je marsikdaj bolje povedati samo ideje (to pa temeljito, da bo bralec imel na voljo dovolj podatkov za izpopolnitev vrzeli), kot pa pedantno in formalistično izdelati dolgovezen, a preprost dokaz. Vse je seveda odvisno tudi od tega, komu je pisanje namenjeno.

3. Halmos navaja v [3] naslednji primer: „Naj bo $\varepsilon > 0$. Vzemimo $\delta = (\varepsilon/(3M^2+2))^{1/2}$ in $|x - x_o| < \varepsilon$." Potem na koncu daljšega računa dobimo npr. „$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$." Ta prijem, ki je pogost tudi v knjigah, ima prednost, da je pravilnost izpeljave lahko preverljiva (to bi zmogel tudi stroj), ni pa vnaprej razumljivo, zakaj vzeti ravno tak δ. Razumevanje pa je lastnost človeka in nadvse pomembna tudi v matematiki.

(g) **Primerna oblika**. Ne nazadnje tudi primerna oblika prispeva k preglednosti pisanja, tako notranja (vsebinska) kot zunanja (vizualna). Pri tem ima seveda pomembno vlogo estetika.

1. *Notranja (vsebinska) estetika.* Predvsem moramo izbrati primerno notacijo (abecedo, črke, znake). Važna je njihova usklajena uporaba (harmonija). Npr. „$ax + by$" ali „$a_1x_1 + a_2x_2$" je lepše kot mešano, npr. $a_1x + a_2y$. Črke navadno nastopajo v parih ali trojicah, npr. (a, b), (m, n), (a, b, c), (x, y, z), (p, q, r). Pogosto pomaga pametna uporaba velikih in malih črk

ter črk drugih abeced (npr. grške). Paziti pa je treba na ustaljen pomen nekaterih črk, npr. črke e ali π. Bolje je spoštovati tradicijo, kot si izmišljevati nove oznake.

2. *Zunanja oblika.* Ko pošiljamo tekst v objavo skupaj s poprejšnjo recenzijo, ga natipkamo na list formata A4, na eno stran, s primerno širokim robom (2–4 cm, levo 4 desno 2, Kuščer priporoča na vseh straneh rob 3 cm) in dvojnim (maksimalnim) razmikom (zaradi nujnih popravkov). Vsako stran razen naslovne oštevilčimo. Iz praktičnih razlogov vedno oddamo le kopijo. Večkrat se je že zgodilo, da se je original med pošiljanjem izgubil ali poškodoval.

Na naslovno stran napišemo: levo zgoraj, kam (komu) je tekst namenjen (seminar, za objavo v reviji, poročilo itd.), desno zgoraj kraj in datum, na sredo spodaj naslov teksta, pod naslov ime in priimek avtorja (avtorjev) ter pod njim (delovno) adreso (ki jo potrebuje pošta) za primer pisnega komuniciranja. Naslov včasih napišemo tudi na koncu sestavka.

Globalni vizualni vtis dobimo s poudarjenimi naslovi razdelkov, poudarjenimi izreki in trditvami, posledicami, definicijami, opombami, dokazi (velike začetnice). Konec dokaza včasih označimo z QED ali s posebnim simbolom, npr. majhnim kvadratom (*halmosem*) $\square$. Izreke oštevilčimo, prav tako definicije ipd. Pomembne besede ali na novo uvedene pojme podčrtavamo ali pišemo kurzivno. Pomembna je tudi prostorska razporeditev: umik odstavkov, razmik med odstavki (minimalen, več pa pred izreki in za njimi). Obsežnejše formule pišemo v sredino, skupaj s potrebnimi ločili, saj so del stavka, manjše (krajše) formule so lahko med tekstom. Matematične izraze delimo pri $=$, $+$, $-$, ne pa pri $\cdot$ ali $:$ ali $/$. Besede delimo po pravilih knjižnega jezika.

Ne nazadnje mora biti rokopis, ki ga oddamo v branje drugim, čitljiv, zato iz pisalnega traku ne iztisnimo še zadnjih molekul barve, ampak trak prej zamenjajmo.

Za sklep tega sestavka si zapomnimo: dobro pisati je *umetnost*, tako kot je umetnost dobro razlagati ali poučevati. Učimo se je iz vzorno napisanih tujih in domačih matematičnih tekstov! Opazujmo druge, kako pišejo (in predavajo) ter se učimo na njihovih napakah! Učimo pa se tudi na napakah, ki jih pri pisanju storimo sami!

LITERATURA

[1] R. Barras, *Scientists Must Write, A guide to better writing for scientists, engineers and students*, Chapman and Hall, London 1978.

[2] R. P. Boas, *Can we make mathematics intelligible*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 727–731.

[3] P. R. Halmos, *How to write mathematics*, Selecta-expository Writing, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

[4] E. Jurič, *1001 šala, Za mlade od 7 do 77 let*, Ljubljana 1993.

[5] I. Kuščer, *O strokovnem pisanju*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 211–219.

[6] J. Lapajne, *Zadrege strokovnega pisanja*, Obzornik mat. fiz. **35** (1988), 159–160.

NOVE KNJIGE

BOHTE, Z., Numerično reševanje sistemov linearnih enačb, DMFA Slovenija, Ljubljana 1994, 204 str.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je v letu 1994 izdalo nov učbenik z naslovom Numerično reševanje sistemov linearnih enačb profesorja Zvonimirja Bohteta. Kot pove že naslov, se knjiga ukvarja z osnovnim problemom numerične analize, z numeričnim reševanjem sistemov linearnih enačb. Knjiga ima šest poglavij, v katerih so z jasnostjo, ki je lastna prof. Bohtetu, razloženi principi reševanja sistemov linearnih enačb.

V uvodu najdemo osnovne pojme numerične linearne algebre, razne norme, ocene in elementarne matrike, to je gradnike numerične linearne algebre.

Poglavje Občutljivost in ocene napak razlaga, kako lahko apriorno ocenimo napake, ki nastanejo zaradi netočnih podatkov. Seznanimo se s pojmom spektralne občutljivosti, ki z enim številom pove, kako velike utegnejo biti napake v rezultatih, če znamo oceniti napake v podatkih. Proti pričakovanju ta pojem nima zveze z determinanto matrike.

V poglavju Eliminacijske metode je temeljito obdelana Gaussova eliminacija, najstarejša in najbolj znana metoda. Tu zvemo, da je Gaussova eliminacija pravzaprav trikotni razcep matrike in da praviloma terja pivotiranje, ki naj prepreči rast izračunanih elementov in s tem rast zaokrožitvenih napak, kar je pokazano v četrtem poglavju. Tu zvemo tudi nekaj o posebnih matrikah, za katere je Gaussova eliminacija še posebno imenitna.

Analiza zaokrožitvenih napak podrobno opiše in oceni zaokrožitvene napake, ki nastanejo med reševanjem. To poglavje nas prepriča, da je pivotiranje res pomembno, pa tudi, kdaj ga lahko brez škode opustimo.

V poglavju Ortogonalne metode zvemo za dve ortogonalni metodi. Nadalje zvemo, da so ortogonalne metode absolutno stabilne, a da se jih v splošnem primeru ne splača uporabljati, ker Gaussova eliminacija ni nič slabša. Izjema so seveda predoločeni sistemi linearnih enačb – metoda najmanjših kvadratov – kjer so ortogonalne metode še posebno pomembne.

Iterativne metode so najbolj pomembne pri velikih razpršenih sistemih, kakršni nastanejo z diskretizacijo (predvsem parcialnih) diferencialnih enačb. Tu srečamo Jacobijevo, Seidlovo in SOR iteracijo, pa še gradientne metode in metodo konjugiranih gradientov.

Vsako poglavje se konča z zbirko nalog, ki je po obsegu sorazmerna s pomembnostjo poglavja.

Egon Zakrajšek

OBVESTILO

Z letom 1995 uvajamo pri DMFA Slovenije novost. Študentom pri plačilu celoletne članarine priznamo 50% popust, če poravnajo članarino v prodajalni Komisije za tisk in predložijo indeks.

Andreja Šafarič