

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

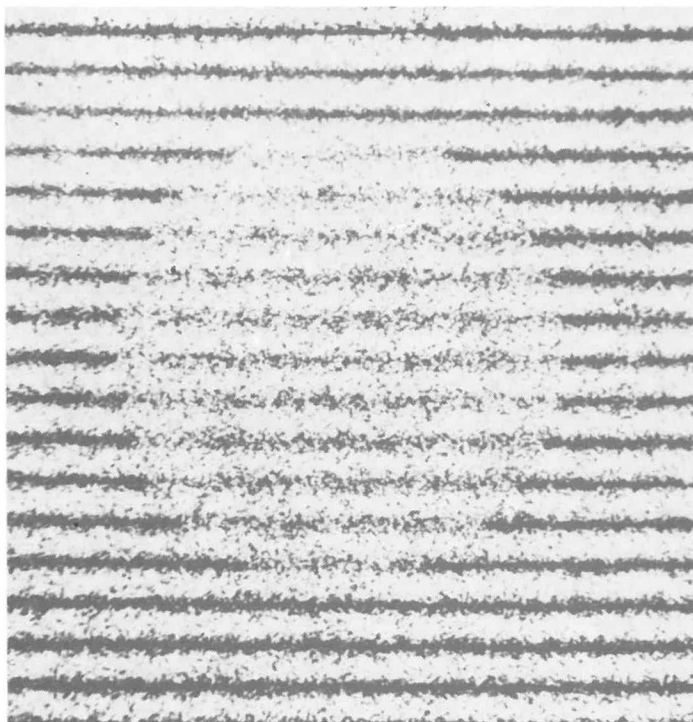
ISSN 0473-7446

1994

Letnik 41

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1994

letnik 41, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.900,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.800,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, dvojna številka 800,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 DMFA Slovenije – 1223

Poštšina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Simplektične preslikave — Symplectic maps (Miran Černe) 161–169

Odvajanja na prakolobarjih, II — Derivations on prime rings, II (Joso Vukman) 170–177

Dinamični lokacijski problem — A dynamic location problem (Sandi Klavžar) 178–186

Nenavadni interferenčni poskusi, Interferenčni poskus z laserjema — Unusual interference experiments, Interference experiment with two lasers (Janez Strnad) 187–190

Vesti — News

Fizika z zvezdico (Seta Oblak in Maruša Potokar) III

Letno kazalo III–IV

Nove knjige — New books (Franc Cvelbar, Janez Strnad) 190–191, 191–192

Utrinek (izbral Boris Lavrič) 192

Na ovitku: Holografski interferogram, slika k članku na strani 187.

SIMPLEKTIČNE PRESLIKAVE

MIRAN ČERNE

Math. Subj. Class. (1991) 58F05, 70H05, 70H15

V sestavku predstavimo osnovne lastnosti simplektičnih preslikav na $\mathbb{R}^{2n}$. Prikažemo tudi njihovo povezavo s Hamiltonovim sistemom diferencialnih enačb in podamo nekaj s tem povezanih posledic.

SYMPLECTIC MAPS

We consider basic properties of symplectic maps on $\mathbb{R}^{2n}$. Their relation to the Hamilton's equations is shown and some related corollaries are given.

1. Osnovne lastnosti linearnih simplektičnih preslikav

Pojem *simplektično* je v matematiko vpeljal Hermann Weyl [7], da bi z grškim izrazom nadomestil latinski koren pojma *kompleksno*, s katerim naj bi opisal nekatere objekte iz teorije grup, ni pa hotel, da bi prišlo do zamenjave s kompleksnimi števili. Najprej se bomo posvetili linearni algebri simplektičnih preslikav. Z I_n bomo označevali matrično identiteto na $\mathbb{R}^n$, z E_n pa $2n \times 2n$ realno matriko oblike

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Hitro lahko opazimo, da je matrika E_n pravzaprav v primernih koordinatah zapisano množenje s kompleksno imaginarno enoto i v prostoru $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Če koordinate na $\mathbb{R}^{2n}$ označimo z $(x, y) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, potem je $E_n(x, y) = (-y, x)$. Po drugi strani pa lahko vsak vektor (x, y) iz $\mathbb{R}^{2n}$ identificiramo s kompleksnim vektorjem $x + iy$ iz $\mathbb{C}^n$. Tedaj je $i(x + iy) = -y + ix$.

Za poljubno matriko A naj bo A^T matriki A transponirana matrika.

Definicija 1. Realna kvadratna $2n \times 2n$ matrika A je *simplektična* natanko tedaj, ko zadošča enakosti

$$A^T E_n A = E_n. \quad (1)$$

Neposredna posledica definicije simplektičnih matrik je naslednje dejstvo.

Trditev 2. Vsaka simplektična matrika je obrnljiva.

Poiščimo determinanto leve in desne strani enakosti ((1)). Tedaj dobimo

$$\det(A^T) \det(E_n) \det(A) = \det(E_n). \quad (2)$$

Ker je $\det(E_n) = 1$ in ker za vsako kvadratno matriko A velja $\det(A^T) = \det(A)$, iz enakosti ((2)) takoj sledi, da je $(\det(A))^2 = 1$. Torej je $|\det(A)| = 1$ in matrika A je nesingularna. Pripisimo še, da se da z uporabo diferencialnih form tudi elegantno pokazati, da je determinanta vsake simplektične matrike enaka 1.

Ni težko preveriti, da sestavlja množica simplektičnih matrik na $\mathbb{R}^{2n}$ grupo za operacijo matričnega množenja. Tej grupi bomo nadeli posebno ime in posebno oznako. Grupo vseh $2n \times 2n$ simplektičnih matrik na $\mathbb{R}^{2n}$ imenujemo grupa *simplektičnih avtomorfizmov* prostora $\mathbb{R}^{2n}$ in jo označimo z $Sp(n, \mathbb{R})$.

Predstavimo nekaj zgledov simplektičnih avtomorfizmov $\mathbb{R}^{2n}$. Enostaven račun pokaže, da sta za vsako $n \times n$ realno simetrično matriko A_0 bločno zapisani $2n \times 2n$ matriki

$$\begin{pmatrix} I_n & A_0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} 0 & A_0^{-1} \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}$$

simplektični. Kot poseben primer vidimo, da je tudi matrika E_n simplektična. Med drugimi simplektičnimi avtomorfizmi $\mathbb{R}^{2n}$ omenimo še unitarne transformacije prostora $\mathbb{C}^n$, ki jih pri tem obravnavamo kot realne linearne preslikave $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ vase. Naj bo $\mathcal{U}$ kompleksno linearna preslikava prostora $\mathbb{C}^n$ vase in U njej pripadajoča realna $2n \times 2n$ matrika. Z $(\cdot, \cdot)$ označimo običajen evklidski skalarni produkt na $\mathbb{R}^{2n}$, z $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pa običajen hermitski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$. Tedaj za vsak par vektorjev $z, w \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ velja identiteta

$$(z, w) = \operatorname{Re}\langle z, w \rangle,$$

pri čemer vektorja z in w na levi strani enakosti obravnavamo kot realna $2n$ -vektorja, na desni strani pa kot kompleksna n -vektorja. Ker za poljubna dva vektorja $z, w \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ velja

$$(U^T z, w) = (z, Uw) = \operatorname{Re}\langle z, Uw \rangle = \operatorname{Re}\langle \mathcal{U}^* z, w \rangle,$$

je U^T ustrezajoča realna $2n \times 2n$ matrika adjungirane preslikave $\mathcal{U}^*$. Potemtakem produkt matrik $U^T E_n U$ kot avtomorfizem prostora $\mathbb{R}^{2n}$ ustreza preslikavi $\mathcal{U}^* i \mathcal{U} = i \mathcal{U}^* \mathcal{U}$. V primeru unitarne transformacije $\mathcal{U}$ (za te je produkt $\mathcal{U}^* \mathcal{U}$ enak identiteti na $\mathbb{C}^n$) pa je $i \mathcal{U}^* \mathcal{U} z = i z$ za vsak $z \in \mathbb{C}^n$ in je torej pripadajoča matrika kar E_n .

Vrnimo se k splošnim simplektičnim avtomorfizmom prostora $\mathbb{C}^n$. Identiteta (1) implicira pravzaprav bistveno več, kot je bilo ugotovljeno zgoraj. Enakost (1) je ekvivalentna enakosti

$$A^T = E_n A^{-1} E_n^{-1}. \quad (3)$$

To pa pomeni, da sta si matriki A^T in A^{-1} podobni. Torej, ne samo da imata matriki A^T in A^{-1} isti spekter, imata celo isto Jordanovo formo. Če je $\lambda \in \mathbb{C}$ lastna vrednost kvadratne matrike A z algebraično kratnostjo k_λ , potem je λ tudi lastna vrednost za A^T z isto algebraično kratnostjo k_λ . Za simpleksično matriko A pa zgornja ugotovitev (3) implicira, da je λ tudi lastna vrednost matrike A^{-1} , in to zopet z isto algebraično kratnostjo k_λ . Krog našega opažanja sklene splošno dejstvo, da je neničelno kompleksno število λ lastna vrednost matrike A^{-1} z algebraično kratnostjo k_λ natanko tedaj, ko je $\frac{1}{\lambda}$ lastna vrednost za A z isto algebraično kratnostjo k_λ .

Trditev 3. Naj bo $A \in Sp(n, \mathbb{R})$. Če je kompleksno število λ lastna vrednost matrike A z algebraično kratnostjo k_λ , so tudi števila

$$\bar{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

lastne vrednosti matrike A z isto algebraično kratnostjo k_λ .

Dokaz. Pravzaprav smo dokazali že skoraj vse. Pripomnimo le: ker je A realna matrika, je kompleksno število λ njena lastna vrednost z algebraično kratnostjo k_λ le, če je tudi $\bar{\lambda}$ lastna vrednost matrike A z algebraično kratnostjo k_λ . ■

2. Simplektomorfizmi ali kanonične transformacije

Simplektični pojem bomo sedaj razširili še na nekatere nelinearne preslikave prostora $\mathbb{R}^{2n}$ vase.

Definicija 4. Difeomorfizem f prostora $\mathbb{R}^{2n}$ je *simplektomorfizem* ali *kanonična transformacija* prostora $\mathbb{R}^{2n}$, če je v vsaki točki $x \in \mathbb{R}^{2n}$ njegov odvod $(Df)(x)$ simplektični avtomorfizem prostora $\mathbb{R}^{2n}$.

Očitno je vsaka linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^{2n}$, ki je porojena iz kake matrike $A \in Sp(n, \mathbb{R})$, simplektomorfizem $\mathbb{R}^{2n}$.

Posledica 5. Vsak simplektomorfizem f prostora $\mathbb{R}^{2n}$ ohranja Lebesgueovo mero, t.j. za vsako Lebesgueovo merljivo podmnožico $E \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ je Lebesgueova mera podmnožice $f(E)$ enaka meri množice E .

Dokaz. Mero merljive podmnožice E dobimo kot integral karakteristične funkcije χ_E

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_E(x) dm(x).$$

Spomnimo se, kako se integral po prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ transformira pri uvedbi novih spremenljivk [5, str. 153]. Tako dobimo

$$m(f(E)) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{f(E)}(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{f(E)}(f(y)) |\det((Df)(y))| dm(y).$$

Ker je f bijektivna preslikava, je $\chi_{f(E)} \circ f = \chi_E$, ker pa je tudi simplektomorfizem, je $|\det((Df)(y))| = 1$ za vsak $y \in \mathbb{R}^{2n}$. Zato je desna stran zgornje enakosti enaka meri množice E . ■

Naslednji izrek o vračanju v izhodiščno okolico ([1, str. 71], [2, str. 55], [4, str. 10]) velja za vse difeomorfizme odprtih podmnožic prostora $\mathbb{R}^m$, ki ohranjajo Lebesgueovo mero. Torej velja tudi za vse kanonične transformacije prostora $\mathbb{R}^{2n}$.

Izrek 6 (Poincaré). *Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ omejena odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^m$ in naj bo $g : \Omega \rightarrow \Omega$ difeomorfizem odprte množice Ω vase. Denimo, da g ohranja Lebesgueovo mero. Tedaj obstaja taka podmnožica $E_0 \subseteq \Omega$ s polno mero ($m(E_0) = m(\Omega)$), da za vsako točko $a \in E_0$ in vsako njeno okolico $U \subseteq \Omega$, obstaja tako poljubno veliko naravno število $k \in \mathbb{N}$, da je*

$$g^k(a) = \underbrace{(g \circ g \circ \dots \circ g)}_k(a) \in U.$$

Če gledamo na spremenljivko k v zaporedju kompozitumov $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$ kot na čas, recimo sekunde, izrek 1 lahko interpretiramo tudi tako, da se skoraj vsaka točka $a \in \Omega$ po dovolj dolgem času z uporabo preslikave g vrne v poljubno majhno okolico svojega izhodiščnega položaja.

Dokaz. Naj bo $V \subseteq \Omega$ poljubna odprta podmnožica in $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo $F_k := \{x \in V; \forall j \geq k, g^j(x) \notin V\}$ množico tistih točk iz V , ki po k iteracijah preslikave g zapustijo množico V in se vanjo nikoli več ne vrnejo. Množica F_k je zaprta v V in zato Lebesgueovo merljiva. Pokazali bomo, da je $m(F_k) = 0$.

Denimo, da ima množica F_k pozitivno mero, in si oglejmo naslednje zaporedje slik množice F_k s preslikavo g :

$$g^k(F_k), g^{2k}(F_k), \dots, g^{jk}(F_k), \dots$$

Ker preslikava g ohranja mero, imamo za vsak $j \in \mathbb{N}$

$$m(g^{jk}(F_k)) = m(F_k) > 0.$$

Po drugi strani je odprta množica Ω omejena in ima torej končno mero. Ker je mera aditivna na vsaki števeni družini disjunktnih odprtih množic, obstajata taki naravni števili j in r , $r > j$, da je presek

$$g^{jk}(F_k) \cap g^{rk}(F_k)$$

neprazen. Ker je preslikava g difeomorfizem odprte množice Ω , je tudi presek

$$F_k \cap g^{(r-j)k}(F_k) \quad (4)$$

neprazen. Tedaj za vsako točko x iz preseka ((4)) velja, da se točki x in $g^{(j-r)k}(x)$ nahajata v množici $F_k \subseteq V$, kar pa nas pripelje v protislovje z definicijo množice F_k . Potemtakem mora veljati $m(F_k) = 0$.

Naj bo $F_V := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ množica tistih točk iz V , ki množico V zapustijo in se vanjo s preslikavo g več ne vrnejo. Ker ima števna unija množic z ničelno mero še vedno mero enako nič, je $m(F_V) = 0$.

Naj bo $\{q_i \in \Omega; i \in \mathbb{N}\}$ poljubna števna povsod gosta podmnožica množice Ω (npr. vse točke iz Ω z racionalnimi koordinatami). Za vsak par $i, j \in \mathbb{N}$ naj bo V_{ij} odprta množica tistih točk iz Ω , ki leže v odprti krogli s središčem v točki q_i in radijem $\frac{1}{j}$. Definirajmo

$$F := \bigcup_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}} F_{V_{ij}}.$$

Ker je za vsak par indeksov i in j mera množice $F_{V_{ij}}$ enaka 0, je tudi $m(F) = 0$. Dokaz izreka bo končan, če le pokažemo, da ima vsaka točka a iz komplementa $\Omega \setminus F$ lastnost, da se neskončnokrat vrne v poljubno majhno okolico svojega izhodiščnega položaja.

Naj bo $a \in \Omega \setminus F$ in naj bo $U \subseteq \Omega$ njena okolica. Ker je množica $\{q_i \in \Omega; i \in \mathbb{N}\}$ povsod gosta v Ω , obstajata tak i_0 in j_0 iz $\mathbb{N}$, da je $a \in V_{i_0 j_0} \subseteq U$. Ker točka a ni iz množice F , za par i_0, j_0 tudi velja $a \notin F_{V_{i_0 j_0}}$. To pa že pomeni, da obstaja tako poljubno veliko naravno število k_0 , da je $g^{k_0}(a) \in V_{i_0 j_0} \subseteq U$. ■

3. Hamiltonov sistem diferencialnih enačb

Koordinate na prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ označimo s $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Tako vsak $2n$ -vektor $x \in \mathbb{R}^{2n}$ zapišemo z dvema n -vektorjema p in q : $x = (p, q)$.

Naj bo $H(p, q)$ neskončnokrat odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}^{2n}$. Vsako tako funkcijo na $\mathbb{R}^{2n}$ imenujemo tudi Hamiltonova funkcija in ji priredimo ustrezajoč Hamiltonov sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial q}(p, q) \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) \end{aligned} \quad (5)$$

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0.$$

Izraza $\dot{p}$ in $\dot{q}$ seveda pomenita odvoda po časovni spremenljivki $t \in \mathbb{R}$, medtem ko sta $p_0 \in \mathbb{R}^n$ in $q_0 \in \mathbb{R}^n$ ustrezna začetna pogoja. Sistem

diferencialnih enačb (5) lahko z uporabo matrike E_n zapišemo bolj skrčeno. Cauchyjeva naloga (5) je ekvivalentna nalogi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= E_n (\nabla H)(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{6}$$

kjer je ∇H gradient funkcije H , $x = (p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ in $x_0 = (p_0, q_0)$.

Znano je (npr. [1, str. 55–74]), da se Euler-Lagrangeov sistem diferencialnih enačb za mehaničen sistem v potencialnem polju da s pomočjo Legendrove transformacije prevesti na ekvivalenten Hamiltonov sistem diferencialnih enačb. V tem primeru ima Hamiltonova funkcija tudi povsem fizikalen pomen. Enaka je celotni energiji, t.j. vsoti kinetične in potencialne energije mehaničnega sistema. V tem primeru se koordinate $q_1, \dots, q_n$ imenujejo posplošene oziroma generalizirane koordinate mehaničnega sistema, koordinate $p_1, \dots, p_n$ so posplošene oziroma generalizirane gibalne količine, $2n$ razsežni prostor s koordinatami $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ pa je fazni prostor sistema.

Eksistenčni izrek iz teorije navadnih diferencialnih enačb nam pove, da za vsako Hamiltonovo funkcijo H obstajata enolično določeni gladki vektorski funkciji $Q(t) \in \mathbb{R}^n$ in $P(t) \in \mathbb{R}^n$, definirani na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$, ki rešita Cauchyjevo nalogo (5).

Trditev 7. *Funkcija $t \mapsto H(P(t), Q(t))$ je konstantna povsod tam, kjer je definirana.*

V terminologiji diferencialnih enačb trditev 3 pravi, da je Hamiltonova funkcija H prvi integral sistema (5) oziroma (6). Druga interpretacija trditve 3 pa je fizikalna. Za mehaničen sistem v potencialnem polju namreč Hamiltonova funkcija H predstavlja celotno energijo sistema. Posledica zgornje trditve je torej izrek o ohranitvi energije za take mehanične sisteme.

Dokaz. Naj bo $X(t) = (P(t), Q(t))$ in $h(t) = H(X(t))$. Funkcijo h odvajajmo po časovni spremenljivki t :

$$\dot{h} = ((\nabla H)(X))^T \dot{X}.$$

Upoštevajoč, da vektorska funkcija X reši sistem (6), dobimo

$$\dot{h} = ((\nabla H)(X))^T E_n (\nabla H)(X) = 0,$$

saj je matrika E_n poševno simetrična ($E_n^T = -E_n$). ■

Pri določenih pogojih na Hamiltonovo funkcijo H (npr. funkcija H narašča čez vse meje, ko $(p, q) \rightarrow \infty$) si lahko zagotovimo, da rešitev naloge (5) oziroma (6) obstaja za vsak začetni pogoj $x_0 = (p_0, q_0)$ na

vsej realni osi. Od tod naprej obravnavajmo le take Hamiltonove sisteme diferencialnih enačb, za katere pri vsakem začetnem pogoju obstaja rešitev sistema (5) oziroma (6) za vsak $t \in \mathbb{R}$. Rešitev Cauchyjeve naloge (5) oziroma (6) pri začetnih pogojih $x_0 = (p_0, q_0)$ označimo s $\Phi_t(x_0) = (P(t; p_0, q_0), Q(t; p_0, q_0))$. Do sedaj smo na $\Phi_t(x_0)$ pri fiksnih začetnih pogojih $x_0 = (p_0, q_0)$ gledali kot na vektorsko funkcijo iz realne osi $t \in \mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^{2n}$. Sedaj pa naš odnos do $\Phi_t(x_0)$ spremenimo in jo obravnavajmo pri fiksnem $t \in \mathbb{R}$ kot preslikavo prostora $\mathbb{R}^{2n}$ vase, ki nam za poljubno točko $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ pove, kam jo je rešitev Cauchyjeve naloge (6) z začetnim pogojem x_0 premaknila po preteku časa t . Iz eksistenčnega izreka za sisteme navadnih diferencialnih enačb, ki zagotavlja tudi enoličnost rešitev Cauchyjevih nalog, sledi, da je tako definirana preslikava

$$\Phi_t : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$ difeomorfizem prostora $\mathbb{R}^{2n}$. Ker je funkcija H neodvisna od časovne spremenljivke t , je inverz preslikave Φ_t podan kar s preslikavo Φ_{-t} . Podobno sklepanje nas pripelje tudi do naslednjih dejstev o družini $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ difeomorfizmov prostora $\mathbb{R}^{2n}$:

1. $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ za vsak par $t, s \in \mathbb{R}$ in
2. $\Phi_0 = I_{2n}$.

Izrek 8. *Za vsak $t \in \mathbb{R}$ je difeomorfizem Φ_t simplektomorfizem ali kanonična transformacija prostora $\mathbb{R}^{2n}$.*

Takojšnja posledica tega izreka je:

Posledica 9 (Liouville). *Difeomorfizmi Φ_t prostora $\mathbb{R}^{2n}$ ohranjajo Lebesgueovo mero.*

Dokaz izreka 8. Naj bo $A_t(x) := D(\Phi_t)(x)$ odvod preslikave Φ_t v točki $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Radi bi pokazali, da za vsak $x \in \mathbb{R}^{2n}$ le ta zadošča identiteti

$$A_t(x)^T E_n A_t(x) = E_n.$$

Naj bo

$$M_t(x) = A_t(x)^T E_n A_t(x).$$

Ker je $\Phi_0 = I_{2n}$, je matrična funkcija M_0 za vsak $x \in \mathbb{R}^{2n}$ enaka matriki E_n . Če pokažemo, da je za vsak $x \in \mathbb{R}^{2n}$ odvod po času $\dot{M}_t(x)$ enak 0, smo izrek dokazali. Vse nastopajoče funkcije so neskončnokrat odvedljive po vseh spremenljivkah, zato so vsi mešani odvodi neodvisni od vrstnega reda odvajanja. Potemtakem velja

$$\dot{M}_t(x) = \dot{A}_t(x)^T E_n A_t(x) + A_t(x)^T E_n \dot{A}_t(x).$$

Po drugi strani pa, ker $\Phi_t(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}^{2n}$ reši enačbo

$$\dot{\Phi}_t(x) = E_n(\nabla H)(\Phi_t(x)),$$

po odvajanju na x dobimo

$$\dot{A}_t(x) = E_n(\nabla^2 H)(\Phi_t(x)) A_t(x).$$

Oznako $\nabla^2 H$ smo pri tem uporabili za Hessejevo matriko drugih odvodov funkcije H . Torej je

$$\begin{aligned} \dot{M}_t(x) &= A_t(x)^T (\nabla^2 H)(\Phi_t(x)) E_n^T E_n A_t(x) + \\ &+ A_t(x)^T E_n E_n (\nabla^2 H)(\Phi_t(x)) A_t(x). \end{aligned}$$

Upoštevajoč enakosti $E_n^t = -E_n$ in $E_n^2 = I_{2n}$, je izrek dokazan. ■

4. Dve posledici, paradoks in načelo nedoločnosti

Oglejmo si sedaj dve zanimivi posledici Poincaréjevega in Liouvilleovega izreka iz [1, str. 71] (tudi [2, str. 55]).

Prva se nanaša na kroglico v čaši. Če je čaša simetrična, je jasno, da se bo kroglica, ki jo spustimo po obodu čaše, če le zanemarimo trenje in zračni upor, vrnila v začetno lego. Manj pa je to očitno v primeru nesimetričnega kozarca, kjer je trajektorija njenega gibanja mnogo bolj zapletena, kot pri simetričnem kozarcu. Da se bo vrnila v začetni položaj, sicer ne moremo trditi, vendar Poincaréjev in Liouvilleov izrek implicirata, da se bo kroglica pri skoraj vsaki začetni legi po dovolj dolgem času vrnila v poljubno majhno okolico izhodiščne lege. Morda bi še veljalo omeniti, da je zato, ker za enoparametrično družino difeomorfizmov $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ prostora $\mathbb{R}^{2n}$ za vsak par $t, s \in \mathbb{R}$ velja $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$, kompozitum $(\Phi_1)^n$ enak difeomorfizmu Φ_n .

Druga posledica, ki si jo bomo ogledali, se imenuje Zermelov paradoks in izhaja iz leta 1896 (posredno naj bi to paradoksalno situacijo v enem od svojih člankov omenjal že Poincaré leta 1893, [2, str. 55]). Tokrat je naš poskus povezan z na dva dela razdeljeno posodo, katere prvi del vsebuje neki plin, v drugem pa je vakuum. Ker je število molekul plina v prvem delu posode končno (resda zelo veliko, vendar vseeno končno!), lahko ves plin obravnavamo kot eno samo točko v visokoz razsežnem faznem prostoru sistema. Posplošene koordinate sistema so kar koordinate vseh molekul plina. Sedaj pa odstranimo pregrado med obema deloma posode. Seveda se plin nemudoma razširi tudi v tisti del posode, kjer je bil prej vakuum, vendar je posledica Poincaréjevega in Liouvilleovega izreka dejstvo, da se bo skoraj vedno, ko to naredimo, ves plin po dovolj dolgem času vrnil v prvi del posode. Paradoksalno? Da in ne. Za razrešitev paradoksa je

poskrbel že Boltzman, ki trdi, da je čas, ki nam ga zagotavljata Poincaréjev in Liouvilleov izrek, da se bo ves plin znova znašel v prvem delu posode, zelo zelo dolg.

Na koncu kot zanimivost omenimo še znameniti izrek M. Gromova [3], ki v angleščini nosi ime Non-squeezing theorem, v duhu pa nekoliko spominja na znamenito Heisenbergovo načelo nedoločenosti, ki pravi, da naj bi kvantnemu delcu sicer lahko določili lego ali hitrost (moment) s poljubno natančnostjo, ne moremo pa tega storiti za njegovo lego in hitrost (moment) hkrati.

Izrek 10. *Denimo, da obstaja simplektomorfizem, ki odprto kroglo $K_R := \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}; |p_1|^2 + \dots + |p_n|^2 + |q_1|^2 + \dots + |q_n|^2 < R^2\}$ z radijem R preslika v neskončen cilindar $C_r := \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}; |p_1|^2 + |q_1|^2 < r^2\}$ z radijem r . Tedaj je $R \leq r$.*

Obrat izreka je očiten. Če je $R \leq r$, je krogla K_R že vsebovana v cilindru C_r in simplektomorfizem, ki preslika K_R v C_r , je preslikava identiteta na prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. Pri branju izreka 10 mora biti bralec pozoren predvsem na lego neskončnega cilindra. Cilinder C_r je podan s p_1 in q_1 koordinatama, ki v primeru mehničnega sistema v potencialnem polju predstavljata prvo koordinato momenta (p_1) in prvo koordinato lege (q_1) sistema v faznem prostoru. Za primerjavo še opazimo, da za poljuben par pozitivnih realnih števil r in R simplektična linearna preslikava

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{r}{R} I_n \\ -\frac{R}{r} I_n & 0 \end{pmatrix}$$

preslika odprto kroglo K_R v cilindar $\{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}; |p_1|^2 + |q_1|^2 < r^2\}$ z radijem r .

LITERATURA

- [1] A. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate texts in mathematics 60, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The mathematical theory of dilute gases*, Applied mathematical sciences 106, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [3] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.
- [4] P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea publishing company, New York, 1956.
- [5] W. Rudin, *Real and complex analysis*, tretja izdaja, McGraw-Hill, 1987.
- [6] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, Regional conference series in mathematics, no. 29, AMS, Providence, Rhode Island, 1977.
- [7] H. Weyl, *The classical groups. Their invariants and representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.

ODVAJANJA NA PRAKOLOBARJIH, II

JOSO VUKMAN

Math. Subj. Class. (1991): 16A12, 16A68, 16A72

V članku je dokazanih več rezultatov o odvajanjih na prakolobarjih. Med drugim je dokazan naslednji izrek: Naj bo K nekomutativen prakolobar brez elementov reda dva in $D : K \rightarrow K$ odvajanje. Če za vsak $x \in K$ velja $[[D(x), x], x] = 0$, potem je $D = 0$.

DERIVATIONS ON PRIME RINGS, II

In this paper some results concerning derivations in prime rings are proved. For example, the following theorem is proved: Let R be a noncommutative 2-torsion free prime ring and let $D : R \rightarrow R$ be a derivation. Suppose that $[[D(x), x], x] = 0$ holds for all $x \in R$. In this case $D = 0$.

Članek je nadaljevanje članka [5], ki je nedavno izšel v Obzorniku. Vsi kolobarji v tem članku bodo asociativni. Kolobar K je brez elementov reda n , če iz $nx = 0$ sledi $x = 0$. Namesto $xy - yx$ bomo pisali $[x, y]$ in uporabljali identiteti $[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]$, $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$. Center kolobarja K bomo označevali z $Z(K)$. Kolobar K je prakolobar, če iz $axb = 0$ za vsak $x \in K$ sledi $a = 0$ ali $b = 0$ in je polprakolobar, če iz $axa = 0$ za vsak $x \in K$ sledi $a = 0$. Aditivna preslikava $D : K \rightarrow K$, kjer je K kolobar, je odvajanje, če za vsak par $x, y \in K$ velja $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ in je jordansko odvajanje, če za vsak $x \in K$ velja $D(x^2) = D(x)x + xD(x)$. V članku [5] smo predstavili nov kratek dokaz Hersteinovega izreka, ki pravi, da je vsako jordansko odvajanje na prakolobarju brez elementov reda dva odvajanje. Odvajanje D je notranje, če ga lahko zapišemo v obliki $D(x) = [a, x]$, kjer je a fiksni element kolobarja. Začnimo z naslednjim izrekom.

Izrek 1 ([4, Izrek 1]). *Naj bo K nekomutativen prakolobar brez elementov reda dva in $D : K \rightarrow K$ odvajanje. Če za vsak $x \in K$ velja $[[D(x), x], x] = 0$, potem je $D = 0$.*

Izrek, ki smo ga pravkar zapisali, sodi v teorijo komutirajočih oziroma centralizirajočih preslikav. Preslikava $F : K \rightarrow K$ je komutirajoča (centralizirajoča), če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $[F(x), x] = 0$ ($[F(x), x] \in Z(K)$). Začetki te teorije segajo v leto 1957, ko je E. Posner v članku [3] dokazal, da na nekomutativnih prakolobarjih ni od nič različnih centralizirajočih odvajanj. Za izrek 1 bi lahko rekli, da posplošuje Posnerjev rezultat, ki smo ga pravkar omenili, če med pogoji izreka ne bi bilo dodatne zahteve glede reda elementov kolobarja. Teorija komutirajočih oziroma centralizirajočih preslikav je doživela v zadnjih letih razcvet in to v precejšnji meri po zaslugi M. Brešarja.

Dokaz izreka 1. Vpeljimo preslikavo $B(.,.) : K \times K \rightarrow K$

$$B(x, y) = [D(x), y] + [D(y), x], \quad x, y \in K.$$

Preslikava $B(.,.)$ je očitno simetrična ($B(x, y) = B(y, x)$ za vsak par $x, y \in K$) in aditivna v obeh argumentih. Preprost račun nas prepriča, da za vse $x, y, z \in K$ velja

$$B(xy, z) = B(x, z)y + xB(y, z) + D(x)[y, z] + [x, z]D(y).$$

Pri dokazu bomo potrebovali tudi preslikavo $f : K \rightarrow K$

$$f(x) = B(x, x), \quad x \in K.$$

Očitno je $f(x) = 2[D(x), x]$. Hitro se prepričamo, da za vsak par $x, y \in K$ velja

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2B(x, y).$$

Pogoj izreka lahko zapišemo v obliki

$$[f(x), x] = 0, \quad x \in K. \quad (1)$$

Če v (1) x nadomestimo z $x + y$, dobimo

$$[f(x), y] + [f(y), x] + 2[B(x, y), x] + 2[B(x, y), y] = 0, \quad x, y \in K. \quad (2)$$

Substitucija $-x$ za x nam da

$$[f(x), y] - [f(y), x] + 2[B(x, y), x] - 2[B(x, y), y] = 0, \quad x, y \in K. \quad (3)$$

Iz (2) in (3) dobimo

$$[f(x), y] + 2[B(x, y), x] = 0, \quad x, y \in K. \quad (4)$$

Substitucija xy za y v (4) nam da

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x), xy] + 2[B(xy, x), x] = \\ &= [f(x), xy] + 2[f(x)y + xB(x, y) + D(x)[y, x], x] = \\ &= [f(x), x]y + x[f(x), y] + 2[f(x), x]y + 2f(x)[y, x] + \\ &\quad + 2x[B(x, y), x] + 2[D(x), x][y, x] + 2D(x)[[y, x], x]. \end{aligned}$$

Če v zgornjem računu uporabimo (1) in (4), dobimo

$$3f(x)[y, x] + 2D(x)[[y, x], x] = 0, \quad x, y \in K. \quad (5)$$

Na podoben način dobimo

$$3[y, x]f(x) + 2[[y, x], x]D(x) = 0, \quad x, y \in K, \quad (6)$$

če v (4) pišemo yx namesto y . Dokazali bomo, da za vsak $x \in K$ velja

$$3f(x)D(x) - D(x)f(x) = 0. \quad (7)$$

V ta namen pišimo v (5) yz namesto y . Imamo

$$\begin{aligned} 0 &= 3f(x)[yz, x] + 2D(x)[[yz, x], x] = \\ &= 3f(x)[y, x]z + 3f(x)y[z, x] + 2D(x)[[y, x], x]z + \\ &\quad + 4D(x)[y, x][z, x] + 2D(x)y[[z, x], x]. \end{aligned}$$

Zaradi (5) dobimo iz zgornjega računa $3f(x)y[z, x] + 4D(x)[y, x][z, x] + 2D(x)y[[z, x], x] = 0$, $x, y \in K$ in dalje, če pišemo $y = D(x)$,

$$3f(x)D(x)[z, x] + 2D(x)f(x)[z, x] + 2D(x)^2[[z, x], x] = 0, \quad x, y, z \in K.$$

Če v (5) nadomestimo y z z , sledi od tod $(3f(x)D(x) - D(x)f(x))[z, x] = 0$, $x, z \in K$. Če v zadnji enačbi z nadomestimo z yz , dobimo

$$(3f(x)D(x) - D(x)f(x))y[z, x] = 0, \quad x, y, z \in K. \quad (8)$$

Iz (8) sledi $x \in Z(K)$ ali pa $3f(x)D(x) - D(x)f(x) = 0$, kar pomeni (ker K ni komutativen), da je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $3f(x)D(x) - D(x)f(x) = 0$. Na podoben način bi iz (6) dobili

$$3D(x)f(x) - f(x)D(x) = 0, \quad x \in K. \quad (9)$$

Iz (7) in (9) dobimo

$$f(x)D(x) = 0, \quad x \in K \quad (10)$$

in

$$D(x)f(x) = 0, \quad x \in K. \quad (11)$$

S podobnimi prijemi kot na začetku dokaza dobimo iz (10)

$$f(x)D(y) + 2B(x, y)D(x) = 0, \quad x, y \in K. \quad (12)$$

Pišimo v (12) yz namesto y . Imamo

$$\begin{aligned} 0 &= f(x)D(yz) + 2B(yz, x)D(x) = \\ &= f(x)D(y)z + f(x)yD(z) + 2B(x, y)zD(x) + 2yB(x, z)D(x) + \\ &\quad + 2D(y)[z, x]D(x) + 2[y, x]D(z)D(x). \end{aligned}$$

Zaradi (12) smemo $f(x)D(y)$ nadomestiti z $-2B(x, y)D(x)$ in $2B(x, z)D(x)$ z $-f(x)D(z)$. S tem dobimo

$$2B(x, y)[z, D(x)] + [f(x), y]D(z) + 2D(y)[z, x]D(x) + \\ + 2[y, x]D(z)D(x) = 0, \quad x, y, z \in K$$

in dalje za $z = D(x)$, če upoštevamo (10),

$$[f(x), y]D^2(x) + 2[y, x]D^2(x)D(x) = 0, \quad x, y \in K.$$

Če v zadnji enačbi y nadomestimo z zy , dobimo

$$[f(x), z]yD^2(x) + 2[z, x]yD^2(x)D(x) = 0, \quad x, y, z \in K \quad (13)$$

Če v (13) pišemo $z = D(x)$ in upoštevamo (10) in (11), dobimo

$$f(x)yD^2(x)D(x) = 0, \quad x, y \in K. \quad (14)$$

Dokažimo, da je

$$D^2(x)D(x) = 0 \quad x \in K. \quad (15)$$

Denimo, da je $D^2(a)D(a) \neq 0$ za kak $a \in K$. Iz (14) sledi $f(a) = 0$. Če pišemo v (13) $x = a$, dobimo $[z, a]yD^2(a)D(a) = 0$, $y, z \in K$, iz česar sledi $a \in Z(K)$. Dokazali smo torej, da je $D^2(x)D(x) = 0$, če je $x \notin Z(K)$. Naj bo $x \in Z(K)$ in $y \notin Z(K)$. Imamo $D^2(y)D(y) = 0$ in ker $x + y \notin Z(K)$, je tudi $D^2(x + y)D(x + y) = 0$. Dalje dobimo

$$0 = D^2(x + y)D(x + y) = \\ = (D^2(x) + D^2(y))(D(x) + D(y)) = \\ = D^2(x)D(x) + D^2(x)D(y) + D^2(y)D(x) + D^2(y)D(y) = \\ = D^2(x)D(x) + D^2(x)D(y) + D^2(y)D(x).$$

Dobili smo torej

$$D^2(x)D(x) + D^2(x)D(y) + D^2(y)D(x) = 0 \quad (16)$$

Če v (16) x nadomestimo z $-x$, dobimo

$$D^2(x)D(x) - D^2(x)D(y) - D^2(y)D(x) = 0 \quad (17)$$

Iz (16) in (17) sledi $D^2(x)D(x) = 0$. S tem je enakost (15) dokazana. Če pišemo v (15) $x + y$ namesto x , dobimo

$$D^2(x)D(y) + D^2(y)D(x) = 0, \quad x, y \in K. \quad (18)$$

Substitucija yz za y nam da

$$\begin{aligned} 0 &= D^2(x)D(yz) + D^2(yz)D(x) = \\ &= D^2(x)D(y)z + D^2(x)yD(z) + D^2(y)zD(x) + \\ &\quad + 2D(y)D(z)D(x) + yD^2(z)D(x). \end{aligned}$$

Zaradi (18) smemo v zgornjem računu $D^2(x)D(y)$ nadomestiti z $-D^2(y)D(x)$ in $D^2(z)D(x)$ z $-D^2(x)D(z)$. S tem dobimo

$$D^2(y)[z, D(x)] + [D^2(x), y]D(z) + 2D(y)D(z)D(x) = 0, \quad x, y, z \in K$$

in dalje v primeru, ko je $z = D(x)$, $[D^2(x), y]D^2(x) = 0$, $x, y \in K$. Iz zadnje enakosti dobimo $[D^2(x), y]zD^2(x) = 0$, $x, y, z \in K$, iz česar sledi $D^2(x) = 0$, $x \in K$ ali pa $D^2(x) \in Z(K)$, $x \in K$. V vsakem primeru imamo $D^2(x) \in Z(K)$, $x \in K$. Množenje enakosti (15) z leve strani z y nam sedaj da

$$D^2(x)yD(x) = 0, \quad x, y \in K. \quad (19)$$

Iz (19) dobimo $D^2(x) = 0$, $x \in K$ ali pa $D(x) = 0$, $x \in K$. Zagotovo je $D^2(x) = 0$, $x \in K$. Po izreku 6 v [5] je $D = 0$.

Nadaljujmo z naslednjim izrekom.

Izrek 2 ([4, Izrek 2]). *Naj bo K nekomutativen prakolobar brez elementov reda dva in tri in $D : K \rightarrow K$ odvajanje. Denimo, da je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $[[D(x), x], x] \in Z(K)$. V tem primeru je $D = 0$.*

Dokaz. Pogoj izreka lahko zapišemo v obliki

$$[f(x), x] \in Z(K), \quad x \in K. \quad (20)$$

Na podoben način kot pri dokazu enačbe (4) dobimo iz (20)

$$[f(x), y] + 2[B(x, y), x] \in Z(K), \quad x, y \in K. \quad (21)$$

Substitucija $y = x^2$ nam da $[f(x), x^2] + 2[f(x)x + xf(x), x] \in Z(K)$, $x \in K$ in dalje $[f(x), x]x + x[f(x), x] + 2[f(x), x]x + 2x[f(x), x] \in Z(K)$, $x \in K$.

Imamo torej

$$6[f(x), x]x \in Z(K), \quad x \in K. \quad (22)$$

Iz (20) in (22) dobimo $6[f(x), x][x, y] = 0$, $x, y \in K$ in dalje

$$[f(x), x][x, y] = 0, \quad x, y \in K, \quad (23)$$

saj smo privzeli, da je K brez elementov reda dva in tri. Če v (23) y nadomestimo z yz , dobimo

$$[f(x), x]y[x, z] = 0, \quad x, y, z \in K. \quad (24)$$

Končno imamo

$$[f(x), x] = 0, \quad x \in K, \quad (25)$$

saj sledi (25) v primeru, ko je $x \notin Z(K)$ iz (24), v primeru, ko je $x \in Z(K)$ pa ni potrebno dokazovati. Izpolnjeni so torej vsi pogoji izreka 1, zato imamo $D = 0$.

Za izrek 2 ne moremo trditi, da posplošuje izrek 1, ker imamo med pogoji izreka 2 dodatno zahtevo glede reda elementov kolobarja.

Izrek 1 narekuje naslednje vprašanje: Naj bo K nekomutativen prakolobar in $D : K \rightarrow K$ odvajanje. Denimo, da je za neko naravno število n izpolnjeno $f_n(x) = 0$, $x \in K$, pri čemer je $f_1(x) = [D(x), x]$ in $f_{k+1}(x) = [f_k(x), x]$. Ali je v tem primeru $D = 0$?

Pozitiven odgovor na to vprašanje je leta 1993 objavil C. Lanski v članku [2].

Izrek 3. *Naj bo K prakolobar brez elementov reda dva in D, G odvajanja, ki slikata K vase. Če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $D(x)G(x) = 0$, potem je $D = 0$ ali $G = 0$.*

Dokaz. Iz pogoja izreka

$$D(x)G(x) = 0, \quad x \in K, \quad (26)$$

dobimo

$$D(x)G(y) + D(y)G(x) = 0, \quad x \in K. \quad (27)$$

Če pišemo v (27) yz namesto y , dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= D(x)G(yz) + D(yz)G(x) = \\ &= D(x)G(y)z + D(x)yG(z) + D(y)zG(x) + yD(z)G(x). \end{aligned}$$

Zaradi (27) lahko $D(x)G(y)$ nadomestimo z $-D(y)G(x)$ in $D(z)G(x)$ z $-D(x)G(z)$. S tem dobimo

$$D(y)[z, G(x)] + [D(x), y]G(z) = 0, \quad x, y, z \in K. \quad (28)$$

V posebnem primeru, ko je $z = G(x)$, dobimo iz (28)

$$[D(x), y]G^2(x) = 0, \quad x, y \in K. \quad (29)$$

S substitucijo yz za z dobimo iz (29)

$$[D(x), y]zG^2(x) = 0, \quad x, y, z \in K. \quad (30)$$

Denimo, da za $a \in K$ velja $G^2(a) \neq 0$. V tem primeru sledi iz (30) $[D(a), y] = 0$, $y \in K$. Z drugimi besedami, $D(a) \in Z(K)$. Če pišemo v (26) $x = a$ in množimo enačbo z leve strani z x , dobimo $D(a)xG(a) = 0$, $x \in K$, iz česar sledi $D(a) = 0$, saj je $G(a) \neq 0$, ker je $G^2(a) \neq 0$. Ker je $D(a) = 0$, dobimo iz (27) za $y = a$ $D(x)G(a) = 0$, $x \in K$ in dalje s substitucijo xy za x

$$D(x)yG(a) = 0, \quad x, y \in K,$$

kar nam da $D(x) = 0$, $x \in K$. Dokazali smo torej, da je $D = 0$, če obstaja $a \in K$, z lastnostjo $G^2(a) = 0$. Z drugimi besedami, če je $D \neq 0$, potem je $G^2(x) = 0$ za vsak $x \in K$. Vemo, da iz $G^2(x) = 0$, $x \in K$ sledi $G = 0$ (glej [5, Izrek 6]).

Znano je, da na prakolobarju K brez elementov reda dva iz $D^2(x) = G(x)$, $x \in K$, kjer sta D in G odvajanji, ki slikata K vase, sledi $D = 0$ ([5, Izrek 6]). V nadaljevanju bomo dokazali, da ta rezultat velja celo na polprakolobarju brez elementov reda dva. Zanimivo je, da iz $D^3(x) = G(x)$, $x \in K$ ne sledi $D = 0$. O tem nas prepriča naslednji primer. Vzemimo $a \in K$ z lastnostjo $a^2 = 0$, $a \notin Z(K)$. Preprost račun pokaže, da v tem primeru za odvajanje D , definirano z $D(x) = [a, x]$, velja $D^3(x) = 0$, $x \in K$, čeprav je $D \neq 0$.

Izrek 4. *Naj bo K polprakolobar brez elementov reda dva in D, G odvajanji, ki slikata K vase. Če je za vsak $x \in K$ izpolnjeno $D^2(x) = G(x)$, potem je $D = 0$.*

Dokaz. Iz pogoja izreka

$$D^2(x) = G(x), \quad x \in K, \quad (31)$$

dobimo

$$0 = D^2(xy) - G(xy) = D^2(x)y + 2D(x)D(y) + xD^2(y) - G(x)y - xG(y)$$

in dalje zaradi (31) $D(x)D(y) = 0$, $x, y \in K$. Substitucija yx namesto y nam da $D(x)yD(x) = 0$, $x, y \in K$, iz česar sledi $D(x) = 0$, $x \in K$, kar je bilo treba dokazati.

Za konec si bomo ogledali dokaz izreka, ki ga je leta 1993 v članku [1] objavil M. Brešar.

Izrek 5 ([1, Izrek 3.1]). Naj bo K polprakolobar brez elementov reda dva in $f : K \rightarrow K$ aditivna preslikava. Če je f na K centralizirajoča, potem je tudi komutirajoča na K .

Dokaz. Iz pogoja izreka

$$[f(x), x] \in Z(K), \quad x \in K, \quad (32)$$

dobimo $[f(x), y] + [f(y), x] \in Z(K)$, $x, y \in K$ in v posebnem primeru, ko je $y = x^2$, $[f(x), x^2] + [f(x^2), x] \in Z(K)$, $x \in K$. Ker je $[f(x), x] \in Z(K)$, $x \in K$, imamo $[f(x), x^2] = 2[f(x), x]x$, zato je

$$2[f(x), x]x + [f(x^2), x] \in Z(K), \quad x \in K. \quad (33)$$

Če v (32) x nadomestimo z x^2 , dobimo

$$[f(x^2), x]x + x[f(x^2), x] \in Z(K), \quad x \in K. \quad (34)$$

Fiksirajmo $x \in K$ in pišimo $z = [f(x), x]$, $u = [f(x^2), x]$. Dokazati moramo, da je $z = 0$. Sedaj lahko (33) zapišemo v obliki $[y, 2zx + u] = 0$, $y \in K$, kar nam da v primeru, ko je $y = f(x)$

$$0 = [f(x), 2zx + u] = 2z^2 + [f(x), u]$$

oziroma

$$[f(x), u] = -2z^2. \quad (35)$$

Na podoben način dobimo iz (34) $0 = [f(x), ux + xu] = [f(x), u]x + x[f(x), u] + [f(x), x]u + x[f(x), x]$ in dalje z upoštevanjem (35) $-4z^2x + 2zu = 0$ oziroma

$$zu = 2z^2x. \quad (36)$$

Če pomnožimo (35) z z in upoštevamo (36), dobimo

$$-2z^3 = [f(x), u]z = [f(x), zu] = [f(x), 2z^2x] = 2z^3.$$

Dobili smo torej $z^3 = 0$. Ker v centru polprakolobarja ni od nič različnih nilpotentnih elementov, o čemer se ni težko prepričati, imamo $z = 0$, kar je bilo treba dokazati.

LITERATURA

- [1] M. Brešar, *On a generalization of the notion of centralizing mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 641–649.
- [2] C. Lanski, *An Engel condition with derivation*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 731–734.
- [3] E. Posner, *Derivations in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1093–1100.
- [4] J. Vukman, *Commuting and centralizing mappings in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 47–52.
- [5] J. Vukman, *Odvajanja na prakolobarjih*, Obzornik mat. fiz. **41:1** (1994), 8–14.

DINAMIČNI LOKACIJSKI PROBLEM

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (1991) 05C75, 05C90.

V članku predstavimo dinamični lokacijski problem in grafovsko invarianto „širina okna“, oboje so vpeljali Chung, Graham in Saks [3], [4]. Opišemo grafe s končnim oknom in pokažemo zvezo teh grafov z medianskimi in kvazimedianскими grafi.

A DYNAMIC LOCATION PROBLEM

A dynamic location problem and a graph invariant called windex due to Chang, Graham and Saks [3], [4] are presented. Graphs of finite windex are described and a connection with quasi-median graphs and median graphs is established.

1. Uvod

Problem, ki ga obravnavamo v tem članku, je zanimiv iz več razlogov. Gre za naraven in praktičen problem, ki se pojavi pri obravnavi prilagodljivih podatkovnih struktur, [3] [4]. Pogosto se pri praktičnih problemih zgodi ena od dveh skrajnosti: ali je problem trivialen ali pa pretežak (neresljiv). Naš problem je rešljiv, vendar daleč od tega, da bi bil trivialen. In nenazadnje, rešitev problema je matematično zanimiva in elegantna.

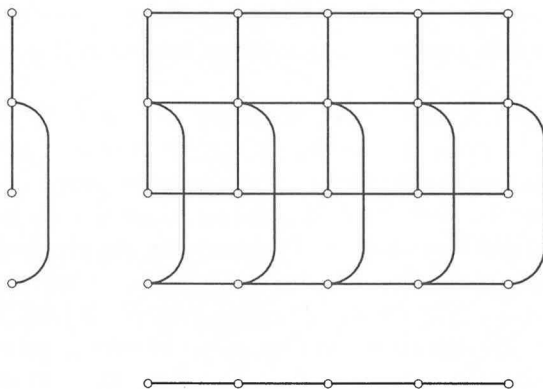
Vpeljimo najprej oznake in definicije, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Vseskozi bomo obravnavali končne, *povezane* grafe brez večkratnih povezav in zank. $V(G)$ naj označuje množico točk grafa G in $E(G)$ množico njegovih povezav. K_n je polni graf na n točkah. S $K_4 - e$ označimo polni graf na štirih točkah brez ene povezave. Drugače povedano, to je edini graf na štirih točkah s petimi povezavami. $K_{1,n}$ je graf na $n + 1$ točkah z n povezavami, v katerem je ena točka sosednja z vsemi preostalimi. Za $n \geq 1$ definiramo n -*kocko* Q_n takole. Točke so vsi možni nizi dolžine n , sestavljeni iz ničel in enic. Točki sta povezani, če se njuna niza razlikujeta v natanko enem istoležnem mestu – koordinati. Graf je *dvodelen*, če lahko njegove točke razdelimo v dve množici tako, da ima vsaka povezava grafa eno krajišče v prvi in drugo krajišče v drugi množici. Graf je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov.

Graf H je podgraf grafa G , če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H grafa G je *porojeni podgraf*, če sta točki v H povezani, brž ko sta povezani v G . *Razdalja* med točkama u in v grafa G , $d_G(u, v)$, je število povezav na najkrajši poti med u in v . Če ne bo možnosti zamenjave, bomo namesto $d_G(u, v)$ pisali kar $d(u, v)$. Podgraf H grafa G je *izometrični podgraf*, če za vse pare točk $u, v \in V(H)$ velja: $d_H(u, v) = d_G(u, v)$. Izometrični podgraf je porojeni podgraf in porojeni podgraf je podgraf. Nasprotni implikaciji ne veljata.

Podgraf H grafa G je *retrakt* v G , če obstaja homomorfizem $r : V(G) \rightarrow V(H)$, tako da za vsako točko $v \in V(H)$ velja $r(v) = v$, glej

[8]. Pri tem je homomorfizem preslikava, ki ohranja sosednost točk, torej iz $uv \in E(G)$ sledi $r(u)r(v) \in E(H)$. Podgraf H imenujemo *šibki retrakt* v G , če za preslikavo r poleg tega dopuščamo še, da lahko preslika povezavo tudi v točko.

Kartezični produkt $G \square H$ grafov G in H je graf z množico točk $V(G) \times V(H)$, $(a, x)(b, y)$ pa je povezava v $G \square H$, če je $ab \in E(G)$ in $x = y$, ali pa je $a = b$ in $xy \in E(H)$. Kartezični produkt je torej graf, kjer imamo za vsako točko grafa G kopijo grafa H in za vsako točko grafa H kopijo grafa G . Na sliki 1 lahko vidimo kartezični produkt grafa $K_{1,3}$ s potjo na petih točkah P_5 . (Graf $K_{1,3}$ je drevo na štirih točkah, ki ni pot.) Za lažjo predstavbo sta na sliki narisana še oba faktorja produkta. Kartezični produkt je (do izomorfizma natančno) komutativen, asociativen produkt z enoto K_1 . $G \square H$ je povezan graf natanko tedaj, ko sta G in H povezana grafa.



Slika 1. Kartezični produkt $K_{1,3} \square P_5$.

Preostali del članka je organiziran takole. V naslednjem poglavju definiramo dinamični lokacijski problem in vpeljemo grafovsko invarianto širina okna. Dokažemo tudi nekaj preprostih trditev o širini okna. V 3. poglavju podamo karakterizacijo grafov s končnim oknom in dokažemo lažjo stran ekvivalence. V zadnjem poglavju pa opišemo zveze grafov s končnim oknom z znanima razredoma grafov, medianskimi in kvazimedijskimi grafi.

2. Postavitev problema in preproste ugotovitve

Naj bo G graf, ki predstavlja kak (realen) sistem. V sistemu imamo skupen *vir*, ki se vseskozi nahaja v neki točki $s \in V(G)$ in ga lahko prestavimo v poljubno drugo točko sistema. Točko s imenujemo *trenutno stanje* sistema, na kratko *stanje*. Sistem dobiva zaporedje zahtev, ki morajo biti izpolnjene v istem vrstnem redu, kot prihajajo v sistem. Pri tem

zahteva predstavlja točko $z \in V(G)$, v kateri mora biti opravljena določena operacija. Cena za tako operacijo je $d_G(s, z)$, kjer je s stanje sistema. Preden opravimo naslednjo operacijo, lahko prestavimo vir v drugo točko. Cena za premik vira iz točke s v točko s' je $d_G(s, s')$.

Naj bo $s_0 = z_0$ začetno stanje sistema in naj bo $z_1, z_2, \dots, z_k$ zaporedje zahtev, ki prihajajo v sistem G . Lokacijski problem je poiskati zaporedje stanj $s_1, s_2, \dots, s_k$, tako da bo vrednost izraza

$$\sum_{i=1}^k (d(s_{i-1}, s_i) + d(s_i, z_i)) \quad (1)$$

najmanjša možna.

Če bi poznali celotno zaporedje zahtev, bi lahko problem rešili s standardnimi metodami dinamičnega programiranja. Vendar zahteve prihajajo v sistem *dinamično*, kar pomeni, da razen vseh zahtev, ki smo jih že izpolnili, poznamo le še omejeno število naslednjih zahtev. *Dinamični lokacijski problem* je torej lokacijski problem, pri katerem poznamo le omejeno število zahtev.

V danem trenutku imamo torej naslednjo situacijo. Smo v nekem stanju, recimo s_{i-1} , in poznamo nekaj naslednjih zahtev, recimo $z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+l}$. Vprašanje je, ali znamo samo s pomočjo te informacije izbrati tisto stanje s_i , ki bi ga izbrali, če bi poznali zaporedje zahtev do konca. Torej, ali znamo stanje s_i izbrati *optimalno*. Pravimo, da algoritem za dinamični lokacijski problem deluje *znotraj k -okna*, če je izbor trenutnega stanja s_i odvisen le od zahtev z_j , $j < i + k$. Za dani graf G naj bo k najmanjše število, za katero obstaja algoritem za dinamični lokacijski problem na G , s katerim izberemo optimalno stanje s_i le s poznavanjem zahtev z_j , $j < i + k$. Na kratko, k naj bo najmanjše število, za katero obstaja optimalen algoritem, ki deluje znotraj k -okna. To število imenujemo *širina okna* grafa G . Poudarimo, da mora seveda algoritem delovati optimalno za *vsako* možno zaporedje zahtev. Vpeljano grafovsko invarianto označimo z WX , torej $WX(G) = k$ (oznaka WX izvira od **W**indow **i**nde**X**). Lahko se zgodi, da za dani graf G za noben k ne obstaja optimalen algoritem, ki bi deloval znotraj k -okna. Tedaj postavimo $WX(G) = \infty$. Če za graf G velja $WX(G) < \infty$, mu rečemo tudi *graf s končnim oknom*.

Dokažimo najprej tri preproste trditve, ki pokažejo, da je širina okna zanimiva grafovska invarianta.

Trditev 1. Za vsak graf G na vsaj dveh točkah velja $WX(G) \geq 2$.

Dokaz. Ker je G povezan, vsebuje vsaj eno povezavo uv . Naj bo $s_0 = z_0 = u$ in $z_1 = v$. Če izberemo $s_1 = v$, nam zaporedje zahtev $z_j = u$, $j \geq 2$, pokaže, da naša strategija ni optimalna. Vrednost izraza (1) je z našo strategijo vsaj dva, medtem ko bi z izbiro $s_i = u$, $i \geq 1$, imel izraz

(1) vrednost ena. Analogno tudi za izbiro $s_1 = u$ obstaja zaporedje zahtev, kjer ta izbira ni optimalna. Torej noben algoritem ne more delovati znotraj 1-okna. ■

Omenili smo že, da obstajajo grafi z neskončno širino okna. Najmanjši tak graf je $K_4 - e$.

Trditev 2. $WX(K_4 - e) = \infty$.

Dokaz. Naj bo $V(K_4 - e) = \{u, v, w, z\}$, kjer nimamo povezave med u in z . Naj bo $s_0 = z_0 = v$. Poglejmo zaporedje zahtev $Z = wuzuz \dots uz$, kjer je $w = z_1$. Če Z nadaljujemo z zahtevo w , tedaj moramo za s_1 (in vsa naslednja stanja) izbrati točko w , če pa Z nadaljujemo z zahtevo v , moramo izbrati $s_1 = v$. Ker lahko Z poljubno podaljšujemo z dodajanjem para zahtev uz , noben algoritem ne more delovati znotraj končnega okna. ■

Oglejmo si sedaj dinamični lokacijski problem na grafu $K_{1,n}$. Naj bo x tista njegova točka, ki je sosednja z vsemi preostalimi točkami. Po trditvi 1 velja $WX(K_{1,n}) \geq 2$. Naj bo $z_1, z_2, \dots, z_k$ zaporedje zahtev. Pokažimo, kako lahko stanje s_i določimo optimalno samo s poznavanjem zahtev z_i in z_{i+1} . Za $1 \leq i \leq k-1$ definirajmo stanje s_i kot

$$s_i = \begin{cases} z_i, & z_i = z_{i+1}, \\ x & \text{sicer,} \end{cases}$$

za $i = k$ pa postavimo $s_k = s_{k-1}$. Dokaz, da gre za optimalno strategijo, opustimo, saj bomo precej splošnejši dokaz naredili v zadnjem razdelku. Velja torej $WX(K_{1,n}) = 2$.

Vidimo torej, da obstajajo tako grafi s končno kot tudi grafi z neskončno širino okna. Zastavimo si najpomembnejše vprašanje v zvezi z dinamičnim lokacijskim problemom. Za katere grafe G je $WX(G) < \infty$?

3. Grafi s končno širino okna

Z naslednjimi tremi trditvami bomo dokazali lažjo smer ekvivalence glavnega izreka tega članka.

Trditev 3. Za vsak $n \geq 2$ velja $WX(K_n) = n$.

Dokaz. Naj bo $V(K_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ in opazujmo zaporedje zahtev $\sigma = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$, kjer je začetno stanje enako u_0 . Če bo prva zahteva po σ enaka u_0 , se mora optimalno zaporedje stanj začeti (in ves čas nadaljevati) z u_0 , saj bo v tem primeru vrednost izraza (1) enaka $n-1$, v vsakem drugem primeru pa bo vrednost izraza (1) vsaj n . Analogno vidimo, da se mora optimalno zaporedje začeti z u_1 , če se σ nadaljuje z zahtevo u_1 . Torej velja $WX(K_n) > n-1$.

Dokazati moramo še $WX(K_n) \leq n$. Naj bo s_i trenutno stanje sistema in $z_{i+1}z_{i+2} \dots z_{i+n}$ naslednjih n zahtev. Točka r naj bo prva točka, ki se v zaporedju $s_i z_{i+1} z_{i+2} \dots z_{i+n}$ pojavi drugič. (Na primer, v zaporedju $u_1 u_3 u_2 u_3 u_2 u_1$ je to točka u_3 .) Ker ima K_n n točk, taka točka gotovo obstaja. Če je $r = z_{i+1}$, postavimo $s_{i+1} = z_{i+1}$, v vseh drugih primerih pa izberemo $s_{i+1} = s_i$. Premislek, da je opisana strategija optimalna, prepuščamo bralcu. ■

Naj velja $WX(G) < \infty$. Ali tedaj tudi za podgraf H grafa G velja $WX(H) < \infty$? Seveda ne, saj je $K_4 - e$ podgraf v K_n , $n \geq 4$. Celo več, niti izometrični podgraf grafa s končnim oknom nima nujno končnega okna. Za primer lahko izberemo cikel na šestih točkah C_6 , ki je izometrični podgraf v n -kockah, pa vendar velja (o čemer se ni težko prepričati) $WX(C_6) = \infty$. V [8] smo pokazali, da tvorijo (šibki) retrakti pomemben podrazred izometričnih podgrafov. Za dokaz, da imajo šibki retrakti grafov s končnim oknom tudi sami končno okno, potrebujemo naslednjo preprosto ugotovitev.

Lema 4. *Naj bo $r : V(G) \rightarrow V(H)$ šibka retrakcija. Tedaj za poljubni točki $u, v \in V(G)$ velja $d_H(r(u), r(v)) \leq d_G(u, v)$.*

Dokaz. Vzemimo točki $u, v \in V(G)$ in naj bo P poljubna najkrajša pot med u in v v G . Tedaj je $r(P)$ sprehod v H med $r(u)$ in $r(v)$. To pa pomeni, da $r(P)$ vsebuje pot med $r(u)$ in $r(v)$. Ker $r(P)$ vsebuje kvečjemu toliko povezav kot P , je lema dokazana. ■

Trditev 5. *Če je H šibki retrakt grafa G , velja $WX(H) \leq WX(G)$.*

Dokaz. Naj bo H šibki retrakt grafa G z $WX(G) = k$ in naj bo $r : V(G) \rightarrow V(H)$ šibka retrakcija. Naj bo $\sigma = z_0 z_1 \dots z_n$ zaporedje zahtev grafa H . Ker je H porojeni podgraf v G , je σ tudi zaporedje zahtev za G in naj bo $s_1 s_2 \dots s_n$ optimalno zaporedje stanj v G . Trdimo, da je $r(s_1) r(s_2) \dots r(s_n)$ optimalno zaporedje stanj v H za zahteve $z_0 z_1 \dots z_n$.

Naj bo $s'_1 s'_2 \dots s'_n$ optimalno zaporedje stanj za H . Ker je H podgraf v G , velja

$$\sum_{i=1}^n (d_H(s'_{i-1}, s'_i) + d_H(s'_i, z_i)) \geq \sum_{i=1}^n (d_G(s_{i-1}, s_i) + d_G(s_i, z_i)).$$

Zaradi leme 4 pa lahko neenakost nadaljujemo

$$\sum_{i=1}^n (d_G(s_{i-1}, s_i) + d_G(s_i, z_i)) \geq \sum_{i=1}^n (d_H(r(s_{i-1}), r(s_i)) + d_H(r(s_i), z_i)).$$

Iz gornjih dveh neenakosti povzamemo, da je $r(s_1) r(s_2) \dots r(s_n)$ optimalno zaporedje stanj v H .

Če torej lahko dobimo $s_1 s_2 \dots s_n$ v G z algoritmom, ki deluje znotraj k -okna, lahko dobimo znotraj k -okna tudi $r(s_1)r(s_2)\dots r(s_n)$. Zato je $WX(H) \leq WX(G)$. ■

Še eno trditev potrebujemo, preden lahko formuliramo glavni izrek tega prispevka, za trditev pa naslednjo osnovno lastnost kartezičnih produktov.

Lema 6. *Naj bo $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$. Tedaj za vsak par točk $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ in $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ grafa G velja*

$$d_G(u, v) = \sum_{i=1}^n d_{G_i}(u_i, v_i). \blacksquare$$

Trditev 7. Za poljubne grafe $G_1, G_2, \dots, G_n$, $n \geq 2$, velja

$$WX(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n) = \max\{WX(G_1), WX(G_2), \dots, WX(G_n)\}.$$

Dokaz. Zaradi asociativnosti kartezičnega produkta in operacije $\max$ zadostuje, da trditev dokažemo za $n = 2$. Naj bo $\sigma = (z_0, z'_0)(z_1, z'_1) \dots (z_n, z'_n)$ zaporedje zahtev grafa $G_1 \square G_2$ in naj bo $\tau = (s_1, s'_1)(s_2, s'_2) \dots (s_n, s'_n)$ zaporedje stanj. Tedaj je zaradi leme 6 zaporedje τ optimalno zaporedje stanj za σ natanko tedaj, ko je $s_1 s_2 \dots s_n$ optimalno zaporedje stanj za $z_0 z_1 \dots z_n$ v G in je $s'_1 s'_2 \dots s'_n$ optimalno zaporedje za $z'_0 z'_1 \dots z'_n$ v H . Zato optimalen algoritem, ki dela znotraj k -okna v $G \square H$, poraja optimalna algoritma znotraj istega okna v G in v H , in nasprotno. ■

Posledica 8. *Za vsak $n \geq 1$ je $WX(Q_n) = 2$.*

Dokaz. Hitro lahko vidimo, da je Q_n kartezični produkt n kopij grafa K_2 , po trditvi 3 pa velja $WX(K_2) = 2$. ■

S pomočjo trditev 3, 5 in 7 lahko konstruiramo obsežen razred grafov, ki imajo končno okno. Zaradi trditev 3 in 7 imajo končno okno kartezični produkti končnega števila polnih grafov in zaradi trditve 5 lahko vzamemo še vse njihove šibke retrakte. To pa so v resnici natanko vsi grafi s končnim oknom. Dokaz slednjega je dokaj zahteven ter obsežen in presega okvir članka v Obzorniku. Velja torej:

Izrek 9 ([4]). *Graf G ima končno okno natanko tedaj, ko je G šibki reakt kartezičnega produkta polnih grafov.* ■

4. Kvazimedianski in medianski grafi

Videli smo, da imajo končno okno natanko šibki retrakti kartezičnega produkta polnih grafov. Hkrati in neodvisno od izreka 9 pa je E. Wilkeit

[12] dokazala, da imajo tudi kvazimedianski grafi isto karakterizacijo. Zato lahko na kratko rečemo, da so grafi s končnim oknom ravno kvazimedianski grafi. Izrek 9 je torej tudi posplošitev Bandeltovega rezultata iz [1], namreč da so medianski grafi natanko (šibki) retrakti n -kock. Kvazimedianske grafe je prvi vpeljal Mulder [10], in sicer kot posplošitev medianskih grafov.

Graf G je *medianski graf* [9] [11], če za vsako trojico točk u , v in w grafa G obstaja natanko ena točka x , ki hkrati leži na neki najkrajši poti med u in v , na neki najkrajši poti med u in w ter na neki najkrajši poti med v in w . Točko x imenujemo *mediana* točk u , v in w . Točka x je torej mediana točk u , v in w , če zadošča enakostim:

$$\begin{aligned}d(u, x) + d(x, v) &= d(u, v) \\d(v, x) + d(x, w) &= d(v, w) \quad \text{in} \\d(u, x) + d(x, w) &= d(u, w).\end{aligned}$$

Če seštejemo te enakosti, dobimo:

$$2(d(u, x) + d(v, x) + d(w, x)) = d(u, v) + d(u, w) + d(v, w).$$

Recimo, da G ni dvodelen graf, in opazujemo poljuben najkrajši lih cikel v G . Naj bo uv povezava tega cikla in w tista točka cikla, ki je najbolj oddaljena od povezave uv . Ker je $d(u, v) = 1$ in $d(u, w) = d(v, w)$, na desni strani gornje enakosti dobimo liho število. Ker to ni mogoče, G ne more vsebovati lihega cikla, torej:

Trditev 10. *Medianski grafi so dvodelni grafi.*

Med drugim so medianski grafi tudi vsa drevesa (v posebnem grafi $K_{1,n}$) in vse n -kocke. Dokazimo sedaj, da imajo medianski grafi širino okna enako 2. S tem bomo tudi izpolnili obljubo, ki smo jo dali ob dinamičnem lokacijskem problemu na grafu $K_{1,n}$.

Naj bo G medianski graf in $z_0, z_1, \dots, z_k$ zaporedje zahtev. Za $1 \leq i \leq k-1$ definirajmo s_i kot mediano točk s_{i-1} , z_i in z_{i+1} , za $i = k$ pa postavimo $s_k = s_{k-1}$. Želimo dokazati, da je izbira stanj s_i optimalna. Iz tega namreč sledi $WX(G) \leq 2$ in zaradi trditve 1 tudi $WX(G) = 2$.

Naj bo $t_0 = z_0, t_1, t_2, \dots, t_k$ optimalna izbira stanj, ki zadostijo zahtevam $z_0, z_1, \dots, z_k$. Točka t_i torej minimizira tisti del vsote (1), v katerem nastopa, to pa je

$$\begin{aligned}d(t_{i-1}, t_i) + d(t_i, z_i) + d(t_i, t_{i+1}), \text{ za } 1 \leq i \leq k-1, \\d(t_{i-1}, t_i) + d(t_i, z_i), \text{ za } i = k.\end{aligned}$$

Za $i = 1, 2, \dots, k-1$ je torej točka t_i mediana točk t_{i-1} , z_i in t_{i+1} . Trdimo, da je t_i tudi mediana točk t_{i-1} , z_i in z_{i+1} .

Za $i = 1, 2, \dots, k - 2$ je točka t_{i+1} mediana točk t_i, z_{i+1} in t_{i+2} , zato velja

$$d(t_i, t_{i+1}) = d(t_i, z_{i+1}) - d(t_{i+1}, z_{i+1}). \quad (*)$$

Torej točka t_i minimizira izraz

$$d(t_{i-1}, t_i) + d(t_i, z_i) + d(t_i, z_{i+1}) - d(t_{i+1}, z_{i+1}),$$

in s tem tudi vsoto prvih treh členov, saj zadnji člen ni odvisen od t_i . To pa pomeni, da je za $i = 1, 2, \dots, k - 2$ točka t_i mediana točk t_{i-1}, z_i in z_{i+1} . To bo veljalo tudi pri $i = k - 1$, če dokažemo (*) tudi za ta primer. Po trikotniški neenakosti je $d(t_{k-1}, z_k) \leq d(t_{k-1}, t_k) + d(t_k, z_k)$, ker pa točka t_i za $i = k$ minimizira izraz $d(t_{i-1}, t_i) + d(t_i, z_i)$, je tudi

$$d(t_{k-1}, t_k) + d(t_k, z_k) \leq d(t_{k-1}, z_k) + d(z_k, z_k) = d(t_{k-1}, z_k).$$

Dokazali smo torej, da je za $i = 1, 2, \dots, k - 1$ točka t_i mediana točk t_{i-1}, z_i in z_{i+1} . Ker je $t_0 = s_0$ in je s_i po definiciji (enolična) mediana točk s_{i-1}, z_i in z_{i+1} , sledi z indukcijo po i , da je $t_i = s_i$ za $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Pripomnimo še, da bi za $s_k (= s_{k-1})$ očitno lahko izbrali katerokoli točko na najkrajši poti med s_{k-1} in z_k .

Vidimo torej, da imajo medianski grafi širino okna enako dva. To pa so ravno vsi grafi s širino okna dva. Dokaz slednjega je nekoliko zamudnejši, najdemo ga v [3]. Imamo torej:

Izrek 11. $WX(G) = 2$ natanko tedaj, ko je G medianski graf.

Omenili smo že, da je Mulder [10] vpeljal kvazimedianske grafe kot naravno posplošitev medianskih grafov. Preden jih definiramo, potrebujemo še nekaj novih pojmov.

Množica točk $X \subseteq V(G)$ je *konveksna*, če za vsak par točk u in v iz X vse točke poljubne najkrajše poti med u in v (v G) pripadajo X . $V(G)$ je seveda konveksna množica, hitro pa se tudi prepričamo, da je presek poljubnih konveksnih množic spet konveksna množica. *Konveksna ovojnica* množice X je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje X . Kot v vseh konveksnih strukturah tudi pri grafih dobimo konveksno ovojnico kot presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo X .

Naj bo (u_1, u_2, u_3) trojica točk grafa G . Trojica točk (x_1, x_2, x_3) je *kvazimediana* trojice (u_1, u_2, u_3) v G , če obstaja nenegativno celo število m , tako da za poljubna $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, velja:

- (i) $d(x_i, x_j) = m$,
- (ii) $d(u_i, u_j) = d(u_i, x_i) + m + d(x_j, u_j)$,
- (iii) m je najmanjše število, ki zadošča (i) in (ii).

Opazimo, da za $m = 0$ (in torej $x_1 = x_2 = x_3$) dobimo ravno mediano točk u_1, u_2 in u_3 .

Sedaj imamo vse pripravljeno za nasledno definicijo. Graf G je *kvazi-medianski graf*, če zadošča naslednjim trem zahtevam:

- (i) vsaka trojica točk iz G ima natanko eno kvazimediano,
- (ii) graf $K_4 - e$ ni porojeni podgraf v G in
- (iii) konveksna ovojnica vsake množice točk, ki poraja cikel C_6 , poraja 3^1 -kocko Q_3 .

Za konec omenimo, da so pred kratkim razvili hitre algoritme za prepoznavanje medianskih in kvazimedianskih grafov, torej grafov z $WX = 2$ in grafov z $WX < \infty$. Za prepoznavanje medianskih grafov v [7] najdemo algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n^2 \log n)$, v [6] pa je za isti problem podan algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n^{\frac{3}{2}} \log n)$. V [5] je razvit algoritem za prepoznavanje kvazimedianskih grafov časovne zahtevnosti $O(n^{\frac{3}{2}} \log n + m \log n)$. Pri tem smo z n označili število točk in z m število povezav grafa.

Zahvala

Marko Petkovšek je to besedilo izboljšal z mnogimi koristnimi pripombami. Prav posebej se mu zahvaljujem za dokaz zadostnosti pogoja v izreku 11.

LITERATURA

- [1] H. J. Bandelt, *Retracts of hypercubes*, J. Graph Theory **8** (1984), 501–510.
- [2] H. J. Bandelt, H. M. Mulder in E. Wilkeit, *Quasi-median graphs and algebras*, J. Graph Theory **18** (1994), 681–703.
- [3] F. R. K. Chung, R. L. Graham in M. E. Saks, *Dynamic search in graphs*, v „Discrete Algorithms and Complexity“ (H. Wilf, ed.), Academic Press, New York 1987, 351–387.
- [4] F. R. K. Chung, R. L. Graham in M. E. Saks, *A dynamic location problem for graphs*, Combinatorica **9** (1989), 111–132.
- [5] J. Hagauer, *Skeletons, recognition algorithm and distance matrix of quasi-median graphs*, Graz University of Technology, IIG – Report Series (1993), 373.
- [6] J. Hagauer, W. Imrich in S. Klavžar, *Recognizing graphs of windex 2*, Univ. of Ljubljana, IMFM Preprint Series **31** (1993), 410.
- [7] P. K. Jha in G. Slutzki, *Convex-expansions algorithms for recognizing and isometric embedding of median graphs*, Ars Combin. **34** (1992), 75–92.
- [8] S. Klavžar, *Homomorfizmi v teoriji grafov*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 97–104.
- [9] H. M. Mulder, *The structure of median graphs*, Discrete Math. **24** (1978), 197–204.
- [10] H. M. Mulder, *The Interval Function of a Graph*, Mathematical Centre Tracts 132, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.
- [11] L. Nebeský, *Median graphs*, Comment. Math. Univ. Carolinae **12** (1971), 317–325.
- [12] E. Wilkeit, *The retracts of Hamming graphs*, Discrete Math. **102** (1992), 197–218.

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI

INTERFERENČNI POSKUS Z LASERJEMA

JANEZ STRNAD

PACS 42.50.-p

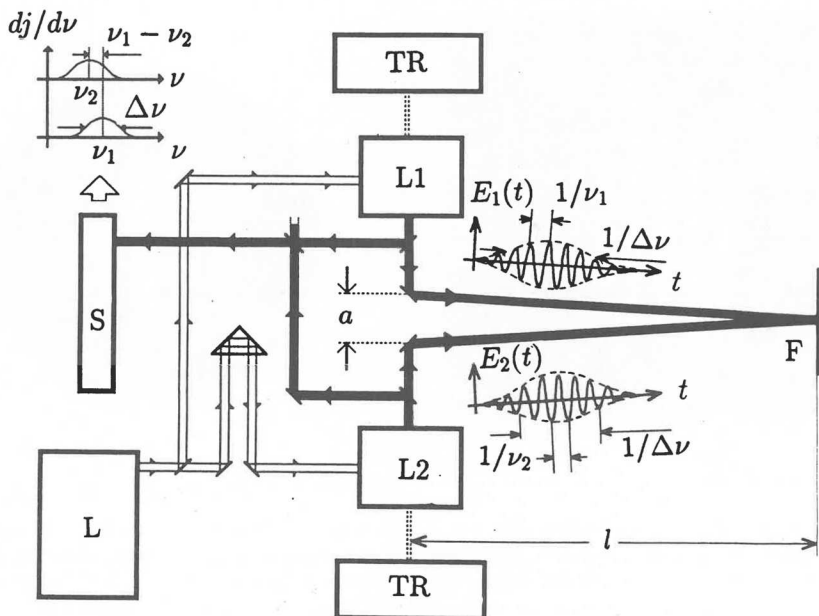
Poskus z dvema laserjem pokaže, da je mogoče opazovati interferenco svetlobe iz dveh neodvisnih izvirov.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS

INTERFERENCE EXPERIMENT WITH TWO LASERS

The experiment with two lasers shows that interference of light from two independent sources can be observed.

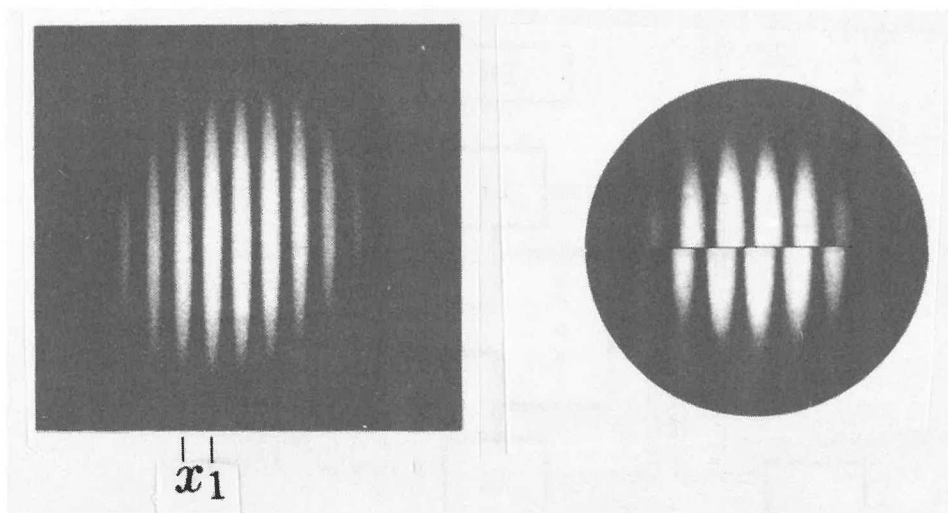
Interferenčne poskuse z vodnim valovanjem in z zvokom kažemo navadno tako, da zanihamo zamaška na istem peresu ali da napajamo zvočnika z istim tonskim generatorjem. Če bi dovolj skrbno zagotovili, da sta zamaška in peresi enaka ter zvočnika in zvočna generatorja enaka, bi se posrečil poskus tudi z neodvisnima izviroma. Čim bolj bi si bila izvira enaka, tem daljši bi bil časovni razmik, v katerem bi se interferenčna slika ne premaknila. Pri svetlobi je drugače. Z navadnim svetilom se posreči interferenčni poskus le, če valovanje razdelimo na delni valovanji in ju sestavimo.



Slika 1. Okvirna risba naprave: TR uravnavanje temperature, L laser Nd/YAG, L1 in L2 barvna laserja, S spektroskop, F fotografski film [4].

Odkar imamo laserje, pa je mogoče delati tudi interferenčne poskuse z dvema izviroma. Prvi poskus, pri katerem so opazovali utripanje v sestavljenem curku iz dveh helij-neonovih laserjev, torej *interferenco v času*, so naredili kmalu po odkritju laserja [1], prvi poskus, pri katerem so opazovali interferenčno sliko, torej *interferenco po kraju*, pa malo pozneje [2]. Pri drugem poskusu so uporabili rubinska laserja, katerih ksenonovi bliskavki je sprožil sunek iz istega izvira. V dobljeni interferenčni sliki so se pokazale proge s šibkim kontrastom, okoli 15 %. Poskus te vrste so pozneje večkrat ponovili. Pri eni od ponovitev so zaznavali posamične fotone in uporabili tako šibko svetlobo, da je bil povprečni čas med fotonoma petdesetkrat daljši od časa, ki ga je potrebovala svetloba od izvira do merilnika [3].

Odtlej so naredili več poskusov te vrste s stabiliziranimi laserji. Enega izmed njih so izvedli na univerzi v Limogesu v Franciji [3]. Interferenčno sliko je bilo mogoče neposredno videti in kontrast je presegel 70%. Stabiliziran neodimski laser je z optičnim črpanjem vzbudil laserja na barvilo, da sta sočasno oddala po 20 ps trajajoča sunka svetlobe z valovno dolžino 568 nm. Svetlobo iz obeh laserjev so sestavili na zaslonu in fotografirali interferenčno sliko (slika 1). Valovni dolžini obeh laserjev so natančno določili s tem, da so naravnali njuno temperaturo. Spekter vsakega od njiju so neposredno opazovali s spektroskopom. Enako jasno interferenčno sliko je dala vsaka ponovitev poskusa. Pri ponovljenem poskusu so bile proge v enakem razmiku, a na malo premaknjenem kraju (slika 2).



Slika 2. Fotografija interferenčne slike na zaslonu (levo). Interferenčno sliko so fotografirali na zaslonu pri prvem in pri drugem poskusu z nepremično kamero. Sliki so prerezali in zlepili zgornji del prve s spodnjim delom druge. Razmik med sosednjima interferenčnima progama se ni spremenil, a proge so se premaknile druge proti drugim (desno) [4].

Razmik med sosednjima interferenčnima progama dobimo iz pogoja za ojačenje $a \sin \beta = N \lambda$, v katerem je a razmik med zrcalcema, ki usmerita

curka iz obeh laserjev na zaslon, β kot proti pravokotnici na zveznico zrcal, λ valovna dolžina in N red interference. Razdalja zaslona od zrcal l je velika v primeri z a , tako da smemo sinus kota nadomestiti z njegovim tangensom in je $ax/l = N\lambda$, če je x razdalja proge od pravokotnice na zveznico zrcal. Razmik med sosednjima progama $x_1 = \lambda l/a$ dobimo za $\Delta N = 1$. Pri opisanem poskusu je merila razdalja zrcal $a = 11,2$ mm in je bil zaslon v razdalji $l = 19,2$ m. Pri valovni dolžini 568 nm dobimo iz enačbe za razdaljo med sosednjima interferenčnima progama $x_1 = 0,97$ mm, kolikor so izmerili. Interferenčno sliko samo približno opišemo z enačbo $j = j_0 \cos^2(\pi a \sin \beta / \lambda) = j_0 \cos^2(\pi ax / l \lambda)$, ker se v sunku s časom spreminja amplituda. Natančnejša enačba je bolj zapletena.

Interferenčna slika pri takem poskusu je jasna, a treba je posebej premisliti, ali sta valovanji iz laserjev neodvisni drugo od drugega. Da, sta neodvisni, čeprav posebej poskrbimo, da laserja sevata sočasno. Fazna razlika med valovanjema v sočasnih sunkih je naključna, a konstantna. Od poskusa do poskusa se spremeni, kar se kaže po tem, da se v podrobnosti lega prog od ene do druge interferenčne slike malo premakne, čeprav ostane razmik med sosednjima progama nespremenjen (slika 2). Veliko lažje uvidimo, da sta laserja neodvisna, pri poskusu, ki sta ga opisala I. Verovnik in A. Likar [5]. Ta poskus zahteva tudi veliko skromnejše naprave, vendar pri njem ni mogoče neposredno opazovati interferenčne slike.

Kako uskladimo izid poskusa s trditvijo P. A. M. Diraca, da foton vselej interferira sam s seboj in nikoli ne z drugim fotonom? Nekateri izjavo sprejmejo, drugi ji ugovarjajo. Zadevo lahko pojasnimo, če se vprašamo, kaj kdo misli. Zares poskus z dvema laserjema prepričljivo pokaže, da interferirata svetlobna curka iz dveh neodvisnih svetil, če sta svetili laserja, kakor interferirata radijski valovanji iz dveh anten.

Dirac je mislil na nekaj drugega, ne glede na to, da ob času, ko je zapisal trditev, še ni bilo laserjev. Želel je opozoriti na to, da je treba kvantizirati vse sevalno polje. Fotone je treba vpeljati v obeh laserskih curkih hkrati. Vemo, da pri Youngovem poskusu, pri katerem zaznavamo fotone s fotopomoževalko, dobimo interferenčno sliko, če ne moremo povedati, skozi katero izmed obeh rež gre kateri foton. Podobno pri poskusu z laserjema dobimo interferenčno sliko, če ne moremo povedati, iz katerega laserja izvira kateri foton. Če bi se potrudili in ugotovili, skozi katero rezo gre foton ali iz katerega laserja izvira, bi interferenčna slika izginila. Tudi opisani poskus opozarja na to, da si ne smemo predstavljati fotona kot nekakšen delec, katerega lego je mogoče bolj ali manj natančno določiti. Foton ima energijo in gibalno količino, a je last vsega sevalnega polja.

Razprava o teh vprašanjih je znova oživela po objavi članka Loradoura in sodelavcev [6], [7]. Pri tem so poudarili, da ne smemo reči, da prihaja en foton iz enega in drugi iz drugega laserja. Dvojica fotonov se vede kot ena sama neločljiva enota, ki ji ni mogoče določiti kraja. Že enemu samemu

fotonu ni mogoče določiti kraja, saj gre lahko skozi dve reži in interferira sam s seboj. En foton lahko izvira iz dveh laserjev. V težave nas zapelje misel, da ohrani vsak izmed obeh fotonov svojo samostojnost. Foton, ki ga izluščimo iz curka, določimo s tem, da ga zaznamo. Dotlej nima nič več samostojnosti kot viski v steklenici, preden ga barman natoči v merico in zlije v kozarec. Vsak foton, ki ga zaznamo pri interferenčnem poskusu z dvema laserjema, nastane s superpozicijo električnega polja iz enega in drugega laserja in v tem smislu izvira iz obeh laserjev.

Najbrž bodo tekle podobne razprave še nekaj časa. Nekateri raziskovalci se namreč ne izražajo natančno ali celo mislijo, da se jim ni treba tako izražati. Navsezadnje ni tako hudo, če se raziskovalci med seboj sporazumevajo bolj po svoje, ker navadno vedo, za kaj gre. Učitelj pa bi se moral izražati precej bolj previdno, saj lahko študente zapelje, da se oprimejo zgrešenih predstav in se teže dokopljejo do razumevanja. V zadnjem času na srečo vendarle naletimo na čedalje več opozoril na napačne predstave o fotonu [8].

LITERATURA

- [1] A. Javan, E. A. Ballik, W. L. Bond, *Frequency characteristics of a continuous-wave He-Ne optical maser*, J. Opt. Soc. Am. **52** (1962), 96.
- [2] G. Magyar, L. Mandel, *Interference fringes produced by superposition of two independent maser light beams*, Nature **198** (1963), 255.
- [3] R. L. Pfleegor, L. Mandel, *Further experiments on interference of independent photon beams at low light levels*, J. Opt. Soc. Am. **58** (1968), 946.
- [4] F. Loradour, F. Reynaud, B. Colombeau, C. Froehly, *Interference fringes between two separate lasers*, Am. J. Phys. **61** (1993), 242.
- [5] I. Verovnik, A. Likar, *Fluktuacijski interferometer*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987), 79.
- [6] P. R. Wallace, *Comment on "Interference fringes between two separate lasers"*, Am. J. Phys. **62** (1994), 950.
- [7] L. M. Davis, C. Parigger, *Comment on "Interference fringes between two separate lasers"*, Am. J. Phys. **62** (1994), 951.
- [8] D. G. C. Jones, *Two slit interference — classical and quantum pictures*, Eur. J. Phys. **15** (1994), 170.

NOVE KNJIGE

BATTESTIN J., Preskusi iz mehanike, samozaložba, Ljubljana, 1994 ; 220 str.

Ing. Jožko Battestin je znan po svojih treh knjigah fizikalnih merjenj: *Fizikalni praktikum I (mehanika, toplota, zvok)*, *Fizikalni praktikum II (elektrika)* in *Optika, osnove in meritve*. Letos je svojo knjižno bero povečal še z razširjenim naborom vaj *Preskusi iz mehanike*. Vaje slonijo na njegovi zbirki demonstracijskih naprav izpred več kot dvajset let, ki jo najdemo v mnogih slovenskih šolah. Zbirka se odlikuje po tem, da domiselno uporabi vsak element za čim večje število poskusov.

Obravnavane vaje so razkošna zakladnica prek 150 praktikumskih in demonstracijskih poskusov iz mehanike od merjenja hitrosti do opazovanja valovanja na vodni površini. Namenjene so predvsem osnovnošolskemu in srednješolskemu programu. Nekatere, npr. opazovanje precesije, ustrezajo univerzitetnemu nivoju.

Navodila so kratka in neposredna. Neposrednost je v tem, da se avtor na začetku brez uvoda sklicuje na merilno napravo, ki je podana s tehnično dovršeno sliko in včasih še s skico. Glavnina je namenjena poteku merjenja. Vedno je dodan tudi dokončno izdelan primer vaje. To za učence sicer lahko na eni strani pomeni potuho, po drugi strani pa jih navaja na red pri delu. V podrobnosti prikazani izračuni predstavljajo vzporedno pot k razumevanju naloge.

Škoda, da so Battestinovo zbirko prenehali izdelovati že pred mnogimi leti in tako na šolah oprema ni popolna. Ker pa je zbirka izrazit primer, kako se da tehnično dovršen poskus napraviti s preprostimi sredstvi, bi bilo prav, če bi se šolske oblasti odločile za projekt *Battestinovo zbirko v vsako slovensko osnovno in srednjo šolo*. S tem bi prihranili precej denarja, mladini pa bi na praktičnem primeru pokazali, kaj v resnici pomeni tehnična ustvarjalnost. Dokler zbirke ne bodo začeli znova izdelovati, si učitelji lahko pomagajo s poenostavljenimi rešitvami. Poleg tega so v knjigi priloženi načrti za vse elemente zbirke.

Čeprav torej na vseh šolah ni dovolj ustreznih kompletov za eksperimentiranje, spada nova knjiga Jožka Battestina Preskusi iz mehanike že sedaj v vsako slovensko šolo. Mnogi starši pa bodo lahko s to knjigo zaposlili svoje najstnike in njihovo mladostno energijo naravnali v ustvarjalno smer.

Franc Cvelbar

HAWKING S., KRATKA ZGODOVINA ČASA, DMFA, Ljubljana, 1994, prevedel U. Kalčič, priredila M. Galičič. 2. izdaja, 182 str.

Slovenski prevod *Kratke zgodovine časa*, knjižice, ki jo je za širok krog bralcev napisal angleški astrofizik Stephen Hawking, je prvič izšel pred štirimi leti. V novi izdaji je prevod izboljššan. *Kratka zgodovina časa* je bila na vrhu lestvice veliko dlje kot katerakoli druga uspešnica. Izšla je v sto izdajah v angleščini in bila prevedena v več kot trideset jezikov. Pri DMFA sta izšla tudi prevoda druge in tretje Hawkingove knjige za širok krog bralcev, *Berilo h kratki zgodovini časa* in zbirke sestavkov *Črne luknje in otroška vesolja*.

Knjižica povezuje kozmologijo s fiziko delcev. Deset poglavij je mogoče razvrstiti v tri skupine, ki ustrezajo trem Hawkingovim raziskovalnim obdobjem. Prva tri poglavja obravnavajo razvoj pogledov na Vesolje. Vesolje opišejo v okviru splošne teorije relativnosti z ukrivljenim četvernim prostorom. Širjenje Vesolja se je v okviru standardnega modela začelo z velikim

pokom. V prvem raziskovalnem obdobju pred letom 1970 je Hawking pod vplivom R. Penrosea dokazoval, da je singularnost na začetku neizbežna.

Po letu 1970 se je Hawking začel ukvarjati s črnimi luknjami, v katerih končajo razvoj zvezde z dovolj veliko maso. Tem so posvečena naslednja štiri poglavja. Zvezda se nezadržno seseda in preostane singularnost. S svojo gravitacijo privlači okolno snov, ki pada proti njej. Spočetka so mislili, da se ne snov ne sevanje ne moreta prebiti iz dela prostora znotraj obzorja dogodkov okoli singularnosti. Hawking pa je vključil v razpravo kvantno mehaniko in termodinamiko in se oprijel misli, da ustreza površina obzorja, ki se ne more zmanjšati, entropiji. Spočetka je ugovarjal J. Beckensteinu, da je mogoče zato črni luknji prirediti temperaturo. Potem pa je spoznal, da se lahko blizu obzorja na račun energije gravitacijskega polja rodi par delec-antidelec. Enega od obeh pogoltne črna luknja, drugi pa odleti. Črna luknja seva kot vsako segreto telo, in to tem izdatneje, čim manjšo maso ima. Po dovolj dolgem času se spremeni v sevanje. Ta čas je tem krajši, čim manjša je njena masa. Črne luknje z zelo veliko maso le malo sevajo, mini črne luknje pa bi kmalu po nastanku eksplodirale, če bi obstajale.

Zadnja tri poglavja obravnavajo Hawkingovo delo po letu 1981, ko se je vrnil k raziskovanju Vesolja. Vesolje spominja na črno luknjo, le da ima večjo maso in se v njem snov giblje navzven, ne navznoter. Po Heisenbergovi neenačbi v kvantni mehaniki ne moremo natančno določiti lege in hitrosti delca. S tem ni mogoče uskladiti singularnosti ob velikem poku. Vesolje neposredno po velikem poku bi morali opisati v okviru kvantne teorije gravitacije, ki pa je še nimamo. Hawking je na poti do delnih rezultatov izhajal iz domneve, da je Vesolje končno, a neomejeno, in da nima ne začetka ne konca. Uvedel je tri smeri časa – vesoljsko, termodinamično in psihološko – in zahteval, da se v Vesolju vse tri ujemajo. Kot je prej zavzeto dokazoval, da se je Vesolje začelo s singularnostjo, zdaj zagotavlja, da na začetku ni bilo singularnosti. Hawking dokaj prepričano zastopa stališče, da obstaja teorija vsega, ki zajame vse vrste interakcij, tudi gravitacije, in sodi, da bomo to teorijo kmalu odkrili.

Knjižico je treba toplo priporočiti vsem, ki je še niso prebrali. Iz kritične razdalje ne motijo Hawkingova včasih nekoliko napeta stališča. Podobna je zaslediti tudi pri nekaterih drugih kozmologih, ki so na glasu, da se večkrat motijo, a nikoli ne dvomijo.

Janez Strnad

UTRINEK

Matematično vesolje nastaja iz obdajajoče nas realnosti tako, kakor nastajajo sanje iz vsakdanjih dogodkov.

S. Stein

VESTI

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavod za šolstvo in šport v sodelovanju z Univerzo v Ljubljani organizira seminar za učitelje fizike:

FIZIKA Z ZVEZDICO

Seminar sodi v okvir priprav na maturo in se nanaša na vsebine, ki so v Maturitetnem katalogu za fiziko označene z zvezdico. Potekal bo v Veliki predavalnici na Jadranski 26 v Ljubljani 10. in 11. februarja 1995.

PROGRAM SEMINARJA

Petek, 10.2.1995

- 900–1030 M. Rosina, *Kaj naj bi dijaki srednjih šol izvedeli o osnovnih delcih*
1100–1230 M. Pleško, *Tržaški sinhrotron – ni vsak pospeševalnik za jedrsko fiziko*
1235–1405 I. Arčon, *Rentgenska svetloba, okno v svet atomov*
1515–1700 P. Gosar, *Poskusi s polprevodniki*
1705–1735 F. Tomažič, *Poučevanje trdne snovi – pogled iz šolske prakse*
1740–1800 M. Potokar, *Pedagoška sekcija za fiziko*

Sobota, 11.2.1995

- 800– 930 J. Ferbar, *Kaj po fiziki za vsakogar ostane velikim?*
945–1300 Aktiv fizikov Gimnazije Bežigrad, *Izkušnje s skupinskim preverjanjem znanja*

Na seminar posebej vabimo tudi učitelje osnovnih šol in druge člane Društva. Na šole bomo poslali tudi uradna vabila.

Seta Oblak in Maruša Potokar

Obzornik za matematiko in fiziko 41 (1994) številke 1–6, str. 1–192

Matematika — Računalništvo

- Fullereni — Fullereni (Tomaž Pisanski) 1–7
Odvajanja na prakolobarjih — Derivations on the prime rings (Joso Vukman) 8–14
Farkaseva lema — Farkas' lemma (Bojan Mohar) 15–25
Fermatov problem končno rešen? — Fermat's last theorem finally proved? (Ivan Vidav) 33–44
Urejeni številski obsegi — Ordered fields (Boris Lavrič) 45–50
Realne algebre, ki zadoščajo kvadratni enačbi — Real algebras satisfying quadratic identity (Borut Zalar) 51–58
Delno urejeni številski kolobarji — Partially ordered rings of real numbers (Boris Lavrič) 83–91
Stabilnost homomorfizmov — Stability of homomorphisms (Peter Šemrl) 97–106
Nelinearno programiranje — Non-linear programming (Anton Cedilnik) 109–116
XXII. mednarodni kongres matematikov — XXIIth International Congress of Mathematicians (Dušan Repovš) 129–140

Sebi podobnost in dimenzija fraktalov — Self-similarity and fractal dimensions (Leila Marek-Crnjac)	141-147
Simplektične preslikave — Symplectic maps (Miran Černe)	161-169
Odvajanja na prakolobarjih, II — Derivations on prime rings, II (Joso Vukman) ..	170-177
Dinamični lokacijski problem — A dynamic location problem (Sandi Klavžar)	178-186

Fizika — Astronomija

Radon v okolju — Radon in our environment (Andrej Likar)	59-63
Termodinamika transportnih pojavov — Thermodynamics of transport pro- cesses (Ivan Kuščer)	65-82
Odlaganje radioaktivnih odpadkov — Disposal of nuclear waste (Matjaž Ravnik)	117-121
Fizika iz Karlsruheja: O novostih v poučevanju fizike — The Karlsruhe physics course: On new approaches in physics teaching (Janez Strnad)	122-128
Nenavadni interferenčni poskusi I. Youngov poskus z ionoma — Unusual inter- ference experiments I. Young's experiment with two ions (Janez Strnad)	149-153
Nenavadni interferenčni poskusi, Interferenčni poskus z laserjema — Unusual interference experiments, Interference experiment with two lasers (Janez Strnad)	187-190

Vesti — Vabila — Obvestila

Vabilo (I. Mulec in F. Cvelbar)	25
Ali smo pripravljeni na maturo iz fizike? (Maruša Potokar)	26-28
45. Občni zbor društva (Martina Koman)	29-III
Pismo ministrstvu za šolstvo in šport (Franc Cvelbar)	III-IV
Obvestilo	IV
Prof. Djuro Kurepa in memoriam (Anton Suhadolc)	VII
Novi člani DMFA Slovenije v letu 1993 (Martina Koman)	VIII
Razpis učiteljem (Ivana Mulec)	92
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matema- tike in fizike v letu 1993 (Martina Koman)	93-XI
Drugo obvestilo in vabilo za prispevke (Zvonko Trontelj)	XI-XII
Dopolnilno izobraževanje (Matija Lokar)	106-107
Strokovno spopolnjevanje učiteljev matematike (Milan Hladnik)	107-108
Ob odprtem grobu Ivana Štalca (Dušan Modic)	128-XV
Vabilo prvi kongres matematikov, vabilo na občni zbor društva in vabilo na proslavo 200-letnice popolne zakladnice logaritmov (Z. Trontelj, F. Cvelbar in F. Gradišek)	XV-XVI
Pouk fizike na nizozemskem (Seta Oblak)	154-156
Zasedanje Mednarodne matematične unije in Evropskega matematičnega dru- stva v Švici (Peter Legiša)	157-160
Priznanja DMFA učiteljem matematike in fizike (Ivana Mulec)	160-XX
Fizika z zvezdico (Seta Oblak in Maruša Potokar)	XXIII

Nove knjige

Devlin K., Nova zlata doba matematike (Anton Suhadolc)	64-VII
Barry S., The Statistical Mechanics of Lattice Gasses (Igor Vilfan)	91
Sinai, Ya. G., Topics in Ergodic Theory (Peter Petek)	91-92
Hawking, S., Črne luknje in otroška vesolja ter drugi eseji (Janez Strnad)	147-148
Battestin J., Preskusi iz mehanike (Franc Cvelbar)	190-191
Hawking S., Kratka zgodovina časa (Janez Strnad)	191-192

Utrinek (izbral Boris Lavrič)	192
-------------------------------------	-----