



ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

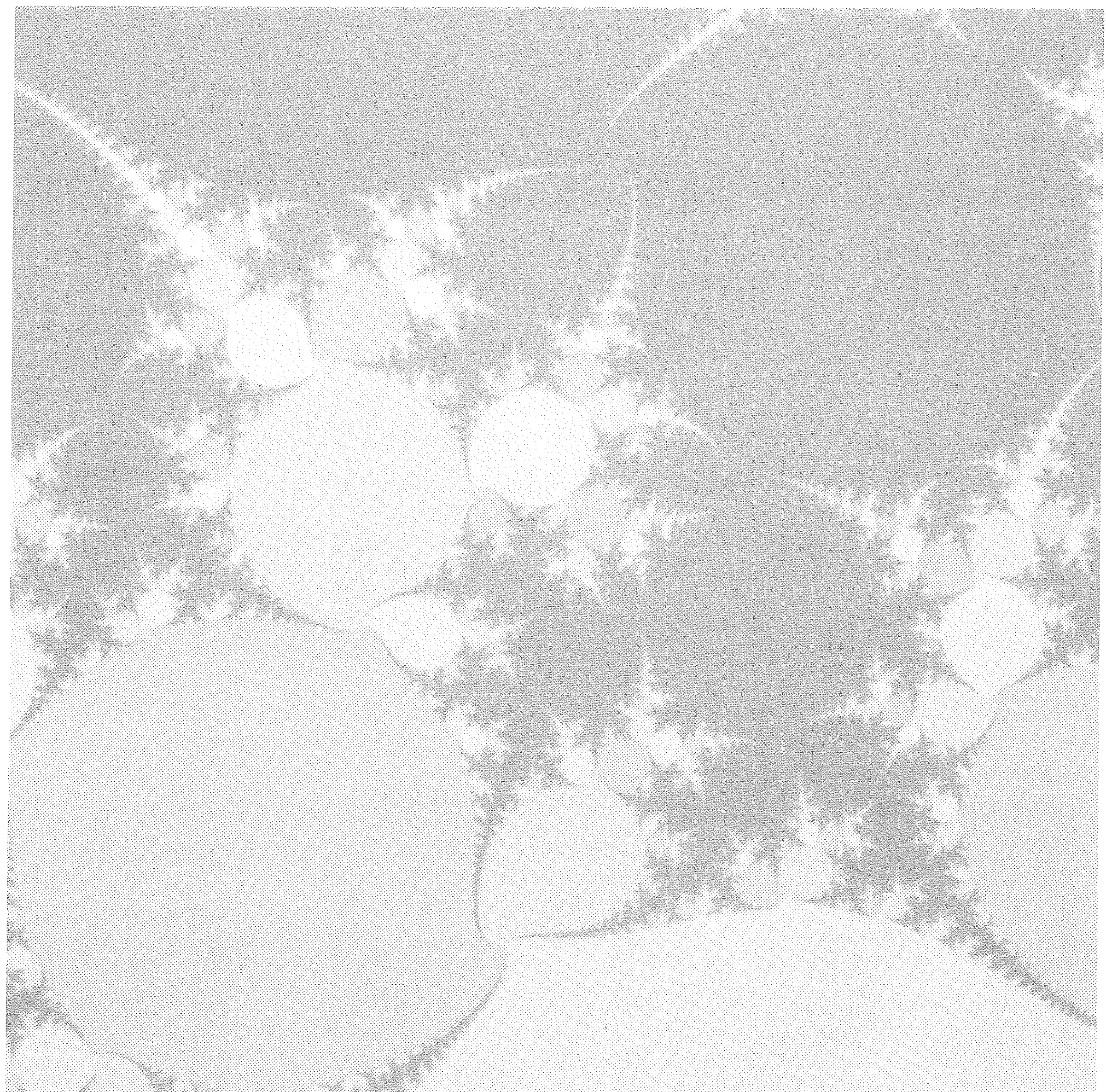
SSN 0473-7446

1994

Letnik 41

5

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1994

letnik 41, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

**Uredniški odbor:** Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.900,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.800,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, dvojna številka 800,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 DMFA Slovenije – 1221

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

## VSEBINA — CONTENTS

### Članki — Articles

Str.–Page

|                                                                                                                                                            |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| XXII. mednarodni kongres matematikov — XXII <sup>th</sup> International Congress of Mathematicians (Dušan Repovš) . . . . .                                | 129–140 |
| Sebi podobnost in dimenzija fraktalov — Self-similarity and fractal dimensions (Leila Marek-Crnjac) . . . . .                                              | 141–147 |
| Nenavadni interferenčni poskusi I. Youngov poskus z ionoma — Unusual interference experiments I. Young's experiment with two ions (Janez Strnad) . . . . . | 149–153 |

### Vesti — News

|                                                                                                                                                 |         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Pouk fizike na nizozemskem (Seta Oblak) . . . . .                                                                                               | 154–156 |
| Zasedanje Mednarodne matematične unije in Evropskega matematičnega društva v Švici (Peter Legiša) . . . . .                                     | 0–160   |
| Priznanja DMFA učiteljem matematike in fizike (Ivana Mulec) . . . . .                                                                           | 160–IV  |
| Nove knjige — New books (Janez Strnad) . . . . .                                                                                                | 147–148 |
| Na ovitku: Slika fraktala pri iteracijah tipa $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$ , imenovana „otočne molekule“. (Glej tudi članek na strani 141.) |         |

# XXII. MEDNARODNI KONGRES MATEMATIKOV

DUŠAN REPOVŠ

Math. Subj. Class. (1991) 01A65, 01A99

V članku je prikaz najpomembnejših dogodkov na XXII. mednarodnem kongresu matematikov, ki je bil v Zürichu od 3. do 11.8.1994. Na kratko so prikazani tudi letošnji prejemniki Fieldsovih medalj ter Nevanlinnove nagrade.

## XXII<sup>TH</sup> INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

The paper describes the most important events on the XXII<sup>th</sup> International Congress of Mathematicians which was held in Zürich from August 3 to August 11, 1994. There is also a short description of this year recipients of the Fields medals and the Nevanlinna prize.

### 1. Uvod

V Zürichu je od 3. do 11. avgusta 1994 potekal *22. mednarodni kongres matematikov*, na katerem se je zbralo skoraj tri tisoč udeležencev iz približno sto držav z vseh koncev sveta. Prvo podobno srečanje je bilo davnega leta 1893 v Chicagu. Naslednje je bilo štiri leta kasneje v Zürichu, nato v jubilejnem letu 1900 v Parizu, potem pa so si srečanja bolj ali manj redno sledila na vsaka štiri leta: vzrok za nerednost sta bili najprej seveda obe svetovni vojni in kasneje težave z vojaškim režimom na Poljskem leta 1982. Tudi Obzornik je že poročal o nekaterih izmed teh kongresov [12] (glej tudi nekatere zapise drugod, npr. [11], [13], [14]). Pri imenih krajev, v katerih so ti kongresi bili, posebej izstopa prav Zürich, saj je bil samo tam kongres več kot enkrat (celo trikrat): 1897, 1932 in 1994. (Če koga zanima kaj več o zgodovini mednarodnih kongresov, ga vabim, da si prebere zanimivo in bogato ilustrirano knjigo [2]).

Matematiki sicer neprestano po vsem svetu organizirajo številna mednarodna srečanja, na katerih obravnavajo ožja področja sodobne matematike, tako teoretične kot tudi uporabne. Naj pripomnimo, da na številnih konferencah zelo uspešno sodelujejo tudi Slovenci, pogosto celo kot vabljeni plenarni predavatelji, kar nedvomno priča o ugledu in kvaliteti naše matematične šole (za bežno informacijo glej npr. [20]). Takšna srečanja so za uspešno raziskovalno delo nujna, saj so to pomembne priložnosti, da se predstavijo najnovejši rezultati, problemi in hipoteze, obenem pa medsebojno izmenjajo pisna in druga gradiva (preprinti in reprinti).

Kdo bi morda mislil, da povsem zadošča razposlati nekaj izvodov članka na izbrane naslove, in svet bo dovolj seznanjen z novim rezultatom. Praksa pa kaže, da si le redki prejemniki vzamejo čas in preberejo kaj več kot naslovno stran. Mnogo bolj odmevna je predstavitev na kongresu, kjer lahko avtor (če seveda to zna) enostavno in zanimivo prikaže glavne rezultate svojih raziskav. Obenem lahko tako tudi hitreje izve, ali se je s podobno tematiko neodvisno od njega ukvarjal še kdo. Neredko se dogaja, da isti rezultat

na različnih koncih sveta skorajda hkrati dokažeta dva matematika, včasih celo s povsem različnimi metodami.

V nasprotju z ozko usmeritvijo takih konferenc pa so mednarodni kongresi matematikov namenjeni predvsem širokemu pregledu najpomembnejših rezultatov na *vseh* področjih matematike, ki so jih odkrili v (okvirno) zadnjih štirih letih. V ta namen povabijo najuglednejše specialiste s posameznih področij in le-ti pripravijo bodisi 60-minutno *plenarno* predavanje, ki ga lahko potem poslušajo prav vsi udeleženci, ali pa 45-minutno *sekcijsko* predavanje, ki pa je že bolj namenjeno specialistom.

Tako so bila letos v Zürichu zastopana naslednja področja sodobne matematike (v oklepaju je navedeno število 45-minutnih vabljenih predavanj v sekciji, ki kar lepo ilustrira dinamiko raziskav v preteklem štiriletnem obdobju):

- |                                                    |                                                           |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. Logika (4)                                      | 11. Parcialne diferencialne enačbe (13)                   |
| 2. Algebra (7)                                     | 12. Navadne diferencialne enačbe in dinamični sistemi (8) |
| 3. Teorija števil (8)                              | 13. Matematična fizika (11)                               |
| 4. Geometrija (12)                                 | 14. Kombinatorika (6)                                     |
| 5. Topologija (10)                                 | 15. Matematični aspekti računalništva (5)                 |
| 6. Algebraična geometrija (7)                      | 16. Numerična analiza (6)                                 |
| 7. Liejeve grupe in reprezentacije (10)            | 17. Uporaba matematike v drugih znanostih (10)            |
| 8. Realna in kompleksna analiza (10)               | 18. Pouk in popularizacija matematike (3)                 |
| 9. Operatorske algebre in funkcionalna analiza (6) | 19. Zgodovina matematike (3)                              |
| 10. Verjetnost in statistika (10)                  |                                                           |

Poglejmo si še seznam 60-minutnih plenarnih predavanj. (Pravzaprav so potem med kongresom *ad hoc* organizirali še plenarni predavanji dobitnika Fieldsove medalje *E. Zelmanova* ter Nevanlinnovega nagrajenca *A. Widger-sona* – glej 2. poglavje!)

1. L. Babai (University of Chicago, ZDA in Eötvös Loránd University, Madžarska), *Transparent proofs and limits to approximation.*
2. J. Bourgain (Institute for Advanced Study, ZDA in Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Francija), *Harmonic analysis and partial differential equations.*
3. J. H. Conway (Princeton University, ZDA), *Groups and lattices.*
4. I. Daubechies (AT&T Bell Laboratories in Princeton University, ZDA), *Wavelets and other phase space localization tools.*
5. J. Fröhlich (ETH-Zürich, Švica), *The fractional quantum Hall effect, Chern-Simons theory, and integral lattices.*
6. J. B. Keller (Stanford University, ZDA), *Wave propagation.*
7. P.-L. Lions (Université Paris-Dauphine, Francija), *On some recent methods in non-linear partial differential equations.*
8. M. Kontsevich (Max-Planck-Institut für Mathematik, Nemčija in University of California, ZDA), *Homological algebra of mirror symmetry.*
9. M. Ratner (University of California, ZDA), *Interactions between ergodic theory, Lie groups and number theory.*
10. P. Seymour (Bell Communications Research, ZDA), *Hadwiger's conjecture and the four-color theorem.*

11. C. H. Taubes (Harvard University, ZDA), *Anti-self dual geometry*.
12. S. R. S. Varadhan (Courant Institute, ZDA), *Entropy methods in hydrodynamics scaling*.
13. V. A. Vassiliev (Independent University of Moscow in Institute for System Studies, Rusija), *Topology of discriminants and their complements*.
14. D. Voiculescu (University of California, ZDA), *Free noncommutative probability theory, random matrices and von Neumann algebras of free groups*.
15. A. Wiles (Princeton University, ZDA), *Modular forms and elliptic curves*.
16. J.-C. Yoccoz (Université Paris-Sud, Francija), *Recent developments in dynamics*.

Bralce Obzornika utegnejo še posebej zanimati plenarna predavanja o poučevanju in popularizaciji matematike (18. kongresna sekcija):

1. D. H. Hallett (University of Arizona, ZDA), *The role of technology in the teaching of mathematics*.
2. J. Schneider (Children's Television Workshop, ZDA), *Popularization of Mathematics. A survey*.
3. J. Stillwell (Monash University, Australia), *Number theory as a core mathematical discipline*.

Poleg tega je tudi Mednarodni komite za pouk matematike (ICMI) organiziral nekaj posebnih (obkongresnih) predavanj:

1. J. Kilpatrick (University of Georgia, ZDA) in A. Sierpiska (Concordia University, Kanada), *What is research in mathematics education? Preliminary outcomes of an ICMI study*.
2. C. Mauduit (Université de Aix-Marseille II, Francija), *Challenging mathematical activities for young people*.
3. R. Penrose (University of Oxford, Velika Britanija), *Cultural impacts of mathematics*.
4. H. O. Pollak (Columbia University, ZDA), *The role of applications in mathematical education*.
5. D. Tall (University of Warwick, Velika Britanija), *Understanding the processes of advanced mathematical thinking*.

## 2. Fieldsove medalje

Kot običajno je bilo najbolj svečano na prvi dan kongresa, ko se je v veliki kongresni dvorani zbralo več tisoč udeležencev in gostov. Najprej so imeli pozdravne nagovore predstavniki Mednarodne matematične unije ter organizacijskega odbora kongresa, potem pa so prišli na vrsto tudi lokalni politiki. Med slednjimi je zelo izstopala švicarska zvezna ministrica *Ruth Dreifuss*, ki je med drugim pristojna tudi za znanost in šolstvo. Svoj govor je zelo skrbno pripravila. Že dolgo pred kongresom je razposlala številnim znanim matematikom po svetu (npr. M. Atiyahu, A. Borelu, R. Bottu, F. Hirzebruchu in R. Thomu) pisma, v katerih jim je zastavila naslednja tri vprašanja:

- (1) Bojim se, da v nasprotju s harfistko, ki lahko očara druge s svojo glasbo, čista matematika svoje umetnosti ne more narediti dostopne

širši javnosti. Kako lahko torej upraviči svojo dejavnost pred državo, ki jo financira?

- (2) Ali se je matematika doslej izogibala razpravi o etičnih posledicah tega, kar počne?
- (3) Koliko mest naj bi oddali matematikom na naslednjem razpisu za redne profesorje na znameniti Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) v Zürichu, če bi jih bilo na voljo denimo deset?

Dobila je zelo različne odgovore. Thom je na primer odgovoril, da je matematika etično nevtralna, Eckmann, da je vprašanje o etičnosti irelevantno, Bott pa, da je konec obdobja nedolžnosti za vse nas. Na tretje vprašanje je večina vprašanih odgovorila, da naj bi matematikom oddali 4 ali 5 mest, edino Griffiths je menil, da vseh deset (v resnici pa gre matematiku le eno mesto od dvajsetih).

Za svoj odlični nastop je ministrica doživela burno odobravanje tako udeležencev kot tudi številnih domačih novinarjev, ki so jo v svojih poročilih postavili kar ob bok Fieldsovim nagrajencem [21].

Predsednik organizacijskega odbora kongresa *Henri Carnal* je posebej poudaril, da je na njihovo izredno veselje v Zürich lahko pripotovala tudi tričlanska delegacija iz *Bosne in Hercegovine*. Naši kolegi, ki so se več dni prebijali iz opustošenega Sarajeva, so zaslužno dobili najsilovitejši aplavz na tem kongresu.

Starosta švicarskih matematikov *Benno Eckmann*, častni predsednik kongresa, je kljub svoji častitljivi starosti predstavil izredno ognjevit govor, ki ga je začel v tekoči francoščini, nadaljeval v nemščini in italijanščini, končal pa v angleščini. Ena od osrednjih tem njegovega govora je bila prihodnost matematike in predvsem njegov osebni odnos do čedalje večje uporabe računalnikov v njej. Razhudil se je nad vse splošnejšo miselnostjo (seveda med nematematiki), da bodo računalniki lahko že kmalu povsem zamenjali matematiko (in matematike), in pribil, da bo matematika ostala tukaj, pa če je to njenim kritikom prav ali ne.

*Eckmann* se je še posebej jezil nad člankom [6], ki je lansko jesen izšel v znani reviji *Scientific American* s provokativnim naslovom *Smrt dokaza*. V njem je avtor, ki sicer ni matematik, umetno zlepil čuden kolaž, sestavljen iz (delno tudi potvorjenih) citatov znanih sodobnih matematikov, kot npr. dobitnika Fieldsove medalje, ameriškega topologa *W. Thurstona* ali pa britanskega strokovnjaka za teorijo števil *A. Wilesa* (čigar ime je lani obšlo ves svet, ko je naznanil dokaz Fermatovega izreka – na žalost, kot se je izkazalo, je imel dokaz usodno *vrzel*). Na osnovi tega teksta je potem avtor izpeljal sklep, da je matematični dokaz že kar takoj za v staro šaro in da bodo lahko računalniki kmalu povsem nadomestili matematike.

Članek je že takoj po izidu izzval jezne reakcije najuglednejših matematikov (glej npr. [9]). Je pa treba v zvezi s tem vendarle pripomniti, da se zadnje čase v ZDA javno prepirajo o možnosti, da bi se v matematiki dovoljeval tudi *približen* dokaz, nekako v duhu metod teoretične fizike (glej članek [8], ki je izzval burne odzive v kasnejši številki te revije [3] [16]).

Najteže pričakovani trenutek otvoritvene svečanosti je bila brez dvoma razglasitev dobitnikov Fieldsovih medalj za leto 1994. *John Charles Fields*

(1863–1932) je bil zelo znan in ugleden profesor na University of Toronto ter nekdanji predsednik *Mednarodne matematične unije*. Ker za matematiko niso podeljevali nagrad, ki bi bile primerljive z Nobelovimi, se je odločil ustanoviti posebno nagrado za matematike, mlajše od 40 let, ki naj bi jo podeljevali vsake štiri leta na mednarodnih kongresih matematikov. Namen teh nagrad naj bi bil, da spodbudijo najuspešnejše mlade matematike in jih nagradijo za njihove vrhunske dosežke. Fields je tudi prispeval sredstva za osnovni denarni sklad, po njegovi smrti pa so nagrado poimenovali po njem (čeprav je menda temu v svoji oporoki izrecno nasprotoval).

Razlog, da je Fields postavil relativno nizko starostno mejo za nagrajence, je v tem, da jih je želel motivirati za *nadaljevanje* uspešnega dela. Tako je Fieldsova medalja tudi v tem pogledu drugačna od Nobelovih nagrad, ki so največkrat vrhunska priznanja za *življenjsko* delo.

Prvi Fieldsovi medalji so podelili šele leta 1936 na XI. mednarodnem kongresu v Oslu, prejela pa sta ju Finec *Lars Valerian Ahlfors* in Američan *Jesse Douglas*.

Naslednji prejemniki tega odličja pa so: *A. Selberg* in *L. Schwartz* (Cambridge, ZDA, 1950), *K. Kodaira* in *J.-P. Serre* (Amsterdam, 1954), *K. Roth* in *R. Thom* (Edinburgh, 1958), *L. Hormander* in *J. Milnor* (Stockholm, 1962), *M. Atiyah*, *P. J. Cohen*, *A. Grothendieck* in *S. Smale* (Moskva, 1966), *A. Baker*, *H. Hironaka*, *S. P. Novikov* in *J. Thompson* (Nica, 1970), *E. Bombieri* in *D. Mumford* (Vancouver, 1974), *P. Deligne*, *C. Fefferman*, *G. Margulis* in *D. Quillen* (Helsinki, 1978), *A. Connes*, *W. Thurston* in *S.-T. Yau* (Varšava, 1983), *S. K. Donaldson*, *G. Faltings* in *M. H. Freedman* (Berkeley, 1986) ter *V. G. Drinfeld*, *V. F. R. Jones*, *S. Mori* in *E. Witten* (Kyoto, 1990).

Danes torej podeljujejo največ po štiri medalje naenkrat. Fieldsova medalja je vlita iz zlata, na sprednji strani je odtisnjena podoba *Arhimeda* ter njegov znameniti stavek *Transire suum pectus mundoque potiri*,<sup>1</sup> na hrbtni strani pa je zapisano *Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere*.<sup>2</sup>

Fieldsove nagrade se po denarni vrednosti zagotovo ne morejo primerjati z Nobelovimi. Vendar je tudi to relativno – leta 1990 so na 21. kongresu, ki je bil v Kyotu na Japonskem, Fieldsovi nagrajenci dobili vsak po 2 milijona jenov, poleg tega pa jih je osebno sprejel sam japonski cesar. Nasploh so se tistikrat japonski časopisi navdušeno razpisali predvsem o japonskem nagrajencu *Shigefumiju Moriju*, algebraičnem geometru, ki je čez noč postal nacionalni heroj. Povprečen Japonec je dobil podobo, da se je v Kyotu zbralo štiri tisoč ljudi samo zato, da bi Moriju izročili ugledno priznanje (o drugih treh nagrajencih pa skorajda ni bilo besede).

Letošnji prejemniki Fieldsove medalje so: *Jean Bourgain*, *Pierre-Louis Lions*, *Jean-Christophe Yoccoz* in *Efim Zelmanov*. Podrobnejše zapise o delih nagrajencev bomo lahko prebrali v zborniku vabljenih predavanj iz

---

<sup>1</sup> *Preseči svoje srce (oz. okvire svojega duha) in se polastiti sveta (oz. zaobjeti ves svet).*

<sup>2</sup> *Matematiki, zbrani z vsega sveta, podeljujejo to pisno priznanje (oz. odlikovanje).*

tega kongresa, ki bo prihodnje leto izšel pri švicarski založbi *Birkhäuser*, mi pa si bomo v nadaljevanju ogledali le kratke portrete vsakega izmed njih.

### 3. Portreti nagrajencev

*Jean Bourgain* se je rodil leta 1954 v Belgiji. Sedaj dela kot raziskovalec hkrati kar na dveh znanih inštitutih, na Institut des Hautes Etudes Scientifiques (Bures-sur-Yvette, Francija) [10] in Institute for Advanced Studies (Princeton, ZDA).

Podobno delajo hkrati na dveh različnih koncih sveta še številni drugi znani matematiki, denimo Američan *Dennis Sullivan*, specialist za topologijo in kompleksne dinamične sisteme, ki je v vsakem zimskem semestru na IHES, v letnem pa na City University of New York (New York, ZDA), kar lepo dokazuje, da lahko vrhunski matematik izvrstno zasluži. Spominjam se, kako sva v zimskem semestru 1986/87 s Sullivanom istočasno gostovala na University of Texas (Austin, ZDA). Takrat so petrolejski meceni podarili velik znesek tamkajšnji univerzi za posebno profesorsko stolico. Kandidata sta bila dva, poleg Sullivana še Kitajec *Shing-Tung Yau*, Fieldsov nagrajenec iz leta 1983. Na koncu se nobeden od njiju ni odločil za ponujeno mesto, čeprav je bila osnovna bruto letna plača čez sto tisoč dolarjev, pedagoške obveznosti minimalne, administrativne pa ničelne.

Bourgainovo delo je na kongresu predstavil *Louis A. Caffarelli* iz Institute for Advanced Study (Princeton, ZDA), ki je posebej v ta namen prejšnji večer priletel iz Južne Amerike. Verjetno je bil ravno zaradi utrujenosti njegov nastop precej slabo pripravljen – doživel je celo glasne protestne medklice iz tisočglave publike, kar je dokaj nenavadno (razen morda v ZDA).

Bourgain je prejel Fieldsovo medaljo za vrhunske rezultate na izjemnem številu različnih področij moderne matematike (v tem pogledu je izstopal med letošnjimi nagrajenci): v geometriji Banachovih prostorov, konveksnosti v višjih dimenzijah, harmonični analizi, ergodični teoriji in nelinearnih evolucijskih enačbah. Rešil je številne klasične probleme s teh področij (npr. dokazal je, da sta nelinearna Schrödingerjeva enačba in Korteweg-de Vriesova enačba s singularnimi robnimi pogoji dobro definirani) in našel popolnoma nove prijeme tam, kjer se je razvoj že pred mnogimi leti praktično ustavil. To mu je uspelo s kombinacijo novih tehnik, s katerimi je uspešno črpal iz med seboj na videz zelo oddaljenih področij, kot so npr. teorija števil, kombinatorika in verjetnostni račun. Uspelo mu je najti povezavo med geometrijo in Fourierovo analizo in s tem povsem nov prijem v realni analizi in parcialnih diferencialnih enačbah.

*Pierre-Louis Lions* se je rodil leta 1956 v Franciji. Sedaj je profesor na Université Paris-Dauphine (Pariz, Francija). Njegovo delo je na kongresu predstavil *S. R. S. Varadhan* iz City College of the New York University (New York, ZDA), eden najuglednejših specialistov na svetu za verjetnostni račun [17].

Lionsov oče je prav tako zelo znani *Jacques-Louis Lions*, profesor na znamenitem Collège de France v Parizu, ki je bil tudi dosednji predsednik Mednarodne matematične unije (IMU). Ker IMU podeljuje Fieldsove medalje, so predvsem Američani (potiho) negodovali nad francoskim „nepotizmom“, bržda zato, ker tokrat prvič po dolгих letih ni bilo nobenega njihovega matematika med nagrajenci.

Lions je prejel Fieldsovo medaljo za vrhunske rezultate na področju (predvsem nelinearnih) parcialnih diferencialnih enačb. Eden od glavnih problemov na tem področju je že vrsto let, kako poenostaviti širok razred primerov in razviti teorijo o eksistenci, enoličnosti in stabilnosti teh enačb. Lions je bil eden od glavnih odkriteljev take teorije, ki so jo poimenovali *viskozna metoda*. Danes je ta metoda že skorajda do popolnosti poenostavljena in razširjena na velik razred enačb ter ima velik pomen v uporabni matematiki. Poleg tega je Lions nedavno dosegel tudi velik napredek v teoriji Boltzmannove enačbe in podobnih transportnih enačb, razvil pa je nove metode tudi na področju variacijskih problemov. Komisija je ocenila, da je bil na tem področju Lions v zadnjih 15 letih vodilna oseba.

Ob tej priložnosti mi je prišel na misel moj prvi dan predavanj profesorja F. Križaniča iz parcialnih diferencialnih enačb, ki smo jih poslušali v tretjem letniku, v šolskem letu 1975/76. Začel je z ugotovitvijo, da pač veliko dela ne bomo imeli, saj so parcialne diferencialne enačbe v bistvu le treh vrst: *eliptične*, *parabolične* in *hiperbolične*. Potem se je namuznil in dejal, da se v bistvu delijo le na *dve* vrsti: na tiste, ki jih znamo rešiti, in tiste, ki jih srečamo v praksi. No, prav s slednjimi se je, kot kaže, uspešno spoprijel Lions in za to prejel zaslužen nagrado.

*Jean-Christophe Yoccoz* se je rodil leta 1957 v Franciji. Sedaj je profesor na Université de Paris-Sud (Orsay, Francija). Njegovo delo je na kongresu predstavil *Adrien Douady* iz Université de Paris-Sud (Orsay, Francija), eden najbolj znanih specialistov za dinamične sisteme.

Douady je ena najnenavadnejših oseb, kar jih poznam. Kot pravi Francoz govori le „francosko“ angleščino (z velikansko hitrostjo), v javnosti pa se običajno pojavlja v precej dopustniški opravi, denimo bos. Njegovo predavanje je bilo zelo zanimivo (komur ga je uspelo razumeti), opremljeno s slikovitimi ilustracijami. Na koncu je Douady naredil zanj značilno nenavaden sklep, daje Yoccoz izvrstni proizvod francoskega izobraževalnega sistema, ki pa ga žal, posebej v srednjih šolah, sedanja vlada menda uspešno uničuje. Iz aplavza, ki ga je za to opombo požel, sklepam, da nimajo s šolskimi reformami slabih izkušenj le pri njih (in pri nas!), marveč še marsikje po svetu.

Yoccoz je prejel Fieldsovo medaljo za vrhunske rezultate na področju dinamičnih sistemov, na katerem ga štejejo za enega najbriljantnejših specialistov. Dinamični sistemi izvirajo iz Poincaréjevega dela v nebesni mehaniki izpred približno sto let, konkretno analize gibanja planetov v našem Osončju. Iz tedanjih časov je vse do danes ostal nerešen t.i. problem *majhnih imenovalcev*, ki je povezan s stabilnostjo planetarnega sistema. Namreč, medsebojna privlačnost med planeti povzroča, da orbite, po katerih planeti krožijo okrog Sonca, niso elipse – kot so napovedovali Keplerjevi zakoni – zato se je pojavilo vprašanje, ali je Osončje *stabilen* sistem.

Pred približno petdesetimi leti je *C.-L. Siegel* opredelil matematično vsebino tega vprašanja in ga prevedel na *problem stabilnosti*. Siegel je že sam našel presenetljiv kriterij stabilnosti. Eden od Yoccozovih najpomembnejših rezultatov je bil prav ta, da je dokončno rešil problem tako, da je našel natančne meje, znotraj katerih ta teorija velja. Pri tem še bolj preseneča, da je to dosegel z originalno kombinacijo idej in pojmov iz analize in geometrije ter z uporabo tehnik, ki so podobne t.i. renormalizaciji v matematični fiziki. Poleg tega je dosegel pomembne rezultate pri študiju fraktalov v kompleksni dinamiki.

*Efim Zelmanov* se je rodil leta 1955 v nekdanji Sovjetski zvezi. Sedaj je profesor na University of Wisconsin (Madison, ZDA), pred tem pa je vrsto let delal na Matematičnem inštitutu (bivše) Sovjetske Akademije znanosti v Novosibirsku. Njegovo delo je na kongresu predstavil *Walter Feit*, eden najbolj znanih specialistov za teorijo grup (pomembno je sodeloval pri dokončni rešitvi problema *klasifikacije končnih grup*), ki je profesor na Yale University (New Haven, ZDA).

Zelmanov je prejel Fieldsovo medaljo za briljantno rešitev znamenite t.i. *omejene verzije Burnsideovega problema* iz teorije grup. Pravzaprav obstajajo kar *tri* verzije Burnsideovega problema, prvi dve sta bili formulirani že leta 1902 in sta ju že pred leti rešila S. I. Adyan in P. S. Novikov iz Steklovskega matematičnega inštituta v Moskvi [1]. Problema sprašujeta, ali je vsaka končno generirana torzijska grupa  $G$  končna ali pa ima omejen *eksponent*, to je tako najmanjše število  $n$ , za katero je  $x^n = 1$  pri vseh  $x \in G$ . *Omejeni Burnsideov problem* pa izvira iz leta 1930 in sprašuje, ali obstaja zgornja meja za red grupe  $G$ , ki ima končno število generatorjev in dan eksponent  $n$ . Zelmanov je pred približno petimi leti rešil ta problem, in sicer je dokazal, da taka meja res obstaja [18] [19].

Že kot študent matematike na Univerzi v Novosibirsku se je Zelmanov odlikoval po svoji izjemni nadarjenosti, saj je prve znanstvene razprave objavil, ko je bil še v drugem letniku. Svojo uspešno pot je začel s pomembnimi rezultati iz teorije Liejevih in Jordanovih algeber, prve izvirajo iz geometrije, druge iz kvantne mehanike. Te rezultate je potem nadvse uspešno in presenetljivo uporabil v teoriji grup. Podrobneje o njegovem delu je zapisano v [5].

Kot smo videli, so torej letošnje medalje podelili na zelo „klasičnih” področjih matematike: v *analizi* (Bourgain, Lions in Yoccoz) ter v *algebri* (Zelmanov). To je vsekakor precejšen zasuk glede na izbor področij s preteklih treh kongresov, v Varšavi (1983), v Berkeleyu (1986) in v Kyotu (1990), ko je bila večina nagrad podeljena za rezultate, ki so bili bolj geometrične narave (npr. v *topologiji*). Zato so bile izražene ocene, da gre za poskus vzpostavljanja „ravnotežja” med posameznimi področji moderne matematike ter tudi za poskus „revitalizacije” nekaterih smeri, ki so zadnja leta zašle v slepo ulico. Poleg tega pa je izbor Lionsa tudi korak k zbliževanju

s področjem *uporabne matematike*, ki naj bi si poslej pridobilo „uglednejše” mesto v sodobni matematiki.

Omeniti je treba tudi to, da so letošnje nominacije, z izjemo Zelmanove, pravzaprav bolj poudarjale pomembnost celotnega opusa nagrajencev, ne da bi posebej izpostavljale en sam rezultat (pri Zelmanovu pa gre predvsem za slednje – namreč za rešitev Burnside-ovega problema). Tudi v tem pogledu gre za določeno spremembo v politiki podeljevanja teh priznanj.

#### 4. Nevanlinnova nagrada

Od leta 1983 dalje podeljujejo tudi nagrado, ki se imenuje po finskem matematiku *Rolfu Nevanlinni*, namenjena pa je matematiku, ki je v preteklih štirih letih dosegel najpomembnejše rezultate na področju matematičnih osnov računalništva in informatike. Doslej so jo prejeli *R. Tarjan* (1983), *L. Valiant* (1986) in *A. A. Razborov* (1990), letos pa jo je prejel *Avi Wigderson*.

*Wigderson* se je rodil leta 1956 v Izraelu. Sedaj je profesor na Hebrew University (Jeruzalem, Izrael). Njegovo delo je na kongresu predstavil *Jurij Matijašević*, profesor oddelka Ruske akademije znanosti v St. Petersburgu (Rusija), ki je javnosti dobro znan predvsem zaradi svoje (negativne) rešitve *desetega Hilbertovega problema* pred približno 25 leti, ki je spraševal po splošni rešitvi za diofantske enačbe.

*Wigderson* je prejel Nevanlinnovo nagrado za vrhunske dosežke na področju matematičnih osnov računalništva, kjer je osnovni problem poiskati učinkovite metode za konkretne probleme izračunljivosti, izračunati teoretične omejitve različnih računskih naprav in poiskati zgornje in spodnje meje za količino računskega dela, ki ga posamezna naloga zahteva. *Wigderson* je prispeval glavni delež na področju t.i. *interaktivnih dokazov z ničelnim znanjem* (angl. *zero-knowledge interactive proofs*). S takim dokazom na primer lahko oseba *A* prepriča osebo *B* (v določenih mejah verjetnosti), da je kak izrek pravilen, ne da bi razkrila podrobnosti dokaza tega izreka. Interaktivni dokazi z ničelnim znanjem imajo raznovrstno uporabo, npr. v sodobni kriptologiji in v organizaciji distribuiranih izračunavanj, pri katerih sodeluje celo omrežje računalnikov, čeprav jih določen odstotek zaradi okvar nepravilno deluje. Iz *Wigdersonovega* dela je možno dobiti maksimalno razmerje med normalnimi in defektnimi računalniki v taki mreži. Pomembno je tudi njegovo delo na področju psevdonaključnih generatorjev.

#### 5. Druge zanimivosti

Med kongresom je bil, kot vselej doslej, organiziran *knjižni sejem*, na katerem so bile razstavljene najnovejše publikacije najbolj znanih založnikov matematične literature, kot so *Birkhäuser*, *Springer-Verlag*, *North-Holland*, *Oxford University Press*, *Kluwer*, *Cambridge University Press*, *Princeton*

*University Press, American Mathematical Society* in drugih. Seveda je bila tam tudi Wolframova *Mathematica* ter *Zentrallblatt für Mathematik* in *Mathematical Reviews*, ki sta ponujala svoji zbirki podatkov na laserskih diskih oz. „online”.

*Mathematica* je tudi organizirala kratek tečaj v posebej za ta namen rezerviranem računalniškem laboratoriju, v katerem je bilo veliko število SUN-ovih delovnih postaj. Le-te so bile med udeleženci zelo popularne tudi zato, ker so lahko prek njih uporabljali storitve *elektronske pošte* (kako se časi spreminjajo – danes se lahko kjerkoli na svetu priključiš na računalnik v Ljubljani in prebereš, kaj je doma novega).

Organizacija kongresa ni bila tako brežhibna, kot bi sicer zaradi pregovorne švicarske natančnosti pričakovali. Močno je škripalo pri namestitvah udeležencev – ni bilo malo tistih (tudi podpisani je bil med njimi), ki so prvi dan s kovčkom tekali sem ter tja po Zürichu, išoč ključke svoje sobe. Razlog za zmedo je bil v tem, da so večino organizacijskih del (verjetno bolj ali manj prostovoljno) opravili študenti, ki so prišli iz različnih drugih mest in so bržda svoje bivanje v Zürichu želeli kar najbolje izkoristiti. Tako je „naš” študent na (zaklenjena) vrata bloka napisal, da nas bo tam čakal šele ob 23. uri!

Skupaj z lično torbico je vsak udeleženec ob registraciji prejel še kup informativnega gradiva, pa tudi prepustnico za javni transport v mestu, kar je poleg avtobusa in tramvaja vključevalo tudi ladje, ki krožijo po znamenitem Züriškem jezeru. Kmalu je bilo vse mesto polno ljudi, ki so vsi imeli enake torbice čez ramo, marsikateri pa je tudi po mestu korakal z nalepko z imenom, priimkom in domačim naslovom.

S temi torbicami se je zgodilo tudi marsikaj zabavnega. Na eni od sekcij je tik pred začetkom svojega 45-minutnega nastopa predavatelj prestrašeno ugotovil, da so mu njegovo torbico „ukradli” in s tem so izginile tudi prosojnice za grafoskop, na katerih je bilo napisano njegovo predavanje (kje so tisti časi, ko je predavatelj potreboval le kredo in morda droben listič z nekaj opombami). Seveda so hitro ugotovili, kaj se je zgodilo – prejšnji predavatelj je ob odhodu zagrabil napačno izmed dveh povsem enakih torbic, ki sta ležali na mizi. Takoj so za njim poslali študente, ki so ga na srečo hitro izsledili.

Četrty dan kongresa je bil na travnikih *Irchel University* v Zürichu velikanski piknik. Spočetka je kazalo, da so se organizatorji ušteli in pripravili premalo hrane in pijače, kot se je to zgodilo pred štirimi leti v Kyotu, pa so bili na koncu vsi zadovoljni (številni tudi lepo „okrogli”, pri čemer Zahod ni bistveno zaostajal za Vzhodom).

Če primerjamo minuli kongres s prejšnjimi (pri čemer se bo avtor omejil na prejšnja dva, saj je bil doslej le na treh), lahko ugotovimo, da je bilo letos nenavadno malo Američanov, zato pa sorazmerno mnogo matematikov iz bivšega Vzhodnega bloka. Delno je bržda vzrok za to relativno visoka cena udeležbe, na katero so opozarjali predvsem zahodni poročevalci (glej npr. [7]), po drugi strani pa so zahodne fundacije radodarno pomagale vzhodnim državam s potnimi štipendijami, npr. znana *Soroseva* fondacija.

Kot dokaz, da bi visoke cene utegnile odvrniti marsikaterega matematika, ki bi moral sam kriti stroške udeležbe, lahko navedemo tudi to, da so se t.i. *satelitskih konferenc*, ozko specializiranih srečanj, ki so jih (predvsem v Evropi) pred kongresom in po njem organizirale različne ustanove, udeležili številni matematiki, ki pa potem v Zürich niso prišli.

Naslednji, 23. mednarodni kongres bo čez štiri leta v Berlinu na pobudo dosedanjega predsednika Evropske matematične unije, *Friedricha Hirzebrucha*, znamenitega algebraičnega geometra in dolgoletnega direktorja slovitega Max-Planckovega Matematičnega inštituta v Bonnu. To je bilo kar presenečenje, saj so pred štirimi leti v Kyotu vsi načrtovali, da bo 23. kongres v Avstraliji, pač po „teoriji” o selitvi s kontinenta na kontinent (1983 Evropa, 1986 Severna Amerika, 1990 Japonska, 1994 Evropa). Vendar je očitno prevladala velika „politična” moč evropskih matematikov in visok Hirzebruchov ugled. Jasno pa je tudi to, da Nemci Berlina niso izbrali čisto po „naključju”.

Kot dokaz, kako razvit je že informacijski sistem, so že v Zürichu omogočili, da so se lahko že prijavljali na berlinski kongres. Na posebnem strežniku za „potovanje” po Internetovem elektronskem omrežju, *gopherju*, se je dalo prebrati skorajda vse o kongresu, ki bo šele čez štiri leta, celo podobe Berlina se je dalo priklicati na barvne zaslone SUN-ovih delovnih postaj s programom *Mosaic*.

## 6. Zaključek

Ko sem med kongresom hodil po Zürichu in srečeval na stotine matematikov, mi je prišla na misel avtobiografska knjiga [4], v kateri je znameniti Nobelov nagrajenec za fiziko *R. P. Feynman* zapisal tole anekdoto o pozabljivih znanstvenikih in o tem, kako jih vidi „normalni” ljudje.

Nekoč je Feynmann z enodneвно zamudo priletel na neko konferenco, zato ga ni pričakal nihče od organizatorjev. Ko je na letališču vzel taksi, je vozniku naročil, naj ga odpelje na University of North Carolina. Voznik ga je vprašal: „University of North Carolina v Raleighu ali University of North Carolina na Chapel Hillu?” Izkazalo se je, da sta dve univerzi z enakim imenom v različnih mestih približno enako oddaljeni od letališča, vsaka na svojo stran. Feynman je malo pomislil in nato vprašal šoferja: „Ali ste včeraj videli veliko število ljudi, ki so bili čudno oblečeni, se ves čas zatopljeno pogovarjali med seboj, kracali po blokih in listkih papirja in z vzdignjenimi glavami odsotno strmeli nekam daleč naprej? Kam ste jih vozili, na južno ali na severno univerzo?” Šofer je veselo vzkliknil: „A, tako? Torej na južno!”

Kadarkoli omenjam Feynmanovo knjigo [4], se spomnim tudi njegove duhovite „ugotovitve”, da je vsaka reč v matematiki bodisi trivialna bodisi nemogoča, oziroma da lahko matematiki dokažejo samo *trivialne* izreke. Ko je namreč nekoč gostoval na Institute for Advanced Studies v Princetonu, je med popoldanskim pitjem čaja in kave pogosto prisluhnil klepetu matematikov in skoraj vedno je šlo približno takole: Prvi matematik je drugemu vneto nekaj pojasnjeval in pisal po tabli, medtem ko ga je drugi stalno prekinjal z vzkliki „To je nemogoče!”, „Ne, to je zares nemogoče!”. Tako sta se

prepirala četrto ali pol ure, potem pa je tisti drugi nenadoma veselo ugotovil: „Ah, saj to je vendar trivialno!”

Podobna anekdota je pred časom krožila pri nas. Menda je neki profesor na predavanjih dokazoval izrek in nekje na sredini dokaza zapisal trditev ter pripomnil, da je ne bo dokazoval, ker je očitna. Eden od študentov je vseeno tvegala in čez nekaj trenutkov vprašal profesorja, zakaj je to res očitno. Profesor je namrščil čelo, se zagledal v tla in dolgo tiho premišljeval. Nato je nenadoma odšel iz predavalnice v svoj kabinet. Čez približno deset minut se je vrnil s popisanim kosom papirja v roki in veselo zaklical: „Res je očitno!” – in nato nemoteno nadaljeval s svojim predavanjem.

## LITERATURA

- [1] S. I. Adjan, P. S. Novikov, *On infinite periodic groups I, II, III*, Math. USSR Izvestiya **2** (1968), 209–236, 241–479 in 665–685.
- [2] D. J. Albers, G. L. Alexanderson, C. Reid, *International Mathematical Congresses: An Illustrated History 1893–1986, Revised Ed.*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] M. Atiyah in drugi, *Responses to „Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics” by A. Jaffe and F. Quinn*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994), 178–207.
- [4] R. P. Feynman, *Surely You’re Joking, Mr. Feynman! Adventures of a Curious Character*, Unwin Paperbacks, London, 1986.
- [5] W. Feit, *On the work of Efim Zelmanov*, preprint, Yale University, New Haven, CT., 1994.
- [6] J. Horgan, *The death of proof. Trends in mathematics*, Scientific Amer., October 1993, 74–82.
- [7] A. Jackson, *ICM-94 in Zürich*, Notices Amer. Math. Soc. **41** (1994), 763–765.
- [8] A. Jaffe, F. Quinn, *Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 1–13.
- [9] S. MacLane, *Response to Horgan’s „Death of proof”*, Letters to the Editor, Notices Amer. Math. Soc. **41** (1994), 573.
- [10] D. Repovš, *Inštitut za visoke znanstvene študije (Bures-sur-Yvette, Francija)*, Raziskovalec **14** (1984), 142–143.
- [11] D. Repovš, *Fieldsove nagrade za leto 1986*, Raziskovalec **17** (1987), 15–16.
- [12] D. Repovš, *Mednarodni kongres matematikov, Berkeley 1986*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987), 64–III.
- [13] D. Repovš, *„Nobelova nagrada” za vrhunsko matematiko*, Delo **32:219** (1990), 5.
- [14] D. Repovš, *Fieldsove nagrade za leto 1994*, Delo **36:184** (1994), 15.
- [15] C. Sbordon, *Premi Fields e Nevanlinna*, Notiz. Unione Mat. Ital. **21:8–9** (1994), 70–72.
- [16] W. P. Thurston, *On proof and progress in mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994), 161–177.
- [17] S. R. S. Varadhan, *The work of Pierre-Louis Lions*, preprint, Courant Institute, New York University, New York, 1994.
- [18] E. Zelmanov, *Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent*, Math. USSR Izvestiya **36** (1991), 41–60.
- [19] E. Zelmanov, *A solution of the restricted Burnside problem for 2-groups*, Math. USSR Sbornik **72** (1992), 543–564.
- [20] *Letno poročilo Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani za leto 1993*, Ljubljana, 1993.
- [21] *Bundesrätin Dreifuss mahnt zur Verantwortung: Verleihung der Fields-Medaille und des Nevanlinna-Preises*, Neue Zürcher Zeitung (1994), št. 179, str. 41.

# SEBI PODOBNOST IN DIMENZIJA FRAKTALOV

LEILA MAREK-CRNJAC

Math. Subj. Class. (1991) 28A80, 54F45

V članku je najprej predstavljenih nekaj klasičnih sebi podobnih fraktalov. V nadaljevanju bomo obravnavali fraktalno dimenzijo, Hausdorffovo dimenzijo in dimenzijo Minkowskega na omejenih množicah v  $\mathbb{R}^n$ .

## SELF-SIMILARITY AND FRACTAL DIMENSIONS

The article at first introduces some classical examples of self-similar fractals. Further the fractal dimension, Hausdorff dimension and Minkowski dimension (box dimension) of bounded sets in  $\mathbb{R}^n$  are discussed.

### Uvod

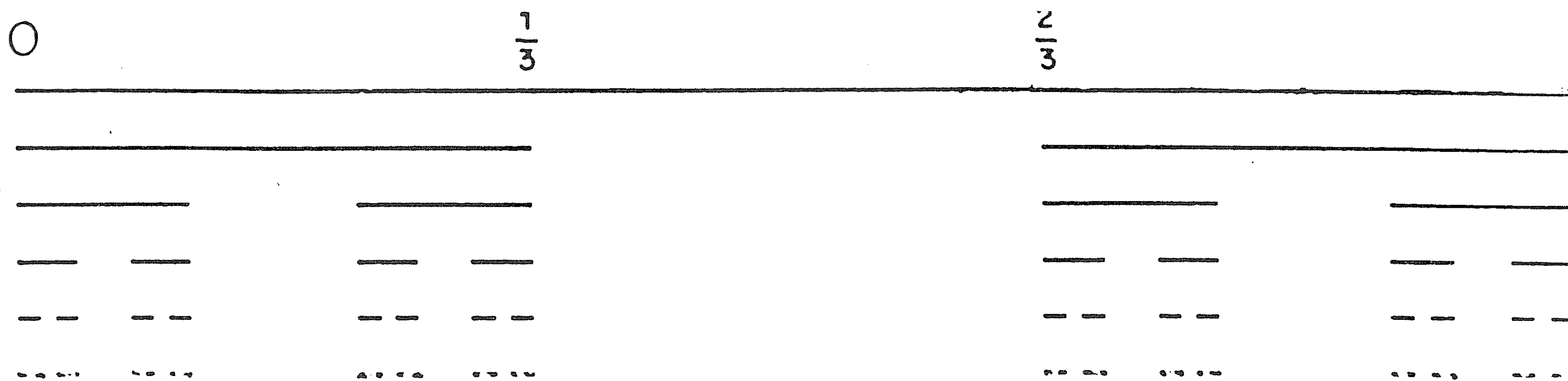
Fraktali so postali znani po atraktivnih slikah. Besedo fraktal je skoval B. Mandelbrot in pomeni množico v evklidskem prostoru, katere Hausdorffova dimenzija ni celo število (razen izjem). Hausdorffova dimenzija na omejenih podmnožicah v  $\mathbb{R}^n$  karakterizira geometrijsko zapletenost omejenih množic.

Najprej bom predstavila nekaj preprostih fraktalov: Cantorjeva množica, Kochova krivulja (snežinka), trikotnik Sierpinskega.

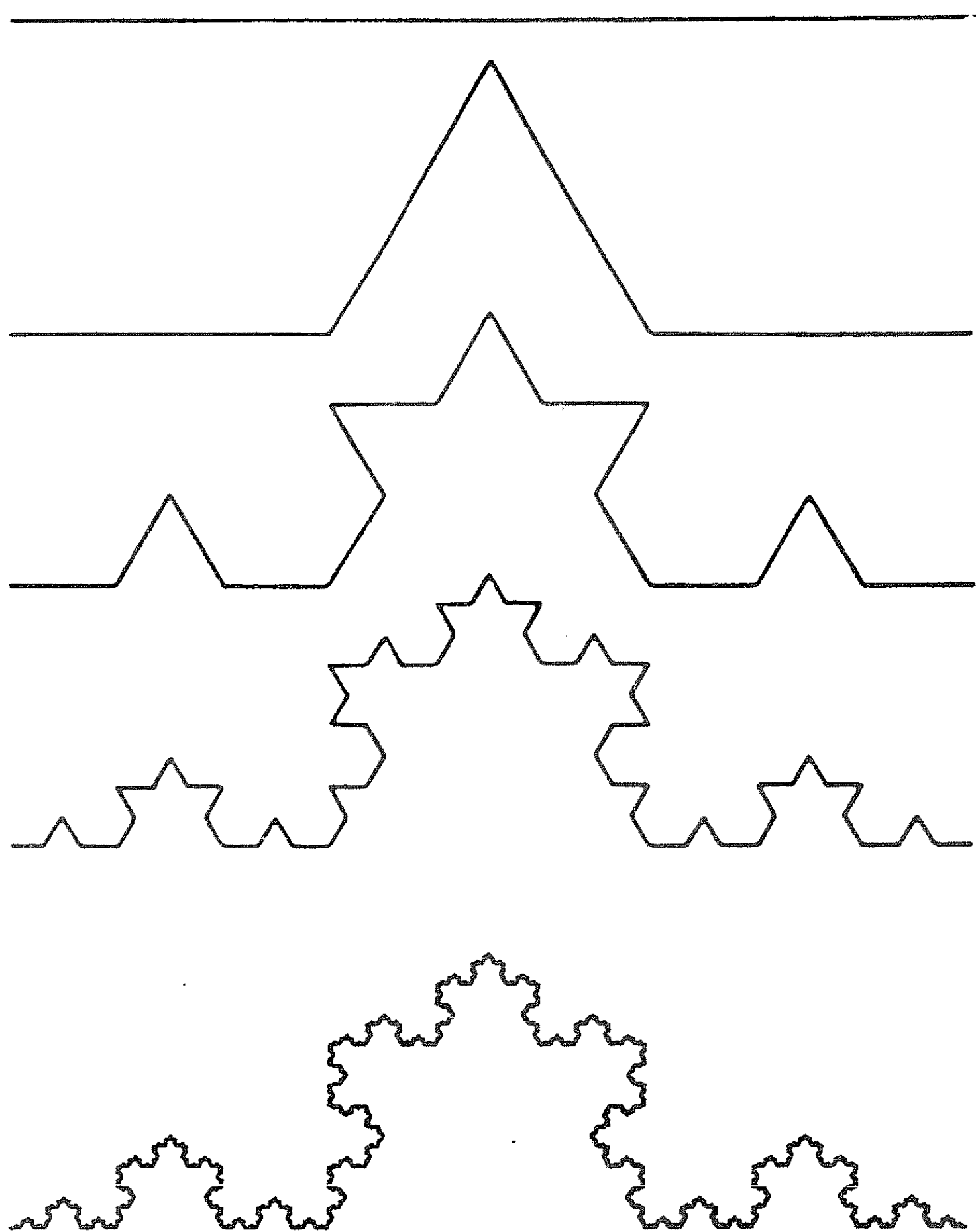
Standardna Cantorjeva množica je eden najbolj poznanih in konstrukcijsko najpreprostejših fraktalov. Kljub temu pa ima mnogo zanimivih lastnosti. Konstruiramo ga s pomočjo enotskega intervala  $C_0 = [0, 1]$ . Množico  $C_1$  dobimo, če enotski interval razdelimo na tri enake dele in notranjost srednjega dela odvržemo. Dobimo dva intervala  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Naslednja množica  $C_2$  je sestavljena iz štirih intervalov, ki jih dobimo tako, da prejšnja intervala tretjinimo in notranjost srednjega dela v obeh intervalih odvržemo. S postopkom nadaljujemo in po  $k$ -tem koraku dobimo množico  $C_k$ , sestavljeno iz  $2^k$  paroma disjunktih zaprtih intervalov, dolžine  $3^{-k}$ . Standardna Cantorjeva množica je definirana s  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ . Množica

$C$  je neprazna in kompaktna, ker je vsaka množica  $C_k$  kompaktna in je  $C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_k$ . Ima moč kontinuumu ter Lebesguovo mero  $\mu(C) = 0$ . Lastnost „mera enaka 0“ ni topološka lastnost Cantorjeve množice. Topološka karakterizacija Cantorjeve množice je: popolnoma nepovezan metrični kompaktni brez izoliranih točk. Dokaze je mogoče najti v literaturi [4].

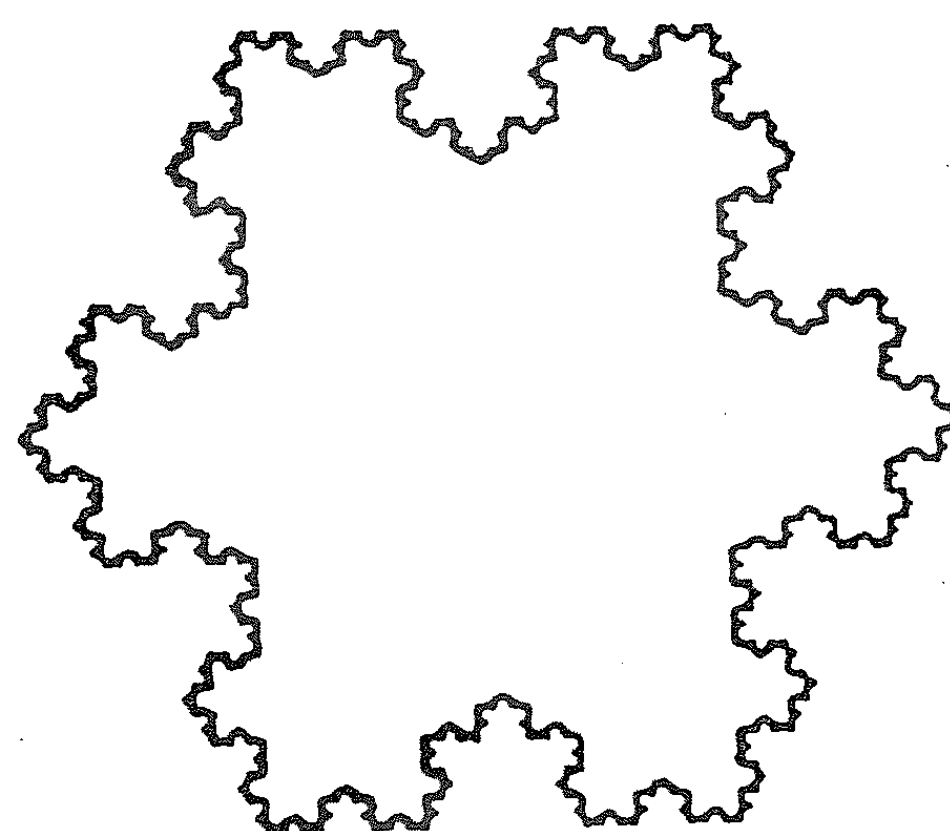
Drugi zgled je Kochova krivulja (snežinka). Tudi tukaj vzamemo enotski interval  $I_0$ . Naslednja množica  $I_1$  sestoji iz štirih odsekov, ki smo jih dobili tako, da smo interval razdelili na tri enake dele in srednjega zamenjali z dvema krakoma enakostraničnega trikotnika, dolgima eno tretjino intervala. S postopkom nadaljujemo in po  $k$ -tem koraku dobimo množico  $I_k$ , sestavljeno iz  $4^k$  odsekov dolžine  $3^{-k}$ . Kochovo krivuljo  $I$  dobimo, če postopek ponavljamo v neskončnost. Če združimo tri Kochove krivulje, dobimo Kochovo snežinko.



Slika 1. Konstrukcija Cantorjeve množice



Slika 2. Konstrukcija Kochove krivulje

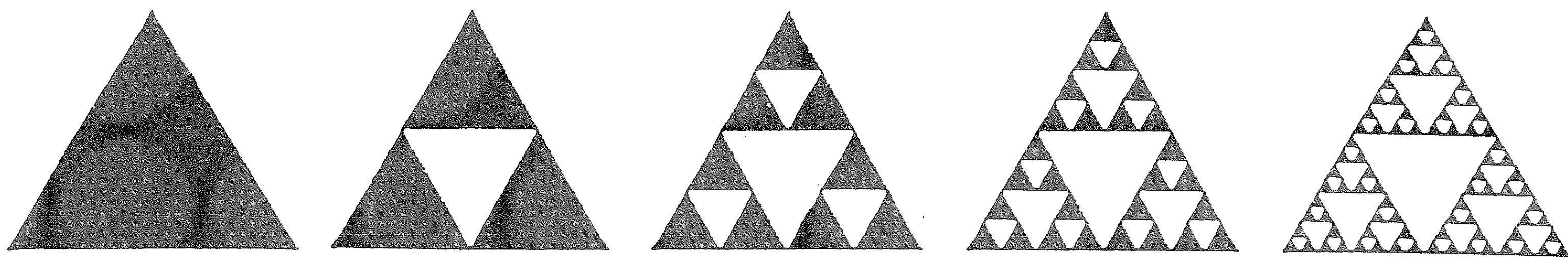


Slika 3. Kochova snežinka

Zadnji zgled je trikotnik Sierpinskega. Vzemimo enakostranični trikotnik  $S_0$ , ki ima dolžino stranice enako 1, in mu razpolovimo vse tri stranice. Točke povežimo in v sredini dobimo manjši enakostranični trikotnik. Notranjost novega trikotnika odstranimo, ostanejo nam še trije enakostranični trikotniki. Rezultat, ki smo ga dobili, imenujemo  $S_1$ . Postopek ponovimo na vseh treh trikotnikih. Novo množico imenujemo  $S_2$ , ki je podmnožica  $S_1$ . Konstrukcijo ponavljamo brez konca in kraja, po  $k$ -tem koraku dobimo množico  $S_k$ , sestavljeno iz  $3^k$  trikotnikov z dolžino stranice  $2^{-k}$ . Trikotnik Sierpinskega  $S$  je definiran  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ . Pogosto ga imenujemo trikotno sito.

### Sebi podobne množice

**Definicija 1.** Preslikavo  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo *podobnostno*, če je  $|T(x) - T(y)| = c|x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < c < 1$ . Vsaka upodobitev  $T$  preslika podmnožice iz  $\mathbb{R}^n$  v podobne podmnožice v  $\mathbb{R}^n$ .



Slika 4. Konstrukcija trikotnika Sierpinskega

**Definicija 2.** Množica, ki je invariantna za podobnostno preslikavo, se imenuje *sebi podobna množica*.

Množica je sebi podobna, če jo lahko razdelimo na več delov in je vsak kos majhna kopija celote.

Poglejmo, ali so standardna Cantorjeva množica, trikotnik Sierpinskega in Kochova krivulja, sebi podobne množice. Standardna Cantorjeva množica je sestavljena iz majhnih, zaprtih, paroma disjunktih intervalov, ki so vsi majhne kopije celote. Tako je Cantorjeva množica sebi podobna. Trikotnik Sierpinskega je sestavljen iz manjših trikotnikov, ki so kopije celote in tako je tudi sebi podoben. Tudi Kochova krivulja je sebi podobna, ker jo lahko razdelimo na več kosov, in vsak kos je majhna kopija celote. Kochova snežinka ni sebi podobna, ker majhni kosi niso kopije snežinke.

Sebi podobnost je odločilnega pomena za posplošitev pojma dimenzije takih množic, ki so lahko tudi fraktali.

Sebi podobno množico  $A$  lahko pokrijemo z  $N(A, \varepsilon)$  majhnimi kopijami množice s premerom  $\varepsilon$  (oziroma dolžino stranice  $\varepsilon$ ). Potem velja  $N(A, \varepsilon)\varepsilon^{D_f} = 1$ , oziroma  $\varepsilon = N(A, \varepsilon)^{-1/D_f}$ . Enačbo  $N(A, \varepsilon)\varepsilon^{D_f} = 1$  razrešimo na  $D_f$  in dobimo

$$D_f = \frac{\log N(A, \varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})}.$$

$D_f$  imenujemo *fraktalna dimenzija množice*.

Množica je lahko fraktal, in v tem primeru fraktalna dimenzija ni celo število (razen izjem). Če pa množica ni fraktal, se pa fraktalna dimenzija  $D_f$  ujema z običajno dimenzijo množice, ki je celo število.

Zgled: Poskusimo izračunati fraktalno dimenzijo Kochove krivulje. Vsak kos v kateremkoli konstrukcijskem koraku Kochove krivulje, se razdeli na 4 dele z dolžino tretjine prejšnjega dela. Tako je fraktalna dimenzija enaka

$$D_f = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26 \dots$$

Fraktalna dimenzija standardne Cantorjeve množice je

$$D_f = \frac{\log 3}{\log 2} = 0,6309 \dots$$

Fraktalna dimenzija Kochove krivulje je necelo število, ki je večje od 1 in manjše od 2. To število,  $D_f = 1,26\dots$ , pove marsikaj o lastnostih Kochove krivulje. Krivulja bolj napolni prostor v ravnini kot enotski interval z dimenzijo 1, vendar pa manj kot ravninski lik z dimenzijo 2.

Kochovi krivulji ne moremo izračunati dolžine, ker je neskončna, vendar pa s pomočjo fraktalne dimenzije  $D_f$  ocenjujemo geometrijsko zapletenost.

Praktična vrednost tega je na primer pri morskih obalah, pokrajinah in hribovjih. Dolžine obale (npr. Velike Britanije) ne moremo izmeriti. Lahko pa primerjamo razgibanost obale s Kochovo krivuljo. Običajne obale niso tako razgibane kot je Kochova krivulja in tako se gibljejo njihove fraktalne dimenzije med 1,15 in 1,25. Fraktalna dimenzija obale Velike Britanije je 1,2.

Tako je postala fraktalna dimenzija pri fraktalih zelo zanimiva količina. Poznamo še druge dimenzije, najbolj znani sta Hausdorffova in dimenzija Minkowskega.

### Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija na omejenih podmnožicah v  $\mathbb{R}^n$  je realno število, ki karakterizira geometrijsko zapletenost omejenih množic.

Imejmo metrični prostor  $(\mathbb{R}^n, d)$ ,  $d$  je evklidska metrika in  $n \in \mathbb{N}$ . Naj bo  $A$  neprazna, omejena podmnožica (lahko je tudi odprta, zaprta, števna unija zaprtih množic) v  $\mathbb{R}^n$ . Potem je premer množice  $A$  definiran z

$$|A| = \text{diam}(A) = \sup\{d(x, y); x, y \in A\}.$$

To pomeni, da je premer množice natančna zgornja meja vseh razdalj med pari točk v  $A$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Če je  $\{A_i\}$  končno ali števno zaporedje množic, katerih premer ne presega  $\varepsilon$  in ki pokrije  $A$ , torej  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , potem imenujemo zaporedje množic  $\{A_i\}$   $\varepsilon$ -pokritje množice  $A$ .

Naj bo  $0 < \varepsilon < \infty$ ,  $0 < p < \infty$  in  $A$  takšna množica zaporedij podmnožic  $\{A_i \subset A\}$ , da je  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Sedaj definirajmo število

$$M(A, p, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum (\text{diam}(A_i))^p; \{A_i\} \in A \text{ in } \text{diam}(A_i) < \varepsilon \right\}.$$

Če je  $A_i$  prazna množica, je  $(\text{diam } A_i)^0 = 0$ .  $M(A, p, \varepsilon)$  je število iz območja  $[0, \infty)$ , lahko ima vrednost 0, končno ali neskončno.

Definirajmo še

$$M(A, p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(A, p, \varepsilon),$$

pri čemer je za vsak  $p \in [0, \infty)$ :  $M(A, p) \in [0, \infty)$ , kadar limita obstaja za vsako množico  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 3.** Naj bo  $n$  pozitivno število in  $A$  omejena podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ . Za vsak  $p \in [0, \infty)$  se količina  $M(A, p)$  imenuje  $p$ -dimenzionalna Hausdorffova mera množice  $A$ .

*Zgled.* Če je  $p = 1$ , je  $M(A, p)$  enaka dolžini rektifikacijske krivulje.

Navedimo še dve lastnosti  $p$ -dimenzionalne Hausdorffove mere. Obe trditvi sta dokazani v [2].

**Trditev 4.** Če je  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda > 0$ , potem je  $M(\lambda A, p) = \lambda^p M(A, p)$ , kjer je  $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$ .

**Trditev 5.** Naj bo  $A \in \mathbb{R}^n$  in  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  takšna preslikava, ki zadošča Holderjevemu pogoju  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ ,  $(x, y \in A)$  za  $c > 0, \alpha > 0$ , potem za vsak  $p$  velja neenakost

$$M(f(A), \frac{p}{\alpha}) \leq c^{\frac{p}{\alpha}} M(A, p).$$

**Definicija 6.** Naj bo  $n$  pozitivno število in  $A$  omejena podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ . Realno število  $D_H(A)$  imenujemo *Hausdorffova dimenzija*, če je

$$D_H(A) = \inf\{p : M(A, p) = 0\} = \sup\{p : M(A, p) = \infty\},$$

in tako je

$$M(A, p) = \begin{cases} \infty, & \text{če je } p < D_H(A) \\ 0, & \text{če je } p > D_H(A). \end{cases}$$

Hausdorffova dimenzija je kritična vrednost  $p$ , ko  $M(A, p)$  skoči z  $\infty$  na 0.

*Zgled.* Hausdorffova dimenzija realne osi  $\mathbb{R}$  je 1, dvodimenzionalnega evklidskega prostora pa 2.

Tako se Hausdorffova dimenzija ujema z običajno dimenzijo, če množice niso fraktali.

*Zgled.* Naj bo  $C$  standardna Cantorjeva množica. Če je  $p = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\dots$ , potem je  $D_H(C) = p$  in  $M(C, p) \leq 1$ .

Ocenitev: Intervali dolžine  $3^{-k}$  tvorijo množico  $C_k$  pri konstrukciji bazičnih intervalov množice  $C$ . Pokritje  $\{C_i\}$  množice  $C$  vsebuje  $2^k$  intervalov dolžine  $3^{-k}$ . V skladu s tem je

$$M(C, p, 3^{-k}) \leq \sum_i |C_i|^p = 2^k 3^{-kp} = \left(\frac{2}{3^p}\right)^k$$

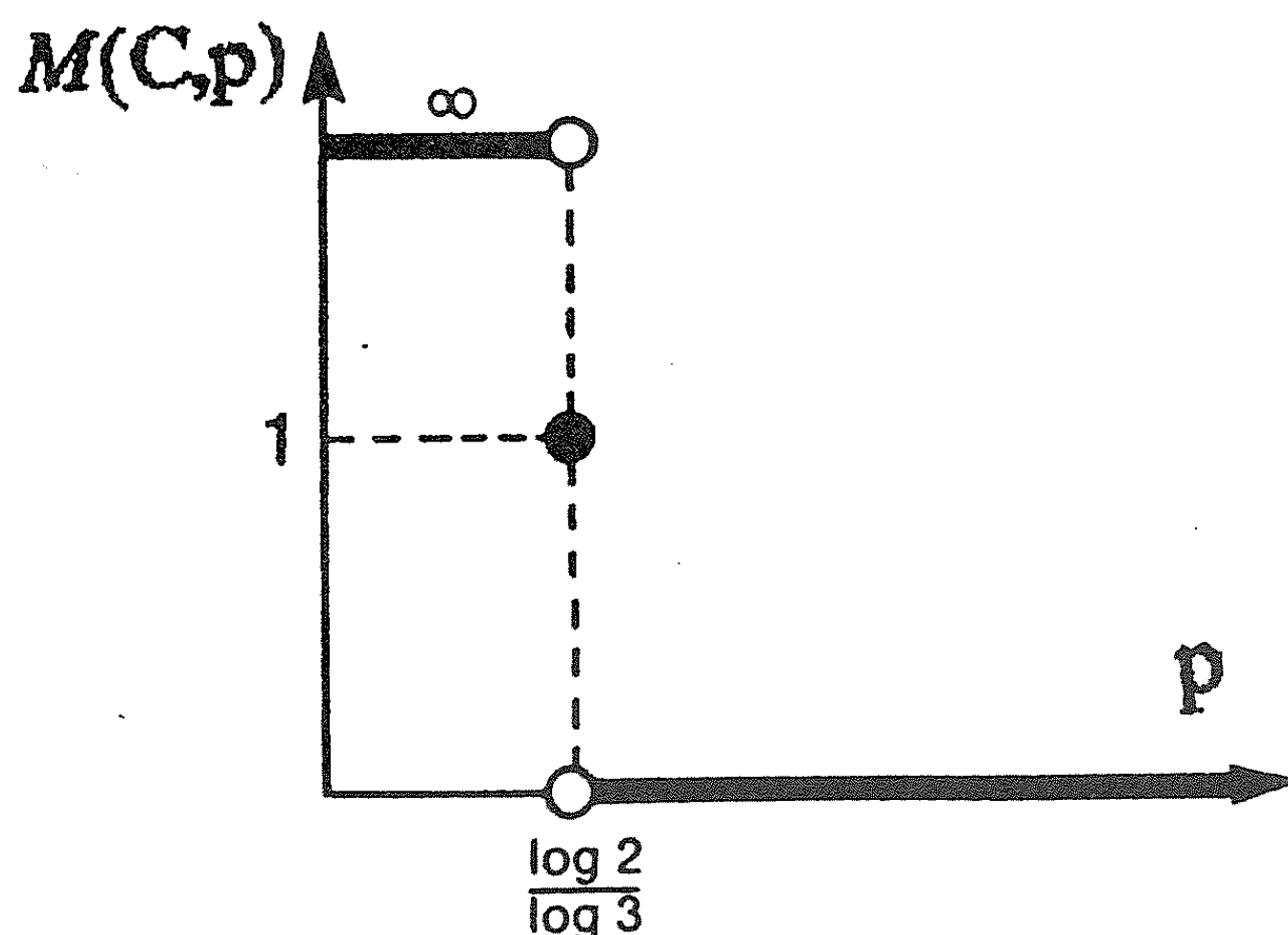
in  $\varepsilon \rightarrow 0$ , če gre  $k \rightarrow \infty$ , potem je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^p}\right)^k = \begin{cases} 0 & 2 < 3^p \\ 1 & \iff 2 = 3^p \\ \infty & 2 > 3^p. \end{cases}$$

Od tod sledi

$$M(C, p) = \begin{cases} 0 & p > \log 2 / \log 3 \\ 1 & \iff p = \log 2 / \log 3 \\ \infty & p < \log 2 / \log 3 \end{cases}.$$

in tako je  $D_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ , torej  $D_H(C) = p$  in  $M(C, p) \leq 1$ .



Slika 5.  $D_h(C) = p$

V primerih, kjer so množice sebi podobne, se fraktalna dimenzija ujema s Hausdorffovo. V splošnem velja ocena, da je običajna dimenzija  $D \leq D_h \leq D_f$ . Glede na to oceno pravimo, da je množica v evklidskem prostoru fraktal, če je njena Hausdorffova dimenzija večja od običajne dimenzije.

### Dimenzija Minkowskega

Dimenzija Minkowskega je ena najbolj uporabljenih dimenzij. Naj bo množica  $A$  neprazna in omejena,  $A \subset \mathbb{R}^n$  in naj bo  $P(A, \varepsilon)$  najmanjše število množic s premerom največ  $\varepsilon$ , ki pokrivajo  $A$ .

**Definicija 7.** Spodnja in zgornja dimenzija Minkowskega sta definirani kot

$$\underline{D}_B(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \frac{\log P(A, \varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})} \right\}, \quad \overline{D}_B(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \left\{ \frac{\log P(A, \varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})} \right\}.$$

Če sta limiti enaki, potem imenujemo to skupno limito dimenzija Minkowskega

$$D_B(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log P(A, \varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})}.$$

*Zgled.* Naj bo  $C$  standardna Cantorjeva množica, potem je  $\underline{D}_B(C) = \overline{D}_B(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

Ocenitev: Množico  $C_k$  pokrijemo z  $2^k$  intervali dolžine  $3^{-k}$  in  $P(C, \varepsilon) \leq 2^k$ , če  $3^{-k} < \varepsilon \leq 3^{-k+1}$ . Iz definicije je zgornja dimenzija Minkowskega

$$\overline{D}_B(C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \left\{ \frac{\log P(C, \varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})} \right\} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Po drugi strani nekateri intervali dolžine  $\varepsilon$ ,  $3^{-k-1} < \varepsilon \leq 3^{-k}$  sečejo najmanj en interval dolžine  $3^{-k}$ , ki smo ga dobili pri konstrukciji  $C$ . Najmanj  $2^k$  intervalov pokrije standardno Cantorjevo množico  $C$ . Tako je

$$P(C, \varepsilon) \geq 2^k \quad \text{in} \quad \underline{D}_B(C) \geq \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Standardna Cantorjeva množica  $C$  ima  $D_H(C) = D_B(C)$ .

V primerih, kjer so množice sebi podobne, se vse omenjene dimenzije med seboj ujemajo.

Zadnji zgled naj bo takšen, da se dimenzije ne bodo ujemale.

*Zgled.* Naj bo  $F$  (števena) množica racionalnih števil med 0 in 1. Hausdorffova dimenzija  $D_H(F) = 0$ , dimenzija Minkowskega  $D_B(F) = 1$ .

## LITERATURA

- [1] M. Barnsly, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
- [2] K. Falconer, *Fractal geometry*, J. Wiley, Chichester, 1990.
- [3] H.-O. Peitgen, D. Saupe, *The science of fractal images*, Springer Verlag, New York, 1988.
- [4] J. Vrabec, *O Cantorjevi množici*, Postdiplomski seminar iz matematike 3/4. Zimski in letni semester 1971/72.
- [5] Benoit Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Comp., New York, 1983.

## NOVE KNJIGE

---

**HAWKING S., ČRNE LUKNJE IN OTROŠKA VESOLJA TER DRUGI ESEJI**, prevedla Mirjam Galičič, Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Knjižnica Sigma 54, Ljubljana 1994, 150 str.

Po *Kratki zgodovini časa* je Stephen Hawking napisal še dve knjigi za širok krog bralcev. Lani je izšel slovenski prevod *Berila h kratki zgodovini časa* na osnovi gradiva za televizijski film, zdaj, samo leto po izidu angleškega originala, pa prevod tretje knjige. V njej je Hawking zbral in uredil 15 prispevkov, ki jih je napisal od leta 1976.

Prvi trije prispevki poročajo o otroštvu, študiju v Oxfordu in Cambridgeu ter o izkušnjah z obolenjem gibalnih živcev za zasedanje društva obolelih s to boleznijo, napisani so bili leta 1987. Hawking se že več kot trideset

let bori proti temu obolenju, ki je navadno smrtno v nekaj letih. Prikovan je na invalidski voziček in se izraža prek sintetizatorja govora, priključenega na računalnik. Prispevek *Odnos javnosti do znanosti* je nastal ob podelitvi odlikovanja leta 1989 v Španiji. *Kratka zgodovina „Kratke zgodovine“* je leta 1988 v reviji *Independent* dokaj podrobno poročala o Hawkingovi knjigi, ki je postala v Angliji prava uspešnica in prišla v knjigo rekordov. Prispevek *Moj pogled* je bil leta 1992 namenjen članom nekega koledža in razpravlja o razumevanju Vesolja in o veliki enotni teoriji. Nekoliko daljša razprava *Ali se bliža konec teoretični fiziki?* je povzeta po nastopnem predavanju leta 1980 ob izvolitvi na mesto, ki sta ga zasedala med drugimi I. Newton in P. A. M. Dirac. V njej Hawking razpreda priljubljeno misel o možnosti, da bi do konca stoletja odkrili „teorijo vsega“. (Pozneje jo je razširil v knjižico.) Prispevek *Einsteinove sanje* za srečanje o komunikacijskih sistemih leta 1991 povzema s širšega vidika osnovne poteze kvantne mehanike in teorije relativnosti. V prispevku *Nastanek vesolja* je leta 1987 na sestanku ob tristoletnici Newtonovih *Principov* orisal, kako so se od starih časov razvijali pogledi na Vesolje. Članek *Kvantna mehanika črnih lukenj* je izšel leta 1977 v reviji *Scientific American*. Nekoliko bolj strokovno kot drugi sestavki obravnava črne luknje, njihovo termodinamiko in sevanje, ki ga pojasnimo s kvantno mehaniko. Na tem področju je Hawking največ raziskoval. Prispevek *Črne luknje in otroška vesolja* po predavanju leta 1988 je dal naslov knjigi. Otroško vesolje naj bi nastalo kot vase zaprto, od preostalega Vesolja odcepljeno območje po tem, ko bi črna luknja s sevanjem izginila. Prispevek *Ali je vse naprej določeno?* po predavanju leta 1990 razpravlja o tem, ali je mogoče na osnovi zakonov narave napovedati nastanek Vesolja in življenja. Po predavanju leto pozneje je nastal prispevek *Prihodnost vesolja*, ki nekako nadaljuje prejšnji prispevek. Prispevek *Glasba za samotni otok* je zapis oddaje na angleškem radiu iz leta 1992. Nastopajočega vprašajo, katerih osem gramofonskih plošč bi želel imeti, če bi kot brodolomec živel na samotnem otoku. Prispevek *Robni pogoji o neobstoju roba in puščica časa* je Hawking napisal leta 1993. V njem je obdelal svoj in Hartlov predlog iz leta 1983, da je robni pogoj Vesolja, da Vesolje nima roba.

Prispevki z izjemo zadnjega niso zahtevni in jih je prijetno brati. Ker zajemajo dokaj dolgo obdobje, je po njih mogoče tudi zasledovati razvoj Hawkingovih pogledov. Od take zbirke ni mogoče pričakovati, da bi se prispevki ne prekrivali. Prekrivajo se tudi Hawkingove knjige. Zato ne bo veliko bralcev prebralo vseh treh. Kdor ima malo časa, bo prebral dve, in kdor ga ima še manj, samo eno. Za ta primer bi priporočil knjige po vrstnem redu, v katerem so nastale. Poleg tega bi kazalo bralcu poseči še po kaki drugi knjigi s podobno vsebino, da si bo lažje ustvaril nepristranski pogled na Hawkingovo delo.

Janez Strnad

# NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI I.

## YOUNGOV POSKUS Z IONOMA

JANEZ STRNAD

PACS 03.65.Bz, 42.50.-p

Interferenčni poskusi so zanimivi tudi zato, ker razkrivajo posebnost kvantne fizike. Interferenčni poskus s svetlobo, pri katerem namesto dveh rež uporabijo iona, na eni strani pokaže dosežke sodobne merilne tehnike, na drugi strani pa smemo v njem videti uresničitev poskusa, ki si ga je bilo doslej mogoče samo zamisliti.

### UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS I. YOUNG'S EXPERIMENT WITH TWO IONS

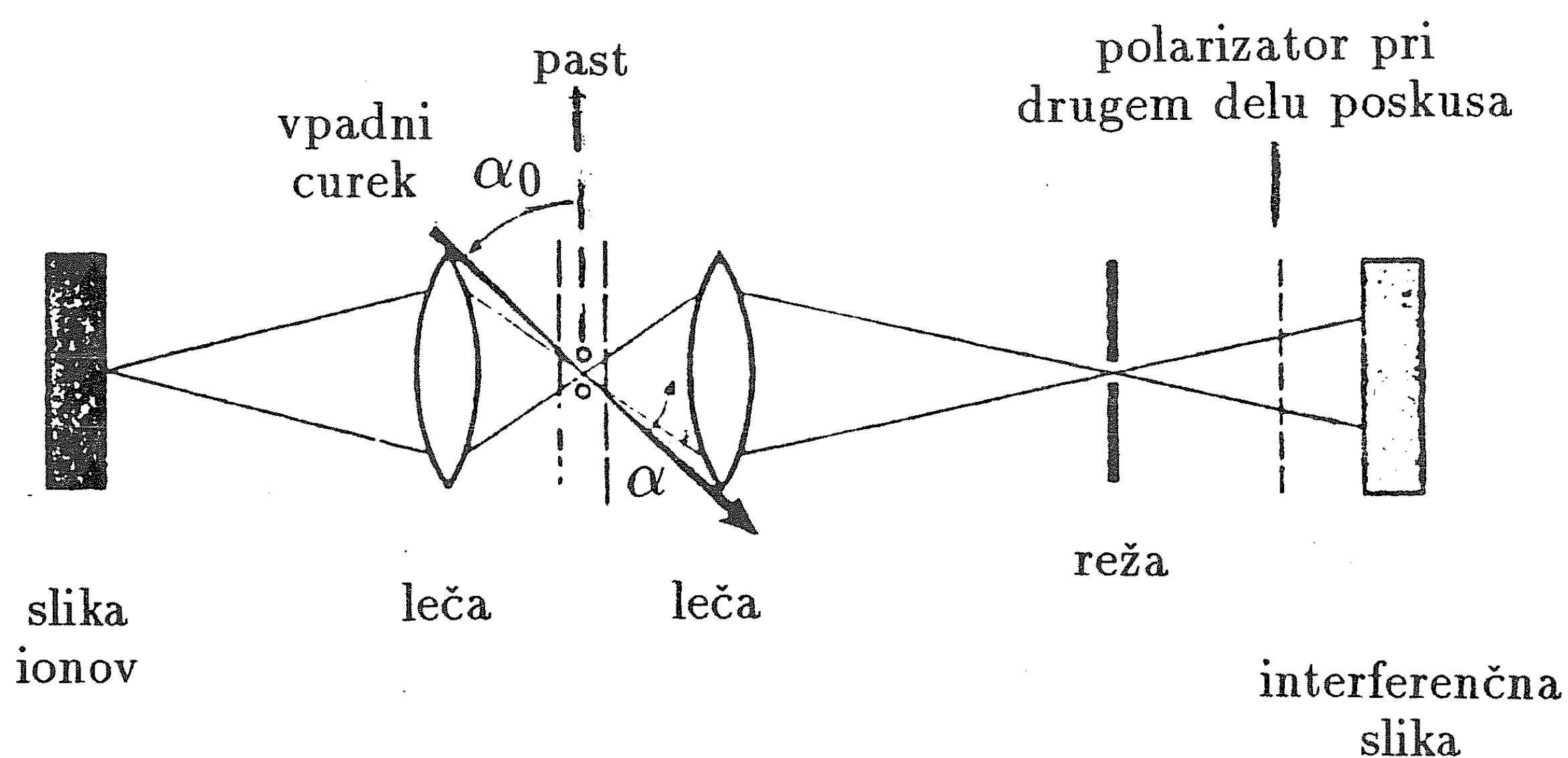
The interest interference experiments arise is partially due to the fact that they expose the characteristics of quantum physics. The interference experiment with light in which two slits are replaced by two ions shows at the one hand the achievements of contemporary measuring techniques and represents a realization of what could be up to now considered as a thought experiment only.

Po Feynmanovem mnenju ima Youngov poskus „v sebi srce kvantne mehanike” in „v resnici vsebuje edino skrivnost”. Pri tem je poskus z dvema režama pri predavanjih podrobno razčlenil. Če z enim od dveh drobnih števecv za rezo ugotovimo, skozi katero rezo gre kateri foton ali elektron, interferenčna slika izgine. Pred skoraj tridesetimi leti podobnega poskusa v resnici še ni bilo mogoče narediti. Zdaj so poročali o njegovi izvedbi U. Eichmann, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, J. M. Gilligan in W. M. Itano z državnega inštituta za standarde in tehnologijo iz Boulderja v Coloradu ter M. G. Raizen s teksaške univerze v Austinu [1]. Poskus je zanimiv kot uspeh sodobne merilne tehnike in kot potrditev napovedi, o kateri je bilo mogoče doslej le razmišljati.

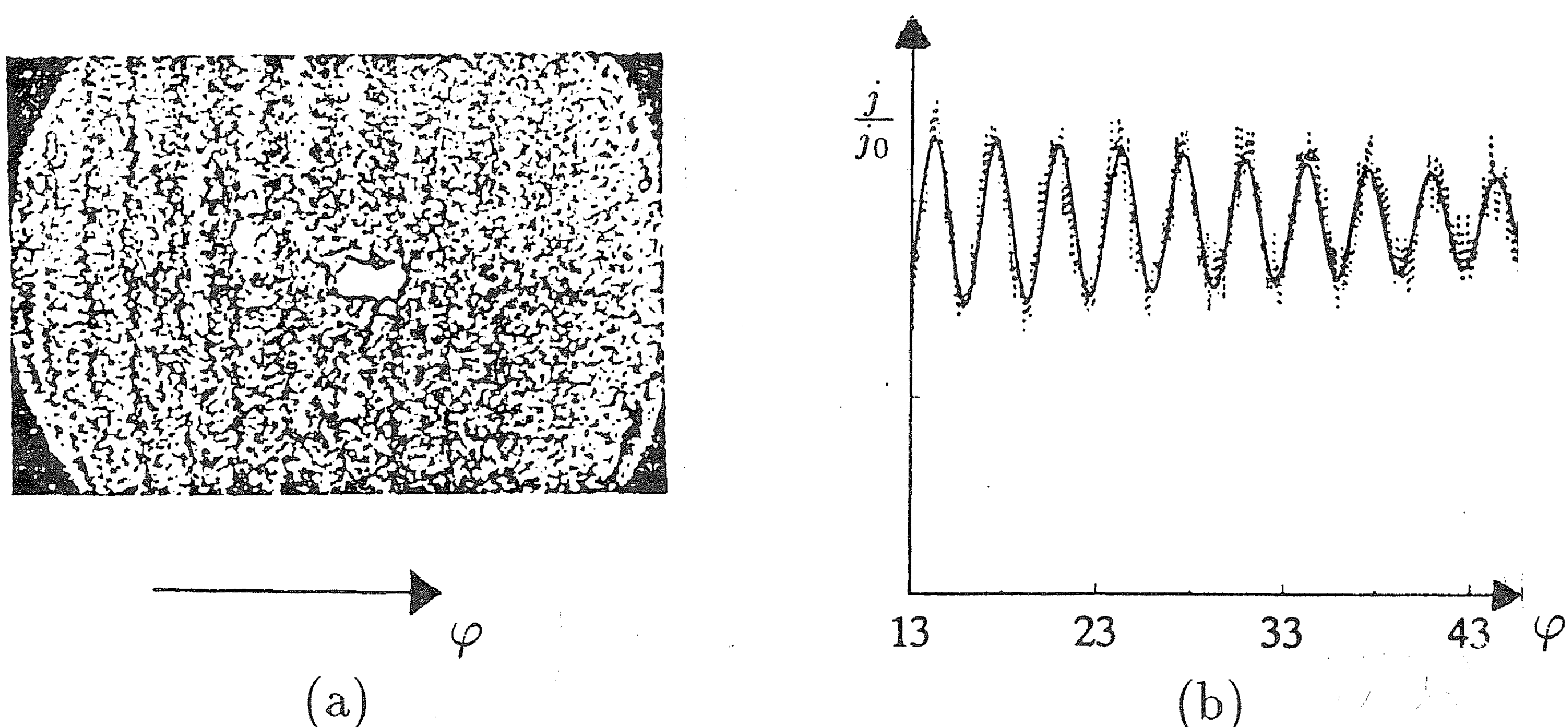
Živosrebrna iona  $^{198}\text{Hg}^+$  so ujeli na osi linearne Paulove pasti [2]. V radialni smeri ju je vezalo statično električno polje, v smeri osi pa radiofrekvenčno polje. Z napetostjo na elektrodah so lahko neposredno vplivali na njuno razdaljo. Od strani so ju obsevali s curkom linearno polarizirane laserske svetlobe z malo večjo valovno dolžino kot 194 nm, kolikor ustreza prehodu elektrona iz stanja z obhodnim kvantnim številom 0 v stanje z obhodnim kvantnim številom 1 pri glavnem kvantnem številu 6:  $6^2\text{S}_{1/2} \rightarrow 6^2\text{P}_{1/2}$ . Energija fotona je bila torej malo manjša od 6,39 eV, kolikor ustreza prehodu. Tako so z *laserskim hlajenjem* zmanjšali kinetično energijo iona. Do absorpcije je namreč prišlo samo, če se je ion gibal v nasprotni smeri, kot je potovala svetloba v curku. Le tedaj je povečanje frekvence zaradi Dopplerjevega pojava krilo majhen primanjkljaj energije. Ion je seval v kateri koli smeri in bil odrinjen v nasprotni smeri, zaradi česar se je njegova kinetična energija po vsaki absorpciji in sevanju malo zmanjšala. Po večjem številu absorpcij in sevanj se je kinetična energija zmanjšala na

povprečno kinetično energijo termičnega gibanja pri temperaturi, malo višji od tisočine kelvina.

Pri resonančni fluorescenci ion dovolj pogosto absorbira in izseva svetlobo, da je mogoče izsevani svetlobni tok zaznati s sodobnimi slikovnimi napravami, ki preslikajo fotokatodo na fluorescenčni zaslon. Svetlobo, ki sta jo izsevala iona, so zajeli z lečo na eni strani in dobili na slikovni napravi sliki ionov. Po tej poti so se prepričali, da so v pasti ujeli dva iona in da s spreminjanem napetosti na elektrodah nadzorujejo njuno medsebojno razdaljo. Na drugi strani so svetlobo z drugo lečo skozi režo zbrali na drugi slikovni napravi (sl. 1). Z lečo in režo so samo zmanjšali prispevek sipane svetlobe iz ozadja in dosegli ostrejšo sliko. Interferenčne proge bi lahko opazovali tudi brez njiju. Pri treh različnih razmikih med ionoma,  $5,4 \mu\text{m}$ ,  $4,3 \mu\text{m}$  in  $3,7 \mu\text{m}$ , so opazili jasne interferenčne proge (sl. 2a).



Slika 1. Okvirna risba naprave [1]



Slika 2. Interferenčna slika pri razmiku ionov  $3,7 \mu\text{m}$  (a) in izmerjeni in izračunani potek gostote svetlobnega toka v odvisnosti od kota  $\varphi = \alpha - \alpha_0$  pri interferenci na ionih v razmiku  $3,35 \mu\text{m}$  (b) [1].

Lege teh prog ni težko pojasniti. Sipalna centra naj bosta v razmiku  $a$  in svetloba naj ju zadene pod kotom  $\alpha_0$  proti njuni premici. Valovanje je

ojačeno pod kotom  $\alpha$  proti tej premici, če velja

$$a \cos \alpha_0 - a \cos \alpha = N\lambda, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Kot  $\alpha_0$  je meril  $62^\circ$ . Z  $a = 3,35 \mu\text{m}$  in  $\lambda = 194 \text{ nm}$  dobimo iz zapisane enačbe po vrsti za kot  $\varphi = \alpha - \alpha_0$   $14,4^\circ, 17,6^\circ, 20,9^\circ, 24,3^\circ, 27,6^\circ, 31,0^\circ, 34,2^\circ, 37,6^\circ, 41,0^\circ$  in  $44,5^\circ$ , ko naraste red interference  $N$  od 4 do 13. Ta izid se ujema s sliko (sl. 2b). Krivulja se približno sklada z običajnim potekom gostote svetlobnega toka pri Youngovem poskusu z zelo drobnima sipalnima centroma  $j = j_0 \cos^2 [\pi a (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) / \lambda]$ . Pri podrobnejšem računu pa je treba upoštevati, da se zaradi termičnega gibanja ionov nekoliko spreminja njuna medsebojna razdalja  $a$ . Krivuljo na sliki so dobili tako, da so upoštevali nihanje vsakega od ionov v njegovi potencialni jami z lastno frekvenco. Narisana krivulja je ustrezala temperaturi, ki je bila dvakrat višja od meje  $0,17 \cdot 10^{-3} \text{ K}$  pri Dopplerjevem hlajenju.

Električni dipolni prehod iona iz vzbujenega stanja  $^2P_{1/2}$  v osnovno stanje  $^2S_{1/2}$  določa matrični element operatorja električnega dipolnega momenta. Navadno se dokopljemo do tega sklepa v polklasičnem približku, v katerem opišemo elektron v okviru kvantne mehanike in sevanje v okviru klasične elektrodinamike [3]. Operator je kar sorazmeren s krajevnim vektorjem rod jedra do elektrona. Pri takem prehodu spin elektrona ni vpleten, zato ga ne vključimo v razpravo. Valovni funkciji v začetnem in v končnem stanju zapišemo kot

$$\psi_{nl'm'_l} = R_{n1}(r)Y_{1m'_l}(\vartheta, \varphi)e^{-iW_{n1}t/\hbar} \quad \text{in} \quad \psi_{nlm_l} = R_{n0}(r)Y_{00}(\vartheta, \varphi)e^{-iW_{n0}t/\hbar}.$$

Krajevnih delov  $R_{n1}$  in  $R_{n0}$  ne poznamo, krogelne funkcije pa so  $Y_{00} = (1/4\pi)^{1/2}$ ,  $Y_{10} = (3/4\pi)^{1/2} \cos \vartheta$  in  $Y_{1\pm 1} = (3/8\pi)^{1/2} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$ .

Matrični element krajevnega vektorja  $\mathbf{r} = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$  je tedaj  $\langle \mathbf{r} \rangle = \int \psi_{nlm_l}^* \mathbf{r} \psi_{nl'm'_l} d^3r$ . Prostorninski element je  $d^3r = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$  in integriramo po razdalji  $r$  od 0 do  $\infty$ , po azimutu  $\varphi$  od 0 do  $2\pi$  in po polarnem kotu  $\vartheta$  od 0 do  $\pi$ . Krajevni integral  $I = \int_0^\infty R_{n1} R_{n0} r^3 dr$  je pri vseh komponentah enak in različen od nič. Izbirnemu pravilu  $l' - l = \pm 1$  za obhodno kvantno število  $l$  smo že zadostili, saj je  $l' = 1$  in  $l = 0$ . Izbirno pravilo  $m'_l - m_l = 0, \pm 1$  za magnetno kvantno število obhodne vrtilne količine pa upoštevamo v dveh delih.

Najprej vzamemo prvi del  $m'_l - m_l = 0$  in postavimo  $m'_l = 0$ . V tem primeru se pojavita v prvi in v drugi komponenti integrala  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$  in je od nič različna samo tretja komponenta. Pri integriranju po polarnem kotu dobimo  $\int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = 2/3$ , tako da je:

$$\langle \mathbf{r} \rangle = (I/\sqrt{3})(0, 0, e^{-i(W_{n1} - W_{n0})t/\hbar}).$$

Nazorno ustreza to sinusnemu nihanju elektrona s krožno frekvenco  $\omega = (W_{n1} - W_{n0})/\hbar$  v smeri osi  $z$ . Gostota energijskega toka v izsevanem

valovanju je največja v ekvatorski ravnini  $xy$ , v osi  $z$  pa je enaka nič. V ekvatorski ravnini je valovanje linearno polarizirano z jakostjo električnega polja v smeri osi  $z$ .

Nato se lotimo drugega dela izbirnega pravila za magnetno kvantno število:  $m'_l - m_l = \pm 1$ , ko je  $m'_l = \pm 1$ . V tem primeru je enaka nič tretja komponenta, ker se v njej pojavi integral  $\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi} d\varphi = 0$ . Drugi dve komponenti vsebujeta integrala  $\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2}$  in  $\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi} \sin \varphi d\varphi = \pm \frac{1}{2}i$ . Pri integriranju po polarnem kotu dobimo  $\int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}$ . Z zvezo  $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$  preostane za matrični element

$$\langle \mathbf{r} \rangle = (I/\sqrt{6})(e^{-i(W_{n1}-W_{n0})t/\hbar}, e^{i[-(W_{n1}-W_{n0})/\hbar \pm \pi/2]t}, 0).$$

Nazorno ustreza to kroženju elektrona v ravnini  $xy$  s krožno frekvenco  $\omega$ . V smeri osi  $x$  prispeva k valovanju samo nihanje v smeri osi  $y$  in ima jakost električnega polja smer osi  $y$ , v smeri osi  $y$  samo nihanje v smeri osi  $x$  in ima jakost smer osi  $x$ . V smeri osi  $z$  je gostota energijskega toka dvakrat tolikšna kot v ekvatorski ravnini. Nazorne predstave spominjajo na slike stare kvantne mehanike. Zanimivo pot, na kateri pride to še nekoliko bolj do izraza, sta ubrala U. Fano in I. Fano [4].

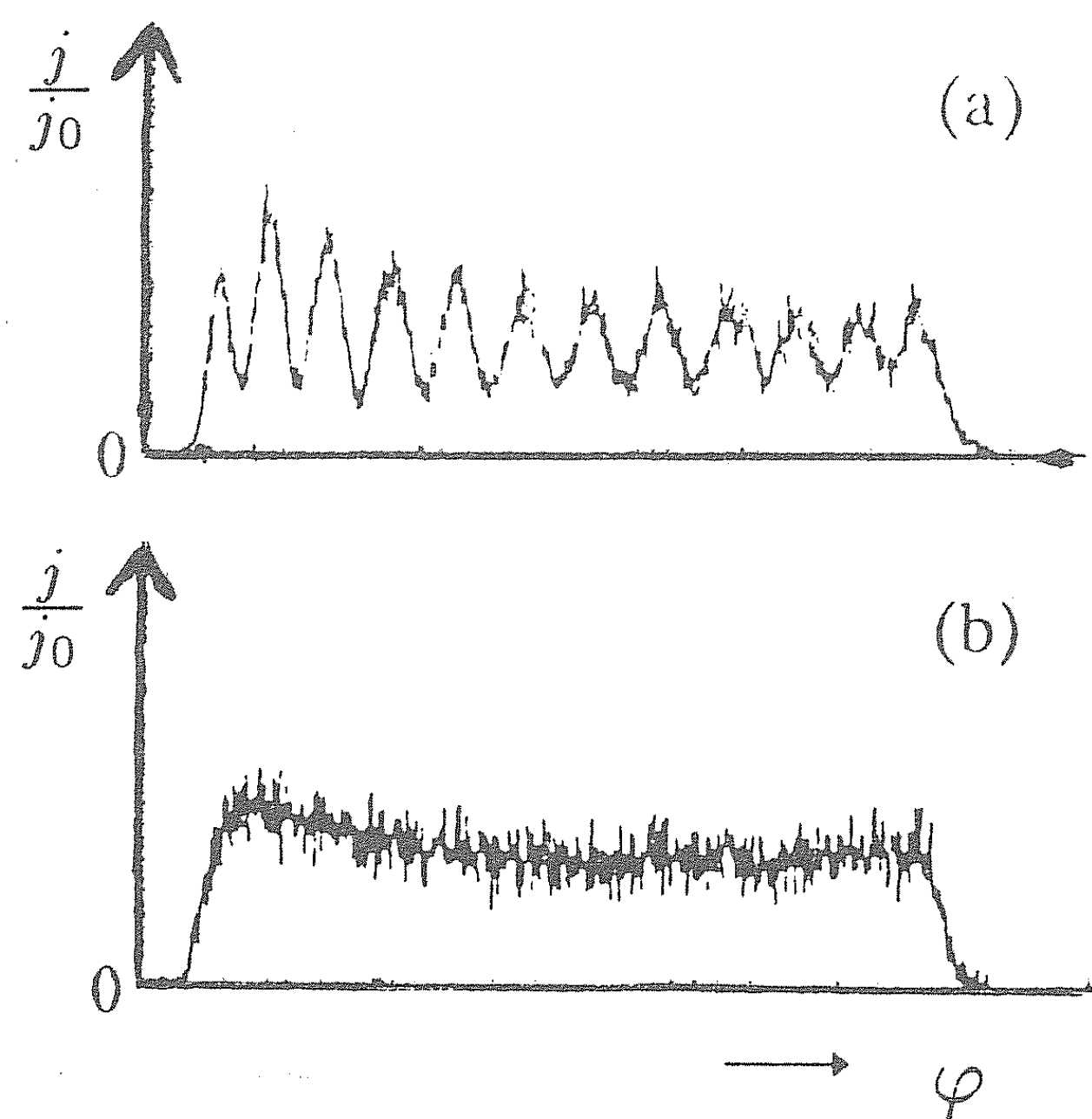
Pri resonančni fluorescenci ion preide iz osnovnega stanja v vzbujeno stanje, ko absorbira vpadno valovanje. V linearno polariziranem vpadnem valovanju določa smer jakosti električnega polja os  $z$ . Pri sevanju po prvem delu izbirnega pravila za magnetno kvantno število  $m'_l - m_l = 0$  je izsevano valovanje v smeri vpadnega valovanja linearno polarizirano z jakostjo električnega polja v smeri osi  $z$ . V tem primeru govorimo o sevanju  $\pi$ , ker sta jakosti električnega polja v izsevanem valovanju in v vpadnem vzporedni (nemško parallel). Pri sevanju po drugem delu izbirnega pravila  $m'_l - m_l = \pm 1$  v vpadnem valovanju jakost električnega polja leži v osi  $z$ , toda v izsevanem valovanju v smeri osi  $x$  ima jakost smer osi  $y$ . V tem primeru govorimo o sevanju  $\sigma$ , ker sta jakosti električnega polja v izsevanem valovanju in v vpadnem pravokotni (senkrecht).

Pri prehodih  $\pi$  sevanje ne zapusti opaznih sprememb na nobenem od ionov, zato ni mogoče ugotoviti, na katerem od njiju se je valovanje sipalo. Valovanje se sipa na obeh in izhajajoči delni valovanji sta koherentni in interferirata. V valovanju, ki je linearno polarizirano z jakostjo električnega polja vzporedno jakosti v vpadnem valovanju, potemtakem opazimo interferenčno sliko.

Pri prehodih  $\sigma$  pa je po sevanju eden od ionov spremenjen, saj je iz stanja s kvantnim številom  $m'_l = \pm 1$  prešel v stanje z  $m_l = 0$ . V načelu lahko zato ugotovimo, na katerem od ionov se je sipalo valovanje. V drugem primeru potemtakem lahko določimo, s katerim ionom je sodelovalo sipano valovanje, ali, kot pravimo, „po kateri poti” se je foton sipal. V tem primeru ni interferenčne slike. V prvem primeru pridejo med sipanjem do izraza „valovne lastnosti svetlobe”, v drugem pa njene „delčne lastnosti”.

O tem so se prepričali v drugem delu poskusa s tem, da so določali polarizacijo sipane svetlobe, medtem ko se v prvem delu niso menili zanjo. Med režo in merilnik so postavili stekleno ploščo, tako da se je vpadni kot ujemal z Brewstrovim kotom. Proti merilniku se je odbila le linearno polarizirana svetloba z jakostjo električnega polja pravokotno na vpadno ravnino. Če je bila jakost električnega polja v vpadnem curku laserske svetlobe pravokotna na vpadno ravnino, je merilnik zaznaval linearno polarizirano svetlobo od prehodov  $\pi$ , ko je bila jakost električnega polja v sipanem valovanju enako usmerjena kot v vpadnem. Zares so pri tem opazili interferenčne proge, le da so bile nekoliko manj izrazite, ker je polarizator odbil samo 0,15 vpadnega svetlobnega toka. Če pa je bila jakost električnega polja v vpadnem curku laserske svetlobe v vpadni ravnini, je merilnik zaznaval le linearno polarizirano svetlobo od prehodov  $\sigma$ , ko je bila jakost električnega polja v sipanem valovanju pravokotna na jakost električnega polja v vpadnem. V tem primeru so interferenčne proge izginile (sl. 3).

Opisani poskus je vsaj po izidu podoben Youngovemu poskusu, pri katerem z drobnima merilnikoma za režama zaznavamo, skozi katero režo gre kateri foton. Razlika je v tem, da Feynmanovega poskusa ne moremo zares narediti, poskus z dvema ionoma pa so izvedli. Pri slednjem je treba nekoliko premisliti, kako je s polarizacijo sipanega valovanja. Vendar je razumevanje poskusa vredno truda. Prav zaradi tega pa najbrž opis novega poskusa ne bo zašel v začetne učbenike kvantne mehanike.



Slika 3. Interferenčna slika z linearno polariziranim valovanjem, ko je jakost električnega polja v sipanem curku vzporedna z jakostjo električnega polja v vpadnem curku in ko ni mogoče ugotoviti, na katerem ionu se je svetloba sipala (a). Interferenčna slika izgine, ko leži jakost električnega polja v sipanem curku pravokotno na jakost električnega polja v vpadnem curku in ko je mogoče ugotoviti, na katerem ionu se je sipal foton (b) [1].

## LITERATURA

- [1] U. Eichmann, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, J. M. Gilligan, W. M. Itano, M. G. Raizen, *Young's interference experiment with light scattered from two atoms*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2359.
- [2] J. Strnad, *Enoelektronski oscilator*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 24.
- [3] J. Strnad, *Fizika*, 4. del, DMFA, Ljubljana 1992, str. 256.
- [4] U. Fano, I. Fano, *Basics Physics of Atoms and Molecules*, Wiley, New York 1959, str. 121, 391.

## POUK FIZIKE NA NIZOZEMSKEM

Nizozemska je razmeroma majhna dežela, zato je za Slovenijo njeno šolstvo najbrž bolj zanimivo od šolstva v velikih državah, saj se srečuje s podobnimi problemi kot mi. In če se v taki deželi intenzivno ukvarjajo z razvojem pouka fizike, je to vsekakor vredno pozornosti. V času, ko uvajamo eksterno maturo, pa je za nas koristno tudi seznaniti se z nizozemsko maturo.

Kaj vse je prispevalo k razvoju pouka fizike v tej deželi? Predvsem je kar na desetih nizozemskih univerzah katedra za didaktiko fizike. Ker je število študentov majhno, se te katedre intenzivno ukvarjajo z razvojem pouka fizike v šoli, za kar jih država tudi financira. Nekateri didaktiki fizike – tu izstopa katedra v Amsterdamu, veliko pa se s tem ukvarjajo tudi v Eindhovnu – so specialisti za uporabo računalniške tehnologije pri pouku. Drugi se že dolgo ukvarjajo z raziskovanjem intuitivnih predstav in iščejo poti, kako bi jih upoštevali pri pouku. Kot pot do globljega razumevanja fizike so zastavili projekte, pri katerih se fizika obravnava v kontekstu iz vsakdanjega življenja. Najbolj znan je projekt PLON, ki so ga razvili na utrechtski univerzi in pri katerem se dinamika obravnava v kontekstu gradnje mostov; v zadnjem času se ukvarjajo z delom in energijo. Amsterdamska univerza razvija skupaj z univerzami iz ZDA projekt za pouk gibanja, pri katerem, imata posebno vlogo računalniška tehnologija in interaktivni video. Veliko tovrstne literature so izdali tudi v angleščini, tako da je dostopna širšemu krogu bralcev.

Da se novosti uveljavljajo tudi v praksi in čim bolj načrtno uvajajo v šole, skrbi Inštitut za razvoj kurikulumov SLO v Enschedeju, ki poleg redno zaposlenih strokovnjakov zaposluje občasne sodelavce iz osnovnih in srednjih šol ter univerz in tako koordinira projekte in jih sproti preskuša v šolah.

Inštitut SLO pripravlja in preizkuša novosti, preden se vključijo v katalog znanja, ter izdaja najrazličnejša gradiva za učitelje. S tem jim olajšuje delo, obenem pa jih na nevsiljiv način usmerja, saj se država v pouk ne vmešava, postavlja le cilje in skrbi za enotno eksterno ocenjevanje.

Med letoma 1986–89 so se šole centralno opremile s po 11 IBM-kompatibilnimi računalniki. Zato so lahko – prav tako centralno – uvedli tudi vmesnike. Z njimi so opremili vse osnovne in srednje šole in izvedli tečaje za okoli 2000 učiteljev na šestih krajih v državi. Iz vsake šole so se morali tečaja udeležiti vsaj trije učitelji različnih predmetov, med njimi nujno ena ženska. Pri tem so bili aktivni predvsem fiziki. Pred štirimi leti so uvedli v srednje šole informacijsko tehnologijo ne kot poseben predmet, ampak kot sestavni del posameznih predmetov. Najbolj se je obnesel ta del v fiziki. Poučuje se v obliki dveh modulov, pri katerih učenci najprej obdelajo računalniške osnove, nato pa uporabo pri fizikalnih poskusih. V letu 1993 sta bila ta modula prvič sestavni del mature.

Maturo iz fizike opravlja 40 do 60 odstotkov dijakov, kar je razumljivo, če upoštevamo, da mora dijak delati maturo iz sedmih predmetov. Maturitetna ocena je sestavljena iz interne in eksterne, ki imata enako težo; končna ocena je kar aritmetična sredina obeh ocen. Za interno oceno morajo učitelji izvesti tri interne teste, ki jih pripravijo sami, in oceniti učenca pri izvajanju eksperimentalnega dela. Nad interno oceno ni nobenega nadzora, vendar pa inštitut SLO skupaj s sodelavci z univerze in iz srednjih šol pripravi predloge za eksperimentalne naloge. Leta 1993 so v petletnih srednjih šolah, ki so pripravljalnice na univerzo, dijaki prvič pod vodstvom učitelja izvajali samostojne eksperimentalne naloge, za katere so sami postavili hipotezo, ki so jo želeli preveriti, naredili načrt, izvedli eksperimente in izpeljali zaključke. Za to nalogo naj bi porabili 15 ur. Gradiva in nasvete učiteljem za izvajanje teh nalog so npr. pripravili na katedri za didaktiko fizike v Eindhovnu.

Eksterno testiranje se izvaja na določen dan za vsako vrsto srednjih šol posebej, se pravi za triletno poklicno šolo, za štiriletno srednjo tehnično šolo in za petletno pripravljalnico na univerzo. Za eksterne teste na poklicnih šolah imajo večinoma vprašanja z odgovori izbirnega tipa, za drugi dve vrsti šol pa razmeroma dolge naloge, v katerih je poudarek na realni situaciji (kontekst). Vsaka od teh treh vrst šol ima svoj katalog za končni izpit oziroma en sam predpisan priročnik za vse naravoslovne predmete, ki vsebujejo zbirko formul, snovne konstante ipd.

Prenovljen maturitetni katalog za petletno šolo je bil sprejet leta 1988 in se je začel izvajati na maturi leta 1993. V uvodu opredeljuje štiri vidike. Prvi vidik zadeva vsebino in obsega fizikalne pojme, količine, zakone, zveze itd., potem reševanje problemov, pri čemer se naloga izrazi v matematični obliki in uporabijo ustrezne formule, nadalje uporabo fizikalnih pojmov in zakonov pri opisu fizikalnega pojava, grafično obdelavo podatkov in selekcijo informacij, ki so važne za reševanje problema. Drugi vidik zadeva spretnosti in obsega uporabo znanega instrumenta v novih okoliščinah ter primerjanje naprav z isto funkcijo glede na njihovo energijsko porabo. Tretji vidik je družbeni in terja od dijaka argumentiran zagovor lastnega stališča in kritično tehtanje informacij. Četrty vidik pa zadeva eksperimentalno delo in obsega postavljanje hipotez in njihovo preverjanje z eksperimentom, sestavo eksperimentalne opreme po opisu, merjenje z upoštevanjem natančnosti in poročilo.

Vsebina kataloga je razdeljena na 10 poglavij; prvih pet zajema standardno snov, v drugi skupini pa so novejša poglavja, med njimi fizikalna informatika, biofizika, fizika delcev in astronomija. Katalog je oblikovan v treh stolpcih. V prvem je teorija: pojmi, zakoni in zveze, instrumenti. V srednjem je kontekst, v katerem se obravnava snov; kontekst je lahko navezan na šolske poskuse, lahko pa tudi na izvenšolske situacije. V desnem stolpcu je pojasnilo. Za lažjo predstavbo si oglejmo dva zgleda. Teorija: magnetna gostota ( $B$ ); kontekst: zvočnik; pojasnilo: kvantitativna obravnava magnetnega pretoka le v homogenem magnetnem polju. Teorija: relativna hitrost; kontekst: prehitevanje in srečevanje vozil; pojasnilo: dve enako-

merni gibanji na isti premici. Na koncu vsakega poglavja so navedene formule, ki jih je treba znati. Zadnje poglavje kataloga je natančen pregled zahtevanega matematičnega znanja.

Izpitna vprašanja zajemajo dve kategoriji: reproduktivno (spominsko) in produktivno (uporabno) znanje, in sicer deloma v znanem, deloma pa v neznanem kontekstu. Za pripravo tekstov skrbi izpitni center CITO v Arnhemu. Koordinator za fiziko v tem centru organizira pripravo testov, teste pa sestavi skupina treh učiteljev, ki se imenujejo za dobo 6 let. Zaradi tega dodatnega dela imajo zmanjšano učno obveznost za eno sedmino (za 4 ure od 28 ur na teden). Sestajajo se v izpitnem centru na 14 dni in pripravijo dva testa v enem letu (za majski in avgustovski rok). Ko so testi pripravljeni, jih pregleda posebna nadzorna komisija, v kateri so trije od države imenovani člani (predstavniki univerze, inštitutov, ravnatelji, bivši učitelji ipd.).

Izpitni center nato poskrbi za tehnično izvedbo. Testi se pišejo ob določenem času po vsej deželi, in sicer tri ure. Učitelji dobijo na šole hkrati s testi tudi navodila za točkovanje in teste sami ocenijo; nato pa jih oceni še en zunanji ocenjevalec iz druge šole. Tako se skrajša in bistveno poceni popravljanje testov in je mogoče do vpisa na univerzo izvesti še en rok za maturo.

In kako je z izobraževanjem učiteljev fizike? Učitelj fizike na srednji šoli mora po diplomi iz fizike opraviti še enoletni tečaj iz didaktike, ki poteka na katedrah za didaktiko fizike; na 10 nizozemskih univerzah trenutno opravlja to izobraževanje vsega skupaj nekaj nad 20 študentov. V enem letu študija imajo študenti 172 ur prakse na šoli, pedagogiko in razvojno psihologijo, pri didaktiki fizike pa obravnavajo predvsem novosti, ki se v zadnjem času uvajajo v pouk, in sodelujejo pri raziskovalnem delu iz didaktike. Poklic srednješolskega učitelja fizike terja torej eno dodatno leto študija, zaradi česar je tudi število mladih učiteljev fizike v zadnjem času skokovito padlo. Če se spomnimo naše statistike iz zadnjih let, ki kaže, da število učiteljev fizike z daljšo dobo poučevanja eksponentialno pada in da jih približno polovica po 13 letih zapusti svoj poklic, je krivulja, ki prikazuje število nizozemskih učiteljev fizike v odvisnosti od njihove delovne dobe, popolnoma drugačna; vrh ima nekje pri 25 letih delovne dobe, na začetku pa je skrajno nizka. Prav ti učitelji, ki imajo zdaj 25 do 30 let delovne dobe, so glavno gonilo pri razvoju pouka, in zdaj je že čutiti bojazen, da se bo stanje bistveno poslabšalo, če se ta situacija ne bo spremenila. Država išče dodatne spodbude za pridobivanje učiteljev fizike, recimo s tem, da jim za čas dopolnilnega enoletnega izobraževanja ob polovični delovni obveznosti daje polno plačo ipd.

## VIRI

Študijski obiski in pogovori z ljudmi na omenjenih nizozemskih ustanovah v novembru 1992, katalogi znanja iz fizike, projekt PLON, literatura za uporabo vmesnika, članek Current Developments in Physics Education in the Netherlands avtorja H. Eijkelhofa, Phys. Ed. 6/27, nov. 1992.

*Seta Oblak*

## ZASEDANJE MEDNARODNE MATEMATIČNE UNIJE IN EVROPSKEGA MATEMATIČNEGA DRUŠTVA V ŠVICI

Mednarodna matematična unija (IMU) je po štirih letih spet imela zasedanje svoje skupščine, in sicer 31. julija in 1. avgusta 1994 v Luzernu v Švici. Posamezne države so zastopale delegacije, ki so imele od 1 do 5 članov in ustrezno število glasov na volitvah. Slovenija je postala članica (s pravico do 1 glasu) leta 1992. (Mimogrede, takratno glasovanje o vključitvi Slovenije v IMU je potekalo po pošti. Vsi dobljeni glasovi so bili za, število glasov (97) pa je bilo najvišje od devetih podobnih glasovanj.)

Tajništvo IMU ima sedež v Braziliji. Najvidnejša aktivnost IMU je organizacija Mednarodnega kongresa matematikov in podelitev Fieldsovih medalj. Za oboje je pristojen upravni odbor IMU, zato so bile volitve vanj deležne precejšnje pozornosti. Stari upravni odbor, ki ga je vodil predsednik Jacques-Louis Lions, je predlagal naslednjo listo: predsednik: David Mumford s Harvardske univerze; podpredsednika: Vladimir Arnold z Inštituta Steklova in Albrecht Dold z Univerze v Heidelbergu, tajnik Jacob Palis z IMPA v Rio de Janeiru, člani upravnega odbora: J. Arthur, S. Donaldson, B. Enquist, S. Mori in K. Parthasarathy.

Ker je bila lista zaprta, je to izzvalo komentarje, češ da je to tako, kot je bilo v komunizmu, in podobno. Predsednik Lions je razložil, da je bilo treba upoštevati porazdelitev tako po strokah kot po kontinentih in da bi lahko dodatne predloge poslali že prej, lahko pa jih podajo tudi zdaj. Pri glasovanju dodatna kandidata (iz Madžarske in Izraela) nista dobila podpore, kar je izzvalo še hujše pripombe na postopek volitev, tako da je Lions izjavil, da se čuti užaljenega. Lahko bi komentirali, da pri takih društvih običajno ljudje pridejo na zasedanje nepripravljeni in šele na mestu samem dobijo razne ideje, ki pa jih večinoma ni mogoče uresničiti. Tako je seveda vpliv predsednika (ali včasih tajnika) odločilen.

Precej debate je bilo tudi o tem, ali naj se objavi, kdo so člani organizacijskega odbora Mednarodnega matematičnega kongresa. Ta odbor, ki izbira predavatelje, je bil namreč do zdaj tajen, tudi zato, da ga ne bi oblegali vsi tisti, ki so pravkar rešili Fermatov problem. Spet je obveljal Lionsov predlog, naj postane javno le ime predsednika odbora.

Debata se je razvila tudi v zvezi z letom 2000, ki ga je UNESCO izbral za svetovno leto matematike. Tako naj bi:

- povabili manjše število najprodornejših matematikov, da bi predstavili svoje poglede na teme, za katere pričakujejo, da bodo v središču pozornosti v naslednjem stoletju;
- organizirali vrsto simpozijev, lahko v sodelovanju z drugimi znanstvenimi telesi, posvečenih matematiki, njeni uporabi in vlogi v družbi;
- organizirali še druge dogodke pod pokroviteljstvom komisij za pouk matematike, za razvoj in za izmenjavo ter za zgodovino matematike.

Med telesi IMU naj omenimo ICMI, Mednarodni komite za matematično izobraževanje, ki bo leta 1996 imel velik kongres v Sevilli. (Naš predstavnik v ICMI je Peter Petek.)

Na koncu je prišlo še do zanimivega zapleta, ko je znani matematik Ronald Douglas v imenu Ameriškega matematičnega društva prebral poziv, pravzaprav en sam stavek, naj si skupščina prizadeva za večjo reprezentiranost žensk in „etničnih manjšin” na mednarodnih matematičnih kongresih ipd. Delegati so najprej opozorili, da si v preostale pol ure ni mogoče kaj preveč prizadevati, Vladimir Arnold pa se je čudil, da ameriški kolegi niso omenili tudi spolnih manjšin. Predsednik Afriškega matematičnega društva je želel vedeti, kaj so etnične manjšine. Piko na i je postavila madžarska delegatka, ki je rekla, da predlog predstavlja svojevrstno diskriminacijo žensk. Tako so bili pri glasovanju proti pozivu vsi razen Američanov.

Razpoloženje na skupščini je bilo sicer zelo dobro, tudi zaradi organizacije, ki je spodbujala druženje delegatov.

Deset dni kasneje, po koncu Mednarodnega matematičnega kongresa, se je na ETH v Zürichu sestala tudi skupščina Evropskega matematičnega društva (EMS). Organizacija tega društva je nekoliko drugačna. Pozna dve vrsti članov. Med korporativne sodijo matematična društva nekaterih evropskih držav in tudi Izraela, pa matematična društva večjih pokrajin in celo večjih mest (na primer St. Petersburga, Moskve, Londona). Individualni člani (ki jih je kakih 1600) pa so posamezni matematiki. Sedež društva je v Helsinkih, tako da je pri finančnih poročilih, spremembah statuta in podobnem treba upoštevati finsko zakonodajo.

Skupščina je bila sestavljena iz predstavnikov obeh vrst članov. Ena prvih točk dnevnega reda so bile volitve novih korporativnih članov. Kandidirali so Belorusko matematično društvo, Matematično društvo iz Voroneža, pa Bosansko in Makedonsko matematično društvo. Madžari so izrazili pomisleke nad sprejemanjem posameznih ruskih društev. Pri zadnjih dveh predlogih pa je motila pomanjkljiva dokumentacija. Situacijo je rešil Ivan Ivanšić iz Zagreba, nekdanji koordinator jugoslovanskih društev, ki je povedal dovolj dejstev, da sta bila, ob podpori Dancev in drugih manjših držav, sprejeta tudi ta dva predloga.

Med poročili odborov društva so bili na prvem mestu stiki z Evropsko skupnostjo, saj je to mesto, kjer je na kupu veliko denarja. Luc Lemaire iz Bruslja, ki je pristojen za to področje, je povedal, da je eden glavnih problemov ta, da imajo prednost veliki projekti, matematiki pa navadno prosijo za skromna sredstva. Predsednik društva Friedrich Hirzebruch pa je povedal, da lobiranje ni preprosto, saj se je delegaciji, ki jo je vodil on, zgodilo to, da jih je funkcionarka ES vrgla skozi vrata. Ker je resor znanosti in izobraževanja v ES nekako rezerviran za Italijane, se je skupščina obrnila na italijanske predstavnike. Ti so povedali, da so v preteklosti dosegli marsikaj predvsem zato, ker so redno obiskovali nove funkcionarje tako v sami Italiji kot v ES.

Sploh je Evropsko društvo zelo raziskovalno orientirano. Med sedanjimi člani upravnega odbora je bil tudi Pierre-Louis Lions, letošnji dobitnik Fieldsove medalje. Sodeloval je v razpravi o uporabni matematiki in poročal, kako se mu je posrečilo doseči, da bodo v letu 2000 v Franciji izdali serijo

znamk o matematikih in matematiki. Govorili so tudi o programu z naslovom Industrijska matematika, ki ga koordinirano izvaja več univerz. P.-L. Lions pa vodi tudi konferenčni program z naslovom Matematične metode v industrijskih problemih. Torej tudi nekateri mladi in uspešni raziskovalci najdejo čas za delo v društvu in za popularizacijo matematike.

Evropsko društvo izdaja zanimivo publikacijo Newsletter z mnogimi informacijami predvsem organizacijske narave. (Ogledate si jo lahko v Matematični knjižnici.) Obstaja pa tudi predlog, da bi izdajali posebno, ne predrago revijo Journal of the European Mathematical Society.

Na skupščini je bilo kar nekaj delegatk, ki so se hitro organizirale v ženski lobby. Eva Bayer iz Besançon je poročala o vprašanju žensk v matematiki. Odstotek žensk na univerzitetnih položajih je v posameznih deželah precej različen, povsod pa majhen. Govora je bilo o tem, da bi bilo treba analizirati stanje tam, kjer je ta odstotek zelo majhen (npr. v Švici). Če je število profesorice večje, imajo tudi študentke vzor za kariero.

Evropsko matematično društvo ima nekaj sredstev za podporo vzhodnoevropskim matematikom, ki pa zaradi premajhnega interesa niso izkoriščena.

Govorili so tudi o podpori deželam v razvoju. V Franciji so ustanovili bazo podatkov z imenom Bordeauxthèque, namenjeno predvsem nekdanjim kolonijam. Eden od britanskih delegatov pa je opozoril, da se tovrstne zastonske usluge nekritično izkoriščajo, kot se je lahko prepričal na kraju samem.

Odbor za matematično izobraževanje je razpravljal o programu Erasmus, ki deloma financira izmenjavo študentov v ES. Mnenja so bila nasprotujoča: za ene so bile to počitnice za bogate študente, britanski delegat pa je povedal, da so bile izkušnje zanje zelo dragocene in da bodo na podlagi primerjav podaljšali študij na nekaterih njihovih univerzah. Zdaj bo program Erasmus zamenjal program Socrates.

Odbor za referativne revije je bil posebno aktiven. Bodočemu predsedniku društva J.-P. Bourguignonu se je posrečilo doseči finančno podporo francoske vlade za Zentralblatt, ki naj bi postal evropski časopis, saj je predvidena tudi združitev z ruskim Referativnim žurnalom. Pogovori z Mathematical Reviews pa so bili neuspešni.

Madžari so poročali o pripravah na Evropski matematični kongres, ki bo leta 1996 v Budimpešti. Marsikaj je odvisno še od tega, če bo zagotovljena podpora ES.

Leto 2000 bo, kot smo že povedali, svetovno leto matematike. Sklenjeno je bilo, naj v vseh državah, zastopanih v EMS, poskrbimo za posebne izdaje znamk, pa tudi za matematične programe na televiziji.

Novi tajnik EMS, Peter Michor z Univerze na Dunaju, je predstavil pobudo, da bi nekatere evropske matematične revije, vsaj tiste, ki jih izdajajo inštituti in univerze, postale tudi elektronske. Po njegovem klasične revije čakajo v knjižnici, da jih kdo fotokopira. Ocena je, da povprečen članek v svetu skopirajo 50-krat in preberejo 25-krat. Število revij se veča, knjižnice pa jih vse teže naročajo.

Novi izvoljeni funkcionarji EMS so: predsednik Jean-Pierre Bourguignon z IHES v Franciji, podpredsednik D. A. R. Wallace iz Glasgowa na Škotskem, tajnik Peter Michor z Dunaja, novi član upravnega odbora Alberto Conte iz Torina v Italiji. Od prej so še člani UO: E. Bayer, I. S. Labouriau, A. Pelczar, V. A. Solonnikov in A. Lahtinen kot blagajnik.

Na koncu je dosedanji predsednik Hirzebruch povabil vse izvoljene na kosilo. Kot je povedal, je eden njegovih kolegov svojčas obvestil polovico oddelka, da jih vabi na večerjo, drugo polovico pa, da niso povabljeni. Zato tudi on vsem preostalim delegatom sporoča, da niso vabljeni. S tem se je zasedanje končalo.

*Peter Legiša*

## PRIZNANJA DMFA UČITELJEM MATEMATIKE IN FIZIKE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije podeljuje vsako leto priznanja svojim članom učiteljem, ki so pri delu z mladimi posebej uspešni.

Na občnem zboru DMFA Slovenije, ki je bil ob 1. kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v Cankarjevem domu v Ljubljani, so društvena priznanja v letu 1994 prejeli:

### VILKO DOMAJNKO,

*profesor matematike na Gimnaziji Bežigrad v Ljubljani,*

- za zelo zanimiv pouk, pri katerem kolegi in dijaki uživajo v svežini in originalnosti njegovih idej;
- za vodenje krožka iz zgodovine matematike in rekreacijske matematike. Veliko njegovih učencev je dobilo na tekmovanjih nagrade in pohvale;
- za mentorstvo pri seminarskih nalogah iz matematike;
- za aktivno delo v uredniškem odboru Preseka, saj je objavil več kot 50 prispevkov;
- za obogatitev slovenske matematične literature s knjigo Z nalogami skozi zgodovino matematike;
- za predavanja v okviru stalnega strokovnega spopolnjevanja srednješolskih učiteljev matematike.

### IVAN KOZINC,

*profesor matematike in fizike na Srednji tehniški šoli v Celju,*

- za skoraj 30-letno vestno in zavzeto delo z dijaki. Njegovo poučevanje matematike in fizike je strokovno brezhibno, skrbno pripravljeno, prepričljivo, v vseh pogledih vzorno.

Na gimnaziji, kjer je sprva poučeval, se je veliko posvečal nadarjenim učencem. Redno je imel krožke. Njegovi učenci so na tekmovanjih dosegali lepe uspehe.

S sistematičnim, zavzetim in večkrat trdim delom in z vedno novimi metodičnimi prijemi zbuja tudi v učencih tehniške šole zanimanje in veselje za matematiko. Priljubljenosti med učenci ni nikoli zmanjševala njegova doslednost in zahtevnost.

Priznanja vredno je torej delo profesorja Kozinca zlasti v razredu, kjer srednješolski učitelj s trdnim strokovnim znanjem in moralnimi kvalitetai lahko največ pripomore k izboljšanju izobraževanja in vzgoje učencev.

## MARIJA LUKŠIČ,

*predmetna učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Center v Novem mestu,*

- za več kot 30-letno zelo uspešno poučevanje matematike in fizike. Njeni učenci dobivajo dobro osnovo za nadaljnje šolanje in zanimanje za matematiko in fiziko;
- za dolgoletno vodenje matematičnega krožka oziroma dodatnega pouka iz matematike za nadarjene učence. Uspešnost tega dela kažejo zavidljivi uspehi njenih učencev na tekmovanjih za bronasto, srebrno in zlato Vegovo priznanje;
- za dolgoletno vodenje šolskega aktiva matematikov in fizikov in večletno vodenje občinskega aktiva. Bila je organizatorica in predsednica komisije vsaj sedmih občinskih tekmovanj iz matematike. Pripravljala je zgledne nastope za učitelje dolenjske regije in za dijake pedagoške gimnazije v Novem mestu. Bila je mentorica učiteljem na šoli in dijakom na obvezni pedagoški praksi. Kot članica republiške komisije je sodelovala pri spremljanju ustreznosti in uporabnosti učbenikov Matematika za 6., 7., in 8. razred osnovne šole.

## NADA RAZPET,

*profesorica matematike, Zavod RS za šolstvo in šport,*

- za dolgoletno vestno in zavzeto poučevanje matematike, fizike in računalništva. Vzgojila je veliko generacij dijakov, ki so danes uspešni mladi raziskovalci, magistri in doktorji znanosti doma in v tujini;
- za vodenje poletnih šol mladih fizikov;
- za sodelovanje v komisijah na republiških tekmovanjih iz fizike za učence prvih letnikov srednjih šol;
- za sodelovanje pri organizaciji republiških tekmovanj iz fizike za osnovno in srednjo šolo;
- za mentorstvo študentom matematike in fizike pri obveznih nastopih in šolski praksi;

- za sodelovanje pri evalvaciji učbenikov dr. Franceta Križaniča, Berilo 1, 2 in 3, za pouk matematike v srednji šoli;
- za recenzentsko in svetovalno delo pri učbenikih matematike za osnovno šolo;
- za uvajanje novih metod dela pri pouku naravoslovja v okviru projekta TEMPUS;
- za organizacijo in aktivno delo pri izobraževanju učiteljev fizike v srednji šoli;
- za soavtorstvo pri učbenikih in gradivih za fiziko v srednji šoli;
- za aktivno delo v upravnem odboru DMFA Slovenije.

### **IRENA ROSA,**

*predmetna učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Dušana Bordona v Kopru,*

- za dolgoletno aktivno in ustvarjalno pedagoško delo v šoli in zunaj nje. Učence je pripravljala na občinska tekmovanja iz matematike in fizike, na katerih so pogosto dosegali lepe uspehe in se uvrščali na republiška tekmovanja;
- za mentorsko delo pri naravoslovnih in matematičnih krožkih na šoli;
- za odprte pedagoške ure iz matematike in fizike za učitelje in starše koprskih regije;
- za vestno opravljanje tajniških del v podružnici DMFA Slovenije v Kopru.

### **MARIJA ŠAVOR,**

*predmetna učiteljica matematike in fizike na Osnovni šoli Gustava Šiliha v Velenju,*

- za več kot 30-letno vestno in zavzeto poučevanje matematike in fizike na osnovni šoli. Veliko časa je posvetila skrbni pripravi vzornih nastopov, urejanju fizikalne zbirke in navajanju učencev na branje matematične in fizikalne literature;
- za stalno spodbujanje nadarjenih učencev in vodenje dodatnega pouka. Njeni učenci vsako leto uspešno sodelujejo na občinskih in republiških tekmovanjih iz matematike in fizike;
- za organizacijo in sodelovanje pri občinskih tekmovanjih iz matematike in fizike. Na šoli, kjer poučuje, so tekmovanja pogosta. Tudi kot članica občinske in republiške tekmovalne komisije vestno in natančno opravlja svoje delo.

Nagrajencem iskreno čestitamo!

*Ivana Mulec*

DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost