ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

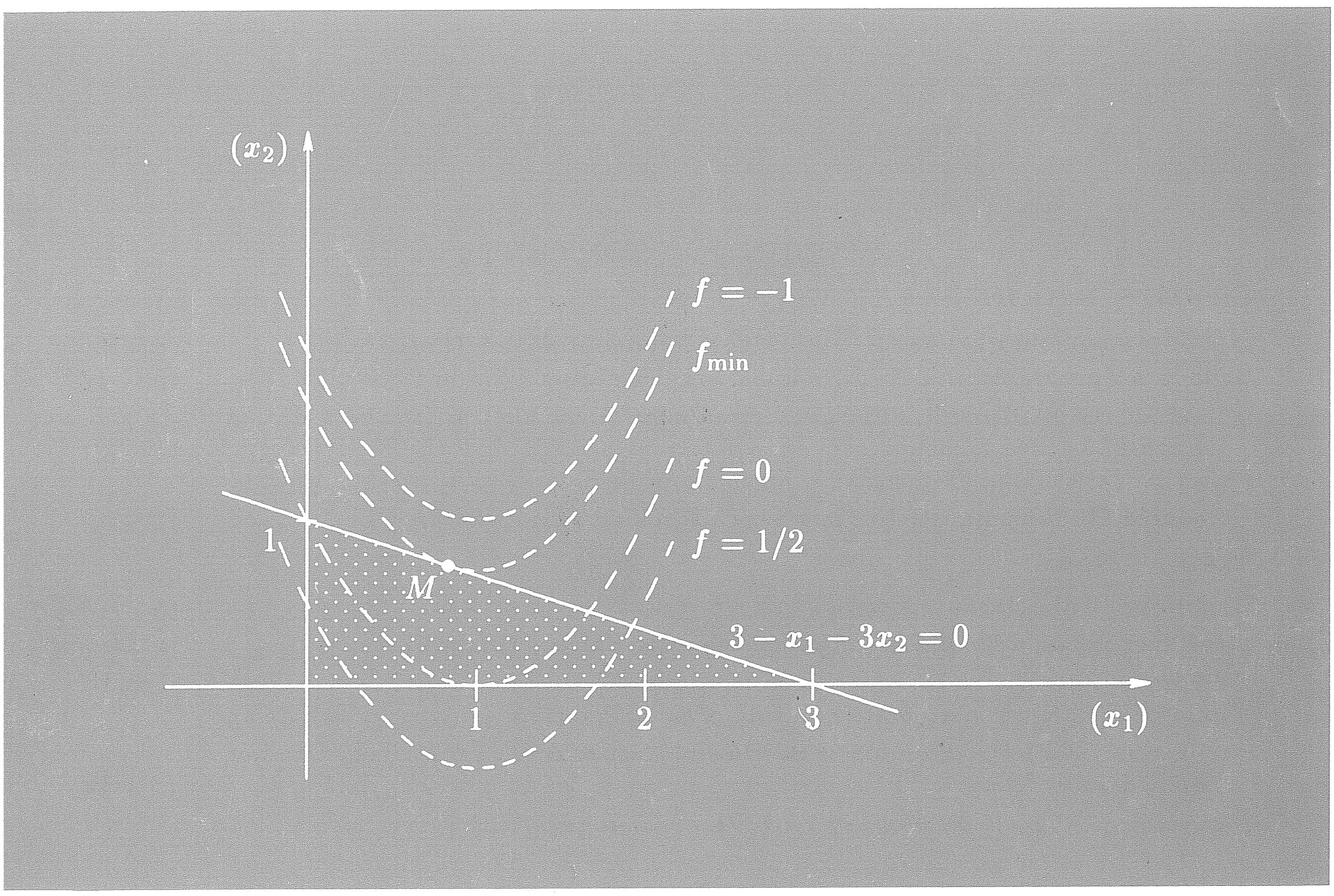
SSN 0473-7446

1994

Letnik 41

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1994

letnik 41, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.900,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.800,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, dvojna številka 800,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 DMFA Slovenije – 1209

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Stabilnost homomorfizmov — Stability of homomorphisms (Peter Šemrl) 97–106

Nelinearno programiranje — Non-linear programming (Anton Cedilnik) 109–116

Odlaganje radioaktivnih odpadkov — Disposal of nuclear waste (Matjaž Ravnik) 117–121

Fizika iz Karlsruheja O novostih v poučevanju fizike — The Karlsruhe physics course On new approaches in physics teaching (Janez Strnad) 122–128

Vesti — News

Dopolnilno izobraževanje (Matija Lokar) 106–107

Strokovno spopolnjevanje učiteljev matematike (Milan Hladnik) 107–108

Ob odprtem grobu Ivana Štalca (Dušan Modic) 128–III

Vabilo prvi kongres matematikov, vabilo na občni zbor društva in vabilo na proslavo 200-letnice popolne zakladnice logaritmov (Z. Trontelj, F. Cvelbar in F. Gradišek) . . . . . III–IV

Na ovitku: Slika 1. *K primeru 1.* (K članku na strani 109.)

STABILNOST HOMOMORFIZMOV

PETER ŠEMRL

Math. Subj. Class. (1991) 20K30, 39B72

Predstavimo Hyers-Ulamov problem stabilnosti homomorfizmov in ga ilustriramo z nekaj preprostimi rezultati.

STABILITY OF HOMOMORPHISMS

The Hyers-Ulam stability problem is presented and illustrated with some simple results.

1. Uvod

Naj bosta dani grupi G_1 in G_2. Preslikava $h : G_1 \longrightarrow G_2$ je homomorfizem, če velja $h(xy) = h(x)h(y)$ za vsak par elementov x, y iz grupe G_1. Privzemimo, da je grupa G_2 opremljena z metriko d in naj bo ε pozitivno realno število. Potem se preslikava $f : G_1 \longrightarrow G_2$ imenuje ε-homomorfizem, če je neenakost

$$d(\, f(xy),\, f(x)f(y)\,) \leq \varepsilon \tag{1}$$

izpolnjena za vsak par elementov $x, y \in G_1$. Problem, ki ga je pred nekaj več kot petdesetimi leti zastavil S. M. Ulam, je mogoče formulirati v obliki dveh vprašanj:

(I) Za katere pare grup G_1, G_2 obstaja pozitivno število $k(G_1, G_2)$ z lastnostjo, da za vsako pozitivno število ε in vsak ε-homomorfizem $f : G_1 \longrightarrow G_2$ obstaja tak homomorfizem $h : G_1 \longrightarrow G_2$, da velja

$$d(\, f(x),\, h(x)\,) \leq k(G_1, G_2)\varepsilon \tag{2}$$

za vsak $x \in G_1$?

(II) Če je za kak par grup G_1, G_2 odgovor na prvo vprašanje pritrdilen, kakšna je minimalna vrednost konstante $k(G_1, G_2)$ v neenakosti (2)?

Gornji vprašanji sta poseben primer splošnega problema stabilnosti. Denimo, da kak matematični objekt zadovoljuje kako lastnost aproksimativno. Ali je potem mogoče blizu tega objekta najti matematični objekt, ki eksaktno zadošča tej lastnosti? In kadar je to mogoče, nas seveda zanima, kako dobra je lahko taka aproksimacija.

V članku bomo obravnavali dva preprosta primera. Najprej bomo privzeli, da je $G_1 = G_2$ aditivna grupa realnih števil. Nato pa bomo obravnavali še primer, ko je $G_1 = G_2$ multiplikativna grupa pozitivnih realnih števil. V obeh primerih bomo množico realnih števil opremili z običajno metriko: $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. V prvem primeru je odgovor na vprašanje (I) pritrdilen. Pokazali bomo, da je minimalna vrednost konstante $k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ v neenakosti (2) enaka 1. V drugem primeru pa se bo izkazalo, da je vsak neomejen ε-homomorfizem že kar pravi homomorfizem.

2. Stabilnost aditivnih preslikav

Najprej bomo obravnavali stabilnost homomorfizmov aditivne grupe realnih števil. Preslikava $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je homomorfizem aditivne grupe realnih števil, če zadošča Cauchyjevi funkcijski enačbi

$$h(x+y) = h(x) + h(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Pogosto rešitve enačbe (3) imenujemo aditivne funkcije. Če v enačbo (3) postavimo $x = y = 0$, dobimo $h(0) = 0$. Vsaka aditivna funkcija h je liha. To vidimo tako, da v (3) nadomestimo y z $-x$. Preprosta uporaba popolne indukcije nam pove, da velja $h(nx) = nh(x)$ za vsako realno število x in vsako naravno število n. Naj bo sedaj n poljubno naravno število. Potem velja $h(x) = h(n(1/n)x) = nh((1/n)x)$, ali ekvivalentno, $h((1/n)x) = (1/n)h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Strnimo vse ugotovitve, pa dobimo $h(rx) = rh(x)$ za vsako racionalno število r in vsako realno število x. Z drugimi besedami, vsaka aditivna preslikava je endomorfizem vektorskega prostora realnih števil nad obsegom racionalnih števil. Posebej velja

$$h(x) = ax \tag{4}$$

za vsako racionalno število x. Pri tem smo uporabili oznako $a = h(1)$. Privzemimo še, da je aditivna preslikava h zvezna. Potem je enačba (4) izpolnjena za vsako realno število x. S pomočjo Zornove leme in dejstva, da je vsaka aditivna preslikava endomorfizem vektorskega prostora realnih števil nad obsegom racionalnih števil, je mogoče skonstruirati aditivne funkcije, ki niso zvezne, torej nimajo oblike (4). Izkaže se, da so take funkcije precej „divje"; na primer, graf vsake take funkcije je gosta podmnožica ravnine [1]. Od tod sledi, da je vsaka aditivna funkcija, ki je omejena na kakem intervalu $[a, b], a < b$, oblike (4).

Problem stabilnosti aditivnih preslikav je leta 1941 rešil D. H. Hyers [5]. Izrek, ki ga bomo sedaj formulirali, je posledica njegovega precej bolj splošnega rezultata.

Izrek 1. *Naj bo ε pozitivno realno število in naj funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadošča neenačbi*

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{5}$$

za vsak par realnih števil x, y. Potem obstaja enolično določena aditivna funkcija $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo

$$|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Funkcijo f, ki zadošča neenačbi (5), imenujemo ε-aditivna preslikava. Malce bolj ohlapno, a zato krajše povemo gornji izrek takole: Cauchyjeva

funkcijska enačba (3) je stabilna. Preden se lotimo dokaza izreka, pokažimo, da je ocena (6) najboljša možna. Naj bo f konstantna funkcija, $f(x) \equiv \equiv \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Očitno je f ε-aditivna funkcija. Naj bo h neničelna aditivna funkcija. Izberimo tako realno število x_0, da velja $y = h(x_0) \neq 0$. Potem imamo $|f(rx_0) - h(rx_0)| = |\varepsilon - ry|$ za vsako racionalno število r, in je zato množica $\{|f(x) - h(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ neomejena. Torej je ničelna funkcija edina aditivna funkcija, ki aproksimira funkcijo f v smislu neenakosti (6). To pa že pomeni, da konstante ε v neenačbi (6) ne moremo zmanjšati.

S podobnim premislekom pridemo do ideje za dokaz izreka. Če je namreč h aditivna funkcija, ki aproksimira ε-aditivno funkcijo f v smislu neenačbe (6), potem za vsako realno število x in za vsako pozitivno racionalno število r velja $|f(rx) - h(rx)| = |f(rx) - rh(x)| \leq \varepsilon$, od koder sledi $|(1/r)f(rx) - h(x)| \leq (1/r)\varepsilon$. Če torej za dano ε-aditivno funkcijo f obstaja aditivna funkcija h, ki jo aproksimira v smislu neenačbe (6), potem mora biti za vsako realno število x vrednost $h(x)$ enaka limiti izraza $(1/r)f(rx)$, ko teče r proti neskončno po racionalnih vrednostih. Zaradi enostavnosti bomo vzeli, da teče r proti neskončnosti samo po številih oblike 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Tako bo dokaz razdeljen v dva koraka: najprej bomo dokazali, da za vsako realno število x obstaja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}, \tag{7}$$

nato pa bomo vrednost te limite označili s $h(x)$ in pokazali, da ima tako definirana funkcija h vse želene lastnosti.

Dokaz izreka 1. Najprej dokažimo s popolno indukcijo, da za vsako realno število x in za vsako naravno število n velja

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x)\right| \leq \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \tag{8}$$

Iz (5) dobimo $|f(2x) - 2f(x)| \leq \varepsilon$. Torej naša trditev velja pri $n = 1$. Pa denimo, da trditev (8) velja za kako naravno število n. Potem imamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - f(x)\right| &= \left|\frac{f(2\cdot 2^n x)}{2\cdot 2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} + \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n}\left|\frac{f(2\cdot 2^n x)}{2} - f(2^n x)\right| + \left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

S tem je trditev (8) dokazana.

Da bi dokazali obstoj limite (7) za vsako realno število x, je dovolj pokazati, da je zaporedje $2^{-n}f(2^n x)$ Cauchyevo za vsak $x \in \mathbb{R}$. Izberimo si

poljubni naravni števili $m > n$ in zamenjajmo v neenačbi (8) n z $m-n$ ter x z $2^n x$. Dobimo

$$\left|\frac{f(2^m x)}{2^{m-n}} - f(2^n x)\right| \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Po deljenju z 2^n se gornja neenačba prevede v

$$\left|\frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

od koder sledi, da je zaporedje $2^{-n} f(2^n x)$ Cauchyjevo za vsak realen x. Zato je funkcija $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

dobro definirana.

V drugem koraku dokaza bomo pokazali, da ima funkcija h vse želene lastnosti. Nadomestimo x in y v (5) z $2^n x$ in $2^n y$. Dobljeno neenakost delimo z 2^n. Dobimo

$$\left|\frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n y)}{2^n} = 0.$$

Torej je h aditivna funkcija. Če pošljemo n v neenačbi (8) proti neskončno, dobimo (6). Preostane nam dokaz enoličnosti funkcije h. Naj bo tudi g aditivna funkcija, ki aproksimira funkcijo f v smislu neenačbe (6). Potem za vsak realen x in za vsako naravno število n velja

$$\begin{aligned} |h(x) - g(x)| &= (1/n)|h(nx) - g(nx)| \leq \\ &\leq (1/n)(|h(nx) - f(nx)| + |f(nx) - g(nx)|) \leq (2/n)\varepsilon, \end{aligned}$$

od koder sledi $h = g$. S tem je dokaz izreka končan.

V definiciji ε-aditivne preslikave (5) je desna stran neenačbe neodvisna od absolutne vrednosti števil x in y. Bolj naravno je zahtevati, da je absolutna vrednost Cauchyjeve razlike $f(x+y)-f(x)-f(y)$ odvisna od $|x|$ in $|y|$. Zato vpeljemo splošnejšo definicijo aproksimativno aditivne preslikave. Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je (ε, p)-aditivna, $p \in [0,1), \varepsilon > 0$, če za vsak par realnih števil x, y velja

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon(|x|^p + |y|^p). \tag{9}$$

Podobni razmisleki kot pri dokazu izreka 1 nas pripeljejo do naslednjega rezultata.

Izrek 2. [7] *Naj bo p realno število z intervala $[0,1)$ in naj funkcija $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ zadošča neenačbi (9) za kako pozitivno število ε. Potem limita*

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}$$

obstaja za vsako realno število x in je h edina aditivna funkcija z lastnostjo

$$|f(x)-h(x)|\le\frac{2\varepsilon}{2-2^p}|x|^p,\qquad x\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Dokaz je podoben dokazu izreka 1, zato ga bomo tu samo na kratko skicirali in prepustili bralcu, da preveri vse potrebne detajle. Najprej se s popolno indukcijo dokaže, da velja

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n}-f(x)\right|\le\varepsilon|x|^p\sum_{m=0}^{n-1}2^{m(p-1)},\qquad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.$$

Ker je $p<1$, velja $\sum_{m=0}^{\infty}2^{m(p-1)}=2/(2-2^p)$. Zato imamo

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n}-f(x)\right|\le\frac{2\varepsilon}{2-2^p}|x|^p,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Podobno kot v dokazu izreka 1 izpeljemo od tod sledečo neenačbo

$$\left|\frac{f(2^m x)}{2^m}-\frac{f(2^n x)}{2^n}\right|\le 2^{n(p-1)}\frac{2\varepsilon}{2-2^p}|x|^p.$$

Pri tem je x poljubno realno število, m in n pa sta poljubni naravni števili, ki zadoščata pogoju $m>n$. Od tod sledi, da je zaporedje $2^{-n}f(2^n x)$ Cauchyjevo. Definiramo

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}$$

in končamo dokaz podobno kot pri izreku 1.

Pozorni bralec je prav gotovo opazil, da isti dokaz deluje tudi tedaj, ko je $p<0$. Le nekaj dodatne previdnosti je potrebno. Najprej smemo v formulaciji izreka privzeti, da je neenačba (9) izpolnjena le za pare neničelnih realnih števil x in y. Nato pa v dokazu pokažemo, da $\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^n x)$ obstaja za vsako neničelno realno število x in definiramo funkcijo h s predpisom: $h(0)=0$ in $h(x)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^n x)$, če je x različen od nič. Taka

funkcija h je aditivna in zadošča neenakosti (10) za vsako neničelno realno število x.

Z. Gajda [3] je opazil, da analogen stabilnostni rezultat velja tudi v primeru, ko je $p > 1$. Njegova ideja je nekakšna zrcalna slika Hyersove ideje. Opazil je, da je v tem primeru treba obravnavati zaporedje $2^n f(2^{-n}x)$ namesto zaporedja $2^{-n} f(2^n x)$. Tako mu je uspelo dokazati naslednji izrek.

Izrek 3. [3] *Naj bo $p > 1$ realno število in naj funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadošča neenačbi (9) za kako pozitivno realno število ε. Potem limita*

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n f(\frac{x}{2^n})$$

obstaja za vsako realno število x in je h edina aditivna funkcija z lastnostjo

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{2^p - 2}|x|^p, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seveda je tudi dokaz zrcalna slika dokaza izreka 2. Najprej se s popolno indukcijo dokaže, da velja

$$|f(x) - 2^n f(2^{-n}x)| \leq \varepsilon |x|^p \sum_{m=1}^{n} 2^{-m(p-1)}$$

za vsak realen x in vsako naravno število n. Od tod dobimo za $m > n$ sledečo neenakost

$$|2^n f(2^{-n}x) - 2^m f(2^{-m}x)| \leq 2^{-n(p-1)} \frac{2\varepsilon}{2^p - 2}|x|^p,$$

ki pove, da je za vsak realen x zaporedje $2^n f(2^{-n}x)$ konvergentno. Limito tega zaporedja označimo s $h(x)$ in končamo dokaz podobno kot v prejšnjih primerih.

Za obravnavo nam ostane problem Hyers-Ulamove stabilnosti aditivnih funkcij v primeru $p = 1$. Pokazali bomo, da obstaja zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča neenačbi

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

in ima lastnost

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \quad \text{in} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty\,. \tag{12}$$

Pokažimo najprej, da obstoj take funkcije pove, da v primeru $p = 1$ analog izrekov 2 in 3 ne velja. Privzemimo za hip, da Hyers-Ulamova stabilnost

nastopi tudi pri $p = 1$. To pomeni, da obstaja konstanta k in taka aditivna funkcija h, da velja $|f(x) - h(x)| \leq k|x|$ za vsak realen x, od koder sledi

$$\sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|f(x) - h(x)|}{|x|} \right\} < \infty. \tag{13}$$

Ker je funkcija f zvezna, je omejena na vsakem končnem intervalu. Iz (13) sledi, da je tudi funkcija h omejena na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, ki ne vsebuje števila nič. To pa pomeni, da ima funkcija h obliko $h(x) = cx$ za neko realno število c. Potem pa imamo za vsak pozitiven x

$$\frac{|f(x) - h(x)|}{|x|} = \left| \frac{f(x)}{x} - c \right|.$$

To pa je v protislovju z (12) in (13). Torej analog izrekov 2 in 3 pri $p = 1$ ne velja.

Obstoj funkcije f z lastnostma (11) in (12) je odkril D. Luminet [6]. Definirajmo

$$f(x) = \begin{cases} x \log_2(x + 1)\,; & x \geq 0 \\ x \log_2|x - 1|\,; & x < 0 \end{cases}$$

Zlahka se prepričamo, da je f zvezna in liha funkcija, ki je konveksna na množici pozitivnih števil. Naj bosta x in y pozitivni števili. Očitno imamo $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$. Zaradi konveksnosti velja

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq f(c) - 2f(c/2),$$

pri čemer je $c = x + y$. Preprost račun nam da

$$f(c) - 2f(c/2) = c \log_2 \left(\frac{c + 1}{c/2 + 1} \right) < c,$$

kar pove, da neenakost (11) velja v primeru, ko sta x in y pozitivna. Ker je f liha funkcija, velja ta neenakost tudi tedaj, kadar sta x in y negativna. Obravnavati moramo še primer, ko sta $x > 0$ in $y < 0$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $|x| > |y|$. Ker je funkcija f liha in ker velja $x + y > 0$ ter $-y > 0$, imamo po prejšnjem

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x+y) - f(-y)| \leq |x+y| + |y| = x < |x| + |y|.$$

Očitno funkcija f izpolnjuje tudi pogoj (12).

Omenimo še, da je Z. Gajdi [3] uspelo skonstruirati funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadošča neenakosti

$$|g(x + y) - g(x) - g(y)| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

in za katero velja

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \infty.$$

Funkcija f je „daleč" od aditivnosti, ko gre x proti neskončno, medtem ko se aproksimativno aditivna preslikava g „grdo obnaša" blizu ničle.

3. Superstabilnost multiplikativnih funkcij

Včasih se zgodi, da je vsak aproksimativni homomorfizem že kar pravi homomorfizem. Tedaj rečemo, da je funkcijska enačba za homomorfizem superstabilna. Naslednji izrek nam bo povedal, da je funkcijska enačba za neomejene multiplikativne funkcije na $\mathbb{R}$ superstabilna.

Izrek 4. [2] *Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj neomejena funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadošča neenakosti*

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \varepsilon, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Potem velja $f(xy) = f(x)f(y)$ za vsak par realnih števil x, y.

Dokaz. Za vsako trojico relanih števil x, y, z imamo

$$|f(xyz) - f(xy)f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{in} \quad |f(xyz) - f(x)f(yz)| \leq \varepsilon,$$

od koder dobimo

$$|f(xy)f(z) - f(x)f(yz)| \leq 2\varepsilon.$$

Torej velja

$$\begin{aligned} &|f(xy)f(z) - f(x)f(y)f(z)| \leq \\ &\leq |f(xy)f(z) - f(x)f(yz)| + |f(x)f(yz) - f(x)f(y)f(z)| \leq \\ &\leq 2\varepsilon + |f(x)|\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \frac{2\varepsilon + |f(x)|\varepsilon}{|f(z)|},$$

če je le $f(z) \neq 0$. Funkcija f je neomejena in zato iz gornje neenačbe sledi $f(xy) = f(x)f(y)$. S tem je izrek dokazan.

Privzetek, da je funkcija f neomejena, v izreku 4 ni odveč, saj očitno vsaka funkcija, ki je omejena z dovolj majhno konstanto, zadošča neenakosti (14).

Pojav superstabilnosti je na prvi pogled presenetljiv. V nadaljevanju bomo pokazali, da je superstabilnost v gornjem izreku posledica dejstva, da je problem stabilnosti multiplikativnih funkcij nekako slabo postavljen.

Če namreč definiramo aproksimativno multiplikativne preslikave z neenačbo (14), potem smo zanemarili naravno grupno strukturo na $\mathbb{R}$, ki bi v tem primeru očitno morala biti multiplikativna grupa neničelnih realnih števil $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Da bi to razložili bolj podrobno, si še enkrat oglejmo definicijo aproksimativno aditivne preslikave (5). Prepišimo neenačbo (5) v obliki

$$|(f(x+y) - f(x) - f(y)) - 0| \leq \varepsilon, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Torej s to definicijo zahtevamo, da je razdalja Cauchyjeve razlike $f(x+y) - f(x) - f(y)$ od števila 0 (nevtralni element za operacijo seštevanja) omejena. Če v zapisu Cauchyjeve razlike simbol $+$ za operacijo seštevanja nadomestimo s simbolom $\circ$ za splošno grupno operacijo, dobi Cauchyjeva razlika obliko $f(x \circ y) \circ f(x)^{-1} \circ f(y)^{-1}$. Posnemajmo ta zapis pri definiciji aproksimativno multiplikativnih funkcij, ki jih sedaj definiramo kot preslikave $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, ki zadoščajo neenačbi

$$\left| \frac{f(xy)}{f(x)f(y)} - 1 \right| \leq \varepsilon, \quad x, y \in \mathbb{R}^*. \tag{15}$$

Izkaže se, da pri taki definiciji dobimo običajno stabilnost, ki se zdi bolj naravna kot superstabilnost. Zaradi enostavnosti bomo v okviru tega članka obravnavali aproksimativno multiplikativne preslikave, definirane le na grupi vseh pozitivnih realnih števil $\mathbb{R}^+$.

Izrek 5. [4] *Naj bo $\varepsilon \in [0,1)$ in naj funkcija $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ zadošča neenačbi (15) za vsak par pozitivnih realnih števil x in y. Potem obstaja taka multiplikativna funkcija $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, da velja*

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{in} \quad \left| \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

za vsako pozitivno realno število x.

Dokaz. Definirajmo preslikavo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi(x) = \ln f(e^x)$. Iz

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f(e^x e^y)}{f(e^x) f(e^y)} \leq 1 + \varepsilon, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

sledi

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)| \leq \ln \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Torej je φ aproksimativno aditivna preslikava. Izrek 1 zagotavlja obstoj take aditivne funkcije $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, da velja

$$|a(x) - \varphi(x)| \leq \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$$

za vsako realno število x. Definirajmo funkcijo $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ s predpisom $g(x) = e^{a(\ln x)}$. Zlahka se prepričamo, da je g multiplikativna funkcija. Naj bo x poljubno pozitivno realno število. Označimo $u = \ln x$. Potem imamo

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| = \left|\frac{f(e^u)}{g(e^u)} - 1\right| = \left|e^{(\varphi(u)-a(u))} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Podobno dokažemo še veljavnost neenakosti $|g(x)/f(x) - 1| \leq \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}$.

LITERATURA

[1] J. Aczél in J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Encyclopaedia of mathematics and its applications **31**, Cambridge University Press, 1989.

[2] J. A. Baker, *The stability of the cosine equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 411–416.

[3] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci. **14** (1991), 431–434.

[4] R. Ger, *Superstability is not natural*, rokopis.

[5] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **27** (1941), 222–224.

[6] B. E. Johnson, *Approximately multiplicative maps between Banach algebras*, J. London Math. Soc. **37** (1988), 294–316.

[7] Th. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297–300.

VESTI

DOPOLNILNO IZOBRAŽEVANJE

Tako kot že vrsto let tudi v šolskem letu 1994/95 na oddelku za matematiko in mehaniko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani prirejamo vrsto seminarjev in programov za osnovnošolske in srednješolske učitelje. Naj vas le opozorimo nanje:

1. Izbrana poglavja iz matematike
2. Izbrana poglavja iz računalništva
3. Izobraževanje iz računalništva za učitelje v osnovni šoli – 150-urni tečaj
4. Izobraževanje iz računalništva za učitelje v srednji šoli – 150-urni tečaj
5. Oblikovanje besedil s TEXom
6. Oblikovanje besedil in grafika s PostScriptom
7. Osnove računanja z Mathematico
8. Mathematica in diskretna matematika
9. Programski jezik C
10. Programiranje v logu
11. Algoritmi na grafih
12. Računalniške komunikacije in storitve v računalniških omrežjih
13. Objekti in jezik C++

14. Visual Basic za Okna
15. Osnovne programske strukture v pascalu
16. Izobraževalni programi
17. Program za numerično računanje – MatLab
18. Mathematica in grafi – programski paket VEGA

Koordinator dopolnilnega programa s področja matematika (tč. 1) je prof. dr. Milan Hladnik, s področja računalništva (tč. 2–18) pa mag. Matija Lokar. Pri njiju lahko dobite vse dodatne informacije. Podrobneje si o tečajih in planiranem času izvedbe le-teh lahko preberete v Katalogu programov stalnega izobraževanja učiteljev.

Matija Lokar

STROKOVNO SPOPOLNJEVANJE UČITELJEV MATEMATIKE

Oddelek za matematiko in mehaniko ljubljanske univerze že nekaj let izvaja t.i. strokovno spopolnjevanje (včasih smo rekli permanentno izobraževanje) učiteljev matematike v srednjih šolah. Poleg matematičnih predavanj, ki so zrasla iz nekdanjih predavanj pedagoške sekcije DMFA Slovenije (neutrudno jih je v zadnjih petih letih pripravljala in organizirala mag. Milena Strnad), so se pod vodstvom mag. Matija Lokarja močno razmahnili tudi razni tečaji in delavnice iz računalništva.

Tu bomo na kratko predstavili le matematični del tega izobraževanja, ki se uradno imenuje *Izbrana poglavja iz matematike.* Program je sestavljen iz eno- do šesturnih predavanj o različnih matematičnih temah, katerih cilj je poglobitev in razširitev znanja, njegova uporaba in obravnava nekaterih metodičnih vprašanj pri pouku matematike v srednji šoli.

V šolskem letu 1993/94 je bilo izvedenih 13 predavanj v skupnem obsegu 24 ur. Tematsko so zajemala različna matematična področja, od geometrije (celoštevilske mreže), teorije števil (zapisi, urejenost), kaosa, splošne algebre (absolutna vrednost, alternativne algebre, ternarne operacije), grup in njihovih grafov (ki jih nariše računalnik) do teorije verjetnosti in finančne matematike. Nekaj časa smo namenili tudi razmišljanju o maturi, poročilu o projektu Tempus in predstavitvi novih knjig. Predavanja so bila glede uporabnosti in tudi kvalitete podajanja precej neizenačena, na sploh pa so poslušalci v posebni anketi celoten program kar ugodno ocenili.

Poleg predavanj sta bili izvedeni tudi dve matematični delavnici, na katerih so udeleženci izobraževanja predstavili svoje seminarske naloge. Vseh nalog je bilo 10 in vse so bile uspešno izdelane. Ker utegne biti njihova tematika zanimiva za širši krog bralcev Obzornika, navajamo naslove teh seminarskih nalog (celotne tekste si lahko bralci ogledajo v Matematični knjižnici ali pri podpisanem na Jadranski 19 v Ljubljani):

1. Jasna Čer-Titan, *Simetrične enačbe*
2. Jasna Kos, *Verižni ulomki*

3. Dušan Modic, *Zrcaljenja v srednji šoli*
4. Bogdan Kejžar, *O nogometu s pomočjo Poissonove porazdelitve*
5. Marta Zabret, *Plavanje proti toku* (o filozofiji matematike)
6. Danica Jereb, *Diofantske enačbe*
7. Peter Hafner, *Simetrični polinomi dveh spremenljivk*
8. Alojz Celec, *Amortizacijski načrti anuitetnih posojil*
9. Cvetka Rojko, *Primer uvodnih učnih ur v poglavje o geometrijskih telesih*
10. Dragica Pavšek, Lea Cestnik, *Elementi celostnega izobraževanja*

S predstavitvami seminarskih nalog nameravamo nadaljevati v šolskem letu 1994/95. Njihova tematika naj bi bila zajeta iz snovi predavanj, iz metodike srednješolske matematike, iz snovi, ki se obravnava na matematičnih krožkih ipd. ter iz drugih zanimivih in dostopnih področij matematike.

Znan je tudi že okvirni načrt predavanj:

1. Milan Hladnik, *Konveksne množice v ravnini* (4 ure),
2. Milan Hladnik, *Izoperimetrična neenakost* (4 ure),
3. Bojan Mohar, *Linearno programiranje* (6 ur),
4. Borut Zalar, *Povezava med algebro in geometrijo* (2 uri),
5. Borut Zalar, *Povezava med algebro in diferencialnimi enačbami* (2 uri),
6. Zlatan Magajna, *Strategije v geometriji* (2 uri),
7. Anton Cedilnik, *Pozitivne, monotone in konveksne funkcije* (2 uri),
8. Anton Cedilnik, *Računanje vrednosti nekaterih specialnih funkcij* (2 uri),
9. Milan Hladnik, *Uporaba Fourierovih vrst* (2 uri),
10. Marko Razpet, *Izbrane teme iz umbralnega računa* (2 uri).

Vsa predavanja bodo izvedena v okviru štirih celodnevnih (7-urnih) srečanj septembra, oktobra, januarja in februarja ter na dveh matematičnih delavnicah, predvidoma novembra in marca. Predavanja bodo v predavalnicah Oddelka za matematiko in mehaniko, Ljubljana, Jadranska 21, po vsej verjetnosti ob sobotah.

O natančnem datumu in programu vsakokratnega srečanja bomo (tako kot doslej) sproti obveščali kolektive matematikov po srednjih šolah. Udeležbe na predavanjih ni treba najaviti vnaprej, pač pa je treba en mesec pred izvedbo prijaviti organizatorju aktivno sodelovanje na matematični delavnici.

Ob koncu naj povemo še to, da strokovno spopolnjevanje financira Ministrstvo za šolstvo in šport, udeleženci pa so vključeni v uradni sistem poklicnega napredovanja. Pogoj za pridobitev točke je obisk vsaj treh srečanj s predavanji in aktivna udeležba na matematični delavnici z izdelavo in zagovorom ene seminarske naloge.

Milan Hladnik

NELINEARNO PROGRAMIRANJE

ANTON CEDILNIK

Math. Subj. Class (1991) 90C30

V sestavku[1] orišemo probleme optimiranja, definiramo nelinearni program in nakažemo izpeljavo Kuhn-Tuckerjevih pogojev. Kot primer uporabe obravnavamo rastne funkcije.

NON-LINEAR PROGRAMMING

In the aritcle we depict the problems of optimizing, define the nonlinear program and outline the deduction of Kuhn-Tucker conditions. As an example we deal with growth functions.

Matematično programiranje je reševanje naslednjega problema:

Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ in $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{x} \mapsto f(\mathrm{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$; poiskati je treba globalni ekstrem (maksimum ali minimum) funkcije f na območju $\mathcal{D}$:

$$\max_{\mathcal{D}} f = f(?) = ?,$$

oziroma

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(?) = ?,$$

torej pri katerem x doseže f ekstrem in kolika je ekstremna vrednost.

V vsej splošnosti take naloge niti ni mogoče začeti obravnavati, saj nimamo nikakršnega zagotovila, da iskani globalni ekstrem obstaja, pa tudi nobenega namiga, kako ga poiskati.

Precejšen napredek je že, če zahtevamo dvoje:

1. $\mathcal{D}$ je neprazna kompaktna (v $\mathbb{R}^n$ je to omejena in zaprta) množica;
2. f je zvezna funkcija.

Ta pogoja sta že dovolj za eksistenčni izrek:

f ima na $\mathcal{D}$ oba globalna ekstrema.

Žal že s tema dokaj šibkima pogojema izločimo nekaj zanimivih primerov, na primer **celoštevilsko programiranje**. Tudi zahteva po omejenosti območja $\mathcal{D}$ ni vedno izpolnjena. No, ravno tej zahtevi se lahko izognemo s kompaktifikacijo prostora $\mathbb{R}^n$ in številske premice $\mathbb{R}$; čeprav je možno te prostore kompaktificirati že z dodatkom ene same („neskončne") točke, pa je v našem primeru bolje, da dodamo vse „neskončne" elemente: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ekstrema tedaj zagotovo spet obstajata, vendar sta lahko tudi $-\infty$ oziroma ∞.

---

[1] Prvotna verzija tega članka je bila pripravljena kot gradivo za permanentno izobraževanje učiteljev matematike k predavanju 26.3.1993

Poleg zagotovljene eksistence potrebujemo še algoritem iskanja ekstremov. V tem primeru brez odvedljivosti skoraj ne gre. Zahtevajmo:

1. $\mathcal{D}$ je neprazna kompaktna množica;
2. f je v notranjosti $\mathcal{D}$ odvedljiva, na robu $\partial\mathcal{D}$ pa vsaj še zvezna.

Ta pogoja omogočata vsaj namig, kje iskati ekstrem:

ekstrem funkcije f je bodisi na robu območja $\mathcal{D}$ ali v kateri od stacionarnih točk, torej rešitev sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{1}$$

Dokaz tega izreka je prav tak kot dokaz istega izreka za funkcijo ene spremenljivke, kakor se obravnava že v srednji šoli, le namesto navadnega odvoda nastopajo parcialni odvodi.

V luči tega izreka si oglejmo **linearni program:**

Iščemo ekstrem linearne funkcije $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$ na območju $\mathcal{D}$, ki ga določajo nenegativnostni pogoji

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

in neenačbe

$$\alpha_{j1}x_1 + \cdots + \alpha_{jn}x_n \geq \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Območje $\mathcal{D}$ je zaprto, ni pa nujno omejeno in pri nerodno izbranih neenačbah je lahko tudi prazno. Eksistenca rešitve torej ni zagotovljena. Vsekakor pa je funkcija f (mimogrede, rečemo ji **namenska, ciljna** ali **kriterijska funkcija**) odvedljiva povsod; toda njeni odvodi so konstante γ_i in so vsi enaki 0 v skladu z (1) le, če je $f \equiv 0$. Netrivialna linearna funkcija torej nima stacionarnih točk. *Zato ima linearni program, če že ima rešitev, le-to na robu območja $\mathcal{D}$.* Seveda nam to vedenje ne pomaga dovolj, ker je roba veliko in je treba izdelati specifične mehanizme za iskanje ekstrema, na primer **metodo simpleksov**.

Območje $\mathcal{D}$ je lahko določeno tudi z enačbami. Tedaj pravimo, da iščemo **vezani ekstrem:**

Iščemo ekstrem funkcije $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ na območju, ki ga določajo enačbe

$$g_1(\mathbf{x}) = \ldots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

pri čemer so funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ zvezno parcialno odvedljive.

Če je katera od enačb $g_j(\mathbf{x}) = 0$ zelo preprosta, iz nje izračunamo eno od spremenljivk in jo vstavimo v f ter druge enačbe, kar poenostavi problem. Splošnejši prijem pa je v uvedbi **Lagrangeve funkcije**

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} y_j g_j(\mathbf{x}), \tag{2}$$

kjer so y_j **Lagrangevi multiplikatorji.**

Ekstrem je tedaj med rešitvami naslednjega sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial y_1} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0. \tag{3}$$

Podrobnejši opis metode in njeno izpeljavo najdemo v [6] na straneh 324–327.

Definirajmo sedaj problem, ki mu običajno pravimo **nelinearni program.**

Poiskati je treba minimum funkcije $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ na območju $\mathcal{D}$, ki ga določajo pogoji

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0; \tag{N}$$

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{P}$$

Pri tem so funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ zvezno parcialno odvedljive na vse x_i na (zaprtem!) območju $\mathcal{D}$, ki ga določajo neenačbe (N) in (P).

Pogoje (P) lahko z uvedbo **dopolnilnih spremenljivk** pretvorimo v enačbe:

$$w_j - g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad w_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

Tega prijema se dejansko mnogokrat poslužujemo. Vendar z njim še ne dobimo običajnega problema vezanega ekstrema. Pogoji (N) in $w_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$ so tisti, ki resnično karakterizirajo nelinearno programiranje.

Predpostavka, da iščemo prav minimum, je seveda povsem formalnega značaja, saj pomeni iskati maksimum funkcije $f(\mathbf{x})$ isto kot iskati minimum funkcije $-f(\mathbf{x})$.

V posebnem primeru $n = 1$ iščemo globalni minimum funkcije ene spremenljivke, kar v načelu ni težko.

Za $n = 2$ pa smo pri najbolj preprostem netrivialnem primeru. Ker je definicijsko območje funkcije f del ravnine, lahko problem rešujemo grafično.

Primer 1. Iščemo minimum $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 - x_2$ na območju $\mathcal{D}: \ x_{1,2} \geq 0, \ 3 - x_1 - 3x_2 \geq 0$. Na sliki 1 (naslovnica) so **plastnice** funkcije f (krivulje z enačbo $f = c$ za izbrani c) označene s prekinjenimi črtami. Že na prvi pogled uganemo, kje približno bo ekstrem, ker se vrednost funkcije

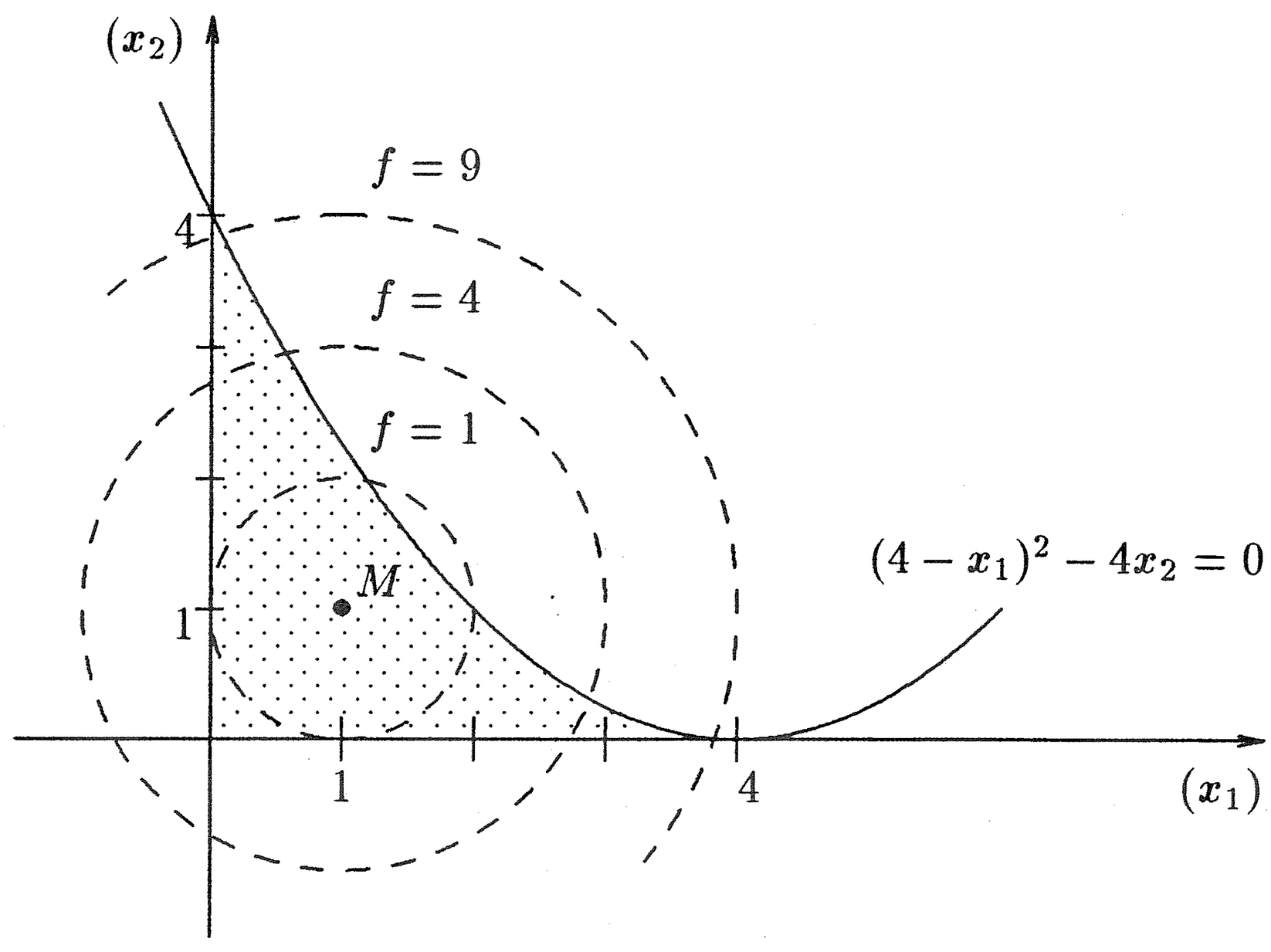
na plastnicah v pozitivni smeri osi (x_2) znižuje in ima zato najmanjšo vrednost na tisti plastnici, ki ima zadnja še skupno točko z $\mathcal{D}$. Drugo je stvar preprostega računanja: premica $3 - x_1 - 3x_2 = 0$ je tangenta na plastnico $f = f_{\min}$ v dotikališču M:

$$f_{\min} = f(M) = f(\frac{5}{6}, \frac{13}{18}) = -\frac{25}{36}\,. \qquad \blacksquare$$

Primer 2. Iščemo minimum $f(x_1, x_2) = (x_1-1)^2+(x_2-1)^2$ na območju $\mathcal{D}:\ x_{1,2} \geq 0,\ (4 - x_1)^2 - 4x_2 \geq 0.$

Tokrat je, kot sklepamo po plastnicah na sliki 2, ekstrem v notranjosti $\mathcal{D}$, torej v stacionarni točki, ki je na srečo samo ena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\,;\\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1\,;\\
f_{min} &= f(M) = f(1,1) = 0\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$



Slika 2. K primeru 2.

Za $n > 2$ take preproste metode odpovedo. Toda obstaja pot, po kateri problem nelinearnega programa prevedemo v problem reševanja sistema enačb in neenačb. To je vsebina **Kuhn-Tuckerjevih pogojev** (H. W. Kuhn in A. W. Tucker 1951).

Naj bo za dani nelinearni program

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} y_j g_j(\mathbf{x}) \tag{5}$$

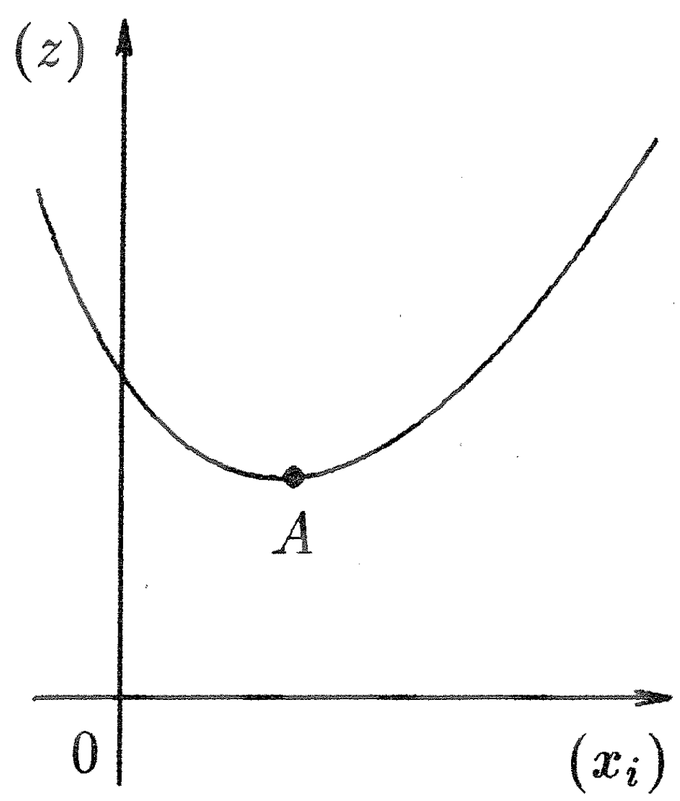
(nekoliko spremenjena) *Lagrangeva funkcija z multiplikatorji* $y_1, \ldots, y_m$. *Potem v globalnem minimumu veljajo naslednje enačbe in neenačbe:*

$$\begin{aligned} &x_i \geq 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \geq 0, \quad x_i \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \\ &y_j \geq 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j} \leq 0, \quad y_j \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{KT}$$

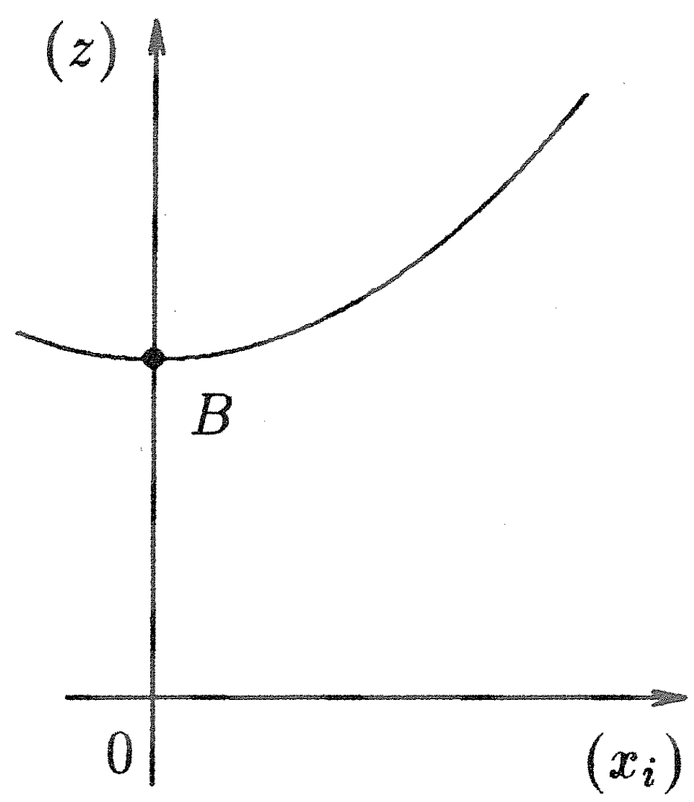
Pri tem mora območje $\mathcal{D}$ ustrezati dodatni zahtevi: vsaka robna točka je oglišče trikotnika, ki cel leži v $\mathcal{D}$.

Že formulacija izreka napoveduje dolg in težek dokaz. Ideja dokaza pa ni zapletena in jo zato tu prikažimo!

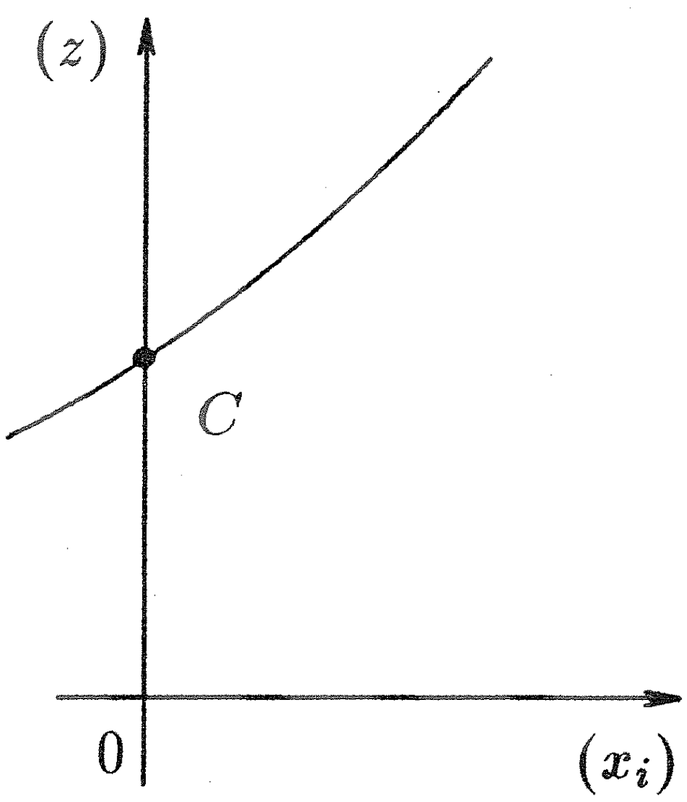
Najprej vzemimo, da pogojev (P) ni. Naj bo $z = f(\mathbf{x})$ graf funkcije, katere minimum iščemo. Narišimo tisti njegov prerez, ki leži v polravnini $(x_i \geq 0, z)$ pri fiksiranih drugih neodvisnih spremenljivkah. Situacija na robu te polravnine je taka, kot jo kaže ena od slik 3–5, pri čemer je minimum v eni od točk A, B ali C.



Slika 3. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 < x_i$



Slika 4. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 = x_i$



Slika 5. $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0 = x_i$

V točki A je: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $x_i > 0$.
V točki B je: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $x_i = 0$.
V točki C je: $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$, $x_i = 0$.

V vsakem primeru je torej

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Zdaj pa le upoštevajmo tudi pogoje (P) in uvedimo dopolnilne spremenljivke, tako kot v (4). Pogoji (P) so sedaj zapisani kot enačbe, gre torej za vezani ekstrem in zato sestavimo Lagrangevo funkcijo

$$L = f + \sum y_j (w_j - g_j).$$

Iz (6) potem sledi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} \geq 0, \quad w_j \geq 0, \quad w_j \frac{\partial L}{\partial w_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

V prvi vrsti relacij funkcijo L zamenjamo s funkcijo Λ iz (5), drugo vrsto relacij pa preoblikujemo v

$$y_j \geq 0, \quad g_j \geq 0, \quad y_j g_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Tako dobimo pogoje (KT) v celoti. ■

Pogoji (KT) so potrebni, niso pa zadostni za nastop ekstrema, saj se lahko zgodi, da so izpolnjeni tudi v kakšni neekstremalni točki (na primer v lokalnem ekstremu). Velja pa naslednji **Kuhn-Tuckerjev izrek o zadostnosti** pogojev (KT):

Naj bo območje $\mathcal{D}$ konveksno, omejeno in z neprazno notranjostjo, funkcija f na $\mathcal{D}$ konveksna. Potem je rešitev sistema (KT) *globalni minimum.*

Čeprav je izrek zaradi preproste vsebine („če je graf funkcije skledaste oblike, je spodaj – v edinem lokalnem minimumu – globalni minimum") tiste vrste, da mu zlahka verjamemo, pa dokaz vendarle ni enostaven.

Bolj pomembno je zdaj vprašanje, kako spoznamo, da sta pogoja izreka izpolnjena.

Funkcija f, če je vsaj dvakrat zvezno odvedljiva na vse spremenljivke, je konveksna natanko tedaj, ko je matrika $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ pozitivno semidefinitna. Območje $\mathcal{D}$ v izreku pa je zagotovo konveksno, če so vse funkcije g_j konveksne.

Primer 1, nadaljevanje. Lagrangeva funkcija (5) za ta primer je:

$$\Lambda(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 - x_2 - y(3 - x_1 - 3x_2),$$

ustrezni (KT) sistem pa je

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad y \geq 0, \\ 2x_1 + y \geq 2, \quad 3y \geq 1, \quad x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1(2x_1 + y - 2) = x_2(3y - 1) = y(x_1 + 3x_2 - 3) = 0. \end{gathered}$$

Kar nekaj časa traja, da ta sistem rešimo. To nam pove, da (KT) še ni nujno kratka pot do rešitve, celo če primer zadošča izreku o zadostnosti, kar je v

tem primeru res: na sliki 1 se vidi, da je območje konveksno, kvadratična forma

$$\left\langle \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1^2$$

pa je za vsaka x_1, x_2 nenegativna. ■

Primer 2, nadaljevanje. (KT) za ta primer:

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad y \geq 0, \\ x_1 - 1 \geq y(x_1 - 4), \quad x_2 + 2y \geq 1, \quad 4x_2 \leq (x_1 - 4)^2, \\ x_1[x_1 - 1 - y(x_1 - 4)] = x_2(x_2 + 2y - 1) = y[4x_2 - (x_1 - 4)^2] = 0. \end{gathered}$$

Sistem z daljšim parcialnim sklepanjem rešimo, rešitev je prava: $x_1 = x_2 = 1$. To je po svoje presenetljivo, kajti ne samo, da območje $\mathcal{D}$ ni konveksno, zaradi česar izrek o zadostnosti ni mogoče uporabiti, povrhu vsega tudi prvega Kuhn-Tuckerjevega izreka ne bi smeli uporabiti zaradi točke (4,0) na sliki 2, ki zagotovo ni oglišče kakega trikotnika, ki bi ves ležal v $\mathcal{D}$. ■

i	s i	t i	r ik	p i
1	s 1	t 1	r 11, ..., r 1s 1	p 1
2	s 2	t 2	r 21, ..., r 2s 2	p 2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	s n	t n	r n1, ..., r ns n	p n

Preglednica 1. K primeru 3.

Primer 3. Funkcija $r = r(t)$, ki je nenegativna, naraščajoča in navzgor omejena, je **rastna funkcija.** Tabela 1 je vsa naša informacija o tej funkciji: pri nekaterih t-jih ($t_1 < t_2 < \ldots < t_n$) smo merili funkcijske vrednosti, $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{is_i}$ so tedaj merski približki za $r(t_i)$. Njihove aritmetične sredine smo označili s p_i:

$$p_i = \frac{1}{s_i} \sum_{k=1}^{s_i} r_{ik}.$$

Pri dovolj dobrih meritvah predvidevamo, da bo za večino i-jev: $r(t_i) \approx p_i$. Dopustimo pa, da so podatki $\{r_{ik}\}$ čisto poljubni, dobri ali slabi. Naša naloga je poiskati dobre ocene za $r(t_i)$, označimo jih z $x_1, \ldots, x_n$, ki se bodo čim bolj prilegale podatkom r_{ik}, predstavljajo pa naj vrednosti rastne funkcije:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\,. \tag{a}$$

Fraza „čim bolj prilegati se" potrebuje jasen kriterij. Tu bomo uporabili princip najmanjših kvadratov: vsota kvadratov odklonov

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s_i}(x_i - r_{ik})^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} s_i p_i x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s_i} r_{ik}^2 \qquad \text{(b)}$$

mora biti minimalna. Če zastavimo problem le malo drugače, že prepoznamo nelinearen program:

Iščemo minimum funkcije

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} s_i p_i x_i \qquad \text{(c)}$$

pri pogojih

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0, \qquad \text{(d)}$$

$$x_2 - x_1 \geq 0, \quad x_3 - x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n - x_{n-1} \geq 0\,. \qquad \text{(e)}$$

Pravzaprav je to prav posebna vrsta nelinearnega programa: namenska funkcija (c) je kvadratična, poleg nenegativnostnih pogojev (d) pa imamo le še linearne pogoje (e) (tudi primer 1 je bil tak). Rečemo mu **kvadratični program** in je najbolj preprosta oblika nelinearnega programa. (KT) pogoji so še kar preprosti, čeprav ne toliko, da bi lahko problem rešili tu. Samo rezultat povejmo!

Najprej preverimo, če je zaporedje $p_1, p_2, \ldots, p_n$ naraščajoče. Če to ni tako in je na primer $p_i > p_{i+1}$, ju oba nadomestimo z izrazom

$$\frac{s_i p_i + s_{i+1} p_{i+1}}{s_i + s_{i+1}}.$$

To delamo toliko časa, da je popravljeno zaporedje že naraščajoče. Potem pa še morebitne negativne člene zaporedja zamenjamo z 0. Dobljeno zaporedje je ravno zaporedje iskanih x-ov. ■

LITERATURA

[1] A. Cedilnik, *Optimalna aproksimacija rastnih funkcij*, Zb. gozd. les. Ljubljana **28** (1986), 5–16.

[2] A. Cedilnik, *Aproksimacije rastnih funkcij s kubičnimi zlepki*, Zb. gozd. les. Ljubljana **37** (1991), 117–123.

[3] A. C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo 1974.

[4] M. D. Intriligator: *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Inc., USA 1971.

[5] A. Vadnal, *Rešeni problemi linearnega programiranja*, DZS, Ljubljana 1977.

[6] I. Vidav, *Matematika I.*, DMFA, DZS, Ljubljana 1987.

ODLAGANJE RADIOAKTIVNIH ODPADKOV

MATJAŽ RAVNIK

PACS 25.85

Prispevek opisuje, kako nastajajo radioaktivni odpadki in kako jih shranjujemo. Obdela tudi shranjevanje izrabljenega jedrskega goriva v JE Krško.

DISPOSAL OF NUCLEAR WASTE

In the paper production and disposal of radioactive waste are described. Spent fuel storage in Krško nuclear power plant is considered.

1. Uvod

V poljudnih in strokovnih razpravah o radioaktivnih odpadkih prihaja do številnih nesporazumov zaradi nepoznavanja strokovnih izrazov. Zato je smiselno začeti s podrobno definicijo in razlago pojmov. V tem prispevku se držimo mednarodno sprejetih definicij, ki jih uporablja Mednarodna agencija za atomsko energijo [1], [2].

Radioaktivni odpadki nastajajo povsod tam, kjer se predelujejo, proizvajajo ali uporabljajo naravni in umetni radioaktivni izotopi. Pod pojmom radioaktivni odpadki razumemo „katerokoli snov, ki vsebuje ali je onesnažena z radioaktivnimi izotopi, katerih koncentracija ali aktivnost presega predpisano mejo in katere uporaba ni več predvidena." [1].

Radioaktivni odpadki se med seboj razlikujejo po fizikalnih in kemijskih lastnostih. Od teh so najpomembnejše aktivnost, vrsta sevanja in razpolovni čas radioaktivnih izotopov, ki jih odpadki vsebujejo. Glede na razpadni čas radioaktivne odpadke delimo na kratkožive in dolgožive: kratkoživi so tisti, ki vsebujejo radioaktivne izotope, katerih razpolovni čas je krajši od 30 let. Drugi so dolgoživi.

Glede na aktivnost radioaktivne odpadke delimo na nizko aktivne, srednje aktivne in visoko aktivne. Ker se aktivnost s časom spreminja, običajno pri definiciji teh treh kategorij uporabimo praktične lastnosti radioaktivnih odpadkov, ki vplivajo na shranjevanje in odlaganje in ki so samo posredno odvisne od aktivnosti, npr. način zaščite pred sevanjem in potreba po odvajanju toplote.

2. Nizko in srednje aktivni odpadki

Nizko aktivni odpadki vsebujejo zanemarljivo malo dolgoživih izotopov, njihova aktivnost pa je tako nizka, da pri delu z njimi ni potrebna posebna zaščita. Večino nizko aktivnih odpadkov sestavljajo predmeti, ki se onesnažijo pri delu z radioaktivnimi izviri v medicini, industriji in na jedrskih reaktorjih (rokavice, obleka, steklovina, mala orodja, papir, filtri). Zaradi nizke aktivnosti niso neposredno radiološko nevarni, paziti moramo le, da ne zaidejo v biosfero. Začasno jih najpogosteje shranjujejo v posebnih skladiščnih prostorih na kraju, kjer nastajajo. Ker nizko aktivni odpadki

razmeroma hitro razpadajo, tudi trajno odlaganje ni tehnološko zahtevno. Običajno jih odlagajo v hermetično zaprtih posodah na površini zemlje ali plitko zakopane, od okolja pa so ločeni z več pregradami. Pregrade preprečujejo dostop padavin pa tudi morebitno izcejanje onesnažene vode. Izvedba pregrad je različna. Kot zaščito pred dežjem običajno uporabljajo kar plast zbite ilovice. Ilovico uporabljajo včasih tudi kot zadrževalno plast za talno vodo in izcedke, pri dražjih izvedbah pa je dno odlagališča betonirano ali asfaltirano.

Radioaktivnim odpadkom pred začasnim ali trajnim odlaganjem pogosto z različnimi postopki zmanjšajo maso, prostornino in kemijsko sestavo, da shranjevanje ali odlaganje postane varnejše in cenejše. Za te postopke se je udomačil izraz kondicioniranje. Najpogostejši postopek za nizko aktivne odpadke je sežiganje, saj so nizko aktivni odpadki po kemijski sestavi v glavnem organske snovi. To uporabljajo na primer na centralnem začasnem skladišču za nizko in srednje aktivne odpadke v Seibersdorfu v Avstriji.

Srednje aktivne imenujemo odpadke, ki so po izvoru, načinu onesnaženosti in razpolovnem času enaki ali podobni nizko aktivnim, so pa toliko aktivni, da je pri delu z njimi in pri njihovem transportu potrebna zaščita pred sevanjem. Srednje aktivni odpadki nastajajo predvsem pri delovanju jedrskih reaktorjev. To so po večini smole iz ionskih izmenjevalnikov, mehanični filtri, usedline in manjši aktivirani ali onesnaženi kosi opreme ali orodja. Navadno jih stiskajo in zalivajo v beton ali bitumen. Srednje aktivne odpadke najpogosteje začasno in trajno odlagajo enako kot nizko aktivne in tudi skupaj z njimi. Prevladujejo površinska in plitka odlagališča, v novejšem času pa se zlasti bogatejše države, na primer Švedska, odločajo za trajno odlaganje globoko pod površino v stabilnih geoloških plasteh.

Pri nas nizko in srednje aktivne odpadke, ki nastajajo v JE Krško, začasno shranjujejo kar tam v posebni zgradbi. Nizko in srednje aktivne odpadke, ki nastajajo drugje, na primer v bolnišnicah in pri raziskavah, začasno shranjujejo v centralnem republiškem skladišču pri reaktorju v Podgorici. Izvajajo tudi priprave na gradnjo trajnega odlagališča, trenutno izbirajo lokacijo.

Pri obratovanju jedrske elektrarne nastaja količinsko od deset- do stokrat več nizko in srednje aktivnih odpadkov kot visoko aktivnih odpadkov. Vendar pa je specifična aktivnost slednjih veliko večja. Tipična specifična aktivnost nizko in srednje aktivnih odpadkov je od 10^6 do 10^8 Bq/kg, visoko aktivnih pa tudi več kot 10^{14} Bq/kg. Tehnološki problemi pri shranjevanju visoko aktivnih odpadkov so bistveno večji kot pri drugih.

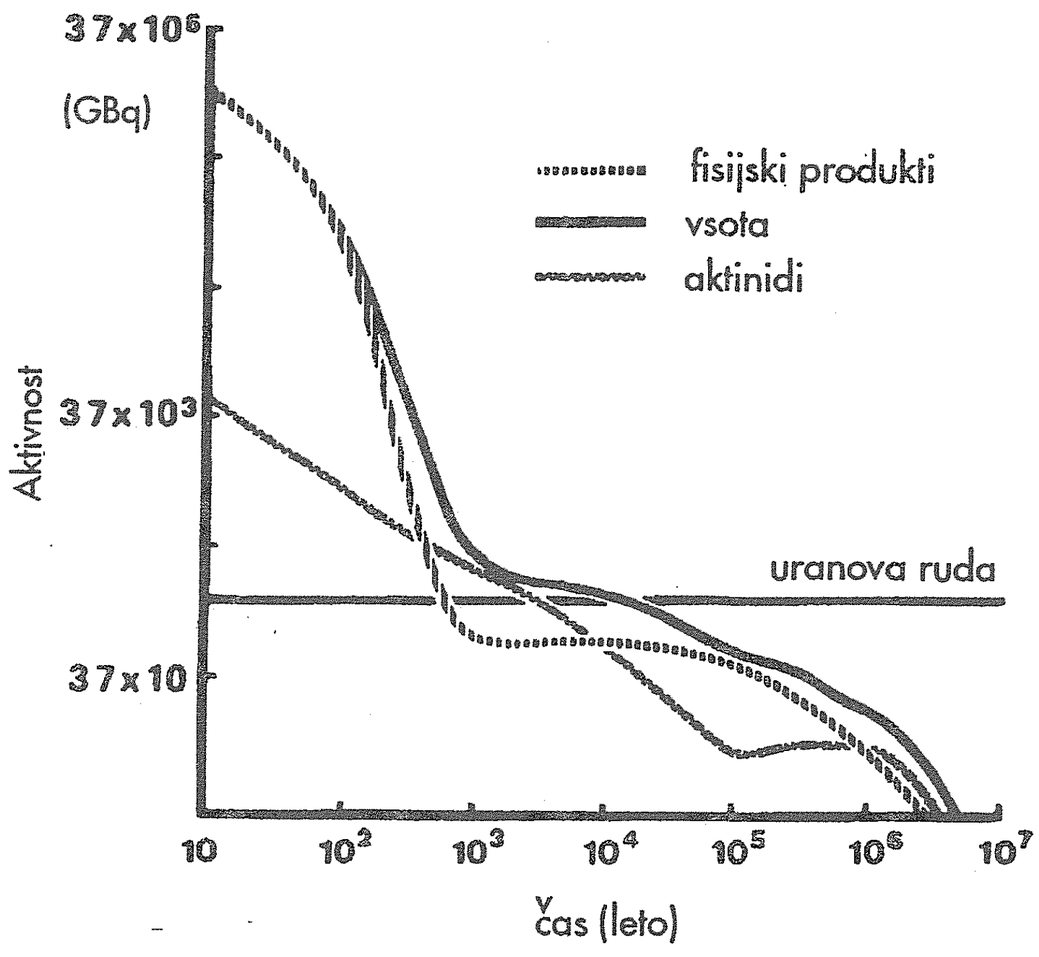
3. Visoko aktivni odpadki

K visoko aktivnim odpadkom prištevamo izrabljeno gorivo, ostanke pri njegovi predelavi in aktivirane ali močno onesnažene dele reaktorja. K njim sodijo vsi odpadki, ki so onesnaženi s sevalci α, tudi če je njihova aktivnost nizka. Take odpadke imenujemo tudi odpadke α ali plutonijeve odpadke, če je najpomembnejši sevalec delcev α plutonij.

Visoko aktivni odpadki sproščajo znatno toploto in jih moramo hladiti. To izhaja od velike specifične aktivnosti in relativno velike gostote, saj se velik del sevanja absorbira v njih samih. V ilustracijo: tipični gorivni element JE Krško oddaja še deset let po tem, ko zapusti reaktor, 10 kW toplotne moči [3].

Radioaktivne izotope, ki so značilni za visoko aktivne odpadke, lahko razdelimo v tri skupine: razcepne produkte, aktinide in aktivacijske produkte. Vsi nastajajo z nevtronskimi reakcijami ali radioaktivnim razpadom, ki jim sledi.

Fisijski ali cepitveni produkti nastanejo pri cepitvah, ki jih v reaktorju povzročajo nevtroni. Prispevek spontanih cepitev je zanemarljiv. Pomembnejših fisijskih produktov in njihovih radioaktivnih potomcev je približno 200. Njihov nastanek je odvisen od energije nevtronov in vrstnega ter masnega števila jedra, ki se razcepi. Počasni nevtroni z energijo pod 1 eV cepijo le sodo-liha jedra (U-235, Pu-239, Pu-241), hitri z energijo nad 1 MeV pa tudi sodo-soda (U-238, Pu-240). Koliko je v reaktorju različnih cepljivih jeder in kako so nevtroni energijsko porazdeljeni, je odvisno od tipa in obratovalnih značilnosti reaktorja: moči, temperature, zgorelosti goriva. Zato se lastnosti visoko aktivnih odpadkov lahko razlikujejo glede na to, iz katerega reaktorja prihajajo in kako je ta obratoval. Za izrabljeno gorivo iz tlačnovodnega reaktorja, kakršen je v JE Krško, sta tipična Sr-90 in Cs-137. Oba sta sevalca β. Njun razpolovni čas je 28.5 in 30 let. V času od 10 do 600 let po tem, ko gorivo zapusti reaktor, prispevata velik del celotne aktivnosti. Pomemben razcepni produkt je tudi Kr-85, ki je plinast in ga je težko zadržati. Na srečo pa relativno hitro razpade, saj ima razpolovni čas 10.7 let.



Slika 1. Časovna odvisnost aktivnosti fisijskih produktov in aktinidov, ki nastanejo iz toliko urana, kot ga je tipično v eni toni uranove rude. Slika kaže tudi naravno aktivnost ustrezne mase rude.

Medtem ko so razcepni produkti predvsem sevalci β in γ, pa so aktinidi tudi sevalci α. Najpomembnejši aktinidi v tlačnovodnem reaktorju so uran, plutonij in americij. V izrabljenem gorivu je najpomembnejši plutonij. Njegov izotop 239 nastaja med obratovanjem reaktorja iz U-238 po zajetju nevtrona in dvakratnem razpadu β. Izotop 240 nastane iz Pu-239 z zajetjem nevtrona. Enako nastaja Pu-241 iz Pu-240 in Pu-242 iz Pu-241. Vsi plutonijevi izotopi, razen Pu-241, in drugi aktinidi imajo v primerjavi z razcepnimi produkti zelo dolg razpadni čas: Pu-239, ki ga je največ v izrabljenem gorivu,

ima npr. razpolovni čas 24 000 let. Zato aktinidi na začetku prispevajo zanemarljivo aktivnost visoko aktivnih odpadkov, po daljšem času pa njihov delež prevlada. Po približno tisoč letih aktinidi prevladajo (sl. 1). Po približno deset tisoč letih aktivnost razcepnih produktov in aktinidov postane manjša od aktivnosti rude, iz katere so nastali. V uranovi rudi daje namreč velik prispevek k aktivnosti U-235, ki je zelo dolgoživ, saj ima razpolovni čas 700 miljonov let. V visoko aktivnih odpadkih pa U-235 praktično ni več, ker v reaktorju zgori, nastali cepitveni produkti in aktinidi pa hitreje razpadajo kot uran.

Tretja skupina radioaktivnih izotopov v visoko aktivnih odpadkih so aktivacijski produkti. Nastanejo z zajetjem nevtronov v jedrih gradbenih delov reaktorja. Ker je večina notranjih delov reaktorja izdelana iz nerjavečega jekla, sta najpomembnejša dolgoživa aktivacijska produkta Co-60 in Ni-63, ki imata razpolovni čas 5.2 oziroma 100 let. Specifična aktivnost sestavin, ki vsebujejo aktivacijske produkte, je nekaj velikostnih stopenj manjša od aktivnosti izrabljenega goriva. Bolj kot aktivnost povzroča teževe pri shranjevanju njihova velikost.

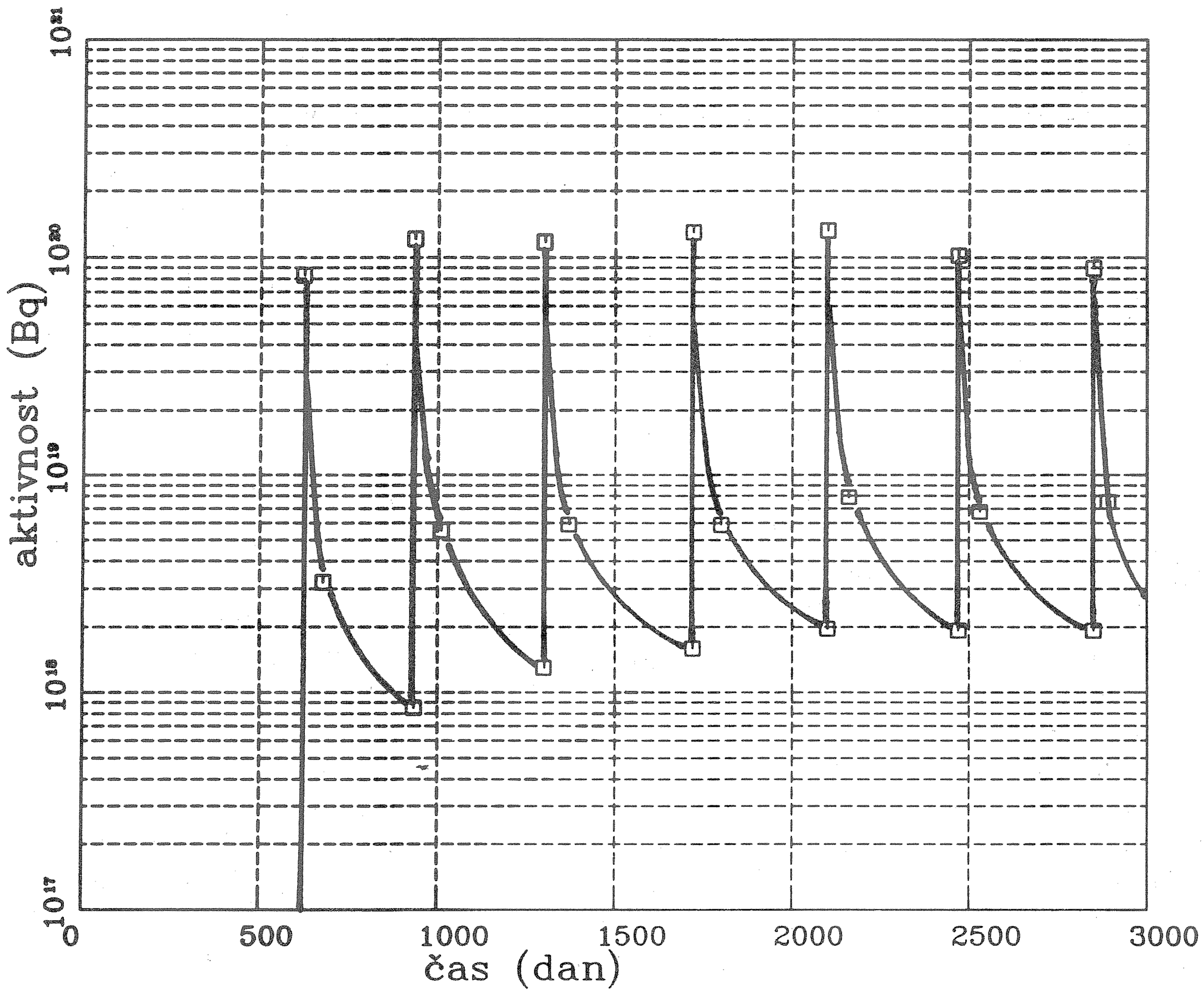
4. Shranjevanje in odlaganje visoko aktivnih odpadkov

Aktivnost visoko aktivnih odpadkov se na začetku hitro zmanjšuje, saj kratkoživi izotopi kmalu razpadejo. Zato je prevladalo načelo, da se ne izplača hiteti s trajnim odlaganjem. Po svetu je veliko visoko aktivnih odpadkov shranjenih začasno. Izrabljene gorivne elemente ponavadi shranjujejo kar v jedrski elektrarni, dokler ta obratuje. Prvih deset do dvajset let jih je zaradi hlajenja treba shranjevati v bazenih z vodo. Kasneje gorivo lahko shranjujejo tudi na suhem v zaščitenih in hlajenih vsebnikih ali silosih na istem ali drugem kraju. To je zelo pripravna tehnična rešitev, če planirajo začasno shranjevanje goriva tudi po tem, ko elektrarna ne bo več obratovala. Računajo namreč, da je optimalni čas za trajno odlaganje šele od 50 do 100 let po tem, ko gorivo zapusti reaktor.

Tudi izrabljeno gorivo JE Krško shranjujejo v elektrarni v posebnem bazenu. Gorivni elementi so vloženi v navpična stojala, ki so dovolj razmaknjena, da ne more priti do verižne reakcije v preostalem uranu in plutoniju in da je zagotovljen zadosten pretok hladilne vode. Kot radiološka zaščita rabi debela plast vode nad gorivnimi elementi. Slika 2 kaže časovni potek celotne aktivnosti v bazenu za izrabljeno gorivo JE Krško od začetka delovanja elektrarne. Ponavljajoči se maksimumi ustrezajo vsakoletnim menjavam goriva, ko v bazen vsakič uskladiščijo približno 40 izrabljenih elementov iz reaktorja. Aktivnost teh „novih" elementov za dve velikostni stopnji presega aktivnost vseh drugih, ki jih je po številu lahko mnogo več, a so shranjeni že dalj časa. Celotna aktivnost v bazenu je tako praktično enaka aktivnosti tistih elementov, ki so zadnji prišli iz reaktorja in se zato od leta do leta skoraj ne spreminja.

V nekaterih državah izrabljeno gorivo predelujejo. Izločijo uporabni uran in plutonij in ju ponovno predelajo v gorivo. Cepitvene produkte koncentrirajo, predelajo v tekoče stanje zaradi lažjega hlajenja in jih začasno

shranijo. Prednost predelave goriva je poleg ekonomičnosti tudi ta, da iz končnih odpadkov odstranijo aktinide. S tem bistveno olajšajo trajno odlaganje, saj odpadki mnogo prej razpadejo in ne vsebujejo sevalcev α.



Slika 2. Aktivnost vsega izrabljenega goriva v bazenu za izrabljeno gorivo JE Krško v odvisnosti od časa za prvih osem let obratovanja.

Tehnične rešitve za trajno odlaganje visoko aktivnih odpadkov se razvijajo. Razvili so postopke za mešanje odpadkov s steklom (vitrifikacija) ali za predelavo v umetni kamen [2]. Razvijajo tudi postopke za odlaganje celotnih nepredelanih gorivnih elementov, npr. z zalivanjem v bakrene bloke. Drugače kot za nizko in srednje aktivne odpadke načrtujejo odlagališča za visoko aktivne odpadke globoko pod zemljo v stabilnih in suhih geoloških skladih.

LITERATURA

[1] J. L. Zhu, *Radioactive waste management*, IAEA Bulletin **31**:4 (1989), 5–13.

[2] C. Y. Chan, *Radioactive waste management: An international perspective*, IAEA Bulletin **34**:3 (1992), 7–15.

[3] M. Ravnik, N. Železnik, *Izračun izotopske sestave in aktivnosti goriva JE Krško*, DP-5851 Institut Jožef Stefan, Ljubljana 1990.

FIZIKA IZ KARLSRUHEJA
O NOVOSTIH V POUČEVANJU FIZIKE

JANEZ STRNAD

PACS 01.40.Ej

Zakaj prihaja do predlogov za spremembe v poučevanju srednješolske fizike in kakšna je njihova usoda? Kaj prinaša predlog iz Karlsruheja, ki mu pri nas namenjajo nekaj pozornosti?

THE KARLSRUHE PHYSICS COURSE
ON NEW APPROACHES IN PHYSICS TEACHING

Why do proposals for changes in physics teaching arise and what is their destiny? What does offer the proposal from Karlsruhe which has attracted some interest?

Uvod

Predlogi, ki ponujajo izdatne spremembe v poučevanju srednješolske fizike, niso pogostni. Preden nekoliko podrobneje osvetlimo enega izmed njih, poskusimo razumeti, zakaj nastanejo.

V razmerah, v katerih sprememb ne vsiljuje oblast, se med učitelji fizike in tistimi, ki se na univerzi ukvarjajo s poučevanjem fizike, porajajo predlogi za spremembe. Do tega pripeljejo slabe izkušnje z obstoječim poučevanjem in potreba po uveljavljanju v strokovnih krogih. Podobno kot v raziskovanju tudi objave člankov v revijah, pisanje učbenikov in nastopi na strokovnih sestankih o poučevanju prispevajo k strokovnemu ugledu in prinašajo točke za napredovanje. Vendar se zelo malo predlaganih novosti zares prime, večina utone v pozabo. Zdi se, da je tem več možnosti, da kak predlog uspe, čim manjše spremembe predvideva. To je umljivo: velike spremembe so mogoče le, če zajamejo veliko število šol.

Tako se poučevanje fizike počasi spreminja, vsekakor počasneje kot fizika sama. Medtem ko je raziskovanje v fiziki univerzalno in je mogoče novosti hitro sporočati, o njih doseči soglasje in jih razmeroma hitro sprejeti, poučevanje fizike ni univerzalno, novih predlogov ni lahko sporočati, še teže je o njih doseči soglasje in jih sprejeti. V splošnem tak predlog naleti na nasprotovanje tega ali onega dela učiteljev, ki imajo dokaj različne interese.

Značilne izjave v fiziki je mogoče preskusiti z opazovanji, poskusi in merjenji, značilne izjave v poučevanju fizike pa v splošnem niso take [1]. Marsikdo bo ob misli na poučevalske poskuse temu ugovarjal. Vendar je treba na splošno pri poskusih z ljudmi izide jemati previdno. Še posebej velja to pri poučevalskih poskusih, pri katerih ima pomembno vlogo učitelj. Učitelj, ki je vpleten v poskus, seveda vanj verjame in zato bolje uči, kot bi učil po starem. Zato so izidi poskusov odvisni od tistega, ki jih ocenjuje, in od tega, kako se poskusa lotimo. Fiziko je mogoče *poučevati*, učitelja pa je treba *spreobrniti*, da ga pridobimo za izdatno spremembo v poučevanju. Množične spreobrnitve so redke. To ne pomeni, da so poučevalski poskusi nepotrebni, za udeležene učitelje so zelo koristni. Le iz njihovih izidov navadno ne gre neposredno izluščiti splošno veljavnih sklepov [2].

Zanimivo je primerjati razvoj poučevanja fizike z razvojem poučevanja matematike. Nekateri mislijo, da se je v zadnjih desetletjih poučevanje matematike razvilo mnogo bolj kot poučevanje fizike [3]. Drugi niso prepričani, da je tako. Pri presoji je smiselno ločiti oblikovne spremembe od vsebinskih. Na hitro je mogoče prepoznati eno vsebinsko spremembo v poučevanju matematike: odvajanje in integriranje so uvedli v srednjo šolo. Posebno teorijo relativnosti je uspelo v večji meri vključiti v poučevanje fizike, kvantno fiziko pa le v manjši meri. Vendar pri matematiki z daljšo zgodovino infinitezimalni račun izvira iz 17. stoletja, relativnost in kvantna fizika pri fiziki pa izvirata iz našega stoletja. Ne gre spregledati tudi tega, da je matematika v splošnem obdržala zalogo tedenskih ur, medtem ko za fiziko tega ni mogoče trditi. Morda je to povezano z mnenjem, ki se je razširilo v nekaterih krogih, da je fizika sama po sebi in kot osnova tehnike za okolje neprijazna.

Kot zgled za poskus velike spremembe v poučevanju fizike navedimo načrt PSSC (Physical Science Study Committee), ki ga je v ZDA leta 1956 ustanovil Jerrold Zacharias in v katerem je bilo več vodilnih ameriških fizikov. Načrt so pripravili za dijake, ki jih je fizika zanimala, da bi jim zgladili pot na univerzo. Čeprav so se zavedali, da je možnost za uspeh tem manjša, čim več novosti bo prinesel načrt, so vključili nekatere novosti. Šolski predmet naj bi podal fiziko kot celovito razumsko dejavnost, sestavljeno iz teorije ter poskusa z atomsko zgradbo kot rdečo nitjo. Naredili so kakih šestdeset filmov o poskusih, štirideset beril in učbenik. Vse to so preskušali s čedalje večjim številom dijakov. Na višku v šestdesetih letih so po PSSC poučevali največ dve petini od pol milijona ameriških dijakov, zdaj pa se je delež zmanjšal na petino. Učbenik se je razširil po vsem svetu in so ga prevedli v kakih dvajset jezikov. Po skromnejših začetkih je namenila ameriška raziskovalna skupnost načrtu po milijon dolarjev na leto vsaj petkrat. Načrt je bolj kot na ameriške učence vplival na učitelje po vsem svetu. O tem pričajo že poskusi in fotografije, ki so jih učbeniki prevzeli od PSSC.

V splošnem pa z dosežki PSSC niso zadovoljni [4]. Pokazalo se je, da je teže kot poučevalsko spremembo pripraviti, to spremembo vzdrževati. Navdušenje sodelujočih učiteljev se poleže in navsezadnje ti prenehajo poučevati. Novih učiteljev, ki bi navdušeno podpirali, kar je bila nekdaj novost, pa ni. Tako PSSC kljub velikemu naporu ni dosegel povprečnega dijaka. Število tistih, ki so izbrali fiziko, se ni povečalo. V poznejših izdajah – zdaj je izšla sedma – je učbenik PSSC izgubil nekaj svojih posebnosti in se približal prejšnjim pogledom. Podobne izkušnje so se pokazale pri nekaterih drugih širše zasnovanih ameriških načrtih, le da so bili ti še bolj kratkoživi. Zanimiv je tudi razvoj pri nas, za katerega je bilo značilno, da je spremembe vsiljevala oblast mimo strokovnih krogov. Ko ji je pošla sapa, so celo deli sprememb, ki so bili strokovno podprti, izginili.

Izkušnje napeljejo na domnevo, da običajni način poučevanja fizike ni vezan zgolj na nazadnjaštvo ali nevednost učiteljev, ampak da ima neko prednost. Lahko, da se je med razvojem ravno prav obrusil. Ali ni z njim tako kot s krogelnim zrcalom: ima napake, a te ostanejo v določenih mejah. Paraboloidno zrcalo nima napake pasov, vendar ima druge izrazitejše, tako

da ga je vredno uporabljati le v posebnih okoliščinah. Domneve ni mogoče naravnost preskusiti, če je kaj na njej, zato predlogi za večje spremembe v poučevanju ne morejo zlahka doseči prvotnega cilja, razen v posebnih okoliščinah.

Načrt iz Karlsruheja

Načrt iz Karlsruheja želi poenotiti poučevanje različnih poglavij fizike in s tem omogočiti, da jih zajamemo v krajšem času, in izhaja s stališča, ki ga je v teoretični fiziki zastopal G. Falk [2],[5]. Za izbrani sistem privzame integralsko kontinuitetno enačbo

$$\frac{dm}{dt} + \phi = \phi_i,$$

v kateri je dm/dt hitrost naraščanja količine, ki jo priredimo opazovanemu sistemu, ϕ skupni tok te količine – pozitivno štejemo tok iz sistema – in ϕ_i količina, ki nastane v sistemu na sekundo. Količine, ki se ohranijo, nimajo pravih izvirov, tako da je tedaj na desni strani enačbe nič. To velja za maso m v nerelativistični fiziki, $dm/dt + \phi_m = 0$, za naboj e, $de/dt + I = 0$, in za energijo W, $dW/dt + P = 0$. Pri tem so ϕ_m masni tok, I električni tok in P energijski tok iz sistema. Enaka oblika enačb opozarja na podobnost količin. Tem *ekstenzivnim količinam* vzdenejo ime *množinske količine* (mengenartige Größen). Prej so uporabljali *snovi podobne količine*, kar je močno spominjalo na *imponderabilije* s konca 18. stoletja (kalorikum, magnetni in električni fluid, eter).

V naslenjem koraku ugotovijo, da se da sprememba energije sistema izraziti kot

$$dW = \mathbf{v}d\mathbf{G} + U\,de + T\,dS + \mu dn + \ldots,$$

če je U električni potencial, $\mathbf{v}$ hitrost in $\mathbf{G}$ gibalna količina, T temperatura, S entropija, μ kemijski potencial (specifična prosta entalpija) in n množina snovi (v kilomolih). Pri spremembi energije se spremeni vsaj še ena ekstenzivna količina, ki ji pravijo *prenašalec energije*. "Energija nikoli ne teče sama."

Enačbo predelamo v enačbo za energijski tok:

$$P = \mathbf{v}\mathbf{F} + UI + T\phi_S + \mu\phi_n + \ldots$$

Pri tem je $\mathbf{F} = d\mathbf{G}/dt$ sila, $\phi_S = dS/dt$ entropijski tok in $\phi_n = dn/dt$ tok množine snovi. Entropija se ne ohrani, kontinuitetna enačba zanjo ima na desni strani člen, ki podaja v sistemu nastali entropijski tok.

Dela in toplote ne ločijo. Iz zadnjega časa izvira vsaj še en predlog, ki pri izmenjavanju energije sistema z okolico ne razločuje med delom in toploto [6], in predlog, v katerem ne vpeljejo notranje energije, češ da gre zgolj za potencialno energijo jeder in elektronov, atomov ali molekul [7].

Na opisani osnovi je mogoče razdeliti fiziko na mehaniko, v kateri je ekstenzivna količina gibalna količina, intenzivna količina hitrost in tok sila,

toploto, v kateri so te količine po vrsti entropija, temperatura in entropijski tok, in elektriko, v kateri so te količine po vrsti naboj, potencialna razlika, to je napetost, in električni tok. V sliko je mogoče zajeti tudi del kemije, v kateri so te tri količine po vrsti množina snovi, razlika kemijskih potencialov in tok množine snovi. Delno je mogoče nategniti na isto kopito tudi prenos sporočil.

Po tem načrtu so pripravili učbenik za srednjo šolo v dveh delih, ki je doživel že nekaj sprememb [8]. O njegovi zgradbi lahko sklepamo po razvrstitvi poglavij.

Prvi del: energija, tokovi kapljevin in plinov, gibalna količina (gibalna količina in tokovi gibalne količine, težno polje, gibalna količina in energija, gibalna količina kot vektor, navor in težišče, obremenitve na stisk in nateg), entropija (entropija in entropijski tokovi), entropija in energija, fazne spremembe, plini, svetloba).

Drugi del: podatki in prenašalci podatkov, naboj (naboj in električni tokovi), naboj in energija, magnetno polje, elektrostatika, podatki), svetloba (svetloba, preslikava, barve).

Seznam poglavij se bistveno ne razlikuje od seznamov v drugih podobnih učbenikih. Razlikuje pa se vrstni red in še bolj poudarek pri posameznih delih. Vendar ni mogoče mimo ugotovitve, ki podpira prejšnjo domnevo: učbenik, kakršen je pred nami, je precej bližji običajnemu poučevanju kot prejšnje različice in kot priročnik za učitelje.

1. Energija in energijski prenašalci

1.1. Energija

Avtomobili potrebujejo bencin. Dieselske lokomotive potrebujejo dieselsko olje. Električne lokomotive potrebujejo elektriko. Vsako vozilo potrebuje gorivo, pa ne samo vsako vozilo. Tudi če gremo peš ali se vozimo s kolesom, potrebujemo gorivo. Človek, ki hodi peš ali se vozi s kolesom, potrebuje hrano. Vsa ta „goriva" imajo nekaj skupnega: z njimi dobiva vozilo ali človek energijo. Energija je tisto, kar zares potrebujemo za promet.

Energija je povezana s trudom. Če vlečemo voz, se trudimo. Za to, da vlečemo voz, potrebujemo energijo. Medtem ko ga vlečemo, pošiljamo to energijo v voz.

Da bi nekaj premikali, potrebujemo energijo.

Energije pa ne potrebujemo samo zato, da bi kaj premikali. Tudi veliko drugih pojavov poteka samo, če nenehno dovajamo energijo.

Pri kurjenju potrebujemo vedno kako gorivo: les, premog, zemeljski plin, kurilno olje ali elektriko. Zopet je tisto, kar je odločilno, energija, ki prihaja skupaj z „gorivom".

Za kurjenje potrebujemo energijo.

Goriva, s katerim prihaja energija v stroj ali peč, imenujemo *energijske prenašalce.* Les, premog, bencin, dieselsko olje, zemeljski plin in elektrika so energijski prenašalci.

Če hočemo kaj premikati ali če hočemo kuriti, je odločilna energija. Pogosto ni pomembno, kateri prenašalec uporabimo. Ali ne moremo potem uporabiti energije brez prenašalca? Morda bi bilo to udobneje? Žal to ni mogoče, ker energija brez prenašalca ne obstaja.

Goriva, hrana in elektrika so energijski prenašalci. Energija brez prenašalcev ne obstaja.

Prevod začetnih odstavkov prvega poglavja

Sklep

Preden poskusimo učbenik oceniti, omenimo dvoje. Fizika je kvantitativna, v njej je treba računati s splošnimi števili in numerično. Poleg zakonov je treba upoštevati splošne definicije, na primer definicije količin, splošne dogovore, na primer dogovore o enotah, in posebne dogovore, na primer, katera telesa štejemo v določenem primeru k opazovanemu sistemu. Vsega tega se je treba potem strogo držati.

Vendar fizika ni samo računanje. V raziskovanju in v šoli je enako pomembna ali še pomembnejša kot računanje kvalitativna slika, ki zajema nazorne predstave in slike. Novo poglavje v šoli kaže začeti s kvalitativnimi razglabljanji, ki naj med drugim učence motivirajo. Prezgodnji prehod h kvantitativnemu obravnavanju utegne odvrniti zanimanje dijakov. Poglavje je smiselno tudi končati s kvalitativnim razglabljanjem o uspehih in drugem, čemur kvantitativno ni mogoče slediti. Zamisliti si je mogoče, da v nekaterih šolah ali v nekaterih razredih preostane zelo malo kvantitativnega obravnavanja. Najbrž bi bilo koristno, če bi se učitelji zavedali razlik v obeh prijemih. Predlog, da bi eno poimenovali *poučevanje fizike* in drugo *poučevanje o fiziki*, je sicer privlačen, a bi lahko povzročil zmedo. Ni enotnega mnenja o tem, zaradi česa fizika v šoli ni priljubljena, ali je to strogost pri kvantitativnem obravnavanju ali nedoločenost pri kvalitativnem ali pri enem dijaku to pri drugem drugo ali kaj tretjega.

Učbenik iz Karlsruheja se ne izogne kvantitativnemu obravnavanju, a ostane dokaj na površju. Nekaterih pomembnih količin, med njimi energije, ne poskusi natančno opredeliti. Če izhajamo od toka P, moramo vpeljati količino, ki se pretaka, z enačbo $W = Pt$. V elektriki moramo vpeljati naboj prek toka, če je ne začnemo z elektrostatiko, ampak s tokom in napetostjo in upoštevamo osnovno enoto amper. Zaradi tega, ker kvantitativno obravnavanje ni zahtevno, utegne dijakom prijem ugajati. To bi bilo treba upoštevati, ko bi primerjali njihov odziv na kvantitativno in definicijsko zahtevnejši, a manj priljubljen način, ki pa bi jim lahko dal globlje znanje. Nasploh je mogoče za prvo silo domnevati, da dosežemo po globini in obsegu enako znanje z enakim naporom, ne glede na razporeditev gradiva. Tudi če je to smiseln prvi približek, utegne biti za določen obseg bolj pripraven ta vrstni red, za drugega pa drug. Načrt iz Karlsruheja utegne imeti nekaj prednosti, če želimo v poučevanje fizike zajeti del kemije in del tehnike, ki se ukvarjata s prenašanjem sporočil in obdelavo podatkov. To sta zanimiva dela sodobnega znanja, vendar se je treba posebej odločiti, da ju vključimo v fiziko.

V nasprotnem primeru, če zajamemo v šoli fiziko približno v običajnem obsegu in do običajne globine, se zdi omenjeni prijem nasilen. Šolsko fiziko polaga na Prokrustovo posteljo neke teoretične zamisli, ki je zanimiva, a ni splošna. Pripravna je le za obravnavanje stacionarnih pojavov. Za druge pomembne zglede, na primer za gibanje teles, denimo planetov okoli Sonca ali naelektrenih delcev v električnem polju, pa je neprimeren, saj obide enačbe gibanja. Kdo bi morda raje kot enotnost poglavij fizike s tega vidika poudaril različnost z drugega. Zadeve ni mogoče odločiti s preskusom v

fizikalnem pomenu, ampak je odvisna od osebnih pogledov ali preprosto od okusa. Pri tem kaže upoštevati, da so tudi učitelji fizike različni in ustreza temu bolj ta, drugemu pa drugi način poučevanja.

Učbeniku je mogoče očitati, da uvaja več posebnih pojmov in imen, ki se ne zdijo nujno potrebni in ki so pri tradicionalnem prijemu brez pomena. Nekatere podobnosti ženejo morda predaleč. Ali si lahko ustvari dijak jasno sliko o svetlobi kot o prenašalcu energije? Nekdaj so takemu prijemu rekli "poučevanje z dekretom". Predlog niti v Nemčiji ni naletel povsod na ugoden odmev. Samo v posameznih zveznih deželah na delu šol poučujejo po njem. Drugod so ga večinoma sprejeli z začudenjem, posebno novi pojem prenašalca energije [9].

Učbenik, priročnik za učitelje in še bolj članki, ki so jih F. Herrmann in njegovi sodelavci objavili v mednarodnih poučevalskih revijah, odpirajo mnogo zanimivih pogledov. Za kritičnega učitelja, ki ima toliko pregleda nad fiziko, da si o njih lahko ustvari lastno sodbo, so ti pogledi poučni in jih delno lahko vgradi v svoj način poučevanja. Pri seznanjanju naših učiteljev s temi pogledi bi bilo morda smiselno uporabiti prijem, ki se je obnesel pri študentih fizike. Navedemo poučevalsko dilemo, njeno strokovno ozadje in razloge za in proti. Po možnosti navedemo začetne izjave, ki so dilemo sprožile in ki si nasprotujejo, in poskušamo ugotoviti njihovo jedro. Po razpravi, v kateri pretresemo mnenja udeležencev, spodbudimo vsakega izmed njih, naj si prosto izbere del stališča, ki ga fizikalno ni mogoče preskusiti.

Nekatere izmed zamisli iz načrta in učbenika gredo v smeri drugih prizadevanj, ki jih je mogoče podpreti. To velja na primer za trditev, da je poleg energije potrebno vpeljati entropijo, če želimo smiselno poučevati termodinamiko. Ugovarjal ji ni še noben fizik, ki se razume na zadevo. Tudi nekatere druge, manj načelne trditve bi bilo mogoče uporabiti in vključiti v običajno poučevanje.

Mnogo previdnejši bi bilo treba biti pri uvajanju novega načina v kako našo srednjo šolo. Lahko, da bi bil novi način dobro sprejet, če bi ga poučeval učitelj, ki bi ga sprejel za svojega in ki bi mu to pomagalo pri poklicnem uveljavljanju. Toda pozneje, ko ta učitelj ne bi več poučeval, bi novost zamrla in prispevala k nepriljubljenosti fizike v šoli in k zmedi. Vrh tega bi se povprečen srednješolec z novim znanjem fizike na univerzi težko znašel.

Zasnova zapisa je nastala pred časom na željo, naj ocenim predlog iz Karlsruheja, ki so ga predstavili na nekaterih mednarodnih srečanjih. Za objavo v Obzorniku pa sem spremenjeni zapis pripravil, ko sem ugotovil, da načrt ob podpori nekaterih naših fizikov ponujajo s precejšnjim pritiskom. Še enkrat naj poudarim, da gre pri tem za stvari, ki so vsaj delno odvisne od okusa. Slovenskim učiteljem fizike predlagam, da si poskušajo priti čim bolj na jasno o strokovnih dilemah in se potem odločijo, kakor se najbolje morejo. Za tiste, ki imajo možnost odločanja, pa je najbolje navesti del mnenja J. W. Warrena: „V prvem bistvenem koraku moramo zaustaviti uvajanje ambicioznih novih načrtov... Razvoj v prihodnosti bo potreboval precej več skrbi in previdnosti, kot so ju uporabili v preteklosti." [9]

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Opazovanje in teorija*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992) 141, *Ali mora znati, kdor uči*, Obzornik mat. fiz. **40** (1993) 23.

[2] C. Swartz, *Research has shown that –*, Phys. Teach. **32** (1994) 9 in odziv na uvodnik: E. F. Taylor, *Reading between lines*, Phys. Teach. **32** (1994) 199.

[3] F. Herrmann, *Physik. Unterrichtshilfen*, priredili F. Herrmann, M. Laukenmann, L. Mingirulli, P. Morawietz, P. Schmälzle, Karlsruhe 1993.

[4] A. P. French, *Setting new directions in physics teaching: PSSC 30 years later*, Phys. Today **39** (1986) 30 (9).

[5] J. Strnad, *Še ena pot do entropije v srednji šoli*, Vzgoja in izobraževanje **19** (1988) 48.

[6] C. van Huis, E. van der Berg, *Teaching energy: a systems approach*, Phys. Educ. **28** (1993) 146.

[7] R. P. Olenick, *The Mechanical Universe – a physics course for television, Communicating Physics, Proceeedings*, G. Born, M. Euler, R. U. Sexl (ur.), Duisburg 1986, str. 60; v letu 1993 je tekla oddaja na slovenski televiziji.

[8] F. Herrmann, *Physik, Der Karlsruher Physikkurs 1: Energie, Impuls, Entropie*, 160 str.; *2: Energie, Daten, Elektrizität*, 142 str., priredili F. Herrmann, M. Laukenmann, L. Mingirulli, P. Morawietz, P. Schmälzle, Karlsruhe 1993.

[9] J. W. Warren, *Energy and its carriers: a critical analysis*, Phys. Educ. **18** (1983) 209.

VESTI

OB ODPRTEM GROBU IVANA ŠTALCA

Smrt, čeprav ob rojstvu že vsajena,
je vselej nepričakovana. Kadar pride, pride prezgodaj.

Zato nas je žalostna novica o smrti Ivana štalca, učitelja matematike in fizike, pisca mnogih srednješolskih učbenikov in zbirk matematičnih vaj, člana našega društva, našla povsem nepripravljene.

Četudi mrtvih nihče ne predrami,
so v spominu živečih lahko še med nami.

Zato bo naš tovariš Ivan še dolgo med nami. Živel bo v svojih prenovljenih učbenikih za matematiko na tehniških šolah. Živel bo v svojih zbirkah iz matematike za gimnazije, ki jih še danes uporabljajo dijaki na slovenskih srednjih šolah.

Tisti čas smo zbirali primerne naloge k novim učbenikom. Ni nam šlo dobro. Pa se je lepega dne pri uredniku pojavil on z izdelano zbirko vaj za dva razreda. Jeseni so jih dijaki že imeli ciklostirane v rokah, vrsta ponatisov je seveda tiskana.

Živel bo v spominu vseh tistih, ki so obiskovali tečaje na Dopisni delavski univerzi in uporabljali njegove pripomočke. Njegovim učencem so še v spominu njegova zanimiva izvajanja, njegovi nasveti in smehljaj, s katerim je pospremil njihova uspešna prizadevanja. Njegovi kolegi se bodo spominjali kretenj, ki so spremljale vsak njegov dobrohotni nasvet, in ne bodo pozabili njegovega večnega optimizma.

Čeprav izniči vse, kar nas na zemljo veže,
do srca globin in do ljubezni smrti moč ne seže.

Zato se bomo mi, člani društva, spominjali, s kakšno ljubeznijo in navdušenjem je sodeloval pri ustvarjanju društvenega glasila in uredil njegovih prvih šest letnikov.

Ne bomo pozabili njegovega sodelovanja pri društvenem seminarju iz fizike za učitelje konec petdesetih let, ne njegovih predavanj na aktivih, ki jih je društvo prirejalo za učitelje. S širokim nasmehom je začel: „Jaz pa tole napravim takole," in nam povedal, kako se izogne težavam pri razlagi.

Spominjali se bomo njegove preprostosti in veselja, ko nam je pokazal laboratorij za fizikalne vaje, ki sta ga ustvarila s kolegom na I. gimnaziji, in nas spodbujal, naj tudi mi podobno začnemo. Takrat fizikalne vaje še niso bile obvezne.

Še bi lahko našteval, zakaj je prejel mnoga priznanja in odličja: zakaj pred desetimi leti Žagarjevo nagrado; da je bil častni član našega društva, je umevno samo po sebi.

Spoštovani kolega!

Ko se zdaj poslavljam v imenu društva, ki ima med svojimi nalogami zapisano širjenje spoznavanja in ljubezni do matematike, fizike in astronomije, ne morem storiti nič več, kot ugotoviti, da si storil več, kakor si bil dolžan, mi pa ti za vse to zadnjič lahko rečemo le „Hvala!".

Danes se je končalo tvoje zadnje šolsko leto. Po uspešnem delu odhajaš na počitnice, ki se ne bodo nikoli končale. Odpočij se dobro!

Dušan Modic

VABILA

VABILO NA PRVI KONGRES MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije bo v četrtek in petek 20. in 21. oktobra 1994 v Ljubljani v Cankarjevem domu z začetkom 20. oktobra ob 10. uri dopoldne. Otvoritvena slovesnost in nekaj predavanj bo plenarnih, drugače pa bo kongres potekal v dveh ločenih sekcijah: matematični in fizikalni.

Področja matematike:

1. Pouk matematike.
2. Aplikacija matematike.
3. Analiza.
4. Topologija in geometrija.
5. Diskretna matematika.
6. Algebra.
7. Numerična in računalniška matematika.

Področja fizike:

8. Pouk fizike v a) osnovni šoli, b) srednji šoli, c) visoki šoli.
9. Osnovni delci in jedrska fizika.
10. Atomska in molekularna fizika.
11. Fizika kondenzirane snovi.
12. Interdisciplinarna fizika.
13. Ostala področja.
14. Aplikacija fizike a) v optiki, b) v senzoriki in merski tehniki, c) pri okolju in energetiki, d) v informatiki, e) na ostalih področjih.
15. Astronomija.
16. Astrofizika.

Kdor še ni prejel pisnega obvestila in vabila za kongresne prispevke, naj si ogleda objave v prejšnjih številkah Obzornika ali pa naj se obrne na Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, tel. (061) 265-061.

Predsednik DMFAS
Franc Cvelbar

Predsednik organizacijskega odbora
Zvonko Trontelj

VABILO NA OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Občni zbor bo v soboto, 22. oktobra 1994, v Ljubljani v Cankarjevem domu z začetkom ob 9. uri dopoldne.

Predsednik DMFAS
Franc Cvelbar

VABILO NA PROSLAVO 200-LETNICE POPOLNE ZAKLADNICE LOGARITMOV JURIJA VEGE

Proslava bo v soboto, 22. oktobra 1994, v Vegovem rojstnem kraju Zagorica ob 15. uri. Za udeležence občnega zbora bomo priskrbeli avtobusne prevoze iz Ljubljane do Zagorice in nazaj.

Predsednik DMFAS
Franc Cvelbar

Predsednik turističnega društva Dolsko
Franc Gradišek