

1994

Letnik 41

3

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO





# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1994

letnik 41, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

**Uredniški odbor:** Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.900,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.800,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 400,– SIT, dvojna številka 800,– SIT, stare številke 300,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1994 DMFA Slovenije – 1207

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

## VSEBINA — CONTENTS

### Članki — Articles

Str.–Page

Termodinamika transportnih pojavov — Thermodynamics of transport processes (Ivan Kuščer) . . . . . 65–82

Delno urejeni številski kolobarji — Partially ordered rings of real numbers (Boris Lavrič) . . . . . 83–91

Nove knjige — New book (Igor Vilfan, Peter Petek) . . . . . 91, 91–92

### Vesti — News

Razpis učiteljem (Ivana Mulec) . . . . . 92

Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1993 (Martina Koman) . . . . . 93–III

Drugo obvestilo in vabilo za prispevke (Zvonko Trontelj) . . . . . III–IV

**Na ovitku:** Jurij Vega, 1754–1802, ob dvestoletnici izdaje njegovih logaritmov, kateri je posvečen tudi prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, glej vabilo na straneh III–IV.

Preprosti zgledi pojasnjujejo osnovne pojme neravnovesne termodinamike: lokalnega termodinamičnega ravnovesja, fenomenoloških zakonov, entropijskega toka in entropijskih izvirov ter Onsagerjevega formalizma. Sledi prikaz fluktuacijsko disipacijskega izreka in Onsagerjevega simetrijskega zakona.

### THERMODYNAMICS OF TRANSPORT PROCESSES

Simple examples serve to illustrate the basic concepts of irreversible thermodynamics: local thermodynamic equilibrium, phenomenological laws, entropy flux and entropy source, Onsager's formalism. This is followed by an exposition of the fluctuation-dissipation theorem and of Onsager's reciprocal relations.

#### 1. Entropija v termodinamiki

Termodinamika se opira na entropijski zakon, ki za makroskopske sisteme omogoča definicijo entropije. Entropija je aditivna (ali ekstenzivna) funkcija ravnovesnega stanja, ki se pri reverzibilnih prehodih takole spreminja:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (1)$$

Za ireverzibilne pojave, o katerih se v okviru ravnovesne termodinamike lahko pogovarjamo le po ovinkih, pa velja  $dS > dQ/T$ .

Kot zgleda se spomnimo klasičnega enoatomnega plina z  $N = nV$  atomi. Plin najprej pri konstantni prostornini segrejemo od temperature  $T_0$  na  $T$ , potem pa ga izotermno stisnemo od številske gostote  $n_0$  na  $n$ . Oba prehoda naj bosta tako počasna, da lahko veljata kot reverzibilna. Ko upoštevamo, da je toplotna kapaciteta na delec enaka  $\frac{3}{2}k$ , dobimo naslednjo spremembo entropije:

$$S - S_0 = \frac{3}{2}Nk \ln \frac{T}{T_0} - Nk \ln \frac{n}{n_0}. \quad (2)$$

Pripravno bo, če bomo entropijo homogene snovi preračunali na posamezni delec in kvocient  $s = S/N$  imenovali specifična entropija. (Nič ni narobe, če se isti izraz bolj pogosto rabi za entropijo na masno enoto.) Zapišimo rezultat v dveh oblikah:

$$s = k \left[ \frac{3}{2} \ln T - \ln n \right] + \text{konst} = k \left[ \frac{5}{2} \ln T - \ln p \right] + \text{konst}. \quad (3)$$

Pripomniti je treba, da je logaritem temperature ali tlaka ali sploh kake količine, ki ni brez dimenzije, neroden pojem. Vstaviti moramo logaritem

---

\* Predavanje v okviru Permanentnega izobraževanja za profesorje fizike na srednjih šolah, 11.12.1993 in 15.1.1994.



merskega števila, ki pa je odvisen od izbire enot. Vendar se s tem lahko zadovoljimo le toliko časa, dokler velja dogovor, da je entropija nedoločena do aditivne konstante.

Specifična entropija je pripravno povprečje, ki pa naj ne zapelje k temu, da bi posameznemu delcu pripisovali entropijo. Entropija je lahko le lastnost makroskopskega sistema. Druga pripomba se tiče zapisanih konstant, ki naj ostaneta nedoločeni. To ni nič hudega, ker nas zanimajo samo spremembe (razlike) entropij. Zahtevati moramo le, da smeta biti konstanti v (3) odvisni samo od vrste delcev in nikakor ne od njihovega števila – zato da je zagotovljena aditivnost entropije. Če pa že hočemo, lahko konstanto predpišemo, na primer tako, da ob sklicevanju na Nernstov zakon ukažemo, da naj bo  $s = 0$  za vsako čisto snov v katerem koli ravnovesnem stanju pri 0 K. Tako definirana „absolutna“ entropija ni nikoli negativna.

Ravnovesna termodinamika ni brez protislovja, ki se skriva v pojmu reverzibilnosti. Da snov segrejemo, je potreben toplotni tok, ki je ireverzibilen pojav. Reverzibilno (neskončno počasno) dovajanje toplote „diši“ po filozofiji. Bolje bo, če dopustimo tudi nekatera neravnovesna stanja, npr. takšna, v katerih se po snovi pretaka toplota. Šele ko bomo znali kvantitativno povedati, kako je pri tem z entropijo, bomo termodinamiko lahko zaokrožili v celovit nauk.

## 2. Entropija v statistični mehaniki

Medtem ko v termodinamiki sprašujemo samo po makroskopskih (ravnovesnih) stanjih snovi, ki jih opisujemo z maloštevilnimi termodinamičnimi spremenljivkami, kot sta  $T$  in  $n$ , skuša statistična mehanika najti povezavo z mikroskopskim opisom. Ta vsebuje v klasični verziji podatke o legah in gibanju delcev, kvantnomehanično pa je opredeljen s statističnim operatorjem, *gostotno matriko*. No, ostanimo raje pri klasičnem opisu.

Življenje sistema iz  $N$  enakih točkastih delcev prikažemo klasično z gibanjem fazne točke v faznem prostoru, ki ima  $6N$  koordinat:  $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N$ , kjer so  $\mathbf{p}_j = m\mathbf{v}_j$  gibalne količine delcev. Kadar gibanja ne poznamo natančno ali si z njim ne upamo računati, upoštevamo verjetnostno gostoto v faznem prostoru, s katero v statistični mehaniki opišemo mikroskopsko stanje:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t). \quad (4)$$

Verjetnost, da najdemo fazno točko v območju

$$d\Gamma = d^3r_1 d^3p_1 \dots d^3r_N d^3p_N,$$

se torej zapiše z diferencialom  $\rho d\Gamma$ . Seveda je verjetnostna porazdelitev normirana:  $\int \rho d\Gamma = 1$ .

Posebno pomembna je kanonična verjetnostna gostota, s katero je podan mikroskopski opis makroskopskega ravnovesnega stanja:

$$\rho_0 \propto \exp\left(-\frac{W}{kT}\right). \quad (5)$$



Pri tem je  $W$  celotna energija sistema. Kakor se spodobi za ravnovesno stanje, ta gostota ni odvisna od časa, če se prostornina in morebitna zunanja polja ne spreminjajo. Termodinamične količine izrazimo z verjetnostnimi povprečji, ki jih bomo zaznamovali z oklepaji  $\langle \rangle$ . Najbolj pomembna med njimi je povprečna energija

$$\langle W \rangle = \int W \rho d\Gamma, \quad (6)$$

ki jo v termodinamiki poznamo kot notranjo energijo.

Vpeljava verjetnostne gostote v faznem prostoru je osnovna zamisel klasične statistične mehanike. Z vidika matematike je torej ta veja fizike komaj kaj več kot ena izmed aplikacij verjetnostnega računa, kar se kaže tudi v značaju nalog. Saj ne delamo drugega, kot da računamo razna povprečja in ob tem izpeljujemo nove verjetnostne porazdelitve iz že znanih. No, fizik pa mora najti še smiselne podatke in smiselne definicije ter utemeljiti osnovne predpostavke, kar nikakor ni lahko.

Vsaki verjetnostni gostoti v faznem prostoru je Gibbs priredil neko vrednost entropije, in sicer s povprečnim logaritmom verjetnostne gostote:

$$S = -k \langle \ln(N^N \rho) \rangle + \text{const} = -k \int \ln(N^N \rho) \rho d\Gamma + \text{const}. \quad (7)$$

Vseeno je, kolikšna je zapisana konstanta, gledati moramo le to, da je pri sistemu iz enakih delcev sorazmerna z njihovim številom. V argumentu logaritma pa smo morali  $\rho$  pomnožiti z  $N! \approx (N/e)^N$ , ali pa kar z  $N^N$ . Potem se da pokazati, da je entropija večjega kosa homogene snovi sorazmerna s številom delcev.

Opomba: V kvantni statistični mehaniki ni te nerodnosti, kajti tam računamo s statističnimi operatorji ali v preprostih primerih s povprečno zasedenostjo linearno neodvisnih stacionarnih stanj, torej z neimenovanimi števili. Brez prisile pridemo tako do absolutne entropije, kjer ni več nedoločene aditivne konstante.

Gibbsova definicija entropije je dosti bolj splošna kot termodinamični pojem in najbrž drži, da je presplošna. Za kanonične verjetnostne porazdelitve lahko izpeljemo [1], da velja za razliko entropij med dvema ravnovesnima stanjema enačba (1), s čimer smo za silo zadovoljni.

Poglejmo, kako je z Gibbsovo entropijo klasičnega enoatomnega plina v ravnovesju. Z mikroskopskega vidika je najbolj pomembna značilnost plina ta, da med njegovimi delci ni korelacij. To pomeni, da se verjetnostna gostota v faznem prostoru izraža s produktom verjetnostnih gostot za posamezne delce. Te pa seveda vzamemo, da so za enake delce enake. Po Boltzmannu pišemo verjetnostno gostoto za posamezen plinski atom v njegovem faznem prostoru kot  $m^{-3} N^{-1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , tako da je  $f d^3r d^3v$  povprečno število atomov, ki jih najdemo v elementu  $d^3r d^3v$  geometrijskega in hitrostnega prostora. (Faktor  $m^{-3}$ , kjer je  $m$  masa delca, se je pojavil, ker smo

z gibalnih količin prešli na hitrosti.) Lokalna številska gostota in celotno število atomov sta torej  $n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v$  in  $N = \int n d^3r$ .

Z množenjem dobimo

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t) = \frac{1}{m^{3N}} \prod_{j=1}^N \frac{f(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j, t)}{N}. \quad (8)$$

Ko logaritem tega izraza vstavimo v (7), razpade integral v vsoto  $N$  enakih integralov. V vsakem lahko izvedemo integracije po vseh parih spremenljivk, razen po enem. Končno sledi:

$$S = -Nk \langle \ln f \rangle + \text{const} = -k \iint f \ln f d^3r d^3v + \text{const}. \quad (9)$$

Sedaj oklepaj  $\langle \rangle$  pomeni povprečje po enodelčni porazdelitvi, kakor je pojasnjeno na desni. Integracijo v (9) lahko opravimo v dveh stopnjah, s tem da vpeljemo specifično entropijo (entropijo, preračunano na delec), ki se izraža z lokalnim povprečjem:

$$S = \int n(\mathbf{r}) s(\mathbf{r}) d^3r, \quad s(\mathbf{r}) = -\frac{k}{n} \int f \ln f d^3v + \text{const}. \quad (10)$$

Za ilustracijo bomo novo definicijo uporabili za izračun entropije enoatomnega plina v ravnovesnem stanju, ki je zaprt v posodi brez zunanjega polja. Pri takem stanju je verjetnostna porazdelitev v faznem prostoru kanonična. V eksponentu v (5) naletimo na vsoto kinetičnih energij za posamezne delce, tako da izraz razpade v produkt eksponentnih funkcij. Uvidimo, da je tudi enodelčna porazdelitev kanonična, se pravi Maxwelllova (Gaussova v hitrostnem prostoru):

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (11)$$

Ko to vstavimo v Boltzmannovo formulo za entropijo (10), sledi iz termodinamike znani izraz (3). Pri tem upoštevamo ravnovesno povprečje  $\langle mv^2/2kT \rangle = \frac{3}{2}$  in ta prispevek damo pod konstanto. Plin je seveda homogen ( $f_0$  ni odvisen od  $\mathbf{r}$ ), ker drugače ne bi bil v ravnovesju. Zato smo rezultat delili z  $N$  in tako dobili specifično entropijo. Ujemanja smo veseli, ker utrjuje naše zaupanje v statistično mehaniko kot zvesto podobo termodinamike.

### 3. Primeri transportnih pojavov

Med najbolj pomembne in najbolj raziskane ireverzibilne pojave spadajo transportni pojavi, kot so prevajanje toplote, difuzija in notranje trenje tekočin, v katerem prepoznamo prenašanje gibalne količine. Pri vsakem



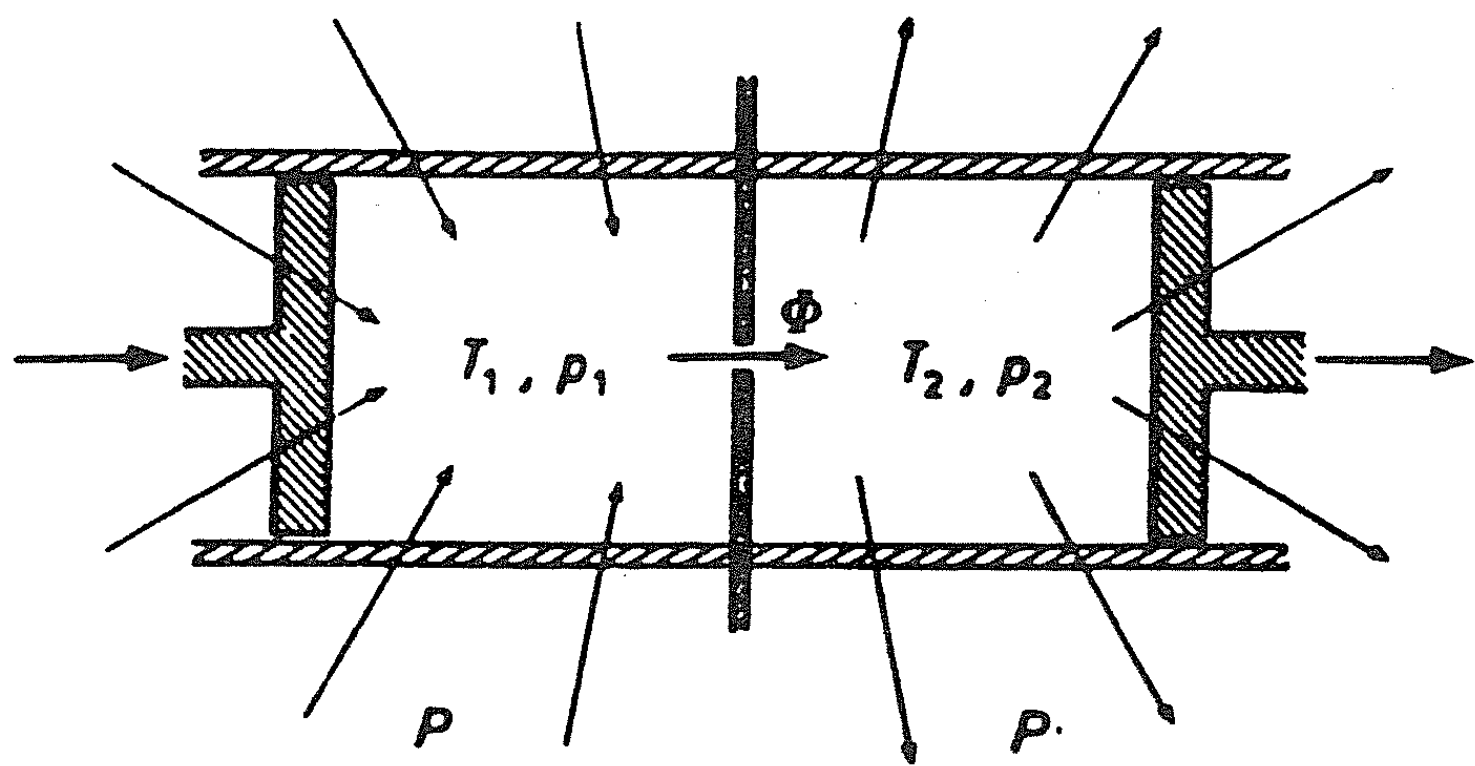
takem pojavu imamo opraviti z nekim tokom, ki ga poganja gradient neke količine. Če ta gradient ni prevelik, velja linearen zakon. Gradient temperature poganja toplotni tok in za njegovo gostoto precej natančno velja  $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ . Takih zakonov je še precej in so skupaj znani kot fenomenološki zakoni, koeficienti v njih pa kot transportni koeficienti.

V zmesi dveh snovi steče zaradi gradienta delne številske gostote difuzijski tok, pri čemer velja za gostoto delnega številskega toka difuzijski zakon. Če je snov št. 1 navzoča le v majhni koncentraciji, smemo zakon zapisati takole:  $\mathbf{j}_1 = -D \nabla n_1$ . V nehomogeni zmesi z neenakomerno temperaturo sodelujeta torej dva transportna pojava: prevajanje toplote in difuzija. Vendar nista edina, ker obstaja še dvojica tako imenovanih križnih transportnih pojavov. Do difuzijskega toka pride namreč tudi v enakomerni zmesi pod vplivom temperaturnega gradienta. Pojav je znan kot termodifuzija in ga opišemo s temle zakonom:  $\mathbf{j}_1 = -n D_T \nabla T / T$ . Obstaja pa še konjugirani Dufourjev pojav, pri katerem steče v zmesi toplotni tok kljub enakomerni temperaturi, namreč zaradi gradienta delne gostote. Več o tem povesta npr. de Groot in Mazur [2].

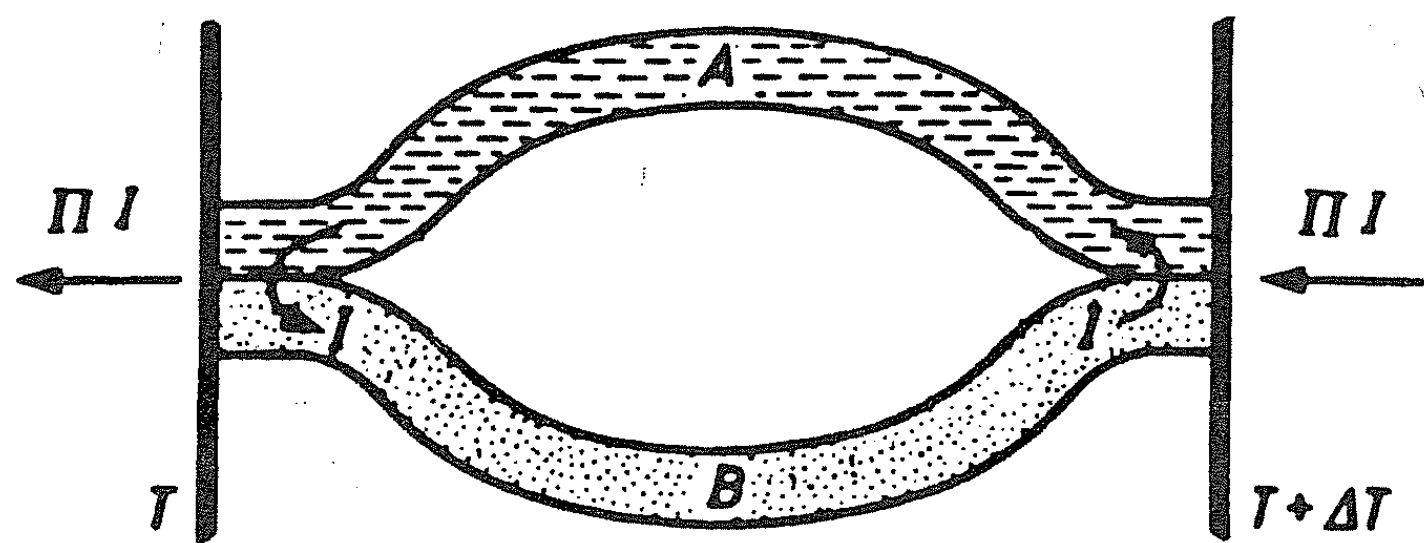
Zaradi križnih učinkov obstaja precej več transportnih pojavov, kot bi morda sprva pričakovali. Prepovedani so samo tisti, ki zaradi simetrijskih razlogov ne morejo obstajati. (Prepoved je znana kot Curiejevo načelo.) Za primer se spomnimo, da povzroči strižna hitrost v tekočini strižno napetost. Ker sta obe količini tenzorja drugega reda, ni zadržka. Razumljivo pa je, da strižna hitrost v prvotno izotropni tekočini ne more sprožiti sorazmernega toplotnega toka in tudi nobenega drugega vektorskega pojava. Po drugi strani so izkušnje pokazale, da velja v naravi nekakšno načelo največje demokracije. Vsi tisti transportni pojavi, ki niso izrecno prepovedani, zares obstajajo.

Transportni pojavi niso zanimivi samo v homogenih snoveh, ampak tudi v heterogenih sistemih, ki so sestavljeni iz kosov različnih snovi: iz palic, žic, posod, cevi in sten z luknjicami. Tu ne računamo z gostotami tokov in gradienti, ampak kar s tokovi in s končnimi razlikami termodinamičnih količin. Kot primer si oglejmo pretakanje razredčenega plina skozi luknjico v steni (sl. 1). Z dvojico batov in dvojico termostatov vzdržujemo na obeh straneh konstantna tlaka in konstantni temperaturi ter s tem tudi konstantni številski gostoti (saj je  $p = nkT$ ), recimo na levi  $p_1, T_1, n_1$  in na desni  $p_2, T_2, n_2$ . Majhna tlačna razlika povzroči sorazmeren tok plina,  $\Phi \propto \Delta p$ , majhna temperaturna razlika pa njej sorazmeren toplotni tok,  $P \propto \Delta T$ . Pridruži pa se še konjugirana dvojica križnih pojavov. Pri tako imenovanem termomehničnem pojavu se plin pretaka zaradi temperaturne razlike. Obratno tlačna razlika ne povzroči le toka snovi, ampak tudi toplotni tok. Ta učinek je znan kot mehanokalorični pojav.

Po električnem krogu, ki ga sestavimo iz dveh različnih kovin, steče električni tok, ko vključimo generator z neko gonilno napetostjo. (Generatorja ni na sliki 2.) Če na stičiščih vzdržujemo različni temperaturi, steče od to-



Slika 1. Termomehanski in mehanokalorični pojav pri pretakanju razredčenega plina skozi luknjico.



Slika 2. Shematičen prikaz termoelektričnega in Peltierovega pojava.

plejšega k hladnejšemu toplotni tok. Temperaturna razlika pa tudi sama sproži električni tok, kar poznamo kot termoelektrični pojav. Konjugirani pojav je Peltierov pojav, pri katerem električni tok povzroči, da eno stičišče sprejema in drugo oddaja toplotni tok, ki je sorazmeren z električnim. Joulov toplotni tok, ki je sorazmeren z  $I^2$ , pri majhnem  $I$  lahko zanemarimo.

#### 4. Lokalno termodinamično ravnovesje

Zamislimo si sedaj plin, ki ga le malo spravimo iz ravnovesnega stanja, in oglejmo si mikroskopski opis njegovega stanja. Najprej nam prihaja na misel, da bi vzeli lokalno Maxwellovo porazdelitev, ki jo bomo zaznamovali z  $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . To je ravno takšna porazdelitev, kot jo opisuje enačba (11), vendar z gostoto  $n(\mathbf{r})$  in temperaturo  $T(\mathbf{r})$ , ki sta lahko od kraja do kraja drugačni. (Morebitne časovne odvisnosti in makroskopskega gibanja v zapisu nismo upoštevali, da razprava ne bo predolga.)

Brž se prepričamo, da opisana porazdelitev ne ustreza nobenemu transportnemu pojavu. Hitrostna porazdelitev delcev je namreč še vedno na vsakem mestu izotropna, tako da gre v povprečju enak tok delcev ali energije ali česarkoli na desno in na levo. Plin s takšno porazdelitvijo v tistem hipu miruje in v njem tudi ni toplotnega toka.

Takšno stanje seveda ne traja dolgo. Zaradi preseljevanja delcev in zaradi medsebojnih trkov se njihova porazdelitev kmalu spremeni. Recimo, da v plinu vzdržujemo temperaturni gradient, ki je tako šibek, da so relativne temperaturne razlike na razdalji proste poti majhne v primeri z 1. V mislih, ali bolje s simulacijo na računalniku, na začetku vzpostavimo ustrezno lokalno Maxwellovo porazdelitev. Počakamo, dokler stanje ni stacionarno, potem si ogledamo spremenjeno porazdelitev. Najdemo

$$f = f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})[1 + \phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})], \quad (12)$$

pri čemer je  $\phi$  majhen popravek. Za takšno porazdelitev pravimo, da opisuje lokalno termodinamično ravnovesje plina. Popravek  $\phi$  nikakor ni poljuben, ampak je določen z vsiljenim temperaturnim poljem. Seveda izberemo vrednosti  $n(\mathbf{r})$  in  $T(\mathbf{r})$  tako, da se spričo popravka  $\phi$  ne spremenita.



Namesto celotne entropije plina kot v formuli (9) bomo sedaj računali specifično entropijo  $s(\mathbf{r})$ , s tem da bomo integrirali samo po hitrostnem prostoru. Potem ko logaritem oglatega oklepaja v (12) razvijemo do člena s  $\phi^2$ , dobimo iz (10) po kratkem računu naslednji rezultat:

$$s(\mathbf{r}) = -\frac{k}{n} \int f^{(0)} \ln f^{(0)} d^3v - \frac{1}{2n} \int f^{(0)} \phi^2 d^3v + \dots + \text{const.} \quad (13)$$

Ker kvadratni člen zanemarljivo malo prispeva, ga bomo (skupaj z višjimi, ki niso napisani) v nadaljnjem zavrgli. Dokaj natančno velja torej za specifično entropijo enak izraz kot v ravnovesju:

$$s(\mathbf{r}) = -\frac{k}{n} \int f^{(0)} \ln f^{(0)} d^3v. \quad (14)$$

Sklepamo, da smemo lokalno, to je za majhne kose snovi, računati vse termodinamične količine, kot da je snov v ravnovesju. Z imenom lokalno termodinamično ravnovesje za opisano stanje plina torej lahko soglašamo.

Pripomniti je treba, da je pojem lokalnega termodinamičnega ravnovesja za kondenzirane snovi bolj težaven kot za pline. Lahko je reči, da se termodinamične količine lokalno računajo enako kot za ravnovesje, teže pa je to utemeljiti z mikroskopsko podobo. Zubarev [3] sicer posveča temu vprašanju celo poglavje, ki pa ni posebno razumljivo. Dvomim, da sploh obstaja prijem, s katerim bi bili vsi zadovoljni.

Vendar v lokalnem termodinamičnem ravnovesju ni vse tako kot v pravem ravnovesju, ker se v snovi pojavi entropijski tok, ki ga prej ni bilo. Njegovo gostoto definiramo tako, da v integrand izraza (10) vrinemo še faktor  $n\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = -k \int \mathbf{v} f \ln f d^3v. \quad (15)$$

Ko zopet vstavimo izraz (12) in zanemarimo člene s  $\phi^2$  itd., dobimo

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = k \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \frac{mv^2}{2kT} d^3v = \frac{\mathbf{q}}{T}. \quad (16)$$

Z lokalnim povprečjem za tok kinetične energije, ki ustreza termičnemu gibanju molekul, smo dobili gostoto toplotnega toka. Ko tega delimo s temperaturo, pa sledi gostota entropijskega toka.

Pripomba: Ker plin miruje, je  $\int \mathbf{v} f d^3v = 0$ , tako da bi bilo vseeno, če bi pisali  $\mathbf{q} = \int \mathbf{v} f (\frac{1}{2}mv^2 - \text{const}) d^3v$ , s poljubno konstanto.

Gostota entropijskega toka ni po vsem plinu enaka. Če je stanje stacionarno, kot smo privzeli, pove divergenca tega toka, koliko entropije nastaja v prostorninski enoti, torej kolikšna je gostota entropijskega izvira:

$$\varsigma = \nabla \cdot \mathbf{j}_s. \quad (17)$$

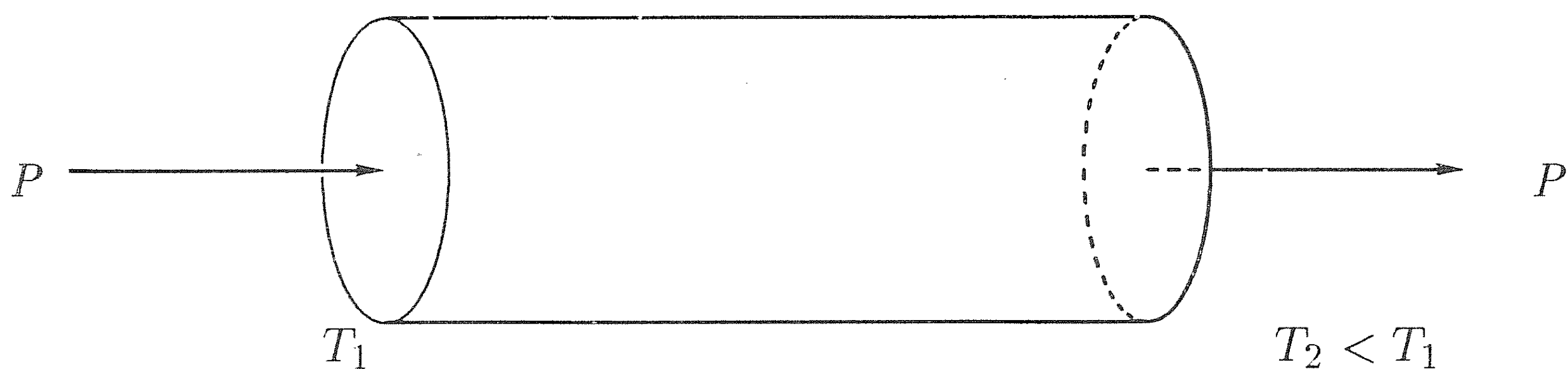
Za zgornji primer dobimo  $\varsigma = -\mathbf{q} \cdot \nabla T / T^2$ , ker je  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ . Ker ima toplotni tok nasprotno smer kot temperaturni gradient, je  $\varsigma > 0$ , kot to zahteva entropijski zakon. Kadar bomo potrebovali celotno izdatnost entropijskega izvira v obravnavanem sistemu, jo bomo zapisovali takole:

$$\Sigma = \int \varsigma(\mathbf{r}) d^3r. \quad (18)$$

## 5. Onsagerjev formalizem

Izdatnost ali gostota entropijskega izvira se daša pri posameznem transportnem pojavu izraziti kot produkt neke „termodinamične sile“ (npr. temperaturne razlike ali temperaturnega gradienta) in ustreznega toka ali gostote toka. Pri kombinaciji več takih pojavov potrebujemo vsoto več bilinearnih prispevkov. Onsager je pokazal, kako se dajo na osnovi takega zapisa fenomenološki zakoni pregledno predstaviti.

Za primer vzemimo kovinsko palico s presekom  $A$  in dolžino  $l$  in z malo različnima temperaturama  $T_1$  in  $T_2$  na koncih, po kateri teče toplotni tok  $P$  (sl. 3). Na levi torej vstopa v palico entropijski tok  $P/T_1$ , na desni pa izstopa večji entropijski tok  $P/T_2$ , ker je  $T_2 < T_1$ . Razlika pove, koliko entropije nastaja v palici zaradi ireverzibilnosti toplotnega prevajanja:  $\Sigma = P/T_2 - P/T_1 = -P \Delta T / T^2$ . Pri tem je  $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$  in  $T$  neka srednja temperatura.



Slika 3. Toplotni tok v palici

Če teče v palici še električni tok  $I$  pod vplivom napetosti  $U$ , se poraja tok  $-IU$  Joulove toplote, ki nemara bočno odteka. (Predznak izvira iz dogovorov.) Temu ustreza entropijski izvir z izdatnostjo  $\Sigma = -IU/T$ . Za primer, da sta prisotna oba tokova, pa imamo vsoto:

$$T\Sigma = -IU - P \frac{\Delta T}{T}. \quad (19)$$

Zaradi lepšega smo obe strani pomnožili s  $T$ , tako da imata dimenzijo moči.

Vsak izmed obeh tokov je v prvem približku linearno odvisen od obeh termodinamičnih sil. Odvisnost posreduje matrika  $\mathbf{L}$  koeficientov  $L_{ik}$ , tako



da lahko zapišemo:

$$I = -L_{11}U - L_{12}\frac{\Delta T}{T}, \quad (20)$$

$$P = -L_{21}U - L_{22}\frac{\Delta T}{T}. \quad (21)$$

Zato, da je vedno  $\Sigma > 0$ , mora biti matrika pozitivno definitna, se pravi da je  $T\Sigma = \mathbf{X} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{X} > 0$  za poljubno od nič različno dvojico termodinamičnih sil,  $\mathbf{X} = (U, \Delta T/T)$ . Druga imenitna lastnost matrike je, da je simetrična, torej  $L_{12} = L_{21}$ . Ta ugotovitev, ki je znana kot Onsagerjev zakon, sledi iz invariantnosti osnovnih zakonov proti obratu časa, kot bomo ob primeru videli pozneje.

Za homogeno palico je pripravno, da reduciramo tokove na enoto preseka in termodinamične sile na dolžinsko enoto, da dobimo gostoto entropijskega izvira  $\varsigma = \Sigma/Al$ , torej

$$T\varsigma = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T}. \quad (22)$$

Zadnji člen že poznamo, pomen prvega pa je tudi očiten; saj je to gostota Joulove moči. Enačbi (20, 21) zdaj nadomestimo z

$$\mathbf{j} = -l_{11}(-\mathbf{E}) - l_{12}\frac{\nabla T}{T}, \quad (23)$$

$$\mathbf{q} = -l_{21}(-\mathbf{E}) - l_{22}\frac{\nabla T}{T}. \quad (24)$$

Diagonalna koeficienta že poznamo; saj je  $l_{11} = 1/\zeta =$  recipročni specifični upor (prevodnost), in  $l_{22} = \lambda T$ , če merimo toplotno prevodnost ob odsotnosti električnega polja. Ustrezno se izražata  $L_{11}$  in  $L_{22}$  v (20, 21). Z izvendiagonalnima koeficientoma  $l_{12} = l_{21}$  ali  $L_{12} = L_{21}$  pa sta določena oba križna pojava, namreč termoelektrični in Peltierov pojav. Vidimo, da gre pri tem za termodifuzijo in za Dufourjev toplotni tok elektronov [4].

Ne enega ne drugega pojava v sklenjenem krogu iz ene same kovine ne moremo opaziti, pač pa sta vidna, če krog sestavimo iz dveh različnih kovin (sl. 2). Če je termodifuzijski pojav v obeh kovinah različno močan, dobimo v krogu gonilno napetost, ki je v prvi aproksimaciji sorazmerna s temperaturno razliko, recimo

$$U = -a \Delta T, \quad (25)$$

s termoelektričnim koeficientom  $a$ . Spet lahko zapišemo enačbi (20, 21), le da je sedaj  $L_{11}$  recipročni upor vsega kroga, medtem ko  $L_{22}$  upošteva toplotno prevajanje po obeh vejah. Za novi  $L_{12}$  pa ugotovimo, da je to

zdaj diferenca vrednosti  $L_{12}$  za obe kovini. Termoelektrično napetost lahko merimo tako, da jo kompenziramo z vključenim generatorjem (ki ga ni na sliki). Ko postavimo v prvo enačbo  $I = 0$ , se izkaže, da je  $a = L_{12}/L_{11}T$ .

Drugo zanimivo meritev opravimo tako, da ob enakomerni temperaturi z vključenim generatorjem poženemo električni tok in merimo toplotni tok, ki ga eno spojno mesto vsrkava in drugo oddaja. Z deljenjem obeh enačb pridemo do sorazmernosti, ki opisuje Peltierov pojav:

$$P = \Pi I, \quad (26)$$

pri čemer se Peltierov koeficient izraža takole:  $\Pi = L_{21}/L_{11}$ . Zaradi Onsagerjeve simetrije je

$$\Pi = aT. \quad (27)$$

Primer: Za kombinacijo baker-konstantan pri 300 K so izmerili  $a = 40 \mu\text{V/K}$  in  $\Pi = 12 \text{ mW/A}$ , kar se ujema z (27). Zanimivo je, da je to enačbo prvi izpeljal Kelvin, in sicer preprosto iz izkoristka idealnega toplotnega stroja. Dandanes mu oporekajo, ker termoelektrični in Peltierov pojav nista reverzibilna.

Pripomniti je treba, da zgornja analiza obeh pojavov ni popolna, ker ne upošteva potencialnega skoka na meji obeh kovin in njegove odvisnosti od temperature. Končni fenomenološki opis pa s tem ni prizadet.

## 6. Fluktuacije

Ko opazujemo makroskopsko telo v ravnovesnem stanju, se od daleč zdi, kot da vse miruje. Vemo pa, da so vsi delci telesa neprestano v termičnem gibanju. Zaradi njega nobena količina, ki pripada posameznemu delcu ali majhnemu številu delcev, ni konstantna, ampak je podvržena fluktuacijam. Tako nihanje, ki ga kaže vsaka taka količina, imenujemo kaotično (nenapovedljivo). Šele pri povprečjih za veliko število delcev so fluktuacije relativno tako šibke, da jih ne opazimo. Preden nadaljujemo razpravo o transportnih pojavih, si moramo ogledati, kaj se sploh da povedati o fluktuacijah.

Mislimo si, da bi pri loncu vode ugotavljali število molekul  $N$  v majhnem delu  $V$  njegove prostornine. V povprečju je seveda  $\langle N \rangle = nV$ , če je  $n$  povprečna številska gostota. V posameznem trenutku pa zaradi termičnega gibanja lahko pride do odmika  $\Delta N = N - \langle N \rangle$  na eno ali drugo stran. Odmiki močno nihajo navzgor in navzdol, tako da bomo lahko računali le s primernimi povprečji.

Povprečje odmikov seveda ni za rabo, ker je po definiciji enako nič. Lahko pa vprašamo za povprečni kvadratni odmik  $\langle (\Delta N)^2 \rangle$ , ki je pripravno merilo za jakost teh fluktuacij. Ta količina se da celo meriti, in sicer si pomagamo s sipanjem svetlobe. Zaradi opisanih fluktuacij je namreč tudi najčistejša tekočina motna.



Drug primer, ki je vreden omembe, so fluktuacije hitrosti, ki jo ima posamezen delec. Ker je vektorsko povprečje  $\langle \mathbf{v} \rangle$  v ravnovesju enako nič, vprašamo za  $\langle v^2 \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle$ . Znano je, da je to povprečje enako  $3kT/m$ .

Fluktuacije so kratkožive in neprenehoma nastajajo in zginevajo. Čeprav se njihovo posamično življenje ne da napovedati, lahko nekaj povemo o povprečni usodi fluktuacije. Molekula, ki ima na začetku hitrost  $\mathbf{v}(0)$ , ima čez čas v povprečju zmanjšano hitrost  $\langle \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbf{v}(0)}$ . (Zapisali smo pogojno povprečje.) Povprečje skalarnega produkta  $\langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle$  se torej zmanjšuje. To povprečje, ki je znano z imenom hitrostna avtokorelacijska funkcija, pove nekaj o povprečnem življenju hitrostnih fluktuacij. Po dolgem času se vpliv začetne hitrosti ne pozna več, tako da ima zapisani skalarni produkt z enako verjetnostjo pozitivne kot negativne vrednosti in je v povprečju enak nič. Zelo približno lahko računamo, da za ustavljanje delca v povprečju velja linearni zakon upora s konstantnim koeficientom  $\zeta$  (to je  $6\pi r_0 \eta$  za ne premajhne kroglice). Tako dobimo potek, ki je v povprečju eksponenten, in sicer sledi z znano začetno vrednostjo  $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$ , da je

$$\langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle \approx \frac{3kT}{m} \exp \left( -\frac{\zeta t}{m} \right). \quad (28)$$

Kot primer uporabe si oglejmo tokovni šum zaradi gibanja elektronov v palici iz polprevodnika, ki ima prostornino  $V = Al$ . V njem je prevodniških elektronov tako malo, da bomo njihov medsebojni vpliv lahko zanemarili in tudi računali z Maxwelllovo porazdelitvijo. Če bi imeli elektroni (z nabojem  $-e_0$ ) vsi enako komponento hitrosti v smeri osi, bi bil tok v palici enak  $I = -Ane_0v_x = -Ne_0v_x/l$ . V resnici hitrosti niso enake, tako da moramo vzeti povprečja. Povprečje toka je seveda nič, lahko pa pogledamo povprečje kvadrata. Ker se elektroni neodvisno gibljejo, se povprečni kvadrati hitrosti seštevajo, tako da je

$$\langle I^2 \rangle = N \left\langle \left( \frac{e_0 v_x}{l} \right)^2 \right\rangle = N \left( \frac{e_0}{l} \right)^2 \frac{kT}{m}. \quad (29)$$

Da bomo kaj zvedeli o avtokorelacijski funkciji za tok, moramo raziskati, kako se elektroni ustavljajo. Stacionarni električni tok z gostoto  $\mathbf{j}$  zahteva sorazmerno poljsko jakost  $\mathbf{E} = \zeta \mathbf{j}$ , kjer je  $\zeta$  specifični upor, torej napetost  $U = -RI$ . Pri takem polju se elektroni *v povprečju* nič ne pospešujejo. Če ni polja, pa se ustavljajo, in sicer v povprečju tako, *kot da bi bilo* prisotno obrnjeno polje z navedeno jakostjo, torej *kot da bi imel* konec žice proti njenemu začetku napetost  $U = R\langle I \rangle$ . Newtonov zakon zdaj pove, kako se elektroni ustavljajo *v povprečju*:

$$m \frac{d}{dt} \langle v_x(t) \rangle_{v_x(0)} = e_0 \frac{U(t)}{l} = e_0 \frac{R\langle I \rangle(t)}{l} = -NR \left( \frac{e_0}{l} \right)^2 \langle v_x(t) \rangle_{v_x(0)}. \quad (30)$$

Dobimo eksponentno rešitev, po množenju z  $v_x(0)$  in tvorjenju maxwellskega povprečja pa

$$\langle v_x(t) v_x(0) \rangle = \frac{kT}{m} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{ml^2}{NRe_0^2}. \quad (31)$$

Rezultat še pomnožimo z  $N(e_0/l)^2$ , da dobimo avtokorelacijsko funkcijo za tok,  $\langle I(t) I(0) \rangle$ . Zanimiv je njen integral

$$\int_0^\infty \langle I(t) I(0) \rangle dt = \frac{kT}{R}. \quad (32)$$

Po Wiener-Hinčinovem izreku [5] dobimo s Fourierovo transformacijo nazadnje navedene avtokorelacijske funkcije spektralno gostoto za moč šuma:

$$\frac{dP}{d\nu} = 4R \int_0^\infty \langle I(t) I(0) \rangle \cos \omega t dt, \quad \nu = |\omega|/2\pi. \quad (33)$$

Relaksacijski čas  $\tau$  je tako kratek, da je za frekvence, ki so zanimive za elektrotehniko, vedno  $\omega\tau \ll 1$ . S tem se rezultat močno poenostavi; saj iz (32) in (33) sledi tako imenovana Nyquistova formula

$$\frac{dP}{d\nu} = 4kT. \quad (34)$$

Konstantnost spektralne gostote pomeni, da imamo pred seboj beli šum – seveda znotraj navedenega spektralnega območja.

## 7. Difuzija na več načinov

V mirujoči razredčeni suspenziji samih enakih mikroskopsko majhnih kroglic v kapljevini se čez čas ustali sedimentacijsko ravnovesje, ki spominja na ravnovesje izotermnega ozračja,

$$n(z) \propto \exp \left( - \frac{m'gz}{kT} \right). \quad (35)$$

Teža kroglice je tu pomanjšana za vzgon, torej  $m'g = (\rho - \rho_0)Vg$ . Če ne bi bilo termičnega gibanja, bi se kroglice sesedale s hitrostjo  $v = m'g/\zeta$ , ki je določena s Stokesovim koeficientom  $\zeta = 6\pi r_0\eta$ . Tok zaradi sesedanja pa je uravnotežen z difuzijskim tokom, ki nastane zaradi termičnega gibanja:  $nm'g/\zeta = -D dn/dz$ . Iz primerjave z enačbo (35) dobimo Einsteinovo formulo:

$$D = \frac{kT}{\zeta}. \quad (36)$$



Isto formulo je Langevin izpeljal na malo bolj tvegan način, namreč z reševanjem stohastične diferencialne enačbe za gibanje posameznega delca [1].

Tretja pot je prek Green-Kubove formule, ki se opira na avtokorelacijsko funkcijo za hitrost. Začnimo s fundamentalno rešitvijo difuzijske enačbe

$$n(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right), \quad (37)$$

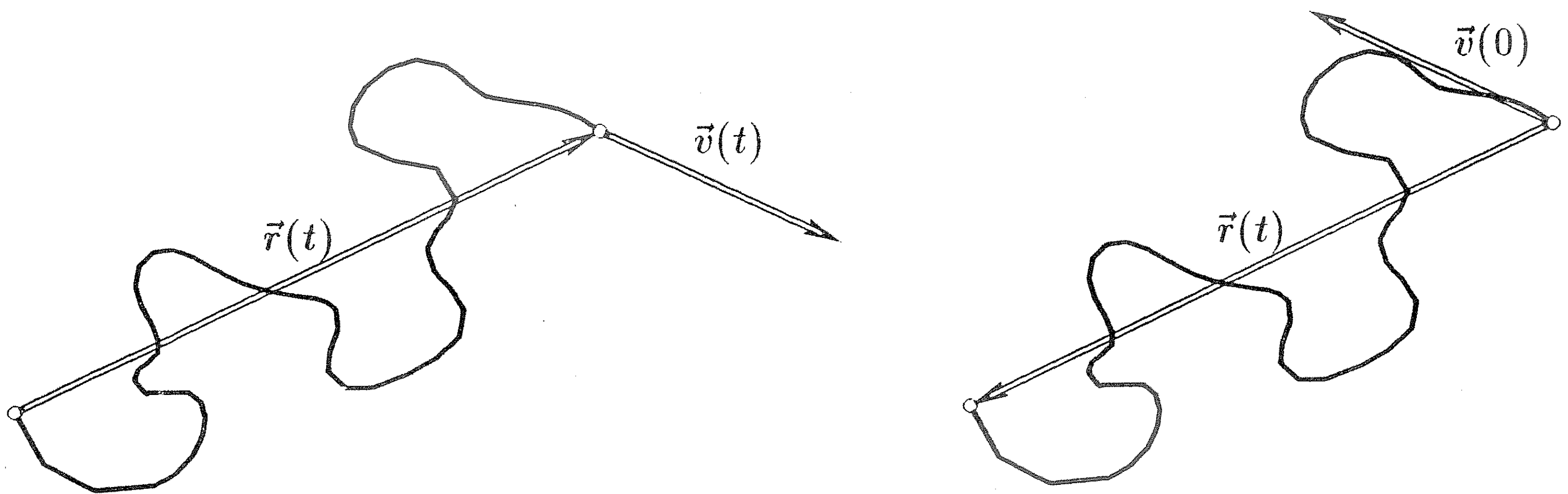
ki opisuje prostorsko porazdelitev delcev ob času  $t$ , če smo jih spustili iz izhodišča ob začetnem trenutku. Na difuzijsko enačbo in njeno rešitev se kajpak lahko zanesemo šele po dolgem času. Eksponent kaže, kolikšen je povprečni kvadratni odmik od izhodišča:

$$\langle r^2 \rangle = \langle \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 6Dt. \quad (38)$$

Z odvajanjem po času sledi  $\langle \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \rangle = 3D$ . Zdaj pa upoštevajmo, da so osnovni (mikroskopski) zakoni invariantni proti obratu časa. (Za izjemo pri kaonih se tu ni treba meniti.) To se pravi: k vsakemu svežnju možnih poti difundirajočega delca obstaja enako verjeten sveženj obrnjenih poti. Naredimo obrat na sliki 4! Namesto  $\mathbf{v}(t)$  imamo potem  $-\mathbf{v}(0)$ , namesto  $\mathbf{r}(t)$  pa  $-\mathbf{r}(t)$ . Ko ta vektor izrazimo z integralom hitrosti po času, dobimo Green-Kubovo formulo za difuzijski koeficient:

$$D = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle dt. \quad (39)$$

Zaradi lepšega smo namesto dovolj poznega časa  $t$  za zgornjo integracijsko mejo vstavili neskončno, kar je vseeno; saj po daljšem času avtokorelacijska funkcija zamre. Če verjamemo v eksponentno pojemanje avtokorelacijske funkcije po enačbi (28), dobimo iz Green-Kubove formule takoj Einsteinovo:  $D = kT/\zeta$ .

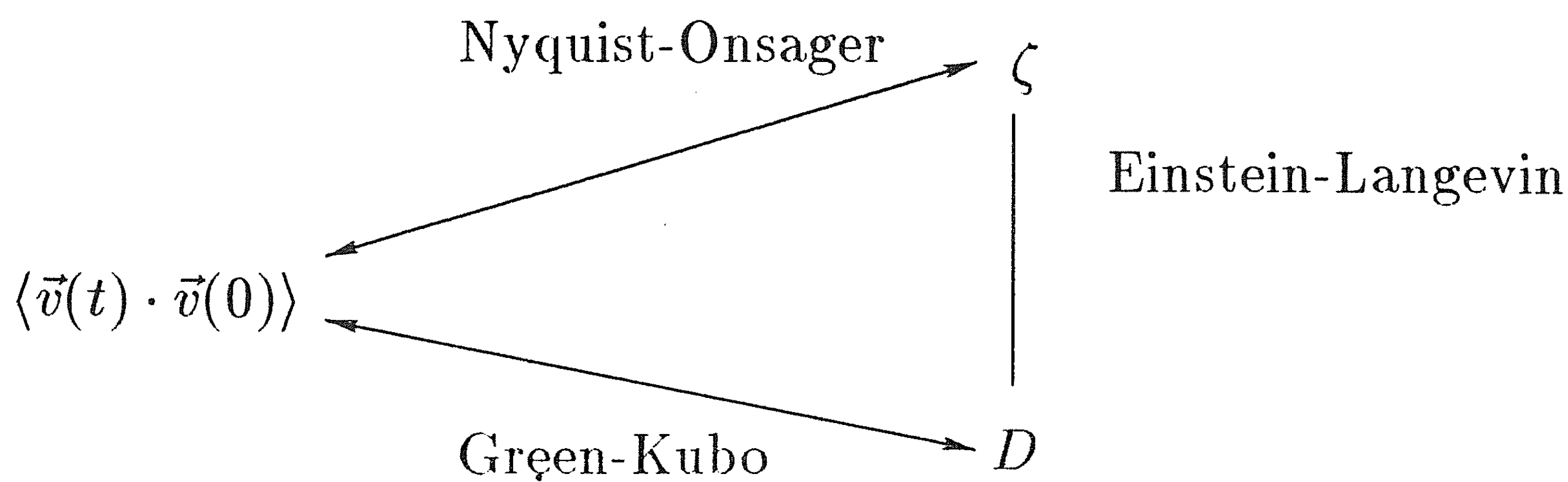


Slika 4. Obrat časa pri Brownovem gibanju.

Vse se zdi tako lepo, da lepše ne bi moglo biti. Ravno zadnji zaključek pa kaže, da se lahkovernost v teorijski fiziki lahko maščuje. Z numerično simulacijo so namreč odkrili, da pojecmanje avtokorelacijske funkcije niti po dolgem času ni eksponentno, ampak da ima „dolgi rep“ z obliko  $t^{-3/2}$ . Svoj čas je to med fiziki zbudilo veliko presenečenje. Po tistem pa so nekateri strokovnjaki za hidrodinamiko začeli govoriti, da so oni to že dolgo vedeli, vse od Stokesa.

Dolgi repi se dajo razumeti, če upoštevamo izrek o gibalni količini. Gibalna količina  $m\mathbf{v}(0)$ , ki jo ima delec na začetku, bi se morala porazdeliti po eksponentno napihujoči se kepi okolne kapljevine, če naj bi se hitrost delca eksponentno manjšala. Pričakujemo pa, da se porazdeli po kepi nekako z efektivnim radijem  $\sqrt{2(\eta/\rho)t}$ , kajti  $\eta/\rho$  je difuzijski koeficient, ki ustreza viskoznosti (pri inženirjih se ta kvocient imenuje „kinematična viskoznost“). Hitrost se zmanjšuje obratno sorazmerno z maso kepe, ki ima stopnjo velikosti  $\frac{4\pi}{3}\rho[2(\eta/\rho)t]^{3/2} \propto t^{3/2}$ .

Numerična simulacija je še pokazala, da se hitrostna avtokorelacijska funkcija pri difuziji molekule v kapljevini tudi v zgodnjem času znatno odmika od eksponentnega vedenja. Pojavijo se namreč nihanja zaradi elastičnosti, ki jih vsaka kapljevina kaže pri kratkotrajnih sunkih. Molekula se najprej zaleti v nekakšen zid okolnih kapljevinskih delcev, ki jo butnejo nazaj. Šele ko s termičnim gibanjem v zidu nastane vrzel, delec lahko smukne naprej.



**Slika 5.** Povezave difuzijskega koeficienta s koeficientom upora in s hitrostno avtokorelacijsko funkcijo.

Vse našteje povezave med difuzijskim koeficientom in drugimi količinami prikazuje shema na sliki 5. Tudi za druge transportne koeficiente najdemo podobne povezave. Literatura navaja zanje kot okvir tako imenovani fluktuacijsko disipacijski izrek (fluctuation-dissipation theorem), po katerem se vsak transportni koeficient izraža s časovnim integralom ustrezne korelacijske funkcije. „Ustrezna“ pomeni, da upoštevamo fluktuacije tiste količine, iz katere dobimo z makroskopskim povprečjem tok, za katerega



je odgovoren obravnavani transportni koeficient. Za zgoraj opisani posebni primer termičnega šuma v uporniku je izrek izpeljal že Nyquist (1928), glej enačbo (32), posplošila in poimenovala pa sta ga dosti pozneje Callen in Welton. Najbolj imenitna plat izreka je, da povezuje transportne koeficiente, ki so značilni za ireverzibilne pojave v snoveh, z avtokorelacijskimi funkcijami, kakršne veljajo za ravnovesno stanje. Potemtakem skriva termodinamično ravnovesje v sebi precej več, kot se zdi na prvi pogled.

Potem ko se je že vsem zdelo, da so Green-Kubove formule trdna osnova za statistično mehaniko transportnih pojavov, so se pojavili resni dvomi [6]. Formula se opira na domnevo, da smemo nelinearne učinke pri transportnem pojavu zanemariti. Z integracijo po neskončno dolgem času pa lahko iz spčetka nezaznavno majhnih popravkov nastane večja napaka.

## 8. Simetrija transportnih koeficientov

Da za transportne koeficiente velja Onsagerjeva simetrija, recimo  $l_{12} = l_{21}$  pri sistemu (23, 24), smo prej sprejeli brez utemeljitve, tako da še nismo končali. Splošna izpeljava je še najbolj čitljiva v Landauu [7], vendar se opira na eno ali dve malce drzni domnevi. Godi se nam podobno kot pri entropijskem zakonu, ki mu tudi vsi zaupamo, čeprav ga še nihče ni na neoporečen način izpeljal iz osnovnih zakonov. Da ne bomo zašli predaleč, se bomo zadovoljili z izpeljavo ob skrajno poenostavljenem zgledu, pri katerem ne bo težav.

Spet bomo vzeli elektronski plin v razsežnem polprevodniku, pri čemer bomo upoštevali vpliv kristalne mreže samo pri sipanju, drugače pa si ga bomo odmisli. Model bo torej hudo naiven. Porazdelitev elektronov naj bo zdaj nestacionarna toda homogena, recimo

$$f = f_0[1 + \phi(\mathbf{v}, t)]. \quad (40)$$

Primerno je, da funkcije, kakršna je  $\phi$ , obravnavamo v Hilbertovem prostoru z Maxwelllovo utežjo. Pri tem upoštevamo samo odvisnost od hitrosti, tako da je notranji produkt definiran takole:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{n} \int f_0 \psi^*(\mathbf{v}) \phi(\mathbf{v}) d^3v. \quad (41)$$

To je torej lokalno ravnovesno povprečje produkta  $\psi^* \phi$ . (Dopuščamo tudi kompleksne funkcije.)

S porazdelitveno funkcijo (40) lahko izrazimo gostoti električnega in elektronski delež toplotnega toka:

$$\mathbf{j} = -ne_0 \langle \mathbf{v} | \phi \rangle, \quad (42)$$

$$\mathbf{q} = n \langle \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right) | \phi \rangle. \quad (43)$$

V drugem izrazu smo upoštevali presežek kinetične energije (nad vrednostjo  $\frac{3}{2}kT$ ), ki jo nosi elektron, kajti samo ta presežek prispeva k toplotnemu toku. (Izbira te konstante zdaj ni poljubna.)

Če elektronov z ničimer ne motimo, se njihova porazdelitev zaradi trkov z atomi bliža ravnovesni. Kako se bliža, razberemo iz linearizirane Boltzmannove enačbe, ki jo bomo za opisani primer samo simbolično zapisali:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f_0 \mathcal{R} \frac{f}{f_0} = 0. \quad (44)$$

Pri tem je  $\mathcal{R}$  neki linearni operator, ki upošteva trke elektronov s kristalno mrežo in ki se izraža z integralom po hitrostnem prostoru. Nalašč smo ta člen zapisali v bolj zamotani obliki, ki bo v naslednjem koraku prišla prav. Ko vstavimo izraz (40), sledi lepša enačba:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{R} \phi = 0. \quad (45)$$

Motnja  $\phi(\mathbf{v}, 0)$ , ki jo na začetku kakor koli ustvarimo v elektronskem plinu, pojema, kot pove rešitev

$$\phi(\mathbf{v}, t) = e^{-\mathcal{R}t} \phi(\mathbf{v}, 0). \quad (46)$$

Operator  $\mathcal{R}$  je linearen zato, ker je polprevodnik v ravnovesju, ki ga morebitni šibki tokovi elektronov ne zmotijo zaznavno. Za naš namen ni treba, da bi o tem operatorju kaj dosti vedeli, pač pa velja omeniti dve njegovi splošni lastnosti. Iz invariantnosti osnovnih zakonov proti obratu časa sledi, da je vseeno, če hitrost pred trkom zamenjamo z obrnjeno hitrostjo po trku. Z upoštevanjem tega se da izpeljati, da je operator  $\mathcal{R}$  sebi adjungiran, tako da velja

$$\langle \psi | \mathcal{R} \phi \rangle = \langle \mathcal{R} \psi | \phi \rangle. \quad (47)$$

Druga splošna lastnost je, da velja enačba  $\mathcal{R}1 = 0$ , ki opisuje ohranitev elektronov. Enačba pove, da je nič lastna vrednost operatorja in da je ustrezna lastna funkcija konstanta.

Zdaj pa zmotimo elektrone s šibkim konstantnim električnim poljem in počakajmo do stacionarnega stanja. Polje elektrone pospešuje, in sicer bi se hitrost vsakega takole spreminjala, če ne bi bilo trkov:  $d\mathbf{v} = -(e_0\mathbf{E}/m) dt$ . V prvotno obliko Boltzmannove enačbe moramo namesto navadnega (lokalnega) časovnega odvoda vstaviti substancialni odvod v hitrostnem prostoru. Če ne bi bilo trkov, bi bil po Liouvilleovem izreku ta odvod enak nič; tako pa velja

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e_0\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + f_0 \mathcal{R} \phi = 0, \quad (48)$$



kjer smo gradient v hitrostnem prostoru zapisali kot odvod po vektorju  $\mathbf{v}$ . Vstavimo (40) in upoštevamo, da je stanje stacionarno, torej  $\partial\phi/\partial t = 0$ . Sledi:

$$\frac{e_0\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{m\mathbf{v}}{kT} + \mathcal{R}\phi = 0. \quad (49)$$

Opravičiti se moramo, ker smo pri gradientu v hitrostnem prostoru upoštevali samo ravnovesni faktor  $f_0$  v (40), ne pa tudi odmik  $\phi$ . To ni nič hudega, ker smo s tem samo izpustili člen  $(e_0\mathbf{E}/m) \cdot \partial\phi/\partial\mathbf{v}$ , ki je majhen druge stopnje.

Rešitev enačbe (49) bomo spet navedli v simbolični obliki:

$$\phi(\mathbf{v}) = -\frac{e_0\mathbf{E}}{kT} \cdot \mathcal{R}^{-1}\mathbf{v}. \quad (50)$$

Tu se moramo ustaviti, ker se operator  $\mathcal{R}$ , ki ima nič kot eno izmed lastnih vrednosti, ne da kar tako invertirati. To je dovoljeno šele, če izključimo lastno vrednost nič in ustrezne lastne rešitve, to je v našem primeru konstanto. V ta namen operator na novo definiramo v podprostoru prvotnega Hilbertovega prostora, ki je ortogonalen na konstanto. Funkcija  $\mathbf{v}$ , na katero deluje inverzni operator v izrazu (50), je s tega vidika vsekakor dovoljena, ker je  $\langle \mathbf{v} | \text{konst} \rangle = 0$ .

Iz dobljenega popravka (50) k porazdelitveni funkciji izračunamo po enačbah (42, 43) gostoti električnega in tudi elektronskega toplotnega toka:

$$\mathbf{j} = \frac{n}{kT} e_0^2 \mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{v} \otimes | \mathcal{R}^{-1} \mathbf{v} \rangle, \quad (51)$$

$$\mathbf{q} = -\frac{n}{kT} e_0 \mathbf{E} \cdot \left\langle \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right) \otimes | \mathcal{R}^{-1} \mathbf{v} \right\rangle, \quad (52)$$

kjer sta z  $\otimes$  zaznamovana tenzorska produkta vektorjev.

Za spremembo si zamislimo, da v polprevodniku ni polja, vzdržujemo pa majhen konstanten temperaturni gradient. Gostota elektronov naj ne bo odvisna od temperature. (Recimo, da praktično vsi prevodniški elektroni izvirajo od nečistoč in da so te praktično vse ionizirane.) Lokalno ravnovesna porazdelitev (12) se zdaj izraža takole:

$$f = f_0 \left[ 1 + \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{\nabla T}{T} \cdot \mathbf{r} + \phi(\mathbf{v}) \right]. \quad (53)$$

V drugem členu v oglatem oklepaju smo odmik  $\mathbf{r}$  od izhodišča pomnožili z logaritemskim gradientom lokalno maxwellske porazdelitvene funkcije, ki smo ga dobili z odvajanjem po temperaturi. Namesto (49) dobimo zdaj tole različico nehomogene Boltzmannove enačbe:  $\mathbf{v} \cdot \partial[\dots]/\partial\mathbf{r} + \mathcal{R}\phi = 0$ , torej

$$\left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla T}{T} + \mathcal{R}\phi = 0. \quad (54)$$

Rešimo jo natanko tako in z enakim opravičilom kot prej:

$$\phi = -\frac{\nabla T}{kT^2} \cdot \mathcal{R}^{-1} \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right). \quad (55)$$

Ko to vstavimo v formuli (42, 43), ugotovimo, kolikšni sta gostoti obeh tokov:

$$\mathbf{j} = \frac{ne_0}{kT} \frac{\nabla T}{T} \cdot \left\langle \mathbf{v} \otimes |\mathcal{R}^{-1} \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right)| \right\rangle, \quad (56)$$

$$\mathbf{q} = -\frac{n}{kT} \frac{\nabla T}{T} \cdot \left\langle \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right) \otimes |\mathcal{R}^{-1} \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right)| \right\rangle, \quad (57)$$

Iz primerjave z enačbama (23, 24) sledijo vrednosti transportnih koeficientov,

$$l_{ik} = \frac{n}{kT} \frac{1}{3} \langle \Psi_i \cdot |\mathcal{R}^{-1} \Psi_k \rangle, \quad (58)$$

kjer smo vpeljali kratici

$$\Psi_1 = -e_0 \mathbf{v}, \quad \Psi_2 = \mathbf{v} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{3kT}{2} \right). \quad (59)$$

Vidimo, da res velja  $l_{12} = l_{21}$ , ker je operator  $\mathcal{R}^{-1}$  sebi adjungiran. Vzeli smo, da je tenzor  $\langle \Psi_i \otimes |\mathcal{R}^{-1} \Psi_k \rangle$  izotropen, torej enakovreden skalarju  $\frac{1}{3} \langle \Psi_i \cdot |\mathcal{R}^{-1} \Psi_k \rangle$ . (Izotropija tenzorja je očitna, če je operator  $\mathcal{R}$  rotacijsko invarianten, kot je to pri sipanju v plinu. Kubična kristalna mreža pa je tudi ne pokvari.)

Razprava nima splošne veljave, ker smo obravnavali majhen podsistem (prevodniške elektrone) v kontaktu z velikim sistemom (s kristalno mrežo), ki ga nismo zaznavno spravili iz ravnovesnega stanja. Zgled torej ni posebno prepričljiv, vendarle pa pokaže, za kaj pri Onsagerjevi simetriji sploh gre.

## LITERATURA

- [1] I. Kuščer in S. Žumer, *Toplota*, Društvo matematikov in fizikov, Ljubljana, 1987.
- [2] S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [3] D. N. Zubarev, *Neravnovesna statističska termodinamika* Nauka, Moskva, 1971; prevod *Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*, Plenum, New York, 1974.
- [4] N. D. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [5] I. Kuščer in A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, Društvo matematikov in fizikov, Ljubljana, 1994, § 11.10.
- [6] N. G. van Kampen, Phys. Norv. **5** (1971) 279; P. Gosar, Physica **A92** (1978) 233.
- [7] L. D. Landau in E. M. Lifšic, *Statističska fizika, čast 1*, Teoretičska fizika, tom 5, Nauka, Moskva, 1976, § 120.



# DELNO UREJENI ŠTEVILSKI KOLOBARJI\*

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 06F25, 13J25

V članku obravnavamo delno urejene podkolobarje obsega realnih števil. Poiščemo vse urejenosti na kolobarju  $\mathbb{Z}$ , s katerimi le-ta postane delno urejen kolobar, in ugotovimo, da le standardna urejenost kolobarja  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Q}$  uredi v mrežno urejena kolobarja. Dokažemo, da se urejenost  $\leq$  mrežno urejenega kolobarja  $\mathbb{R}$  ujema s standardno urejenostjo natanko takrat, kadar ima vsako navzgor omejeno zaporedje v njem najmanjšo zgornjo mejo in velja  $1 \geq 0$ .

## PARTIALLY ORDERED RINGS OF REAL NUMBERS

In this note we consider partially ordered subrings of the real number field. We find all partial orders of the ring  $\mathbb{Z}$  which turn this ring into a partially ordered ring, and show that the rings  $\mathbb{Z}$  and  $\mathbb{Q}$  are lattice-ordered rings only if they are naturally ordered. We prove that a lattice ordered ring  $\mathbb{R}$  is naturally ordered if and only if its unit 1 is positive and every upper bounded sequence of  $\mathbb{R}$  possesses the least upper bound.

### 1. Delno urejeni kolobarji

Najprej osvežimo nekaj pojmov iz splošne teorije urejenosti in opredelimo pojem delno urejenega kolobarja.

Naj bo  $M$  dana neprazna množica. Binarna relacija  $\leq$  (manjši ali enak) na  $M$  je *relacija delne urejenosti*, kadar je *refleksivna* ( $a \leq a$  za vsak  $a \in M$ ), *antisimetrična* (iz  $(a \leq b$  in  $b \leq a)$  sledi  $a = b$ ) in *tranzitivna* (iz  $(a \leq b$  in  $b \leq c)$  sledi  $a \leq c$ ). Kadar je na  $M$  dana relacija delne urejenosti  $\leq$ , imenujemo par  $(M, \leq)$  *delno urejena množica*.

Če velja  $a \leq b$  in  $a \neq b$ , pišemo  $a < b$ , zapis  $a \geq b$  pomeni  $b \leq a$ ,  $a > b$  pa  $b < a$ . Elementa  $a, b \in M$  sta primerljiva, kadar velja bodisi  $a \leq b$  bodisi  $b \leq a$ . Naj bo  $(M, \leq)$  delno urejena množica. Če sta poljubna elementa množice  $M$  primerljiva, je  $(M, \leq)$  *linearno urejena množica*, če pa za vsak par  $a, b \in M$  obstajata v  $M$  elementa

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\},$$

imenujemo par  $(M, \leq)$  *mreža*. Vsaka neprazna končna podmnožica mreže ima najmanjšo zgornjo mejo in največjo spodnjo mejo, vsaka linearno urejena množica pa je mreža za isto relacijo urejenosti.

**Definicija 1.** *Delno urejen kolobar* je kolobar  $K$  z dano relacijo delne urejenosti  $\leq$  na  $K$ , če je ta relacija usklajena s seštevanjem in množenjem kolobarja  $K$  z naslednjima zahtevama:

$$a, b \in K, a \leq b \implies a + c \leq b + c \text{ za vsak } c \in K \quad (1)$$

$$a, b \in K, a \leq b \implies (ac \leq bc \text{ in } ca \leq cb) \text{ za vsak } c \geq 0, c \in K. \quad (2)$$

---

\* Članek je nekoliko razširjena verzija predavanja na permanentnem izobraževanju učiteljev matematike 25. marca 1994.

Naj bo  $K$  delno urejen kolobar. Množico  $P = \{a \in K : a \geq 0\}$  imenujemo *pozitivni stožec* delno urejenega kolobarja  $K$ , njene elemente *pozitivni elementi*, elemente iz  $-P$  pa *negativni elementi*. Iz zahteve (1) sledi, da za poljubna elementa  $a, b \in K$  velja ekvivalenca  $a \leq b \iff b - a \in P$ . Poleg tega nam (1) skupaj s tranzitivnostjo relacije  $\leq$  pove, da je pozitivni stožec  $P$  zaprt za seštevanje, s pomočjo pogoja (2) pa vidimo, da je  $P$  zaprt za množenje. Z uporabo antisimetričnosti in refleksivnosti relacije  $\leq$  ter zahteve (1) lahko brž dokažemo enakost  $P \cap (-P) = \{0\}$ . Navedene lastnosti pozitivnega stožca  $P$  nam pomagajo opisati vse (s seštevanjem in množenjem usklajene) relacije delne urejenosti na danem kolobarju.

**Izrek 1.** *Naj bo  $P$  podmnožica kolobarja  $K$ . Potem lahko  $K$  delno uredimo tako, da postane  $K$  delno urejen kolobar s pozitivnim stožcem  $P$  natanko takrat, kadar  $P$  zadošča naslednjim pogojem:*

$$P \cap (-P) = \{0\}, \quad P + P \subseteq P, \quad PP \subseteq P. \quad (3)$$

*Pri tem je delna urejenost enolično določena s  $P$ .*

*Dokaz.* Tik pred tem izrekom smo ugotovili, da pozitiven stožec  $P$  delno urejenega kolobarja ustreza pogojem (3).

Za dokaz nasprotne smeri ekvivalence privzemimo, da  $P$  zadošča pogojem (3). Če naj bo  $K$  delno urejen kolobar s pozitivnim stožcem  $P$ , je relacija  $\leq$  določena z zahtevo  $a \leq b \iff b - a \in P$ . Dokažimo, da je  $K$  s takó določeno relacijo  $\leq$  res delno urejen kolobar. Ker za vsak  $a \in K$  velja  $a - a = 0 \in P$ , je relacija  $\leq$  refleksivna. Denimo, da za  $a, b \in K$  velja  $a \leq b$  in  $b \leq a$ . Potem je  $b - a \in P \cap (-P) = \{0\}$ , torej  $a = b$ . Relacija  $\leq$  je antisimetrična. Dokažimo, da je tudi tranzitivna. Če velja  $a \leq b$  in  $b \leq c$ , je

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in P + P \subseteq P,$$

torej  $a \leq c$ . Relacija  $\leq$  je očitno usklajena s seštevanjem, zato se moramo prepričati le še o njeni usklajenosti z množenjem. Naj bo  $a \leq b$  in  $c \in P$ . Potem je

$$bc - ac = (b - a)c \in PP \subseteq P, \quad cb - ca = c(b - a) \in PP \subseteq P,$$

od tod pa že sledi (2). ■

Če podmnožica  $P$  kolobarja  $K$  ustreza pogojem (3), ji rečemo *stožec kolobarja  $K$* . Po izreku 1 obstaja bijektivna korespondenca med družino vseh stožcev kolobarja  $K$  in družino vseh delnih urejenosti na  $K$ , ki so usklajene s seštevanjem in z množenjem kolobarja  $K$ . Družini nista prazni, saj je  $P = \{0\}$  stožec, ki določa tako imenovano *trivialno* urejenost  $a \leq b \iff a = b$ .

**Definicija 2.** Naj bo kolobar  $K$  z relacijo  $\leq$  delno urejen kolobar. Če je  $(K, \leq)$  mreža, je  $K$  *mrežno urejen kolobar*, če pa je  $(K, \leq)$  linearno urejena množica, imenujemo  $K$  *linearno urejen kolobar*.



Vsak linearno urejen kolobar je mrežno urejen. Ni težko videti, da stožec  $P$  kolobarja  $K$  določa na njem linearno urejenost natanko takrat, kadar ustreza pogoju  $P \cup (-P) = K$ . Kolobar  $K$  je *urejen kolobar* v smislu definicije iz [3] natanko takrat, kadar je linearno urejen in nima pravih deliteljev nič. Dokažimo, da je kvadrat vsakega elementa linearno urejenega kolobarja  $K$  pozitiven. Res, za poljuben  $a \in K$  velja bodisi  $a \geq 0$  bodisi  $-a \geq 0$ , torej zaradi  $PP \subseteq P$  v obeh primerih dobimo  $a^2 \geq 0$ . Videli bomo, da v mrežno urejenem kolobarju kvadrat elementa ni nujno pozitiven.

Naštejmo nekaj pomembnih delno urejenih kolobarjev.

1. Poljuben podkolobar  $K$  obsega  $\mathbb{R}$ , urejen s standardno urejenostjo, je primer linearno urejenega kolobarja. Praviloma bomo pozitiven stožec takšnega kolobarja označili s  $K^+$  in ga imenovali standarden pozitivni stožec.

2. Kolobar  $\mathbb{R}^{n,n}$  realnih kvadratnih matrik reda  $n$ , urejen s stožcem

$$P = \{[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n} : a_{ij} \in \mathbb{R}^+ \text{ za poljubna } i, j\},$$

je mrežno urejen kolobar. Vzemimo  $n = 2$ , izračunajmo

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\| < \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

in že vidimo, da v kolobarju  $\mathbb{R}^{2,2}$  obstajajo neničelni negativni kvadrati.

3. Kolobar  $\mathcal{F}(X)$  vseh realnih funkcij na neprazni množici  $X$  (operaciji seštevanja in množenja sta definirana po točkah) postane s stožcem

$$P = \{f \in \mathcal{F}(X) : f(x) \geq 0 \text{ za vsak } x \in X\}$$

mrežno urejen kolobar. Če  $X$  vsebuje vsaj dve točki, kolobar  $\mathcal{F}(X)$  ni linearno urejen, vendar je kljub temu kvadrat vsakega njegovega elementa pozitiven.

4. Naj bo  $\mathbb{R}[X]$  kolobar polinomov z realnimi koeficienti, njegova podmnožica  $P$  pa naj vsebuje polinom 0 in vse neničelne polinome, ki imajo strogo pozitiven vodilni koeficient. Potem je  $P$  stožec kolobarja  $\mathbb{R}[X]$  in na njem določa linearno urejenost, ki jo imenujemo leksikografska urejenost kolobarja  $\mathbb{R}[X]$ .

Oglejmo si zdaj nekaj preprostih lastnosti mrežno urejenih kolobarjev.

**Izrek 2.** *Naj bo  $K$  mrežno urejen kolobar. Potem za vsako končno podmnožico  $M \subseteq K$ , poljubna elementa  $a, b \in K$  in vsak  $n \in \mathbb{N}$  veljata enakosti*

$$a + \inf M = \inf(a + M), \quad (4)$$

$$n(a \wedge b) = \inf\{ka + (n - k)b : k \in \{0, 1, \dots, n\}\}. \quad (5)$$

Podobni enakosti veljata za supremum.

*Dokaz.* Ker je  $a + \inf M$  spodnja meja množice  $a + M$ , velja  $a + \inf M \leq \inf(a + M)$ . Podobno ugotovimo, da je  $-a + \inf(a + M) \leq \inf M$ , torej velja tudi  $\inf(a + M) \leq a + \inf M$  in s tem (4).

Obrazec (5) očitno velja za  $n = 1$ . Nadaljujmo dokaz z indukcijskim korakom. Naj torej (5) velja za dano število  $n \in \mathbb{N}$ . Potem je

$$\begin{aligned} (n+1)(a \wedge b) &= a \wedge b + \inf_{0 \leq k \leq n} (ka + (n-k)b) = \\ &= \inf_{0 \leq k \leq n} (a \wedge b + ka + (n-k)b) = \\ &= \inf_{0 \leq k \leq n} (((k+1)a + (n-k)b) \wedge (ka + (n+1-k)b)), \end{aligned}$$

pri čemer zadnja dva enačaja dobimo s pomočjo (4). Ker je zadnji dobljeni izraz enak

$$\inf \{ka + (n+1-k)b : k \in \{0, 1, \dots, n+1\}\},$$

je indukcijski korak končan, dokaz izreka pa s tem sklenjen. ■

**Izrek 3.** *Mreža  $(K, \leq)$  mrežno urejenega kolobarja je distributivna.*

*Dokaz.* Zadošča videti, da za poljubne elemente  $a, b, c \in K$  velja

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$

saj od tod sledi tudi dualni distributivnostni zakon.

Naj bo  $x \in K$  poljubna spodnja meja množice  $\{a \vee c, b \vee c\}$ . Če uporabimo enakost, dualno (4) in oceni  $c - a \leq c - a \wedge b$  ter  $c - b \leq c - a \wedge b$ , dobimo

$$\begin{aligned} x &\leq a \vee c = a + 0 \vee (c - a) \leq a + 0 \vee (c - a \wedge b), \\ x &\leq b \vee c = b + 0 \vee (c - b) \leq b + 0 \vee (c - a \wedge b). \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je  $x - 0 \vee (c - a \wedge b)$  spodnja meja množice  $\{a, b\}$ , in zato

$$x \leq a \wedge b + 0 \vee (c - a \wedge b) = (a \wedge b) \vee c.$$

Ker je  $(a \wedge b) \vee c$  spodnja meja množice  $\{a \vee c, b \vee c\}$ , velja iskana enakost  $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ . ■

**Definicija 3.** Stožec  $P$  kolobarja  $K$  je *izoliran*, kadar velja sklep

$$a \in K \setminus P \implies na \in K \setminus P \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Če je torej kak naravni večkratnik elementa iz delno urejenega kolobarja z izoliranim pozitivnim stožcem pozitiven, je tudi element sam pozitiven.



**Izrek 4.** *Pozitivni stožec mrežno urejenega kolobarja je izoliran.*

*Dokaz.* Naj bo  $K$  mrežno urejen kolobar,  $a \in K$  in  $na \geq 0$  za kakšno naravno število  $n > 1$ . Vstavimo v (5)  $b = 0$  in upoštevajmo, da je  $(na) \wedge 0 = 0$ , pa dobimo

$$n(a \wedge 0) = \inf\{ka : 0 \leq k \leq n\} = \inf\{ka : 0 \leq k \leq n-1\} = (n-1)(a \wedge 0).$$

Od tod sledi  $a \wedge 0 = 0$ , torej  $a \geq 0$ . ■

Naj bo  $P$  izoliran stožec kolobarja  $K$  in naj za  $a \in K$  ter  $n \in \mathbb{N}$  velja  $na = 0$ . Potem je  $na \in P$  in  $n(-a) \in P$ , zato  $a \in P \cap (-P) = \{0\}$ . Torej v kolobarju z izoliranim stožcem noben element, različen od 0, nima končnega reda. Od tod po izreku 4 sledi, da kolobar, ki ima kak neničeln element končnega reda (na primer vsak netrivialen končen kolobar), z nobeno urejenostjo ne more postati mrežno urejen kolobar.

## 2. Številski kolobarji

Pri obravnavi delno urejenega številskega kolobarja  $K \subseteq \mathbb{R}$  bomo relacijo standardne urejenosti zaznamovali z znakom  $\leq$  (oziroma  $<$ ), delno urejenost, ki jo določa splošen stožec  $P$  kolobarja  $K$ , pa z znakom  $\preceq$  (oziroma  $\prec$ ). Simbol  $K^+$  bomo uporabljali za standarden pozitivni stožec, torej  $K^+ = \{a \in K : a \geq 0\}$ .

Za natančnejši opis družine vseh stožcev kolobarja  $\mathbb{Z}$  bomo potrebovali naslednja dva pomožna rezultata.

**Lema 1.** *Naj bosta  $a, b$  tuji naravni števili in  $M \in \mathbb{Z}$ . Potem za vsako naravno število  $n > ab + M(a + b)$  obstajata taki celi števili  $p$  in  $q$ , večji od  $M$ , da velja  $n = pa + qb$ .*

*Dokaz.* Vzemimo poljubno naravno število  $n > ab + M(a + b)$ . Vse rešitve  $(x, y)$  diofantske enačbe  $ax + by = n$  dobimo z obrazcem

$$x = x_0 + bm, \quad y = y_0 - am, \quad m \in \mathbb{Z},$$

kjer je  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ena od rešitev te enačbe (glej na primer [1, Izrek I, str. 38]). Izberimo  $m_0 \in \mathbb{Z}$  takó, da za  $p = x_0 + bm_0$  velja  $M < p \leq M + b$ , in postavimo  $q = y_0 - am_0$ . Potem je

$$bq = n - ap > ab + M(a + b) - a(M + b) = Mb,$$

torej  $q > M$ . ■

**Lema 2.** *Naj bodo  $a_1, \dots, a_n$  tuja naravna števila. Potem obstaja tak  $N \in \mathbb{N}$ , da poljubno celo število  $n > N$  lahko zapišemo v obliki*

$$n = \sum_{i=1}^k m_i a_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{za vsak } i.$$

*Dokaz.* Lema 1 nam pove, da pri  $k = 2$  lahko vzamemo  $N = a_1 a_2$ . Nadaljujmo dokaz z indukcijskim korakom od  $k-1$  do  $k$ . Vzemimo poljuben  $k > 2$  in tuja naravna števila  $a_1, \dots, a_k$  ter predpostavimo, da lema velja za  $k-1$ .

Zaznamujmo z  $a$  največjo skupno mero števil  $a_1, \dots, a_{k-1}$ . Potem so števila  $b_i = a_i/a$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  tuja. Po predpostavki obstaja tak  $M \in \mathbb{N}$ , da lahko poljubno celo število  $p > M$  zapišemo v obliki

$$p = \sum_{i=1}^{k-1} m_i b_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{za vsak } i. \quad (6)$$

Postavimo  $N = aa_k + M(a + a_k)$  in vzemimo poljubno naravno število  $n > N$ . Ker sta števili  $a$  in  $a_k$  tuji, po lemi 1 obstajata taki celi števili  $p > M$ ,  $q > M$ , da je  $n = pa + qa_k$ . Uporabimo (6), in že dobimo iskani zapis

$$n = \left( \sum_{i=1}^{k-1} m_i b_i \right) a + qa_k = \sum_{i=1}^k m_i a_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{za vsak } i,$$

kjer smo vzeli  $m_k = q$ . ■

**Izrek 5.** Za podmnožico  $P$  kolobarja  $\mathbb{Z}$  so ekvivalentne naslednje izjave:

- (a)  $P$  je stožec kolobarja  $\mathbb{Z}$ .
- (b)  $P$  je aditivna polgrupa v  $\mathbb{Z}^+$ , ki vsebuje 0.
- (c) Obstajajo taka števila  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^+$ , da je

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i a_i : m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{za vsak } i \right\}.$$

*Dokaz.* (a)  $\implies$  (b). Stožec  $P$  je zaprt za seštevanje, zato je aditivna polgrupa v  $\mathbb{Z}$ . Ker velja  $0 \in P$ , moramo dokazati le še veljavnost inkluzije  $P \subseteq \mathbb{Z}^+$ .

Če  $P \neq \{0\}$ , obstaja neničeln  $a \in P$ . Seveda je potem  $n = a^2 \in P \cap \mathbb{N}$ . Denimo, da  $P$  vsebuje element  $m \in (-\mathbb{N})$ . Potem

$$mn \in PP \subseteq P \quad \text{in} \quad (-m)n \in \mathbb{N}P \subseteq P,$$

torej  $mn \in P \cap (-P) = \{0\}$ . Ker to ne more biti res, je  $P \subseteq \mathbb{Z}^+$ , torej velja (b).

(b)  $\implies$  (c). Če je  $P = \{0\}$ , izjavo (c) izpolnjujeta  $k = 1$  in  $a_1 = 0$ , zato privzemimo, da  $P$  vsebuje tudi naravna števila. Naj bo

$$P = \{a_i : i \in \mathbb{Z}^+, 0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots\}$$



in  $d_i$  največja skupna mera števil  $a_1, \dots, a_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ . Potem velja  $d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq \dots$ , zato obstaja  $d = \min\{d_i : i > 1\} \in \mathbb{N}$ .

Privzemimo najprej, da je  $d = 1$ , in poiščimo indeks  $j$ , pri katerem je  $d_j = 1$ . Potem so števila  $a_1, \dots, a_j$  tuja, zato po lemi 2 obstaja tak  $N > a_j$ , da vsako celo število  $n > N$  pripada polgrupi  $P$ . Naj bo  $k$  indeks, za katerega velja  $a_k \leq N < a_{k+1}$ . Potem lahko vsak element iz  $P$  zapišemo v obliki vsote  $\sum_{i=1}^k m_i a_i$ , kjer je  $m_i \in \mathbb{Z}^+$  za vsak  $i$ , torej v tem primeru velja (c).

Če pa je  $d > 1$ , enakost  $P = dP'$  določa aditivno polgrupo  $P' \subseteq \mathbb{Z}^+$ , za katero po prejšnjem velja izjava (c) (s  $P'$  namesto  $P$ ). Od tod takoj sledi, da (c) velja tudi za  $P$ .

(c)  $\implies$  (a). Množica  $P$  očitno ustreza pogoju  $P \cap (-P) = \{0\}$  in je zaprta za seštevanje. Brez težav se lahko prepričamo, da je zaprta tudi za množenje, torej velja (a). ■

**Izrek 6.** *Stožca  $\{0\}$  in  $\mathbb{Z}^+$  sta edina izolirana stožca kolobarja  $\mathbb{Z}$ . Kolobar  $\mathbb{Z}$  lahko uredimo v mrežno urejen kolobar edino s standardno urejenostjo.*

*Dokaz.* Stožca  $\{0\}$  in  $\mathbb{Z}^+$  sta očitno oba izolirana. Naj bo  $P$  netrivialen izoliran stožec kolobarja  $\mathbb{Z}$ . Po izreku 5 je  $P$  vsebovan v  $\mathbb{Z}^+$ . Ker je v  $P$  vsaj eno naravno število, je zaradi izoliranosti  $1 \in P$ , potem pa je nujno  $P = \mathbb{Z}^+$ .

Ker je pozitiven stožec mrežno urejenega kolobarja po izreku 4 izoliran, se ujema z  $\mathbb{Z}^+$ . ■

Za hip se pomudimo pri družini stožcev kolobarja  $\mathbb{Q}$ . Zlahka dokažemo, da je  $P$  stožec kolobarja  $\mathbb{Q}$  natanko takrat, kadar je  $P$  aditivna in multiplikativna polgrupa v  $\mathbb{Q}^+$ , ki vsebuje 0. Stožec kolobarja  $\mathbb{Q}$  ni nujno končno generiran, z izoliranimi stožci pa je tako kot v kolobarju  $\mathbb{Z}$ . Ker je dokaz naslednjega rezultata podoben dokazu izreka 6, ga prepustimo bralcu.

**Izrek 7.** *Stožca  $\{0\}$  in  $\mathbb{Q}^+$  sta edina izolirana stožca kolobarja  $\mathbb{Q}$ . Kolobar  $\mathbb{Q}$  lahko uredimo v mrežno urejen kolobar edino s standardno urejenostjo.*

Oglejmo si še družino stožcev kolobarja  $\mathbb{R}$ . Tudi v tem primeru je stožec aditivna in multiplikativna polgrupa, vendar ni nujno vsebovana v  $\mathbb{R}^+$ . Ni se težko prepričati, da je množica

$$P = \{r - s\sqrt{2} : r, s \in \mathbb{Q}^+\}$$

stožec kolobarja  $\mathbb{R}$ , ki je celó izoliran, a kljub temu ni vsebovan v  $\mathbb{R}^+$ . Stožca  $\{0\}$  in  $\mathbb{R}^+$  torej nista edina izolirana stožca kolobarja  $\mathbb{R}$ . Kako pa je s stožci, ki mrežno urejajo  $\mathbb{R}$ ? Leta 1956 sta ameriška matematika G. Birkhoff in R. Pierce v članku [1] med nerešene probleme uvrstila naslednjega: Je mogoče  $\mathbb{R}$  urediti v mrežno urejen kolobar s kakšno urejenostjo, različno od

standardne? Problem je rešil njun sodržavljan R. Wilson čez osemnajst let. V članku [5] je objavil naslednji rezultat.

**Izrek 8.** [Wilson] *V kolobarju  $\mathbb{R}$  obstaja  $2^{\aleph}$  stožcev, ki mrežno urejajo  $\mathbb{R}$ , pri čemer je  $\aleph$  kardinalnost množice  $\mathbb{R}$ .*

Dokaz iz [5] je dolg le dobre tri strani, vendar prezahteven za Obzornik.

Poostriamo pogoje za urejenost na  $\mathbb{R}$  in predpostavimo, da stožec  $P$  linearno ureja  $\mathbb{R}$ . Potem za vsak  $a \in \mathbb{R}$  velja  $a^2 \in \mathbb{R}^+$ , torej  $P$  vsebuje  $\mathbb{R}^+$ . Ker poleg tega velja  $P \cap (-P) = \{0\}$ , je  $P = \mathbb{R}^+$  edini stožec, ki linearno ureja  $\mathbb{R}$ . Sklenimo prispevek s sorodnim, a precej manj očitnim rezultatom.

**Izrek 9.** *Naj bo  $\mathbb{R}$  mrežno urejen kolobar, v katerem ima vsako navzgor omejeno zaporedje najmanjšo zgornjo mejo in velja  $1 \succeq 0$ . Potem se urejenost kolobarja  $\mathbb{R}$  ujema s standardno.*

*Dokaz.* Zaznamujmo s  $P$  pozitiven stožec kolobarja  $\mathbb{R}$ . Ker je  $1 \in P$ , velja  $\mathbb{Z}^+ \subseteq P$ , od tod pa zaradi izoliranosti  $P$  sledi  $\frac{m}{n} \in P$  za vsak par  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Stožec  $P$  torej vsebuje  $\mathbb{Q}^+$  in zato na  $\mathbb{Q}$  inducira standardno urejenost:  $r \preceq s \iff r \leq s \ \forall r, s \in \mathbb{Q}$ . Za vsak  $a \in \mathbb{R}$  postavimo

$$S_a = \mathbb{Q} \cap (-\infty, a), \quad Z_a = \mathbb{Q} \cap (a, +\infty).$$

Ker za vsak par  $x \in S_a$ ,  $y \in Z_a$  velja  $x \prec y$ , obstajata v  $\mathbb{R}$   $u = \sup S_a$  in  $v = \inf Z_a$ . Očitno je  $w = v - u \succeq 0$ . Ker za vsak par  $x \in S_a$ ,  $y \in Z_a$  velja  $w \preceq y - x$ , je  $w \preceq \frac{1}{n}$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Zaporedje  $(nw)_{n=1}^{\infty}$  je torej navzgor omejeno z 1, zato obstaja  $z = \sup\{nw : n \in \mathbb{N}\}$ . Ker za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $z - w \succeq (n+1)w - w = nw$ , je  $z - w \succeq z$  in tedaj  $w \preceq 0$ , torej  $w = 0$  in  $u = v$ . Opredelimo preslikavo  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$\phi(a) = \sup S_a = \inf Z_a$$

in dokažimo najprej, da je  $\phi$  aditivna.

Vzemimo poljubni realni števili  $a$  in  $b$ . Za vsak  $r \in S_a$  in vsak  $s \in S_b$  je  $r + s \in S_{a+b}$  in tedaj  $r + s \preceq \phi(a + b)$ . Od tod sledi neenakost  $\phi(a) + \phi(b) \preceq \phi(a + b)$ . Podobno s pomočjo množic  $Z_a$ ,  $Z_b$  in  $Z_{a+b}$  ugotovimo, da je  $\phi(a + b) \preceq \phi(a) + \phi(b)$ .

Dokažimo, da je preslikava  $\phi$  tudi multiplikativna. Ker je vsaka aditivna preslikava liha, je dovolj videti, da enakost  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  velja za poljubni števili  $a > 0$  in  $b > 0$ . Za racionalna števila  $r_1, r_2, s_1, s_2$ , ki ustrezajo pogojem  $0 < r_1 < a < s_1$ ,  $0 < r_2 < b < s_2$ , je  $0 \prec r_1 \prec a \prec s_1$ ,  $0 \prec r_2 \prec b \prec s_2$  in zato  $r_1 r_2 \prec ab \prec s_1 s_2$ . Od tod sledi, da za poljubni racionalni števili  $r$  in  $s$ , ki ustrezata pogoju  $0 < r < ab < s$ , velja  $r \prec \phi(a)\phi(b) \prec s$ . Zato je

$$\phi(ab) = \sup S_{ab} \preceq \phi(a)\phi(b) \preceq \inf Z_{ab} = \phi(ab),$$

torej  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .



Preslikava  $\phi$  je netrivialni endomorfizem obsega  $\mathbb{R}$ , zato je identični avtomorfizem (glej na primer [4, III.5]). Od tod takoj sledi, da se mrežna urejenost  $\preceq$  ujema s standardno urejenostjo  $\leq$ . ■

## LITERATURA

- [1] G. Birkhoff, R. S. Pierce, *Lattice-ordered Rings*, Anais Acad. Brasil. Ci. **28** (1956), 41–69.
- [2] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1984.
- [3] B. Lavrič, *Arhimedsko urejeni kolobarji*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 73–78.
- [4] I. Vidav, *Algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1989.
- [5] R. R. Wilson, *Lattice orderings on the real field*, Pacific. J. Math. **63** (1976), 571–577.

## NOVE KNJIGE

---

**BARRY S.**, *The Statistical Mechanics of Lattice Gasses, Volume 1*, Princeton University press, Princeton, New Jersey, 1993, 522 str.

V statistični fiziki številne sisteme opišemo z modeli mrežnega plina, to je plina, v katerem atomi lahko zasedajo le diskretne točke na mreži. Najbolj znan primer mrežnega plina je verjetno Isingov model s spinom  $s = \frac{1}{2}$ , kjer spin  $s = +\frac{1}{2}$  predstavlja zasedeno, spin  $s = -\frac{1}{2}$  pa prazno mesto na mreži. Isingov model se med drugim uporablja za opis magnetnih sistemov in binarnih zlitin.

Knjiga v petih poglavjih podaja matematične metode v statistični mehaniki mrežnih plinov. V prvem poglavju uvede mrežni plin, v drugem opiše nekatere metode reševanja, kot sta, na primer, znamenita Onsagerjeva rešitev Isingovega modela za spin  $s = \frac{1}{2}$  v dveh dimenzijah z metodo prenosnih matric in teorija povprečnega polja. Avtor nato posebej obravnava lastnosti klasičnih in kvantnih mrežnih plinov. Knjigo sklene s poglavjem o lastnostih mrežnega plina pri visokih temperaturah in majhnih gostotah.

Knjiga bo dobrodošla tistim, ki se ukvarjajo s problemi statistične mehanike, pa tudi vsem, ki se ukvarjajo s sorodnimi problemi, kot sta na primer kvantna teorija polja in verjetnostna teorija.

*Igor Vilfan*

**SINAI, Ya. G.**, *Topics in Ergodic Theory* (Teme iz ergodične teorije), Princeton Mathematical Series 44, Princeton, 1994, 218 str.

Delo je v nekem smislu nadaljevanje knjige *Introduction to Ergodic Theory* istega avtorja, ki je izšla v Princetonu leta 1977. V petih poglavjih je nanizanih 18 „predavanj“. Prvo poglavje predstavi splošno teorijo ergodičnosti. Obravnava tudi dinamične sisteme s točkastim spektrom. V drugem poglavju srečamo teorijo entropije dinamičnih sistemov v smislu

Kolmogorova. Kot poseben primer obravnava celični avtomat z dvodimenzionalnim časom. Tretje poglavje je posvečeno enodimenzionalni dinamiki. Tu srečamo znane in popularne primere: verižne ulomke, difeomorfizme krožnice, izrek Šarkovskega. V četrtem poglavju je nekaj primerov iz dvodimenzionalne dinamike. Model Frænkel-Kontorove pripelje do standardne Čirikov-Taylorjeve preslikave. Opisane so hiperbolične periodične točke, njihove mnogoterosti stabilnosti in nestabilnosti ter v tej zvezi homoklinični in heteroklinični tiri. Kolmogorov-Arnold-Moserjev izrek za dvodimenzionalne preslikave je omenjen le mimogrede. Peto poglavje govori o hiperboličnih dinamičnih sistemih. Omenja najrazličnejše primere od Lorenzovega sistema do biljardov. Poglavje in knjiga se zaključita z markovskimi particijami, simbolično dinamiko in formalizmom termodinamike.

V celoti gledano je knjiga zbirka predavanj na isto temo, kar pove že naslov. V resnici od bralca pričakuje, da že pozna obravnavano snov in daje morda le drugačen pogled na posamezna vprašanja. Zato je seveda ne bi mogli uporabiti kot učbenik. Prijetno jo je prebrati, če smo že seznanjeni s problematiko in poznamo rezultate teorije. Dokazov je malo, dostikrat so le nakazani. Vsako predavanje ima krajši seznam literature.

*Peter Petek*

## VESTI

---

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije,  
Komisija za pedagoško dejavnost, objavlja

### RAZPIS UČITELJEM

V skladu s pravili o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi lahko sprejme priznanje član DMFA Slovenije, ki

- s svojim delom izboljša pouk matematike, fizike, astronomije ali računalništva v osnovni ali srednji šoli,
- razširja zanimanje za svoj predmet med učenci, jih uspešno uči, vodi in usmerja njihovo delo v krožkih, tako da dosegajo vidne uspehe v šoli in na tekmovanjih,
- sodeluje s članki, učbeniki in drugimi učnimi in strokovnimi knjigami predvsem pri društvenih publikacijah in s tem izdatno prispeva k popularizaciji svojega predmeta ali k izboljšanju poučevanja.

Podružnice DMFA Slovenije, aktive matematikov in fizikov na šolah in posamezne člane društva prosimo, da pošljejo **do 1. oktobra 1994** pisne predloge z osebnimi podatki kandidatov in podrobnimi utemeljitvami njihovega dela Komisiji za pedagoško dejavnost DMFA Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64.

*Ivana Mulec*



# SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1993\*

## Pedagoška fakulteta – Maribor

### 2. stopnja

#### Matematika-fizika

- |                        |                                                                                                            |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5. Banko Aljaž         | Nelinearni dinamični sistemi – osciliranje kemijske reakcije                                               |
| 6. Kletnik Gorazd      | Delovanje in uporaba preizkuševalnika motorjev ter analizatorja izpušnih plinov                            |
| 7. Kos Alenka          | Primerjava in analiza opremljenosti OŠ za tehnično vzgojo s poudarkom na novostih s področja računalništva |
| 8. Kozel Danica        | Stabilizirani usmernik                                                                                     |
| 9. Muršec Silvo        | Vloga in pomen praktičnega pouka                                                                           |
| 10. Bauman Ivan        | Proučevanje dinamike duskomponentnega metaboličnega sistema z računalniško simulacijo                      |
| 11. Bohak Farič Romana | Bilinearne in kvadratne forme                                                                              |
| 12. Grandošek Tanja    | Pascalov trikotnik                                                                                         |
| 13. Jakob Matilda      | Projektivne stožnice                                                                                       |
| 14. Kampuš Irena       | Holografija                                                                                                |
| 15. Kelhar Mihelca     | Numerično reševanje problemov prenosa toplote                                                              |
| 16. Mesarec Miran      | Interakcija dipol-dipol                                                                                    |
| 17. Pivko Irena        | Odvajenje Liejevih algeber                                                                                 |
| 18. Preglav Andreja    | Funkcionalne enačbe                                                                                        |
| 19. Puconja Karmen     | Uporaba analitičnih funkcij v hidrodinamiki                                                                |
| 20. Smolak Renata      | Mrežne popačitve v izločevalno utrjeni superzlitini C 283                                                  |
| 21. Štrekelj Andreja   | Polinomi                                                                                                   |

## Pedagoška fakulteta — Ljubljana

### 2. stopnja

#### Fizika-tehnika

- |                |                                                  |
|----------------|--------------------------------------------------|
| 2. Trček Meta  | Elektronika od fizike k tehniki                  |
| 3. Fajfar Erna | Merjenje hitrosti zraka pri toku skozi vročo cev |

#### Fizika-kemija

- |                              |                                                                                                          |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. Pogačnik Andreja          | Elementi v molekularni optiki                                                                            |
| 3. Globočnik Zdenka          | Sinteza in karakterizacija kovinskih kompleksov z norfloksacinom – prikaz kristalov z modeli za OŠ in SŠ |
| 4. Kolman Grdadolnik Andreja | Analiza testov iz kemije za osnovno šolo                                                                 |

#### Matematika-fizika

- |                      |                                                                                            |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Žerovnik Irma     | Boltzmannova porazdelitev – poskus z računalnikom                                          |
| 2. Tomažin Janita    | Načelo nedoločenosti – valovni paket                                                       |
| 3. Hodnik Tatjana    | Umbralni račun in Hermitovi polinomi                                                       |
| 4. Pečjak Tomaž      | Bernoullijeva števila in Bernoullijevi polinomi                                            |
| 5. Ravnikar Nataša   | Generiranje fraktalov s tenzorskim produktom                                               |
| 6. Vuger Mirjana     | Rutherfordovo sipanje                                                                      |
| 7. Žnidar Metka      | Preizkus znanja matematike v 6., 7. in 8. razredu OŠ, ter analiza znanja ter napak učencev |
| 8. Mutić Snežana     | Frobeniusove grupe                                                                         |
| 9. Manfreda Vida     | Permutacijske grupe praštevilske stopnje – Burnsideov izrek                                |
| 10. Mustar Magdalena | Poskusi s ploskvami v topologiji                                                           |

\* Seznam diplomantov iz leta 1992 je bil objavljen v Obzorniku Mat. fiz. 40 (1993) 3.

- |                       |                                                                           |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 11. Ledinšek Biserka  | Geometrijski liki v osnovnošolski matematiki in v 1. letniku srednje šole |
| 12. Ozebek Renata     | Kvazinilpotentna ekvivalenca operatorjev                                  |
| 13. Resnik Natalija   | O praštevilih                                                             |
| 14. Bučinel Darja     | Topološka in fraktalna dimenzija                                          |
| 15. Herodež Marjeta   | Dokaz Jordan-Schönfliesovega izreka s pomočjo teorije grafov              |
| 16. Možina Tamara     | Električno polje okrog ravnih vodnikov                                    |
| 17. Rokavc Anastazija | Kapaciteta rotacijskega elipsoida                                         |
| 18. Zorn Tanja        | O Pitagorovem izreku v elementarni matematiki                             |
| 19. Tratnik Uroš      | $1/2$ tranzitivni grafi, katerih red je produkt dveh različnih praštevil  |
| 20. Drofenik Marko    | Konstrukcija $1/2$ tranzitivnih grafov                                    |
| 21. Grčman Eva        | Izrek Šarkovskega                                                         |
| 22. Bregar Mojca      | Izrek Šarkovskega                                                         |

#### Matematika-tehnika

- |                  |                                                 |
|------------------|-------------------------------------------------|
| 1. Oblak Barbara | Iteracijski funkcijski sistem in kodiranje slik |
|------------------|-------------------------------------------------|

#### Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

##### 1. stopnja

##### Matematika s fiziko — pedagoška smer

143. Blaško Mihael

##### Matematika — uporabna smer

- |                           |                      |                         |
|---------------------------|----------------------|-------------------------|
| 248. Krušič Janez         | 249. Križman Andreja | 250. Bogdanović Nevenka |
| 251. Kern Bernarda        | 252. Smrdelj Robert  | 253. Klemenčič Janez    |
| 254. Pokorn Andreja       | 255. Skok Božo       | 256. Milinović Cvetka   |
| 257. Antić Aleksander     | 258. Čas Branko      | 259. Čotar Alojz        |
| 260. Mizori Zupan Tatjana | 261. Bavčar Miran    |                         |

##### 2. stopnja

##### Matematika — pedagoška smer

- |                              |                                                       |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 467. Randl Irena             | Klasifikacija lokalno evklidskih ravninskih geometrij |
| 468. Jeverica Vesna          | Realna števila in formalno realna polja               |
| 469. Turk Mateja             | Elementarni pristop k linearnemu programiranju        |
| 470. Drobnič Andreja         | Lokalizacija lastnih vrednosti                        |
| 471. Rauter Irena            | Problem enoličnosti za trigonometrične vrste          |
| 472. Rev Joško               | Konveksne množice v spojni geometriji                 |
| 473. Razbornik Antonija      | Rotacijska in ortogonalna grupa                       |
| 474. Pustavrh Simona         | Grupe zrcaljenj v $\mathbb{R}^n$                      |
| 475. Ropret Soklič Apolonija | Aksiomska izgradnja geometrije                        |
| 476. Žurej Peter             | Kristalografske grupe                                 |
| 477. Razpotnik Irja          | Razredi kvazianalitičnih funkcij                      |

##### Matematika — uporabna smer

- |                       |                                                                       |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 441. Rupnik Darja     | Integralske enačbe z neomejenim jedrom                                |
| 442. Horvat Lilijana  | Osnove teorije prostorov Soboljeva                                    |
| 443. Zmazek Blaž      | Polinomski algoritmi za računanje lastnih vrednosti matrik            |
| 444. Gregori Ivko     | Objekti                                                               |
| 445. Absec Aleš       | Razvrščanje z navideznimi stroji in prednostno relacijo               |
| 446. Prevorčič Simona | Operatorsko monotone funkcije                                         |
| 447. Cokan Tomaž      | Numerično reševanje krožnih in Toeplitzovih sistemov linearnih enačic |
| 448. Drobnič Nataša   | Problem najzgodnejšega prihoda v prometnem omrežju                    |
| 449. Dolenšek Marko   | Numerično reševanje Riccatijeve enačbe s pomočjo Kleinmanove metode   |



450. Fabčič Jože Paralelno reševanje osnovnih nalog numerične linearne algebre
451. Zaveršnik Matjaž Gaussov eliminacijski algoritem na transputerskem sistemu
452. Plestenjak Bor Optimalni cirkulantski operatorji
453. Novak Tatjana Konstrukcija Gaussovih kvadrature formel
454. Jarc Igor Sistemi parcialnih diferencialnih enačb
- Matematika — teoretična smer**
30. Vidic Darinka Cliffordove algebre in vektorska polja na sferah
31. Drinovec Barbara Razširitve Jordanovih baz
32. Cimprič Jakob Simultana diagonalizabilnost matrik
33. Jerman Marjan Polarni razcep grup
34. Košir Andrej Markovske verige in genetski algoritmi
35. Đukanović Igor Skrčljive dekompozicije
- Fizika — pedagoška smer**
132. Golež Tine Struna in glasba
133. Oseničič Burja Ivanka Merjenje toplotne prevodnosti
134. Vrankar Lojze Hitrostna porazdelitev elektronov pri termični emisiji
- Fizika — tehnična smer**
567. Casar Božidar Napetostni signali na anodnih žicah v večžični proporcionalni komori
568. Kraševac Viktor Resonančno ramansko sipanje na polianilinih
569. Česen Primož Reaktivno naprševanje Cr-N tankih plasti
570. Dovč Marijan Model optičnega vzbujanja termoelastičnih valov
571. Lipoglavšek Matej Določanje globinske porazdelitve radioaktivnosti z meritvami in-situ spektrov gama
572. Redžić Dženana Laserski merilec hitrosti
573. Mikac Mojca Urška Jedrska kvadrupolna resonanca  $^{75}\text{As}$  v paraelektričnem  $\text{Ag}_3\text{AsS}_3$  v šibkem magnetnem polju
574. Leskovar Matjaž Modelska analiza termohidravličnih dogajanj v jedrski elektrarni v stanju hladne zaustavitve
575. Stanič Samo Meritev inkluzivnega spektra  $\text{Ks}^0$  pri razpadih resonance  $Z^0$  s spektrometrom DELPHI
576. Širca Simon Vpliv kromomagnetne interakcije na statične lastnosti nukleona
577. Škrk Damjan Umeritev aparature za merjenje kvantnega izkoristka fotokatod s sevalcem  $^{90}\text{Sr}$
578. Poberaj Gorazd Fototermalno inducirane spremembe v karbokupratih
579. Đukić Rasto Ramansko sipanje na tekočih kristalih
580. Peruš Mitja Raziskave asociativnih nevronske mreže s fizikalnega vidika
581. Škarja Metod Računalniško vodeno ogrevanje stanovanja
582. Feldin Aljoša Vpliv termoforeze in Brownove koagulacije delov  $\text{SiO}_2$  v toku nosilnega plina pri proizvodnji optičnih vlaken
583. Kobe Andrej Izdelava sunkovnega laserja Nd: YAG z notranjim podvojevanjem
584. Tepej Lucija Ocena pridelkov pozitronskih sevalcev z linearnim pospeševalnikom elektronov
585. Prevec Primož Laser Er: YAG
586. Knez Friderik Optimizacija prosojnih toplotnih izolacij za slovenske razmere
587. Petek Marko Optični merilnik raztezov
588. Povše Tatjana Fazni diagram feroelektričnega tekočega kristala v omejeni geometriji
589. Omahen Gregor Katode s tanko plastjo CsJ v večžični proporcionalni komori
590. Eržen Borut Meritev hadronskih razpadov mezonov B s spektrometrom DELPHI

591. Cindro Michel Meritev parametrov svetlobno občutljive katode v plinski večjični proporcionalni komori
592. Lamovec Andrej Določitev preseka za reakcijo  $\gamma\gamma \rightarrow \eta\Pi^0$
- Meteorološka smer
593. Uršič Marko Merilni sistem za merjenje fluktuacij vetra
594. Žagar Mark Dinamična analiza dogajanj ob meji različnih zračnih mas
595. Gaberšek Saša Analiza pogostnosti različnih vremenskih tipov v Sloveniji z vidika klimatskih nihanj

### 3. stopnja

#### Matematika — izobraževalna smer

5. Marek Crnjac Leila Fraktali
6. Strnad Milena Kaos kot iteracija kvadratne funkcije v realnem in kompleksnem

#### Matematika — raziskovalna smer

60. Kovič Jurij Vektorski prostori matrik z omejenim rangom
61. Juvan Martin Kombinatorne lastnosti razporeditev
62. Drnovšek Roman Invariantne zaloge vrednosti
63. Zgrablić Boris Končno neprimitivne enostavne grupe stopnje produkta treh različnih praštevil in njihovi grafi
64. Mrčun Janez Grothendieck Topologies (Grothendieckovi toposi)

#### Mehanika — interdisciplinarna smer

5. Rihtaršič Borut Vrtinec v sesalni cevi Francisovih turbin

#### Fizika — pedagoška smer

14. Logar Marjan Supraprevodnost – možnosti za obravnavo pri pouku fizike

#### Fizika — tehnična smer

129. Mertelj Tomaž Korelacije med kritično temperaturo, frekvencami vibracij „kisikovih“ fononov in medatomske razdalje v superprevodniku  $\text{Ca}_{1-Y}\text{Y}_Y\text{Sr}_2$  ( $\text{Tl}_{0.5}\text{Pb}_{0.5}$ ) $\text{Cu}_2\text{O}_7$  kot funkcija dopiranja
130. Ambrožič Miran Anharmonska mrežna nihanja v  $\text{La}_{2-X}\text{Sr}_X\text{CuO}_4$
131. Štuhec Matjaž Dvojne fotoekscitacije KL v argonu
132. Janžekovič Helena Meritev ionizacijskih presekov lupine K v težkih atomih z nizkoenergijskimi protoni
133. Kokol Miran Modeliranje naravnih pojavov s samoorganizacijsko regresijsko nevronske mreže
134. Korpar Samo Krajevno občutljiva detekcija UV fotonov z večjično proporcionalno komoro
135. Prosen Tomaž Statistične lastnosti matričnih elementov v hamiltonskih sistemih med integrabilnostjo in kaosom
136. Apih Tomaž Študij faznih prehodov v  $\text{RbSCN}$ ,  $\text{KSCN}$  in  $\text{NH}_4\text{SCN}$  s kvadrupolno moteno jedrsko magnetno resonanco
137. Žitnik Matjaž Sklopitev med kanali na območju oblikovne resonance d pri aritmetičnih (e, 2e) eksperimentih na Kr in Xe

#### Fizika — jedrska tehnika

138. Železnik Nadja Razvoj in preverjanje računskih postopkov za projektiranje sredice reaktorja
139. Gortnar Oton Kritični iztok in mala izlivna nezgoda v jedrski elektrarni
140. Svetin Iztok Homogenizacija gorivnega elementa tlačnovodnega reaktorja

#### Doktorati — matematika

42. Zalar Borut Izomorfizmi, odvajanja in centralizatorji na algebrah in trojkah



## Doktorati — fizika

- |                                |                                                                                                      |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 123. Hanžel Darko <sup>1</sup> | Massbauerjeva spektroskopija s konverzijskimi elektroni in njena uporaba za raziskave tankih plasti  |
| 124. Jenčič Igor <sup>1</sup>  | Sevalne poškodbe v $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ / GaAs sistemu pri obsevanju s težkimi ioni |
| 125. Starič Marko              | Razvoj, izdelava in preizkus prototipa aparature za pozitronsko tomografijo                          |
| 126. Bratina Gvido             | Vpliv dipolne plasti inducirane na meji dveh polprevodnikov na heterostrukturne parametre            |
| 127. Arčon Iztok               | Večdelne ekscitacije ksenona pri fotoefektu v podlupinah L                                           |
| 128. Kos Miha <sup>2</sup>     | Magnetna resonanca v šibkem magnetnem polju za meritve lastne difuzije in pretoka                    |
| 129. Kralj-Iglič Veronika      | Model za določitev oblike celice in porazdelitve lateralno gibljivih membranskih sestavin            |

<sup>1</sup> Promocija leta 1992.

<sup>2</sup> Pomotoma objavljeno v OMF 40 (1993) 3 z napačnim naslovom doktorata.

Martina Koman

---

## 1. Kongres MFA Slovenije, Ljubljana 20.–22.X.94 ob dvestoletnici izdaje logaritmov Jurija Vege

### DRUGO OBVESTILO IN VABILO ZA PRISPEVKE

Prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije bo v Ljubljani v Cankarjevem domu od 20. do 22. oktobra 1994. Blizu 400 odgovorov na prvo obvestilo kaže na to, da slovenski matematiki, fiziki in astronomi želijo in podpirajo srečanje, na katerem bodo prikazali svoje dosežke na pedagoškem in raziskovalnem področju ter hkrati tudi kritično spregovorili o vrsti odprtih vprašanj, povezanih s stroko in njeno vpetostjo v okolico in širšo družbo. To obvestilo prinaša informacije o pripravi povzetkov, o razstavnih možnostih, o 46. občnem zboru DMFA, o prenočiščih v Ljubljani.

### PRIPRAVA POVZETKOV

Povzetke napišite z enovrstičnim razmikom na list A4 znotraj polja širine 150 mm in višine 230 mm. Povzetek mora dati dovolj informacij, da recenzenti lahko ocenijo pomen prispevka. Naslov naj bo napisan z VELIKIMI ČRKAMI in postavljen v sredino polja (centrirano). Pod naslov napišite začetno črko imena avtorja(jev) s piko in priimek(ke). V novo vrstico ime in naslov ustanove, kjer je (so) avtor(ji) zaposlen(i). Nato spustite 12 mm in začnite pisati tekst. Gostota črk naj bo 10 ali 12 črk na 24 mm. Uporabite dober pisalni stroj z novim trakom ali osebni računalnik s kvalitetnim tiskalnikom (če je le mogoče laserske vrste ali vsaj takega, ki omogoča tisk pisemske kvalitete). Za pripravo brošure povzetkov bo uporabljena fotografska tehnika. 10 mm pod poljem 150 mm × 230 mm napišite številko področja, v katero želite uvrstiti svoj prispevek. Področja so naslednja:

**Področja matematike:** 1. Pouk matematike, 2. Aplikacija matematike, 3. Analiza, 4. Topologija in geometrija, 5. Diskretna matematika, 6. Algebra, 7. Numerična in računalniška matematika.

**Področja fizike:** 8. Pouk fizike v a) osnovni šoli, b) srednji šoli, c) visoki šoli, 9. Osnovni delci in jedrska fizika, 10. Atomska in molekularna fizika, 11. Fizika kondenzirane snovi, 12. Interdisciplinarna fizika, 13. Druga področja, 14. Aplikacija fizike a) v optiki in elektrooptiki, b) v senzorski in merski tehniki, c) pri okolju in energetiki, d) v informatiki, e) na drugih področjih.

**Področja astronomije:** 15. *Astronomija*, 16. *Astrofizika*.

Povzetke je treba poslati do 31. avgusta 1994 na DMFA Slovenije, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p.64. Informacijo o sprejetju povzetkov boste prejeli med 20. in 30. septembrom 1994. Ker bo kongres trajal le tri dni, bo velik del prispevkov v obliki posterjev širine 1,00 m in višine 1,30 m.

## OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE IN PROSLAVA OB 200-LETNICI IZDAJE POPOLNE ZAKLADNICE LOGARITMOV JURIJA VEGE

V soboto, 22. oktobra 1994, dopoldne bo v Cankarjevem domu 46. občni zbor DMFA Slovenije. Popoldne ob 15. uri pa bo v Vegovem rojstnem kraju Zagorica proslava. Organizirani bodo avtobusni prevozi iz Ljubljane do Zagorice in nazaj.

## RAZSTAVE

Na prostoru, kjer se bodo zadrževali udeleženci kongresa, bodo naši sponzorji razstavili svoje proizvode, knjige ali kaj drugega, kar utegne zbuditi odziv in zanimanje matematikov, fizikov in astronomov. Če se jim želite pridružiti, lahko izbirate med panojem in majhnim razstavnim koticom  $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ . Vse informacije in ceno za omenjene komercialne aktivnosti dobite pri organizacijskem odboru kongresa: Jadranska 19, 61111 Ljubljana.

## PRENOČIŠČA

Vsak udeleženec kongresa poskrbi za prenočišče sam. V bližini Cankarjevega doma so naslednji hoteli:

| Hotel   | kat. | telefon       | cena enoposteljne sobe | cena dvoposteljne sobe |
|---------|------|---------------|------------------------|------------------------|
| Lev     | A    | (061)1332-155 | 80-170 DEM             | 105-260 DEM            |
| Union   | B,A  | (061)1254-133 | 76-139 DEM             | 105-204 DEM            |
| Slon    | B    | (061)1251-232 | 122 DEM                | 165 DEM                |
| Turist  | B    | (061)1322-343 | 65 DEM                 | 95 DEM                 |
| Ilirija | B    | (061) 551-162 | 65-81 DEM              | 94-114 DEM             |

Cene so plačljive v tolarjih po tečaju na dan plačila. V teh hotelih je treba rezervirati prenočišče vsaj 14 dni vnaprej. Zasebne sobe lahko rezervirate prek Turističnega centra, Slovenska 35, 61000 Ljubljana.

## KOTIZACIJA

Kotizacija je 100 DEM v tolarski protivrednosti po srednjem tečaju BS na dan plačila (profesorji in učitelji 50 DEM, študenti, mladi raziskovalci in upokojenci 40 DEM). Te vrednosti veljajo do 30. septembra 1994 za nakazila na žiro račun Društva MFA Slovenije št. 50101-678-49168 s pripombo „za kongres“. Prosimo Vas, da na kongres prinesete potrdilo o vplačilu. Pozneje in ob registraciji na kongresu je tolarska protivrednost kotizacije višja: 120, 60, 50 DEM.

## VAŽNI ROKI

Oddati povzetke           do 31. avgusta 1994  
Cenejša kotizacija       do 30. septembra 1994  
Rezervacija prenočišča   do 30. septembra 1994

*Zvonko Trontelj*