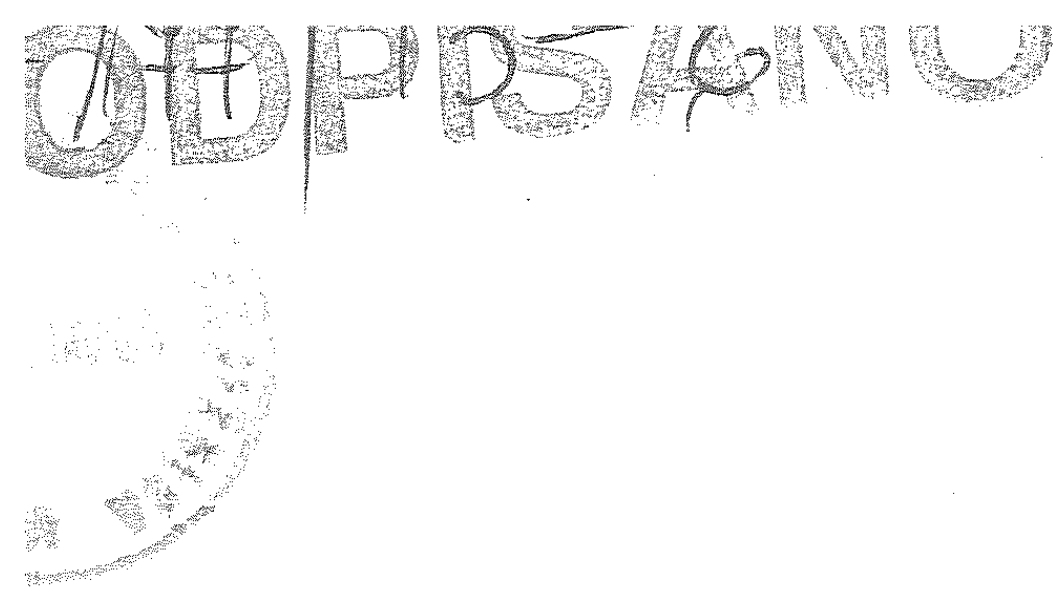


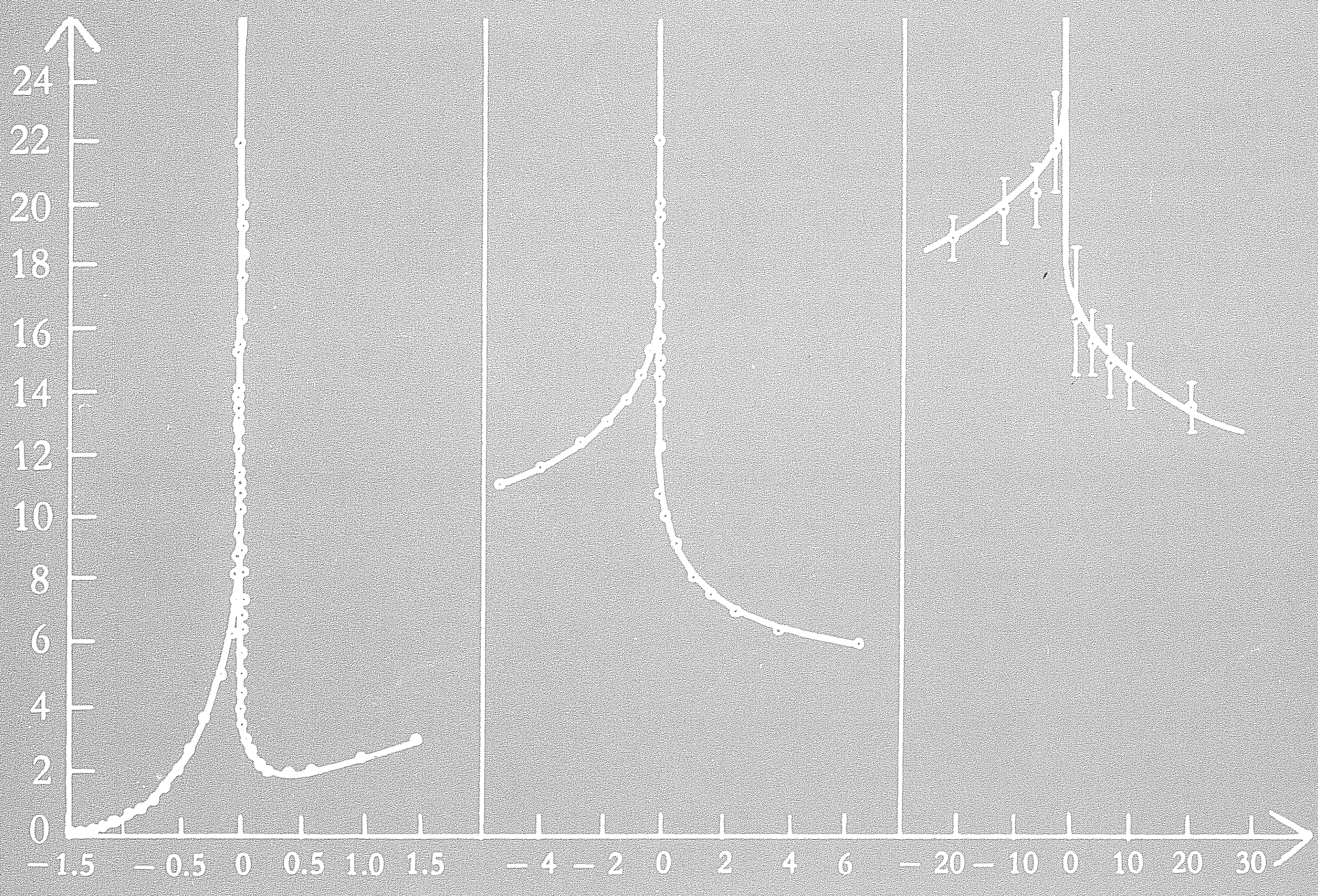


1993

Letnik 40

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič in Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.500,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.000,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 300,– SIT, dvojna številka 600,– SIT, stare številke 160,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1993 DMFA Slovenije – 1175

Poštšina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Debelina simpleksa — The thickness of a simplex (Boris Lavrič)	161–170
Aproksimacijski postopki za problem trgovskega potnika — Approximation algorithm for travelling salesman problem (Bojan Mohar)	172–181
Supertekočnost — Superfluidity (Janez Strnad)	183–191
Nove knjige — New books (Tomaž Pisanski, Milan Hladnik)	181–182, 191

Vesti

O mednarodnih matematičnih organizacijah, katerih član je pred kratkim postalo DMFA Slovenije (Bojan Hvala)	170–171
Profesor Peter Gosar — sedemdesetletnica (Peter Prelovšek)	192–III
Popravek (France Cvelbar)	182
Letno kazalo	III–IV

Na ovitku: Slika 3 k članku na strani 183. Odvisnost toplotne kapacitete kapljevinskega helija od temperature pri manj natančnem (levo), natančnejšem (sredina) in še bolj natančnem merjenju (desno). Na navpično os je nanesena specifična toplota v J/gK, na vodoravno pa razlika $T - T_0$ v kelvinih (levo), milikelvinih (na sredi) in mikrokeltvinih (desno). Po M. J. Buckinghamu in W. M. Fairbanku [2], [3].

DEBELINA SIMPLEKSA

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 52B11, 52A38, 52A40

V članku najdemo enostavno formulo za debelino simpleksa v končno razsežnem evklidskem prostoru. Debelino ocenimo navzgor s prostornino in s površino simpleksa ter obravnavamo primer, ko je v ocenah dosežen enačaj.

THE THICKNESS OF A SIMPLEX

The thickness of a simplex S of a finite dimensional euclidean space is expressed by a simple formula, and estimated above by the volume and by the surface of S . The extreme case of the estimates is also clarified.

1. Uvod

Zaznamujmo z E_n n -razsežni evklidski prostor, skalarni produkt vektorjev $x, y \in E_n$ z $\langle x, y \rangle$, normo vektorja $z \in E_n$ pa z $\|z\|$.

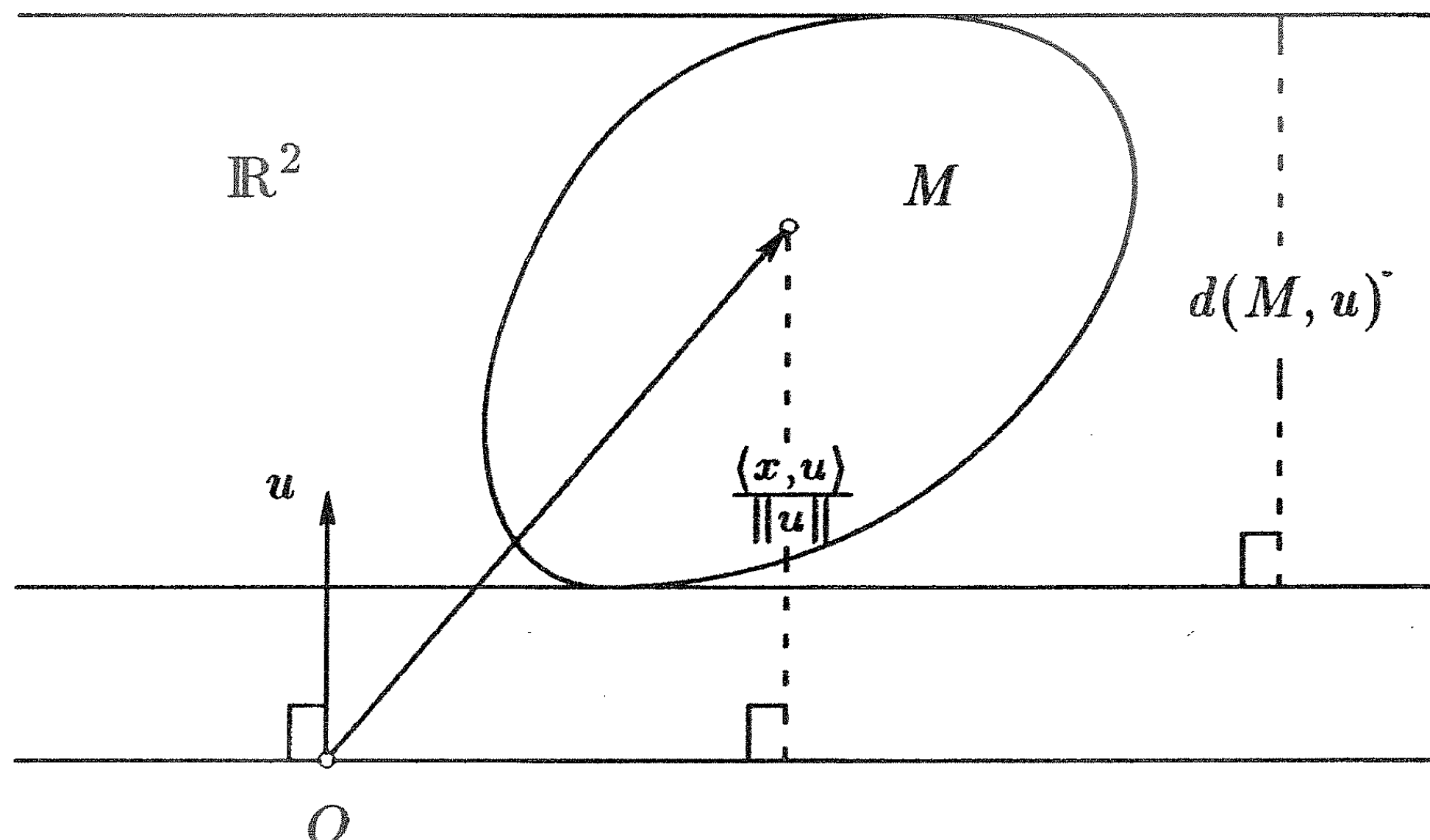
Naj bo M omejena konveksna podmnožica prostora E_n . Za vsak neničeln $u \in E_n$ je

$$d(M, u) = \sup_{x \in M} \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|} - \inf_{x \in M} \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|}$$

širina množice M v smeri u ,

$$d(M) = \inf \{d(M, u) : u \in E_n, u \neq 0\}$$

pa njena *debelina*. Glej na primer [2, 4.1.1].



Slika 1.

Bralec se lahko brž prepriča, da je debelina trikotnika v dvorazsežnem prostoru enaka dolžini njegove najkrajše višine, z debelino tetraedra v trirazsežnem prostoru pa bo imel precej več dela. Posplošitev navedenih primerov v prostoru E_n je n -razsežni simpleks. V tem prispevku bomo izrazili debelino n -razsežnega simpleksa v E_n s pomočjo njegovih oglišč in jo ocenili s prostornino ter s površino tega simpleksa.

Najprej pripravimo nekaj gradiva za nadaljnje delo. Naj bo T poljubna neprazna podmnožica prostora E_n . Najmanjšo konveksno podmnožico v E_n , ki vsebuje T , imenujemo *konveksna ogrinjača* množice T in zaznamujemo s $\text{co}(T)$ ali $\text{co } T$. Sestavljajo jo natanko vse (končne) konveksne kombinacije elementov iz T , torej elementi oblike

$$\sum_k \alpha_k x_k, \quad x_k \in T, \quad \alpha_k \geq 0 \quad \forall k, \quad \sum_k \alpha_k = 1.$$

Podmnožica $S \subset E_n$ je n -razsežni *simpleks*, kadar obstajajo elementi $x_0, x_1, \dots, x_n \in E_n$, ki ustrezajo pogoju $S = \text{co}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ in jih ne vsebuje nobena afina hiperravnina prostora E_n . Elementi $x_0, x_1, \dots, x_n$ iz definicije simpleksa S so enolično določeni z S in jih imenujemo oglišča. Ni težko videti, da so $y_0, y_1, \dots, y_n \in E_n$ oglišča simpleksa $\text{co}\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ tedaj in le tedaj, kadar so vektorji $y_1 - y_0, \dots, y_n - y_0$ linearno neodvisni.

Ker se debelina simpleksa pri translaciji ohrani, bomo brez škode za splošnost izpeljali le formulo za debelino simpleksa $S = \text{co}\{0, x_1, \dots, x_n\} \subset E_n$. Izrazili jo bomo s členi inverza G^{-1} Gramove matrike

$$G = G(x_1, \dots, x_n) = [\langle x_i, x_j \rangle]_{i,j=1}^n.$$

Ta je pozitivno definitna, njena determinanta $\det G$ pa je kvadrat prostornine paralelepipeda, napetega na vektorje $x_1, \dots, x_n$ (glej npr. [1] ali [3]). Od tod brž sledi tudi formula za prostornino $v(S)$ simpleksa S :

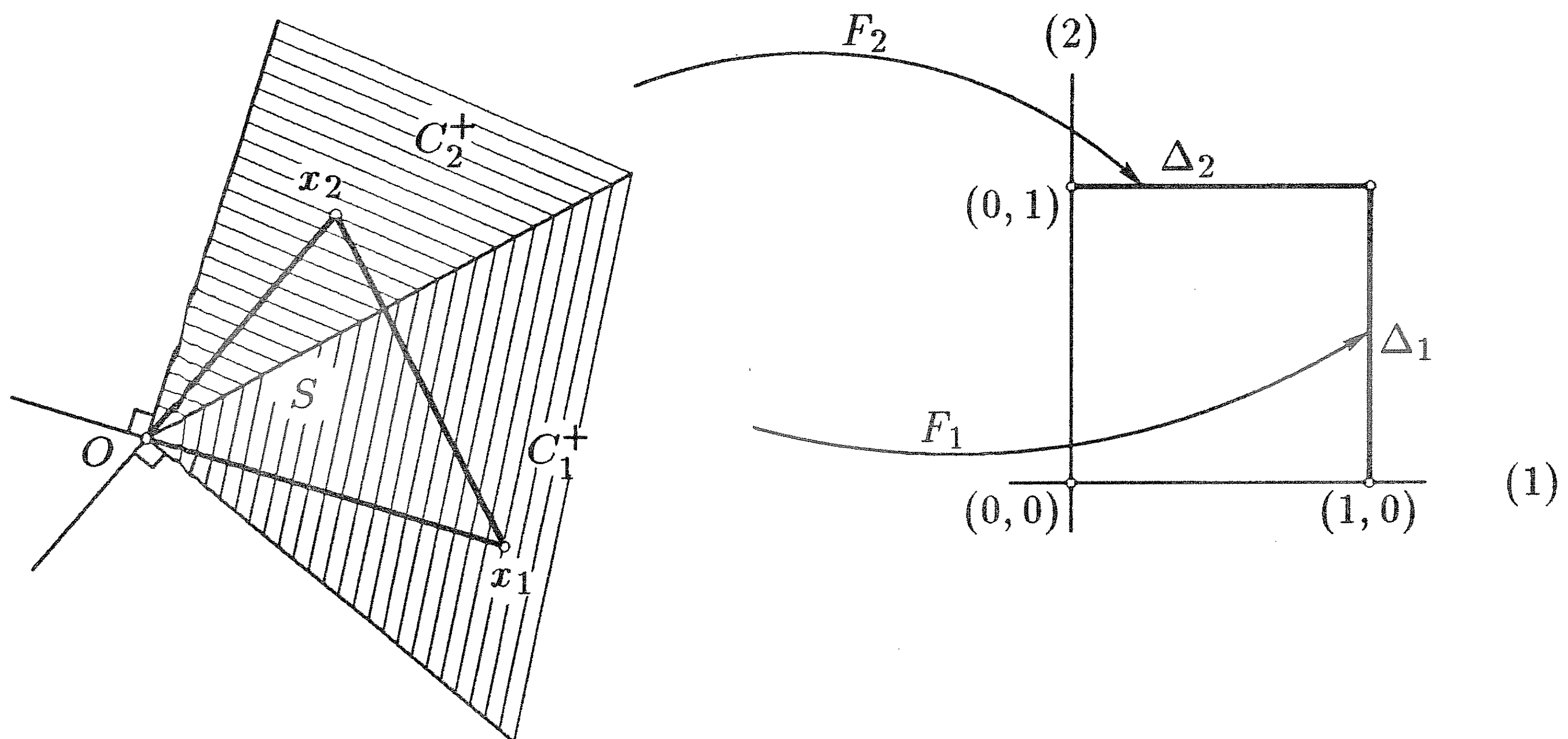
$$v(S) = \frac{1}{n!} \sqrt{\det G}. \quad (1)$$

Ponovimo še definicijo površine simpleksa.

V ta namen zaznamujmo z $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ množico oglišč n -razsežnega simpleksa $S = \text{co } V \subset E_n$ in z $S_i = \text{co}(V \setminus \{x_i\})$, $0 \leq i \leq n$, označimo njegove stranske ploskve. Vsak S_i je $(n-1)$ -razsežni simpleks. Njegova ploščina $p(S_i)$ v E_n je po definiciji enaka prostornini simpleksa S_i v $(n-1)$ -razsežnem afinem podprostoru H_i , ki ga v E_n generira S_i . Izračunamo jo lahko s pomočjo ustrezne Gramove determinante. Površina $p(S)$ simpleksa S je enaka vsoti ploščin vseh njegovih stranskih ploskev: $p(S) = \sum_{i=0}^n p(S_i)$.

Razdaljo d_i med ogliščem x_i in afino hiperravnino H_i imenujemo *višina* simpleksa S iz oglišča x_i . Med ploščino $p(S_i)$, višino d_i in prostornino $v(S)$ je zveza

$$d_i p(S_i) = n v(S). \quad (2)$$



Slika 2.

Ustrezni potenci debeline simpleksa bomo primerjali z njegovo prostornino oziroma z njegovo površino. Ocenili bomo vrednosti kvocientov $d(S)^n/v(S)$ in $d(S)^{n-1}/p(S)$ ter obravnavali primer, ko kvocienta dosežeta največjo vrednost.

2. Formula za debelino

Izrek 1. Naj bo $S = \text{co}\{0, x_1, \dots, x_n\}$ n -razsežni simpleks prostora E_n , $G = G(x_1, \dots, x_n)$ Gramova matrika, $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa njen inverz $T = G^{-1}$. Potem je debelina $d(S)$ simpleksa S enaka

$$d(S) = \min \left\{ \left(\sum_{i,j \in I} t_{ij} \right)^{-1/2} : I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Če ima S najmanjšo širino v smeri $u \in E_n$, torej $d(S) = d(S, u)$, potem vsa oglišča simpleksa S ležijo na dveh vzporednih hiperravninah, pravokotnih na u .

Dokaz. Zaznamujmo s C^+ množico vseh neničelnih elementov $w \in E_n$, pri katerih polprostori $\{x \in E_n : \langle x, w \rangle \geq 0\}$ vsebujejo simpleks S . Iz definicije simpleksa sledi, da je

$$C^+ = \{w \in E_n \setminus \{0\} : \langle x_i, w \rangle \geq 0 \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Množica C^+ je enaka uniji $\bigcup_{1 \leq k \leq n} C_k^+$ podmnožic

$$C_k^+ = \{w \in C^+ : \langle x_k, w \rangle = \sup_{1 \leq i \leq n} \langle x_i, w \rangle\}.$$

Ker je $\{x_1, \dots, x_n\}$ baza prostora E_n , za vsak $w \in C_k^+$, $1 \leq k \leq n$, velja $\langle x_k, w \rangle > 0$.

Vzemimo poljuben $k \in \{1, \dots, n\}$ in zaznamujmo z $F_k : C_k^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ preslikavo, opredeljeno s predpisom

$$F_k(w) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_i = \frac{\langle x_i, w \rangle}{\langle x_k, w \rangle} \quad \forall i.$$

Zaloga vrednosti preslikave F_k je očitno vsebovana v množici

$$\Delta_k = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n : \lambda_k = 1\}.$$

Vzemimo zdaj poljuben $\lambda \in \Delta_k$. Ker so vektorji

$$x_k, \quad x_i - \lambda_i x_k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad i \neq k$$

linearno neodvisni, obstaja tak $w \in E_n$, da je

$$\langle x_k, w \rangle > 0, \quad \langle x_i - \lambda_i x_k, w \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Od tod sledi, da $w \in C_k^+$ in $F_k(w) = \lambda$, torej zaloga preslikave F_k sovпада z Δ_k :

$$F_k(C_k^+) = \Delta_k. \quad (3)$$

Zapišimo $w \in C_k^+$ v obliki $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ in postavimo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Brž se lahko prepričamo, da velja

$$\alpha G \alpha = \langle w, w \rangle, \quad G \alpha = \langle x_k, w \rangle F_k(w). \quad (4)$$

Vzemimo poljuben $x \in S$, zapišimo ga v obliki

$$x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, \quad t_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1$$

in upoštevajmo, da $w \in C_k^+$. Dobimo neenakost

$$0 \leq \langle x, w \rangle = \sum_{i=1}^n t_i \langle x_i, w \rangle \leq \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \langle x_k, w \rangle = \langle x_k, w \rangle,$$

iz katere zaradi $0 \in S$ in $x_k \in S$ sledi

$$\inf_{x \in S} \langle x, w \rangle = 0, \quad \sup_{x \in S} \langle x, w \rangle = \langle x_k, w \rangle.$$

Torej velja

$$d(S, w) = \frac{\langle x_k, w \rangle}{\|w\|},$$

od koder s pomočjo (4) dobimo zvezo

$$d(S, w)^{-2} = \frac{\alpha G \alpha}{\langle x_k, w \rangle^2} = F_k(w) G^{-1} F_k(w).$$

Zaznamujmo s $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ kvadratni funkcional

$$\lambda \longmapsto \phi(\lambda) = \lambda T \lambda, \quad T = G^{-1},$$

uporabimo (3) in preoblikujemo gornjo zvezo v

$$\sup\{d(S, w)^{-2} : w \in C_k^+\} = \sup\{\phi(\lambda) : \lambda \in \Delta_k\}. \quad (5)$$

Ker je matrika T pozitivno definitna, za poljuben par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ in vsak realen $t \in [0, 1]$ velja

$$t\phi(\lambda) + (1-t)\phi(\mu) - \phi(t\lambda + (1-t)\mu) = t(1-t)\phi(\lambda - \mu) \geq 0,$$

torej je funkcional ϕ konveksna funkcija.

Dokažimo, da zožitev ϕ na množico Δ_k doseže največjo vrednost v točki iz podmnožice

$$\Delta'_k = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_k : \lambda_i \in \{0, 1\} \forall i\}.$$

V ta namen zapišimo

$$a = \max\{\phi(\lambda) : \lambda \in \Delta'_k\}$$

in vzemimo poljuben $\lambda \in \Delta_k$. Zaznamujmo z $e_1, \dots, e_n$ elemente standardne baze v $\mathbb{R}^n$ in razvrstimo koordinate točke λ po velikosti:

$$0 \leq \lambda_{i_1} \leq \lambda_{i_2} \leq \dots \leq \lambda_{i_n} = 1, \quad i_n = k. \quad (6)$$

Potem elementi

$$f_p = \sum_{j=p}^n e_{i_j}, \quad p = 1, \dots, n,$$

ležijo v Δ'_k , vsota nenegativnih števil

$$t_p = \lambda_{i_p} - \lambda_{i_{p-1}}, \quad 1 \leq p \leq n,$$

kjer smo vzeli $\lambda_{i_0} = 0$, pa je zaradi (6) enaka 1. Iz enakosti

$$\lambda = \sum_{p=1}^n t_p f_p$$

in konveksnosti funkcionala ϕ sledi

$$\phi(\lambda) = \phi\left(\sum_{p=1}^n t_p \mathbf{f}_p\right) \leq \sum_{p=1}^n t_p \phi(\mathbf{f}_p) \leq a,$$

torej zožitev ϕ na Δ'_k res doseže največjo vrednost v točki iz Δ'_k .

Množico Δ'_k sestavljajo elementi $\lambda \in \mathbb{R}^n$ oblike

$$\lambda = \sum_{i \in I} \mathbf{e}_i, \quad k \in I \subseteq \{1, \dots, n\}, \quad (7)$$

za vsak tak λ pa velja $\lambda T \lambda = \sum_{i,j \in I} t_{ij}$. Zvezo (5) torej lahko izrazimo z elementi matrike T :

$$\sup\{d(S, w)^{-2} : w \in C_k^+\} = \max\left\{\sum_{i,j \in I} t_{ij} : k \in I \subseteq \{1, \dots, n\}\right\}. \quad (8)$$

Poiščimo za $\lambda \in \Delta'_k$ oblike (7) tak $w \in C_k^+$, da velja $F_k(w) = \lambda$. Potem oglišča 0 in x_j , $j \in \{1, \dots, n\} \setminus I$, simpleksa S ležijo na hiperravnini w , ostala oglišča x_i , $i \in I$, pa na vzporedni afini hiperravnini $x_k + w$.

Spomnimo se še zveze (5) in že vidimo: V primeru, ko širina $d(S, w)$ v smereh $w \in C^+$ doseže najmanjšo vrednost, vsa oglišča simpleksa S ležijo na dveh vzporednih afinih hiperravninah. Od tod sledi enakost

$$d(S) = \inf\{d(S, w) : w \in C^+\}$$

in tedaj s pomočjo (8) tudi formula

$$d(S) = \min\left\{\left(\sum_{i,j \in I} t_{ij}\right)^{-1/2} : I \subseteq \{1, \dots, n\}\right\},$$

ki smo jo želeli dokazati. ■

Izračunajmo s pomočjo izreka 1 debelino pravilnega simpleksa z robom dolžine 1. Če je $S = \text{co}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tak simpleks, za vsak par različnih indeksov $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ velja $\|x_i - x_j\| = 1$. Brez škode za splošnost privzemimo, da je $x_0 = 0$, nato pa izračunajmo člene Gramove matrike G :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Bralec se lahko brž prepriča, da ima inverz $T = G^{-1}$ člene

$$t_{ij} = 2\delta_{ij} - \frac{2}{n+1} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Če ima indeksna množica $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ m elementov, $1 \leq m \leq n$, potem velja

$$\sum_{i,j \in I} t_{ij} = \frac{2}{n+1} m(n-m+1).$$

S pomočjo izreka 1 in preproste enakosti

$$\max_{1 \leq m \leq n} \{m(n-m+1)\} = [(n+1)^2/4],$$

kjer smo z $[r]$ označili celi del števila $r \in \mathbb{R}$, dobimo formulo za debelino pravičnega simpleksa z robom 1:

$$d(S) = \left(\frac{2}{n+1} [(n+1)^2/4] \right)^{-1/2}.$$

Prilagodimo formulo izreka 1 za računanje debeline simpleksov v prostoru $\mathbb{R}^n$ z običajnim skalarnim produktom. V ta namen identificirajmo prostor E_n prek kakšne njegove ortonormirane baze s prostorom $\mathbb{R}^n$. Oglišča $x_1, \dots, x_n$ simpleksa S iz izreka 1 so v skladu s to identifikacijo stolpci v $\mathbb{R}^n$. Združimo te stolpce v matriko $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in inverz matrike X zaznamujemo z $Y = [y_1, \dots, y_n]$. Potem velja $XX = G(x_1, \dots, x_n)$ in zato

$$G(x_1, \dots, x_n)^{-1} = X^{-1}(X)^{-1} = YY = G(y_1, \dots, y_n).$$

Od tod sledi

$$\sum_{i,j \in I} t_{ij} = \sum_{i,j \in I} \langle y_i, y_j \rangle = \left\| \sum_{i \in I} y_i \right\|^2,$$

kjer smo s simbolom $\|\cdot\|$ zaznamovali običajno evklidsko normo v $\mathbb{R}^n$. Izrek 1 nam da formulo

$$d(S) = \min \left\{ \left\| \sum_{i \in I} y_i \right\|^{-1} : I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\},$$

uporabno v primeru $S \subset \mathbb{R}^n$.

3. Neenakosti

Naj bo $S = \text{co}\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E_n$ n -razsežni simpleks, I prava neprazna podmnožica množice $N = \{0, 1, \dots, n\}$ in $J = N \setminus I$. Ni težko videti, da obstajata enolično določeni vzporedni afini hiperravnini H_I in H_J prostora E_n , za kateri velja

$$x_i \in H_I \quad \forall i \in I, \quad x_j \in H_J \quad \forall j \in J.$$

Privzemimo, da je $x_0 = 0$. Potem iz dokaza izreka 1 vidimo, da razdaljo d_I med H_I in H_J lahko izračunamo s formulo

$$d_I = \begin{cases} \left(\sum_{i,j \in I} t_{ij} \right)^{-1/2}, & \text{če } 0 \notin I \\ \left(\sum_{i,j \in J} t_{ij} \right)^{-1/2}, & \text{če } 0 \in I. \end{cases} \quad (9)$$

Od tod sledi, da za višine $d_i = d_{\{i\}}$, $0 \leq i \leq n$, simpleksa S velja enakost

$$\sum_{i=0}^n d_i^{-2} = 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} t_{ij}. \quad (10)$$

Dobljeni zvezi združimo v naslednji rezultat.

Lema 1. Naj bo $m \in \{1, \dots, n\}$ in $\mathcal{I}_m$ družina vseh pravih nepraznih podmnožic množice $N = \{0, 1, \dots, n\}$, ki imajo natanko m elementov. Potem velja

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_m} d_I^{-2} = \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=0}^n d_i^{-2}.$$

Dokaz. Zveza (9) nam da enakost

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_m} d_I^{-2} = \sum_{\substack{i,j \in I \\ I \in \mathcal{I}_m, 0 \notin I}} t_{ij} + \sum_{\substack{i,j \in N \setminus I \\ I \in \mathcal{I}_m, 0 \in I}} t_{ij}.$$

Vzemimo poljubna indeksa i, j , za katera velja $1 \leq i < j \leq n$. V prvi vsoti na desni strani zgornje enakosti sumand t_{ij} nastopa $\binom{n-2}{m-2}$ -krat, v drugi $\binom{n-2}{m-1}$ -krat, zato ga v obeh skupaj najdemo $\binom{n-1}{m-1}$ -krat.

Sumand t_{ii} v obeh vsotah na desni nastopa $\binom{n-1}{m-1}$ -krat, torej velja

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_m} d_I^{-2} = 2 \binom{n-1}{m-1} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} t_{ij}.$$

Od tod s pomočjo (10) takoj dobimo iskano enakost. ■

Površino in prostornino simpleksa veže izoperimetrična neenakost

$$\frac{p(S)^n}{v(S)^{n-1}} \geq \frac{1}{n!} n^{3n/2} (n+1)^{(n+1)/2},$$

ki jo najdemo na primer v [2, 6.5.4]. V njej velja enačaj le takrat, kadar je simpleks S pravilen. Če izoperimetrično neenakost skombiniramo z enostavno neenakostjo

$$p(S)^2 = \left(\sum_{i=0}^n p(S_i)\right)^2 \leq (n+1) \sum_{i=0}^n p(S_i)^2$$

in upoštevamo (2), dobimo naslednji rezultat.

Lema 2. Vsota $\sigma_2(S) = \sum_{i=0}^n d_i^{-2}$ in prostornina $v(S)$ simpleksa S ustrezata neenakosti

$$\sigma_2(S)^n v(S)^2 \geq \frac{1}{(n!)^2} (n+1)n^n.$$

V njej je dosežen enačaj natanko takrat, kadar je simpleks S pravilen. ■

Posledica. Za vsako pozitivno definitno matriko $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja neenakost

$$\det T \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{n} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} t_{ij} \right)^n.$$

V njej velja enačaj natanko takrat, kadar je T pozitivni večkratnik matrike A s členi $a_{ij} = (n+1)\delta_{ij} - 1$.

Dokaz. Naj bo matrika X inverz pozitivnega korena matrike T , torej $X = \sqrt{T}^{-1}$. Potem za stolpce $x_1, \dots, x_n$ matrike X v $\mathbb{R}^n$ velja

$$\langle x_i, x_j \rangle = \langle X e_i, X e_j \rangle = \langle X^2 e_i, e_j \rangle = \langle T^{-1} e_i, e_j \rangle,$$

od koder sledi $T = G(x_1, \dots, x_n)^{-1}$. Če za simpleks $S = \text{co}\{0, x_1, \dots, x_n\}$ uporabimo lemo 2, enakosti (10) in (1) ter $\det G(x_1, \dots, x_n) = (\det T)^{-1}$, dobimo iskano neenakost. ■

Sklenimo prispevek z napovedanima ocenama debeline simpleksa.

Izrek 2. Za n -razsežni simpleks $S \subset E_n$ veljata oceni

$$d(S)^n \leq \frac{(n+1)^{(n-1)/2} n!}{[(n+1)^2/4]^{n/2}} v(S),$$

$$d(S)^{n-1} \leq \frac{(n+1)^{(n-3)/2} n!}{n^{3/2} [(n+1)^2/4]^{(n-1)/2}} p(S),$$

v katerih velja enačaj natanko takrat, kadar je simpleks S pravilen. ■

Dokaz. Za vsak $m \in \{1, \dots, n\}$ postavimo

$$\alpha_m = \max\{d_I^{-2} : I \in \mathcal{I}_m\}$$

in s pomočjo leme 1 dobimo

$$\binom{n+1}{m} \alpha_m = \sum_{I \in \mathcal{I}_m} \alpha_m \geq \sum_{I \in \mathcal{I}_m} d_I^{-2} = \binom{n-1}{m-1} \sigma_2(S).$$

Ker je

$$d(S)^{-2} = \max\{\alpha_m : 1 \leq m \leq n\},$$

od tod sledi

$$n(n+1) d(S)^{-2} \geq \max_{1 \leq m \leq n} \{m(n-m+1)\} \sigma_2(S) = [(n+1)^2/4] \sigma_2(S),$$

z uporabo leme 2 pa nato dobimo prvo neenakost izreka. Od tod s pomočjo izoperimetrične neenakosti sledi druga neenakost. V obeh primerih se da brž videti, da je enačaj dosežen le takrat, kadar je simpleks S pravilen. ■

LITERATURA

- [1] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vols. I, II, Chelsea, New York 1959.
- [2] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
- [3] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1993.

VESTI

O mednarodnih matematičnih organizacijah, katerih član je pred kratkim postalo DMFA Slovenije

Poročali smo že, da je v letu 1992 DMFA Slovenije postalo član Evropskega matematičnega društva (EMS), Evropskega fizikalnega društva (EPS) in Mednarodne matematične zveze (IMU). Sestavek prinaša nekaj informacij o velikih matematičnih organizacijah IMU in EMS.

IMU je svetovna matematična organizacija. Njene članice so države, ki vanjo vstopajo prek matematičnih društev, akademij, vladnih agencij ipd. Trenutno je vanjo včlanjenih 54 držav z vseh kontinentov. Razdeljene so v pet skupin, pri čemer skupina določa število glasov pri delu generalne skupščine (od 1 do 5) in višino članarine (od 1 do 10 enot). Slovenija je v prvi skupini. V peti skupini je sedem držav, poleg Nemčije in Japonske še vseh pet stalnih članic Varnostnega sveta OZN. Sedež sekretariata IMU je v tem volilnem obdobju v Riu de Janeiru.

Podobno je organiziran tudi EMS, le da gre tu za evropsko organizacijo, katere člani so (ne nujno vsedržavna) matematična društva pa tudi

posamezniki. Trenutno je včlanjenih 40 društev, sedež sekretariata pa je v Helsinkih.

Cilji obeh organizacij so podobni: krepitev mednarodnega matematičnega sodelovanja, organizacija matematičnih kongresov in drugih srečanj (oziroma pomoč pri njihovi izvedbi) ter druge akcije za pospeševanje razvoja matematike. O delu vsako leto poročata glasili Bulletin (IMU) in Newsletter (EMS).

Poleg rednih dejavnosti pa delo obeh organizacij poživljajo tudi občasni projekti. Trenutno je aktualnih kar nekaj. Morda bi najprej omenili projekt *Prelom stoletja*. Leta 1900 je David Hilbert predstavil seznam problemov, ki so po njegovem mnenju pomenili največji izziv za prihajajoče stoletje. Na zadnji generalni skupščini IMU v japonskem mestu Kobe se je pojavil predlog, da bi do leta 2000 pripravili podoben seznam izzivov za naslednje stoletje. V ta namen je bil izvoljen poseben pripravljalni komite, ki ga je vodil generalni sekretar IMU J. Palis. Idejo so kasneje razširili, saj je 6. maja 1992 predsednik IMU J. L. Lions razglasil leto 2000 za leto matematike. Prireditve, ki bodo potekale ob tej priložnosti, bo sofinanciral UNESCO, v pripravi pa bosta sodelovala tako IMU kot EMS.

Drugi prednostni projekt IMU je pomoč državam v razvoju, in sicer predvsem z izobraževanjem kadrov in pomočjo pri dostopu do informacij. Tretji poudarek IMU pa je prizadevanje za ustrezen ugled matematike znotraj znanosti, ki naj bi ga dosegli s sistematično navzočnostjo v znanstvenih medijih, in to s prispevki, ki bi bili znanstveno korektni, pa vendar dostopni čim širšemu krogu znanstvenikov.

IMU pripravlja svetovni matematični kongres, ki bo 3. do 11. avgusta v Zürichu.

Še nekaj besed o dodatnih dejavnostih EMS. V zadnjih mesecih je vodstvo posvetilo precej pozornosti pismu, v katerem so matematiki iz vzhodne Evrope opozorili na stanje stroke v teh državah in EMS zaprosili za pomoč. V pismu ugotavljajo, da je bila raven matematike pred leti sorazmerno visoka. V zadnjem času pa so priča nevarnosti zapiranja inštitutov (kot ostankov komunizma), nekritičnemu kopiranju Zahoda in finančnemu kolapsu, kar vse povzroča odliv možganov in trganje stikov. Primerjajo npr. povprečno plačo ruskega profesorja (tedaj 30 dolarjev) s cenami revij in potnimi stroški. Pri tem pa ne prosijo le za materialno pomoč, temveč tudi za moralno. Sistematična krepitev sodelovanja med Vzhodom in Zahodom bi lahko koristila tudi Zahodu. Na drugi strani pa bi razvejeno sodelovanje z Zahodom spremenilo odnos postkomunističnih oblasti do matematične stroke in jo v očeh oblasti prikazalo v luči, ki si jo zasluži.

Prva reakcija EMS na pismo je bila ustanovitev komisije in dodelitev (za zdaj sicer skromnih) sredstev v ta namen.

Že pred tem pismom je EMS za kraj naslednjega evropskega kongresa matematikov leta 1996 izbral Budimpešto.

Bojan Hvala

APROKSIMACIJSKI POSTOPKI ZA PROBLEM TRGOVSKEGA POTNIKA

BOJAN MOHAR

Math. Subj. Class. (1991) 68Q20, 90C35, 05C45.

Prikazani so nekateri aproksimacijski postopki za metrični problem trgovskega potnika.

APPROXIMATION ALGORITHM FOR TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

Approximation algorithms for the travelling salesman problem are discussed.

1. Uvod

Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 1$) dana mesta, ki jih mora obiskati bogati poslovnež, gospod *T.P.* Dane so medsebojne razdalje med mesti. Gospod *T.P.*, ki mu bomo rekli kar *trgovski potnik*, mora obiskati vsa mesta in njegov cilj je sestaviti tako zaporedje obiskov, da bo skupna dolžina opravljene poti kar se da majhna.

Naloge podobnega tipa srečamo pri mnogih drugih problemih. V splošnem se lahko zgodi, da se „razdalje“ med mesti ne obnašajo kot prave razdalje. Na primer, lahko so negativne, nesimetrične („razdalja“ od X_i do X_j ni enaka kot „razdalja“ od X_j do X_i) ali pa celo ne zadoščajo trikotniški neenakosti, ki vedno velja za prave razdalje. Kljub temu problem trgovskega potnika, kjer ob dani matriki „razdalj“ $D = [d(i, j)]_{i,j=1,\dots,n}$ iščemo tako ciklično zaporedje mest $i_1, i_2, \dots, i_n, i_1$, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, da bo vsota zaporednih razdalj $d(i_1, i_2) + d(i_2, i_3) + \dots + d(i_n, i_1)$ kar se da majhna, imenujemo včasih tudi *problem potujočega trgovca*. Cikličnemu zaporedju mest $i_1, i_2, \dots, i_n, i_1$ pravimo *obhod trgovskega potnika*. V obhodu seveda nastopajo vsa mesta, vsako natanko enkrat. Pravim trgovskim potnikom navadno ni težko izbrati ustreznega obhoda, saj število mest, ki jih morajo obiskati, po navadi ni ravno veliko. Vendar pa se že pri razmeroma majhnih velikostih problema pojavijo hude težave: izkaže se, da splošnih problemov, pri katerih je n večji od 100, že ne znamo več dobro reševati¹. Razlog je nedvomno v tem, da je problem trgovskega potnika NP-težak [2], [6].

Kaj sploh pomeni, da je kak problem NP-težak? Slikovita razlaga je naslednja: problem je *NP-težak*, če bi kakršenkoli učinkovit (tj. polinomski) algoritem za ta problem lahko uporabili za učinkovito reševanje stotine drugih problemov, za katere pa doslej še nikomur (kljub velikim prizadevanjem tisočev znanih matematikov in računalnikarjev) ni uspelo najti učinkovitega postopka. Problemi, za katere bi z učinkovito rešitvijo problema trgovskega

* Prvotna verzija tega članka je bila pripravljena kot gradivo za permanentno izobraževanje učiteljev matematike in računalništva 3.12.1992 [5].

¹ Pred kratkim so z uporabo nekaterih novejših metod sestavili programe, ki zmorejo ob podpori najhitrejših računalnikov reševati naloge trgovskega potnika, ki imajo do 1000 mest.

potnika dobili hitre algoritme, vključujejo na primer naslednje: problem barvanja grafov, problem Hamiltonovega cikla, celoštevilsko linearno programiranje, problem celoštevilskega nahrbtnika itd. Zato je upanje, da bomo našli uporabne postopke za reševanje problema trgovskega potnika, zanemarljivo majhno.

2. Aproksimacijski algoritmi

Omejili se bomo le na poseben primer problema trgovskega potnika. Zahtevali bomo, da za matriko razdalj $D = [d(i, j)]_{i,j=1,\dots,n}$ velja:

$$d(i, j) = d(j, i), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Takemu problemu pravimo *simetrični problem trgovskega potnika*. Že ta posebni primer problema ni le zelo težak, ampak je, kot bomo kmalu videli, že iskanje približnih rešitev težek problem.

Naj bo I množica podatkov za nalogo trgovskega potnika. Z $\text{Opt}(I)$ označimo skupno vsoto razdalj pri najugodnejšem obhodu trgovskega potnika. Recimo, da imamo postopek, ki za dano nalogo trgovskega potnika poišče neki bolj ali manj dober obhod, ki pa ni nujno optimalen. Recimo, da je pri podatkih I vsota razdalj na obhodu, ki ga vrne naš postopek, enaka $\mathcal{A}(I)$. Če za vsak I velja ocena:

$$\mathcal{A}(I) \leq (1 + r) \text{Opt}(I),$$

tedaj pravimo, da je naš postopek *r-aproksimacijski*. Po definiciji nam 0-aproksimacijski algoritem vedno vrne optimalno rešitev. Na žalost pa pri splošnem problemu trgovskega potnika nimamo mnogo upanja, da bi znali učinkovito iskati kakršnekoli aproksimativne rešitve. To nam pove naslednji izrek.

Izrek 1. *Za vsako dano število $r \geq 0$ je problem iskanja r-aproksimacije simetričnega problema trgovskega potnika NP-težak.*

Dokaz. Znano je, da je problem iskanja Hamiltonovega cikla NP-težak. Zato je dovolj videti, da lahko problem Hamiltonovega cikla v polinomskem času prevedemo na iskanje r-aproksimacije za problem trgovskega potnika.

Naj bo G graf na n točkah. Zanima nas, ali G vsebuje Hamiltonov cikel. Sestavimo matriko $D = [d(i, j)]_{i,j=1,\dots,n}$ razdalj za nalogo trgovskega potnika po naslednjem receptu: $d(i, j) = 0$, če $i = j$, $d(i, j) = 1$, če sta i in j različna in sta i -ta in j -ta točka v grafu G sosednji, sicer pa naj bo $d(i, j) = (r + 1)n$. Hitro se vidi, da ima graf G Hamiltonov cikel natanko tedaj, ko za dobljeno nalogo trgovskega potnika obstaja obhod dolžine n , to pa je spet ekvivalentno temu, da obstaja obhod dolžine kvečjemu $(r + 1)n$. Zato bi s pomočjo učinkovitega r-aproksimacijskega algoritma za problem trgovskega potnika znali učinkovito iskati Hamiltonove cikle v poljubnih grafih.

Dobljena prevedba je očitno polinomske časovne zahtevnosti, saj ob danem grafu G lahko matriko D (podatke za ustrezno nalogo trgovskega potnika) sestavimo brez posebnega truda. ■

3. Metrični problem trgovskega potnika

Poseben primer simetričnega problema trgovskega potnika je *metrični problem*, pri katerem ima dana matrika D take lastnosti kot matrika razdalj med n točkami v nekem metričnem prostoru. Poleg pogoja simetričnosti (1) zahtevamo še:

$$d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n \quad \text{in} \quad (2)$$

$$d(i, i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Pogoju (2) pravimo *trikotniška neenakost*. Drugi pogoj (3) je pravzaprav le „lepotni dodatek“, saj diagonalni elementi matrike D očitno ne vplivajo na rešitve.

Poseben primer metričnega problema je *evklidski problem*, pri katerem so mesta, ki naj jih obiše trgovski potnik, točke v nekem evklidskem prostoru $\mathbb{R}^k$, razdalje med njimi pa so enake evklidskim razdaljam v $\mathbb{R}^k$.

Izrek 2. *Metrični problem trgovskega potnika je NP-težak.*

Dokaz. Problem Hamiltonovega cikla v grafih lahko prevedemo tudi na metrični problem trgovskega potnika. Ob danem grafu G naj bo razdalja med različnima mestoma i in j enaka 1, če sta i -ta in j -ta točka v grafu G sosednji, sicer pa enaka 2. Hitro se vidi, da tako dobljena matrika razdalj res zadošča pogojem (1), (2) (in (3)). Tedaj obstaja obhod trgovskega potnika, ki je dolžine manj ali enako n , natanko takrat, ko dani graf G vsebuje hamiltonov cikel. ■

Kljub temu da je zaradi izreka 2 reševanje metričnega (in tudi evklidskega) problema trgovskega potnika brezupno težko, pa v nasprotju s splošnim problemom, kjer po izreku 1 celo iskanje približnih rešitev ne pride v poštev, obstajajo enostavni in hitri postopki za približno reševanje metričnega problema. Dva taka postopka si bomo ogledali v nadaljevanju.

4. Postopek z uporabo najcenejšega vpetega drevesa

Aproksimacijska algoritma, ki ju bomo spoznali v nadaljevanju, uporabljata najcenejše vpeto drevo, s pomočjo katerega sestavimo neki pomožni graf G' . Potem v G' poiščemo obhod (tako imenovani Eulerjev obhod), s pomočjo katerega nazadnje dobimo obhod trgovskega potnika. Zato si bomo najprej ogledali nekaj osnovnih dejstev o najcenejših vpetih drevesih in Eulerjevih obhodih.

Dan naj bo povezan graf G z n točkami in uteženimi povezavami. Ker je G povezan, ima vsaj eno vpeto drevo. To je podgraf, ki je povezan,

vsebuje vseh n točk grafa G , nima pa nobenega cikla. Vpeto drevo T je *najcenejše*, če je vsota uteži povezav iz T najmanjša možna med vsemi vpetimi drevesi grafa G . Iskanje najcenejšega vpetega drevesa v G ni težko. Uporabimo lahko kar požrešno metodo: drevo gradimo z zaporednim dodajanjem povezav in vsakič dodamo povezavo z najmanjšo težo, če le taka povezava ne napravi cikla (če ga, jo lahko zavržemo in vzamemo naslednjo najcenejšo povezavo). Znani sta dve različici takega postopka, Primov in Kruskalov algoritem. Radovedni bralec bo našel opis teh postopkov in dokaze za njihovo pravilnost tudi v slovenščini, na primer v [4]. Najcenejše vpeto drevo torej lahko poiščemo s požrešno metodo. Izkaže se, da se da tak postopek izvesti v času $O(n^2 \log n)$ [4], [6], če predpostavimo, da so uteži (cene) povezav po velikosti omejene. V splošnem pa moramo časovni zahtevnosti dodati še faktor L , ki je enak

$$L = \max\{\lceil \log d(e) \rceil + 1 \mid e \in E(G)\},$$

kjer je $d(e)$ cena povezave e . Število L namreč opisuje maksimalno dolžino (npr. v desetiškem zapisu) števil $d(e)$, ki jih moramo med postopkom med seboj primerjati, urejati itd. Če so ta števila zelo dolga, delo z njimi ni operacija, ki bi se jo dalo opraviti v času $O(1)$, ampak porabimo $O(L)$ časa.

Graf G je *Eulerjev*, če je povezan in vsebuje le točke sode stopnje. Pri tem dopustimo tudi vzporedne povezave in zanke. (Slednje so sicer v našem primeru nepomembne.) Pomembna lastnost Eulerjevih grafov je, da vsebujejo sklenjen obhod, ki uporabi vse povezave grafa, vsako natanko enkrat. Takemu obhodu pravimo *Eulerjev obhod*.

Izrek 3. *Graf G brez izoliranih točk vsebuje Eulerjev obhod natanko tedaj, ko je Eulerjev, tj., G je povezan in vse njegove točke so sode stopnje. Eulerjev obhod v Eulerjevem grafu G lahko poiščemo v linearnem času $O(|E(G)|)$.*

Dokaz. Očitno je, da Eulerjeve obhode lahko vsebujejo le Eulerjevi grafi. Eulerjev obhod namreč v vsako točko pride natanko tolikokrat, kot iz nje odide. Ker graf nima izoliranih točk, je v vsaki točki vsaj ena povezava. Zato Eulerjev obhod obišče vsako točko grafa in graf je torej povezan.

Recimo sedaj, da je G Eulerjev graf. Z indukcijo po številu povezav v G bomo dokazali, da G vsebuje Eulerjev obhod. Če je $|E(G)| = 0$, tedaj ima graf eno samo točko in trivialni obhod dolžine nič je Eulerjev. V splošnem primeru pa izberimo točko $v \in V(G)$. Najprej poiščemo poljuben sklenjen sprehod, začeniši v točki v . Iskanje ni težko: odpravimo se v poljubno sosedo točke v . (Ker po predpostavki v ni izolirana točka, ima vsaj enega sosedo.) Ker ima točka, v katero tako pridemo, sodo mnogo sosedov, je v njej vsaj ena povezava, ki je še nismo prehodili. Zato lahko nadaljujemo sprehod po neki neprehojeni povezavi. Tak sklep velja tudi za vse nadaljnje točke, ki jih srečamo na našem sprehodu, razen morda tedaj, ko pridemo nazaj v začetno točko v . Ker ima graf le končno mnogo povezav, se to prej ko

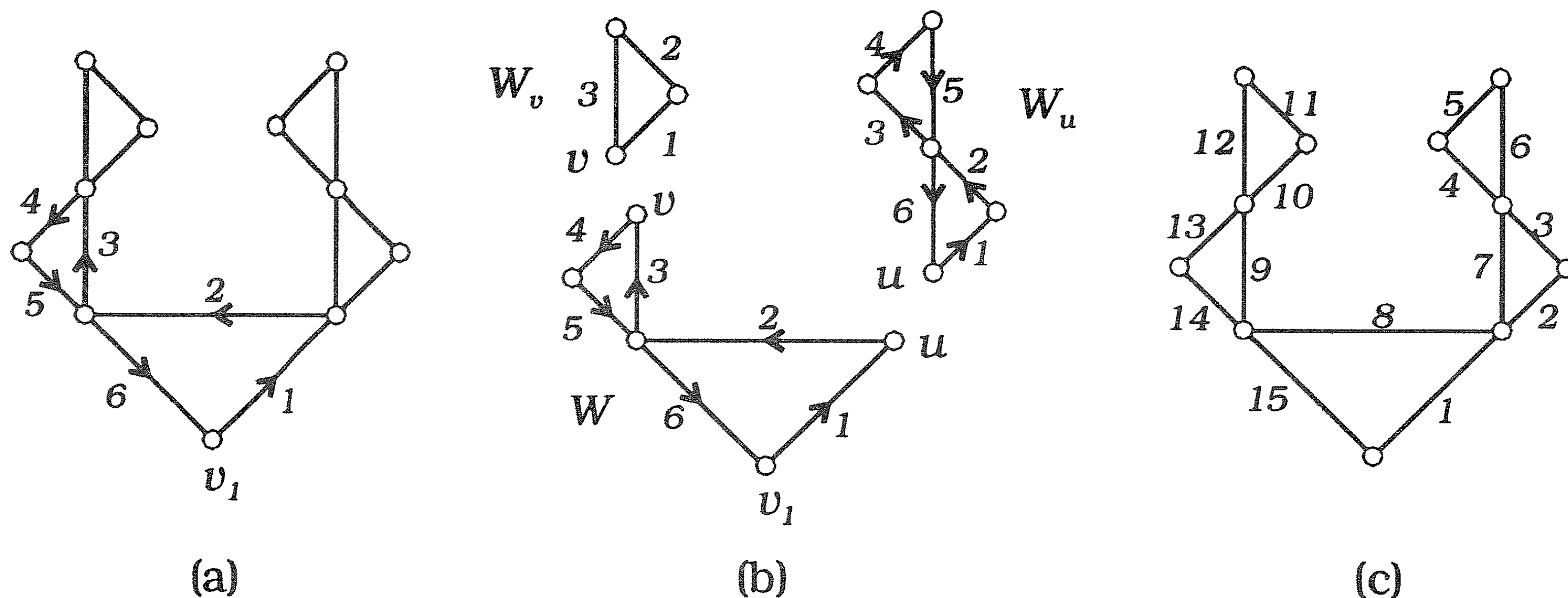
slej tudi zgodi. Sedaj odstranimo povezave tako dobljenega obhoda iz G in induktivno v vsaki od preostalih povezanih komponent poiščemo Eulerjev obhod. To lahko storimo, saj so v ostanku vse točke sode stopnje — v vsaki točki smo namreč odvzeli sodo mnogo povezav, ki so bile na obhodu. Hitro se vidi, da iz prvotno dobljenega obhoda in Eulerjevih obhodov v preostalem delu lahko sestavimo Eulerjev obhod v G .

Gornjo induktivno (rekurzivno) konstrukcijo lahko zapišemo tudi v obliki algoritma, ki ob pravilni realizaciji porabi le linearen čas:

```

procedure Eulerjev_obhod ( $v$ )
  {  $G$  naj bo graf s točkami sodih stopenj. }
  { Konstruiraj Eulerjev obhod v povezani komponenti, ki vsebuje  $v$ . }
begin
  if  $v$  nima incidenčnih povezav
  then vrni prazen obhod [ $v$ ]
  else
    Začni v točki  $v$  sestavi obhod  $W$ ,
    ki ne porabi nobene povezave dvakrat.
    Zbriši povezave na  $W$  iz grafa  $G$ .
    Za vsako točko  $u$  na  $W$  ponovi:
      S klicem Eulerjev_obhod( $u$ ) poišči Eulerjev obhod  $W_u$ 
      v povezani komponenti grafa, ki vsebuje  $u$ .
      Odstrani povezave obhoda  $W_u$  iz grafa  $G$ .
      Na mestu pojavitve  $u$  na  $W$  vstavi dobljeni obhod  $W_u$ .
    Vrni dobljeni sestavljeni obhod.
  endelse
end.

```



Slika 1. Iskanje Eulerjevega obhoda

Delo gornjega postopka je shematično prikazano na primeru na sliki 1. Oznake na povezavah povedo, katera po vrsti na obhodu je označena povezava.

Dana naj bo simetrična matrika razdalj $D = [d(i, j)]_{i, j=1, \dots, n}$. Recimo, da je G (vpet) Eulerjev graf na točkah $\{1, 2, \dots, n\}$. Označimo:

$$d(G) := \sum_{e \in E(G)} d(e),$$

kjer je $d(e) = d(i, j)$, če povezava e povezuje točki i in j .

Izrek 4. *Naj bo G Eulerjev graf na točkah $\{1, 2, \dots, n\}$. Dana naj bo matrika razdalj $D = [d(i, j)]_{i,j=1,\dots,n}$ za metrični problem trgovskega potnika. Tedaj v času $O(|E(G)|)$ lahko najdemo obhod trgovskega potnika, ki ima vsoto razdalj manjšo ali enako $d(G)$.*

Dokaz. Naj bo W Eulerjev obhod v G . Ker je G povezan, W obišče vse točke $1, 2, \dots, n$. Zato W lahko zapišemo v obliki

$$W = i_1 W_1 i_2 W_2 \dots i_n W_n,$$

kjer so $i_1, i_2, \dots, i_n$ ravno vse točke $1, 2, \dots, n$, vsaka natanko enkrat, vmesne poti W_k pa so lahko tudi trivialne. (V primeru več možnosti za izbiro podzaporedja $i_1, \dots, i_n$, ki obišče vse točke, vzamemo katerokoli tako podzaporedje.) Zaradi trikotniške neenakosti je vsota cen povezav na W_k gotovo večja ali kvečjemu enaka $d(i_k, i_{k+1})$. Od tod trivialno sledi, da cena dobljenega obhoda $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ne more presegati skupne cene vseh povezav v G .

Prej smo že videli, da lahko Eulerjev obhod v G poiščemo v linearnem času. Bralcu pa prepuščamo veselje, da sam ugotovi, kako lahko zatem v linearnem času določimo še potrebno podzaporedje $i_1, i_2, \dots, i_n$. ■

Naslednji postopek poišče obhod trgovskega potnika skozi danih n mest:

1. Poišči minimalno vpeto drevo T v polnem grafu na n točkah, kjer so cene povezav enake danim razdaljam za nalogo trgovskega potnika.
2. Podvôji vsako povezavo v T , da dobiš vpet Eulerjev graf.
3. Poišči Eulerjev obhod v tako dobljenem grafu.
4. Iz dobljenega obhoda določi obhod trgovskega potnika.

Izrek 5. *Gornji postopek z uporabo minimalnega vpetega drevesa je 1-aproksimacijski algoritem za reševanje metričnega problema trgovskega potnika. Njegova časovna zahtevnost je $O(Ln^2)$, kjer je L največja dolžina števil $d(i, j)$ (zapisanih v desetiškem sistemu z decimalno vejico).*

Dokaz. Videli smo že, da gornji postopek res najde obhod trgovskega potnika. Dokazati moramo le še to, da ta obhod ne more biti več kot dvakrat daljši od optimalnega. Le-tega sicer ne poznamo (in ga je zelo težko najti), a potrebovali ga bomo le za primerjavo s T . Recimo torej, da $\Omega^* = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ določa optimalni obhod trgovskega potnika. Iz trikotniške neenakosti in simetričnosti naših razdalj sledi $d(i_k, i_k) \leq d(i_k, i_{k+1}) + d(i_{k+1}, i_k) = 2d(i_k, i_{k+1})$. Zato je $d(i_k, i_{k+1}) \geq 0$. To velja za vsak indeks k med 1 in n ; seveda pa je pri $k = n$ indeks $k + 1$ mišljen „po modulu“ n , torej enak 1. Naj bo sedaj T' vpeto drevo, sestavljeno iz povezav $i_1 i_2, i_2 i_3, \dots, i_{n-1} i_n$. Tedaj je:

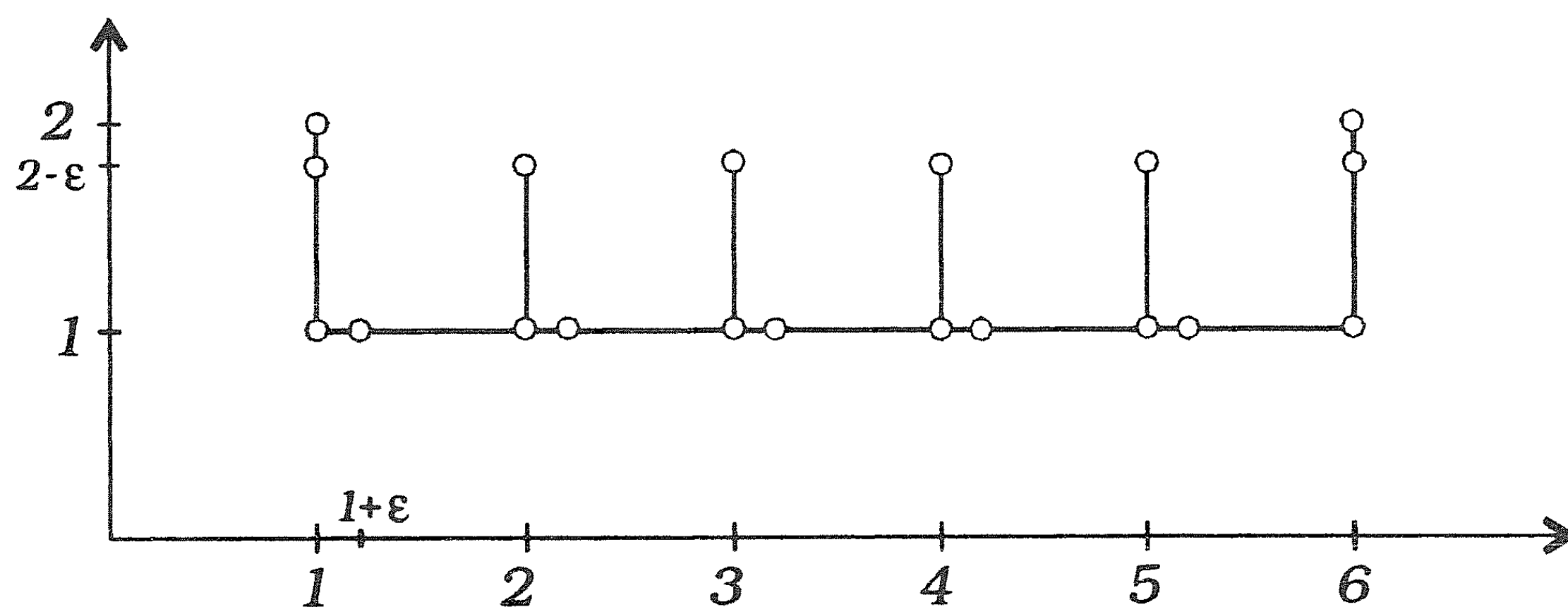
$$d(\Omega^*) = d(T') + d(i_n, i_1) \geq d(T') \geq d(T). \quad (4)$$

Eulerjev graf, dobljen iz T , ima vsoto vrednosti povezav enako $2d(T)$. Če W in Ω označujeta dobljeni Eulerjev obhod in ustrezni obhod trgovskega potnika, tedaj od tod, z uporabo trikotniške neenakosti in iz (4) dobimo:

$$d(\Omega) \leq d(W) = 2d(T) \leq 2d(\Omega^*),$$

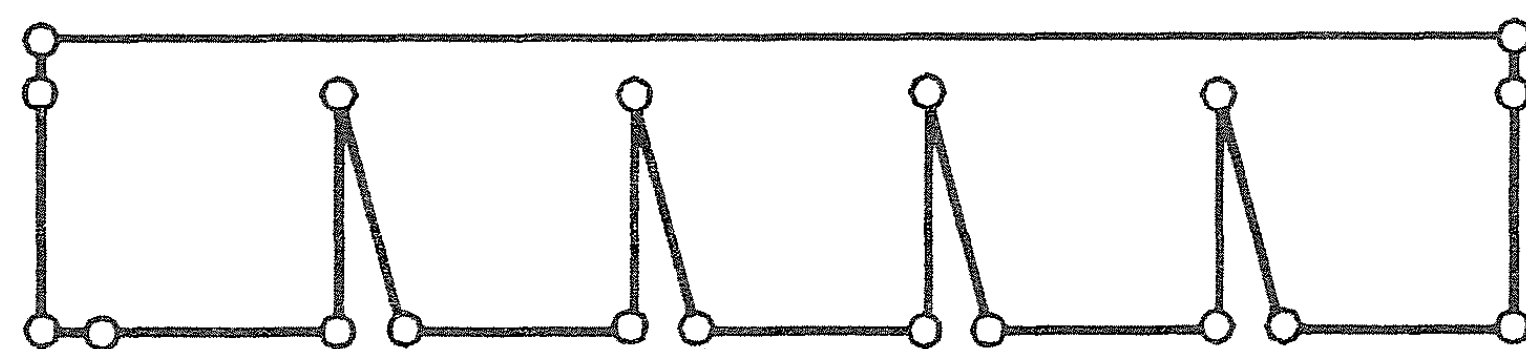
kar smo tudi želeli dokazati.

Poglejmo še časovno zahtevnost našega postopka. Naj bo $n = |V(G)|$. Tedaj iskanje najcenejšega vpetega drevesa porabi $O(Ln^2)$ časa, preostali trije koraki pa se dajo opraviti v linearnem času $O(n)$. Skupna časovna zahtevnost je torej taka, kot pravi izrek.

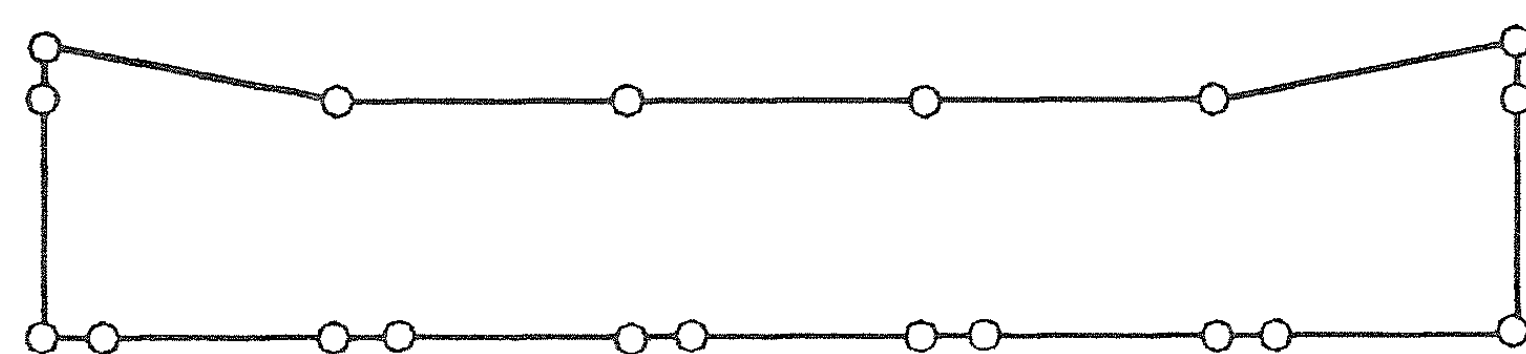


Slika 2. Minimalno vpeto drevo

Oglejmo si postopek še na zgledu. Recimo, da imamo $3n + 1$ mest, ki ustrezajo točkam v ravnini, kot je prikazano na sliki 2 (za $n = 6$) in katerih medsebojne razdalje so enake običajnim razdaljam v $\mathbb{R}^2$. Predpostavimo, da je ε dovolj majhen. Hitro se vidi, da je ustrezno najcenejše vpeto drevo tako, kot je prikazano na sliki 2. Podvojimo mu povezave in vzemimo Eulerjev obhod, ki „se začne” v točki $(1, 2)$, gre navzdol, zavije v $(2, 1)$, skoči do točke $(2, 2 - \varepsilon)$ in nazaj, gre v $(3, 1)$, spet gor in dol itd. Ko tako pridemo do $(n, 1)$, storimo enako, zatem pa se vrnemo „naravnost” na začetek. Ustrezni obhod trgovskega potnika je prikazan na sliki 3.



Slika 3. Ustrezen obhod trgovskega potnika



Slika 4. Boljši obhod trgovskega potnika

Slika 4 kaže, da dobljeni obhod ni optimalen. Če je ε dovolj majhen, pa se hitro vidi, da je dobljeni obhod zelo blizu dvakratni vrednosti obhoda s slike 4.

Opisani zgledi (za poljuben n) dokazujejo, da obdelani postopek v nekaterih primerih najde rešitve, ki so poljubno blizu dvojni vrednosti optimalne rešitve. Zato ta algoritem ni r -aproksimacijski za noben $r < 1$.

5. Christofidesova izboljšava

Enostavno, a učinkovito izboljšavo postopka iz prejšnjega razdelka je našel Christofides [1]. Pri tem postopku najprej poiščemo najcenejše vpeto drevo T , zatem pa namesto podvojitve vseh povezav poiščemo najcenejše prirejanje med točkami lihe stopnje v T . Natančneje povedano: vzamemo vse točke v T , ki so lihe stopnje v T , in vse možne povezave med njimi. Dobljeni (polni) graf ima sodo mnogo točk, saj ima vsak graf sodo mnogo točk lihe stopnje, torej tudi T . V tem grafu z uteženimi povezavami — uteži se ujemajo z razdaljami iz naloge trgovskega potnika — poiščemo najcenejše maksimalno prirejanje, torej prirejanje, ki pokrije vse lihe točke iz T in je vsota razdalj $d(i, j)$ na njem minimalna. Naj bo M dobljeno najcenejše prirejanje. Če drevesu T dodamo povezave iz M , dobimo Eulerjev graf. Označimo ga z G . V tako dobljenem grafu poiščemo Eulerjev obhod in iz njega dobimo obhod Ω trgovskega potnika. Pokazali bomo, da za dolžino obhoda Ω velja:

$$d(\Omega) \leq d(G) \leq \frac{3}{2} \text{Opt}(I).$$

Z drugimi besedami:

Izrek 6. *Zgoraj opisani postopek je $\frac{1}{2}$ -aproksimacijski algoritem za metrični problem trgovskega potnika. Njegova časovna zahtevnost je $O(Ln^3)$, kjer je L največja dolžina števil $d(i, j)$ (zapisanih v desetiškem sistemu z decimalno vejico).*

Dokaz. Označimo s T dobljeno minimalno vpeto drevo in z M minimalno uteženo prirejanje na lihih točkah drevesa T . Naj bo W Eulerjev sprehod v $G = T \cup M$ in Ω ustrezeni obhod trgovskega potnika. Po izreku 4 je vsota razdalj $d(\Omega)$ na obhodu Ω manjša ali kvečjemu enaka $d(G)$, torej:

$$d(\Omega) \leq d(G) = d(T) + d(M). \quad (5)$$

V dokazu izreka 5 smo videli, da za optimalni obhod Ω^* velja neenakost (4). Naj bodo sedaj $i_1, i_2, \dots, i_{2m}$ točke lihe stopnje v T , navedene v istem vrstnem redu, kot se pojavijo na optimalnem obhodu Ω^* . Naj bosta M_1 in M_2 naslednji prirejanji:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{i_1 i_2, i_3 i_4, \dots, i_{2m-1} i_{2m}\} \quad \text{in} \\ M_2 &= \{i_2 i_3, i_4 i_5, \dots, i_{2m} i_1\}. \end{aligned}$$

Zaradi trikotniške neenakosti velja:

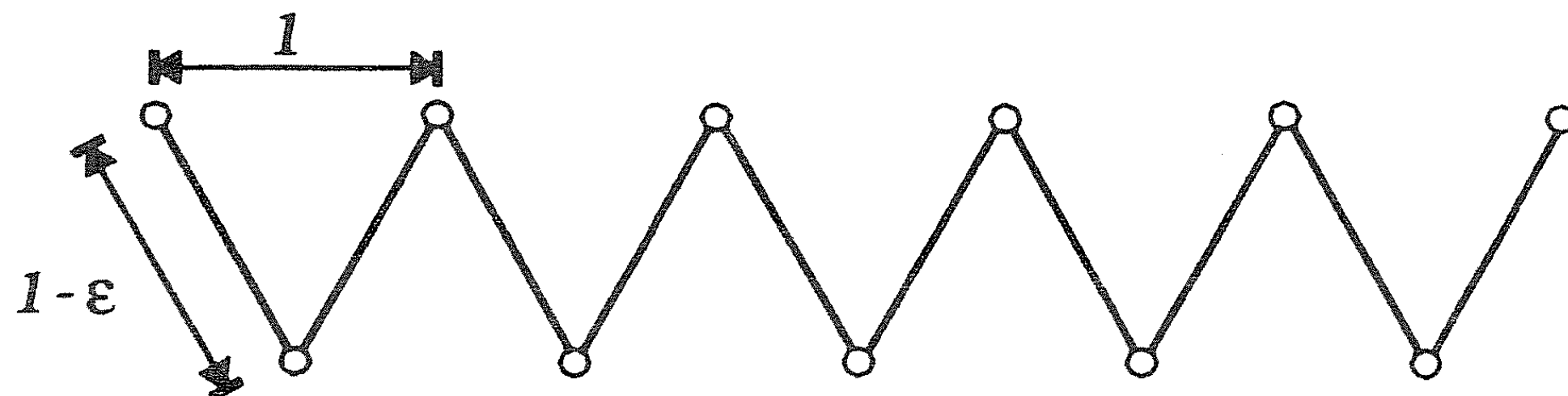
$$d(\Omega^*) \geq d(M_1) + d(M_2) \geq 2 \min\{d(M_1), d(M_2)\} \geq 2d(M).$$

Od tod in iz prej dobljenih neenakosti ((4)) in ((5)) pa sledi:

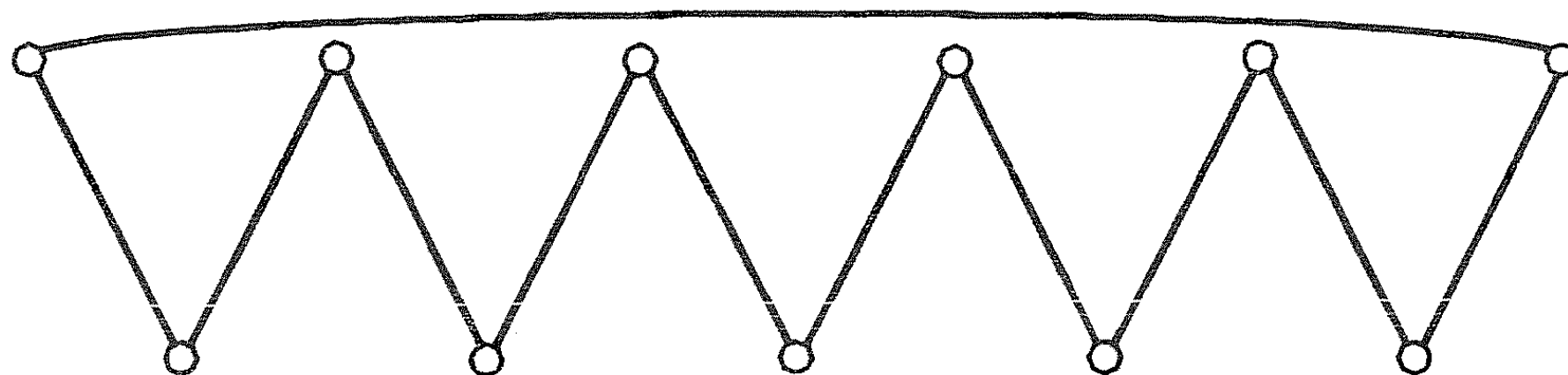
$$d(\Omega) \leq d(T) + d(M) \leq d(\Omega^*) + \frac{1}{2}d(\Omega^*) = \frac{3}{2}d(\Omega^*),$$

kar smo tudi želeli dokazati.

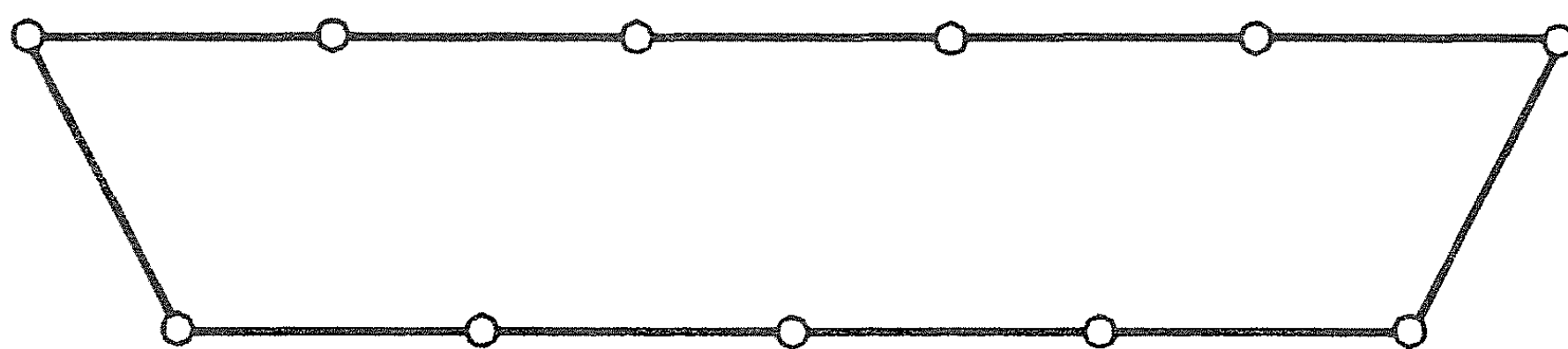
Poglejmo še časovno zahtevnost našega postopka. Naj bo $n = |V(G)|$. Iskanje najcenejšega vpetega drevesa porabi $O(Ln^2)$ časa, zadnja koraka pa sta tudi sedaj linearna. Korak 2 je časovno najrazsipnejši, saj lahko porabi kubično mnogo časa $O(Ln^3)$. Algoritem za iskanje najcenejšega maksimalnega prirejanja je opisan v [6, poglavje 11] in ga na tem mestu ne bomo podrobneje predstavili. Skupna časovna zahtevnost je torej taka, kot trdi izrek. ■



Slika 5. Najcenejše vpeto drevo



Slika 6. Dobljeni obhod trgovskega potnika



Slika 7. Boljši obhod trgovskega potnika

Zgled za Christofidesov postopek bomo spet napravili na primeru, kjer bo dobljena aproksimativna rešitev poljubno blizu trem polovicam vrednosti optimalne rešitve. Zato ta algoritem ni r -aproksimacijski za noben $r < \frac{1}{2}$. Imamo Evklidski problem trgovskega potnika v ravnini. Ustrezne točke so prikazane na sliki 5, kjer je vrisano tudi najcenejše vpeto drevo. Na sliki 6 je prikazan dobljeni obhod trgovskega potnika, na sliki 7 pa še obhod, ki se od dobljenega razlikuje skoraj za faktor $3/2$, če je ε dovolj majhen.

6. Boljši aproksimacijski postopki

Za metrični problem trgovskega potnika smo v prejšnjem razdelku opisali $\frac{1}{2}$ -aproksimacijski postopek. Seveda bi bilo zanimivo najti hitre algoritme, za katere bi lahko pokazali, da še bolje aproksimirajo optimalne rešitve. Za zdaj nam najboljšo znano aproksimacijo zagotavlja v prejšnjem razdelku opisani Christofidesov postopek. Vendar pa ni rečeno, da ne obstajajo še boljši algoritmi. Da pa se pokazati, da poljubno dobrih aproksimacij ne moremo dobiti na enostaven način:

Izrek 7. *Naj bo n število mest pri nalogi trgovskega potnika. Tedaj je iskanje $\frac{1}{3n}$ -aproksimacije za metrični problem trgovskega potnika NP-težko.*

Dokaz izreka 7 je podoben dokazoma izrekov 1 in 2 (prevedba problema Hamiltonovega cikla), zato ga opuščamo. Podrobnosti najdemo npr. v [3]. Problem $\frac{1}{3n}$ -aproksimacije ostane težak tudi tedaj, ko se omejimo na evklidski problem v ravnini $\mathbb{R}^2$.

LITERATURA

- [1] N. Christofides, *Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem*, v Proc. Symp. on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1976.
- [2] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, San Francisco, Freeman, 1979.
- [3] D. S. Johnson, C. H. Papadimitriou, *Performance guarantees for heuristics*, v The traveling salesman problem, Ed. E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan in D. B. Shmoys, John Wiley, 1985, str. 145–180.
- [4] J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, DMFA RS, Ljubljana, 1986.
- [5] M. Lokar (urednik), *Problem trgovskega potnika*, Gradivo za 2. seminar, Izbrana poglavja iz računalništva, Oddelek za matematiko, Ljubljana, 1992.
- [6] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*, Prentice-Hall, 1982.

NOVE KNJIGE

L. LOVÁSZ, *Combinatorial Problems and Exercises*, 2nd edition, Akadémiai Kiadó Budapest, in North-Holland, 1993, 635 str.

Če bi morebiti naslov še lahko zmedel začetnika, pa ga avtorjevo ime zagotovo ne more. László Lovász je imel tako kot vsi drugi izvrstni madžarski kombinatoriki srečo, da se je že od gimnazije naprej šolal pri P. Erdösu in T. Gallaiu. Bistvo madžarske šole kombinatorike in s tem tudi skrivnost njenega uspeha in mednarodne veljave zajema prav naslov te knjige. Učiti se žive, dostopne matematike. Namesto da matematik zakrije sledi svojega razmišljanja in zavije rezultate v celofan ter jim poskuša z dekoracijami povečati vrednost, zahteva madžarska šola razčlenitev metode na posamezne, čimbolj preproste in pregledne korake, da jim lahko sledimo z najmanj matematičnega znanja. Šele ko izluščimo jedro, se pokažejo biseri. Marsikakšen biserček so Madžari predložili kot problem na mednarodnih matematičnih olimpiadah. Kako drugačen pogled na matematiko kot tisti, ki

ga pri nas nekateri močno zagovarjajo: „Študiraj področje in piši nekaj sto strani dolge magisterije, do tedaj pa se varuj reševanja problemov, še posebej nerešenih, saj te lahko problemi pokvarijo”.

Knjiga ima zanimivo strukturo, ki bralca vabi k samostojnemu delu in mu hkrati ne zbuja strahu pred obširno vsebino. Na straneh 15–107 so zastavljeni problemi, razdeljeni na 15 skupin: (1) Osnovno preštevanje, (2) Sito, (3) Permutacije, (4) Klasična problema preštevanja v teoriji grafov, (5) Parnost in dualnost, (6) Povezanost, (7) Faktorji v grafih, (8) Neodvisne množice vozlišč, (9) Barvno število, (10) Ekstremalni problemi, (11) Spektri grafov in slučajni prehodi, (12) Avtomorfizmi grafov, (13) Hipergrafi, (14) Ramseyeva teorija, (15) Rekonstrukcija. Sledijo jim kratki nasveti (za vsak problem) in na straneh 161–604 obširne rešitve. Bralcu je v pomoč in orientacijo petnajst strani dolg slovar osnovnih pojmov. Na koncu so pojasnjene matematične oznake, dodani so: seznam enaindvajsetih učbenikov in monografij, stvarno in imensko kazalo.

Prva izdaja je izšla leta 1979 in šteje 551 strani. Ohranjena je zanimiva struktura knjige. V novi izdaji je dodanih 60 problemov in precej podproblemov. Razširjena je povezava med spektri in slučajnimi prehodi.

Lovász je tako napisal učbenik in pomemben priročnik kombinatorike in teorije grafov. Komu je namenjen? Poglejmo si kar prvi problem:

V trafiki prodajajo k vrst razglednic. Razglednico bi radi poslali vsakemu od n prijateljev. Na koliko načinov lahko to storimo? Kaj pa, če jim hočemo poslati različne razglednice? Kaj pa, če vsakemu hočemo poslati dve različni razglednici (različni naslovniki pa lahko dobijo isto kartico)?

Če vas ta problem ne zanima, potem je bolje, da knjige ne vzamete v roke. Če pa kljub temu menite, da vas matematika zanima, je morda čas, da premislite, ali vas ni nemara šola že preveč pokvarila. Seveda so problemi večinoma težji. Pogosto avtor na koncu rešitve napoti bralca na branje originalnega znanstvenega članka, v katerem je bil problem prvič rešen in kjer lahko najde nadaljnje posplošitve, analogije in reference.

Le nekaj problemov je dostopnih srednješolcem. Več je takih, ki so zanimivi za študente, tudi na podiplomskem študiju. Predavateljem in vsem, ki aktivno delajo na področjih kombinatorike, je ta knjiga dragocen pomočnik.

Bralcu, ki samostojno reši katerikoli problem v knjigi, pa iskrene čestitke!

Tomaž Pisanski

POPRAVEK

V biltenu strokovnega seminarja in 45. Občnega zbora DMFAS je med predavatelji napisan dr. Branko Robnik namesto dr. Marko Robnik. Za napako se dr. Robniku iskreno opravičujemo.

Predsednik DMFAS
France Cvelbar

SUPERTEKOČNOST

JANEZ STRNAD

PACS 67.40.-w, 01.30.Pp

Članek opiše pojave, ki so značilni za supertekoče stanje kapljevinskega helija ^4He , in jih pojasni s kvantno statistično sliko na ravni drugega letnika.

SUPERFLUIDITY

In the article characteristic phenomena of the superfluid state of liquid helium ^4He are described and explained by a simple quantum statistic picture suitable for sophomores.

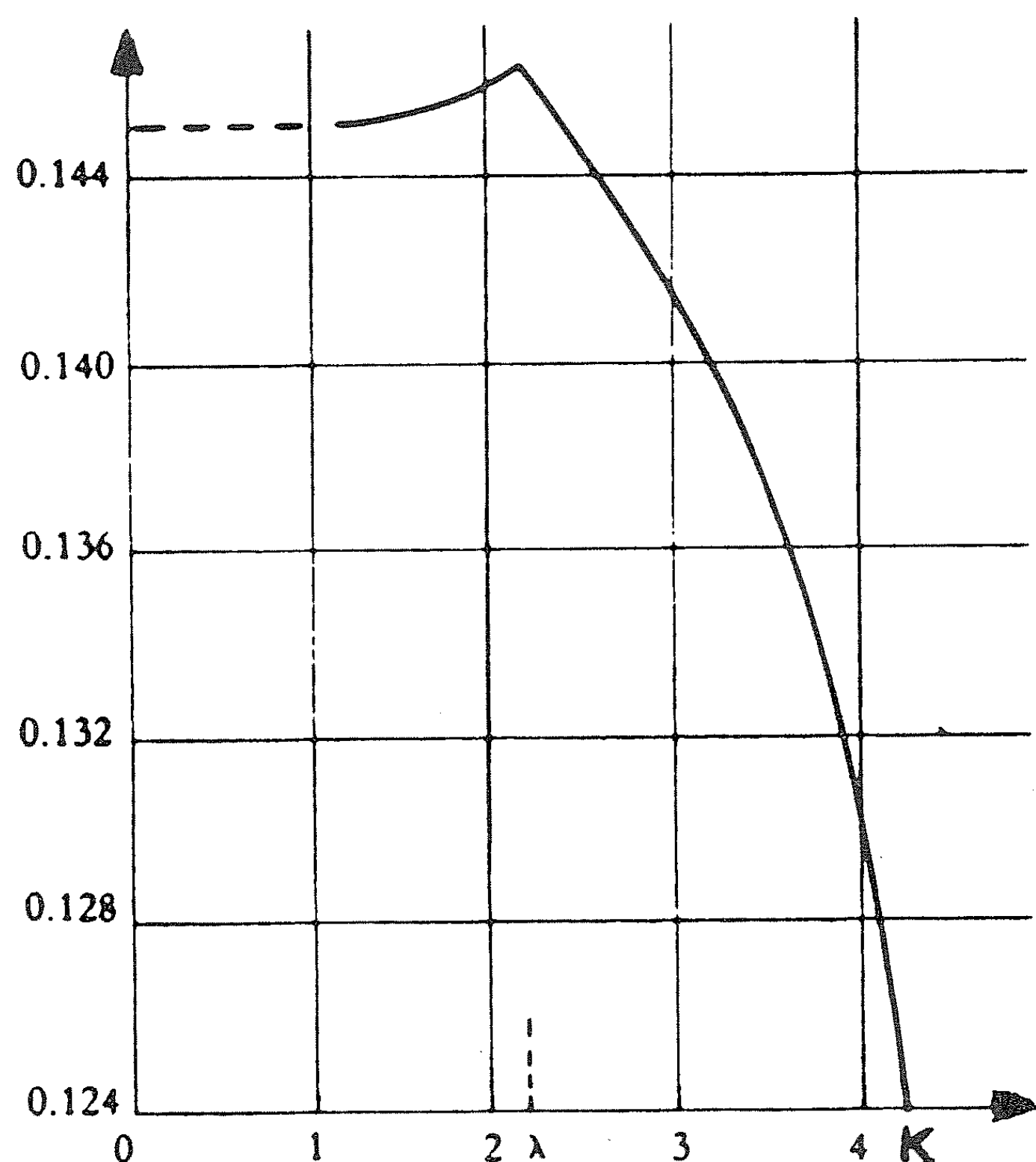
1. Pojavi

V *supertekoče stanje* vodi – enako kot v superprevodno [1] – *zvezni fazni prehod* [2]. Pri takem prehodu ni utajene toplote, kakor jo poznamo pri nezveznem faznem prehodu, ko toploto dovajamo ali odvajamo, pa se temperatura ne spremeni. V podrobnostih so med obema stanjema pomembne razlike. V Obzorniku je izšlo že več člankov o superprevodnosti, o supertekočnosti pa še nobeden. Zato najprej opišemo pojave in jih nato poskusimo preprosto pojasniti.

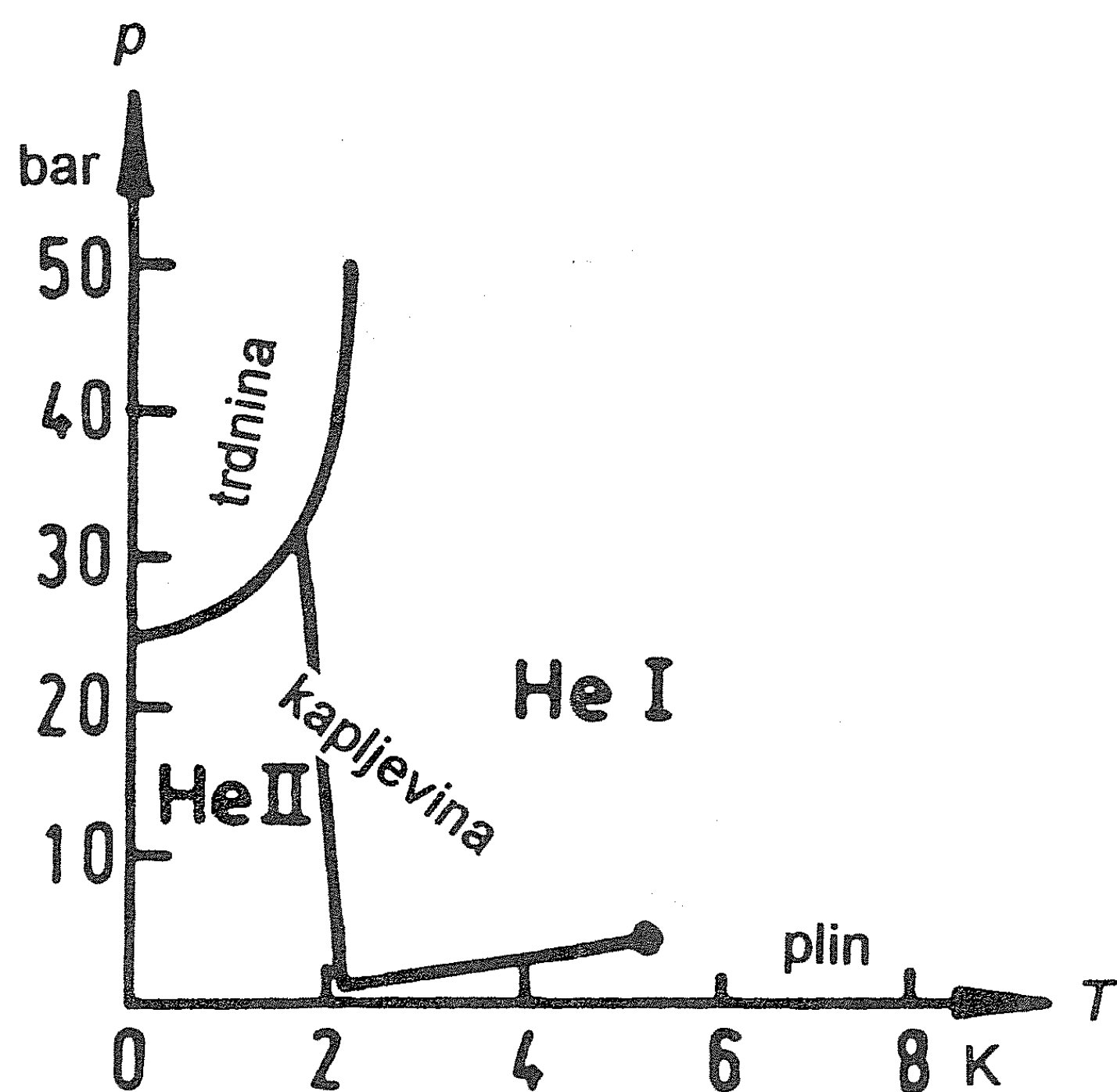
H. Kamerlingh-Onnes je s sodelavcem leta 1924 v leidenskem laboratoriju meril gostoto kapljevinskega helija, edine snovi, ki se pri navadnem tlaku ne strdi pri zelo nizki temperaturi (sl. 1). Ob zniževanju temperature je gostota znatno narasla, pri nižji temperaturi kot 2,2 K pa je ostala domala nespremenjena (sl. 2). V istem laboratoriju je W. K. Keesom s sodelavcem prišel na misel, da gre morda za fazni prehod. Pri temperaturi prehoda T_0 navadni kapljevinski helij, *helij I*, prehaja v kapljevinski *helij II* z nenavadnimi lastnostmi. Z drugim sodelavcem je W. H. Keesom leta 1932 dobil za temperaturno odvisnost specifične toplote okoli temperature 2,17 K značilno krivuljo v obliki črke λ (sl. 3) [4], [5].

Opazili so, da nad to temperaturo kapljevina vre, če dovolj močno odčrpavajo plin. Zaradi izparevanja se njena temperatura zniža pod temperaturo okolice, kapljevina prejema toploto iz okolice in v njej, predvsem ob steni posode, nastajajo mehurji. Toda brž ko temperatura pade pod T_0 , mehurji ne nastajajo več. Leta 1935 sta W. H. Keesom in njegova sestra A. P. Keesom ugotovila, da prehaja pod temperaturo T_0 skozi cevko s helijem nenavadno velik toplotni tok, kakih dvestokrat večji, kot bi ga pri sobni temperaturi ob enaki temperaturni razliki prevajal baker.

P. L. Kapica je najprej delal poskuse s kapljevinskim helijem v Caven-dishevem laboratoriju v Cambridgeu in jih nadaljeval leta 1937 v Moskvi. Pomislil je, da kapljevinski helij pod T_0 toplote ne prevaja zelo dobro, ampak jo le izredno dobro prenaša s konvekcijo. Zamisel je preskusil tako, da je opazoval tok helija v špranji med vzporednima zbrušenima šipama. Dokler je bila temperatura višja kot T_0 , je bil tok skozi pol mikrometra debelo špranjo neznaten, a ko je padla pod T_0 , se je povečal, kot da bi viskoznost



Slika 1. Fazni diagram helija pri nizki temperaturi [10].

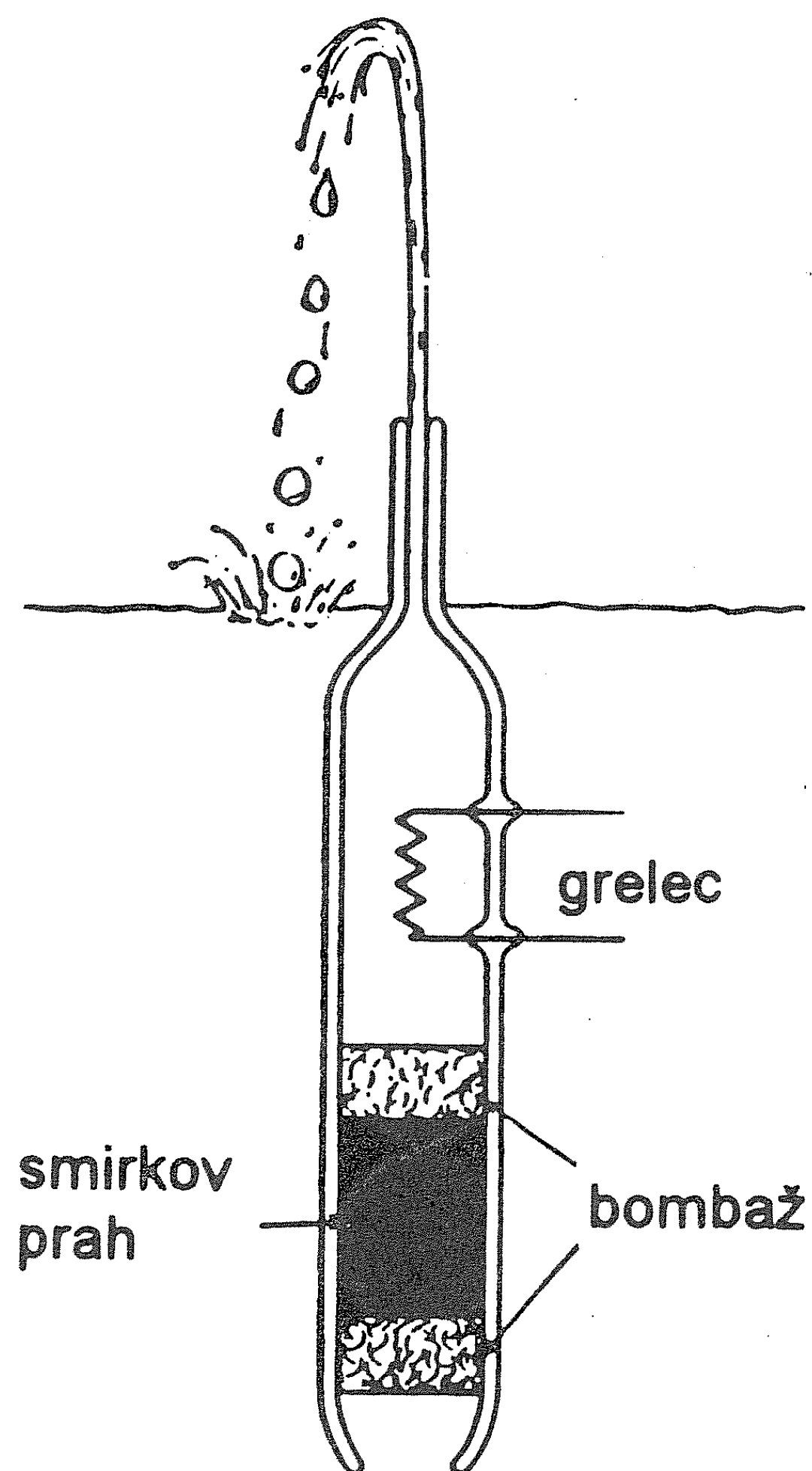


Slika 2. Temperaturna odvisnost gostote kapljevinskega helija po Kamerlingh-Onnesu in Boksu [3].

postala nemerljivo majhna. Zato je helij II imenoval *supertekoči* (*superfluidni*) helij in pojav *supertekočnost* (*superfluidnost*).

Po tem je bilo mogoče pojasniti, zakaj v kapljevini pod temperaturo prehoda prenehajo nastajati mehurji. Toplota se tako dobro prenaša s konvekcijo, da ima vsa kapljevina enako temperaturo. A opazili so nove nenavadne pojave. V posodici s helijem se je gladina znižala ali zvišala in izravnala z gladino v posodi, čeprav je obe gladini ločevala visoka stena. Ugotovili so, da se giblje po steni več deset nanometrov debela *polzeča plast*, ki doseže hitrost več deset centimetrov na sekundo. Podobna plast nastane ob steni, če jo namoči navadna kapljevina, vendar sega le malo nad gladino in miruje.

Opazili so „vodometa“. Navpično cevko z luknjičavim zamaškom so potopili v helij in ga ohladili. Nato so kapljevino nad zamaškom segreli. Iz šobe na vrhu cevke je brizgal droben curek (sl. 4).



Slika 4. „Vodomet“ s supertekočim helijem [5].

Za nekatere izide poskusov se je zdelo, da nasprotujejo drugim izidom. Supertekoči helij pri toku skozi tanke cevke ali špranje ni kazal viskoznosti. Merjenje z nihalom na torzijsko žičko, ki ga je sestavljalo več na os pravokotnih sljudnih ploščic, pa je dalo domala enako viskoznost kot pri navadnem kapljevinskem heliju. Loputa pred cevko, skozi katero je tekla toplota, se je odklonila in s tem pokazala, da je toplotni tok povezan s snovnim tokom. Toda v posodi, iz katere je izhajala cevka, se gladina helija ni znižala.

2. Bosejeva kondenzacija

Pri nadaljnji razlagi supertekočnosti si pomagamo s poenostavljeno statistično sliko *Bosejevega plina*, ki si ga mislimo sestavljenega iz neodvisnih atomov. Zadeve se lotimo tako, kakor je v navadi v kvantni statistični mehaniki [6]. Število nerazločljivih atomov podamo za diskretni in zvezni primer:

$$N_i = S F_i, \quad dN = S F(W) dg. \quad (1)$$

Atomi helija imajo spin $s = 0$, tako da je zanje statistični faktor $S = 2s + 1 = 1$. V prihodnje bomo v enačbah to upoštevali. Za delce s celim spinom – *bozone* – na splošno ne velja Paulijeva prepoved. V tem primeru je lahko v istem enodelčnem stanju več atomov. Zato pričakujemo, da so v osnovnem stanju plina vsi atomi v najnižjem enodelčnem stanju. Temu stanju je smiselno prirediti energijo $W = 0$.

V našem primeru je N_i število atomov v enodelčnem stanju z energijo W_i , pri tem pa smo vzeli, da so enodelčna stanja nedegenerirana; za stopnjo degeneracije smo postavili $g_i = 0$. Zagotovo velja to za najnižje enodelčno stanje. Zasedbeno število F_i pove, koliko atomov je v enodelčnem stanju z energijo W_i . dN je število atomov v enodelčnih stanjih na pasu dW okoli energije W . Zasedbeno število $F(W)$ pove, koliko atomov je v enem enodelčnem stanju na tem energijskem intervalu, dg pa je število enodelčnih stanj na pasu dW . Za bozone moramo uporabiti podatek za *Bosejevo porazdelitev*:

$$F_i = \frac{1}{e^{L e^{W_i/kT}} - 1}, \quad F(W) = \frac{1}{e^{L e^{W/kT}} - 1}. \quad (2)$$

Eksponent v imenovalcu, L , je Lagrangeov multiplikator, ki pri računanju vezanega ekstrema upošteva zahtevo, da je število atomov v sistemu dano [6]:

$$N = \sum_i N_i, \quad N = \int F(W) dg.$$

Pri svetlobi imajo fotoni lastno energijo nič in pri zelo nizki frekvenci za nastanek fotona potrebujemo zelo malo energije. Zato ne moremo posebej zahtevati, da je število fotonov dano. Pri obravnavanju elektromagnetnega valovanja, na primer ko izpeljemo Planckov zakon, postavimo $L = 0$.

(Elektromagnetno valovanje ima dve neodvisni polarizaciji: $S = 2$.) Tako navadno nimamo izkušenj z Bosejevim zasedbenim številom (2) s koeficientom $L \neq 0$, dokler se ne lotimo supertekočnosti. Ne da bi poskusili trditev utemeljiti, povejmo še, da je multiplikator $L = -\mu/kT$ povezan s kemijskim potencialom, to je specifično prosto entalpijo, μ [2], [7].

V zvezni porazdelitvi potrebujemo še gostoto stanj dg/dW . Najprej ugotovimo, da je element faznega prostora $4\pi p^2 dpV$ in da ustreza enemu stanju celica s prostornino h^3 . Potem upoštevamo, da ima prost helijev atom z maso m_1 samo kinetično energijo $W = \frac{1}{2}p^2/m_1$, in je $dp = (m/2W)^{1/2}dW$. Naposled dobimo

$$\frac{dN}{V} = \frac{2\pi(2m_1)^{3/2}W^{1/2}dW}{h^3(e^{-\mu/kT}e^{W/kT} - 1)}. \quad (3)$$

Izraz dN/V ne sme biti negativen, zato mora veljati $-\mu + W \geq 0$ ali $-\mu \geq 0$, saj je najnižja energija $W=0$.

V približku bi radi postavili kemijski potencial μ enak nič. Pri energiji $W = 0$ to ni mogoče, ker tedaj naraste eksponentni izraz čez vse meje. Iz težav se izvijemo, če stanje pri energiji $W = 0$ obravnavamo posebej kot diskretno *osnovno stanje*, v katerem ima kemijski potencial zelo majhno negativno vrednost. Druga stanja pri višji energiji, $W > 0$, pa obravnavamo z zvezno porazdelitvijo pri kemijskem potencialu nič. Pri temperaturi prehoda T_0 je osnovno stanje še popolnoma nezasedeno. Pri vse nižji temperaturi pod T_0 pa atomi čedalje bolj prehajajo v osnovno stanje in so blizu absolutne ničle $T = 0$ vsi v njem.

V stanjih z energijo $W > 0$ dosežejo atomi največjo gostoto seveda pri najnižji temperaturi, pri kateri osnovno stanje še ni zasedeno, to je pri T_0 . To gostoto dobimo iz (3) za $\mu = 0$ pri T_0 :

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{V} &= \int_0^\infty \frac{2\pi(2m_1)^{3/2}W^{1/2}dW}{h^3(e^{W/kT_0} - 1)} = 2\pi \left(\frac{2m_1 k T_0}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}du}{e^u - 1} = \\ &= 2,61 \left(\frac{2\pi m_1 k T_0}{h^2} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pri tem smo upoštevali vrednost Riemannove funkcije

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\infty u^{1/2}du/(e^u - 1) = 2,61.$$

Iz enačbe izračunamo temperaturo prehoda

$$T_0 = \frac{h^2}{2\pi m_1 k} \left(\frac{N_0}{2,612V} \right)^{2/3}. \quad (5)$$

Navadni kapljevinski helij ima nad temperaturo prehoda T_0 gostoto 146 kg/m^3 (sl. 2). Ta podatek delimo z maso atoma helija $m_1 = 4u = 4 \text{ kg}/N_A = 6,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ in z $N_0/V = 2,18 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ dobimo $T_0 = 3,1 \text{ K}$, kar je samo za okoli 50 % preveč.

Pri nižji temperaturi, $T < T_0$, izračunamo število atomov $N_{W>0}$ v vseh stanjih pri energiji $W > 0$ z enačbo (4), preostanek atomov, to je $N_{W=0} = N - N_{W>0}$, pa je v osnovnem stanju:

$$N_{W>0} = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad N_{W=0} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right]. \quad (6)$$

Število atomov v osnovnem stanju zares postopno narašča od 0 do N , ko pojema temperatura od T_0 do 0. Pojav, da se nabirajo atomi v osnovnem stanju s kinetično energijo 0, imenujejo *Bosejevo*, *Einsteinovo* ali *Bose-Einsteinovo kondenzacijo*, čeprav se plin v navadnem pomenu besede ne utekočinja.

K notranji energiji plina pri $T < T_0$ prispevajo samo atomi v višjih enodelčnih stanjih, atomi v osnovnem stanju pa ne. Zato notranjo energijo plina pri $T < T_0$ izračunamo z integralom (4) z $\mu = 0$ prek zvezno porazdeljenih stanj z

$W > 0$:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^\infty \frac{2\pi(2m_1)^{3/2} V W^{3/2} dW}{h^3(e^u - 1)} = \\ &= 2\pi kTV \left(\frac{2m_1 kT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{u^{3/2} du}{e^u - 1} = 2,01 kTV \left(\frac{2\pi m_1 kT}{h^2} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali vrednost Riemannove funkcije

$$\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = (4/3\sqrt{\pi}) \int_0^\infty u^{3/2} du / (e^u - 1) = 1,34.$$

Toplotna kapaciteta pri konstantni prostornini

$$C_V = \frac{\partial W_n}{\partial T} = \frac{5W_n}{2T}$$

je sorazmerna s $T^{3/2}$. Izračunajmo še entropijo

$$S = \int_0^T \frac{C_V dT}{T} = \frac{5W_n}{3T}.$$

Količine, ki smo jih izračunali za $T < T_0$, so pri temperaturi prehoda T_0 zvezne. Toplotna kapaciteta meri pri tej temperaturi $C_V = 1,28 \cdot \frac{3}{2} kN_0$ in ima koleno: pri višji temperaturi pojema, česar pa ni mogoče preprosto ugotoviti [2], [7]. Iz energijskega zakona $dW_n = dQ + dA = TdS - pdV$ dobimo še tlak

$$p = T \frac{\partial S}{\partial V} - \frac{\partial W_n}{\partial V} = \frac{2W_n}{3V}.$$

Pod temperaturo T_0 je tlak Bosejevega plina torej sorazmeren s $T^{5/2}$ in neodvisen od prostornine.

3. Malo zgodovine

Pot do Bosejeve kondenzacije sodi v eno od bolj zanimivih zgodb v razvoju fizike [8]. Leta 1924 je dotlej domala neznani indijski fizik Satyendranath Bose poslal Albertu Einsteinu angleški rokopis članka, ki so ga v angleški fizikalni reviji *Philosophical Magazine* odklonili. Prosil ga je, naj priporoči reviji *Zeitschrift für Physik*, da objavi prevod, če se mu zdi to vredno. Einstein je članek sam prevedel in prevod objavil s pohvalno pripombo, tako da Bosejevo delo postalo zelo znano. V članku je Bose izpeljal Planckov zakon na nov način. Fotone je obravnaval kot delce – ni torej zahteval, da je število fotonov dano – in do gostote stanj do zasedbenega števila z $L = 0$ prišel nekako tako, kot je danes v navadi [6]. V članku je uvedel pomembne novosti, ne da bi jih posebej utemeljil.

Einstein, ki se je tedaj v kvantni mehaniki ukvarjal tudi s plinom molekul, ne fotonov, je uporabil Bosejev prijem in s faktorjem $e^{L(T)}$ upošteval, da je število molekul dano. Izpeljal je enačbe, podobne zapisanim, in trdil, da „z naraščajočo gostoto čedalje več molekul prehaja v osnovno stanje (v katerem imajo kinetično energijo nič)”. Po njegovem mnenju so nekateri upravičeno opozarjali na to, da pri tem molekul ne obravnavamo kot statistično popolnoma neodvisne, ker uvedemo „za zdaj dokaj misteriozno domnevo o medsebojnem vplivu molekul.” Danes vemo, da se za tem skriva zahteva, da je valovna funkcija simetrična proti zamenjavi katerekoli molekule z drugo. Leta 1924 je v pismu zapisal: „Od neke temperature molekule ‘kondenzirajo’ brez posebnih sil, to je, se nabirajo pri hitrosti 0. Teorija je lepa, ampak ali je kaj na njej?” Naslednje leto je omenil možnost, da bi do „kondenzacije” lahko prišlo v vodik, helij in plinu prevodniških elektronov. Ne smemo pozabiti, da tedaj še niso poznali Fermi-Diracove porazdelitve in Paulijeve prepovedi. Potem ko so leta 1926 uvedli to porazdelitev, sta celo Pauli in Dirac najprej menila, da je treba za plin molekul vselej uporabiti to porazdelitev. Šele v naslednjem letu se je razjasnilo, da je Fermi-Diracova porazdelitev vezana na Paulijevo prepoved in ta na delce s polovičnim spinom. Do leta 1938 je ostala Bosejeva kondenzacija na glasu „kot čisto imaginarna”. Tedaj je Fritz London fazni prehod helija I v helij II poskusil pojasniti s to kondenzacijo.

4. Teorija supertekočnosti

Heliju II potemtakem ustrezajo atomi v osnovnem enodelčnem stanju in heliju I atomi v vzbujenih enodelčnih stanjih. Na tej osnovi je L. D. Landau v letih 1940 in 1941 razvil podrobnejšo teorijo. Nekaj potez je napovedal že prej L. Tisza. Leta 1954 je teorijo dopolnil R. P. Feynman. Teoriji ne moremo slediti v podrobnosti, le poenostavljeno poskusimi opisati nekatere njene posledke. Kapljevinski helij se pod temperaturo T_0 vede, kot da bi ga sestavljali navadna sestavina z atomi v vzbujenih stanjih in supertekoča sestavina z atomi v osnovnem stanju. Navadna sestavina se giblje kot vsaka viskozna kapljevina, supertekoča pa ima nemerljivo majhno viskoznost.

Prva in druga sestavina se lahko gibljeta druga v drugi, ne da bi se motili. Navadna sestavina lahko prenaša toploto, supertekoča sestavina pa ne. Zdi se, kot da toplota v heliju pri nizki temperaturi ne bi bila vezana na snov.

S tem pojasnimo presenetljive izide poskusov. Pri gibanju po tanki cevki ali špranji helij ne kaže viskoznosti, ker prispeva k toku samo supertekoča sestavina. Viskoznost pri nihanju torzijskega nihala s ploščicami pa povzroča navadna sestavina. Ker skozi cevko ali špranjo odteka supertekoča sestavina, ki ne prenaša toplote, preostane v posodi kapljevina z višjo temperaturo. Razmerje med deležem supertekoče in navadne sestavine je odvisno samo od temperature. Čim nižja je temperatura, tem večji je delež atomov v osnovnem stanju. Na kraju, kjer je temperatura nižja kot v okolici, nastane iz dela navadne sestavine supertekoča, na kraju, kjer je temperatura višja kot v okolici, pa iz dela supertekoče sestavine navadna.

Že leta 1939 so poskusi podprli misel, da preostane v posodi, iz katere izteka kapljevina zaradi tlaka, kapljevina z višjo temperaturo. P. L. Kapica je nekoliko pozneje, ko je potiskal helij s tlakom skozi luknjičasto snov, izmeril temperaturno razliko 0,3 do 0,4 K.

„Vodomet“ tudi ni težko razumeti. Skozi luknjičasti zamašek teče supertekoča sestavina, a del se je med tokom spremeni v navadno sestavino. Ob segrevanju kapljevine v delu pod šobo še nadalje naraste delež navadne sestavine. Navadna sestavina se giblje s kraja, kjer je njen delež večji, na kraj, kjer je njen delež manjši, in prav tako superprevodna sestavina. Prva sili s kraja z nižjo temperaturo na kraj z višjo, druga pa s kraja z višjo temperaturo na kraj z nižjo. Ker pa navadna sestavina ne more skozi luknjičasti zamašek, se kopiči pod šobo in brizga skozi njo.

Loputo pred cevko s tokom odkloni navadna sestavina. Posoda pa ostane polna, ker v nasprotni smeri teče supertekoča sestavina. Ta sestavina ne izvaja sile na loputo, ker je njen tok popolnoma brezvrtinčen, v takem toku pa kapljevina na oviro ne izvaja sile. O tem se je P. L. Kapica prepričal z nekakšnim Segnerjevim kolesom, drobno stekleno turbinico s šestimi tangentno zakrivljenimi cevkami. Turbinica se je zavrtela dvakrat v sekundi, ko je s svetlobo segrel helij v njej. Navadna sestavina je delovala v cevkah z nasprotno silo curka in jo spravila v vrtenje. Turbinica pa se ni vrtela, ko je s srebrno žičko pred vsako ustje cevke pritrdil na cevko drobno loputo. Sila curka na loputo je izravnala nasprotno silo curka na cevko.

Pri zelo poučnem poskusu so zavrteli posodo s helijem pri nizki temperaturi. Pokazalo se je, da se vrti s posodo v stacionarnem stanju samo majhen del helija. To je bila prav navadna sestavina, in tako so lahko neposredno izmerili delež supertekoče sestavine. Po pričakovanju so ugotovili, da delež narašča, ko temperatura od T_0 pojema proti absolutni ničli.

L. D. Landau in L. Tisza sta neodvisno drug od drugega napovedala *drugi zvok*. V kapljevini lahko nastane navaden zvok, to je longitudinalno valovanje, v katerem potujejo zgoščine in razredčine, če se navadna in supertekoča sestavina gibljeta vstric. Lahko pa se obe sestavini gibljeta v nasprotnih smereh. Tedaj potuje po kapljevini motnja, *drugi zvok*, s precej

manjšo hitrostjo kot zvok. Najprej se ni posrečilo zaznati tega nenavadnega pojava. Piezoelektrični izvir je oddajal le navadni zvok. Vprašanje je razrešil leta 1944 V. L. Ginzburg. V heliju ne morejo nastati razredčine in zgoščine, ko se obe sestavini gibljeta druga proti drugi: gostota ostane v prvem približku nespremenjena. Toda navadna sestavina nosi toploto, supertekoča pa ne. Zato na določenem kraju niha toplota glede na ozadje z zelo nizko temperaturo, se pravi, da niha temperatura. V sosednji točki je nihanje zakasnjeno, odvisno od razdalje. V. P. Peškov je zares vzbudil drugi zvok z drobnim grelcem z nihajočo temperaturo in ugotovil, da se njegova hitrost dobro ujema z napovedjo.

Na koncu je treba opozoriti, da samo z idealnim Bosejevim plinom še ne moremo pojasniti supertekočnosti. V mikroskopskem opisu moramo upoštevati šibko odbojno silo med atomi. Zaradi nje pride v kapljevini do osnovnih vzbuditev, ki jih v kvantni mehaniki, to je mikroskopsko, opišemo kot fonone, makroskopsko pa kot zvok. Supertekoče stanje lahko nastane, če je hitrost osnovnih vzbuditev večja kot hitrost kapljevine. V idealnem plinu bi bila energija osnovne vzbuditve sorazmerna s kvadratom njene gibalne količine, tako da bi bila njena hitrost enaka nič s tem pa tudi mirujoča kapljevina ne bi mogla biti supertekoča. Pri majhni gibalni količini je energija fonona sorazmerna z gibalno količino in je hitrost osnovnih vzbuditev končna. Kapljevina je supertekoča, če se giblje počasneje od te končne hitrosti. Pri večji gibalni količini je odvisnost energije osnovne vzbuditve od gibalne količine bolj zapletena. Na delu tega območja, na katerem vsebuje energija člen, ki je sorazmeren s kvadratom gibalne količine, se pojavijo druge osnovne vzbuditve – *rotoni* [9], [10]. Pri temperaturi okoli 0,6 K so fononi in rotoni približno enako zastopani, pri višji temperaturi pa prevladujejo drugi. Spekter obojih osnovnih vzbuditev je raziskal že L. D. Landau, R. P. Feynman pa je njegove ugotovitve dopolnil.

Drugače kot težji izotop helija ^4He , ki ima spin jedra 0, ima lažji izotop ^3He spin jedra $\frac{1}{2}$. Za lažji izotop helija, ki ga je v naravnem heliju le $1,5 \cdot 10^{-6}$, potemtakem velja Paulijeva prepoved. Zanj je treba uporabiti Fermi-Diracovo porazdelitev. Potem ko so pridobili čisti lažji izotop, so ugotovili, da tudi ta kaže nenavadne lastnosti kvantne kapljevine in da postane supertekoč, a šele pri temperaturi nekaj tisočin kelvina.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Superprevodnost*, Obzornik mat. fiz. **40** (1993) 110.
- [2] I. Kuščer in S. Žumer, *Toplota*, DMFA, Ljubljana 1987.
- [3] P. A. Tipler, *Foundations of Modern Physics*, Worth Publ., New York 1969.
- [4] E. M. Lifshitz, *Superfluidity*, Sci. Am. **198** (1958) 30 (6).
- [5] R. B. Leighton, *Principles of Modern Physics*, McGraw-Hill, New York 1959.
- [6] J. Strnad, *Fizika*, IV. del, DZS, Ljubljana 1982.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, Pergamon, Oxford 1988, str. 180.

- [8] A. Pais, "Subtle is the Lord..." *The Science and Life of Albert Einstein*, Oxford; University Press, Oxford 1982; O. Theimer, B. Ram, *The beginning of quantum statistics: A translation of "Planck's law and the light quantum hypothesis" by Satyendranath Bose*, Am. J. Phys. 44 (1976) 1056.
- [9] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon, Oxford 1976.
- [10] W. Greiner, *Theoretische Physik*, Band 4a, *Quantentheorie. Spezielle Kapitel*, H. Deutsch, Frankfurt 1980.

NOVE KNJIGE

R. LUPTON, *Statistics in theory and practice*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1993, 188 + 10 str.

Kot pravi avtor, so knjige iz statistike bodisi zbirke receptov, kako se lotiti konkretnih problemov, ki se pojavijo v praksi, bodisi bolj ali manj debele teoretične razprave o matematičnih osnovah statistike. Njegovo delo skuša biti nekaj vmesnega, namreč do neke razumne mere rigorozen uvod v tiste dele matematične statistike, ki jo pri svojem eksperimentalnem delu potrebuje današnji znanstvenik, pa naj bo naravoslovec ali ekonomist.

Avtor, ki sicer sodeluje v astrofizikalnih raziskavah na Univerzi v Princetonu, ima gotovo izkušnje s praktičnimi problemi, vendar si je knjigo zamislil strogo teoretično. Nivo obravnave nekoliko presega elementarno podajanje snovi in je označen z „advanced undergraduate level“. Knjiga predpostavlja poznavanje osnov teorije verjetnosti vključno s karakterističnimi funkcijami in limitnimi izreki. Sicer uporablja precizne matematične formulacije, vendar je bolj kot z matematičnega pisana s stališča (teoretične) fizike. Dokazi trditev pogosto niso popolnoma izdelani, ampak bolj nakazani, večkrat izpeljani z uporabo (inteligentnega) ugibanja in citiranja drugih virov (zlasti Kendallove in Stuartove obširne monografije *The advanced theory of statistics*). Obravnavana snov spada sicer v elementarno statistiko oziroma teorijo statističnega sklepanja (porazdelitve vzorčnih statistik, ocenjevanje parametrov, preskušanje statističnih hipotez, linearna regresija). Od standardnih poglavij manjka le analiza variance, ekonomisti in nekateri drugi uporabniki pa bodo morda pogrešali tudi analizo časovnih vrst.

Kljub začetnemu opozorilu, da gre za teoretično delo, je za statistično knjigo kar nekoliko presenetljivo, da ne vsebuje skoraj nobenih konkretnih zgledov (z realnimi podatki) in sploh nobenih statističnih tabel. Namesto njih pa je dodanih 90 teoretičnih problemov, ki skupaj z rešitvami na koncu knjige primerno dopolnjujejo tekst.

Naspoh bi rekel, da Luptonovo delo ni primerno kot učbenik, iz katerega bi začetnik črpal prve informacije o statistiki (to velja zlasti za naše razmere). Za ta namen je izpeljava preveč pomanjkljiva. Koristno pa bo za bralca, ki že ima nekaj tovrstnega znanja (npr. za bralca, ki je preštudiral Jamnikovo Matematično statistiko). Zanj bo dobrodošel priročnik, nekakšen kratek koncizen povzetek matematičnih vidikov statistike.

Milan Hladnik

PROFESOR PETER GOSAR — SEDEMDESETLETNICA

Prof. dr. Peter Gosar, raziskovalec fizike in univerzitetni učitelj, je pred kratkim praznoval sedemdesetletnico. Profesor Gosar je začetnik teoretičnih raziskav trdnih snovi pri nas in eden stebrov ljubljanske fizikalne šole, zato je njegov osebni praznik tudi prijeten trenutek za slovensko fiziko.

Peter Gosar je fiziko študiral na Univerzi v Ljubljani, kjer je diplomiral leta 1951 in leta 1956 obranil doktorsko disertacijo. Svojo raziskovalno pot je začel v laboratoriju za polprevodnike pri Inštitutu za elektrovezve v Ljubljani in jo nadaljeval v novo nastali skupini za teoretično fiziko na tedanjem Nuklearnem inštitutu Jožef Stefan. Od leta 1960 je zaposlen na Oddelku za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, kjer je bil leta 1971 izvoljen v naziv rednega profesorja.

Znanstveno delo profesorja Gosarja je bilo ves čas posvečeno fiziki trdnih snovi. V uglednih mednarodnih strokovnih revijah je objavil več kot 50 znanstvenih člankov. Zlasti odmevni so njegovi prispevki, kjer obravnava transportne in dinamične probleme v trdnih snoveh: protonsko prevodnost v ledu, fiziko paraelastičnih centrov, elektrone v molekulskih in neurejenih kristalih in gibanje malih polaronov. Profesor Gosar je gostoval dalj časa v večih tujih priznanih laboratorijih: v Bellevueju, v Chapel Hillu in v Grenoblu. Sodeloval je na številnih mednarodnih strokovnih srečanjih, večkrat z vabljenimi in uvodnimi predavanji. Ni zanemarjal tudi širjenja znanja o fiziki trdne snovi v širšem krogu fizikov, kar kaže njegovih 20 prispevkov v domače strokovne revije.

Za raziskave protonske prevodnosti je prejel profesor Gosar leta 1964 Kidričevo nagrado. Slovenska akademija znanosti in umetnosti ga je leta 1969 izvolila za svojega dopisnega, leta 1976 pa za rednega člana. Za svoje delo je bil odlikovan z Redom dela z zlatim vencem.

Izredna je pedagoška in mentorska dejavnost profesorja Gosarja. Njegova predavanja predmetov teoretične fizike veljajo za vzorna, ker kljub zahtevnosti vedno uspe najti ravnovesje med matematično strogostjo in fizikalno idejo. V zadnjem desetletju je prevzel vlogo glavnega izpraševalca pri zaključnih izpitih, kar bo nedvomno ostalo v spominu mlajših generacij fizikov.

Profesor Gosar je bil več let predsednik Znanstvenega sveta Instituta Jožef Stefan, predstojnik Oddelka za fiziko in predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov. Bil je tudi član komisije za Kidričeve nagrade, član predsedstva Raziskovalne skupnosti in predsednik njene področne komisije za matematično - fizikalne vede.

Neprecenljiv je vpliv, ki so ga imela pretehtana mnenja profesorja Gosarja o ključnih vprašanjih slovenske znanosti in univerze, pa tudi o konkretnih problemih njegovega delovnega okolja. Pri tem ga niso premotila trenutna politična in finančna razmerja, vodil ga je le pogled v prihodnost stroke in slovenske družbe. Tako je tudi njegova zasluga, da je fizika danes

ena od najbolj zdravih vej slovenske znanosti. In kar je za širši krog njegovih kolegov zlasti pomembno, da ostrejši strokovni argumenti nikoli niso skalili pristnih medosebnih odnosov. Naj bo tako tudi v bodoče, slavljencu pa še mnogo zdravih in uspešnih let!

Peter Prelovšek

Obzornik za matematiko in fiziko40 (1993) številke 1–6, str. 1–192

Članki — matematika

Posplošeni Riemannov integral — Generalized Riemann integral (Sergeja Lipušček in Milan Hladnik).....	1–7
Zgodovina Vidavovega izreka — History of the Vidav theorem (Borut Zalar).....	9–14
Posplošeni Riemannov integral, 2. del — Generalized Riemann integral, part II (Sergeja Lipušček in Milan Hladnik).....	33–38
Verjetnostni algoritem ohlajanje — The probabilistic algorithm simulated annealing (Janez Žerovnik).....	39–48
Deli in vladaj z objektnim programiranjem – Object view of divide and conquer (Jernej Kozak).....	49–61
Diagonalizacija simetričnih matrik z vzporedno Jacobijevo metodo — Parallel Jacobi method for a symmetric matrix diagonalisation (Aleš Zupan).....	65–73
Kako razdeliti ogrlico — Splitting necklaces (Neža Mramor).....	75–80
Aksiomi geometrije v šoli in znanosti — Geometry axioms in school and in science (Herbert Zeitler, prevedla Silva Kmetič).....	85–94
Matrične sredine — Matrix means (Bojan Magajna).....	97–109
Aksiomi geometrije v šoli in znanosti, 2. del — Geometry axioms in school and in science, part II (Herbert Zeitler, prevedla Silva Kmetič).....	121–127
Izrek Šarkovskega — Šarkovski theorem (Peter Petek).....	129–133
Funkcijske enačbe s pravokotnimi pogoji — Functional equations with ortogonal conditions (György Szabó).....	137–142
Centralni limitni izrek — The central limite theorem (Mihael Perman).....	144–154
Abstraktni vektorski produkt — Abstract vector product (Borut Zalar).....	155–XIX
Debelina simpleksa (Boris Lavrič).....	161–170
Aproksimacijski postopki za problem trgovskega potnika (Bojan Mohar).....	172–181

Članki — fizika

Igre narave 7. Pri razcepu urana izhlapi dovolj nevtronov za verižno reakcijo — Some tricks of nature 7. During the fission of uranium sufficient neutrons for the chain reaction are evaporated (Mitja Rosina).....	15–16
J. Stefana ,Longitudinalna nihanja palic' — J. Stefan's 'Longitudal oscillations of rods' (Janez Strnad).....	17–19
Ali mora znati, kdor uči? — Should he who teaches know? (Janez Strnad).....	23–31
Igre narave 8. Oko in uho imata enak prag za zaznavanje energijskega toka — Some tricks of nature 8. The thresholds for the eye and the ear are at the same energy current density (Mitja Rosina).....	62–63
Igre narave 9. Čudni kvark je dovolj težek, da se ne sesedemo v čudno snov — Some tricks of nature 9. The mass of the strange quark is sufficient to prevent the collapse into strange matter (Mitja Rosina).....	83–84
Superprevodnost — Superconductivity (Janez Strnad).....	110–120
Nenavadni interferenčni poskusi I. Interferenčni poskus s sevanjema v nasprotnih smereh — Unusual interference experiments I. Interference experiment with radiations in opposite directions (Janez Strnad).....	135–136
Supertekočnost (Janez Strnad).....	183–191

Nagrada Republike Slovenije za znanstveno-raziskovalno delo in utemeljitev (Boris Lavrič)	8
Vabili (Astronomsko društvo Javornik)	14, 19
Popravek (Mitja Rosina)	16
44. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman)	20–22
In memoriam	31
Obvestilo (Mirko Dobovišek)	32
Prešernove nagrade študentom matematike februarja 1993 (Martina Koman)	63
Poročilo (Mirko Dobovišek)	VII–VIII
Novi člani društva v letu 1992 (Martina Koman)	VIII
In memoriam Antonu Peterlinu (France Cvelbar)	80–82
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matema- tike in fizike v letu 1992 (zbrala Martina Koman)	94–95
Obvestilo (Milan Hladnik)	XII
Razpis za priznanja učiteljem (Milena Strnad)	XVI
Vabilo na občni zbor (Franc Cvelbar)	XVI
O mednarodnih matematičnih organizacijah, katerih član je pred kratkim postalo DMFA Slovenije (Bojan Hvala)	179–180
Popravek (France Cvelbar)	180
Profesor Peter Gosar — sedemdesetletnica	192–XXIII

Nove knjige

J. Graselli, Diofantski približki (Boris Lavrič)	7
B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika I (Marija Vencelj)	32–III
B. Szenassy, History of mathematics in Hungary until the 20th century (Peter Legiša)	III–IV
F. Križanič, Linearna algebra in linearna analiza (Boris Lavrič)	64–VII
Mathematical research today and tomorrow (Bojan Magajna)	73–74
Revija Matematika v šoli (Zvonko Perat)	109
Ob prevodu učbenika fizike (Janez Strnad)	128–XVI
H. Breuer, R. Breuer (risbe), J. Strnad (prevod in priredba), Atlas klasične in moderne fizike (Franc Cvelbar)	133–134
B. Lavrič, Delno urejene grupe in delno urejeni kolobarji (Matej Brešar)	142–143
S. Klavžar, A. Vesel, Windows 3.1 podkrepljen z DOS 6.0 (Matjaž Željko)	154
Z. Bohte, Numerično reševanje nelinearnih enačb (Jernej Kozak)	XIX–XX
L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises (Tomaž Pisanski)	181–182
R. Lupton, Statistics in the theory and practice (Milan Hladnik)	191

Utrinki

Primerjava Slovenije in ZDA – odmev (Tomaž Pisanski)	14
Dragi profesorji matematike (Slavko ex Machina)	XII
Šala (izbral in priredil Boris Lavrič)	143
Utrinek (izbral Janez Strnad)	XX