

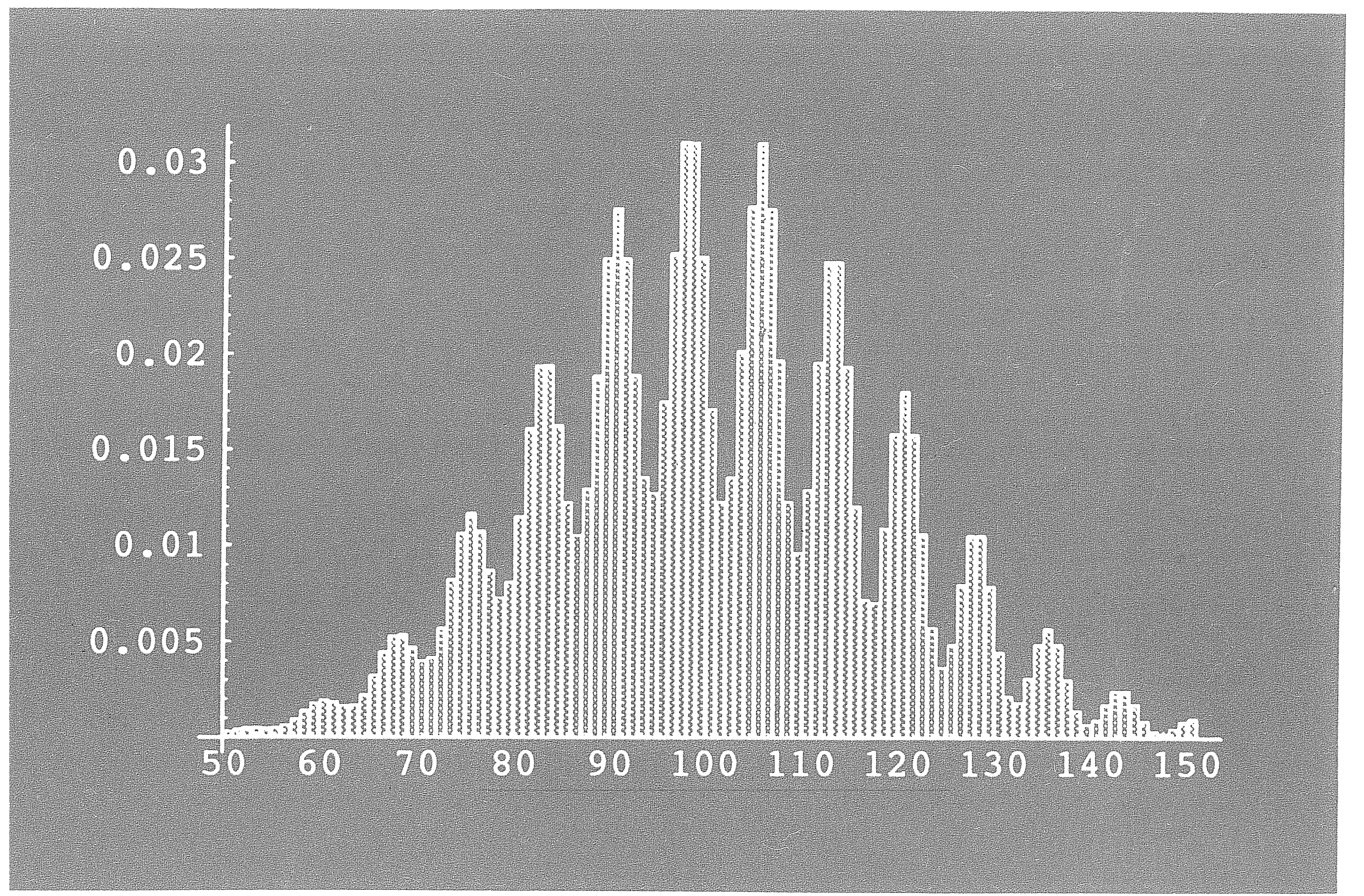


1993

Letnik 40

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1993

letnik 40, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič in Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.500,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.000,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 300,– SIT, dvojna številka 600,– SIT, stare številke 160,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1993 DMFA Slovenije – 1171

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Izrek Šarkovskega — Šarkovski theorem (Peter Petek) 129–133

Nenavadni interferenčni poskusi I. Interferenčni poskus s sevanjema v nasprotnih smereh — Unusual interference experiments I. Interference experiment with radiations in opposite directions (Janez Strnad) 135–136

Funkcijske enačbe s pravokotnimi pogoji — Functional equations with orthogonal conditions (György Szabó) 137–142

Centralni limitni izrek — The central limite theorem (Mihael Perman) 144–154

Abstraktni vektorski produkt — Abstract vector product (Borut Zalar) 155–III

Nove knjige — New books (Franc Cvelbar, Matej Brešar, Matjaž Željko, Jernej Kozak) 133–134, 142–143, 154, III–IV

Utrinka

Šala (izbral in priredil Boris Lavrič) 143

Utrinek (izbral Janez Strnad) IV

Na ovitku: Slika 3b k članku na strani 144.

IZREK ŠARKOVskega

PETER PETEK

Math. Subj. Class. (1991) 58F14, 58F20

Izrek Šarkovskega ima posebno mesto v teoriji iteracije na realni osi. Iz minimalnih pogojev sledi presenetljiv rezultat. V članku je dan dokaz male verzije izreka.

ŠARKOVSKI THEOREM

The theorem of Šarkovski plays a special role in the theory of iteration on the real line. Very simple requirements produce a powerful result. Here the proof of the little version of the theorem is given.

1. Uvod

Izrek Šarkovskega ima posebno mesto v teoriji diskretnih dinamičnih sistemov. Predpostavke so elementarne in so topološke narave, rezultat je daljnosežen in po svoje presenetljiv. Ima pa izrek tudi zanimivo preteklost.

A. N. Šarkovski je v članku [3] dokazal izrek, ki sedaj nosi njegovo ime. Ker pa je bil članek objavljen v Ukrajinskem matematičnem časopisu, ga na Zahodu niso opazili. Ameriški fizik J. Yorke je skupaj z Lijem napisal članek [4], v katerem tudi poudarja poseben pomen periode tri, hkrati pa opozarja na obstoj kaotičnih preslikav. Yorkeov članek je doživel močan odmev. No, in čisto slučajno sta se oba moža, Šarkovski in Yorke srečala v Vzhodnem Berlinu med vožnjo s čolnom po reki Spree. Nista se mogla dobro sporazumevati, ker Šarkovski ni znal angleško, Yorke pa rusko ne. S pomočjo kolegov je nazadnje le uspelo premostiti jezikovne težave. Izkazalo se je, da je Šarkovski po času objave precej prehitel Yorkea. Obenem se je spet pokazalo, da se dosti dela podvaja, ker je pretok informacij iz Zahoda na Vzhod in obratno slab in počasen.

Izrek opisuje existenco periodičnih točk zveznih realnih funkcij. Če je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija, bomo z $f^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ označili n -kratni kompozitum funkcije f (ne pa morda potence!).

Definicija. Število a je periodična točka reda k funkcije f , če velja

- (i) $f^k(a) = a$ in
- (ii) $f^j(a) \neq a$ za $0 < j < k$.

Periodične točke reda 1 imenujemo tudi negibne (fiksne) točke funkcije. Hkrati s periodično točko a reda $k > 1$ pa so seveda periodične tudi točke $f(a), f^2(a), \dots, f^{k-1}(a)$. Le-te skupaj s točko a sestavljajo cikel periode k .

2. Mali izrek Šarkovskega

Oglejmo si najprej dokaz posebnega primera, *malega izreka Šarkovskega*. Dokaz je povsem elementaren. Tudi dokaz celotnega izreka je elementaren,

je pa kombinatorno zahtevnejši. Prvotni avtorjev dokaz je bil v resnici še precej zapleten. Dokaj pregledno obliko dokaza najdemo npr. v [1] ali [2].

Izrek. (Mali izrek Šarkovskega) Če ima zvezna realna funkcija periodično točko reda tri, ima periodične točke poljubnega reda.

Uporabili bomo tri leme, ki veljajo za zvezno realno funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in sledijo iz izreka o vmesni vrednosti zvezne funkcije na zaprtem intervalu:

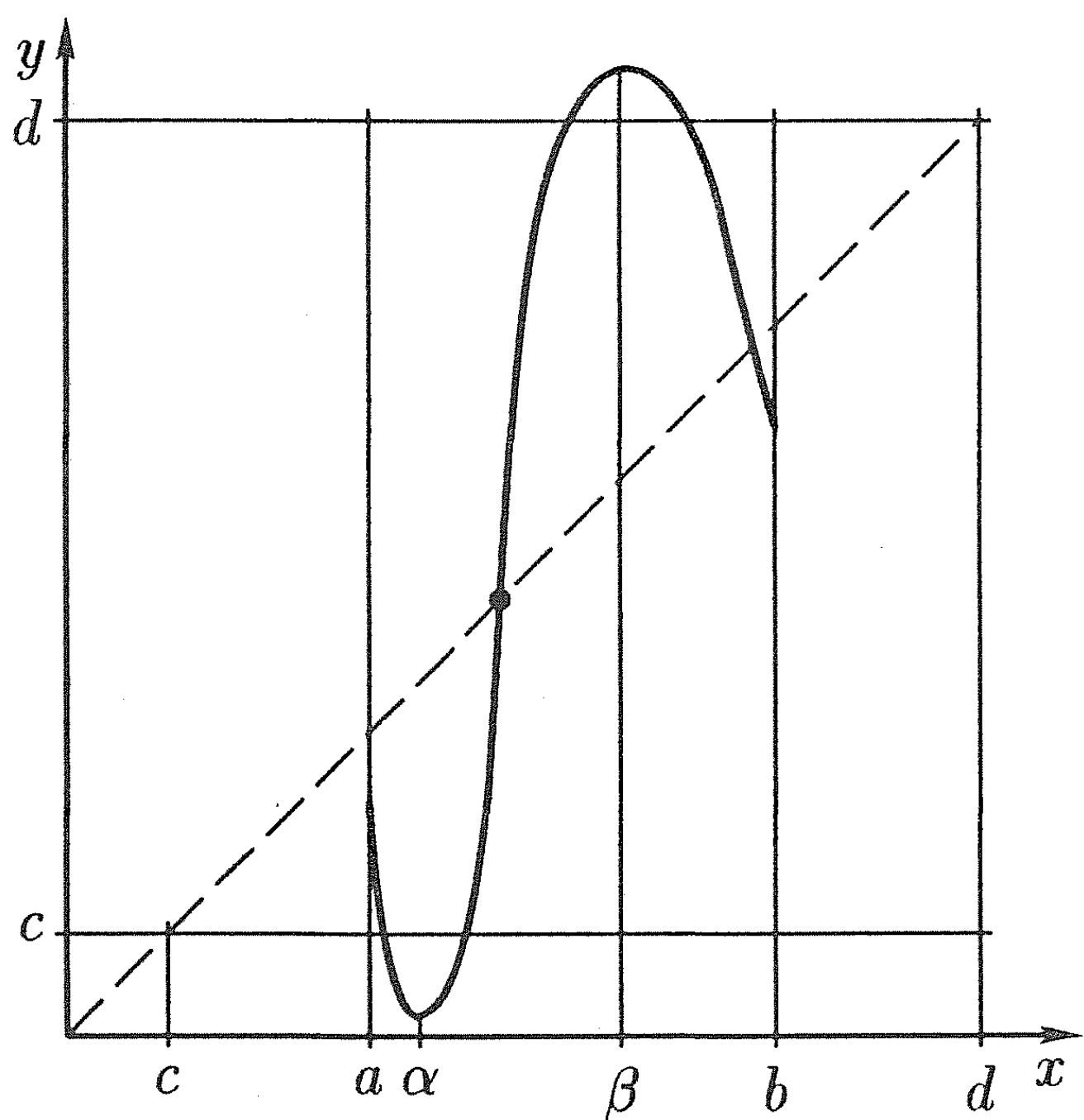
Izrek. (O vmesni vrednosti) Naj bo f realna funkcija, zvezna na intervalu $[a, b]$ in m, M natančna spodnja in zgornja meja te funkcije. Potem funkcija f zavzame na $[a, b]$ vsako vrednost med m in M .

Lema 1. Naj bosta I, J zaprta neizrojena intervala, $I \subset J$, $f(I) \supset J$. Na intervalu I obstaja negibna točka funkcije f .

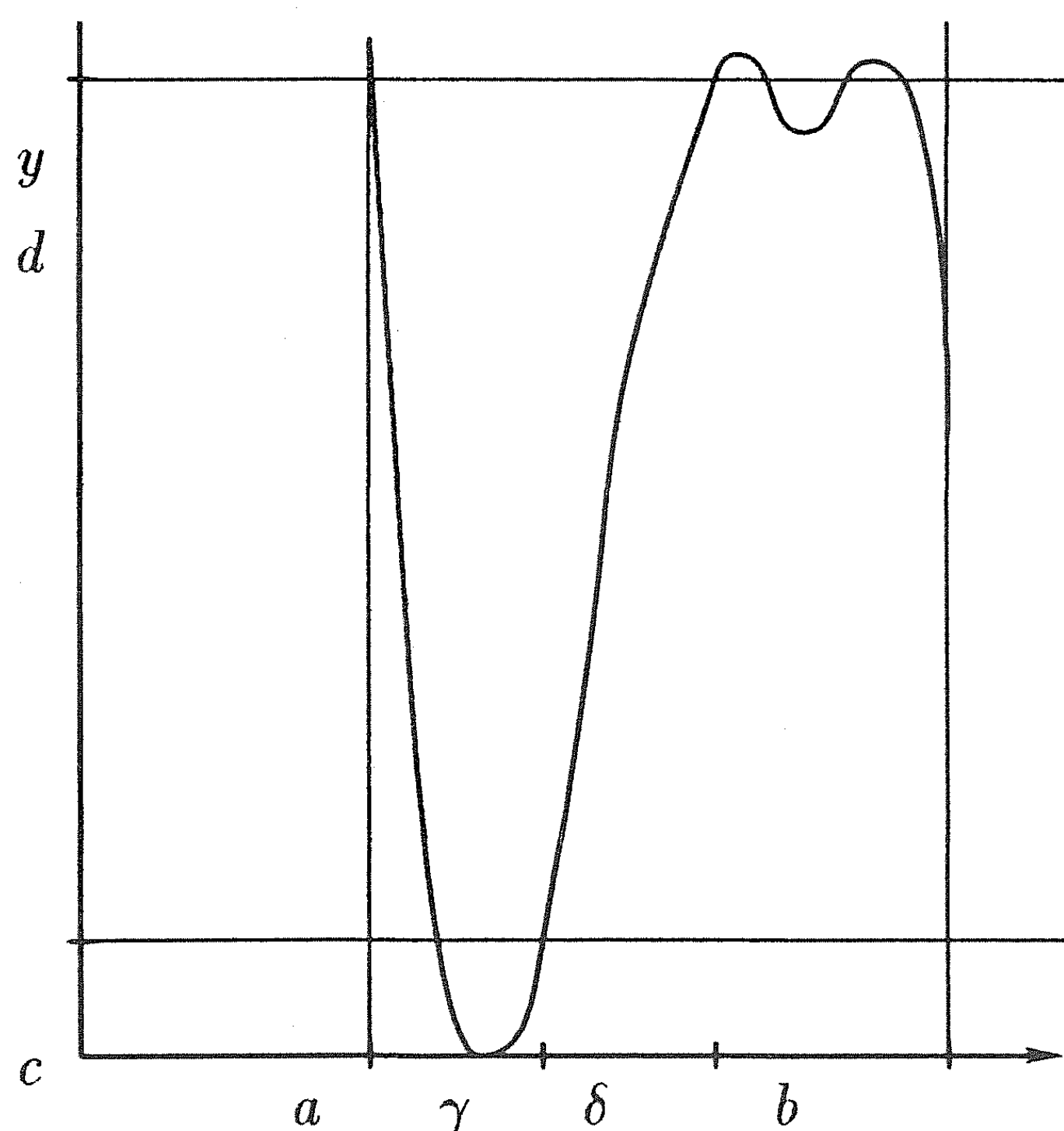
Lema 2. Naj bosta I, J zaprta neizrojena intervala in $f(I) \supset J$. Obstaja interval $K \subset I$, tako da je $f(K) = J$.

Lema 3. Naj bo A_i , $0 \leq i \leq n$ zaporedje zaprtih intervalov, $f(A_i) \supset A_{i+1}$, $i < n$. Obstaja interval $A \subset A_0$, tako da $f^n(A) = A_n$ in za vsak $0 \leq i \leq n$ velja $f^i(A) \subset A_i$.

Dokaz Leme 1. Naj bosta intervala $I = [a, b]$, $J = [c, d]$, $c \leq a < b \leq d$ in m, M natančna spodnja in zgornja meja funkcije f na I . Po pogojih leme velja $m \leq c$ in $M \geq d$. Zvezna funkcija f zavzame ti dve vrednosti: $\exists \alpha, \beta \in I$; $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Zato ima zvezna funkcija $g(x) = f(x) - x$ na krajiščih intervala $[\alpha, \beta]$ oz. $[\beta, \alpha]$ različno predznačeni vrednosti, če seveda nima ničle v enem od krajišč. Po izreku o vmesni vrednosti ima ničlo med α in β in to je negibna točka funkcije f (slika 1).



Slika 1.



Slika 2.

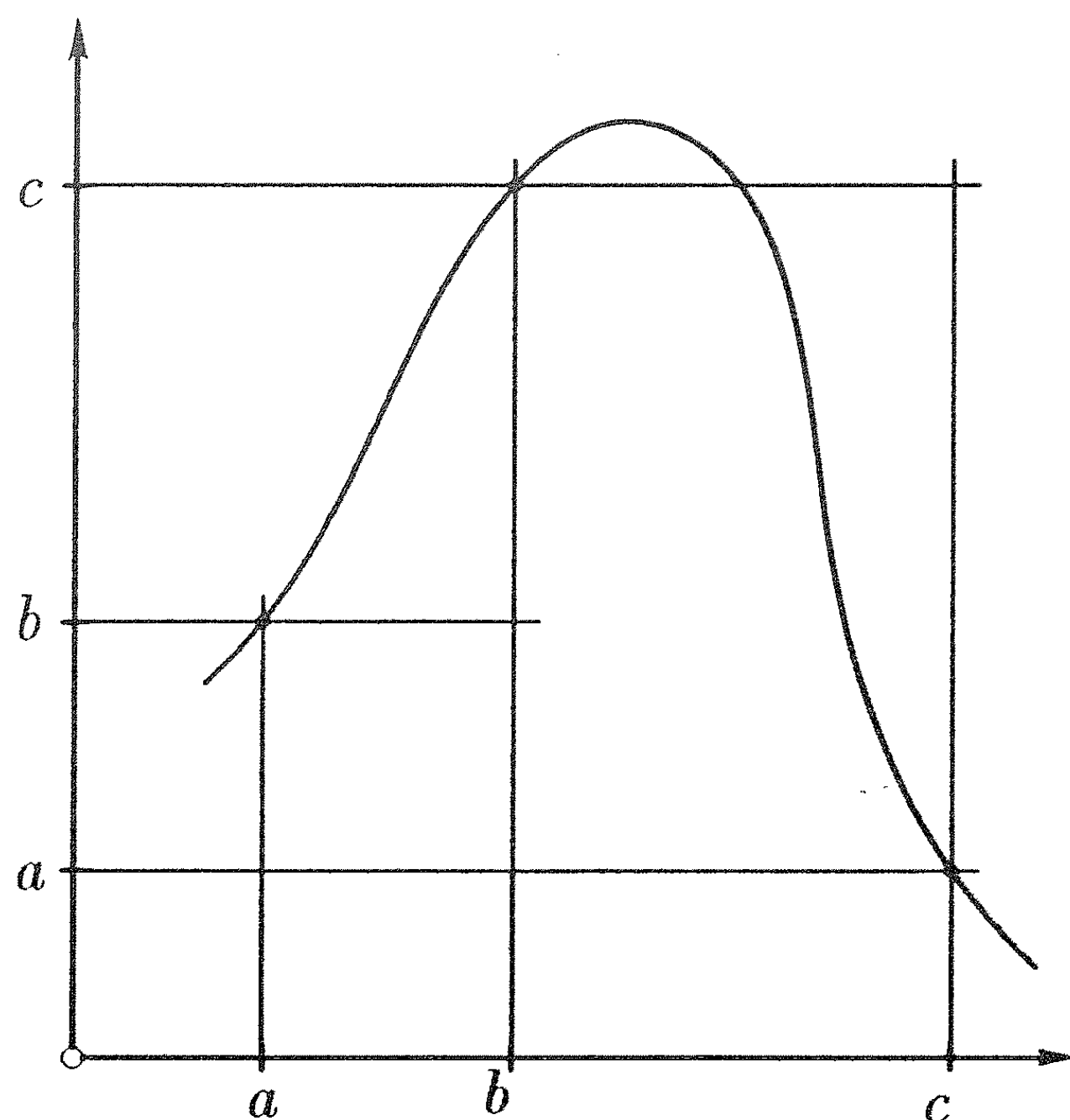
Dokaz Leme 2. Kot v prejšnjem dokazu označimo $I = [a, b]$, $J = [c, d]$. Nadalje po predpostavki nista prazni množici $C = f^{-1}(c)$, $D = f^{-1}(d)$. Neprazna je tudi vsaj ena od množic: $C' = \{x \in C, \exists y \in D, y > x\}$, $C'' = \{x \in C, \exists y \in D, y < x\}$. Če C' ni prazna, postavimo $\gamma = \sup C'$; zaradi zveznosti je $f(\gamma) = c$. Potem pa tudi $D' = \{y \in D, y > \gamma\}$ ni prazna in $\delta = \inf D'$, $f(\delta) = d$. Interval $K = [\gamma, \delta]$ je iskani interval. Krajišči se preslikata v c in d , za točke vmes pa tudi ne more biti niti $f(x) < c$ niti $f(x) > d$. Če bi npr. bilo $f(x) < c$ za kak $x \in K$, bi po izreku o vmesni vrednosti obstajala točka $\gamma' \in C'$ in $\gamma' > \gamma$ v nasprotju z definicijo točke γ . Podobno odpravimo tudi možnost $f(x) > d$ (slika 2). Če je $C' = \emptyset$, seveda izberemo $\gamma = \inf C''$, $D' = \{y \in D, y < \gamma\}$, $\delta = \sup D'$.

Dokaz Leme 3. Dokazujemo s popolno indukcijo. Za $n = 1$ velja trditev po lemi 2. Naj bo $n > 1$ in recimo, da velja za vsa krajša zaporedja intervalov, torej tudi za

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n,$$

kar pomeni, da obstaja interval $A' \subset A_1$, tako da $f^{n-1}(A') = A_n$ in za vsak $0 \leq i < n$ velja $f^i(A') \subset A_{i+1}$. Ker pa velja $f(A_0) \supset A_1 \supset A'$ spet po lemi 2 obstaja $A \subset A_0$, $f(A) = A'$ in res najprej $f^0(A) = A \subset A_0$. Za $i > 0$ pa $f^i(A) = f^{i-1}(f(A)) \subset A_i$, ker je pač $f(A) \subset A'$.

Dokaz malega izreka Šarkovskega. Po predpostavki obstaja cikel periode 3, recimo točke $a < b < c$, za katere velja $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ (slika 3). Druga možnost $f(a) = c \dots$ je analogna. Dokazati hočemo obstoj periodičnih točk za $n \neq 3$.



Slika 3.

Najprej $n = 1$, torej negibna točka. Uporabimo lemo 1 z $I = [b, c]$, $J = [a, c]$.

Pri $n > 1$ uporabimo lemo 3 in zaporedje intervalov

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_{n-2} = A_n = [b, c], \quad A_{n-1} = [a, b].$$

Po lemi 3 obstaja interval $A \subset A_0$, $f^n(A) = A_n$ in velja $f^i(A) \subset A_i$. Po lemi 1 za funkcijo f^n in intervala $I = A, J = A_n = [b, c]$ obstaja negibna točka $x \in A$ za f^n , $f^n(x) = x$. Preveriti moramo le še, da je res periode n , ne pa kakšne nižje. Če bi bila x točka nižje periode $k < n$, bi bilo $n = r \cdot k$ in vse točke cikla $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)$ bi se pojavile že v ciklu $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)$. Zato bi vse ležale na intervalu $[b, c]$. Ker pa $f^{n-1}(x) \in [a, b]$, je to mogoče le, če je $x = b$, saj je b edina skupna točka obeh intervalov. Toda $f^2(b) = a \notin [b, c]$.

3. Ureditev in izrek Šarkovskega

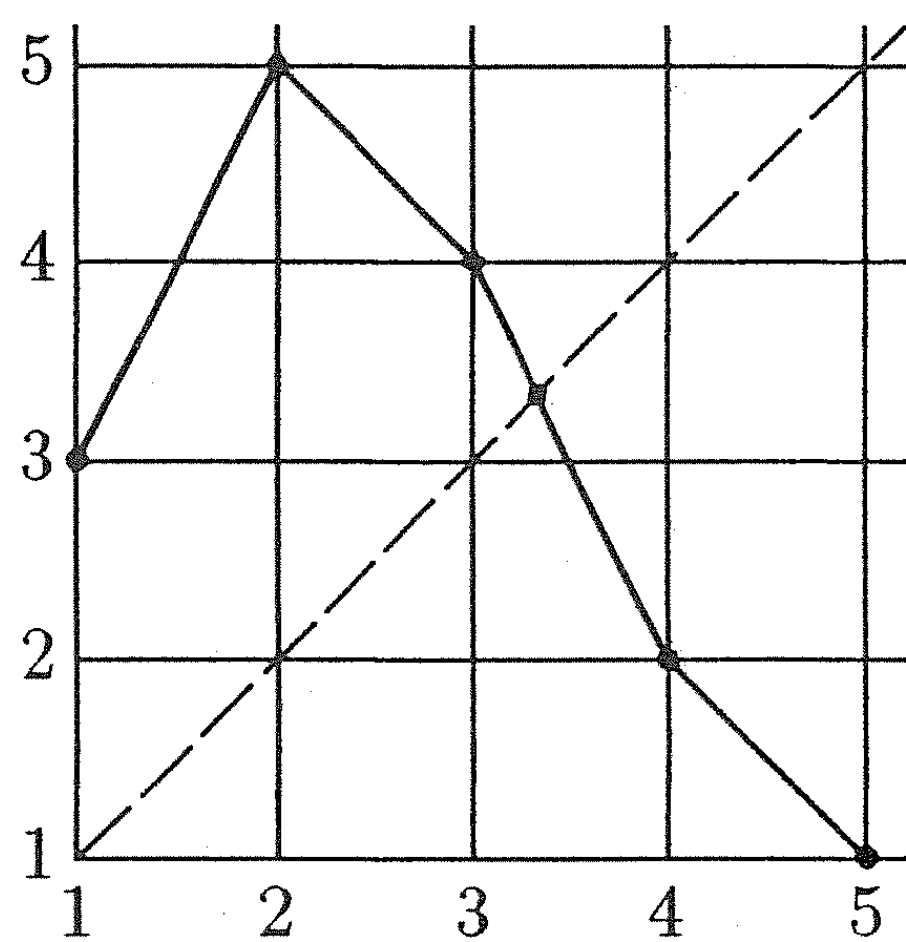
Šarkovski uvede v množico naravnih števil $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ relacijo linearne urejenosti $\succ$ takole:

$$\begin{aligned} & 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \\ & \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 9 \succ \dots \\ & \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 9 \succ \dots \\ & \vdots \\ & \dots \succ 2^5 \succ 2^4 \succ 8 \succ 4 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

Izrek. (Šarkovski) Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna preslikava in $k \succ m$. Če ima f periodično točko reda k , ima tudi periodično točko reda m .

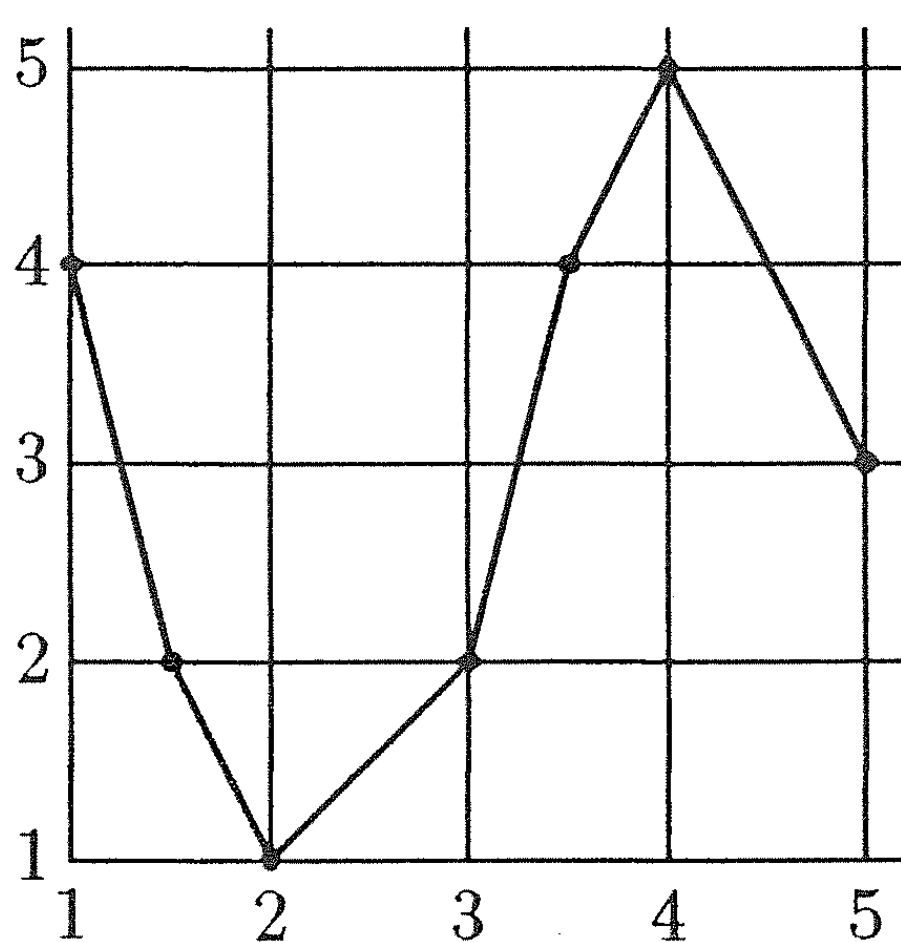
Posledica 1. Mali izrek Šarkovskega.

Posledica 2. Če ima zvezna realna funkcija le končno mnogo periodičnih točk, so redi le-teh oblike 2^ν .

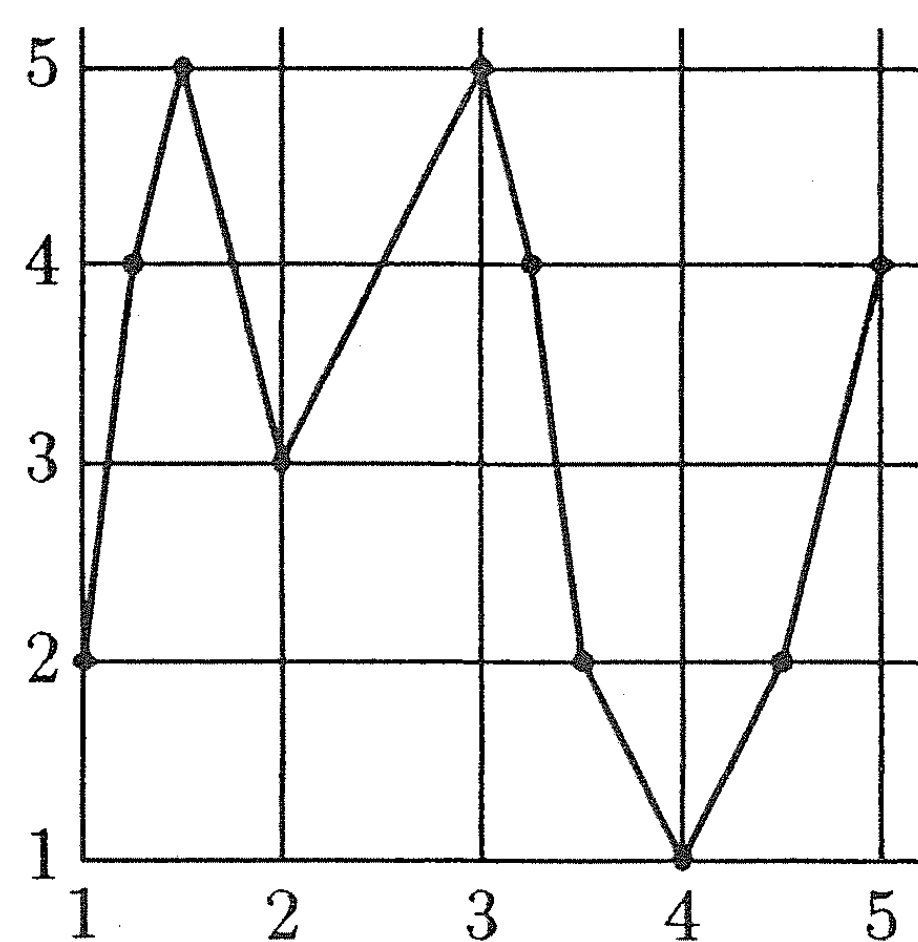


$$a = \frac{10}{3}$$

a)



b)



c)

Slika 4.

Velja tudi neke vrste obrat izreka Šarkovskega. Za vsak par naravnih števil $k \succ m$ obstaja funkcija, ki ima periodične točke reda m , ne pa periodičnih točk reda k . Kot primer vidimo na sliki 4a graf kosoma linearne

zvezne funkcije, ki ima periodične točke reda 5, ne pa reda 3. Res, števila 1, 3, 4, 2, 5 sestavljajo cikel periode 5, na sliki pa opazimo tudi negibno točko $a = \frac{10}{3}$. Slika 4b kaže graf funkcije f^2 in ob tej sliki zlahka narišemo še graf f^3 . Tudi f^3 ima natanko eno negibno točko, ampak to je že negibna točka same funkcije $a = \frac{10}{3}$. Zato ni periodične točke reda 3.

Pri formulaciji izreka Šarkovskega uporabimo le topološke pojme (zvezne preslikave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) in torej opisuje topološke lastnosti premice. Za zvezne preslikave krožnice vase $f : S^1 \rightarrow S^1$ izrek seveda ne velja. Vzemimo namreč zasuk krožnice za 120° ; vse točke na krožnici so periodične s periodo tri, ki je tako edina perioda.

LITERATURA

- [1] L. S. Block, W. A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture notes in Mathematics 1513, Springer-Verlag 1992.
- [2] R. L. Devaney, *Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley 1989.
- [3] A. N. Šarkovski, *Sosuščestvovanie ciklov neprerivnogo preobrazovanja prjamoj v sebjja*, Ukr. Mat. Ž. 16 (1964) 61-71.
- [4] T. Y. Li, J. A. Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82 (1975) 985-992.

NOVE KNJIGE

H. BREUER, R. BREUER (risbe), J. STRNAD (prevod in priredba), *Atlas klasične in moderne fizike*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

Pri Državni založbi Slovenije je v oktobru izšla knjiga *Atlas klasične in moderne fizike*. Knjigo je po originalu *Atlas zur Physik* Hansa Breuerja (Deutschen Taschenbuch Verlag 1988, München) prevedel in priredil Janez Strnad.

V slovenščini so po drugi svetovni vojni izšli naslednji fizikalni priročniki:

1. Franc Kvaternik, *Fizikalni priročnik z zbirko nalog za višje razrede srednjih šol*, DZS, prva izdaja 1955. Priročnik vsebuje ponovitve osnovnih fizikalnih pojmov na srednješolski ravni in najbolj značilne računske naloge.

2. N. I. Koškin, M. G. Širkevič, *Priročnik elementarne fizike*, Tehniška založba Slovenije, 7. ponatis leta 1990. Opredelil bi ga kot repetitorij fizikalnih osnov naravoslovne smeri ali tehnike na srednješolski ravni, vendar je nekaj višja od (1). Lahko ga štejemo kot kratek repetitorij ob pripravi na univerzitetni študij.

3. *Leksikon Cankarjeve založbe*, Ljubljana, 1979, 4. izdaja leta 1991. V njem so leksikografsko (fenomenološko) obdelani osnovni pojmi iz fizike in dosega raven univerzitetne izobrazbe nefizika.

4. Slikovni pojmovnik *FIZIKA*, Tehniška založba Slovenije 1990. Opredelimo ga lahko za razširjeni repetitorij osnovnošolske fizike.

Obravnavani atlas fizike se od naštetih priročnikov razlikuje po tem, da presega njihovo raven. Ustreza obsegu predavanj fizike na naravoslovnih in tehniških fakultetah, v nekaterih delih ga celo presega. Ker pojmov ne obravnava leksikografsko, je na 400 straneh priročnega formata (13 cm × 20 cm) dokaj razumljivo podano nepričakovano veliko fizikalnega znanja. Prevodu se pozna vešča roka J. Strnada, ki je odpravil nekatere napake v originalu in je zaporedje poglavij priredil učbenikom fizike, ki jih uporabljamo pri predavanjih fizike na Univerzi v Ljubljani.

Od ustreznega učbenika fizike se Atlas razlikuje po tem, da se avtor ne trudi s pedagoško vpeljavo pojmov in z izpeljavo enačb. Poda le njihov opis in osnovne formule. Posveti pa se podrobnostim in zadnjim novostim pri uporabi fizikalnih principov, česar v učbenikih navadno ne najdemo. Obravnave predpostavljajo znanje diferencialnega računa.

V repetitoriju je veliko tehniških detajlov, npr. o trenju, o merjenju zvoka, o laserjih, o motorjih, o slikovnih ceveh, o kristalografskih preiskavah. Kratko razlago najdemo celo za gravitacijske valove in holografijo. Izbor snovi je moderen. Pogrešamo le nekaj več podrobnosti o radioaktivnosti.

Atlas je poleg vsega tega tehniško in pedagoško premišljeno bogato opremljen. S svojimi slikami, ki odlično dopolnjujejo tekst, pritegne bralca že na prvi pogled. Z vsem tem je odlično dopolnilo k univerzitetnim učbenikom fizike. Za mnoge študente, ki jim manjka fenomenološkega znanja, bo v nekaterih poglavjih postal prvo berilo, kjer bodo v kompaktnem tekstu laže zaslutili celoto in bistvo ter pomen daljše obravnave v ustreznem učbeniku. Za dijake, ki so končali srednjo naravoslovno šolo, bo atlas branje, ki bo omogočilo hitro ponovitev delno pozabljene snovi. Verjetno pa ga bodo prebirali dijaki tudi že v srednji šoli. Ker bodo po njem segali prav gotovo tudi njihovi učitelji, lahko priročnik veliko pripomore k povečanju zanimanja za fiziko v srednji šoli, česar se lahko vsi veselimo.

Ob primerni ceni bi lahko priročnik doživel več izdaj in postal vademekum fizike za več generacij tehniških in naravoslovnih izobražencev. Pripomogel bo predvsem k povečanju fenomenološkega fizikalnega znanja pri nas. Edini (načelni) pomislek proti takemu priročniku temelji na bojazni, da bi ga študenti začeli uporabljati namesto učbenika. Vendar je to problem njihovih učiteljev, ki morajo poskrbeti, da si študenti pridobijo enoten pogled na navidez različne fizikalne pojave. Tega od Atlasa ne moremo pričakovati. Za poglobljeno znanje fizike je prav gotovo potrebno tudi učenje po učbeniku.

Prevod Atlasa fizike v slovenščino pozdravljam zaradi dognanega prikaza skrbno izbrane snovi, razkošne grafične opremljenosti in ker pokriva univerzitetno raven fizike v naravoslovju in tehniki, kjer smo doslej tak priročnik pogrešali.

Franc Cvelbar

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI

I. INTERFERENČNI POSKUS S SEVANJEMA V NASPROTNIH SMEREH

JANEZ STRNAD

PACS 42.50.—p

Interferenčni poskusi so zanimivi tudi zato, ker razkrivajo posebnost kvantne fizike. Interferenčni poskus s svetlobo, pri katerem interferirata v nasprotnih smereh spontano izsevani valovanji, je dobrodošlo zdravilo proti predstavi, da so fotoni nekakšni delci.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS

I. INTERFERENCE EXPERIMENT WITH RADIATION IN OPPOSITE DIRECTIONS

The interest interference experiments arise is partially due to the fact that they expose the characteristics of quantum physics. The interference experiment with radiation emitted spontaneously in opposite directions offers a remedy against the notion that photons are particles of some sort.

Najbrž zbudi poučevanje kvantne fizike v srednji šoli zgrešeno predstavo, da je svetloba sestavljena iz nekakšnih delcev, ki se je pozneje fiziki zelo težko otresejo. Zdravilo proti tej predstavi so poskusi, ki pokažejo, da se fotoni nikakor ne vedejo kot delci, kakršne poznamo v Newtonovi mehaniki. Med posrečene poskuse te vrste sodi opazovanje interference z delnima valovanjema v nasprotnih smereh. Poskus sta naredila M. Lai in J.-D. Diels z univerze Nove Mehike v Albuquerqueu v ZDA [1].

Stekleno ploščico sta na eni strani potopila v raztopino barvila rodamin. Tako je na ploščici nastala tanka, samo okoli 20 nm debela plast bravila, ko je topilo izhlapelo. Plast sta obsevala s curkom svetlobe iz argonskega ionskega laserja z valovno dolžino 514 nm z dokaj veliko gostoto energijskega toka 200 kW/m^2 . Molekule v plasti so fluorescenčno sevale, in sicer približno enako na eno in drugo stran ploščice.

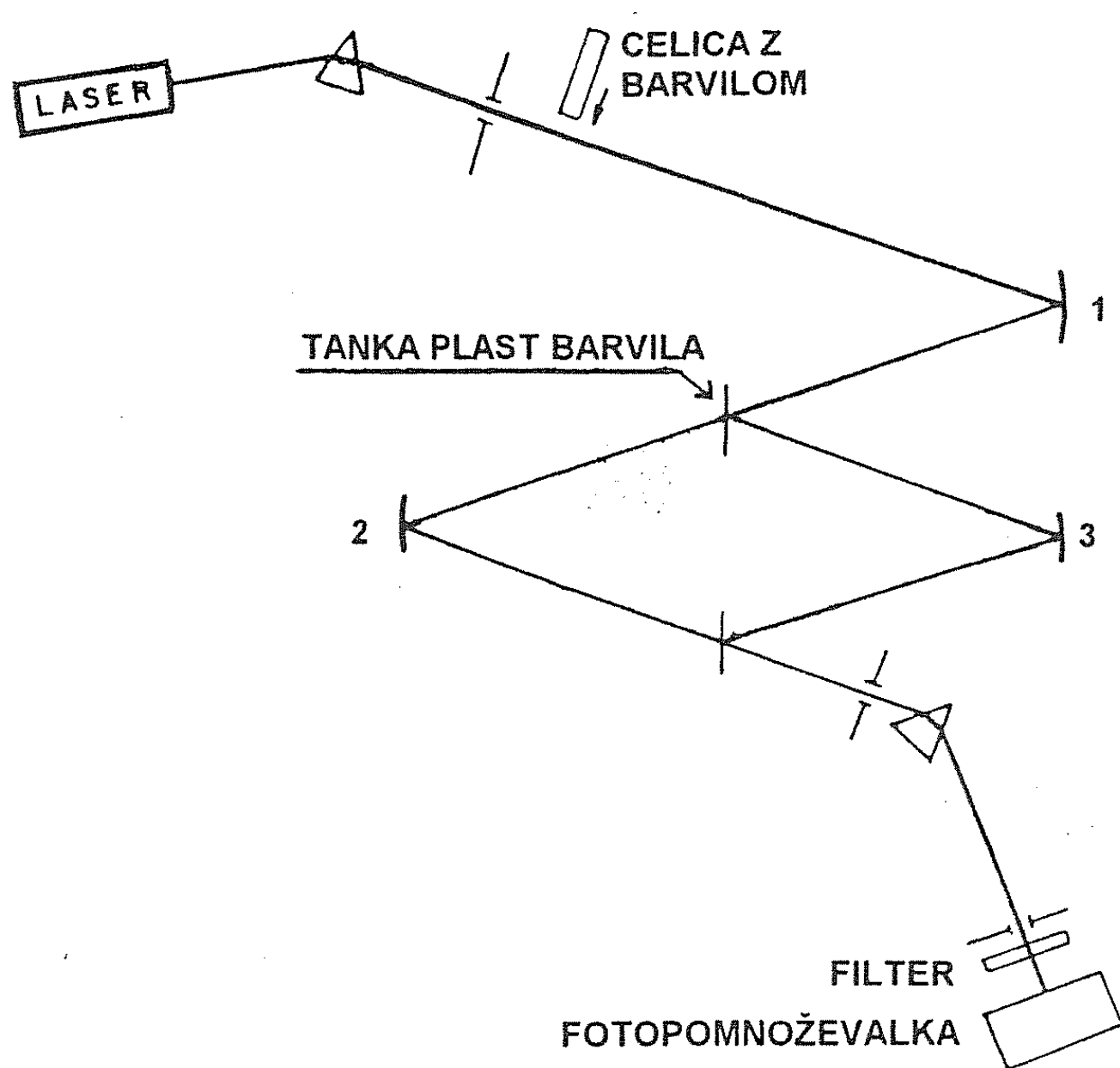
Molekule preidejo v višje stanje brez sevanja in prav tako iz nižjega stanja v osnovno stanje. Pri prehodu med višjim in nižjim stanjem fluorescenčno sevajo svetlobo z valovno dolžino 590 nm spontano, neodvisno druga od druge. Delež stimulirano izsevane svetlobe je zanemarljiv.

Iz laserskega curka je optična prizma izločila curek svetlobe z valovno dolžino 514 nm. Po odboju na krogelnem zrcalu z goriščno razdaljo 15 cm je curek zadel na ploščico s plastjo barvila, ki ga je razdelila na dva delna curka (sl. 1). Delna curka sta se odbila vsak na svojem enakem krogelnem zrcalu in druga polprepustna ploščica ju je sestavila in pripravila do interference. Kot med delnima valovanjema je meril 176° , iz čisto praktičnih razlogov pač ni bilo mogoče doseči kota 180° . Tako sta delna curka izhajala iz plasti barvila samo približno v nasprotnih smereh. Obe polprepustni ploščici ter drugo in tretje zrcalo so sestavljali Mach-Zenderjev interferometer.

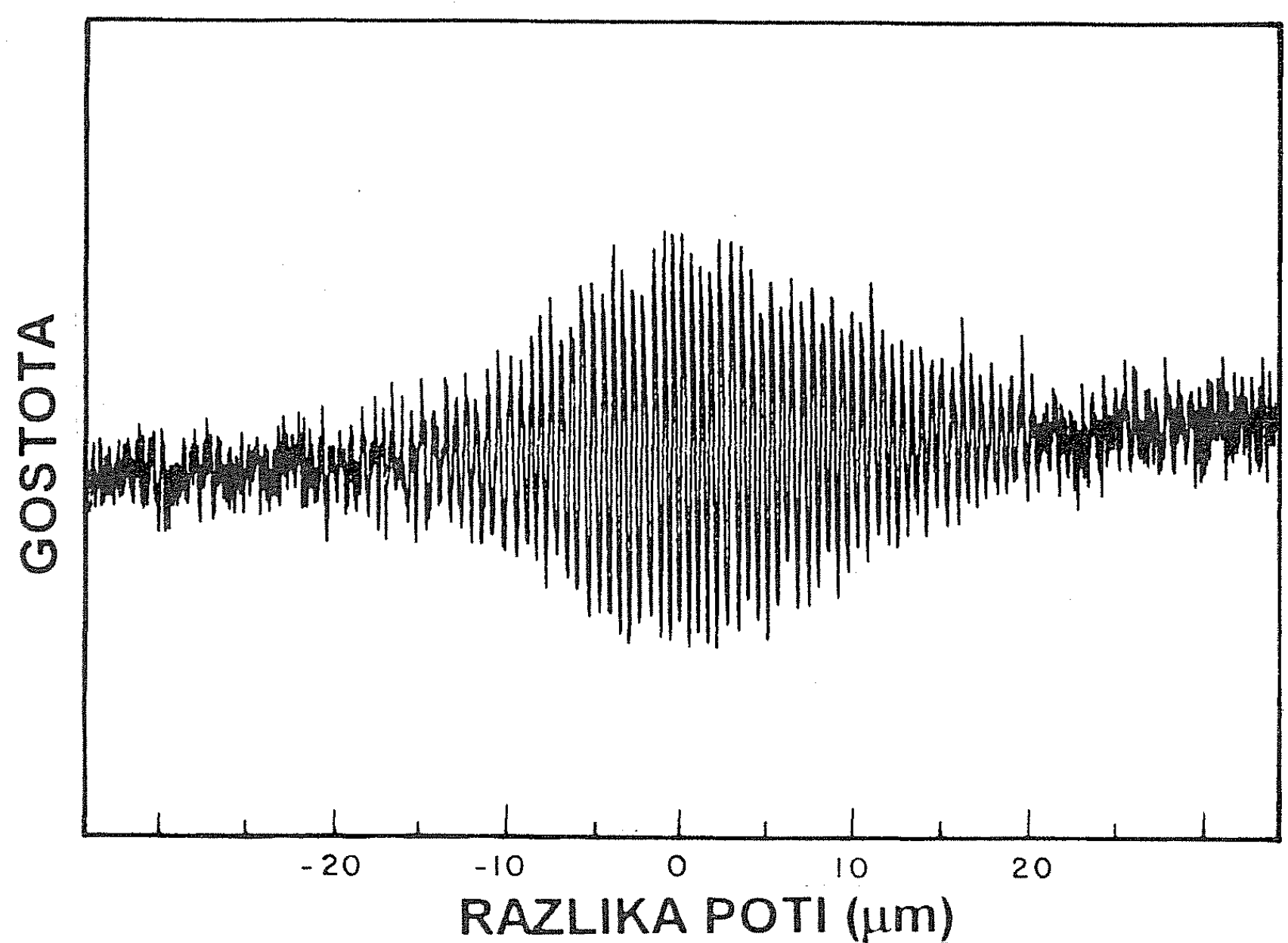
Sestavljeni curek je šel skozi režo in padel na fotopomnoževalko. Druga prizma je dala curek svetlobe z valovno dolžino 590 nm in filter je še posebej izločil svetlobo z valovno dolžino 514 nm. Prepuščena svetloba je imela širino črte okoli 30 nm, ki ji ustreza koherenčna dolžina okoli 0,01 mm. V laserski curek sta postavila debelo celico z barvilom in tako razširila spektralno črto. Z interferenco sta določila lego druge ploščice, ko sta bila oba kraka interferometra enako dolga. Potem sta celico z barvilom umaknila iz curka.

Drugo ploščico sta pritrdila na voziček, ki ga je zelo počasen motor premikal v pravokotni smeri. Ob premiku, pri katerem je nastala med delnima curkoma dodatna razlika poti za valovno dolžino, se je pojavila nova interferenčna proga. Interferenčne proge je narisal pisalnik, na katerega je bila priključena fotopomnoževalka. Na interferenčni sliki je bilo mogoče razbrati več kot dvajset interferenčnih prog, kolikor jih približno ustreza koherenčni dolžini 0,10 mm (sl. 2). Razlika med največjo in najmanjšo gostoto svetlobnega toka je bila nekoliko manjša od pričakovane zaradi debeline plasti barvila in zaradi tega, ker je merilnik zajel svetlobo iz končnega prostorskega kota.

Izid poskusa je prepričljivo pokazal, kako si ne smemo predstavljati, da molekula izseva foton ali na eno ali na drugo stran. Fotoni v enobarvni svetlobi zares nosijo določeno gibalno količino in določeno energijo, a niso delci, ki bi obdržali svojo istovetnost. Čeprav je fotopomnoževalka zaznavala fotone, si njihove „poti“ do tam, kjer jih je izsevala molekula barvila, sploh ni mogoče zamisliti [2]. V opisanem interferenčnem poskusu nam pride to bolj do zaveda kot pri Youngovem poskusu, pri katerem sta reži blizu skupaj.



Slika 1. Okvirna risba naprave [1]



Slika 2. Interferenčna slika, ki jo nariše pisalnik, ko se druga ploščica zelo počasi premika v pravokotni smeri [1].

LITERATURA

- [1] M. Lai, J.-C. Diels, *Interference between spontaneous emission in different directions*, Am. J. Phys. 58 (1990) 928.
- [2] J. Strnad, *Na pot v kvantno elektrodinamiko*, DMFA, Ljubljana 1986.

Math. Subj. Class. (1991): 46C99, 39B22, 39B52

V članku je podan pregled teorije pogojnih funkcijskih enačb na prostorih z ortogonalnostjo. Za ilustracijo je rešena Cauchyjeva pogojna enačba na klasičnih Hilbertovih prostorih.

FUNCTIONAL EQUATIONS WITH ORTHOGONAL CONDITIONS

In this paper we give an exposition on conditional functional equations in orthogonality spaces. In order to illustrate techniques used in this theory we show how to solve conditional Cauchy equation on classical Hilbert spaces.

1. Uvod

Naj bo X realen vektorski prostor dimenzije vsaj 2, opremljen s skalarnim produktom, to je preslikavo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostmi

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, \\ \langle x + z, y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle, \\ \langle x, x \rangle &\geq 0, \\ \langle x, x \rangle &= 0 \iff x = 0\end{aligned}$$

za vsaka $x, y \in X$ ter $\lambda \in \mathbb{R}$. Standardni zgled za tak prostor je $X = \mathbb{R}^n$, kjer je skalarni produkt n -teric $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ definiran s predpisom

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

Preslikavo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ imenujemo norma elementa x . Dva vektorja imenujemo pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0.

Funkcijske enačbe s pravokotnimi pogoji se naravno pojavljajo ponekod v matematični fiziki, na primer v teoriji idealnih plinov. Pojavljajo se tudi pri obravnavi nekaterih integralnih enačb. Reševanje funkcijske enačbe s pravokotnimi pogoji pomeni iskati funkcije, ki zadoščajo določeni enačbi z dvema spremenljivkama, vendar ne za vse pare vektorjev x in y , ampak samo za tiste pare, pri katerih sta x in y pravokotna.

Za zgled bomo obravnavali dve znani enačbi: Cauchyjevo enačbo

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

in Jordan-von Neumannovo enačbo

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y),$$

kjer je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Rešitve običajne Cauchyjeve enačbe se imenujejo *aditivni funkcionali*, rešitve Jordan-von Neumannove pa *kvadratični*.

Pogojna Cauchyjeva enačba se torej glasi

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pri} \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Ta enačba ima rešitve, ki niso aditivne. En primer je funkcija $f(x) = \langle x, x \rangle$, saj je

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = 2\langle x, y \rangle = 0$$

takrat in samo takrat, ko sta x in y pravokotna.

2. Rešitve pogojne Cauchyjeve enačbe na Hilbertovih prostorih

Trditev 1. (i) Linearna kombinacija rešitev je tudi rešitev.

(ii) Če je $f(x)$ rešitev, je $g(x) = f(-x)$ tudi rešitev.

(iii) Vsaka rešitev je vsota sode in lihe rešitve.

Dokaz. (i) preverimo direktno. Ker $\langle x, y \rangle = 0$ implicira $\langle -x, -y \rangle = 0$, je pri $\langle x, y \rangle = 0$

$$g(x + y) = f(-x - y) = f((-x) + (-y)) = f(-x) + f(-y) = g(x) + g(y),$$

kar dokazuje (ii). Iz (i) in (ii) potem sledi, da sta

$$s(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{ter} \quad l(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

tudi rešitvi. Očitno je, da je $s(x)$ soda, $l(x)$ pa liha funkcija. Kratek račun nam tudi pove, da je $f(x) = s(x) + l(x)$.

Trditev 2. Naj bo $l(x)$ liha zvezna rešitev. Tedaj obstaja tak vektor $a \in X$, da je $f(x) = \langle x, a \rangle$.

Dokaz. Ker je $\langle 0, 0 \rangle = 0$, je $l(0) = l(0 + 0) = l(0) + l(0)$ oziroma $l(0) = 0 = \langle 0, a \rangle$. To pomeni, da lahko predpostavimo, da sta x in y neničelna vektorja. Tedaj obstajata taka pravokotna vektorja z normo 1, da je $x = \alpha u$ in $y = \beta u + \gamma v$. Vzamemo lahko namreč kar $u = \frac{1}{\|x\|}x$, potem pa v , β in γ izračunamo iz zgornje enakosti za y .

Nato izračunamo $\langle u + v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle = 0$. To pomeni, da sta vektorja $u + v$ in $u - v$ tudi pravokotna in zato je $l(u + v) + l(u - v) = l(2u)$. Vzemimo zdaj poljubna $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$. Ker lahko skalarje izpostavimo iz skalarnega produkta, je

$$\begin{aligned} l((\xi + \lambda)u) + l((\xi - \lambda)v) &= l((\xi + \lambda)u + (\xi - \lambda)v) = \\ &= l(\xi(u + v) + \lambda(u - v)) = l(\xi(u + v)) + l(\lambda(u - v)) = \\ &= l(\xi u) + l(\xi v) + l(\lambda u) + l(-\lambda v). \end{aligned}$$

Ker je l liha funkcija, je $l(-\lambda v) = -l(\lambda v)$. Zamenjamo ξ in λ v zgornji enačbi. Dobimo

$$l((\xi + \lambda)u) - l((\xi - \lambda)v) = l(\lambda u) + l(\lambda v) + l(\xi u) - l(\xi v).$$

Če seštejemo (2) in (3) ter rezultat delimo z 2, dobimo

$$l((\xi + \lambda)u) = l(\lambda u) + l(\xi u).$$

Torej je

$$\begin{aligned} l(x + y) &= l((\alpha u + \beta u + \gamma v)) = l((\alpha + \beta)u) + l(\gamma v) = \\ &= l(\alpha u) + l(\beta u) + l(\gamma v) = l(x) + l(\beta u + \gamma v) = l(x) + l(y). \end{aligned}$$

To pomeni, da je l aditiven funkcional na X in ker je dobro znano, da je vsak zvezen aditiven funkcional na Hilbertovem prostoru oblike $l(x) = \langle x, a \rangle$ pri primernem $a \in X$, je dokaz končan.

Trditev 3. *Naj bo $s(x)$ soda zvezna rešitev. Tedaj obstaja taka realna konstanta α , da je $s(x) = \alpha \langle x, x \rangle$.*

Dokaz. Naj bosta x in y iz X in naj bo $\|x\| = \|y\|$. Tedaj je

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \|y\|^2 = 0,$$

kar nam da

$$\begin{aligned} s(x) &= s\left(\frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2}\right) = s\left(\frac{x + y}{2}\right) + s\left(\frac{x - y}{2}\right) = \\ &= s\left(\frac{x + y}{2}\right) + s\left(\frac{y - x}{2}\right) = s(y). \end{aligned}$$

To pomeni, da je $s(x)$ odvisna samo od norme $\|x\|$. Naj bo $\alpha = f(x)$ pri $\|x\| = 1$.

S popolno indukcijo dokažemo, da je $s(nx) = n^2 s(x)$. Vzamemo neki y , ki ima normo 1 in je pravokoten na x . Tak y obstaja, ker je dimenzija X vsaj 2. Najprej je

$$s(2x) = s(x + y + x - y) = s(x + y) + s(x - y) = 2s(x) + 2s(y) = 4s(x).$$

Če formula velja za $n - 1$ in n , potem je

$$\begin{aligned} 4s(nx) + 4s(x) &= 4s(nx) + 4s(y) = s(2nx) + s(2y) = \\ &= s(2nx + 2y) = s((n + 1)(x + y) + (n - 1)(x - y)) = s((n + 1)(x + y)) + \\ &\quad + s((n - 1)(x - y)). \end{aligned}$$

Ker sta x in y pravokotna vektorja, sta tudi $(n+1)x$ in $(n+1)y$ ter $(n-1)x$ in $-(n-1)y$ para pravokotnih vektorjev. Iz prvega odstavka sledi tudi, da je $s((n+1)x) = s((n+1)y)$ in $s((n-1)x) = s(-(n-1)y)$. Če torej nadaljujemo zgornji račun, dobimo

$$4s(nx) + 4s(x) = 2s((n+1)x) + 2s((n-1)x).$$

Zaradi indukcijske predpostavke je

$$\begin{aligned} s((n+1)x) &= 2s(nx) - s((n-1)x) + 2s(x) = \\ &= (2n^2 - (n-1)^2 + 2)s(x) = (n+1)^2 s(x). \end{aligned}$$

Nadalje je $s(x) = s(n\frac{x}{n}) = n^2 s(\frac{x}{n})$ oziroma $s(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n^2} s(x)$ in končno

$$s(\frac{m}{n}x) = m^2 s(\frac{x}{n}) = (\frac{m}{n})^2 s(x).$$

Ker je $s(x)$ zvezna, je $s(\lambda x) = \lambda^2 s(x)$ za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.

Naj bo zdaj $x \in X$ poljuben neničelen element. Ker je $\frac{x}{\|x\|}$ enotski, je $s(\frac{x}{\|x\|}) = \alpha$, po drugi strani pa je

$$s(x) = s(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \|x\|^2 s(\frac{x}{\|x\|}) = \alpha \langle x, x \rangle.$$

Če vse tri trditve združimo, dobimo

Trditev 4. Vsaka zvezna rešitev pogojne Cauchyjeve enačbe je oblike $f(x) = \langle x, a + \alpha x \rangle$, kjer je $a \in X$ in $\alpha \in \mathbb{R}$.

Kot smo že omenili v uvodu, se pogojna Jordan-von Neumannova enačba glasi

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \text{pri} \quad \langle x, y \rangle = 0,$$

kjer je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. S podobnimi prijemi kot pri pogojni Cauchyjevi enačbi dobimo naslednji rezultat:

Trditev 5. Naj bo $\dim(X) \geq 3$ in $f(x)$ zvezna rešitev pogojne Jordan-von Neumannove enačbe. Tedaj je $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, kjer je $A : X \rightarrow X$ zvezen linearen operator.

3. Abstraktni ortogonalni prostori

Naj bo X realen vektorski prostor dimenzije ≥ 2 in $\perp$ binarna relacija na X . Oglejmo si naslednje lastnosti:

(O1) $0 \perp x$ in $x \perp 0$ za vsak $x \in X$ (totalnost za ničlo);

- (O2) $x, y \neq 0$ in $x \perp y$ implicira, da sta x in y linearno neodvisna (*neodvisnost*);
- (O3) $x \perp y$ implicira $(\alpha x) \perp (\beta y)$ za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ (*homogenost*);
- (O4) Če je P 2-dimenzionalen podprostor v X , $x \in P$ ter $\lambda \in \mathbb{R}$, potem obstaja tak $y \in P$, da je $(x + y) \perp (\lambda x + y)$ (*Thalesova lastnost*);

Prostor z običajnim skalarnim produktom, v katerem definiramo $x \perp y$ tedaj in samo tedaj, ko je $\langle x, y \rangle = 0$, ima vse štiri našte lastnosti. Ima tudi mnoge druge, kot so na primer simetričnost, aditivnost v obeh faktorjih, zveznost itd. Obstajajo pa mnogi vektorski prostori, ki nimajo skalarnega produkta, a se vseeno da na njih definirati relacija z lastnostmi (O1)–(O4). Te prostore imenujemo abstraktni ortogonalni prostori. Zgled za tak prostor, ki nima nujno skalarnega produkta, je na primer Banachov prostor X z normo $\| \cdot \|$, kjer definiramo $x \perp y$, če in samo če je $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ za vse $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta prostor se imenuje prostor z Birkhoff-Jamesovo ortogonalnostjo.

Na abstraktnih ortogonalnih prostorih lahko definiramo pogojno Cauchyjevo enačbo s predpisom

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pri} \quad x \perp y.$$

Rešitve niso tako lepe kot v primeru Hilbertovih prostorov in jih včasih niti ne znamo povsem določiti. Kljub temu pa je mogoče dokazati naslednji izrek, ki je kar precejšnja posplošitev Trditve 4 (glej [2]):

Izrek 6. *Naj bo X abstraktni ortogonalni prostor in G komutativna grupa z elementom $\frac{1}{2}$. Za rešitve pogojne Cauchyjeve enačbe (7) $f : X \rightarrow G$ velja:*

- (i) *Vsaka rešitev je vsota sode in lihe rešitve.*
- (ii) *Vse lihe rešitve so aditivne.*
- (iii) *Vse sode rešitve so kvadratične.*

Drugo pomembno vprašanje v zvezi s Cauchyjevo enačbo nam porodi Trditev 3. Kakšni so abstraktni ortogonalni prostori, ki imajo kakšno sodo neničelno rešitev? Na dlani je, da je $f(x) = 0$ za vsak $x \in X$ ena možna soda (in seveda kvadratična) rešitev. Če privzamemo še, da je dimenzija X vsaj 3, potem dobimo naslednji odgovor (glej [5]):

Izrek 7. *Naj bo X abstraktni ortogonalni prostor dimenzije vsaj 3 in G komutativna grupa. Če obstaja neničelna soda rešitev pogojne Cauchyjeve enačbe (7) $f : X \rightarrow G$, potem je na X mogoče definirati skalarni produkt tako, da bo $x \perp y$ (v abstraktnem smislu) natanko tedaj, ko bo $\langle x, y \rangle = 0$ za novo definirani skalarni produkt.*

S tem izrekom dobimo v bistvu karakterizacijo pred-Hilbertovih prostorov med abstraktnimi ortogonalnimi prostori.

LITERATURA

- [1] S. Gudder in D. Strawther, *Orthogonally additive and orthogonally increasing functions on vector spaces*, Pacific. J. Math. **58** (1975) 427–436.
- [2] J. Ratz in Gy. Szabó, *On orthogonally additive mappings IV*, Aequationes Math. **38** (1989) 73–85.
- [3] Gy. Szabó, *On mappings, orthogonally additive in the Birkhoff-James sense*, Aequationes Math. **30** (1986) 93–105.
- [4] Gy. Szabó, *Sesquilinear-orthogonally quadratic mappings*, Aequationes Math. **40** (1990) 190–200.
- [5] Gy. Szabó, *On orthogonality spaces admitting nontrivial even orthogonally additive mappings*, Acta Math. Hung. **56** (1990) 177–187.
- [6] Gy. Szabó, *A characterization of generalized inner product spaces*, Aequationes Math. **42** (1991) 255–238.

NOVE KNJIGE

B. Lavrič, Delno urejene grupe in delno urejeni kolobarji, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993 138 str. (Podiplomski seminar ; 21)

Delo Borisa Lavriča nam predstavi zanimivo in lepo področje algebre, teorijo delno urejenih group in delno urejenih kolobarjev. Med seboj se prepletajo rezultati o splošnih delno urejenih, linearno urejenih ter mrežno urejenih grupah oziroma kolobarjih. Poudarek je na slednjih. Obravnavanih je več pomembnih tém. Izbor je posrečen in knjiga je lepo zaokrožena celota.

Razdeljena je na dva dela. Prvi govori o delno urejenih grupah, drugi pa o delno urejenih kolobarjih. Pred obema je še kratko uvodno poglavje z zgovornim naslovom „Slovar delne urejenosti”, v katerem je podan zgoščen opis osnovnih pojmov teorije delno urejenih množic.

Obsežnejši je prvi del knjige. Po prvem poglavju, ki nas z osnovnimi lastnostmi in ilustrativnimi primeri delno urejenih grup vpelje v teorijo, sledi poglavje o strnjenih podgrupah. Prikazane so povezave med urejenostjo na grupi in urejenostjo na družini vseh strnjenih podgrup. Posebej so obdelane polare in prapodgrupe, ki imajo posebno vlogo med strnjenimi podgrupami mrežno urejenih grup. Tretje poglavje govori o homomorfizmih, faktorskih grupah in produktih. Z nekaj truda se dajo osnovne konstrukcije, ki jih poznamo iz splošne teorije grup, smiselno prenesti v obravnavano področje. Na koncu poglavja nas pisec podrobneje seznani s premimi produkti, leksikografskimi produkti in posplošenimi leksikografskimi produkti. V rokah imamo potrebno orodje in knjiga zdaj v polno zaživi. V četrtem poglavju so obravnavane (krepko) arhimedske in Dedekindove (σ –) polne grupe. Večja pozornost je posvečena Dedekindovim napolnitvam krepko arhimedskih grup. Spoznamo tudi Hölderjev izrek o linearno urejenih arhimedskih grupah, Abelove grupe so tema petega, zadnjega poglavja prvega dela. Raziskani so pogoji, pri katerih je Abelova delno urejena grupa

(mrežna) vektorska grupa. Hahnov izrek o vložitvi Abelove mrežno urejene grupe v Hahnovo grupo je prav gotovo eden najglobljih rezultatov knjige. Poglavje sklene Kantorovičev izrek o omejenih homomorfizmi mrežno urejenih Abelovih grup.

Aditivna grupa delno urejenega kolobarja je Abelova delno urejena grupa; zato oba dela knjige nista vsaksebi, drugi je naravno nadaljevanje prvega. V šestem poglavju nas pisec popelje v svet delno urejenih kolobarjev. Osnovnim lastnostim, ki jih ni težko zaslutiti, je dodana karakterizacija kolobarjev brez deliteljev nič, ki jih je mogoče linearno urediti. V naslednjem poglavju so najprej obravnavani linearno urejeni kolobarji in zatem še funkcijski kolobarji. Med številnimi rezultati so v obeh primerih še posebej zanimivi tisti, ki govorijo o arhimedskih kolobarjih. Zadnje, osmo poglavje je posvečeno poljem, ki jih je mogoče linearno urediti, tako imenovanim formalno realnim poljem. Podrobno so raziskana realno zaprta polja.

Za razumevanje knjige je potrebno znanje osnov algebre. Izjema je morda le poglavje o formalno realnih poljih, v katerem se uporabljajo pojmi iz teorije obsegov. Knjiga je torej dostopna razmeroma širokemu krogu. A od bralca zahteva pozornost in vestnost; podrobnosti bo moral marsikdaj razjasniti sam, pa tudi snov je ponekod vse prej kot lahka.

Po površnem ogledu knjige bi morda sodili, da so posamezna poglavja bolj ali manj samostojna. Pa ni res. Tesno so speta; za vrsto zanimivih rezultatov se izkaže, da so vključeni predvsem zaradi njihove uporabe v nadaljnjih poglavjih. Videti je, da je pisec izredno skrbno pretehtal, kakšen vrstni red ubrati in kako priti do bližnjic v dokazih. Ta jedrnatost in natančnost se stapljata v eno z izbrušenim slogom pisanja – odvečen stavek ali odvečno besedo boste težko našli.

Knjiga bo bržkone obvezno čtivo za podiplomske študente, ki si bodo za glavno študijsko smer izbrali algebro. Služila bo kot izvrstna osnova za poglobljen študij delno urejenih grup oziroma kolobarjev. Po njej pa bo rad segel tudi vsak, ki mu algebra ni tuja. Zato, ker so nekateri rezultati v knjigi uporabni tudi na drugih področjih, pa tudi zato, ker gre preprosto za lepo napisano knjigo.

Matej Brešar

UTRINEK

ŠALA¹

Učitelj: „Predpostavimo, da je x število ovac v nalogi.”

Učenec: „Gospod učitelj, pa predpostavimo, da x ni število ovac.”

Na vprašanje matematika J. E. Littlewooda, če ima ta šala globok filozofski smisel, je filozof L. Wittgenstein odgovoril pritrdilno.

¹ Iz knjižice J. E. Littlewooda, *A mathematician's miscellany*.

CENTRALNI LIMITNI IZREK

MIHAEL PERMAN

Math. Subj. Class. (1990): 60F05, 60E10, 60-01

V članku je predstavljen centralni limitni izrek, najprej kot empirično dejstvo, ki mu potem sledi stroga matematična formulacija in dokaz izreka s pomočjo karakterističnih funkcij. Izrek ni formuliran in dokazan v najbolj splošni možni obliki, vendar nekatere posložitve ne zahtevajo dodatnega navora. Zaključek predstavlja uporaba centralnega limitnega izreka.

THE CENTRAL LIMITE THEOREM

The paper presents the central limit theorem as an empirical fact followed by the rigorous mathematical formulation. A proof using characteristic functions is given for the case of identically distributed independent random variables. Some applications of the central limit theorem are considered.

1. Centralni limitni izrek kot empirično dejstvo

Verjetnostni račun se je razvil iz preprostih vprašanj v zvezi z igrami na srečo. Primeri so metanje kovanca, metanje igralnih kock, ruleta in podobno. Kot enotni model za vse te situacije si lahko zamislimo slučajno izbiranje oštevilčenih kartic iz koša. Torej, če mečemo kovanec, za katerega predpostavljamo, da sta grb in številka enako verjetna, je to s stališča verjetnosti enako, kot če bi imeli koš z dvema karticama, oštevilčenima z 0 in 1. Iz tega koša bi potem slučajno izbirali kartice s tem, da bi izbrano kartico vedno vrnili v koš med zaporednim izbiranjem in koš pred naslednjim izbiranjem temeljito pretresli. Število enic, ki bi jih izbrali v 100 slučajnih izbiranjih iz koša, bi imelo popolnoma enako verjetnostno porazdelitev kot število grbov v sto metih kovanca.

Označimo to slučajno spremenljivko, torej število grbov v sto metih kovancev, s S_{100} , ali bolj splošno, število grbov v n metih s S_n . Če rezultate posameznih metov ali izbiranj iz koša z dvema karticama, označimo z $X_1, X_2, \dots, X_n$, kjer je pač X_k enako 1, če je na kartici 1, in 0, če je na kartici 0, potem lahko zapišemo

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n. \quad (1)$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke S_n je dobro znana binomska porazdelitev, torej

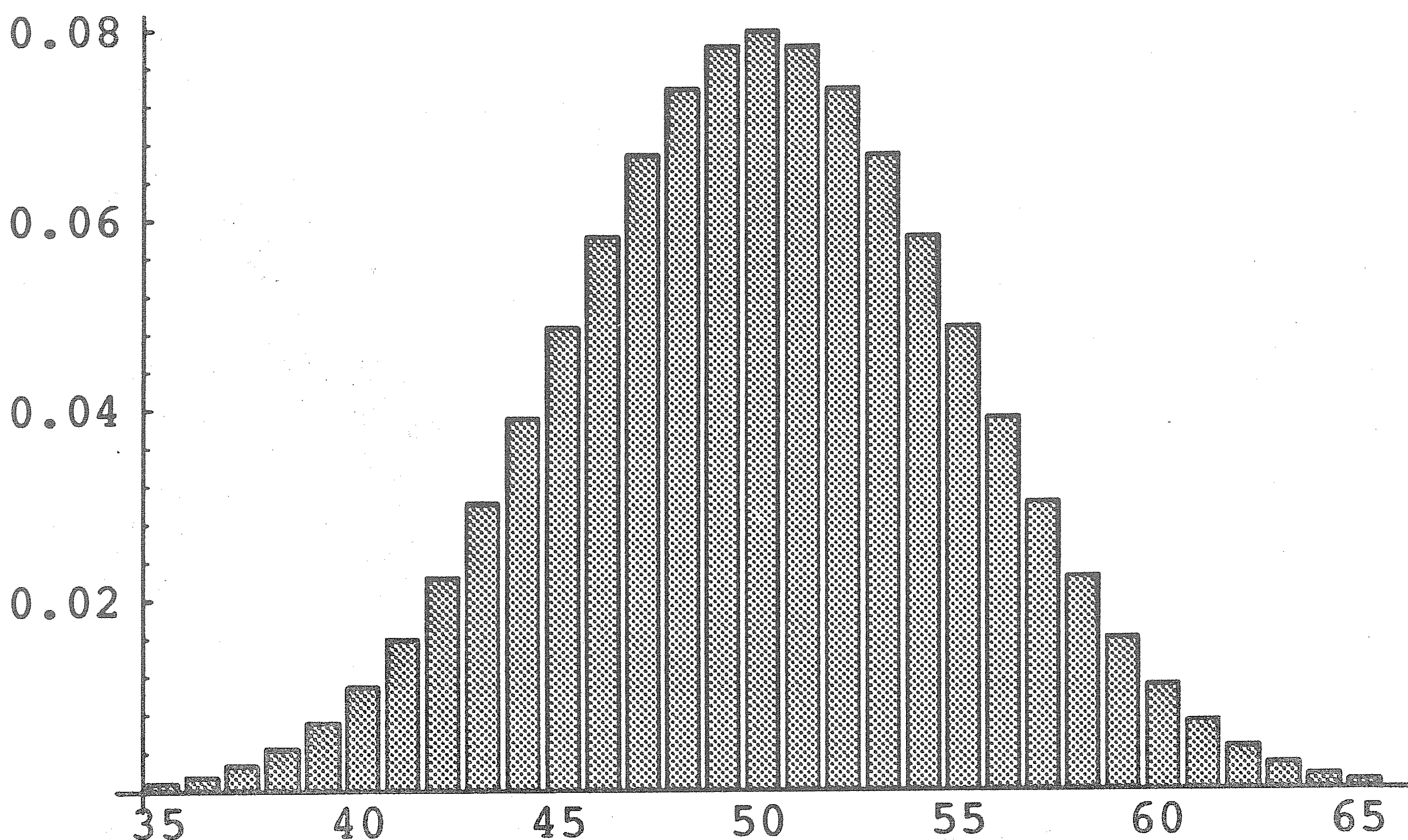
$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

kjer je p verjetnost, da pri enem samem metu kovanca dobimo grb. Če predpostavljamo, da je kovanec simetričen, potem je seveda $p = 1/2$ in po

zgornji formuli je verjetnost, da v 100 metih dobimo, recimo, 47 grbov, enaka

$$P(S_{100} = 47) = \binom{100}{47} (1/2)^{47} (1 - 1/2)^{53} = \binom{100}{47} (1/2)^{100}.$$

Grafično lahko te verjetnosti ponazorimo z verjetnostnim histogramom. Ploščina pravokotnika predstavlja verjetnost, da bomo dobili tisto število grbov, kjer je pravokotnik.

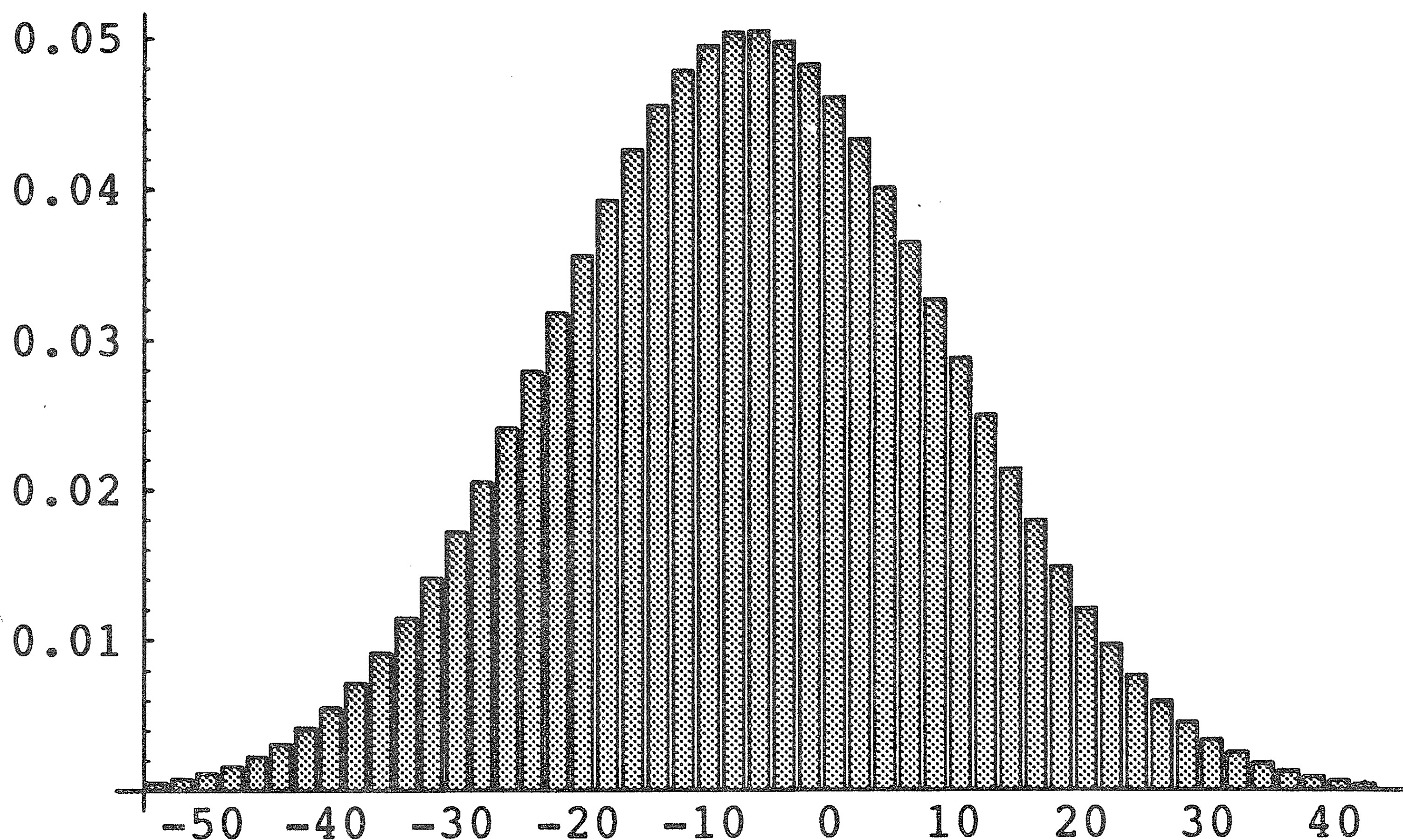


Slika 1. Verjetnostni histogram za število grbov v 100 metih kovanca

Tudi metanje kocke lahko predstavimo na enak način, le da moramo imeti v košu pet ničel in eno enico, če štejemo le mete, pri katerih smo dobili šest pik. Spet lahko zapišemo rezultat kot v formuli (1), pri čemer je seveda zdaj $P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = 5/6$, ker je verjetnost, da pri metu kocke dobimo 6 pik, enaka $1/6$. Spet lahko dobimo posamezne verjetnosti po binomski formuli (2) s tem, da je $p = 1/6$.

Tudi nekatere stave pri ruleti lahko predstavimo kot izbiranje oštevilčenih kartic iz koša. Kolo pri ameriški ruleti ima 38 krožnih izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 2 zelena, francoska verzija pa ima 37 izsekov, 18 črnih, 18 rdečih in enega zelenega. Izberimo si stavo, pri kateri stavimo 1 tolar na rdeče. Če se kroglica ustavi v rdečem krožnem izseku, nam croupier vrne našo stavo in še 1 tolar, v nasprotnem primeru pa zgubimo stavo. V košu, ki ga uporabljamo kot model, bi lahko imeli potemtakem 18 kartic, oštevilčenih z 1, in 20, oštevilčenih z -1 . Številki 1 in -1 predstavljata

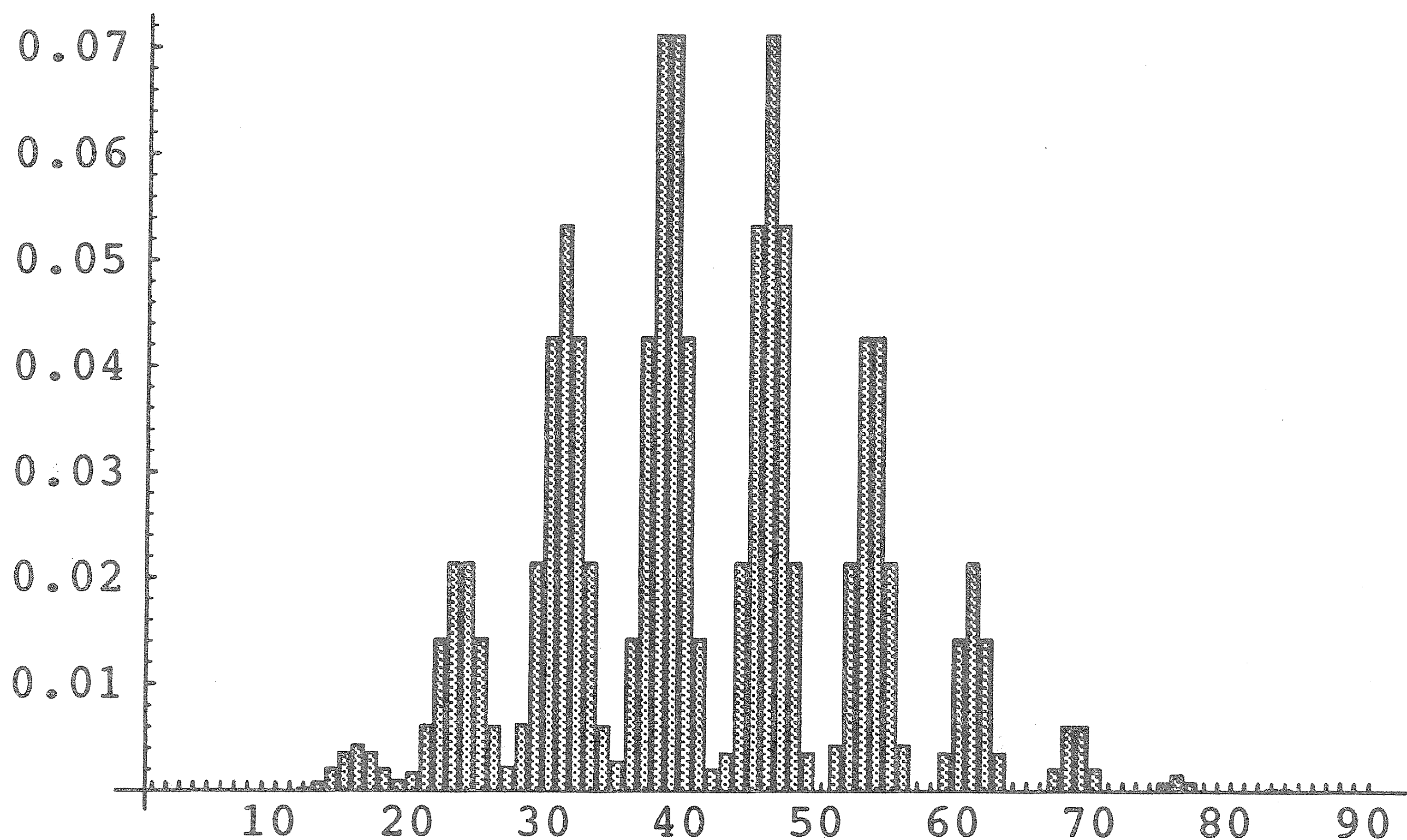
prigrani tolar v eni igri. Po n igrah bi bila vsota števil na karticah, ki smo jih izbrali, enaka priigranemu denarju, pri čemer bi seveda negativna vsota pomenila, da smo denar zaigrali. V jeziku verjetnostnega računa bi označili izid pri vsaki igri z X_k , $k = 1, 2, \dots, n$, pri čemer bi spremenljivke X_k bile ali 1 ali -1 , priigrani denar pa bi zapisali kot $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Verjetnostni histogram za 250 iger si lahko ogledate na sliki 2. Kot pri sliki 1 predstavlja tudi tukaj ploščina pravokotnika nad danim številom verjetnost, da bo priigrani denar po 250 stavah na rdeče enak tistemu številu.



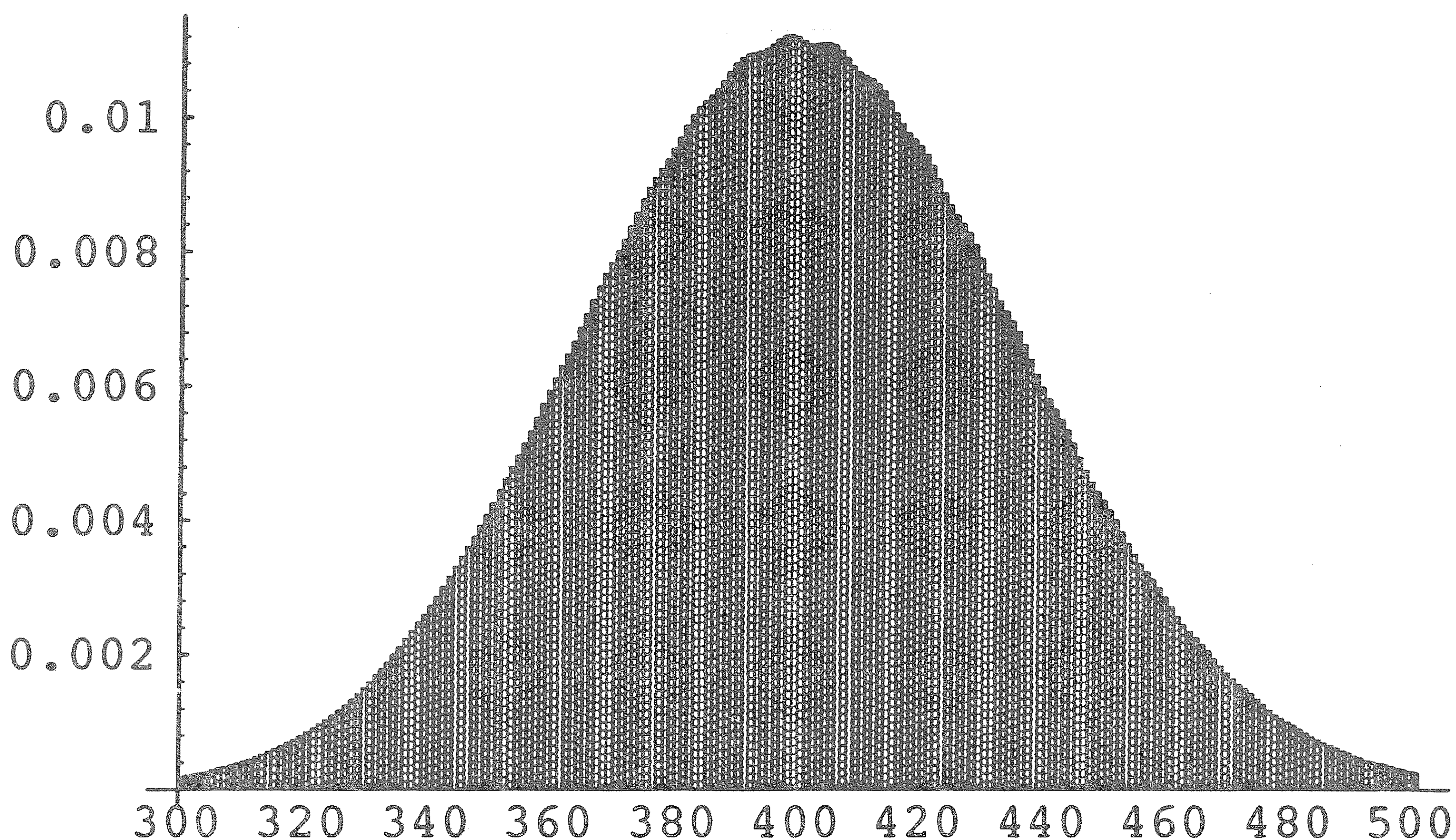
Slika 2. Verjetnostni histogram za 250 stav na rdeče

Seveda si lahko predstavljamo koše z različnimi števili kartic, na katerih so različna števila, lahko tudi ulomki ali koreni. V vsakem primeru lahko ponovimo poskus z zaporednim izbiranjem kartic, pri čemer kartice med posameznimi izbiranji vrnemo v koš. Za poljuben koš seveda ne obstaja vedno kakšna interpretacija, vendar je primerov košev, za katere bomo uporabili ugotovitve iz drugega poglavja, dovolj. Za ilustracijo si bomo izbrali koš, v katerem so 3 kartice s številkami 1, 2 in 9. Na slikah 3a, 3b (na ovitku) in 3c so verjetnostni histogrami za 10, 25 in 100 izbiranj iz takega koša, torej verjetnostni histogram za $S_{10} = \sum_{k=1}^{25} X_k$, $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} X_k$ in $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} X_k$. Kot vedno so slučajne spremenljivke X_k izidi pri k -tem izbiranju iz koša. V tem zadnjem primeru lahko zavzame X_k vrednosti 1, 2 ali 9.

Vsem verjetnostnim histogramom do zdaj je skupno, da z naraščanjem števila izbiranj postajajo vse bolj podobni krivulji zvončaste oblike. Da to ni slučaj, bo potrdil centralni limitni izrek, ki ga bomo predstavili v naslednjem razdelku. Ugotovili bomo, da postajajo verjetnostni histogrami



Slika 3a.



Slika 3c. Verjetnostni histogrami za vsote 10, 25 in 100 izbiranj iz koša s karticami 1, 2 in 9

za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk z naraščajočim n vedno bolj podobni normalni porazdelitvi.

2. Matematična formulacija centralnega limitnega izreka

Pri dokazu centralnega limitnega izreka se bomo omejili na primer enako porazdeljenih, neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots$. Neodvisnost

pomeni, da velja

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$$

za poljubne merljive množice $A_1, A_2, \dots, A_n$ na realni osi in poljuben $n \geq 1$. Za preprost primer koša iz prvega razdelka bi to pomenilo, da moramo med zaporednimi izbiranji kartico, ki smo jo izbrali na nekem koraku, vrniti v koš in koš temeljito pretresti. To, da so spremenljivke $X_1, X_2, \dots$ enako porazdeljene, pomeni, da so za poljubno merljivo množico A na realni osi in za vse k verjetnosti $P(X_k \in A)$ med seboj enake. Za zaporedno izbiranje kartic iz koša je seveda samo po sebi umevno, da je porazdelitev slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots$ neodvisna od k .

Uvedimo še funkciji

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{in} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(s) ds, \quad -\infty < x < \infty.$$

Funkcija ϕ je gostota dobro znane normalne porazdelitve s parametroma $\mu = 0$ in $\sigma^2 = 1$.

Matematično upanje poljubne slučajne spremenljivke X bomo označili z $E(X)$, njeno disperzijo pa z $D(X)$. Po teh pripravih lahko formuliramo centralni limitni izrek v njegovi najpreprostejši obliki.

Izrek 1. *Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ med seboj neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke, za katere je matematično upanje $E(|X_k|) < \infty$ in disperzija $D(X_k) < \infty$. Označimo $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Potem velja za poljubno realno število a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - nE(X_1)}{\sqrt{nD(X_1)}} \leq a\right) = \int_{-\infty}^a \phi(s) ds = \Phi(a). \quad (1)$$

V tej formulaciji postane ohlapna izjava — da verjetnostni histogrami za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk postajajo vedno bolj podobni „zvončasti krivulji“, ko število spremenljivk v vsoti narašča — matematični izrek. Dejstvo, da smo vsoti S_n odšteli njeno matematično upanje in jo delili z njeno disperzijo, pomeni samo to, da smo histogram premaknili vzdolž realne osi in ga linearno stisnili, tako da smo ga prilagodili standardni normalni gostoti ϕ .

Dokaz centralnega limitnega izreka je najlažje izpeljati s pomočjo karakterističnih funkcij. Za diskretno slučajno spremenljivko X je karakteristična funkcija ψ_X definirana kot

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x_k} e^{itx_k} P(X = x_k), \quad -\infty < t < \infty, \quad (2a)$$

kjer so $\{x_1, x_2, \dots\}$ vse možne vrednosti, ki jih spremenljivka X lahko zavzame. Če pa ima slučajna spremenljivka gostoto f_X , potem je karakteristična funkcija definirana kot

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} f_X(s) ds, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2b)$$

Iz standardne literature bomo brez dokaza povzeli štiri trditve, ki bodo imele ključno vlogo pri dokazu centralnega limitnega izreka.

Trditev 2. *Karakteristična funkcija porazdelitve to porazdelitev enolično določa.*

Torej, dve različni porazdelitvi ne moreta imeti enakih karakterističnih funkcij.

Trditev 3. *Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_n$ med seboj neodvisne slučajne spremenljivke in naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke S_n je produkt karakterističnih funkcij slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots, X_n$.*

Vzemimo za primer kar binomsko porazdelitev, ki je vsota med seboj neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots, X_n$, za katere je $P(X_k = 0) = 1 - p = q$ in $P(X_k = 1) = p$ za $k = 1, 2, \dots, n$. Karakteristično funkcijo spremenljivk X_k dobimo zlahka po (2a) kot $\psi_{X_k}(t) = q + pe^{it}$, torej je karakteristična funkcija S_n kar $\psi_{S_n}(t) = (q + pe^{it})^n$. Za slučajno spremenljivko X s standardno normalno porazdelitvijo je

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \phi(s) ds = e^{-t^2/2},$$

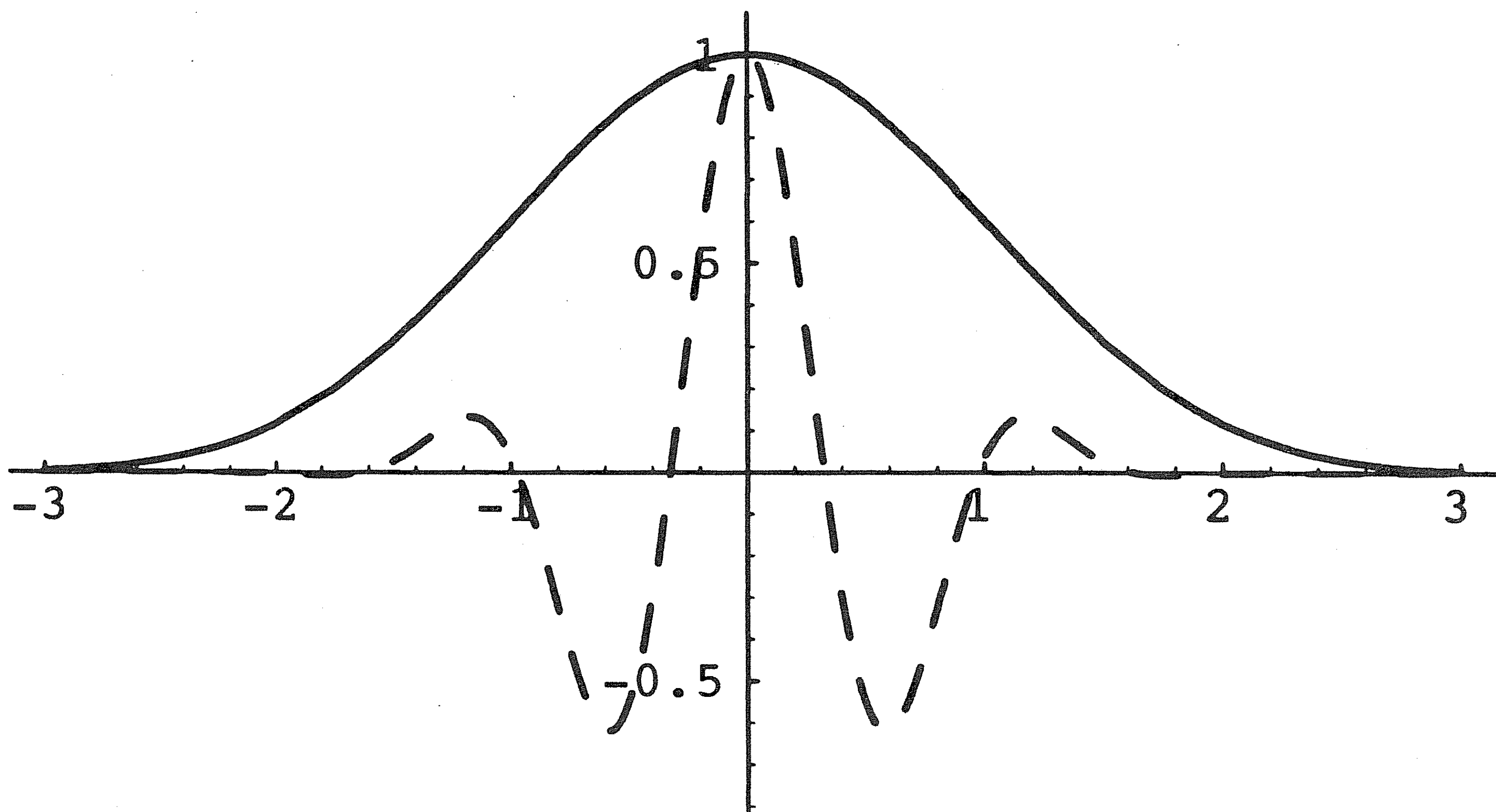
kar lahko preberemo v [5], str. 215.

Trditev 4. *Naj bo X slučajna spremenljivka in $\psi_X(t)$ njena karakteristična funkcija. Za poljubni konstanti α in β velja*

$$\psi_{\alpha X + \beta}(t) = e^{it\beta} \psi_X(\alpha t). \quad (2)$$

Izraz $S'_n = (S_n - nE(X_1))/(\sqrt{nD(X_1)})$ na levi strani enačbe (1) imenujemo standardizirano vsoto, ker je pač $E(S'_n) = 0$ in $D(S'_n) = 1$ za vsak n kot za standardno normalno porazdelitev. Po trditvah 2 in 3 je karakteristična funkcija slučajne spremenljivke S'_n enaka

$$\psi_{S'_n}(t) = e^{-it\sqrt{n}E(X_1)/\sqrt{D(X_1)}} [\psi_{X_1}(t/\sqrt{nD(X_1)})]^n. \quad (3)$$



Slika 4. Realni del karakteristične funkcije porazdelitve S_{10} (črtkana) in S'_{10} za primer binomske porazdelitve s $p = 18/37$

Za binomsko porazdelitev bi torej dobili $\psi_{S'_n}(t) = e^{-it\sqrt{np/q}}(q + pe^{it/\sqrt{npq}})^n$. Slika 4 prikazuje najprej realni del karakteristične funkcije za binomsko porazdelitev S_{10} za $p = 18/37$ (črtkano), potem pa še realni del karakteristične funkcije standardizirane vsote S'_{10} . Slika nas navede na misel, da morda iz podobnosti karakterističnih funkcij sledi podobnost verjetnostnih histogramov.

Trditev 5. Naj bo $Z_1, Z_2, \dots$ poljubno zaporedje slučajnih spremenljivk in naj njihove karakteristične funkcije konvergirajo po točkah proti karakteristični funkciji slučajne spremenljivke Z , torej za vsak t

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{Z_k}(t) = \psi_Z(t).$$

Potem je za vsako realno število a , za katero je $P(Z = a) = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(Z_k \leq a) = P(Z \leq a).$$

Dokaz te trditve je najpomembnejši korak pri dokazu centralnega limitnega izreka in tudi najtežavnejši. Dokaz lahko bralec najde v [2, str. 303], [5, str. 233] ali [7, str. 320]. Pogoji $P(Z = a) = 0$ je izpolnjen vedno, ko je spremenljivka Z zvezno porazdeljena z gostoto $f_Z(x)$ kot v primeru standardne normalne porazdelitve.

Dokaz centralnega limitnega izreka: Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da imajo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots$ matematično upanje $E(X_k) = 0$. Če to ni res, lahko nadomestimo vsak X_k z $X_k - E(X_k)$. Po trditvi 2 je potem karakteristična funkcija standardizirane vsote S'_n enaka

$$\psi_{S'_n}(t) = [\psi_{X_1}(t/\sigma\sqrt{n})]^n,$$

kjer je $\sigma = \sqrt{D(X_1)}$. Da bi zaključili dokaz, moramo po trditvi 4 pokazati, da konvergirajo karakteristične funkcije $\psi_{S'_n}(t)$ po točkah proti karakteristični funkciji standardne normalne porazdelitve. V ta namen si iz elementarne analize sposodimo naslednjo neenakost pri razvoju eksponentne funkcije v potenčno vrsto

$$|e^{ix} - 1 - ix + x^2/2| \leq \min \left\{ \frac{|x|^3}{6}, |x|^2 \right\} \quad \text{za vsak } x. \quad (4)$$

Vstavimo tX_1 za x v neenačbi (4) in izračunajmo matematično upanje obeh strani, pri čemer upoštevamo, da za poljubno slučajno spremenljivko Y velja $|E(Y)| \leq E|Y|$. Dobimo

$$\begin{aligned} |\psi_{X_1}(t) - 1 + t^2\sigma^2/2| &= |Ee^{itX_1} - 1 - iEX_1 + t^2EX_1^2/2| \\ &\leq E|e^{itX_1} - 1 - iX_1 + t^2X_1^2/2| \\ &\leq E \left(\min \left\{ \frac{|tX_1|^3}{6}, |tX_1|^2 \right\} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Izraz $t^{-2} \min \left\{ \frac{|tX_1|^3}{6}, |tX_1|^2 \right\}$ je za $t \neq 0$ dominiran z X_1^2 in gre proti 0, ko $t \rightarrow 0$. Torej je po izreku o dominirani konvergenci

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} E \left(\min \left\{ \frac{|tX_1|^3}{6}, |tX_1|^2 \right\} \right) = 0$$

in lahko zapišemo

$$\psi_{X_1}(t) = 1 - t^2\sigma^2/2 + r(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

kjer je $r(t)$ funkcija, za katero je $r(t)/t^2 \rightarrow 0$, ko $t \rightarrow 0$. Karakteristična funkcija standardizirane vsote S'_n je tako enaka

$$\psi_{S'_n}(t) = [\psi_{X_1}(t/\sigma\sqrt{n})]^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + r(t/\sigma\sqrt{n})\right)^n,$$

iz česar sledi, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{S'_n}(t) = e^{-t^2/2}$$

za vsak t , ker $nr(t/\sigma\sqrt{n}) \rightarrow 0$ za vsak t , ko $n \rightarrow \infty$. S tem je centralni limitni izrek dokazan, seveda če privzamemo trditve, ki smo jih navedli brez dokaza.

- [3] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its Applications vol. 1*, 3. izd., Wiley, New York 1968.
- [4] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its Applications vol. 2*, 2. izd., Wiley, New York 1966.
- [5] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.
- [6] Lucien Le Cam, *The Central Limit Theorem around 1935*, Statistical Science, 1 (1986) 78–96.
- [7] A. N. Shiriyayev, *Probability*, Springer-Verlag, New York 1984.

NOVE KNJIGE

S. KLAVŽAR, A. VESEL, WINDOWS 3.1 podkrepljen z DOS 6.0, Zavod RS za šolstvo in šport, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993, 63 str.

Pričujoči priročnik grafičnega okolja WINDOWS 3.1 in operacijskega sistema DOS 6.0 je namenjen predvsem začetnikom. Razdeljen je na štiri poglavja.

V prvem poglavju se seznanimo z zgradbo računalnika in pojmi, ki so potrebni za razumevanje nadaljnjega besedila. Pojmi, kot so: enota, datoteka in drevesna struktura datotek, so v tem poglavju, ki ga začetniki nikakor ne smejo preskočiti, podrobno opisani. Nekaj vrstic tega poglavja je namenjenih uporabnikom, ki se znajdejo v težavah, ko ne vedo, kako naprej.

V drugem poglavju je predstavljeno grafično okolje WINDOWS. Rdeča nit poglavja so okna, kar je zaradi specifičnosti okolja WINDOWS popolnoma na mestu. Opisane so osnovne operacije z okni – bodisi s tipkovnico bodisi z miško – in sama zgradba oken.

Tretje poglavje obravnava pomembni programski skupini okolja WINDOWS: Main in Accessoires. V nekaj razdelkih si podrobno ogledamo program File Manager, kjer so opisane najvažnejše operacije z datotekami in področji. Ostali programi programske skupine Main so predstavljeni bolj na kratko, saj bi s podrobnim opisom priročnik postal precej debelejši. Enako lahko rečemo tudi za programe znotraj programske skupine Accessoires.

V zadnjem poglavju pa si ogledamo nekaj najpomembnejših ukazov operacijskega sistema DOS, pri čemer nas avtorja opozorita na novosti inačice DOS 6.0. Seveda se najpomembnejši ukazi nanašajo na operacije z datotekami in področji. Uporabniku, ki mu je angleščina tuja, pa je namenjen zadnji razdelek, v katerem so naštetja najbolj značilna sporočila o napakah in dodani njih prevodi.

V priročniku sta tudi dva dodatka. V prvem so opisani trije novi programi, ki so kot ukazi dodani operacijskemu sistemu DOS 6.0. To so programi za zgoščevanje datotek, za zaščito pred virusi in za zmanjševanje razdrobljenosti diska. V drugem dodatku pa je opisan postopek povezovanja datotek s programi.

Na koncu priročnika najdemo tudi stvarno kazalo in je tako pričujoča knjižica primerno „prvo berilo“ za uporabnike grafičnega okolja WINDOWS in operacijskega sistema DOS.

Matjaž Željko

ABSTRAKTNI VEKTORSKI PRODUKT

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991): 17A99 , 46K15, 46H70

V članku definiramo abstraktni vektorski produkt in izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti.

ABSTRACT VECTOR PRODUCT

In this paper we define an abstract vector product and derive some of its basic properties.

1. Uvod

Ena od osnovnih operacij v elementarnem vektorskem računu je vektorski produkt. Ta dvema vektorjema priredi tretji vektor, ki je pravokoten na prejšnja dva. V tem članku si bomo ogledali, kako se da postaviti zgornji zgled v bolj abstrakten okvir ter nekaj elementarnejših rezultatov, ki iz tega sledijo.

Naj bo $\mathcal{A}$ realen vektorski prostor s skalarnim produktom

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definicija 1. Operacija $\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se imenuje *abstraktni vektorski produkt*, če je linearna v obeh faktorjih in ustreza pogoju

$$\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad (1)$$

torej takrat, kadar je vektor $a \times b$ pravokoten na vektorja a in b pri vsakih $a, b \in \mathcal{A}$.

Če v drugo enakost zgornjega pogoja namesto b vstavimo $b + c$, po kratkem računu dobimo

$$\langle a \times b, c \rangle = -\langle a \times c, b \rangle \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Prostor $\mathcal{A}$ skupaj z množenjem $\times$ tvori algebro, ki pa ni asociativna. Nekaj osnovnih lastnosti te algebre bomo izpeljali v naslednjih razdelkih. Normo, porojeno iz skalarnega produkta v $\mathcal{A}$, bomo označevali s simbolom $|\cdot|$, torej $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ za vsak $a \in \mathcal{A}$.

Zgled 1. Naj bo $\mathcal{A}$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Če definiramo $a \times b = 0$ za vsaka $a, b \in \mathcal{A}$, dobimo *trivialni* vektorski produkt. Rečemo tudi, da je v tem primeru $\mathcal{A}$ *trivialna algebra*.

Zgled 2. Oglejmo si поблиže še običajni vektorski produkt v tridimenzionalnem prostoru. V članku ga bomo imenovali *klasični* vektorski produkt, kadar ga bomo želeli posebej razlikovati od drugih. Če je $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ in so i, j, k standardna baza, potem velja

$\times$	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

Zgled 3. Naj $\mathcal{M}_n$ označuje vektorski prostor realnih $n \times n$ matrik. Če je $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ matrika, potem je njena *transponirana* matrika $A^T = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ dana s predpisom $b_{ij} = a_{ji}$. Naj bo $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{M}_n; A^T = -A\}$ vektorski prostor *antisimetričnih* matrik. Abstraktni vektorski produkt definiramo s predpisom $A \times B = AB - BA$. Znana identiteta $(AB)^T = B^T A^T$ nam pove, da je $A \times B$ res antisimetrična matrika. Skalarni produkt v $\mathcal{A}$ definiramo s predpisom

$$\langle A, B \rangle = \text{sled}(AB^T) = -\text{sled}(AB).$$

Bralec, ki obvlada matrični račun, se lahko hitro prepriča, da je $\langle A \times B, A \rangle = \langle A \times B, B \rangle = 0$. To sledi iz identitete $\text{sled}(CD) = \text{sled}(DC)$, ki velja za poljubni matriki $C, D \in \mathcal{M}_n$.

Kot zanimivost omenimo, da je algebra $\mathcal{A}_3$ izomorfna algebri iz zgleda 2. Izomorfizem $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{A}_3$ bazne vektorje i, j, k preslika zaporedoma v matrike

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Vložitev v algebro z enoto

Znano je, da je klasični vektorski produkt antikomutativen. To pomeni, da velja identiteta $a \times b = -b \times a$. Ta lastnost se ohranja tudi pri abstraktnem vektorskem produktu.

Trditev 1. *Abstraktni vektorski produkt je antikomutativen.*

Dokaz. Naj $(\mathcal{A}, \times)$ označuje algebro z abstraktnim vektorskim produktom. Iz definicije abstraktnega vektorskega produkta sledi

$$\begin{aligned} 0 = \langle (a + b) \times a, a + b \rangle &= \langle a \times a, a \rangle + \langle a \times a, b \rangle + \\ &+ \langle b \times a, a \rangle + \langle b \times a, b \rangle, \end{aligned}$$

kjer sta $a, b \in \mathcal{A}$ poljubna. Iz iste definicije sledi tudi, da so prvi, tretji in četrti člen na desni strani enaki 0, zato je $\langle a \times a, b \rangle = 0$ za vsaka $a, b \in \mathcal{A}$. Če vektor a fiksiramo in pustimo, da b preteče ves $\mathcal{A}$, dobimo, da je $a \times a$ pravokoten na vse vektorje iz prostora $\mathcal{A}$ in je zato enak 0. Če v identiteto $a \times a = 0$ vstavimo $a + b$ namesto a , dobimo

$$0 = (a + b) \times (a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a \times b + b \times a$$

oziroma $a \times b = -b \times a$. ■

Odslej se bomo zaradi enostavnosti omejili na končno razsežne algebre.

Trditev 2. Naj bo $(\mathcal{A}, \times)$ končno razsežna algebra z abstraktnim vektorskim produktom. Tedaj je mogoče skalarni produkt na prostoru $\mathcal{A}$ pomnožiti s primerno konstanto tako, da v novem skalarnem produktu velja neenakost $|a \times b| \leq |a||b|$ za vsaka $a, b \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Iz linearne algebre je dobro znano, da obstaja taka konstanta $\alpha > 0$, da je

$$|a \times b| \leq \alpha |a| |b|,$$

saj je preslikava $\phi : (a, b) \mapsto a \times b$ bilinearen operator z normo

$$\|\phi\| = \sup_{|a|=|b|=1} |\phi(a, b)|.$$

Če uvedemo novi skalarni produkt $\langle a, b \rangle_1 = \alpha^2 \langle a, b \rangle$, dobimo

$$\begin{aligned} |a \times b|_1^2 &= \langle a \times b, a \times b \rangle_1 = \alpha^2 \langle a \times b, a \times b \rangle = \\ &= \alpha^2 |a \times b|^2 \leq \alpha^2 \alpha^2 |a|^2 |b|^2 = |a|_1^2 |b|_1^2. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

S pomočjo trditev 1 in 2 bomo izvedli konstrukcijo, ki bo algebro $(\mathcal{A}, \times)$ vložila v algebro $\mathcal{B}$ z enoto. V skladu s trditvijo 2 bomo predpostavili (brez škode za splošnost), da je $|a \times b| \leq |a||b|$. Definirajmo $\mathcal{B} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{A}$.

Množenje v algebri $\mathcal{B}$ definirajmo s predpisom

$$(\alpha, a) \cdot (\beta, b) = (\alpha\beta - \langle a, b \rangle, \alpha b + \beta a + a \times b),$$

skalarni produkt pa s predpisom

$$\langle (\alpha, a), (\beta, b) \rangle = \alpha\beta + \langle a, b \rangle.$$

S preprostim računom se prepričamo, da je element $e = (1, 0)$ enota v algebri $\mathcal{B}$. V naslednjem izreku bomo zbrali pomembne lastnosti te konstrukcije.

Izrek 1. Naj bo $\mathcal{A}$ končno razsežna algebra z abstraktnim vektorskim produktom in $\mathcal{B}$ definirana kot v zgornjem odstavku. Tedaj je

- (i) $|xy| \leq |x||y|$ za vsaka $x, y \in \mathcal{B}$.
- (ii) $|x^2| = |x|^2$ za vsak $x \in \mathcal{B}$.
- (iii) Če je $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ algebra s klasičnim vektorskim produktom, je $\mathcal{B}$ izomorfna obsegu kvaternionov.

Dokaz. (i) Najprej se prepričamo, da velja neenakost

$$|a \times b|^2 + \langle a, b \rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2 \quad (2)$$

za vsaka $a, b \in \mathcal{A}$. Za $a = 0$ je neenakost očitna, pri $a \neq 0$ pa jo dobimo tako, da tvorimo element $c = -\frac{\langle a, b \rangle}{|a|^2} a + b$ in zapišemo neenakost $|a \times c|^2 \leq |a|^2 |c|^2$. Če razvijemo obe strani te neenakosti, pokrajšamo enake člene, druge pa razvrstimo v pravilni vrstni red, dobimo neenakost (2).

Zdaj vzamemo $x = (\alpha, a)$ ter $y = (\beta, b)$. S pomočjo definicije produkta v $\mathcal{B}$ in neenakosti (2) dobimo

$$\begin{aligned}
 |xy|^2 &= \langle xy, xy \rangle = \\
 &= \langle (\alpha\beta - \langle a, b \rangle, \alpha b + \beta a + a \times b), (\alpha\beta - \langle a, b \rangle, \alpha b + \beta a + a \times b) \rangle = \\
 &= (\alpha\beta - \langle a, b \rangle)^2 + \langle \alpha b + \beta a + a \times b, \alpha b + \beta a + a \times b \rangle = \\
 &= (\alpha\beta - \langle a, b \rangle)^2 + \alpha^2 |b|^2 + \beta^2 |a|^2 + |a \times b|^2 + 2\alpha\beta \langle a, b \rangle = \\
 &= \alpha^2 \beta^2 + \langle a, b \rangle^2 + \alpha^2 |b|^2 + \beta^2 |a|^2 + |a \times b|^2 \leq \\
 &\leq \alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 |b|^2 + \beta^2 |a|^2 + |a|^2 |b|^2 = \\
 &= (\alpha^2 + |a|^2)(\beta^2 + |b|^2) = |x|^2 |y|^2.
 \end{aligned}$$

V računu smo upoštevali, da je $\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$.

(ii) Naj bo $x = (\alpha, a)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
 |x^2|^2 &= \langle x^2, x^2 \rangle = \langle (\alpha^2 - |a|^2, 2\alpha a), (\alpha^2 - |a|^2, 2\alpha a) \rangle = \\
 &= (\alpha^2 - |a|^2)^2 + |2\alpha a|^2 = (\alpha^2 + |a|^2)^2 = |x|^4
 \end{aligned}$$

(iii) To sledi iz tabele množenja za klasični vektorski produkt (glej zgled 2) in enakosti $|i| = |j| = |k| = 1$ ter $\langle i, j \rangle = \langle i, k \rangle = \langle j, k \rangle = 0$. ■

3. Razcep končno razsežnih algeber

Pomemben pojem pri obravnavi algeber je pojem ideala. Naj bo $(\mathcal{A}, \times)$ algebra z abstraktnim vektorskim produktom in $\mathcal{J}, \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ vektorska podprostora. Naj oznaka $\mathcal{J}\mathcal{K}$ pomeni linearno lupino množice vektorjev $\{a \times b; a \in \mathcal{J}, b \in \mathcal{K}\}$. Tedaj rečemo, da je $\mathcal{J}$ *ideal*, če je $\mathcal{J}\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$. Vedno vsebuje $\mathcal{A}$ vsaj dva ideala, namreč $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ ter $\mathcal{J} = \{0\}$. Če sta to edina ideala in če je $\mathcal{A}\mathcal{A} \neq \{0\}$, potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *enostavna*. Očitno je podprostor $\mathcal{A}_0 = \{a \in \mathcal{A}; a \times \mathcal{A} = \{0\}\}$ ideal algebre $\mathcal{A}$. Ideal $\mathcal{A}_0$ imenujemo *trivialni del* algebre $\mathcal{A}$. Če je $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, potem imenujemo $\mathcal{A}$ *trivialna algebra* (opisana je že v zgledu 1), če pa je $\mathcal{A}_0 = \{0\}$, potem rečemo, da je $\mathcal{A}$ *neizrojena algebra*.

Trditev 3. Če je $\mathcal{J}$ ideal končno razsežne algebre $\mathcal{A}$ z abstraktnim vektorskim produktom, je tudi ortogonalni komplement $\mathcal{J}^\perp$ ideal algebre $\mathcal{A}$.

Dokaz. Iz enakosti (1) in dejstva, da je $\mathcal{J}\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$, dobimo

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{J}^\perp \mathcal{A}, \mathcal{J} \rangle &= -\langle \mathcal{A}\mathcal{J}^\perp, \mathcal{J} \rangle = \\
 &= \langle \mathcal{A}\mathcal{J}, \mathcal{J}^\perp \rangle \subset \langle \mathcal{J}, \mathcal{J}^\perp \rangle = \{0\},
 \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $\mathcal{J}^\perp \mathcal{A}$ pravokoten na $\mathcal{J}$ oziroma $\mathcal{J}^\perp \mathcal{A} \subset \mathcal{J}^\perp$. To nam pove, da je tudi $\mathcal{J}^\perp$ ideal. ■

Izrek 2. Naj bo $(\mathcal{A}, \times)$ končno razsežna algebra z abstraktnim vektorskim produktom. Tedaj je $\mathcal{A}$ mogoče zapisati v obliki direktne vsote $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_n$, kjer je $\mathcal{A}_0$ trivialna algebra, $\mathcal{J}_i$ pa enostavne algebre.

Dokaz. V skladu s trditvijo 3 definiramo $\mathcal{J} = \mathcal{A}_0^\perp$. Če bi bila $\mathcal{J}$ izrojena algebra, bi obstajal neničeln $a \in \mathcal{J}$, da bi bilo $a \times \mathcal{J} = \{0\}$. Ker je $a \times \mathcal{A}_0$ tudi enako $\{0\}$, je potem $a \times \mathcal{A} = a \times (\mathcal{A}_0 + \mathcal{J}) = \{0\}$. To pomeni, da bi moral a biti element $\mathcal{A}_0$, kar je protislovje. Torej je $\mathcal{J}$ neizrojena algebra.

Če je algebra $\mathcal{J}$ že sama enostavna, je pač $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$. Če $\mathcal{J}$ ni enostavna, potem vsebuje netrivialen ideal $\mathcal{J}_1$. Če sta $\mathcal{J}_1$ in $\mathcal{J}_1^\perp$ že enostavni algebri, smo dokaz končali, če pa katera izmed njiju ni enostavna, postopek nadaljujemo. Zaradi končne dimenzije algebre $\mathcal{A}$ se bo ta postopek enkrat končal, ker ima netrivialen ideal manjšo dimenzijo od algebre same. ■

V naslednjih trditvah si bomo ogledali, kaj je z abstraktnimi vektorskimi produkti v nižjih dimenzijah.

Trditev 4. Vsaka enostavna algebra $\mathcal{A}$ z abstraktnim vektorskim produktom dimenzije 3 je izomorfna $\mathbb{R}^3$ s klasičnim vektorskim produktom.

Dokaz. Vzemimo ortonormirano bazo $\{i, j, k\}$ vektorskega prostora $\mathcal{A}$. Ker je $i \times j$ pravokoten na i, j , obstaja taka konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $i \times j = \alpha k$. Z uporabo enačbe (1) dobimo

$$\begin{aligned} \langle j \times k, i \rangle &= -\langle j \times i, k \rangle = \\ &= \langle i \times j, k \rangle = \langle \alpha k, k \rangle = \alpha. \end{aligned}$$

Ker je $j \times k$ pravokoten na j, k , je očitno $j \times k = \alpha i$. Na podoben način lahko generiramo celo tabelo množenja, ki je takale

$\times$	i	j	k
i	0	αk	$-\alpha j$
j	$-\alpha k$	0	αi
k	αj	$-\alpha i$	0

Ker je $\mathcal{A}$ enostavna, je $\alpha \neq 0$. Definiramo lahko $i' = \frac{1}{\alpha}i$, $j' = \frac{1}{\alpha}j$ ter $k' = \frac{1}{\alpha}k$. Tabela za množenje elementov i', j', k' je enaka kot v zgledu 2. ■

Lema 1. Vsaka enostavna končno razsežna algebra z abstraktnim vektorskim produktom vsebuje podalgebro, ki je izomorfna $\mathbb{R}^3$ s klasičnim vektorskim produktom.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{K} = \{(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; \langle a, b \rangle = 0, |a| = |b| = 1\}$. Ta množica je kompaktna, ker je $\mathcal{A}$ končno razsežen vektorski prostor. Definirajmo (zvezno) preslikavo $\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$ s predpisom $\phi(a, b) = |a \times b|$. Obstaja maksimum ϕ zavzet pri paru (i, j) . Označimo ga z α . Ker je $\mathcal{A}\mathcal{A} \neq (0)$, je $\alpha > 0$. Naj bo k tak enotski vektor, da je $i \times j = \alpha k$. Po definiciji števila α je $|i \times k| \leq \alpha$. Pišimo $i \times k = \gamma j + z$, kjer je z pravokoten na

$\{i, j, k\}$. Ker je $|i \times k| = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} \leq \alpha$ in je $\gamma = \langle i \times k, j \rangle = -\langle i \times j, k \rangle = -\alpha$, to pomeni, da je $|z| = 0$ oziroma $i \times k = -\alpha j$. Povsem podobno vidimo, da je $j \times k = \alpha i$. Naprej potem ravnamo kot v dokazu prejšnje trditve. ■

Trditev 5. *Enostavna algebra $\mathcal{A}$ z abstraktnim vektorskim produktom dimenzije 4 ne obstaja.*

Dokaz. S pomočjo prejšnje leme dobimo pravokotne elemente $\{i, j, k\}$, ki generirajo podalgebro s klasičnim vektorskim produktom. Ostane nam še četrti element, pravokoten na prejšnje tri, ki ga bomo označili z l in je dopolnitev prejšnjih treh do ortogonalne baze prostora $\mathcal{A}$. S pomočjo (1) dobimo

$$\langle i \times l, i \rangle = \langle i \times l, l \rangle = 0$$

ter

$$\langle i \times l, j \rangle = -\langle i \times j, l \rangle = -\langle k, l \rangle = 0,$$

$$\langle i \times l, k \rangle = -\langle i \times k, l \rangle = \langle j, l \rangle = 0.$$

Od tod sledi, da je $i \times l = 0$. Povsem podobno dobimo, da je $j \times l = k \times l = 0$, to pa pomeni, da je l neničeln element trivialnega dela algebre $\mathcal{A}$, ki zato ne more biti enostavna. ■

S povsem podobnimi prijemi dokažemo tudi

Trditev 6. *Če je $\mathcal{A}$ 5-dimenzionalna enostavna algebra z abstraktnim vektorskim produktom, potem obstajajo konstante α, β, γ , od katerih je vsaj ena neničelna, tabela množenja pa je podana z*

$\times$	i	j	k	l	m
i	0	k	$-j$	αm	$-\alpha l$
j	$-k$	0	i	βm	$-\beta l$
k	j	$-i$	0	γm	$-\gamma l$
l	$-\alpha m$	$-\beta m$	$-\gamma m$	0	$\alpha i + \beta j + \gamma k$
m	αl	βl	γl	$-\alpha i - \beta j - \gamma k$	0

Vrnimo se še k neenakosti (2). Spomnimo se, da smo dokazali neenakost

$$|a \times b|^2 + \langle a, b \rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2.$$

Zdaj bomo raziskali, kdaj v tej neenakosti velja enačaja. Takoj se nam ponuja trivialni zgled $\mathcal{A} = \mathbb{R}i$, kjer je $i \times i = 0$, zato bomo dodatno predpostavili, da je $\mathcal{A}$ neizrojena.

Izrek 3. *Naj bo $\mathcal{A}$ neizrojena algebra z abstraktnim vektorskim produktom in naj bo izpolnjena identiteta $|a \times b|^2 + \langle a, b \rangle^2 = |a|^2 |b|^2$. Tedaj je $\mathcal{A}$*

izomorfna bodisi algebri s klasičnim vektorskim produktom bodisi algebri $\mathbb{R}^7$ s produktom

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Dokaz. Iz dokaza izreka 1(i) razberemo, da v algebri $\mathcal{B} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{A}$ zgornja enakost implicira, da je $|xy| = |x||y|$ za vsaka $x, y \in \mathcal{B}$. To pomeni, da je $\mathcal{B}$ algebra z absolutno vrednostjo in enoto. Po [2] je $\mathcal{B}$ izomorfna bodisi obsegu kvaternionov bodisi oktonionov (ker je $\dim(\mathcal{A}) > 1$), od tod pa takoj sledi tudi trditev, formulirana v tem izreku. Tabela za množenje je dobljena s pomočjo tabele iz članka [1].

LITERATURA

- [1] B. Zalar, *O oktonionih*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992) 79–84.
- [2] B. Zalar, *Algebre z absolutno vrednostjo*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992) 161–166.

NOVE KNJIGE

Z. BOHTE, Numerično reševanje nelinearnih enačb, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993, 176 str.

Letos je kot štiriintrideseta knjiga zbirke univerzitetnih učbenikov in monografij, ki jo izdaja DMFA, izšla knjiga Numerično reševanje nelinearnih enačb Zvonimirja Bohteta. Avtor v njej podrobno obdela snov, ki sodi v začetni del predavanj v predmetih numerične matematike. Na Oddelku za matematiko, FNT, je numerično reševanje nelinearnih metod prvi del predmeta Numerična linearna algebra.

Knjigo začinja pregled osnov numeričnega računanja. Podrobno nas poduči, kaj so neodstranljiva napaka, napaka metode in zaokrožitvena napaka. Zvemo, kdaj je matematični problem za numerično reševanje občutljiv in kdaj ne, kaj je konvergentnost numerične metode in kaj stabilnost računskega procesa. Poglavje se konča z opisom dveh najpomembnejših načinov predstavitev števil v računalniku, s stalno in s premično piko, in zgledi analize zaokrožitvenih napak. Pojmi, ki jih srečamo v prvem poglavju, so pomembni za razumevanje celotne snovi. Avtor se pri obdelavi posameznih metod v drugih poglavjih ne omeji le na izpeljavo same metode in študij njene konvergence, temveč obravnava tudi vpliv končne aritmetike na vedenje metode v praksi.

V drugem poglavju je na kratko obdelana prva od metod za reševanje nelinearnih enačb, bisekcija. Sledi splošna iteracija kot okvir posebnih metod. Tu zvemo, kako lahko oblikujemo iteracijski proces, kaj je red konvergence in spoznamo dva splošna konvergenčna izreka. V naslednjem poglavju so obdelane posebne metode, ki jih je mogoče zapisati kot posebni primer splošne iteracije. Avtor obdela tetivno in sekantno metodo, metodo regula falsi in tangentno metodo skupaj z njenimi izpeljankami. Zadnji, najpomembnejši, je namenjenih največ vrstic. Avtor jo obravnava tudi v kompleksnem.

Peto poglavje je namenjeno iskanju ničel polinomov. Obsega opis treh metod, med katerimi je najpomembnejša Laguerrova, in obravnava problem redukcije algebraične enačbe, ko že poznamo približek za kak koren.

Zadnje poglavje govori o reševanju sistemov nelinearnih enačb. Avtor posploši splošno iteracijo in Newtonovo metodo na več dimenzij, doda pa še nekaj vrstic o variacijskih metodah. Poglavje se konča z opisom Bairstow-Hitchcockove metode za računanje kvadratičnih deliteljev polinomov, ki se po namenu navezuje na peto poglavje.

V knjigi zajeta snov predstavlja zaokroženo vsebinsko celoto. Avtorju je lepo uspelo združiti snov, ki je običajno ne srečujemo v numeričnih knjigah, a je njeno razumevanje za numerično računanje zelo pomembno, z bolj običajno stvarino v drugem delu.

Tekst je pisan razumljivo, izčrpno in matematično korektno, s poudarkom na vplivu končne računalnikove aritmetike na računske postopke. Sama snov je ilustrirana s številnimi numeričnimi zgledi, algoritmi in slikami. Poglavja so dopolnjena z nalogami.

Snov, ki jo knjiga zajema, ne zahteva poznavanja zahtevnejših matematičnih pojmov. Tako knjiga ni primeren učbenik le za predmet, ob katerem je nastala, ampak je dostopna tudi študentom tehnike in tistim študentom matematike, ki numerično matematiko poslušajo v skrčenem obsegu (npr. visokošolska pedagoška smer, višješolska smer uporabne matematike na Oddelku za matematiko, FNT). Knjiga bo zato v pomoč vsem, ki numerično računanje uporabljajo v svojem poklicu, še posebej prav pa bo prišla študentom matematike, računalništva, fizike in drugih tehniških smeri. Tudi srednješolski profesorji jo bodo lahko uporabljali kot pripomoček pri nekaterih poglavjih rednega in izbirnega programa matematike.

Jernej Kozak

UTRINEK

Schrödingerjeva valovna mehanika ni fizikalna teorija, ampak zvijača, in to zelo dobra zvijača.

A. S. Eddington, *Nature of the Physical World*
University Press, Cambridge 1928, str. 219.