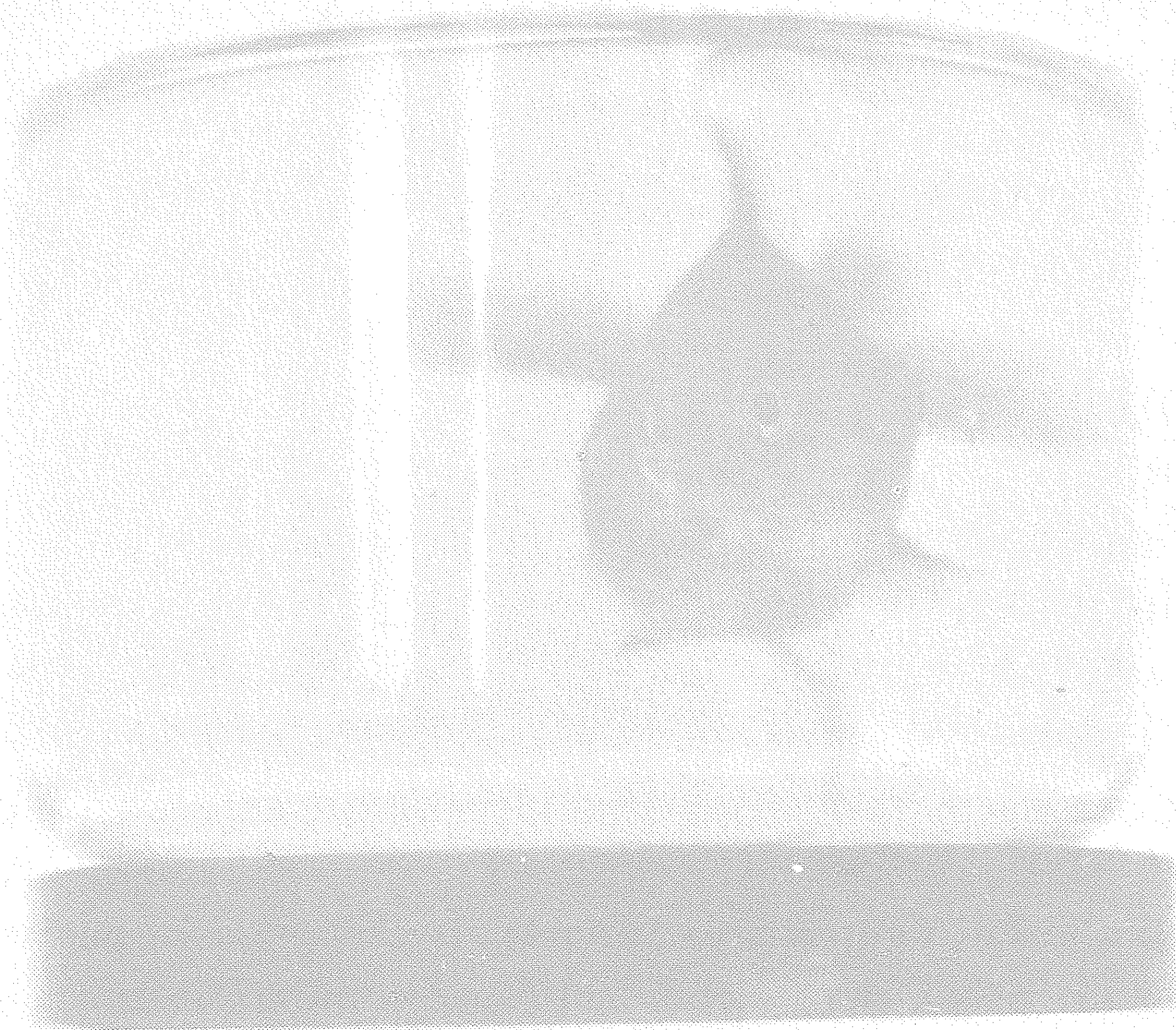


1993

Letnik 40

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1993

letnik 40, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.500,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.000,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 300,– SIT, dvojna številka 600,– SIT, stare številke 160,– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1993 DMFA Slovenije – 1163

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Matrične sredine — Matrix means (Bojan Magajna) 97–109

Superprevodnost — Superconductivity (Janez Strnad) 110–120

Aksiomi geometrije v šoli in znanosti, 2. del — Geometry axioms in school

and in science, part II (Herbert Zeitler, prevedla Silva Kmetič) 121–127

Nove knjige — New books (Zvonko Perat, Janez Strnad) 109, 128–IV

Vesti — News

Razpis za priznanja učiteljem (Milena Strnad) IV

Vabilo na občni zbor (Franc Cvelbar) IV

Na ovitku: Slika k članku o superprevodnosti. Dvekilogramska posoda

z dnom iz magneta iz redkih zemelj lebdi nad superprevodnikom iz itrija, barija, bakra in kisika, ohlajenim s tekočim dušikom. Sliko so posneli M. Murakami in sodelavci z YBCO iz Tokia.

MATRIČNE SREDINE

BOJAN MAGAJNA

Math. Subj. Class. (1991) 15A09, 15A45, 15A48, 47A63

Pregledali bomo osnovne lastnosti vzporedne vsote, geometrijske in harmonične sredine pozitivnih operatorjev na končno razsežnih prostorih.

MATRIX MEANS

In this survey article some of the most basic properties of the parallel sum and the geometric and harmonic mean of positive operators on finite dimensional spaces are treated.

0. Uvod

Aritmetična, geometrijska in harmonična sredina dveh pozitivnih realnih števil a in b so definirane zaporedoma kot

$$\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \text{ in } 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1}.$$

Kako bi te sredine posplošili na pozitivne matrike? Pri aritmetični sredini seveda ni nobenega problema, saj jo lahko definiramo z isto formulo kot za pozitivni števili. Pri geometrijski sredini pa nastopi zanimiva težava: množenje matrik ni komutativna operacija in produkt dveh pozitivnih matrik A in B zato ni vedno pozitivna (niti simetrična) matrika, torej pozitivni kvadratni koren iz AB ne obstaja vedno. (Tukaj imenujemo matriko pozitivno, če je hermitska ali sebi-adjungirana in so vse njene lastne vrednosti nenegativne.) Tudi formule za harmonično sredino števil ne moremo uporabiti na splošnih pozitivnih matrikah, saj le-te niso vedno obrnljive. Definicija harmonične sredine pozitivnih matrik temelji na manj znani operaciji — vzporedni vsoti matrik, ki sta jo vpeljala Anderson in Duffin v [2].

Aritmetična, geometrijska in harmonična sredina so posebni zgledi splošnega pojma operatorske sredine, ki sta ga uvedla Kubo in Ando v [8]. V tem prispevku, ki naj bi ga načeloma lahko razumel vsakdo, kdor pozna osnovno linearno algebro, se bomo omejili v glavnem na harmonično, geometrijsko in aritmetično sredino, v splošno teorijo sredin pa bomo le bežno pogledali na koncu članka. Prvi razdelek bo le ponovitev znanih rezultatov iz linearne algebre. Podrobnejšo razlago nekaterih osnovnih pojmov, ki jih bomo uporabljali, lahko najde bralec npr. v [6].

1. Priprava

1.1. *Unitaren prostor* je končno razsežen vektorski prostor H nad obsegom kompleksnih števil $\mathbb{C}$, opremljen s skalarnim produktom. Skalarni produkt vektorjev $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ bomo označili z $\langle \xi, \eta \rangle$. Vsi n -razsežni unitarni

prostori so izometrično izomorfni prostoru $\mathbb{C}^n$, kjer je za vektorja $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ skalarni produkt definiran z

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i,$$

zato lahko bralec privzame (če to želi), da je kar $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. V unitarnem prostoru je definirana *norma* poljubnega vektorja ξ kot $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$.

Ortogonalni komplement podprostora K v H je definiran kot

$$\mathcal{K}^\perp = \{\xi \in \mathcal{H} : \langle \xi, \eta \rangle = 0 \ \forall \eta \in \mathcal{K}\}.$$

Za poljubna podprostora K in L v H je očitno $(\mathcal{K} + \mathcal{L})^\perp = \mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{L}^\perp$ in ni težko dokazati relacije $(\mathcal{K}^\perp)^\perp = \mathcal{K}$; iz zadnjih dveh enakosti potem sledi še $(\mathcal{K} \cap \mathcal{L})^\perp = \mathcal{K}^\perp + \mathcal{L}^\perp$.

1.2. Spomnimo se, da je linearen operator na H *pozitiven*, če je $\langle A\xi, \xi \rangle \geq 0$ za vsak $\xi \in \mathcal{H}$; dejstvo, da je A pozitiven, bomo zapisali kot $A \geq 0$. Z $B(H)$ bomo označili algebro vseh linearnih operatorjev na H , z $\mathcal{B}(\mathcal{H})_h$ podmnožico vseh hermitskih operatorjev, z $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ pa podmnožico vseh pozitivnih operatorjev. (Operator A imenujemo hermitski, če je $A^* = A$; vsak pozitiven operator je hermitski.)

1.3. Vsak hermitski operator lahko predstavimo v primerni ortonormirani bazi z diagonalno matriko, ki ima po diagonali lastne vrednosti operatorja. Kot vemo iz linearne algebre, od tod takoj sledi, da je hermitski operator pozitiven natanko tedaj, ko so vse njegove lastne vrednosti nenegativne. Sledi tudi, da za vsak pozitiven operator A obstaja natanko en tak pozitiven operator B , da je $B^2 = A$; ta operator B bomo označili z $A^{1/2}$.

1.4. Na podlagi pojma pozitivnosti lahko v množico hermitskih operatorjev $\mathcal{B}(\mathcal{H})_h$ vpeljemo relacijo *delne urejenosti*:

$$A \leq B \text{ natanko tedaj, ko je } B - A \geq 0.$$

Relacijo $A \leq B$ bomo včasih zapisovali tudi kot $B \geq A$. Seštevanje hermitskih operatorjev je monotona operacija za tako definirano urejenost: iz $A_1 \leq A_2$ sledi $A_1 + B \leq A_2 + B$ za poljubne operatorje $A_1, A_2, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_h$.

1.5. $B(H)$ je normirana algebra, kjer je za poljuben $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *norma* definirana z

$$\|A\| = \sup\{\|A\xi\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1\}.$$

Ta norma ima dve pomembni dodatni lastnosti:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \text{ in } \|A^*A\| = \|A\|^2$$

za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. (Obe lastnosti je lahko dokazati, pri drugi si pomagamo s Cauchy-Schwarzovo neenačbo.) Če je $A \geq 0$, je $\|A\|$

kar največja lastna vrednost operatorja A . (To pove preprost račun v ortonormirani bazi, sestavljeni iz lastnih vektorjev operatorja A .) Za vsak $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ so vse lastne vrednosti absolutno manjše ali enake $\|A\|$.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})_h$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ sta zaprti množici v topologiji, ki jo na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ porodi norma.

1.6. Če je $A \leq B$, potem je $C^*AC \leq C^*BC$ za poljuben $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_h$ (to sledi neposredno iz definicije urejenosti $\leq$). Za hermitski C je torej $CAC \leq CBC$.

1.7. Naj bo μ najmanjša med lastnimi vrednostmi pozitivnega operatorja A . V ortonormirani bazi, v kateri pripada operatorju A diagonalna matrika, takoj izračunamo, da je $A \geq \mu I$, kjer I označuje identični operator. Pri tem je operator A obrnljiv natanko tedaj, ko je $\mu > 0$; v tem primeru je obrnljiv tudi vsak operator B , ki zadošča pogoju $B \geq A$.

Podobno ugotovimo, da sta za poljuben $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ in poljuben realen $\alpha > 0$ relaciji $A \leq \alpha I$ in $\|A\| \leq \alpha$ ekvivalentni.

1.8. Jedro operatorja A bomo označevali z $\mathcal{N}(A)$, zalogo vrednosti pa z $\mathcal{R}(A)$. V splošnem je $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$. Torej je $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$, če je A hermitski operator. Za hermitski A razpade prostor $\mathcal{H}$ na direktno vsoto dveh ortogonalnih invariantnih podprostorov,

$$\mathcal{H} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A).$$

Pri tem je zožitev operatorja A na podprostor $\mathcal{N}(A)$ ničelni operator; zožitev na podprostor $\mathcal{R}(A)$ pa je injektiven (torej obrnljiv) operator, saj je $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = 0$. Zato lahko definiramo *posplošeni inverz* operatorja A kot

$$A^\dagger = P(A|_{\mathcal{R}(A)})^{-1}P,$$

kjer je P ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$. Če je A obrnljiv, je $A^\dagger = A^{-1}$. Hkrati z A je hermitski tudi operator $A^\dagger$; če je A pozitiven, je pozitiven tudi $(A|_{\mathcal{R}(A)})^{-1}$, torej je tedaj pozitiven tudi operator $A^\dagger$.

1.9. Za poljubna operatorja $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ imata operatorja AB in BA iste lastne vrednosti. (Če bi bil $\mathcal{H}$ neskončno razsežen, bi se lahko spektra operatorjev AB in BA razlikovala le v točki 0.) To dejstvo lahko dokažemo na primer takole. Točka 0 je lastna vrednost operatorja AB natanko tedaj, ko je $\det AB = 0$; zaradi $\det AB = \det A \det B = \det BA$ je torej 0 lastna vrednost za AB natanko tedaj, ko je lastna tudi za BA . Oglejmo si še možnost $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Za vsak vektor $\xi \in \mathcal{N}(AB - \lambda I)$ iz enakosti $AB\xi = \lambda\xi$ sledi $(BA)B\xi = \lambda B\xi$, torej je $B\xi \in \mathcal{N}(BA - \lambda I)$. Zožitev $B_0 \stackrel{\text{def}}{=} B|_{\mathcal{N}(AB - \lambda I)}$ torej preslika $\mathcal{N}(AB - \lambda I)$ v prostor $\mathcal{N}(BA - \lambda I)$. Podobno operator $A_0 \stackrel{\text{def}}{=} A|_{\mathcal{N}(BA - \lambda I)}$ preslika $\mathcal{N}(BA - \lambda I)$ v $\mathcal{N}(AB - \lambda I)$. Ker za vsak $\xi \in \mathcal{N}(AB - \lambda I)$ velja $AB\xi = \lambda\xi$ oziroma $\lambda^{-1}A_0B_0\xi = \xi$, je $\lambda^{-1}A_0$ (levi in zaradi simetrije dvostranski) inverz operatorja B_0 , torej je B_0 obrnljiv operator. Zato sta vektorska prostora $\mathcal{N}(AB - \lambda I)$ in $\mathcal{N}(BA - \lambda I)$

izomorfna; med drugim je torej λ lastna vrednost za AB natanko tedaj, ko je lastna vrednost za BA .

1.10. Za poljuben $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sta relaciji $X^*X \leq I$ in $XX^* \leq I$ ekvivalentni: pomenita namreč, da so vse lastne vrednosti pozitivnih operatorjev X^*X in XX^* v intervalu $[0, 1]$, toda po 1.9 imata ta dva operatorja iste lastne vrednosti. Ti dve relaciji sta ekvivalentni zahtevi $\|X\| \leq 1$.

1.11. Urejenost operatorjev se v marsičem razlikuje od urejenosti števil. Tako na primer iz $A \leq B$ v splošnem ne sledi, da je $A^2 \leq B^2$. Za zgled lahko vzamemo kar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lastni vrednosti matrike $B - A$ sta nenegativni (in sicer 2, 0), torej je $A \leq B$. Kljub temu pa je ena lastna vrednost matrike $B^2 - A^2$ negativna, saj je determinanta te matrike negativna.

1.12. Naslednji rezultat se pri linearni algebri ne omenja pogosto (pač pa je standarden v operatorski teoriji [9]), zato ga bomo navedli kot lemo.

Lema. Naj bo $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ in $A \leq B$. Potem je

- (i) $A^{1/2} \leq B^{1/2}$ in
- (ii) $B^{-1} \leq A^{-1}$, če sta A in B obrnljiva.

Dokaz. (i) Predpostavimo najprej, da je B obrnljiv operator. Potem iz $A \leq B$ po 1.6 sledi

$$B^{-1/2}AB^{-1/2} \leq B^{-1/2}BB^{-1/2} = I,$$

od tod pa

$$\|A^{1/2}B^{-1/2}\|^2 = \|(A^{1/2}B^{-1/2})^*(A^{1/2}B^{-1/2})\| = \|B^{-1/2}AB^{-1/2}\| \leq 1.$$

Ker je $\|A^{1/2}B^{-1/2}\| \leq 1$, so vse lastne vrednosti operatorja $A^{1/2}B^{-1/2}$ absolutno manjše ali enake 1. Toda po 1.9 se lastne vrednosti operatorja $A^{1/2}B^{-1/2} = A^{1/2}B^{-1/4}B^{-1/4}$ ujemajo z lastnimi vrednostmi operatorja $B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}$, torej je $B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4} \leq I$, od tod pa po 1.6 sledi $A^{1/2} \leq B^{1/2}$.

Če B ni obrnljiv, upoštevajmo, da je za vsak realen $\varepsilon > 0$ operator $B + \varepsilon I$ obrnljiv (saj so njegove lastne vrednosti za ε povečane lastne vrednosti operatorja B). Ker je $A \leq B + \varepsilon I$, sledi po prejšnjem odstavku $A^{1/2} \leq (B + \varepsilon I)^{1/2}$. Ko pošljemo v zadnji neenakosti ε proti 0, dobimo $A^{1/2} \leq B^{1/2}$. (Da konvergira $(B + \varepsilon I)^{1/2}$ proti $B^{1/2}$, dokažemo z diagonalizacijo operatorja B .)

(ii) Iz $A \leq B$ sledi po 1.6 $B^{-1/2}AB^{-1/2} \leq I$, kar pomeni, da so lastne vrednosti operatorja $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ v intervalu $(0, 1]$ (to vidimo z diagonalizacijo). Potem pa so vse lastne vrednosti operatorja $B^{1/2}A^{-1}B^{1/2} = (B^{-1/2}AB^{-1/2})^{-1}$ večje ali enake 1, zato je $B^{1/2}A^{-1}B^{1/2} \geq I$ in od tod $A^{-1} \geq B^{-1/2}IB^{-1/2} = B^{-1}$. ■

1.13. Za vsako padajoče zaporedje (A_n) pozitivnih operatorjev (torej $A_n \leq A_m$ za $n \geq m$) obstaja $A \stackrel{\text{def}}{=} \lim A_n$. (Če bi bil H neskončno razsežen, bi ta limita obstajala le v krepki operatorski topologiji.) Dokaz tega dejstva bomo opustili, bralec ga lahko najde na primer v [9].

1.14. Naj bo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ in $\xi \in \mathcal{H}$. Ko predstavimo A z diagonalno matriko v ortonormirani bazi (ki ima po diagonali nenegativna števila), spoznamo, da je $\xi \in \mathcal{N}(A)$ natanko tedaj, ko je $\langle A\xi, \xi \rangle = 0$.

S pomočjo kriterija iz prejšnjega odstavka sledi, da je $\mathcal{N}(A + B) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$ za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$. Če vzamemo na obeh straneh zadnje enakosti ortogonalni komplement, dobimo $\mathcal{R}(A + B) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$.

1.15. Naj bo spet $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$. Glede na razcep $\mathcal{H} = \mathcal{R}(A + B) \oplus \mathcal{N}(A + B)$ lahko (z uporabo 1.14) predstavimo A in B z operatorskima matrikama oblike

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je $A_1 = A|_{\mathcal{R}(A+B)}$ in $B_1 = B|_{\mathcal{R}(A+B)}$. Za vsak $\varepsilon > 0$ je potem

$$(A + \varepsilon I)(A + B + 2\varepsilon I)^{-1}(B + \varepsilon I) = \begin{bmatrix} (A_1 + \varepsilon I)(A_1 + B_1 + 2\varepsilon I)^{-1}(B_1 + \varepsilon I) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\varepsilon I \end{bmatrix}.$$

Ker je $A_1 + B_1$ obrnljiv operator, je $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (A_1 + B_1 + 2\varepsilon I)^{-1} = (A_1 + B_1)^{-1}$. Od tod sledi naslednja ugotovitev.

Lema. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (A + \varepsilon I)(A + B + 2\varepsilon I)^{-1}(B + \varepsilon I) = A(A + B)^\dagger B$.

2. Vzporedna vsota operatorjev

2.1. Vzporedno vsoto dveh obrnljivih operatorjev $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ definiramo kot

$$A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}. \quad (2.1)$$

Pri tem je operator $A^{-1} + B^{-1}$ obrnljiv, ker je $A^{-1} + B^{-1} \geq A^{-1}$. V posebnem primeru, ko sta A in B kar pozitivni števili, ki predstavljata električni upornosti dveh vzporedno zvezanih uporov, je $A : B$ celotna upornost — od tod ime vzporedna vsota. Povsod v tem članku bo tudi za števila oznaka $A : B$ pomenila vzporedno vsoto in ne deljenje. Definicijo vzporedne vsote bomo sedaj razširili na poljubne pozitivne operatorje.

Definicija. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ naj bo

$$A : B = \lim_{\varepsilon \searrow 0} [(A + \varepsilon I)^{-1} + (B + \varepsilon I)^{-1}]^{-1}.$$

Seveda je treba dokazati, da limita v tej definiciji obstaja. V ta namen zapišimo izraz pod limito kot

$$(A + \varepsilon I)(A + B + 2\varepsilon I)^{-1}(B + \varepsilon I)$$

in uporabimo lemo 1.15. Tako dobimo naslednjo trditev.

2.2. Trditev. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je $A : B = A(A + B)^\dagger B$.

2.3. Neposredno iz formule (2.1) razberemo, da je vzporedna vsota dveh obrnljivih pozitivnih operatorjev pozitiven operator in da je $B : A = A : B$. Z limitnim preходом potem sledi, da velja enakost $A : B = B : A$ tudi, če A in B nista obrnljiva. Torej je vzporedna vsota komutativna operacija; da je tudi asociativna, bo sledilo iz točke (ii) naslednjega izreka.

Izrek. (i) Iz $A_1 \leq A_2$ sledi $A_1 : B \leq A_2 : B$ za poljubne $A_1, A_2, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$.

(ii) Naj bosta (A_n) in (B_n) dve padajoči zaporedji pozitivnih operatorjev na H ; označimo $A = \lim A_n$, $B = \lim B_n$. Potem je

$$A : B = \lim(A_n : B_n).$$

Dokaz. (i) Privzeti smemo, da so A_1, A_2 in B obrnljivi operatorji, sicer obravnavamo najprej $A_1 + \varepsilon I$, $A_2 + \varepsilon I$ in $B + \varepsilon I$, kjer je $\varepsilon > 0$, ter nato pošljemo ε proti 0. Iz $A_1 \leq A_2$ sledi po lemi 1.12(ii) $A_2^{-1} \leq A_1^{-1}$, torej je $A_2^{-1} + B^{-1} \leq A_1^{-1} + B^{-1}$. Iz zadnje relacije pa sedaj spet po lemi 1.12(ii) sledi $(A_1^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq (A_2^{-1} + B^{-1})^{-1}$, torej je $A_1 : B \leq A_2 : B$.

(ii) Po točki (i) (in zaradi komutativnosti) je zaporedje $(A_n : B_n)$ padajoče, zato po 1.13 obstaja

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lim(A_n : B_n).$$

Ker je $A \leq A_n$ in $B \leq B_n$, je $A : B \leq A_n : B_n$ za vsak n po (i), torej je

$$A : B \leq C.$$

Za dokaz obratne neenakosti upoštevajmo, da je

$$A_n : B_n \leq (A_n + \varepsilon I) : (B_n + \varepsilon I)$$

za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak n . Ker zaporedje operatorjev $(A_n + \varepsilon I) : (B_n + \varepsilon I)$ pri fiksnem ε konvergira proti $(A + \varepsilon I) : (B + \varepsilon I)$ (to sledi z uporabo formule (2.1)), je $C \leq (A + \varepsilon I) : (B + \varepsilon I)$. Ko pošljemo v zadnji neenakosti ε proti 0, dobimo $C \leq A : B$. ■

Predpostavka v izreku 2.3(ii), da sta zaporedji (A_n) in (B_n) padajoči, je potrebna, to bomo videli v zgledu 2.8.

2.4. Posledica. Množica $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je za vzporedno vsoto delno urejena komutativna polgrupa.

Dokaz. Dokazati moramo le še asociativnost vzporedne vsote. Če so A, B, C obrnljivi pozitivni operatorji, potem po formuli (2.1) sledi

$$(A : B) : C = (A^{-1} + B^{-1} + C^{-1})^{-1} = A : (B : C).$$

Če A, B in C niso vsi obrnljivi, pa je potem za vsak $\varepsilon > 0$

$$[(A + \varepsilon I) : (B + \varepsilon I)] : (C + \varepsilon I) = (A + \varepsilon I) : [(B + \varepsilon I) : (C + \varepsilon I)];$$

če pošljemo v tej enakosti ε proti 0, dobimo $(A : B) : C = A : (B : C)$ po izreku 2.3(ii) (ki ga uporabimo za poljubno zaporedje $\varepsilon_n \searrow 0$). ■

2.5. Posledica. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je $\|A : B\| \leq \|A\| : \|B\|$.

Dokaz. Iz $A \leq \|A\|I$ in $B \leq \|B\|I$ sledi z uporabo izreka 2.3(i) (in komutativnosti), da je

$$A : B \leq (\|A\|I) : (\|B\|I),$$

od tod pa sledi $\|A : B\| \leq \|A\| : \|B\|$ (glejte (1.7)). ■

2.6. Trditev. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je $\mathcal{R}(A:B) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.

Dokaz. Po trditvi 2.2 je $A : B = A(A + B)^\dagger B$, od tod pa takoj sledi $\mathcal{R}(A : B) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Ker je vzporedna vsota komutativna, mora biti tudi $\mathcal{R}(A : B) \subseteq \mathcal{R}(B)$, torej je $\mathcal{R}(A : B) \subseteq \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.

Dokazati moramo še obratno inkluzijo, torej

$$\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A : B). \quad (2.2)$$

V ta namen pa zadošča dokazati inkluzijo

$$\mathcal{N}(A : B) \subseteq \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B), \quad (2.3)$$

saj dobimo (2.2) tako, da v (2.3) vzamemo na obeh straneh ortogonalni komplement (glejte 1.1 in 1.8). Naj bo $\xi \in \mathcal{N}(A : B)$. Po trditvi 2.2 je potem

$$A(A + B)^\dagger B\xi = 0. \quad (2.4)$$

Označimo

$$\eta = (A + B)^\dagger B\xi. \quad (2.5)$$

Po (2.4) je $\eta \in \mathcal{N}(A)$. Če na enakosti (2.5) uporabimo operator $A + B$, dobimo $(A + B)\eta = B\xi$ (ker je $B\xi \in \mathcal{R}(A + B)$ po 1.14) oziroma (ker je $A\eta = 0$) $B(\xi - \eta) = 0$. Iz zapisa $\xi = \eta + (\xi - \eta)$, kjer je $\eta \in \mathcal{N}(A)$ in

$\xi - \eta \in \mathcal{N}(B)$ sledi sedaj, da je $\xi \in \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$. S tem je inkluzija (2.3) dokazana. ■

2.7. Izrek. Za poljubna projektorja $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je $P : Q = 1/2(P \wedge Q)$, kjer označuje $P \wedge Q$ ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$.

Dokaz. Ker je $P : Q$ pozitiven operator z zalogo vrednosti $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$ po prejšnji trditvi, zadošča dokazati, da je $(P : Q)\xi = (1/2)\xi$ za vsak $\xi \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$. Za vsak $\xi \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$ je $P\xi = \xi$ in $Q\xi = \xi$, torej je $(P + Q)\xi = 2\xi$ in potem $(P + Q)^\dagger \xi = (1/2)\xi$. Po trditvi 2.2 imamo sedaj

$$(P : Q)\xi = P(P + Q)^\dagger Q\xi = \frac{1}{2}\xi. \quad \blacksquare$$

2.8. Zgled. Vzporedna vsota ni zvezna operacija. Naj bo na primer (P_n) zaporedje različnih (pozitivnih) projektorjev ranga 1 (na primer na prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$), ki naj konvergira k nekemu projektorju P ranga 1. Po izreku 2.7 je tedaj $P_n : P = (1/2)(P_n \wedge P) = 0$ za vsak n . Po drugi strani pa je $P : P = (1/2)(P \wedge P) = (1/2)P$. Torej je $\lim (P_n : P) \neq (\lim P_n) : P$.

2.9. Ena od najpomembnejših lastnosti vzporedne vsote je t.i. transformatorska neenakost, ki jo vpeljuje naslednji izrek.

Izrek. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ in poljuben $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je

$$C^*(A : B)C \leq (C^*AC) : (C^*BC). \quad (2.6)$$

Dokaz. Privzeti smemo, da sta A in B obrnljiva; za splošna A in B namreč izrek potem sledi z uporabo izreka 2.3(ii). Trdimo, da je

$$C(C^*AC + \varepsilon I)^{-1}C^* \leq A^{-1} \quad (2.7)$$

za vsak realen $\varepsilon > 0$. Za dokaz te neenakosti bomo uporabili relacijo

$$(X + \varepsilon I)^{-1/2}X(X + \varepsilon I)^{-1/2} = X(X + \varepsilon I)^{-1} \leq I, \quad (2.8)$$

ki velja za vsak $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ (kot je razvidno iz diagonalne predstavitve operatorja X). Če v (2.8) nadomestimo X z C^*AC , dobimo

$$(C^*AC + \varepsilon I)^{-1/2}C^*AC(C^*AC + \varepsilon I)^{-1/2} \leq I,$$

kar je po 1.10 (kjer vzamemo $X = A^{1/2}C(C^*AC + \varepsilon I)^{-1/2}$) ekvivalentno z

$$A^{1/2}C(C^*AC + \varepsilon I)^{-1}C^*A^{1/2} \leq I,$$

od tod pa po 1.6 sledi neenakost (2.7).

Iz (2.7) in podobne neenakosti za B dobimo

$$C[(C^*AC + \varepsilon I)^{-1} + (C^*BC + \varepsilon I)^{-1}]C^* \leq A^{-1} + B^{-1},$$

od tod pa po 1.6 sledi

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1/2} C[(C^*AC + \varepsilon I)^{-1} + (C^*BC + \varepsilon I)^{-1}] C^* (A^{-1} + B^{-1})^{-1/2} \leq I.$$

Če označimo

$$X = [(C^*AC + \varepsilon I)^{-1} + (C^*BC + \varepsilon I)^{-1}]^{1/2} C^* (A^{-1} + B^{-1})^{-1/2},$$

lahko zadnjo neenakost napišemo v obliki $X^*X \leq I$, kar je po 1.10 ekvivalentno z

$$XX^* \leq I.$$

Ko vstavimo v pravkar dobljeno neenakost gornji izraz za X in nato neenakost pomnožimo z leve in desne z

$$[(C^*AC + \varepsilon I)^{-1} + (C^*BC + \varepsilon I)^{-1}]^{-1/2}$$

(kar smemo po 1.6), dobimo

$$C^*(A^{-1} + B^{-1})^{-1}C \leq [(C^*AC + \varepsilon I)^{-1} + (C^*BC + \varepsilon I)^{-1}]^{-1}.$$

Ko v zadnji neenakosti pošljemo ε proti 0, dobimo želeno neenakost (2.6). ■

Bolj algebraičen dokaz izreka 2.9 je v [1].

2.10. Zgled. V splošnem v neenačbi (2.6) ne velja enačaj. Naj bosta namreč $P, Q \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ projektorja, podana z

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $A = C = P$ in $B = Q$. Potem je $C^*AC = P$ in $C^*BC = PQP = (1/2)P$. Po izreku 2.7 je sedaj $C^*(A : B)C = (1/2)P(P \wedge Q)P = 0$, po drugi strani pa je $(C^*AC) : (C^*BC) = P : (1/2)P = P(P + 1/2P)^\dagger (1/2)P = (1/3)P$; torej je $C^*(A : B)C \neq (C^*AC) : (C^*BC)$.

Če pa je C obrnljiv operator, potem je $C^*(A : B)C = (C^*AC) : (C^*BC)$ za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$. To spoznamo, ko vstavimo v neenačbo (2.6) $C^{*-1}AC^{-1}$ namesto A in $C^{*-1}BC^{-1}$ namesto B ter nato v dobljeni neenakosti nadomestimo C^{-1} s C .

3. Operatorske sredine in zveze med njimi

3.1. Definicija. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ definirajmo *aritmetično* in *harmonično sredino* zaporedoma s formulama

$$\frac{1}{2}(A + B) \quad \text{in} \quad 2(A : B).$$

Če je A obrnljiv, definirajmo *geometrijsko sredino* z

$$A \sharp B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2},$$

v splošnem pa naj bo

$$A \sharp B = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (A + \varepsilon I) \sharp (B + \varepsilon I). \quad (3.1)$$

Seveda moramo dokazati, da limita v definiciji geometrijske sredine res obstaja. Za to pa potrebujemo dva pomožna rezultata, ki sta zanimiva tudi sama zase.

3.2. Lema. Za vsak $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in vsako funkcijo f , definirano na množici lastnih vrednosti operatorja T^*T (ki se po 1.9 ujemajo z lastnimi vrednostmi operatorja TT^*), je $f(TT^*)T = Tf(T^*T)$.

Dokaz. Ker je $\mathcal{H}$ končnorazsežen prostor, je množica lastnih vrednosti vsakega operatorja končna in vsaka funkcija na operatorju se ujema z nekim polinomom. Lemo torej zadošča dokazati za polinome; zaradi linearnosti bomo vzeli, da je f kar monom, $f(t) = t^m$ za neko naravno število m . Tedaj imamo

$$\begin{aligned} f(TT^*)T &= (TT^*)^m T = (TT^*) \cdots (TT^*)T \\ &= T(T^*T) \cdots (T^*T) = T(T^*T)^m \\ &= Tf(T^*T). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3.3. Lema. Za poljubna obrnljiva operatorja $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je $A \sharp B = B \sharp A$.

Dokaz. Dokazati moramo, da je

$$A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2} = B^{1/2}(B^{-1/2}AB^{-1/2})^{1/2}B^{1/2}.$$

Če označimo

$$T = B^{1/2}A^{-1/2},$$

lahko dokazovano enakost zapišemo v ekvivalentni obliki

$$(3.2) \quad (T^*T)^{1/2} = T^*(TT^*)^{-1/2}T.$$

Toda po lemi 3.2 je $(TT^*)^{-1/2}T = T(T^*T)^{-1/2}$, zato je desna stran v (3.2) res enaka $T^*T(T^*T)^{-1/2} = (T^*T)^{1/2}$. $\blacksquare$

3.4. Če je B obrnljiv, $0 \leq A_1 \leq A_2$ pa poljubna operatorja, je $B\sharp A_1 \leq B\sharp A_2$ (uporabili smo 1.6 in lemo 1.12(i)). Če sta pri tem A_1 in A_2 obrnljiva, je $A_1\sharp B \leq A_2\sharp B$ po lemi 3.3, torej je za obrnljive operatorje geometrijska sredina naraščajoča preslikava v obeh argumentih. Od tod sledi (glejte 1.13), da limita na desni strani relacije (3.1) res obstaja. Tako smo pokazali, da je geometrijska sredina dobro definirana in podoben razmislek pove, da velja naslednja trditev.

Trditev. *Geometrijska sredina je komutativna monotona operacija v $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$.*

Pokažimo še, da med tremi operatorskimi sredinami veljajo enaki odnosi kot med ustreznimi številskimi sredinami.

3.5. Izrek. *Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ je*

$$2(A : B) \leq A\sharp B \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

Dokaz. Omejili se bomo na primer, ko sta A in B obrnljiva, saj splošen izrek potem takoj sledi z limitnim prehodom. Najprej bomo dokazali neenakost $2(A : B) \leq A\sharp B$ oziroma

$$2A(A + B)^{-1}B \leq A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}. \quad (3.3)$$

Kot v dokazu leme 3.3 označimo $T = B^{1/2}A^{-1/2}$; potem je $B^{1/2} = TA^{1/2} = A^{1/2}T^*$ in relacijo (3.3) lahko zapišemo v ekvivalentni obliki

$$2A^{1/2}(I + T^*T)^{-1}T^*TA^{1/2} \leq A^{1/2}(T^*T)^{1/2}A^{1/2}. \quad (3.4)$$

Ker za vsako število $x > 0$ velja $2x(1+x)^{-1} \leq x^{1/2}$, sledi (z diagonalizacijo), da je $2(I + X)^{-1}X \leq X^{1/2}$ za vsak $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$. Ko v zadnjo neenakost vstavimo $X = T^*T$ in jo nato pomnožimo z leve in desne z $A^{1/2}$ (kar smemo po 1.6), dobimo (3.4), kar je bilo treba dokazati.

Dokažimo sedaj še neenakost

$$A\sharp B \leq \frac{1}{2}(A + B) \quad (3.5)$$

za obrnljiva A in B . Kot doslej naj bo $T = B^{1/2}A^{-1/2}$; potem lahko (3.5) napišemo v ekvivalentni obliki

$$(T^*T)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(I + T^*T).$$

Ta neenakost pa takoj sledi iz številske neenakosti $x^{1/2} \leq (1/2)(1+x)$ ($x \geq 0$) (z diagonalizacijo operatorja T^*T). ■

3.6. Vzporedno vsoto je mogoče definirati tudi za pozitivne omejene operatorje na neskončno razsežnih Hilbertovih prostorih, kar lahko najde

bralec v [4], mi pa smo se zaradi enostavnosti omejili na končno razsežne prostore. Definicija geometrijske sredine pozitivnih matrik, ki smo jo spoznali, je le poseben primer geometrijske sredine seskvilinearnih form, ki sta jo vpeljala Pusz in Woronowicz [10] pri proučevanju stanj na C^* -algebrah.

Za konec si oglejmo še pojem splošne operatorske sredine, ki sta ga vpeljala Kubo in Ando v [8]. Binarna notranja operacija $(A, B) \mapsto A\sigma B$, definirana na množici $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$, je *operatorska sredina*, če zadošča naslednjim pogojem:

- (i) iz $A \leq C$ in $B \leq D$ sledi $A\sigma B \leq C\sigma D$;
- (ii) $C^*(A\sigma B)C \leq (C^*AC)\sigma(C^*BC)$, kjer je $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- (iii) če sta (A_n) in (B_n) padajoči zaporedji z limitama A in B , potem je $A\sigma B = \lim(A_n\sigma B_n)$;
- (iv) $I\sigma I = I$.

Če izpolnjuje le prve tri zahteve, pravimo operaciji σ *operatorska povezava*.

Kubo in Ando sta pokazala, da obstaja tesna zveza med operatorskimi povezavami in nenegativnimi operatorsko naraščajočimi funkcijami na poltraku $[0, \infty)$. Pri tem imenujemo zvezno realno funkcijo f *operatorsko naraščajočo* na intervalu J (ki je lahko tudi neskončen), če za poljubna hermitska operatorja A in B , ki imata spekter vsebovan v J , iz $A \leq B$ sledi $f(A) \leq f(B)$. Iz 1.11 vemo, da na primer funkcija $f(t) = t^2$ ni operatorsko naraščajoča na poltraku $[0, \infty)$. Po lemi 1.12(i) pa je funkcija $f(t) = \sqrt{t}$ operatorsko naraščajoča na poltraku $[0, \infty)$.

Popolno karakterizacijo operatorsko naraščajočih funkcij je odkril Löwner že leta 1934. Temeljni Löwnerjev izrek pravi, da lahko vsako nekonstantno operatorsko naraščajočo funkcijo f na intervalu $[-1, 1]$ enolično izrazimo kot

$$f(t) = \alpha + \beta \int_{[-1,1]} \frac{t}{1 - xt} d\mu(x),$$

kjer je μ verjetnostna (Borelova) mera na intervalu $[-1, 1]$, α in β pa sta realni konstanti in $\beta > 0$. Löwnerjev dokaz je dolg, kasneje je izšlo več krajših dokazov Löwnerjevega izreka (glejte na primer monografijo [3]), najnovejši zelo eleganten dokaz je v [7].

Proučevanje operatorskih sredin in ustreznih neenačb je povezano s študijem relativne operatorske entropije [5], le-ta pa je povezana tudi z znanim Jonesovim indeksom podfaktorjev.

LITERATURA

- [1] W. N. Anderson Jr., *Shorted operators*, Siam J. Appl. Math. **20** (1971) 520–525.
- [2] W. N. Anderson Jr. in R. J. Duffin, *Series and parallel addition of matrices*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969) 576–594.
- [3] W. Donoghue, *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
- [4] P. A. Fillmore in J. P. Williams, *On operator ranges*, Advances in Math. **7** (1971) 254–281.
- [5] J. I. Fujii, *Operator means and the relative operator entropy*, Operator Th.: Advances and Appl. **59**, Birkhauser, Basel (1992) 161–172.

- [6] J. Graselli, *Linearna algebra*, v knjigi: I. Vidav, *Višja matematika II*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1975, str. 9–134.
- [7] F. Hansen in G. K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Math. Ann. **258** (1982) 229–241.
- [8] F. Kubo in T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980) 205–224.
- [9] G. K. Pedersen, *Analysis now*, GTM 118, Springer-Verlag, Berlin 1989.
- [10] W. Pusz in S. L. Woronowicz, *Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map*, Rep. Math. Phys. **8** (1975) 159–170.

NOVE KNJIGE

Revija MATEMATIKA V ŠOLI, letnik I., številka 1, 1992/93, december 1992. Zavod RS za šolstvo in šport, Ljubljana (1. številka, 69 strani).

Na začetku letošnjega koledarskega leta je izšla prva številka nove revije *Matematika v šoli*, ki je namenjena metodiki matematike, od vrtca pa do mature.

Izdajo prve številke prvega letnika je v celoti financiralo Ministrstvo RS za šolstvo in šport. V prvem letniku revije ima uredniški odbor namen izdati še eno številko, sicer pa predmetna skupina za matematiko pri Zavodu RS za šolstvo in šport načrtuje izdajati štiri številke revije na šolsko leto.

V Sloveniji izhaja kar nekaj matematičnih revij, toda nobena se ni specializirala za probleme pouka matematike. S to revijo hočemo zapolniti to vrzel. Prva številka revije objavlja članke: *Ob petindvajsetletnici smrti Josipa Plemlja*; *Matematične vsebine iz učnega načrta za prvo triado* ali koliko matematike srečamo pri „drugih“ predmetih v prvih treh razredih osnovne šole; *Kako do znanja z raziskovanjem* ali kako z raziskovalnim pristopom napravimo pouk matematike prijeten in učinkovit; *Delo z mladimi raziskovalci* — srednješolci se vključujejo tudi na področju matematike v gibanje Znanost mladini; *Eulerjeva krožnica in premica ter višinska točka v večkotnikih* — predstavitev srednješolske raziskovalne naloge; *Povprečne vrednosti* ali primeri za izračun aritmetične, harmonične in geometrijske sredine; *Med zaključnim izpitom in maturo*, ki opisuje priprave na ta zahtevni projekt; *Počitniško pozabljanje*, ki govori o poizkusnih testih (1. letnik gimnazije), ki naj bi bili priprava na maturo 1995, in še *Tekmovanje osnovnošolcev v znanju matematike*; *Tekmovanje srednješolcev v znanju matematike* ter *Koledar tekmovanj v šolskem letu 1992/93*. V reviji se nam predstavi še *Program P_{CTEX} CAD verzija 2.0*.

Iz naštetega je razvidno, komu vse je revija namenjena. Namenjena je vsem učiteljem, ki v svojem delu trčijo na probleme matematike in njenega poučevanja, in sicer od vzgojiteljic, učiteljev razrednega pouka, učiteljev na predmetni stopnji osnovne šole in srednješolskih učiteljev, in to ne samo matematikov, ampak tudi učiteljev drugih strok. V imenu uredniškega odbora Vas vabim, da nam pošljete prispevke o svojih uspehih pri pouku matematike, pa tudi o neuspehih in nerešenih vprašanjih pouka.

Zvonko Perat

SUPERPREVODNOST

JANEZ STRNAD

PACS 74.55.+h 01.30.Pp

Pri uvajanju superprevodnosti navadno samo opišemo pojave z makroskopskega gledišča. Na ravni drugega letnika pa je mogoče v duhu V. F. Weisskopfa okvirno pojasniti tudi mikroskopsko ozadje.

SUPERCONDUCTIVITY

Introducing superconductivity usually phenomena are described from the macroscopic point of view only. At the sophomore level, however, it is possible to explain, in the spirit of V. F. Weisskopf, also the essentials of the microscopic background.

1. Pojavi

Superprevodnost zbuja zanimanje več kot osemdeset let [1]–[11]. Pojav je odkril leta 1911 Heike Kamerlingh Onnes, ki mu je tri leta prej uspelo utekočiniti helij. Med ohlajanjem pri *temperaturi faznega prehoda*¹ T_c iz navadnega v superprevodno stanje skokovito postane specifični upor nekaterih kovinskih elementov nemerljivo majhen. Temperatura meri pri kositru 3,7 K, živem srebru 4,2 K, svincu 7,2 K, niobiju 9,1 K, tehneciju 11,2 K. Alkalijski elementi, najboljši prevodniki pri sobni temperaturi srebro, baker, zlato in feromagnetni elementi železo, kobalt, nikelj do temperature nekaj stotin kelvina ne postanejo superprevodni. Pri njih specifični upor zvezno pojema proti nič, ko se temperatura bliža absolutni ničli.

Že Kamerlingh Onnes je opazil, da zunanje magnetno polje ali magnetno polje, ki ga ustvari tok po superprevodniku, zniža temperaturo prehoda. Polje z *mejno gostoto* B_c prepreči prehod v superprevodno stanje ali povzroči, da preide kovina iz superprevodnega stanja v navadno. Pri svincu meri mejna gostota 0,08 T, pri živem srebru 0,04 T, pri kositru 0,03 T.

W. Meissner in R. Ochsenfeld sta leta 1933 ugotovila, da prehod v superprevodno stanje v magnetnem polju z manjšo gostoto od mejne izrine polje iz notranjosti. Polje tudine prodre v notranjost, če že ohlajen superprevodnik damo v magnetno polje. Ta lastnost je za ugotavljanje prehoda v superprevodno stanje enako pomembna kot zanemarljivo majhen specifični upor. Tak *superprevodnik prve vrste* [1] lahko opišemo kot idealno diamagnetno snov s permeabilnostjo $\mu = 0$.

Poznamo še *superprevodnike druge vrste* [3], za katere sta značilni dve mejni gostoti magnetnega polja, manjša B_{c1} in večja B_{c2} . Med njima je kovina v *vmesnem superprevodnem stanju*. Magnetno polje začne prodirati v kovino, ko preseže gostota B_{c1} , in pri B_{c2} dokončno prodre vanjo in izzove prehod iz superprevodnega stanja v navadno. Mejna gostota B_{c2} doseže deset teslov in več, zato uporabljamo v superprevodnih magnetih le superprevodnike druge vrste.

¹ Imena *kritična temperatura*, ki ima določen pomen pri plinih, raje ne uporabimo.

Med superprevodniki druge vrste najdemo zlitine in spojine. Leta 1954 so odkrili, da postane spojina Nb_3Sn superprevodna pri 18,4 K, in leta 1973, da postane spojina Nb_3Se superprevodna pri 23,2 K. V tem času so odkrili še številne druge superprevodnike druge vrste. Zasluge gredo med drugimi B. T. Matthiasu in sodelavcem, ki so od leta 1950 raziskovali vedenje velikega števila snovi, da bi ugotovili skupne poteze tistih, ki postanejo superprevodne [5]. Atomi superprevodnih elementov imajo dva do osem zunanjih (valenčnih) elektronov. Pri spojinah in zlitinah je treba upoštevati povprečno število zunanjih elektronov na atom. Temperatura prehoda je visoka pri treh, petih ali sedmih zunanjih elektronih na atom. Odkrili so tudi organske superprevodnike z značilno plastno zgradbo, na primer spojino talijevega disulfida in piridina [6].

Leta 1986 sta K. A. Müller in J. G. Bednorz raziskovala kristale, v katerih zasedejo atomi kisika in bakra vzporedne ravnine. Ugotovila sta, da postane spojina iz lantana, barija, bakra in kisika v obliki keramike, ki jo je bilo lažje pridobiti kot monokristal, superprevodna pri 30 K. Konec tega leta sta za spojino s stroncijem namesto barija določila temperaturo prehoda 40 K. Naslednje leto so s spojino, ki je vsebovala itrij namesto lantana, dosegli 93 K, naslednje leto najprej s spojino z elementi BiCaSrCuO 114 K in nato še s spojino z elementi TlCaBaCuO 125 K [7].

Z novimi superprevodniki je mogoče brez večjih težav pokazati poskuse, pri katerih lebdi majhen trajni magnet nad superprevodnikom ali tabletko iz superprevodnika pod trajnim magnetom. Potrebni kapljevinski dušik je mogoče dobiti tudi v marsikateri srednji šoli [9], [10]. Poskuse je vredno pokazati, če je prilika, že zato, da zbudimo zanimanje za fiziko, čeprav se je v srednji šoli treba zadovoljiti z okvirnimi ugotovitvami. Študenti fizike v drugem letniku pa imajo dovolj znanja, da jim je mogoče razkriti zasnovo mikroskopske slike v duhu V. Weisskopfa [11]. Opis pojavov in njihove razlage na osnovi idealne diamagnetnosti ali enačb, s katerimi sta Fritz London in Heinz London leta 1935 nekoliko prilagodila enačbi Maxwellove elektrodinamike², je mogoče najti v lahko dostopni literaturi [1], [3]. Za zasnovo mikroskopske slike pa to ne velja.

2. Na poti k mikroskopski sliki

Najprej ponovimo, kar vemo o kristalu enovalentne kovine pri zelo nizki temperaturi [12], čeprav taka kovina ne more postati superprevodna. Atomi oddajo po en elektron in ti se v kristalu skoraj prosto gibljejo kot *prevodniški elektron*. Ioni naj sestavljajo preprosto kubično mrežo z razmikom R med sosedoma. V njej odpade na osnovno celico osem ionov in vsak od njih pripada osmim celicam, tako da ustreza eni celici en ion. Prostornino kristala dobimo, če število ionov pomnožimo s prostornino osnovne celice: $V = NR^3$. Prevodniški elektroni sestavljajo Fermijev plin. Vzamemo, da

² Ena izmed Londonovih enačb, $m\mathbf{rot}\mathbf{v} = -e\mathbf{B}$ z maso nosilca naboja m in njegovim nabojem e , ustreza enačbi $m\mathbf{rot}\partial\mathbf{v}/\partial t = -e\partial\mathbf{B}/\partial t$, ki sledi iz Maxwellovih enačb in Newtonovega zakona.

so enoelektronska stanja zvezno porazdeljena: pri zelo nizki temperaturi so zasedena vsa med kinetično energijo 0 in *Fermijevo energijo* W_F , višja pa so nezasedena. Fermijeve energiji

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} = \frac{1}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{2\pi\hbar}{R} \right)^2$$

ustrezata *Fermijeve gibalna količina* $p_F = (2mW_F)^{1/2} = 2\pi(3/8\pi)^{1/3}\hbar/R$ in *Fermijeve hitrost* $v_F = 2\pi(3/8\pi)^{1/3}\hbar/mR$. Pri tem je m masa elektrona.

Ioni v kristalni mreži nihajo okoli ravnovesne lege, na katero jih veže sila, sorazmerna z odmikom od te lege. Spekter krožnih frekvenc je kvadraten od 0 do *Debyeve krožne frekvence* ω_D , če je c_z hitrost zvoka:

$$\omega_D = 2\pi c_z \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3} = \frac{2\pi c_z}{R} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3}.$$

V okviru kvantne fizike si moramo misliti energijo nihanja kristalne mreže razdrobljeno na fonone $\hbar\omega$, podobno kot je energija v elektromagnetnem valovanju razdrobljena na fotone. Pri višji temperaturi pojasnimo upor v čistem kristalu z neprožnim sipanjem elektronov na nihajočih ionih, pri katerem nastajajo in prenehajo obstajati fononi.

Elektron v vodikovem atomu je vezan z energijo $W_R = e_0^2/4\pi\epsilon_0 r_B = q^2/2r_B = \hbar^2/2mr_B^2$ z okrajšavo $q^2 = e_0^2/4\pi\epsilon_0$ in Bohrovim radijem $r_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2 e_0^2 m = \hbar^2/mq^2$. Za elektron in ion v kristalu je značilna energija

$$W_A = \frac{q^2}{R} = \frac{\hbar^2}{mR^2} \cdot \frac{R}{r_B}.$$

To energijo izenačimo s srednjo energijo nihanja iona z maso M :

$$\frac{1}{2}M\omega_D^2 \left(\frac{1}{2}R \right)^2 = \frac{R}{r_B} \frac{\hbar^2}{mR^2},$$

pa dobimo

$$\hbar\omega_D = \left(\frac{8r_B}{R} \right)^{1/2} \frac{W_A}{\beta}.$$

Razmerje $\beta = (M/m)^{1/2}$ je približno "Machovo število" elektrona s Fermijevo hitrostjo: $v_F/c_z = (9\pi/4)^{1/3}(R/2r_B)^{2/3}\beta$.

Za zgled vzemimo svinec z gostoto $11,3 \text{ g/cm}^3$, s hitrostjo zvoka 2050 m/s in z maso iona 207 u , ki kristalizira v ploskovno centrirani kubični mreži z razmikom $R = 0,35 \text{ nm}$ med sosednjima ionoma. S temi podatki dobimo za Fermijevo energijo $3,7 \text{ eV}$, Fermijevo hitrost $1,15 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, energijo $W_A = 4,1 \text{ eV}$, energijo $\hbar\omega_D = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ ter razmerji $v_F/c_z = 560$ in $\beta = 616$.

3. Cooproví pari

Da bi si ustvarili okvirno sliko, se zadovoljimo z ocenami in nadomestimo številske koeficiente $8r_B/R$, $2\pi(3/8\pi)^{1/3}$ in podobne z 1. To poudarimo z znakom $\approx$ namesto enačaja. Prejšnji zgled pokaže, kako se to obnese. Tako pridemo do preglednih zvez:

$$W_A = \frac{q^2}{R} \approx \frac{\hbar^2}{mR^2}, \quad (1a)$$

$$p_F \approx \frac{\hbar}{R}, \quad (1b)$$

$$\hbar\omega_D \approx \frac{W_A}{\beta}. \quad (1c)$$

Elektron, ki se giblje mimo iona, deluje nanj s silo, zaradi katere se ion premakne proti elektronu. Premaknjeni ion s povečano silo deluje na drugi elektron na mestu, kjer se je prej gibal prvi. Tako elektron posredno prek iona izvaja dodatno šibko privlačno silo na drug elektron, čeprav se sicer elektrona neposredno odbijata s Coulombovo silo. Šibkejša privlačna sila sega do precej večje razdalje kot odbojna. Privlačna sila poveže elektrona v *Cooprov par*. Na misel o taki privlačni sili sta prišla leta 1950 H. Fröhlich in J. Bardeen neodvisno drug od drugega. Zamisel je imela oporo v dveh spoznanjih. Sila je znatna, če se elektron izdatno sipa na ionih: superprevodne zares postanejo le kovine, ki imajo pri sobni temperaturi znaten upor. Pri izotopih živega srebra in izotopih svinca so ugotovili, da je temperatura prehoda obratno sorazmerna s korenem iz atomske mase, kar kaže na to, da so neposredno vpleteni ioni. Mikroskopsko teorijo superprevodnosti so sestavili J. Bardeen, L. N. Cooper in J. R. Schrieffer (BCS) leta 1957 [2]. Teorija ne dopušča preprostih slik. Lahko pa poskusimo okvirno sliko, ki smo jo nakazali, podpreti s približnimi računi.

Elektron se giblje v bližini iona v času, ki ga ocenimo z R/v_F . V tem času se zaradi delovanja elektrona spremeni gibalna količina iona v smeri proti elektronu za produkt sile in časa:

$$\delta p \approx \frac{q^2}{R^2} \cdot \frac{R}{v_F} \approx \frac{q^2}{Rv_F}. \quad (2)$$

Ravnovesna lega iona se zaradi tega premakne za δR proti elektronu, a ion se v času, ki ga ocenimo z $1/\omega_D$, vrne v ravnovesno lego. Premik iona ocenimo s produktom hitrosti in časa

$$\delta R \approx \frac{\delta p}{M} \cdot \frac{1}{\omega_D} \approx \frac{q^2}{Rv_F M \omega_D} \approx \frac{\beta \hbar m R}{v_F M \hbar} \approx \frac{R}{\beta}. \quad (3)$$

Elektron deluje na drug elektron do veliko večje razdalje

$$l \approx \frac{v_F}{\omega_D} \approx \frac{\hbar^2}{mR^2} \frac{\beta R}{W_A} \approx \beta R. \quad (4)$$

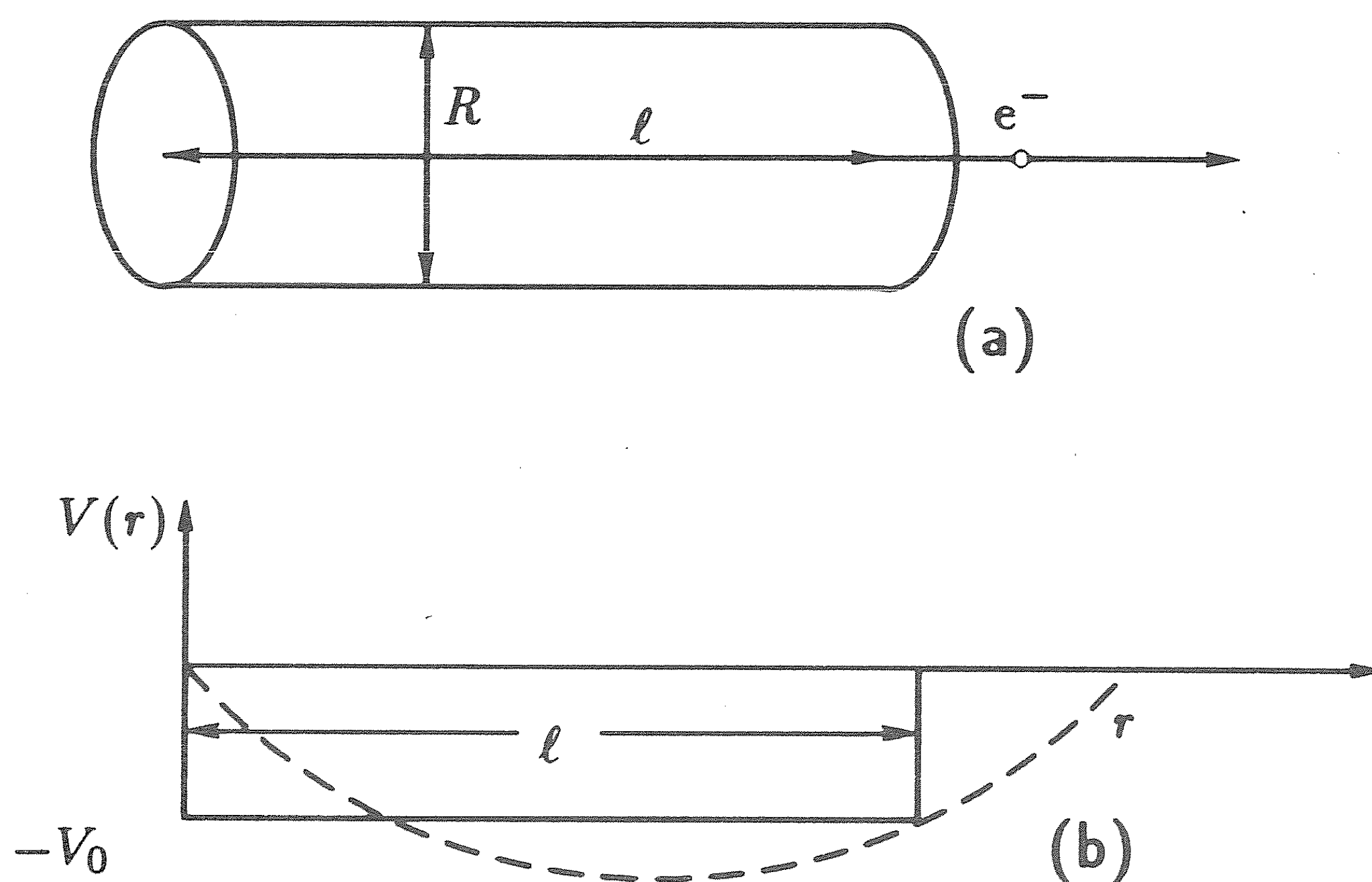
Dodatno delovanje elektrona na drug elektron približno opišemo z dodatno potencialno energijo iona, ki jo izračunamo kot negativno delo električne sile:

$$-V_0 \approx -\frac{q^2}{R^2} \delta R \approx -\frac{q^2}{\beta R} \approx -\frac{W_A}{\beta} \approx -\hbar\omega_D.$$

Ioni se gibljejo veliko počasneje kot elektroni. Zato je treba upoštevati dodatno potencialno energijo le za drugi elektron, ki se znajde v predelu, v katerem se je prej gibal prvi elektron. Predstavljati si smemo, da vleče elektron pri gibanju za sabo "rep" takega potenciala, ki ga "občuti" drugi elektron. Dodatna potencialna energija se zvezno spreminja z razdaljo r , v približku pa jo vzamemo za konstantno v valju s premerom R in z dolžino l za prvim gibajočim se elektronom (sl. 1):

$$V(r) \approx -\frac{q^2}{\beta R} \approx \frac{q^2}{l} \approx -V_0, \quad r < l; \quad V(r) = 0, \quad r > l. \quad (5)$$

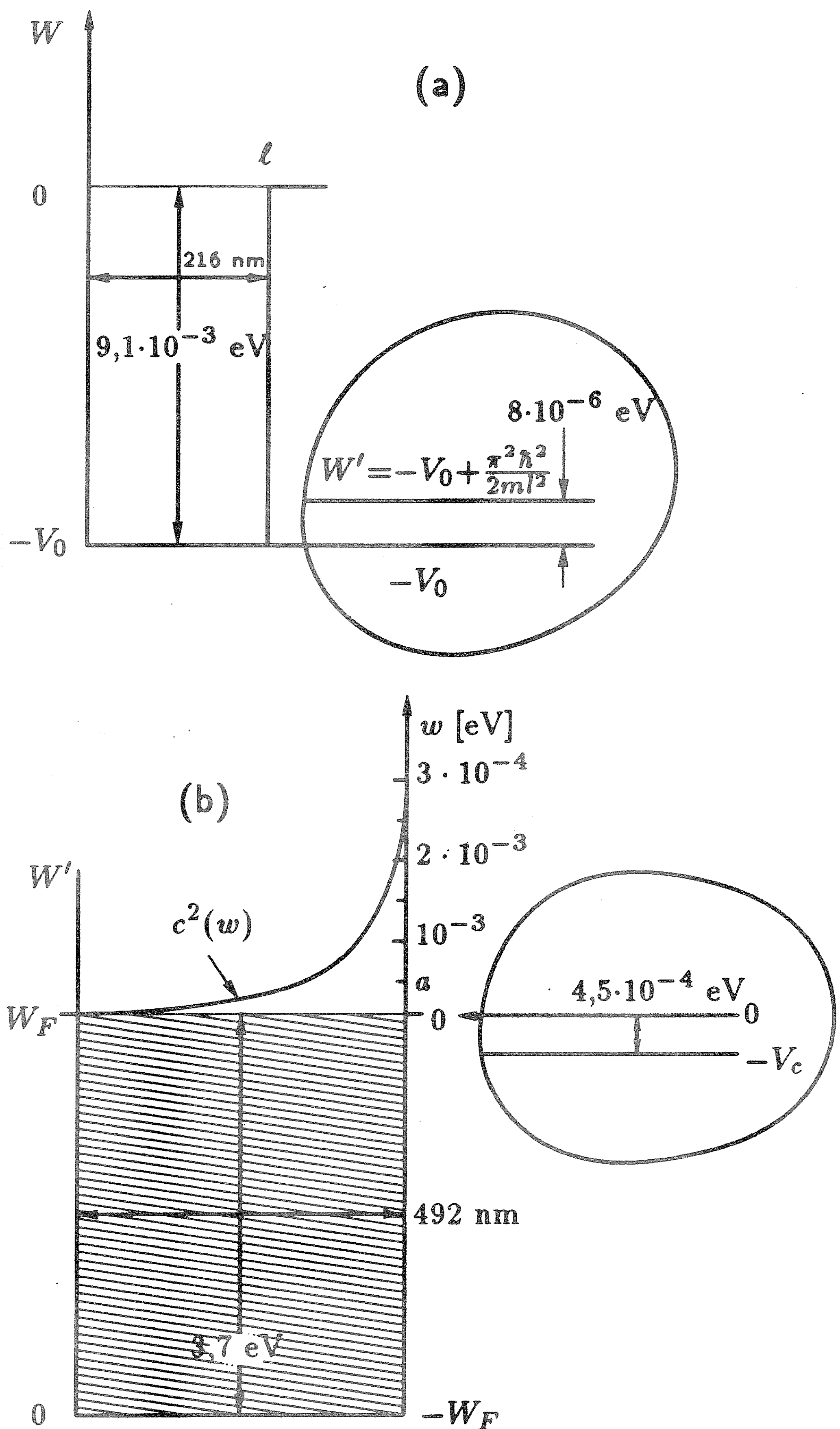
Izkoristijo jo le elektroni v enoelektronskih stanjih tik pod Fermijevo energijo. Elektroni iz nižjih stanj ne morejo preiti v sosednja zasedena stanja, za prehod v nezasedena stanja pa nimajo dovolj energije. Zato smo upoštevali za elektron Fermijevo hitrost.



Slika 1. Območje, na katerem elektron pri gibanju po kristalu deluje na ione v kristalni mreži in ti na drugi elektron (a), in dodatna potencialna energija, s katero opišemo delovanje elektrona prek iona na drugi elektron (b) [11].

V kvantni mehaniki velikost obhodne vrtilne količine zavzame določene vrednosti: $0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \dots$. Zgornjo mejo za skupno velikost vrtilne količine elektronov v paru ocenimo s $p_F \lambda_B / 2\pi$, če vzamemo za ročico z 2π deljeno de Brogliejevo dolžino $\lambda_B / 2\pi = \hbar / p_F \approx R$. Iz tega izhaja, da mora biti obhodna vrtilna količina para manjša kot $\hbar$, se pravi, da je enaka nič. Elektrona v paru sta torej blizu Fermijeve energije v stanju s skupno obhodno vrtilno

Slika 2. Osnovno stanje para v začetnem približku v potencialni jami z globino V_0 in širino l pri lastni energiji $-V_0 + \pi^2 \hbar^2 / 2ml^2 \approx -V_0$ za osamljena elektrona (a). Osnovno stanje para v boljšem približku, ki upošteva, da so vsa stanja v neskončni potencialni jami s širino $a = 2l$ do energije W_F zasedena (b). Risba je narisana s podatki za svinec. Stanju pri $w = 0$ ustreza kvantno število $n = 4\beta R(mW_F)^{1/2}/h$ okoli 956. Vsa enoelektronska stanja pod njim so zasedena. Odvisnost $c^2(w) = C^2/(w + V_c)^2$ kaže verjetnost, s katero so v valovni funkciji u_c zastopana višja enoelektronska stanja. Pri tem je $C^2 = \pi W_A V_c / \beta$ okoli $9,4 \cdot 10^{-6} (\text{eV})^2$. Energijska merila so različna.



količino 0. V tem primeru morata imeti „nasprotno usmerjena” spina, da je ustrezno Paulijevi prepovedi. Njun skupni spin je enak 0. Pokazalo se bo, da je tudi njuna skupna gibalna količina enaka nič in se elektrona gibljeta z nasprotno enakima hitrostma.

Mislamo si elektrona, vezana v ravni potencialni jami s širino l in globino $V_0 \approx \hbar \omega_D$. Približno lastno energijo v osnovnem stanju dobimo, če lastni energiji za ravno neskončno potencialno jamo v osnovnem stanju $\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2$ [12] prištejemo potencialno energijo $-V_0$. Približek $-V_0 + \pi^2 \hbar^2 / 2ml^2$ je uporaben, če je drugi člen veliko manjši od absolutne vrednosti prvega. V tem primeru pa lahko drugi člen zanemarimo v primeri s prvim. Z navedenimi podatki za svinec doseže drugi člen komaj $8 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$. V tem

približku se vezavna energija para ujema z absolutno vrednostjo dodatne potencialne energije.

4. Vezavna energija

V prejšnjem premisleku nismo upoštevali množice zasedenih enoelektronskih stanj prevodniških elektronov v kristalu. Na prvi mah se zazdi, da zaradi nje sploh ne bi mogel nastati Cooprov par, saj imajo elektroni v bližini nezasedenih enoelektronskih stanj kinetično energijo W_F , veliko večjo od V_0 . Vendar pomislek ni na mestu zaradi Paulijeve prepovedi. Enoelektronska stanja z manjšo energijo od W_F so vsa zasedena, tako da lahko vezano stanje nastane le v bližini Fermijeve energije. Množica prevodniških elektronov povzroči, da je vezavna energija para kakih stokrat manjša od V_0 . Račun v naslednjem razdelku je dokaj zapleten in ga je mogoče preskočiti.

Izhajamo od stacionarne Schrödingerjeve enačbe v težiščnem opazovalnem sistemu obeh elektronov z obhodnim kvantnim številom 0. V tem primeru enačba nima členov s kotno odvisnostjo in vsebuje reducirano maso $m_r = \frac{1}{2}m$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{d^2(r\psi)}{rdr^2} + V(r)\psi = W'\psi.$$

Tako enačbo srečamo tudi pri devteronu [12]. Vendar sta v devteronu vezana osamljen proton in nevtron, tako da drugi del računa ni potreben.

S prehodom v težiščni opazovalni sistem obeh elektronov izločimo gibanje težišča. Težiščni sistem se ujema z laboratorijskim le, če sestavimo gibalno količino prvega elektrona $\mathbf{p}_1$ in gibalno količino drugega elektrona $\mathbf{p}_2$ v skupno gibalno količino $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$. Medtem ko devteron vsekakor raziskujemo v njegovem težiščnem sistemu, kaže posebej utemeljiti, zakaj je dovolj, če se omejimo na Cooprove pare s skupno gibalno količino $P = 0$. V prostoru gibalnih količin si predstavljamo gibalno količino prvega elektrona v lupini z radijem p_F in debelino δp in gibalno količino drugega elektrona v prav takšni lupini. Središči obeh lupin sta razmaknjeni za $\mathbf{P}$. Presečna prostornina obeh lupin je odvisna od velikosti P . Največja je pri $P = 0$, ko se lupini pokrijeta, z naraščajočim P pa hitro pojema in pade pri $P = 2p_F + \delta p$ na nič [2]. Kot vidimo, ustreza skupni gibalni količini $P = 0$ največja fazna prostornina, precej večja kot gibalni količini $P > 0$.

Vpeljemo valovno funkcijo $u = r\psi$ in s tem prevedemo enačbo iz treh razsežnosti na eno

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2u}{dr^2} + V(r)u = W'u. \quad (6)$$

Najprej izberemo neskončno potencialno jamo, tako da v enačbo (6) postavimo $V(r) = 0$. Ta korak bo omogočil, da bomo upoštevali množico prevodniških elektronov in dobili pregled nad enoelektronskimi stanji. Za jamo s širino od $r = 0$ do $r = a > l$ lahko takoj navedemo lastne funkcije enoelektronskih stanj [12]

$$u_k = (2/a)^{1/2} \sin kr.$$

Robni pogoj $u(r = 0) = 0$ je izpolnjen, $u(r = a) = 0$ pa je izpolnjen, če velja $ka = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Drugače kot sicer zaznamujemo lastne funkcije in lastne vrednosti z velikostjo valovnega vektorja k , ki ji ustreza gibalna količina $p = \hbar k$, in ne s kvantnim številom n . Velikosti valovnega vektorja k ustreza gibalna količina $p = \hbar k$. Lastne energije $W'_k = \hbar^2 k^2 / m = \pi^2 \hbar^2 n^2 / ma^2$ imajo diskreten spekter in lastne funkcije sestavljajo ortonormiran niz $\int_0^a u_k u_{k'} dr = \delta_{kk'}$.

Stanje elektrona je določeno, če navedemo še magnetno spinsko kvantno število m_s , ki je ali $-\frac{1}{2}$ ali $\frac{1}{2}$. Če v okolici kake točke naletimo na elektron z določeno gibalno količino in z magnetnim spinskim številom $m_s = \frac{1}{2}$, je drugi elektron v paru na nasprotni strani težišča in ima nasprotno enako gibalno količino in magnetno spinsko kvantno $m_s = -\frac{1}{2}$. Tudi pri tem koristi, če se spomnimo na proton in nevtron v devteronu, le da imata proton in nevtron magnetni spinski kvantni števili enaki. Razlikujeta se po naboju, pa si to lahko privoščita.

Valovno funkcijo para u_c sestavimo kot linearno kombinacijo lastnih stanj neskončne potencialne jame $u_c = \sum_k c_k u_k$ ob zahtevi, da je ustrezna energija V_c pod Fermijevo energijo: $W'_c = k_F^2 \hbar^2 / m - V_c$. Nove vezavne energije para V_c ne poznamo in jo moramo poiskati. Najprej sestavljeno valovno funkcijo vstavimo v enačbo (6) s potencialom (5). Ker velja $d^2 u_k / dr^2 = -k^2 u_k$, dobimo:

$$\sum_k c_k (\hbar^2 k^2 / m - W'_c) u_k = - \sum_k c_k V(r) u_k.$$

V enačbi nadomestimo k s k' , jo pomnožimo z $u_k dr$ in integriramo od 0 do a . Preostane

$$c_k (\hbar^2 k^2 / m - W'_c) = - \sum_{k'} c_{k'} \mu_{kk'}. \quad (7)$$

Nato premaknemo ničlo energije s tem, da vpeljemo novo spremenljivko:

$$w = \hbar^2 k^2 / m - \hbar^2 k_F^2 / m$$

in upoštevamo na levi strani enačbe (7) še $W'_c - \hbar^2 k_F^2 / m = -V_c$. Energija w je lahko samo pozitivna, če upoštevamo, da vzamemo vsa stanja pod Fermijevo energijo za zasedena. Za desno stran si pripravimo matrični element:

$$\mu_{kk'} = \int_0^a u_{k'} V(r) u_k dr = a^{-1} \int [\cos(k - k')r - \cos(k + k')r] V(r) dr.$$

Potencial (5) je različen od nič in enak $-V_0$ za $0 < r < l$, tako nazadnje integriramo od 0 do l namesto od 0 do a . Pri integriranju periodične funkcije dobimo znaten prispevek le, če se njen argument na integracijskem intervalu

le malo spremeni. k in k' se malo razlikujeta od $k_F = p_F/\hbar$. Zato prispeva k integralu samo prvi člen, in to le za $(k - k')r < 1$, $r \leq l$. Dobimo

$$\mu_{kk'} \approx -\frac{V_0 l}{a} \approx -\frac{q^2 l}{a\beta R} \approx -\frac{q^2}{a}, \quad k - k' < \frac{1}{l}; \quad \mu_{kk'} \approx 0, \quad k - k' > \frac{1}{l}.$$

Mejo za $k - k'$ izrazimo z novo spremenljivko. Upoštevamo $w - w' = (\hbar^2 k^2 - \hbar^2 k'^2)/m = \hbar^2(k + k')(k - k')/m \approx 2\hbar^2 k_F(k - k')/m$, tako da neenačbi $k - k' < 1/l$ ustreza neenačba $w - w' < (2p_F/m)\hbar/l \approx 2\hbar\omega_D$. Za matrični element velja tedaj

$$\mu_{kk'} \approx -q^2/a, \quad w - w' < 2\hbar\omega_D; \quad \mu_{kk'} \approx 0, \quad w - w' > 2\hbar\omega_D.$$

Zdaj preidemo od diskretnih stanj k zvezno porazdeljenim enoelektronskim stanjem. To smemo narediti, saj ustreza Fermijevi energiji enoelektronsko stanje z velikim kvantnim številom n , na primer pri svincu za $a = 2l$ okoli tisoč. V enačbi (7) nadomestimo c_k prek c_w z $c(w)$ in vsoto z integralom. Pri tem moramo upoštevati gostoto stanj. V eni razsežnosti je fazna "prostornina" $2a\hbar dk$, če izvira statistični faktor 2 od dveh možnosti za magnetno spinsko kvantno število. To delimo s „prostornino“ fazne celice h in imamo gostoto stanj $2a\hbar dk/h = adk/\pi \approx amd w/h p_F$. Enačba (7) preide v

$$c(w)(w + V_c) = \frac{mq^2}{hp_F} \int_0^{2\hbar\omega_D} c(w)dw.$$

Spomnimo se, da mora veljati $w > 0$. Desna stran ni odvisna od w , zato je $c(w) = C/(w + V_c)$. S to zvezo dobimo iz prejšnje enačbe, ko pokrajšamo s sorazmernostnim koeficientom C ,

$$1 = \frac{mq^2}{hp_F} \int_0^{2\hbar\omega_D} \frac{dw}{w + V_c} = \frac{mq^2}{hp_F} \ln \frac{2\hbar\omega_D + V_c}{V_c}.$$

Iz tega izhaja veliko manjša vezavna energija od prejšnje grobe ocene $V_0 \approx \hbar\omega_D$:

$$V_c \approx 2\hbar\omega_D e^{-hp_F/mq^2} \approx 2\hbar\omega_D e^{-\gamma W_F/W_A}.$$

V eksponentu si ne smemo privoščiti preohlapnega približka, zato z enačbo za p_F , iz katere smo dobili približno zvezo (1b), izračunamo številski koeficient: $\gamma = 2(8\pi/3)^{1/3} = 4,1$. Ker sta energiji W_A in W_F približno enaki, ocenimo vezavno energijo z $0,01\hbar\omega_D$, kar doseže nekaj 10^{-4} eV. Kvocienat vezavne energije V_c in Boltzmannove konstante k_B da oceno za temperaturo prehoda. Z navedenimi podatki dobimo za svinec $V_c \approx 4,5 \cdot 10^{-4}$ eV in $T_c \approx 5,2$ K.³

³ V teoriji BCS dobimo $T_c = 1,14(\hbar\omega_D/k_B) \exp(-1/\rho(0)U)$, če je $\rho(0)$ gostota enoelektronskih stanj pri $w = 0$ in U absolutna vrednost dodatne povprečne potencialne energije elektronov v paru [2], [4].

5. Še o Cooprovih parih

Pomudimo se še pri valovni funkciji Cooprovega para u_c . Kot proton in nevtron v devteriju se elektrona v paru gibljeta radialno drug proti drugemu in drug od drugega. Radialna verjetnostna gostota $u_c^2 = r^2 \psi_c^2$ izrazito pade pri razdalji $r > \delta r$. Mejo δr , znano kot *koherenčna razdalja*, določimo s širino pasu gibalnih količin, zastopanih v valovni funkciji u_c . V valovni funkciji u_c so izdatno zastopana lastna stanja u_k z intervala $\delta w \approx V_c$. Temu ustreza interval gibalne količine $\delta p \approx m\delta w/p_F \approx mV_c/p_F$, če po stari navadi zopet izpustimo številski koeficient 2. Iz Heisenbergove neenačbe razberemo, da je

$$\delta r \approx \frac{\hbar}{\delta p} \approx \frac{\hbar p_F}{mV_c} \approx \frac{p_F^2 R}{mV_c} \approx R \frac{W_F}{V_c}.$$

Razdalja je še večja od razdalje $l \approx \beta R$ in jo ocenimo na več mikrometrov. Devteron in Cooprov par sta šibko vezana in sta oba veliko večja od dosega potenciala, ki veže njuna sestavna dela. To nas naknadno prepriča, da Coulombov odboj elektrona v Cooprovem paru le malo moti. Na razdalji, precej večji kot R , naboj drugih elektronov in ionov zastre naboja elektronov v paru drugega drugemu.

Gostota prevodniških elektronov meri $N/V = 1/R^3$. Vseh parov med prevodniškimi elektroni je $\frac{1}{2}N/V$, a razmerje med številom Cooprovih in številom prevodniških elektronov ocenimo z razmerjem ustreznih energij V_c/W_F , tako da je gostota Cooprovih parov $N_s/V \approx \frac{1}{2}R^{-3}V_c/W_F \approx \frac{1}{2}R^{-3}\delta r$. Delež Cooprovih parov med prevodniškimi elektroni je potem $N_s/N \approx R/\delta r$, kar doseže približno milijonino. Povprečno razdaljo med težiščema sosednjih Cooprovih parov podamo s kubičnim korenem iz obratne vrednosti gostote: $V/N_s \approx (R^2\delta r)^{1/3} = R(\delta r/R)^{1/3}$, kar ocenimo z nekaj deset R . Valovne funkcije parov se potemtakem izdatno prekrivajo.

Vsi Cooprovi pari so v stanju pri energiji, ki je za V_c manjša od energije najnižjih nezasedenih enoelektronskih stanj, torej v našem približku za vezavno energijo V_c pod Fermijevo energijo. To stanje je sestavljeno iz enoelektronskih stanj z večjo lastno energijo od W_F , ki v našem približku niso zasedena in ki se spustijo pod W_F zaradi dodatne potencialne energije (5). V tem stanju so vsi Cooprovi pari, saj imajo skupni spin 0 in zanje ne velja Paulijeva prepoved. Iz računa jasno izhaja, da so valovne funkcije u_c ortogonalne na enoelektronske valovne funkcije pri lastni energiji pod W_F .

Paru bi bilo treba dovesti vsaj energijo V_c , da bi ga razdelili na dva elektrona. Toda sprememba, ki bi prizadela elektron iz tega para, bi zahtevala preureditev drugih parov. To bi bilo povezano z energijo, ki v superprevodniku ni na voljo. Cooprovi pari delujejo kot nekakšna "zmrznjena skorja", zaradi katere se elektron v paru ne sipa na napaki v kristalni mreži, na kateri bi se sipal, če bi bil osamljen. Pogosto primerjajo Cooprove pare z urejeno četo med seboj držečih se in ubrano korakajočih vojakov, ki se ne spotika na skalah, čeprav bi se osamljen vojak spotaknil.

V superprevodniku med stanjem Cooprovih parov in nezasedenimi enoelektronskimi stanji nastane *energijska špranja* s širino V_c , ki spominja na

energijsko špranjo v izolatorju s širino W_g . Sicer imata špranji popolnoma različen izvor in je prva za kakih pet velikostnih stopenj ožja od druge.⁴ Energijska špranja se naravnost pokaže pri merjenju elektronskega prispevka k specifični toploti v superprevodniku, približno sorazmernem z $\exp(-V_c/2kT)$. Na ta način in na druge ugotovijo, da je širina špranje v živem srebru $1,6 \cdot 10^{-3}$ eV in v svincu okoli $2,7 \cdot 10^{-3}$ eV [4].

Po superprevodniku, ki je del sklenjenega električnega toka, poženemo tok z zunanjo napetostjo. V tem primeru imajo vsi Cooprovski pari enako od nič različno gibalno količino P in hitrost težišča. Drugače je pri toku, ki ga povzroči magnetno polje in ki ne pojenja s časom [4], [8]. Zanimivega pojava in tega, da ima magnetni pretok skozi superprevodni ovoj lahko samo izbrane vrednosti, se tu ne moremo več lotiti.⁵

Kaj več kot ozadja mikroskopske slike superprevodnosti po tej poti ni mogoče dobiti. Ne samo, da smo si pomagali s približki, tudi v njihovem okviru bi bilo treba nekatere korake še opravičiti. Vendar je hotel prispevek le zbuditi zanimanje za superprevodnost, izzvati k razmišljanju in napeljati k dodatnemu branju.

LITERATURA

- [1] F. Cirkler, *Supraprevodnost*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 155.
- [2] L. N. Cooper, *Teorija supraprevodnosti*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962) 61.
- [3] B. Slivnjak, *Supraprevodniki I. in II. vrste*, Obzornik mat. fiz. **19** (1972) 11.
- [4] Ch. Kittel, *Uvod u fiziku čvrstog stanja*, Savremena administracija, Beograd 1970, str. 299.
- [5] B. T. Matthias, *Superconductivity*, Sci. Am. **197** (1957) 92 (5).
- [6] T. H. Geballe, *The new superconductors*, Sci. Am. **225** (1971) 22 (5).
- [7] A. M. Wolsky, R. F. Giese, E. J. Daniel, *The new superconductors: Prospects for applications*, Sci. Am. **260** (1989) 44 (2); R.J.Cava, *Superconductors beyond 1-2-3*, Sci. Am. **263** (1990) 24 (2).
- [8] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures in Physics, Vol. III, Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1965.
- [9] B. B. Schwartz, *The teaching of superconductivity International Conference Teaching Modern Physics*, München 1988, K. Luchner in drugi (uredniki), World Scientific, Singapur 1989. V prispevku je dokaj podroben pregled literature do leta 1987, v knjigi pa še več poročil o preprostih poskusih s superprevodniki.
- [10] M. Logar, *Supraprevodnost. Možnosti za obravnavo pri pouku fizike*, Magistrsko delo, Oddelek za fiziko, Ljubljana 1993.
- [11] V. F. Weisskopf, *The formation of Cooper pairs and the nature of the superconducting current*, Contemp. Phys. **22** (1981) 375; prevod *Die Cooper-Paar-Bildung und die Natur der Supraleitung*, Physik und Didaktik **20** (1992) 262.
- [12] J. Strnad, *Fizika*, 4. del, DMFA, Ljubljana 1986.

⁴ V resnici je Fermijeva energija na sredini špranje v superprevodniku kot v izolatorju [2], [4], kar opozarja na pomanjkljivost našega približka.

⁵ Po enotah uganemo, da utegne biti kvant magnetnega pretoka h/e_0 , kar je domneval leta 1950 F. London. Z merjenji pa so ugotovili, da je $h/2e_0 = 2,0 \cdot 10^{-15}$ Vs, ker je treba upoštevati naboj Cooprovega para (glej A. Čadež, *Magnetni pretok skozi supraprevodni obroč je kvantiziran*, Obzornik mat. fiz. **12** (1965) 72).

AKSIOMI GEOMETRIJE V ŠOLI IN ZNANOSTI, 2. del

HERBERT ZEITLER

Math. Subj. Class. (1991) 00A35, 00A3, 97A15, 98A15

Članek je povzetek seminarja iz didaktike matematike na temo *Aksiomatika geometrije in priporočljivo ozadje sistema aksiomov za delo v šoli* na ETH v Zürichu. Ker je pouk geometrije problem v mnogih šolah po svetu in tudi pri nas, sem članek s prijaznim avtorjevim dovoljenjem prevedla.

GEOMETRY AXIOMS IN SCHOOL AND IN SCIENCE, part II.

The article is based on a seminar in didactics of mathematics with the title: *Geometry axioms and recommended background systems of axioms for use in schools* on ETH (Zürich).

2. GEOMETRIJA V SREDNJI ŠOLI

Uvodna pripomba. Avtor pozna situacijo na nemških srednjih šolah. Toda prepričan je, da je njegova analiza sprememb v učnem načrtu geometrije za te šole od poznih štiridesetih let do danes zanimiva za vse.

2.1 GEOMETRIJA V VIŠJIH RAZREDIH NEMŠKIH SREDNJIH ŠOL

2.1.1 Pogled čez plot

Avstrija ima še vedno predmet z imenom geometrija. V Avstriji še vedno poučujejo opisno geometrijo. Srečni Avstrijci. Kaže, da so morala lepa področja opisne geometrije postati študij Avstrijcev za Avstrijce. Francija in Belgija prisegata na vektorski prostor. S šampionoma, močnima in jasnim kot sta Dieudonné in Papy, je ta ideologija morala prevladati. Imajo mnogo ustreznih učbenikov. Kako je v Nemčiji? Upad geometrije v nemških srednjih šolah je lahko dokumentirati, če pogledamo bavarske maturitetne izpite iz različnih obdobj.

2.1.2 Faza z imenom preseki stožca (do leta 1966)

(Na začetku so bile stožnice in stožnice in)

Analiza in analitična geometrija sta imeli enako težo. Poučevali smo ju pet ur tedensko skozi dvoletno obdobje. Študij je bil osredotočen na stožnice in obravnavo različnih problemov vrste „geometrijsko mesto točk”. V teh problemih se točka giblje po dani krivulji, od nas pa se zahteva, da določimo krivuljo, ki jo opiše točka, preslikana z bolj ali manj zahtevnim predpisom. Ti problemi so bili rešljivi po stalnem vzorcu, ki so se ga učenci zlahka naučili. Učenci so naredili mnogo konstrukcij in mnogo računali. Tretja dimenzija je bila izključena in vprašanje uporabnosti (za kar je bilo mnogo primerov) se ni pojavljalo.

Učence na srednji stopnji zahtevnosti so pripravljali – skozi tako imenovani študij likov in številnih konstrukcij trikotnikov – na izčrpno obravnavo stožnic. Standardna osnova je bil Hilbertov sistem aksiomov (ali nekaj temu podobnega).

2.1.3 Faza transformacij (do približno 1970)

(Na začetku je bila preslikava in preslikava in ...)

Analiza in analitična geometrija sta še naprej imeli enako težo. Še nadalje ju poučujejo po pet ur na teden skozi dvoletno obdobje. To je bila era transformiranih geometrijcev. Osrednji cilj je bil študij različnih grup transformacij ravnine, namreč skladnostnih preslikav, podobnostnih, afinih in projektivnih. Študijski načrt je imel naslov: „Transformacijske grupe in njihove invariante kot princip urejanosti v geometriji.” To je bila realizacija „erlangenskega programa”, in tako čista oblika geometrije transformacij. Delež računanja je bil velik (vključno z matrikami in determinantami). Risb je bilo malo, le tu in tam katera. Ni bilo niti sledu o aplikacijah. Tretja dimenzija je bila še vedno prepovedana, enako stožnice.

Na srednjem nivoju srednjih šol so se ukvarjali z elementarnimi raziskavami posebnih transformacij. To je bila odlična priprava za nadaljnji študij geometrijskih transformacij na višjem nivoju. Vso šolsko geometrijo je povezala enostavna nit. Hilbertov sistem aksiomov, kombiniran z erlangenskim programom, je nadaljeval svojo vlogo kot koristen osnovni sistem.

2.1.4 Faza osnov (do približno leta 1975)

(Na začetku je bil aksiom, aksiom,)

Na tej točki je bila vpeljana takoimenovana stopnja „college”. Stari učni načrt je zamenjal nov, v katerem so prevladovali glavni in stranski učni cilji, dejansko je to bila tabela učnih ciljev. Vsebine so se morale temu prilagoditi. Reforme so bile tukaj. Te so vsepovsod vodile h grozni zmedi. *Collegians* – novo ime za učence – so tedaj lahko izbrali smer V (za verjetnost) ali G (za geometrijo). Če so izbrali smer G, so se učili geometrije tri ali štiri ure tedensko skozi dve leti.

Podroben študij polravnine kot Poincaréjevega modela hiperbolične ravnine naj bi vodil k aksiomatiki. Obstoj te „druge” geometrije naj bi bil podpora in utemeljitev aksiomatskega mišljenja. Razen tega so uporabljali kot osnovni zgled teorije, ki temelji na aksiomih, minigeometrijo, to je afino ravnino s poudarkom na končnem primeru. Vedno je bilo pri roki pojasnilo „motivacija za aksiomatiziranje”. To je bil poskus realizacije A. J. Wittenbergovih idej, kot so opisane v njegovi *Bildung und Mathematik****.

Ta eksperiment je vpeljal veliko (neevklidskega) risanja in konstruiranja. Tretja dimenzija, stožnice, erlangenski program – skratka, vsa geometrijska preteklost – je bila pozabljena in za dolgo nezanimiva.

Za pouk na srednjem nivoju ni bilo načrta in ciljev. Eno priporočilo je sledilo kar za petami drugemu. Glede na nadaljni študij afine ravnine je bil edini smiselni osnovni sistem postopno izgrajen Lingenbergov sistem. Toda ta se je težko ujel s hiperbolično ravnino. Uvajanje kombinacije hiperbolične in afine ravnine je bilo obsojeno na spopad že od začetka.

2.1.5 Faza vektorskega prostora (od okoli 1980)

(Na začetku je bil vektorski prostor in vektorski prostor.....)

Razdelitev ur pouka je ostala ista, toda vsebina pouka se je radikalno spremenila.

Francosko-belgijsko reformatorsko gibanje se je razširilo vse do nas. Trojka množica-struktura-morfizem in ABC-problem (glej razdelek 1.2) sta skupaj tvorila ideologijo, ki je dominirala vse aktivnosti. Najprej so prišli vektorji. Ti so bili spremenljivke v Hilbertovem smislu, to je elementi brez pomena (skoraj tako kot točke in premice v prejšnjem razdelku). Sistem aksiomov za ta „krajevna držala“ je kanil iz nebes in eksplodiral blizu učenceve glave. Učenci so bili sedaj zaposleni z vektorskimi prostori poljubne končne dimenzije nad poljubnimi obsegi.

Nato je sledilo zaporedje: točke afinega prostora, skalarni produkt, evklidski vektorski prostor in končno evklidski prostor točk. V bistvu je to bila cenena imitacija univerzitetnega programa – odkruški kurza linearne algebre – izvoženi v srednjo šolo. Poučevanje je postalo skoraj popolnoma degeometrizirano. Občutek, da obravnavaš nekaj dobro znanega, je bil za vsako ceno opuščen. Namen geometrije je bil pomagati vizualno prikazati in interpretirati strukture. Dosežen je bil vrh abstrakcije. Velikanski aparat je bil razvit, pa nikoli uporabljen.

Nikjer niso upoštevali praktične uporabe (čeprav obstaja!). Stožnice so bile izpuščene. Risbe niso bile potrebne, še manj konstrukcije. Srednja stopnja je pripravljala učence za delo z vektorji (translacije, središčni raztegi, struktura grupe). Dieudonnéjev sistem je zadoščal kot ozadje – ali raje ospredje – sistema.

Ta shema je bila zagotovilo, da povzroči vsakemu dobremu pedagogu (bili so taki celo takrat) težave z želodcem.

2.1.6 Stanje amputacije (še traja)

(In zemlja je bila opustošena in prazna....)

V tej fazi so se stvari radikalno spreminjale. Pričelo se je zmagoslavje stohastike in statistike. Ure pouka v dvoletnih kolidžih so bile razdeljene v razmerju 5:4:3 med analizo, stohastiko in geometrijo. (Razmerje se je pogosto spreminjalo.) Izbira ni bila mogoča. Vsebina geometrijskega dela je popolnoma osiromašena geometrija v $\mathbb{R}^3$. Sedaj je moralo biti uvajanje vektorskega prostora podkrepljeno. To je jasen umik od abstraktne linearne algebre. Vsebine je malo, toda oblika je geometrijska. Ponovno raziskujemo presečišča premic, ravnin (krožnic, sfer) ter njihovo medsebojno lego. Transformacije so v celoti opuščene. Stožnice pa niso več del geometrijskega kurza. Risbe tudi niso del tako obrezanega konstrukta in uporaba te minimalne snovi je komaj mogoča.

Pouk geometrijskih pojmov na srednji stopnji zahtevnosti je kaotičen. Prisotna je usmeritev, da bi se vrnili na staro — pouk likov v fazi stožnic. Osnovni sistem za torzo ni potreben. Če bi ga potrebovali, pa bi bilo težko napraviti racionalen izbor.

Od vsega tega utrujeni smo ostali z osiromašenim izborom geometrijskih fragmentov — z ostankom, ki ne omogoča veselja niti učencem niti učiteljem. Ne morem si zamišljati, da lahko nekdo po devetih letih učenja geometrije

po takšnem programu gleda na preseke premic in ravnin kot na nekaj zabavnega. Kateri očarljivi problemi pa so na voljo učencem? Kam je pregnana toliko opevana kreativnost? Mislim, da bi učenec pokazal več zanimanja za konstrukcijo stožnic kot za diskusijo o linearni odvisnosti vektorjev. Navajam še dva ustrezna citata, pripisana H. Freundenthalu z datumom 1970 (!):

Nekateri dopustijo toliko geometrije, kot jo je potrebno za linearno algebro in ta neznatni prispevek je izvlečen in skrčen tako, da ti postane slabo. Geometrija, ki jo lahko interpretiramo z uporabo linearne algebre, mi pride na misel kot „odplaka“.

Ni čudno, da bo pouk matematike v nemških šolah kmalu šel po poti pouka v nerazvitih deželah.

Kam od tod?

Del predstavljene zgodovine v razdelkih 2.1.2–2.1.6 pokaže, da je šolska geometrija skrčena na absurдни torzo. Sedaj prihaja v ospredje nov predmet – računalništvo – na žalost s političnim pritiskom. Novodošli je pahnili s prestola stohastiko in statistiko, toda iz šol lahko prežene tudi ostanke geometrije.

2.2 NEKAJ VZROKOV, KI SO POVZROČILI KATASTROFO

Za to brezupno stanje v geometriji je zelo mnogo vzrokov. Želim diskutirati le o treh, ki pa so zelo povezani.

2.2.1 Pretirani poudarki na mišljenju po določenih struktur in na formalizmu

Gotovo je en vzrok za upad geometrije nadloga abstraktnih matematičnih struktur, vztrajno razširjajoča se navzdol po šolskem sistemu. Formalizem se je kaže kot modno oblačilo. Poskusili so praktično vse mogoče, (celo na srednješolski stopnji), da bi dobili globalno aksiomatizirano geometrijo — à la Hilbert, à la Bachmann, à la Blumenthal,... Celo kompletna šolska matematika se je formalizirala v smislu konsistentne uporabe načinov pisanja in logičnih predpisov. Manjkajoča glorijska tega razvoja je formalen dokaz za eksistenco Boga in študij Lowenheim-Skolemovega izreka. Kje je užitek? Bourbakizem je triumfiral celo v šoli. Raziskava skeleta je postala glavna skrb anatomije. Geometrija pa je sorodna življenju. Slovnica in harmonija nista isto kot poezija in glasba. Skratka, mislim, da je eliminacija vizualizacije, intuicije v šolski geometriji usodna napaka moderne didaktike.

2.2.2 Napaka univerze

Brez dvoma veliko krivde pade tudi na univerze. Če je vizualna, intuitivna geometrija – kar se kaže v maloštevilnih publikacijah – sedaj raziskovalno manj pomembna kot na prelomu stoletja, se z njo mladi profesorji ne bodo dosti ukvarjali. Danes je, drugače kot v preteklosti, poučevanje učiteljev praktikov za mnoge raziskovalce grozna in drzna zahteva; v vsakem primeru pa dodaten poniževalen napor.

Zato pa, kot je omenjeno v razdelku 1.11, skoraj ni predavanj iz geometrije. Učitelji nimajo vzgoje iz geometrije. Poznajo le abstraktne vektorske prostore. Ne učijo radi geometrije, ne uživajo v njej in ne morejo vdahnuti navdušenja za ta predmet. Resnično začaran krog. Zato pa moje trmasto vztrajanje na programu smiselnih predavanj iz geometrije za učitelje prak-tike. Pomen besede smiseln v zgornjem kontekstu pa bo moral biti razja-snjen.

2.2.3 Izdelovalci učnih načrtov, pisci učbenikov in drugi

Teh, ki so v glavnem odgovorni za katastrofalno nazadovanje pouka ge-ometrije, je vse preveč; to so razvijalci učnih načrtov, superdidaktiki, pre-roki učnih načrtov, pisci učbenikov, vključno tudi jaz. Prepogosto izhodišče naših posvetovanj je univerzitetna verzija predmeta, ne pa otrok, učenec. Cilj je presaditi univerzitetno matematiko z vso rigoroznostjo in abstrak-tnostjo (potrebno na nivoju univerze) v šolo in izkoristiti to priložnost, da se razkaže posameznikovo znanje. Vsebina, duh in izbira besed so značilne za naslavljanje matematikov, znanstvenikov. Listanje skozi učbenike pa pokaže, da jih otroci ne morejo brati. Učbeniki izžarevajo izredno psevdo-eksaktnost in pričajo o avtorjevem bombastičnem psevdoznanju. Človeka pogosto mika, da bi rekel njihovim avtorjem: „Povej enostavno, povej razu-mljivo!”

Razlogov za nazadovanje lepega predmeta, nazorne šolske geometrije, je še več, toda to ni mesto za diskusijo o njih.

2.3 OŽIVITEV GEOMETRIJE

Nekateri pravijo, da bi bilo treba geometrijo izkopati iz groba. Toda dokler še ni umrla, ji je potrebna infuzija novega življenja, raje kot ekshu-macija. Je to smiselna obveza? V tej zvezi je bilo toliko rečenega, da lahko le skiciram nekaj relevantnih argumentov. Preden začnem, pa bom še citiral D. Laugwitzja:

Geometrija bo rešena, ker je lepa. Linearna algebra je upo-rabna, toda težko lepa; dejansko je dolgočasna.

2.3.1 Uporabnost geometrije

Obstoj mnogih področij je odvisen od razvoja vizualne geometrije: kri-stalografija, mehanika, kinetika, arhitektura, kartografija, astronomija, ge-ometrijska optika. Nujno je potrebna inženirjem, arhitektom, astronomom, fizikom, ...

2.3.2 Geometrija, jezik matematikov raziskovalcev

Matematiki raziskovalci konstantno uporabljajo jezik geometrije — je-zik, ki ga morajo realno obvladati. V tem jeziku morajo risati nazorne upodobitve, ki jih potrebujejo za svoje prostore, dimenzije, mnogoterosti, svežnje, vlakna in vse ostalo.

Prepričan sem, da je prav kreativnost matematika raziskovalca zelo povezana z geometrijskimi predstavami. Vsak barva (na skrivaj) svojo sličico.

2.3.3 Geometrija v šoli

Duševni razvoj otroka se prične z vidnim okoljem. Otrok želi in mora „zgrabiti” in razumeti svoj svet. Otroci barvajo in rišejo. So mali geometrijci že po naravi. Ne morejo pričeti s sterilnimi abstraktnimi strukturami. Takšne strukture sledijo na koncu dolgega razvoja. To je razlog, zakaj je šola brez geometrije v protislovju z otroško naravo in mentalnim razvojem.

2.3.4 Geometrija — kulturni zaklad

Geometrija je bistveni del kulture, del duševnega razvoja človeštva. Ta razlog zadošča, da jo spoznamo in se je učimo.

2.3.5 Geometrija je lepa

„Užitek ob oblikah naredi geometrijca.” (C. Clebsch) Geometrija — vidna geometrija je lepa. Daje nam estetsko zadovoljstvo. Naj omenim le en primer: Ali lahko kdo ostane hladen ob mozaikih Alhambre?

Celo teh nekaj argumentov, a jih je še več, kaže, da se resnično izplača znova uvesti in oživiti geometrijo v šolah in univerzah.

2.4 NAČINI REVITALIZACIJE GEOMETRIJE

Kaj storiti, da bi bila geometrija bolj privlačna in zanimiva?

2.4.1 Splošne zahteve

Potrebno je manj abstrakcij, manj formalizma, manj ali še bolje nič aksiomatike, manj poudarka na temeljih geometrije, manj linearne algebre, manj struktur geometrije, manj, manj,...

Potrebujemo pa več vizualne vsebine, več konkretne geometrije, več zanimivih (netrivialnih) problemov, več risanja, več konstrukcij, intuitivnosti, heuristike, nestrukturirane geometrije, več zabave, več, več,....

Mi vsi, geometrijci in učitelji, moramo hitro nekaj storiti, da oživimo geometrijo v šoli. Ura je pet minut do dvanajste.

2.4.2 Priporočljivi cilji

Mnogi smo preskusili številna področja možne uporabe novega proučevanja geometrije v srednjih in visokih šolah. Nekatero ugotovitve so zapisane. Nekaj namigov iz našega kataloga:

- elementarna diferencialna geometrija: vijačnice, spirale, kotaljenje, kavstične krivulje, zemljevidi,...
- pokritja: mozaiki, tlakovanje ravnine
- konveksne množice: linearna optimizacija.
- elementarna topologija: Möbiusov trak
- inverzna geometrija in geometrija Minkowskega: elementi relativnostne teorije, računanje s kompleksnimi števili, aplikacije,...
- računalniki in geometrija

To še zdaleč ni dovolj. Morali bi načeti še mnoge druge teme, jih pripraviti, testirati in končno spraviti v knjigo. Imejte se za naslovljenca in

povabljenca k sodelovanju. Upam, da bom slišal o vaših rezultatih. Vi in vaši učenci lahko pričnete z delom. Čas je za kreativnost.

ZAKLJUČEK

1. DEL. Aksiomi geometrije kot matematične discipline.

Obstaja mnogo zelo različnih aksiomatskih sistemov za klasično evklidsko geometrijo. Vsak ima svoje prednosti in slabosti. Noben nas ne pelje v geometrijo po kraljevski poti. Ker pa je tako, ne morem iz čisto matematičnih razlogov priporočati nobene od opisanih aksiomatik kot osnovni sistem za rabo učiteljem. Zelo mi je žal, da moram razočarati pričakovanja te vrste.

Želim pa še dodati, da je pomen aksiomatike za znanost v splošnem zelo upadel.

2. DEL. Šolska geometrija

Izbira osnovnega sistema je v celoti odvisna od učnih ciljev. Analize šolske geometrije (v bavarskih šolah) so polne znakov popolnega nazadovanja. Zaradi te zastrašujoče slike je diskusijo o primernem osnovnem sistemu praktično brez pomena. Ponovna uvedba geometrije kliče po neposredni intenzivni terapiji. Zato pa je osnovni sistem nepotreben.

Taka diskusija sugerira ponovno prerazporeditev poudarkov in izbiro novega naslova za ta članek: *Kriza v poučevanju geometrije*.

LITERATURA

- [1] E. Artin, *Geometric algebra*, New York, 1957.
- [2] R. Artzy, *Linear geometry*, Reading, 1965.
- [3] F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin, 1973.
- [4] G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor*, *Annals of mathematics* **33** (1932) 329 ff.
- [5] G. D. Birkhoff and R. Beatley, *Basic geometry*, New York, 1959.
- [6] L. M. Blumenthal, *A modern view of geometry*, Freeman, 1961.
- [7] P. J. Davis and R. Hersh, *The mathematical experience*, Birkh-user, 1981.
- [8] J. Dieudonné, *Linear algebra and geometry*, Houghton Mifflin, 1969.
- [9] G. Ewald, *Geometry: an introduction*, Belmont, 1971.
- [10] B. Grtnbaum, *Shouldn't we teach geometry?* *Proceedings of the 4th ICME Boston*, 1983 165–167.
- [11] T. L. Heath, *The thirteen books of Euklid's elements*, Cambridge, 1908.
- [12] D. Hilbert, *Foundations of geometry*, Open Court, 1971.
- [13] I. Lakatos, *Proofs and refutations*, Cambridge, 1976.
- [14] E. E. Moise, *Elementary geometry from an advanced standpoint*, Addison-Wesley, 1963.
- [15] R. Ossermann, *The fall and rise of geometry*, *Proceedings of the 4th ICME Boston*, 1983 167–171.
- [16] T. Tymoczko, *New directions in the philosophy of mathematics*, Birkhauser, 1986.
- [17] M. Toepell, *On the origins of Hilbert's „Foundations of geometry”*. *Archive for history of exact sciences* **36** (1986) 329–344.
- [18] B. L. van der Waerden, *Science awakening*, Noordhoff, 1954.
- [19] I. M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*, Berlin, 1979.

Prevedla Silva Kmetič

OB PREVODU UČBENIKA FIZIKE

V knjižnici Oddelka za fiziko se je pojavila nova knjiga¹. Kdor jo je prelistal, je postal pozoren na lepe barvne fotografije. Ob malo podrobnejšem pogledu pa zbledi vtis zaradi drobnih spodrsaljajev, na primer: trenje ni upor (str.26), prizma se pri stiskanju ne zdebela na sredi in se pri natezanju na sredi ne zoži, ampak je njen presek po vsej dolžini enak (manjši ali večji) (36, slika), meja prožnosti se v splošnem ne ujema z mejo sorazmernosti (37), v prostoru nad živim srebrom v cevki je živosrebrna para (44), nukleon je (atomska) jedro (128, 174)... (Mimogrede: RAF ni letalska družba, ampak kraljevo (vojno) letalstvo (21), havoc razdejanje (110)). Podobne spodrsaljaje opazimo tudi v odstavkih o nevarnosti pri teniškem servisu (31), o zemeljskem magnetnem polju (155) in še kje.

Pozneje zbledijo tudi ti očitki in se pojavijo globlji pomisleki. Ali ni sila količina, s katero opišemo delovanje telesa na telo? Ali ne bi kazalo tega v šoli povedati in ga ne imeti za nekaj mitičnega, če se že lotimo nelahkega pojma? Navsezadnje učenci že imajo izkušnje, kar poudarjajo te dni na oni strani Rokavskega preliva. Potem tretjega Newtonovega zakona ne bi bilo treba vsiliti z ukazom v nenaravnem vrstnem redu (28):

Dve dvojici sil: sila na čoln, ki deluje nazaj, sila na čevelj, ki deluje naprej (slika), sila na puško, ki deluje nazaj, sila na naboj, ki deluje naprej (slika).

Nobena sila ne deluje samostojno. Sile delujejo vedno v parih.

Sila deluje na neko telo. Sočasno njej nasprotno enaka sila deluje na drugo telo.

Prvi, ki je zapisal, da sile delujejo v parih, je bil Isaac Newton. Njegov **tretji zakon gibanja** se glasi:

Pri vsaki akciji deluje nasprotno enaka reakcija.

Ali, če deluje na telo A telo B z neko silo, deluje sočasno telo B na telo A z nasprotno enako silo.

Če delujejo sile v parih, zakaj se ne izničijo?

Sili v paru delujeta vedno na dve različni telesi in ne na isto telo.

Zakaj se Zemlja ne zasučje nazaj, ko tečemo naprej?

Saj se. Toda masivnost Zemlje je tako velika, da tega niti ne opazimo.

O telesu ali sistemu teles, ki ga opazujemo, niti besede. Kaj pa dvojica (zunanjih) sil z vsoto nič in končnim navorom? Podobnih mest bi našli še nekaj.

Največji pomislek se priplazi nazadnje: Ali ne ponuja knjiga izprevrženega pogleda na sliko, ki jo da fizika o naravi? Ali ne poučuje s trditvami, ki naj se jih učenec nauči na pamet, ne da bi o njih kaj razmišljal. Po tem spominja na poučevanje iz prejšnjega stoletja.

¹ Stephen Pople, *Naravoslovje. Fizika*, prevedel Vinko Udir, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 1992, 224 str.

Pri vpeljavi temperature (66), na primer, najprej omeni Celzijevo skalo. Nato preberemo:

Kaj je temperatura?

Če je juha prevroča, moramo počakati, da se ohladi. Pri tem juha odda toploto v okolico. Prehajanje toplote v zrak se ustavi, ko je temperatura juhe enaka temperaturi zraka. Kinetična energija posamezne molekule juhe je v povprečju enaka kinetični energiji posamezne molekule zraka. (*)

Pri nižanju temperature snovi se gibanje molekul upočasnjuje.

Dve snovi imata enako temperaturo, če imajo molekule obeh snovi v povprečju enako kinetično energijo. (*)

Enaka temperatura, različna notranja energija

Temperature in toplote ne smemo zamenjati. Žlica ima lahko enako temperaturo kot juha, toda poln krožnik juhe je energijsko bogatejši kot žlica.

Absolutna ničla

Nič ne more biti hladnejše od -273°C . To je najnižja možna temperatura. Pravimo ji *absolutna ničla*. Pri ohlajanju se hitrost gibanja molekul zmanjšuje. Popolnoma ustaviti molekul ni mogoče. Minimalna gibljivost molekul je pri absolutni ničli. Počasneje se molekule ne morejo gibati, zato tudi temperature ni mogoče znižati.

Nato vpelje z ukazom *Kelvinovo skalo*, čemur sledi daljše preračunavanje iz Celzijeve v Kelvinovo skalo in nazaj. Mimogrede: trditvi (*) sta majavi. Kako to, da imajo enoatomni plini približno specifično toploto $c_V = \frac{3}{2}R/M$, dvoatomni pa za R/M več? Vendar višek sledi, ko knjiga obdela deset strani pozneje (77) „dva plinska zakona”, od katerih pravi drugi „**Prostornina** je premosorazmerna s temperaturo (v K) pri stalnem tlaku.”

Ali ne dobi učenec vtisa, da pač vpeljemo absolutno temperaturo z ukazom iz muhavosti. Nato pa mimogrede na drugem mestu v drugi zvezi spozna, da je prostornina plina pri konstantnem tlaku – kot po naključju – sorazmerna s temperaturo (v K). Ali je fizika zbirka med seboj nepovezanih muhavih ukazov in trditev?

Knjiga z barvastimi fotografijami in z enačbami v besedah² in zvezkoma, ki jo spremljata,³ se samo na prvi pogled zdi prijazna za učenca. Po zasnovi stavi na preživet način poučevanja.

Bežne ugotovitve sprožijo več globljih vprašanj. Ali naj bi barvaste fotografije prikrile strokovne pomanjkljivosti? Komu je namenjen kot učbenik slovenski prevod, saj je angleški original očitno učbenik? Ali kdo po strokovni strani skrbi za to, kaj založbe izdajajo? Ali imamo poseben gon, da pri spremembah v šolstvu izberemo vselej slabšo možnost? Dobro bi bilo, če

2 Knjiga zapiše enačbe z besedami, ne s simboli. M. von Laue misli, da je „matematika najprikladnejše orodje fizike. Edino matematika dopušča zapis zakonov z enačbami, ki se jih je mogoče naučiti in uporabiti za zamotane pojave.” A. K. Lavalj je prišel do prepričanja, da je za učence fizika lažja, če sloni na matematiki, ki so jo že srečali, kot na opisovanju. Ali ni pisanje enačb z besedami še ena nepotrebna novost?

3 Knjigi večji *Priročnik za učitelja* (64 str.) in manjša *Navodila za vaje* (64 str.) istega avtorja sta nebarvasti.

bi bralci Obzornika povedali svoje mnenje o vprašanjih, preden ta pridejo v širšo javnost.

Noben učbenik ni popoln in na vsakega je mogoče nasloviti pripombe. Vendar mi je domači črno-beli osnovnošolski učbenik precej bolj po volji kot barvasti tuji. Ni vse zlato, kar se sveti (kar prihaja iz tujine)⁴.

Janez Strnad

⁴ To velja tudi za ponujeni nemški prijem, ki se zgleduje po imponderabilijah (snoveh z nemerljivo majhno gostoto) s konca 18. stoletja in ki je prirejen zgolj za obravnavanje stacionarnih pojavov. Eno je strokovna razprava o kakem načrtu, nekaj drugega pa njegovo uvajanje v naše šole.

RAZPIS ZA PRIZNANJA UČITELJEM

V skladu s *Pravili o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike z astronomijo in računalništva v osnovni in srednji šoli za delo z mladimi* prosimo podružnice DMFA Slovenije, aktive matematikov in fizikov na šolah in posamezne člane društva, da do

1. oktobra 1993

predlagajo kandidate. Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 61 111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p 64.

Milena Strnad

VABILO

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Zavod za šolstvo in šport vabita vse matematike, fizike in astronome na

STROKOVNI SEMINAR IN 45. OBČNI ZBOR DRUŠTVA,

ki bo 22. in 23. oktobra 1993 v Kopru v hotelu Žusterna.

Program: Petek 22.10.1993, dopoldne

fizika: 9.15–10.30 Ocenjevanje laboratorijskega dela učencev v osnovni in srednji šoli (projektni skupini za OŠ in SŠ)

11.00–13.00 Predstavitev projekta Tempus – razvoj začetnega naravoslovja (skupina Tempus)

matematika OŠ: 9.15–10.30 Silva Kmetič: Periodične desetiške številke

11.00–13.00 Sabina Škarabot: Predstavitev raziskovalne naloge učencev

matematika SŠ: 9.15–10.30 Dr. Dušan Repovš: Geometrijska topologija — zakaj je zanimiva

11.00–13.00 Dr. Tomaž Pisanski: Kemijski grafi z računalnikom

popoldne

15.30–17.00 Dr. Peter Petek: Matematične osnove kaosa

17.15–19.00 Dr. Branko Robnik: Kaos v fiziki

Sobota 23.10.1993

9.00 Občni zbor

Predsednik DMFA Slovenije

Franc Cvelbar