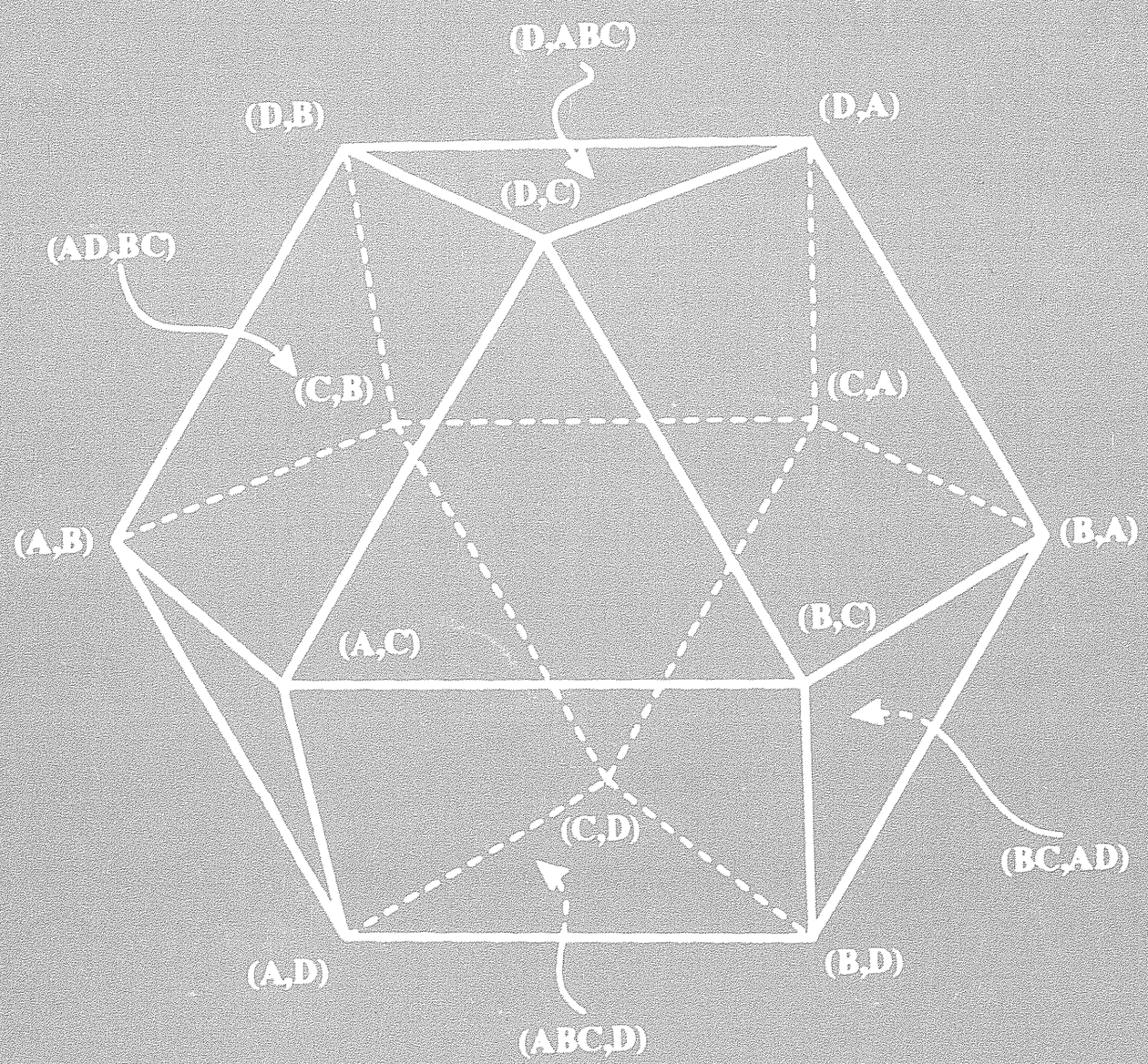
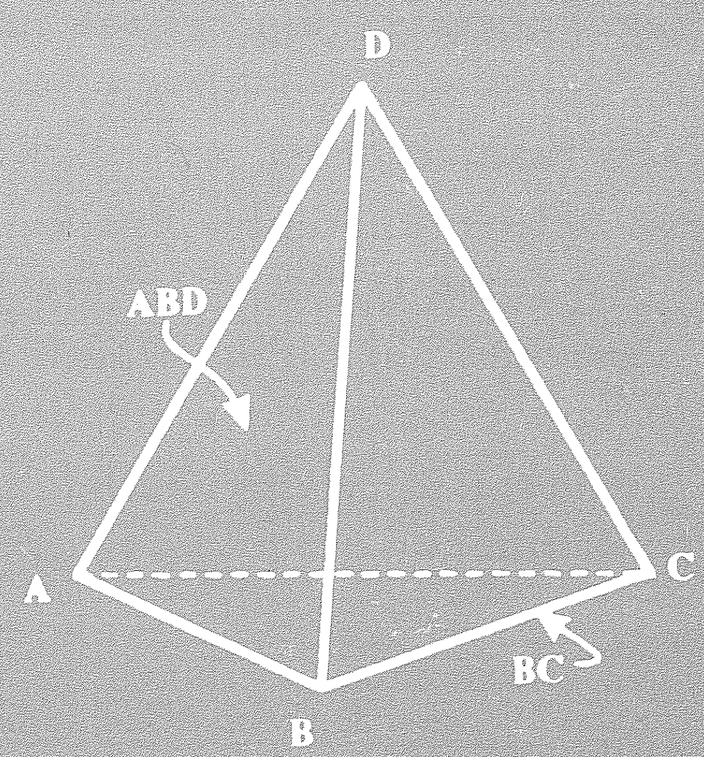
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ENTRALNA EKONOMSKA
NJIŽNICA Ljubljana
ODPISANO

1993
Letnik 40
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO





OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 1993
letnik 40, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 1.500,– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 3.000,– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 300,– SIT, dvojna številka 600,– SIT, stare številke 160,– SIT.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1993 DMFA Slovenije – 1156 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Diagonalizacija simetričnih matrik z vzporedno Jacobijevo metodo — Parallel Jacobi method for a symmetric matrix diagonalisation (Aleš Zupan) 65–73
Kako razdeliti ogrlico — Splitting necklaces (Neža Mramor) 75–80
Igre narave 9. Čudni kvark je dovolj težek, da se ne sesedemo v čudno snov — Some tricks of nature 9. The mass of the strange quark is sufficient to prevent the collapse into strange matter (Mitja Rosina) 83–84
Aksiomi geometrije v šoli in znanosti — Geometry axioms in school and in science (Herbert Zeitler, prevedla Silva Kmetič) 85–94
Nove knjige — New books (Bojan Magajna) 73–74

Vesti — News

In memoriam Antonu Peterlinu (France Cvelbar) 80–82
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1992 (zbrala Martina Koman) 94–95
Obvestilo (Milan Hladnik) iv

Utrinek

Dragi profesorji matematike (Slavko ex Machina) iv

Na ovitku: Slika k članku na straneh 75–80: **Slika 3**. Vložitev prostora $Y_{2,3}$ v R^3. Sestavljen je iz urejenih parov disjunktnih lic simpleksa Δ^3.

DIAGONALIZACIJA SIMETRIČNIH MATRIK Z VZPOREDNO JACOBIJEVO METODO

ALEŠ ZUPAN

Math. Subj. Class. (1991) 65 F 15, 65 Y 05

V delu je opisana Jacobijeva metoda, s katero diagonaliziramo poljubno realno simetrično matriko. Podan je tudi vzporeden postopek za krožno povezan sistem procesorjev.

PARALLEL JACOBI METHOD FOR A SYMMETRIC MATRIX DIAGONALISATION

The Jacobi method for the diagonalisation of a real symmetric matrix is presented. A parallel algorithm scheme is given for a ring–connected processor system.

1. Uvod

V naravoslovnih in tehniških znanostih pogosto naletimo na problem računanja lastnih vrednosti:

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

kjer je A realna kvadratna matrika velikosti $n \times n$, x vektor dolžine n in λ kompleksno število.

Netrivialna rešitev enačbe (1) obstaja natanko za tiste λ, za katere je:

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Če determinanto razvijemo po potencah λ, dobimo polinom n-te stopnje. Ničle tega polinoma so lastne vrednosti λ, pripadajoče netrivialne rešitve sistema (1) pa lastni vektorji.

Tako skoraj nikoli ne iščemo lastnih vrednosti, ampak raje uporabimo druge, natančnejše in numerično bolj stabilne metode [1,2,3], ki nam poleg lastnih vrednosti dajo tudi pripadajoče lastne vektorje.

Za skupino simetričnih matrik ($A^T = A$) pogosto uporabljamo Jacobijevo metodo diagonalizacije [4], ki jo poznamo že skoraj 150 let. Obstajajo sicer hitrejše metode, vendar je Jacobijeva najbolj enostavna in jo lahko brez večjih ovir priredimo za računalniške sisteme z več procesorji.

2. Jacobijeva metoda

Osnovna ideja

Osnovna ideja Jacobijeve diagonalizacije je sistematično zmanjševanje evklidske norme matrike zunajdiagonalnih elementov:

$$\mathrm{off}(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}^2},$$

To izvedemo z zaporednimi ortogonalnimi transformacijami oblike $P_{pq}^T A P_{pq}$. Matrika P_{pq} se od identične matrike razlikuje le v p-tem in q-tem stolpcu in ima obliko:

$$P_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \dots & s & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & -s & \dots & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

S črkama c in s označimo kosinus in sinus kota ϕ. Matrika P predstavlja rotacijo, zato imenujemo tako transformacijo tudi *Jacobijeva rotacija*. Kot rotacije ϕ v ravnini (p, q) izberemo tako, da rotacija izniči elementa a_{pq} in a_{qp}.

Osnovni korak Jacobijeve metode tako sestavljajo trije deli:

1. izbira indeksnega para (p, q), $1 \leq p < q \leq n$,
2. izračun para (c, s), tako da velja:

$$\begin{pmatrix} a'_{pp} & 0 \\ 0 & a'_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \tag{2}$$

   in

3. obnova matrike $A' = P_{pq}^T A P_{pq}$.

Opazimo, da se matrika A' razlikuje od matrike A le v p-ti in q-ti vrstici in p-tem in q-tem stolpcu. Če upoštevamo, da ortogonalna transformacija ohranja evklidsko normo matrike, lahko pokažemo, da velja:

$$\mathrm{off}(A')^2 = \mathrm{off}(A)^2 - 2a_{pq}^2.$$

Zaporedje $\mathrm{off}(A)^2$ konvergira monotono proti nič, če primerno izbiramo elemente a_{pq}.

Delovne enačbe

Transformacija (2) spremeni matriki A le p-to in q-to vrstico in p-ti in q-ti stolpec. Formule za spremenjene matrične elemente dobimo z upoštevanjem simetrije matrike A:

$$\begin{aligned} a'_{pr} = a'_{rp} &= ca_{rp} - sa_{rq} &&= a_{rp} - s(a_{rq} + \tau a_{rp}), \\ a'_{qr} = a'_{rq} &= ca_{rq} + sa_{rp} &&= a_{rq} + s(a_{rp} - \tau a_{rq}), \\ a'_{pp} &= c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sca_{pq} &&= a_{pp} - ta_{pq}, \\ a'_{qq} &= s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2sca_{pq} &&= a_{qq} + ta_{pq}, \\ a'_{pq} &= (c^2 - s^2)a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq}) &&= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Indeks r v prvih dveh vrsticah teče od 1 do n, ne sme pa biti enak p ali q. V desni stolpec smo zapisali enačbe v obliki, ki je primerna za uporabo v računalniškem programu. Definirali smo tudi nov simbol $\tau \equiv \frac{s}{1+c}$.

Ker hočemo postaviti zunajdiagonalni element a'_{pq} na nič, velja za kot rotacije ϕ:

$$\theta \equiv \cot 2\phi = \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}.$$

Uvedemo $t \equiv s/c$ in dobimo kvadratno enačbo za tangens kota ϕ:

$$t^2 + 2t\theta - 1 = 0.$$

Manjša rešitev te kvadratne enačbe ustreza rotaciji za kot, ki je manjši od $\pi/4$. Izkaže se, da ta rešitev zagotavlja numerično stabilnost. Torej:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\operatorname{sgn}\theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \\ s &= tc. \end{aligned} \tag{4}$$

Pare (p, q) izbiramo toliko časa, da je evklidska norma matrike zunajdiagonalnih elementov manjša od nekega predpisanega ε. Po m korakih procesa dobimo tako približno diagonalno matriko D:

$$D = V^T A V,$$

kjer je

$$V = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_m$$

produkt vseh narejenih transformacij. Diagonalni elementi matrike D so približki za lastne vrednosti matrike A, stolpci matrike V pa približki za lastne vektorje. Dobimo jih z množenjem $V' = V \cdot P_i$ pri vsaki transformaciji. Velja:

$$\begin{aligned} v'_{rp} &= cv_{rp} - sv_{rq} = v_{rp} - s(v_{rq} + \tau v_{rp}), \\ v'_{rq} &= sv_{rp} + cv_{rq} = v_{rq} + s(v_{rp} - \tau v_{rq}), \end{aligned} \tag{5}$$

kjer teče indeks r od 1 do n.

Izbira indeksnega para (p, q)

Posvetimo se sedaj izbiri indeksnega para (p, q). Ker bi radi čim bolj zmanjšali količino off(A), je logična izbira tak indeksni par, ki označuje največji zunajdiagonalni element. Ni težko pokazati, da tedaj števila

$\mathrm{off}^2(A)$ padajo vsaj tako hitro kot geometrijsko zaporedje s kvocientom $q = 1 - 2/(n^2 - n)$. Potek tega postopka predstavimo s shemo:

```
procedure jacobi;

  V = I;                          { V je na začetku enotska matrika}
  ε = tol||A||_E;

  while off(A) > ε
      (p, q) = izberemo tako, da velja |a_pq| = max|a_ij|, i ≠ j
      (c, s) = izračunamo po formulah (4)
      A ← P_pq^T A P_pq; {po formulah (3)}
      V ← V P_pq; {po formulah (5)}
  end
```

Kot parametre podamo proceduri simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in toleranco tol > 0. Izvajanje se konča, ko je norma zunajdiagonalnih elementov pod ε. Diagonalni elementi matrike A so približki za lastne vrednosti λ, stolpci matrike V pa za pripadajoče lastne vektorje.

Pri analizi časovne zahtevnosti se pokaže, da je tak postopek prezamuden. Za vsako transformacijo moramo poiskati največji zunajdiagonalni element, kar je zahtevnosti $\mathcal{O}(n^2)$. To pa je že istega reda zahtevnosti kot zahtevnost celotnega vzporednega postopka.

Zato raje izbiramo indeksne pare po vrsticah matrike. Za primer matrike velikosti $n = 4$ bi bili vsi pari tile: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) in (3, 4). Teh parov je $N_S = n(n-1)/2$. Navadno imenujemo zaporedje N_S transformacij za vse različne indeksne pare tudi prelet matrike („sweep"). Shema tega postopka je na sliki 1. Tudi pri tej izbiri indeksnih parov se da dokazati konvergenca postopka.

```
procedure jacobi;

  V = I;                          {V je na začetku enotska matrika}
  ε = tol||A||_E;

  while off(A) > ε
    for p=1:n-1
      for q=p+1:n
        (c, s) = izračunamo po formulah (4)
        A ← P_pq^T A P_pq; po formulah (3)}
        V ← V P_pq; {po formulah (5)}
      end
    end
  end;
```

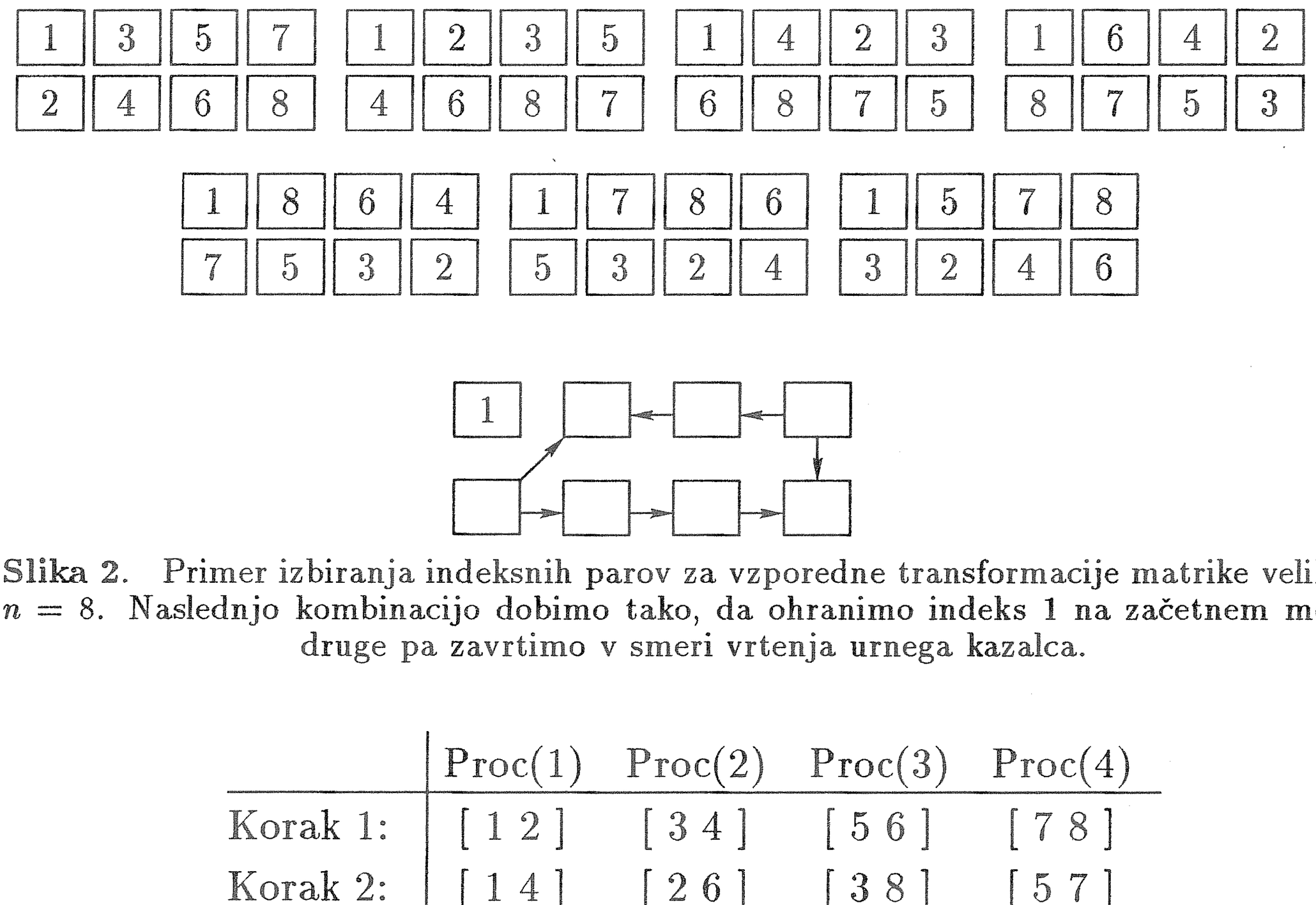
Slika 1. Shema za ciklično izbiranje parov (p, q). Vhodni in izhodni podatki so enaki kot pri shemi z izbiranjem maksimalnega elementa.

Za zdaj še ni trdne matematične teorije, ki bi napovedala, v kolikih preletih se postopek izteče. Vendar pa se da napovedati, da je število potrebnih preletov sorazmerno z $\log n$ [5]. To napoved uporabljamo tudi v praksi, kjer se pokaže, da je tudi za večje matrike dovolj 6 do 10 preletov.

3. Vzporedni Jacobijev postopek

Jacobijev postopek je sam po sebi vzporeden, zato ga lahko enostavno priredimo za vzporedne računalniške sisteme. Opazimo namreč, da matriki P_{pq} in P_{rs} komutirata, če velja da sta si para (p, q) in (r, s) tuja v tem smislu, da velja $p \neq r$ in $q \neq s$.

Tako si moramo izmisliti le dovolj enostaven postopek za izbiro tujih si indeksnih parov. Najlaže si ga predstavimo s šahovskim turnirjem, kjer igra n igralcev in mora vsak z vsakim igrati natanko enkrat. Pripraviti moramo $N = n/2$ miz, celotni turnir pa traja $n-1$ kol. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je n sodo število. Na sliki 2 je narisana shema za $n = 8$.



Slika 2. Primer izbiranja indeksnih parov za vzporedne transformacije matrike velikosti $n = 8$. Naslednjo kombinacijo dobimo tako, da ohranimo indeks 1 na začetnem mestu, druge pa zavrtimo v smeri vrtenja urnega kazalca.

	Proc(1)	Proc(2)	Proc(3)	Proc(4)
Korak 1:	[1 2]	[3 4]	[5 6]	[7 8]
Korak 2:	[1 4]	[2 6]	[3 8]	[5 7]
Korak 3:	[1 6]	[4 8]	[2 7]	[3 5]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Korak 7:	[1 3]	[5 2]	[7 4]	[8 6]

Slika 3. Shema izbiranja indeksnih parov za en prelet matrike za krožno povezan sistem. Urejeni pari določajo indekse stolpcev, ki jih hranimo v določenem procesorju. Prvi indeks označuje *levi* stolpec, drugi pa *desni* stolpec.

V jeziku matrik to pomeni, da potrebujemo za izvedbo vzporednega postopka $N = n/2$ procesorjev, za vsak prelet pa moramo opraviti $n-1$ vzporednih transformacij.

Priredba postopka za krožno povezan sistem

V sistemih z več procesorji je pomembno, kako posamezni procesorji dostopajo do podatkov in kako si izmenjujejo informacije. V našem primeru bomo uporabili sistem, v katerem so posamezni procesorji povezani v krog. To pomeni, da lahko vsak procesor izmenjuje podatke s svojim levim in desnim sosedom. Vsak procesor ima tudi svoj lokalni spomin, kjer hrani podatke [6]. Zaradi enostavnosti privzamemo, da je n sodo število, število procesorjev N pa enako polovici velikosti matrike†.

Stolpce matrike A in V v začetku porazdelimo po procesorjih po shemi na sliki 3, tako da vsak procesor hrani v svojem spominu 2 stolpca matrike A in 2 istoležna stolpca matrike V. Vsak posamezen procesor nato obravnava svoj problem, ki je sestavljen iz petih korakov:

1. izračun c in s, ki rešita lokalni problem anihilacije zunajdiagonalnega elementa,
2. obnova lokalnih stolpcev matrik A in V,
3. prenos parametrov c in s vsem drugim procesorjem,
4. sprejem parametrov c in s od vseh drugih procesorjev in obnova lokalnih stolpcev A,
5. izmenjava stolpcev matrik A in V po shemi s slike 3.

Koraka 3 in 4 moramo narediti zato, ker množenje $P_{pq}^T A$ vpliva na p–to in q–to vrstico matrike A, matrika A pa je shranjena po stolpcih.

Izvajanje posameznih delov vzporednega postopka poteka v procesorjih sočasno. Zgodi se sicer lahko, da kak procesor prej konča s korakoma 1 in 2‡, vendar mora nato počakati na preostale procesorje, da lahko z njimi sinhrono izmenja podatke (koraki 3, 4 in 5).

Navadno zaustavimo ta postopek po končnem, prej določenem številu preletov M. Potek takega postopka je na sliki 4. Simbol V_{small} v shemi predstavlja matriko $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$.

procedure jacobi;

local.init[N, μ=my.id, left, right, n, $A_{loc} = A(:, 2\mu - 1 : 2\mu)$, M];

$V_{loc} = I_n(:, 2\mu - 1 : 2\mu)$; {$V_{loc}$ *je na začetku enotska matrika*}
left = 1:2:n; {*indeksi levih stolpcev*}
right = 2:2:n; {*indeksi desnih stolpcev*}

{*Določimo leve in desne sosede za izmenjavo stolpcev.*}
{Lsend (Rsend) *označuje ciljni procesor za levi (desni) stolpec,*}
{Lrecv (Rrecv) *označuje izvorni procesor za novi levi (desni) stolpec.*}
if $\mu = 1$ **then** Lsend = 1; Rsend = 2; Lrecv = 1; Rrecv = 2;

---

† Če to ni res, si pomagamo tako, da matriko zapolnimo z ničlami ($n < 2N$) ali pa uporabimo bločno Jacobijevo shemo ($n > 2N$).

‡ Glej EISPACK izboljšave (stran 72).

```
elseif μ = N then Lsend = N; Rsend = N-1; Lrecv = N-1; Rrecv = N;
else Lsend = μ+1; Rsend = μ-1; Lrecv = μ-1; Rrecv = μ+1;
end

for sweep=1:M {M preletov}
  for set=1:n-1 {n − 1 vzporednih transformacij v enem preletu}
    p=min(left(μ),right(μ)); {upoštevamo pogoj 1 ≤ p < q ≤ n}
    q=max(left(μ),right(μ));

    (c, s) = izračunamo po formulah (4)
    A_loc ← A_loc V_small; {osvežimo p-ti in q-ti stolpec}
    V_loc ← V_loc V_small;

    λ = μ;
    for k=1:N {pošljemo in sprejemo par (c, s) za vse procesorje}
      send(V_small,right); recv(V_small,left);
      if λ = 1 then λ=N; else λ = λ − 1; end
      p0=min(left(λ),right(λ));
      q0=max(left(λ),right(λ));
      A_loc ← V_small^T A_loc; {osvežimo p0-to in q0-to vrstico}
    end

    {izmenjamo stolpce po shemi na sliki 3}
    send(A_loc(left),Lsend); send(A_loc(right),Rsend);
    recv(A_loc(left),Lrecv); recv(A_loc(right),Rrecv);
    send(V_loc(left),Lsend); send(V_loc(right),Rsend);
    recv(V_loc(left),Lrecv); recv(V_loc(right),Rrecv);
    [left,right] = permutiramo indekse po shemi s slike 3
  end
end
end
```

Slika 4. Jacobijev postopek za ciklično povezan sistem. Kot parametre podamo proceduri simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kjer je $n = 2N$ in M število preletov. Vsak procesor je pri inicializaciji enoznačno označen s parametrom μ. Desni sosed μ-tega procesorja ima oznako $\mu + 1$, levi pa $\mu - 1$. Prvi procesor ima za levega soseda N-ti procesor, N-ti procesor pa za desnega prvi procesor. Po končanih M preletih hrani μ-ti procesor $2\mu - 1$-vi in 2μ-ti stolpec diagonalne matrike A in istoležna stolpca matrike V.

Bločna metoda

S postopkom s slike 4 lahko diagonaliziramo matrike do velikosti $n = 2N$. Ponavadi pa je velikost matrike mnogo večja od števila procesorjev, ki jih imamo na voljo. Takrat uporabimo bločno shemo. Predpostavimo, da velja $r = n/(2N)$. Matriko A potem razdelimo v bloke velikosti $r \times r$. Problem anihilacije ni več dimenzije 2×2, ampak $r \times r$:

$$\begin{pmatrix} A'_{pp} & 0 \\ 0 & A'_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{pp} & V_{pq} \\ V_{qp} & V_{qq} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{pp} & V_{pq} \\ V_{qp} & V_{qq} \end{pmatrix},$$

kjer so matrike A_{ij}, V_{ij} in A'_{ij} velikosti $r \times r$.

V tem primeru imamo mnogo možnosti za izbiro vrstnega reda reševanja teh podproblemov in izkaže se, da je izbira kritična [7].

4. Zaključek

Ocena zahtevnosti

Za vsako rotacijo moramo izračunati par (c, s), kar zahteva konstanten čas ne glede na velikost matrike. Nato moramo obnoviti dva stolpca in dve vrstici matrike A. To zahteva $4n$ operacij množenja in seštevanja. Za diagonalizacijo tipične matrike s klasičnim (zaporednim) postopkom potrebujemo 6 do 10 preletov, to je $3n^2$ do $5n^2$ transformacij. Celotna zahtevnost postopka je torej $12n^3$ do $20n^3$ računskih operacij ali $\mathcal{O}(n^3)$. Če želimo izračunati še lastne vektorje, moramo pri vsaki transformaciji obnoviti še dva stolpca matrike V, kar prinese še dodatnih $2n$ računskih operacij za vsako transformacijo, oziroma dodatnih 50% vseh operacij.

Pri vzporednem postopku izvedemo $n/2$ Jacobijevih rotacij vzporedno, torej potrebujemo za 6 do 10 preletov $6n$ do $10n$ vzporednih transformacij. Celotna zahtevnost je tako $24n^2$ do $40n^2$ operacij ali $\mathcal{O}(n^2)$. Pri tem smo predpostavili, da izmenjava podatkov med procesorji porabi le malo časa.

Primerjava zahtevnosti zaporednega postopka z vzporednim pokaže, da je vzporedni postopek za red hitrejši. V navadi je, da v sistemih z več procesorji definiramo ceno postopka [8], ki je enaka časovni zahtevnosti, pomnoženi s številom potrebnih procesorjev. Za vzporedni postopek potrebujemo $\mathcal{O}(n)$ procesorjev, njegova cena je tako $\mathcal{O}(n^3)$. Tudi za zaporedni postopek je cena enaka $\mathcal{O}(n^3)$, kar pomeni, da smo zaporedni postopek optimalno priredili za sistem z več procesorji.

Izboljšave postopka

V dokumentaciji EISPACK-a [2] najdemo recept za izboljšavo zaporednega Jacobijevega postopka. Ta pravi:

- V prvih treh preletih izvedemo transformacijo P_{pq} le tedaj, ko je $|a_{pq}| > \varepsilon$. Prag za transformacijo je določen z:

$$\varepsilon = \frac{1}{5}\frac{S_0}{n^2}, \qquad S_0 = \sum_{p>q} |a_{pq}|,$$

  kjer je S_0 vsota absolutnih vrednosti naddiagonalnih elementov na začetku.
- Po štirih preletih postavimo element a_{pq} takoj na nič, če velja $|a_{pq}| \ll |a_{pp}|$ in $|a_{pq}| \ll |a_{qq}|$. Za to možnost se odločimo takrat, ko velja $|a_{pq}| < 10^{-(D+2)}|a_{pp}|$ in $|a_{pq}| < 10^{-(D+2)}|a_{qq}|$, kjer je D število decimalnih mest v zapisu realnega števila v plavajoči vejici.

Namen prvega predpisa je izbira tistih rotacij, ki res nekaj prinesejo k zmanjševanju količine off(A). Prihranek pri času izvajanja postopka je tako lahko precejšen, še posebej če imamo matrike z zelo velikimi in zelo majhnimi elementi. Smiselno je seveda najprej izničiti velike elemente in šele nato

majhne. Izkušnje povedo, da je lahko časovni prihranek z upoštevanjem tega predpisa tudi do ene četrtine pri prvih treh preletih.

Drugi predpis sledi iz dejstva, da lahko realno število predstavimo v računalniku le s končnim številom decimalnih mest. Zato nima smisla delati rotacij, ki imajo tako majhen vpliv na rezultat, da ga sploh ne moremo zaznati.

Za vzporedni postopek sta ta dva predpisa neučinkovita. Prvi ali drugi pogoj bi moral biti zaradi sinhronizacije izpolnjen na vseh procesorjih hkrati. To pa ni zelo verjetno.

Zahvala

Zahvaljujem se prof. dr. Juriju Tasiču z odseka za digitalne komunikacije Instituta Jožef Stefan v Ljubljani, ki me je usmeril v študij vzporednega Jacobijevega postopka in mi omogočil delo na transputerskem sistemu ter mi dajal koristne nasvete pri implementaciji.

LITERATURA

[1] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1988.

[2] B. T. Smith et al., *Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide*, 2nd. ed., vol. 6 of Lecture Notes in Computer Science, Springer–Verlag, 1976.

[3] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd. ed., The John Hopkins University Press, 1989.

[4] C. G. Jacobi, *Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*, J. Reine Angew. Math. **30** (1846) 51–94.

[5] R. P. Brent, F. T. Luk, SIAM J. Sci. and Stat. Comp. 6 (1985) 69–84.

[6] B. Jereb, L. Pipan, A. Klofutar, *Transputerji*, Informatica **1** (1989) 43–47.

[7] C. H. Bishof, *The Two-Sided Block Jacobi Method on a Hypercube*, in *Hypercube Multiprocessors*, ed. M. T. Heath, SIAM Press, Philadelphia, 1987, pp. 612–618.

[8] S. G. Akl, *The Design and Analysis of Parallel Algorithms*, Prentice-Hall International, 1989.

NOVE KNJIGE

MATHEMATICAL RESEARCH TODAY AND TOMORROW, Viewpoints of Seven Fields Medalists, Lectures given at the Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, Spain, June 1991, Uredila C. Casacuberta in M. Castellet, Lecture Notes in Math. 1525, Springer, Berlin 1992, 112 str.

Fieldsova medalja, ki jo podeljujejo za izjemna odkritja na Mednarodnem matematičnem kongresu vsaka štiri leta, ima v matematiki podobno težo kot Nobelova nagrada na nekaterih drugih znanstvenih področjih. Knjiga vsebuje predavanja sedmih Fieldsovih nagrajencev na simpoziju junija 1991 v Barceloni in razpravo po teh predavanjih.

Rene Thom v svojem prispevku opisuje bleščeč začetek njegove teorije katastrof, kritiko, ki je sledila temu začetku, svoje skeptično stališče do metodologije moderne znanosti nasploh in še posebej do t.i. matematične logike ter svoj umik v filozofijo. (Sam pravi, da je iz matematika „degeneriral v" filozofa.)

Iz prispevka **Sergeja Novikova** lahko zvemo nekaj zanimivih podrobnosti o ruski matematiki v prejšnjih dveh do treh desetletjih. Svoj prvi znanstveni članek je objavil „šele" pri 21 letih, zaradi česar se je njegova mati pritoževala, da je že vsakdo napisal znanstveni članek, razen njenega sina. Drugi del prispevka pa se poglobi v parcialne diferencialne enačbe, ki so pomembne tudi za fiziko.

Shing-Tung Yau razmišlja o sedanjem stanju in perspektivah v geometriji, nelinearnih parcialnih diferencialnih enačbah in singularnostih.

Alain Connes utemeljuje nujnost nekomutativne diferencialne geometrije, ki je posplošitev običajne diferencialne geometrije v takem smislu kot so C^*-algebre posplošitev algeber zveznih funkcij na kompaktnih prostorih. Iz članka lahko dobimo vtis o tem, kaj je ciklična kohomologija, in kako je mogoče osnovne diferencialno geometrične pojme definirati v operatorsko algebraičnem jeziku.

Stephen Smale obravnava teorijo računskih algoritmov nad realnimi števili in topološko kompleksnost numeričnih problemov.

Matematična teorija vozlov je zrasla v prejšnjem stoletju iz vprašanj hidrodinamike in elektromagnetizma, v tem stoletju pa je postala del topologije. Nov zagon je ta teorija dobila pred nekaj leti, ko je **Vaughan F. R. Jones** odkril reprezentacijo grupe kit v družino C^*-algeber in s tem novo polinomsko invarianto za vozle. Njegov članek obravnava povezave med teorijo vozlov, statistično mehaniko in teorijo polja.

V zadnjem članku te knjige pa **Gerd Faltings** opisuje najnovejše dosežke v geometriji diofantskih enačb.

Diskusija na koncu knjige zajema naslednje teme: podobnosti in razlike med matematiko in ostalimi znanostmi ter umetnostjo, vlogo računalnikov pri dokazovanju izrekov in simuliranju naravnih pojavov, zveznost in diskretnost v naravoslovju, odnos matematika — družba, kako vrednotiti pomen in tehtnost odkritij, ...

Posamezni deli knjige sicer vsebujejo natančno formulirane rezultate, katerih pravo razumevanje bi zahtevalo od bralca ogromno predznanja, toda večinoma je knjiga pisana v pripovednem slogu, ki bo pritegnil vsakega matematika. Bralec bo lahko dobil vtis o pomembnih problemih matematike in njihovi povezanosti s temelji fizike.

Bojan Magajna

KAKO RAZDELITI OGRLICO

NEŽA MRAMOR

Math. Subj. Class. (1991) 05A, 54H25

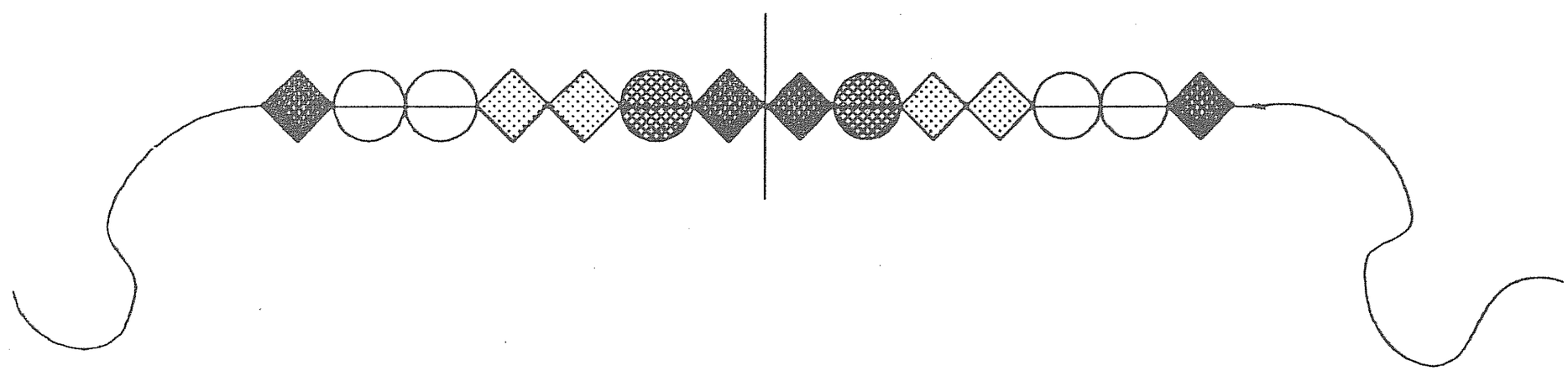
V članku opišemo dokaz izreka o razdelitvi k-barvne ogrlice na m enakih delov z minimalnim številom rezov, kar predstavlja lep in značilen primer uporabe topoloških metod v kombinatoriki.

SPLITTING NECKLACES

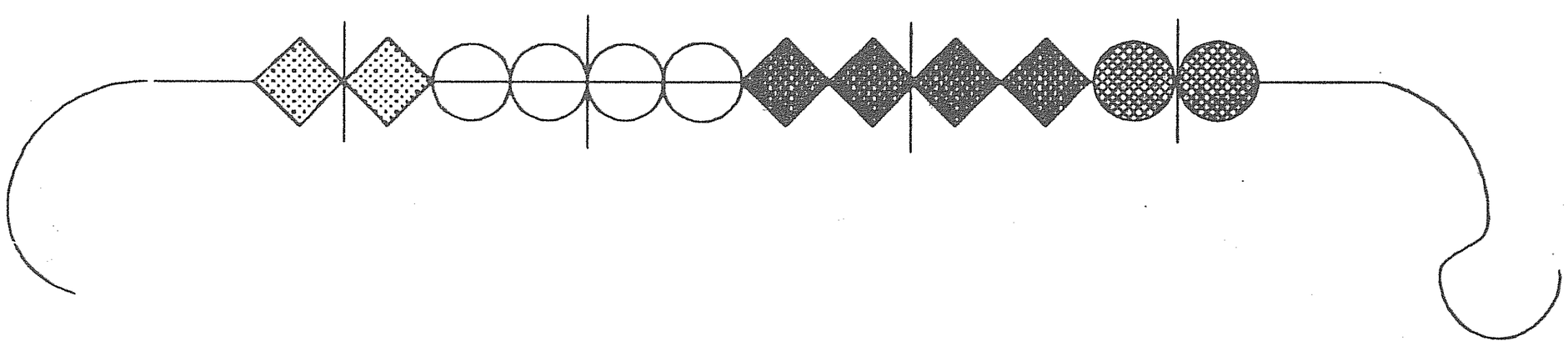
We describe the problem of splitting a k-colored necklace into m equal parts with a minimal number of cuts. The solution of this problem represents a typical example of an application of topological methods to combinatorics.

1. Uvod

Zamislite si tolpo m tatov, ki so ukradli dragoceno zlato ogrlico z dragulji k različnih barv (in vrednosti). Število draguljev vsake posamezne barve je deljivo z m in ogrlico želijo razdeliti tako, da bo vsak dobil enak delež draguljev vsake barve. Muči jih vprašanje, koliko rezov je najmanj potrebnih, da bi lahko dobljene kose ogrlice pravično razdelili. Odgovor je seveda odvisen od razporeditve draguljev. Na primer, če sta tatova dva, barve pa štiri, je za ogrlico na sliki 1 potreben en sam rez, ogrlico na sliki 2 pa morata rezati kar štirikrat. Vendar pa se izkaže, da je razporeditev na sliki 2 v nekem smislu najslabša, kajti N. Alon je v [2] dokazal:



Slika 1. Štiribarvna ogrlica, razdeljena na dva dela z enim rezom



Slika 2. Štiribarvna ogrlica, pri kateri so potrebni štirje rezi

Izrek o delitvi ogrlice. *Na vsaki k-barvni ogrlici z $m \cdot a_i$ dragulji barve i obstaja $k(m-1)$ rezov, tako da lahko dobljene kose ogrlice razporedimo na m kupčkov z enakim številom draguljev vsake posamezne barve na vsakem kupčku.*

Problem delitve ogrlice in njegova rešitev imata (poleg očitnega pomena za tatove) določen pomen pri načrtovanju VLSI vezij (glej [4]), zanimiva pa sta tudi zato, ker predstavljata še en nov primer uporabe topoloških metod pri reševanju kombinatoričnih problemov. Takih primerov se je nabralo že kar precej in to je lepo, kajti kombinatorika nekako šteje med „uporabna" področja matematike, topologija pa ima (čisto po krivici) sloves neuporabne matematične discipline, ki je povrhu še težko pristopna. Topologija vstopa v kombinatoriko po različnih poteh. Pogosto na podlagi dane kombinatorne situacije zgradimo simplicialni kompleks in pokažemo, da ima kakšne lepe topološke lastnosti (na primer povezanost ali enostavno povezanost ali pa naravno delovanje kakšne grupe), tako da iz znanih rezultatov algebraične topologije sledi želeni kombinatorni rezultat. Izdaten spisek takih problemov najdemo v [6]. Drug pristop, ki je prav tako pogost, pa je tale. Dano kombinatorično konfiguracijo opišemo s pomočjo kakšne podmnožice sfere ali evklidskega prostora in uporabimo standardne topološke rezultate, na primer Borsuk-Ulamov izrek, ali kakšen soroden rezultat. Problem razdelitve ogrlice spada v to kategorijo.

2. Razdelitev ogrlice med dva tatova

Oglejmo si najprej najpreprostejši primer, ki je bil tudi najprej razrešen (v [1]), to je delitev ogrlice med dva tatova (torej naj bo $m = 2$). Ta problem rešimo s pomočjo Borsuk-Ulamovega izreka, o katerem smo v Obzorniku že pisali (glej [8]).

Dokažimo, da si lahko dva tatova k-barvno ogrlico vedno pravično razdelita z največ k rezi. Oštevilčimo barve s števili 1 do k in izberimo merilo na realni osi R tako, da bo dolžina ogrlice enaka 1, ogrlico pa položimo na enotski interval $I = [0,1] \subset R$. Tako dobimo barvanje točk intervala, množica $A_i = \{x \in I \mid x \text{ je barve } i\}$ pa je za vsako barvo $i \in \{1, ..., k\}$ unija končno mnogo podintervalov v I (in zato merljiva množica).

Delitev intervala z največ k rezi je določena z zaporedjem točk $t_0 = 0 \leq \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq t_{k+1} = 1$, kjer sta lahko dve (ali več) točki tudi enaki. Različnih rezov bo natanko k takrat, kadar so v zaporedju med posameznimi točkami sami strogi neenačaji, če pa sta dve delilni točki enaki, pa je rezov, določenih s takim zaporedjem, manj kot k. Poiskati moramo tako delitev, da bomo lahko dobljene intervale $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., k+1$ razdelili v dve družini, od katerih bo vsaka vsebovala natanko polovico vsake množice A_i.

Naj bo

$$S^k = \left\{ x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in R^{k+1} \mid \|x\| = \textstyle\sum_1^{k+1} x_j^2 = 1 \right\} \subset R^{k+1}$$

enotska sfera. Vsaki točki $x \in S^k$ priredimo delitev $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \leq \ldots \leq t_k \leq t_{k+1} = 1$ intervala I z delilnimi točkami $t_j = \sum_{i=1}^{j} x_i^2$, $1 \leq j \leq k$. Označimo z $m_{i,j}(x)$ skupno dolžino intervalov barve i na j-tem podintervalu $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ delitve, ki pripada točki x. Definirajmo preslikavo $f = (f_1, \ldots, f_k) \colon S^k \to R^k$ takole: za vsak $i = 1, \ldots, k$ naj bo $f_i(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \operatorname{sign}(x_j)\, m_{i,j}(x)$. Očitno je $f_i(-x) = -f_i(x)$ za vsak $i = 1, \ldots, k$, torej je f liha preslikava. Poleg tega je f zvezna preslikava. Če je namreč točka $x \in S^k$ taka, da je $x_j \neq 0$ za vsak j, velja to tudi v kakšni njeni dovolj majhni okolici, zato je v takšni okolici $\operatorname{sign}(x_j)$ za vsak j konstantna preslikava, komponente f_i funkcije f pa so kar linearne kombinacije zveznih funkcij $m_{i,j}(x)$. Če pa je kakšna koordinata $x_j = 0$, pa to pomeni, da je dolžina intervala I_j enaka 0, pa tudi $m_{i,j}(x) = 0$ za vsak i, torej gre člen $\operatorname{sign}(x_j) m_{i,j}(x)$ v okolici take točke v vsaki komponenti f_i zvezno proti 0, tako da je funkcija f tudi v takih točkah zvezna.

Preslikava f torej zadošča predpostavkam Borsuk-Ulamovega izreka, ki pravi, da vsaka zvezna liha preslikava iz sfere S^k v evklidski prostor iste dimenzije R^k v neki točki na sferi zavzame vrednost 0. Pa naj bo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) \in S^k$ taka točka, da je $f(\xi) = 0$. Pokažimo, da pripadajoče zaporedje $z_0 = 0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_k \leq z_{k+1} = 1$ določa iskano delitev intervala. Dobljene podintervale I_j razdelimo na dva dela:

$$F_1 = \bigcup \{\, [z_{j-1}, z_j] \mid \operatorname{sign}(\xi_j) = +1 \,\} \quad \text{in}$$
$$F_2 = \bigcup \{\, [z_{j-1}, z_j] \mid \operatorname{sign}(\xi_j) = -1 \,\} \,.$$

Za vsak i je

$$f_i(\xi) = \sum_{I_j \in F_1} m_{i,j}(\xi) - \sum_{I_j \in F_2} m_{i,j}(\xi) = 0 \,,$$

kjer je prvi člen ravno skupna dolžina vseh intervalov barve i v množici F_1, drugi člen pa je dolžina vseh intervalov barve i v F_2. Zgornja enačba torej pove, da vsebujeta množici F_1 in F_2 vsaka natanko polovico vsake barve.

Skratka, delitev intervala I smo opisali s pomočjo točk na sferi $S^k \subset R^{k+1}$, definirali zvezno preslikavo $f \colon S^k \to R^k$ in z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka dokazali obstoj točke, ki določa ravno pravo delitev.

3. Razdelitev ogrlice med več tatov

V naslednjem koraku bomo razdelili ogrlico med m tatov, kjer je $m > 2$ kakšno liho praštevilo. V tem primeru za popis vseh možnih delitev ne zadošča več sfera, potrebovali bomo prostor z malo bolj zapleteno strukturo, za katerega pa velja nekakšna posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka, ki so jo dokazali Bárány, Shlosman in Szűcs [3].

Opišimo najprej prostor $Y_{m,k}$, ki bo v tem splošnejšem primeru prevzel vlogo sfere, torej prostor, s katerim parametriziramo možne delitve intervala I. Naj bo

$$\Delta^N = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{bmatrix} \in R^{N+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N+1} x_i = 1 \right\}$$

standardni simpleks dimenzije $N = (m-1)k$. Nosilec $\mathrm{supp}(x)$ točke $x \in \Delta^N$ je najmanjše lice simpleksa Δ^N (torej simpleks, napet na nekaj oglišč simpleksa Δ^N), ki vsebuje točko x. Naj bo

$$Y_{m,k} = \left\{ (y_1, ..., y_m) \mid y_i \in \Delta^N, \mathrm{supp}(y_i) \cap \mathrm{supp}(y_j) = \emptyset \text{ za } i \neq j \right\}.$$

Točke prostora $Y_{m,k}$ so torej m-terice vektorjev prostora R^{N+1} in jih lahko predstavimo kot matrike dimenzije $(N+1) \times m$ z vsoto komponent v vsakem posameznem stolpcu enako 1. Ker so nosilci posameznih stolpcev disjunktni simpleksi in ležijo v različnih koordinatnih podprostorih prostora R^{N+1}, je v vsaki vrstici kvečjemu po ena komponenta različna od 0. Označimo z $\alpha: Y_{m,k} \to Y_{m,k}$ preslikavo, ki ciklično zamenja stolpce matrike $y \in Y_{m,k}$, torej $\alpha: (y_1, y_2 ..., y_m) \mapsto (y_2, ..., y_m, y_1)$. Ker so vektorji y_i v različnih koordinatnih podprostorih, je $\alpha(y) \neq y$ za vsak y, poleg tega je $\alpha^m(y) = y$ za vsak y, torej je α^m identična preslikava (drugače povedano, α določa prosto delovanje ciklične grupe Z_m na prostoru $Y_{m,k}$).

Izrek Bárányja, Shlosmana in Szűcsa. *Poljubna zvezna preslikava $f: Y_{m,k} \to R^{k-1}$ preslika vsaj eno m-terico $\{\alpha(y), ..., \alpha^{m-1}(y), \alpha^m(y) = y\}$, $y \in Y_{m,k}$ v eno samo točko.*

Prostor $Y_{m,k}$ je unija lepo zloženih simpleksov in produktov simpleksov, tako da je njegova struktura po svoje enostavna in pregledna. Vendar pa postane število sestavnih delov, ko m in k naraščata, hitro zelo veliko. Na primer $Y_{3,2}$ je 2-dimenzionalen prostor, sestavljen iz skoraj 2000 elementov. Za $k = 2$ se lahko bralec sam hitro prepriča, da je prostor $Y_{2,2}$ homeomorfen sferi S^1, za $k = 3$ pa bi ga morala slika 3 na naslovni strani prepričati, da je $Y_{2,3}$ homeomorfen S^2. Prostor $Y_{2,k}$ je $(k-1)$-dimenzionalen polieder, ki ima, kot so dokazali Bárány, Shlosman in Szűcs v [3], homološki tip sfere S^{k-1} (homološke grupe tega prostora so torej izomorfne homološkim grupam sfere). Zdi se verjetno, da je $Y_{2,k}$ tudi homeomorfen sferi, vendar pa je, kolikor je nam znano, to vprašanje še nerešeno.

Vsaki matriki $y = (y_1, ..., y_m) \in Y_{m,k}$ priredimo delitev intervala I na $N+1$ podintervalov $I_1, ..., I_{N+1}$, katerih dolžine so ravno vrstične vsote matrike y pomnožene z $\frac{1}{m}$, torej komponente vektorja

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}(y_1 + ... + y_m).$$

Delilne točke te delitve so $t_0 = 0, t_i = \sum_{j=1}^{i} x_j, 1 \leq i \leq N$ in $t_{N+1} = \sum_{j=1}^{N+1} x_j = 1$. Dobljene podintervale razdelimo na m disjunktnih družin $F_1, ...F_m$ takole: interval $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ sodi v družino F_l natanko takrat, kadar je v stolpcu y_l na j-tem mestu neničelno število. Ker je v vsaki vrstici matrike y največ eno neničelno število, je tako vsak interval (dolžine > 0) nedvoumno razporejen in so družine $F_1, ..., F_m$ res disjunktne. Poleg tega je skupna dolžina vseh intervalov v družini F_l za vsak l ravno vsota l-te vrstice v matriki y, torej $\frac{1}{m}$. Naj bo preslikava $g: Y_{m,k} \to R^{k-1}$ definirana s predpisom: za vsak $1 \leq i \leq k-1$ je $g_i(y)$ mera barve i v uniji podintervalov družine F_1, $\cup\{I_j | I_j \in F_1\}$. Hitro se vidi, da je to zvezna preslikava, torej izrek Bárányja, Shlosmana in Szűcsa zagotavlja obstoj take točke $\xi \in Y_{m,k}$, da je

$$g(\xi) = g(\alpha(\xi)) = ... = g(\alpha^{m-1}(\xi)).$$

Ker je $g_i(\alpha^j(\xi))$ ravno mera barve i v družini F_{j+1}, pripada tej točki tista delitev intervala I na družine podintervalov $F_1, ..., F_m$, ki pravično razdeli barve $1, ..., k-1$. Pa tudi barva k je s tem pravično razdeljena, kajti dolžina podintervalov zadnje barve je razlika med skupno dolžino intervalov vseh drugih barv in $\frac{1}{m}$.

Delitev intervala je tako opravljena. Vendar pa ni nujno, da smo s tem dobili dobro delitev ogrlice, kajti delilne točke so lahko sredi kakšnega dragulja. Takih „slabih" delilnih točk se zlahka drugo za drugo odkrižamo. Ker je mera vsake barve mnogokratnik dolžine enega dragulja, morajo vsi „slabi" rezi nastopati v parih — vsaki slabi točki barve i pripada vsaj še ena slaba točka iste barve. Obe točki hkrati rinemo v nasprotnih smereh, dokler ena od njiju ne doseže roba svoje barve, to pa pomeni, da je tudi na robu dragulja. Tako imamo eno slabo točko manj, s ponavljanjem opisanega postopka pa se znebimo še ostalih.

Za praštevilske tolpe tatov je tako poskrbljeno — vsako k-barvno ogrlico res lahko z $(m-1)k$ rezi pravično razdelimo med m tatov, če je le m praštevilo. Če je $m = m_1 m_2$, produkt praštevil m_1 in m_2, razdelimo ogrlico najprej na m_1 kupov z $(m_1 - 1)k$ rezi, potem pa razdelimo vsakega od m_1 dobljenih kupov z $(m_2 - 1)k$ rezi na m_2 kupov. Na koncu je ogrlica razdeljena med $m_1 m_2 = m$ tatov, rezov pa smo naredili

$$(m_1 - 1)k + m_1(m_2 - 1)k = (m_1 m_2 - 1)k = (m - 1)k.$$

Če pa je m produkt več kot dveh praštevil, moramo opisani postopek ponoviti večkrat in, skratka, ogrlico razrezati v več kot dveh korakih.

Izrek o delitvi ogrlice je tako dokazan.

LITERATURA

[1] N. Alon and D. B. West, *The Borsuk-Ulam theorem and bisections of necklaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986)) 623–628.

[2] N. Alon, *Splitting necklaces*, Advances in Math. **63** (1987) 247–253.

[3] I. Bárány, S. B. Shlosman and A. Szűcs, *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. London Math. Soc. (2) **23** 1981 158–164.

[4] S. N. Bhatt and F. T. Leighton, *A framework for solving VLSI graph layout problems*, J. Comput. System Sci. **28** (1984), 300–343.

[5] C. H. Goldberg and D. B. West, *Bisection of circle colorings*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **6** (1985) 93–106.

[6] Ed. R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász (eds.), *Handbook of Combinatorics*, v tisku.

[7] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed point theory, I.*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1982.

[8] N. Mramor-Kosta, *O Borsukovem antipodnem izreku*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 65–72.

[9] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey.* Topological Methods in Nonlinear Analisys, 166–235. Sém. Math. Sup. 95, Presses Univ. Montréal, 1985.

VESTI

IN MEMORIAM AKADEMIKU PROF. DR. ANTONU PETERLINU

V dneh, ko smo se spominjali stoletnice smrti prvega slovenskega fizika Jožefa Stefana (1835–1893), je v Ljubljani ugašalo življenje utemeljitelja slovenske fizike akademika prof. dr. Antona Peterlina.

Prof. Peterlin se je rodil 25. septembra 1908 v Ljubljani kot sin srednješolskega profesorja, ki je bil učenec Jožefa Stefana.

Leta 1930 je z odličnim uspehom diplomiral iz matematike in fizike na Filozofski fakulteti Univerze v Ljubljani. Naslednje leto je bil asistent na fizikalnem inštitutu tehniške fakultete. Na dunajski tehniki se je nekaj časa izpopolnjeval v rentgenskih preiskavah kristalne zgradbe snovi. V šolskem letu 1936–37 je prvič predaval splošno fiziko na Univerzi v Ljubljani. Leta 1937 je odšel na podiplomsko izobraževanje v Berlin potem, ko je zaman iskal možnost

za tak študij v Zagrebu. Doktorsko disertacijo *Viskoznost razredčene raztopine sferoidov* je dokončal v dobrem letu in jo z odličnim uspehom (summa cum laude) branil na Humboldtovi univerzi v Berlinu leta 1938. S svojim mentorjem je nato sodeloval vse do njegove smrti.

Leta 1939 je bil imenovan za docenta za fiziko na tehniški fakulteti univerze v Ljubljani, naslednje leto se je imenovanju pridružila tudi filozofska fakulteta. Med vojno je bil večkrat zaprt. Po vojni je leta 1945 postal izredni, naslednje leto pa redni profesor za predmet teorijska fizika. Leta 1951 je bil med pobudniki za uvedbo študija tehniške fizike v Ljubljani.

Dopisni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti (SAZU) je postal leta 1946. Njen redni član je bil od leta 1949, ko je ustanovil tudi Fizikalni inštitut SAZU, ki danes nosi ime po Jožefu Stefanu. Direktor tega inštituta je bil vse do leta 1959.

Od leta 1960, ko je neprostovoljno odšel v tujino, je prof. Peterlin nadaljeval svoje plodno delo na znanih raziskovalno-pedagoških centrih po svetu. Najprej je bil eno leto vodja fizikalnega inštituta in profesor fizike na Tehniški univerzi v Muenchnu. Nato se je odzval vabilu iz ZDA in bil v letih 1961–1973 do prve upokojitve (ob starosti 65 let) direktor na novo ustanovljenega Camile Dreyfus laboratorija za velemolekulsko fiziko in kemijo v Research Triagle Institutu Severna Karolina, ki so ga ustanovile razne industrijske korporacije za proizvodnjo umetnih vlaken. V snovanje novega inštituta, ki je kmalu postal vodilni v svetovnem merilu, je vložil vse svoje moči. Sam je dejal, da je bila odločitev za ta inštitut najboljša odločitev v njegovem strokovnem življenju. Hkrati je predaval fiziko na Duke University. Nato je dve leti raziskoval na oddelku za polimere v National Bureau of Standards (NBS) Washington D.C. Od leta 1973 do druge (univerzne) upokojitve leta 1983 je bil gostujoči profesor na Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio. Od leta 1975 je bil obenem (kot upokojenec) pomočnik načelnika Oddelka za polimere NBS, na lastno željo pa razbremenjen administrativnih dolžnosti.

V večini raziskovalnih del, katerih število je nekaj pod 400, je prof. Peterlin ostal zvest področju svojega doktorskega dela, t.j. fiziki velikih molekul in polimerov. V svojem življenjepisu jih razvršča pod naslednja gesla: plastična deformacija kristaliničnih polimerov, transportne lastnosti, termodinamika, kristalizacija, morfologija, jedrska magnetna resonanca in elektronska magnetna resonanca, akustična emisija, lom, sipanje sevanja X trdnih polimerov ter reološke in optične lastnosti razredčenih raztopin polimerov. Njegov prvi pomembni prispevek je teorija dvojnega loma polimernih raztopin. Veliko je prispeval tudi k temu, da so za polimere uporabljali realistične modele, ko velike molekule ne obravnavajo več kot klobčič sferoidne oblike, ampak bolj realistično kot verižico monomerov, ki sodelujejo med seboj. Prof. Peterlin je znan tudi po teoriji loma in plastične deformacije kristaliničnih polimerov ter po teoriji njihovih transportnih lastnosti.

Po mednarodni odmevnosti njegovega dela smemo prof. Peterlina šteti med največje slovenske naravoslovce v zadnjih desetletjih. O tem pričajo tudi domača in mednarodna priznanja.

Bil je častni doktor univerz v Mainzu in v Ljubljani, častni član Inštituta Jožef Stefan, častni član Društva matematikov fizikov in astronomov Slovenije, član avstrijske akademije znanosti, član Washington Academy of Sciences ter član New York Academy of Sciences.

Bil je glavni urednik revije Macromolecular Reviews, sourednik Macromolekulare Chemie, član v uredniških odborih Polymer Science, Colloid and Polymer Science, član svetovalnega odbora Journal of Macromolecular Science, Journal of materials science in Journal of Polymer Science.

Leta 1949 je bil nagrajen z redom dela I. stopnje. Prejel je Prešernovo nagrado (leta 1955), Binghamovo medaljo Society of Rheology (leta 1970), nagrado Ford Motor Company ameriške fizikalne družbe (leta 1972). Ob 75-letnici rojstva je leta 1983 prejel Kidričevo nagrado za življenjsko delo.

Prof. Peterlin se je odlikoval po vseh treh lastnostih dobrega raziskovalca: bil je prodoren na svojem raziskovalnem področju, bil je odličen predavatelj in sposoben organizator raziskovalnega dela.

O njegovem osebnem prispevku k napredku znanosti, predvsem o polimerih, pričajo številne razprave h katerim se bodo raziskovalci pogosto vračali.

Prof. Peterlina upravičeno imenujemo za utemeljitelja slovenske fizike. To veliko nalogo je opravil kot predavatelj teorijske fizike na ljubljanski univerzi in kot organizator raziskovalnega dela na Institutu J. Stefan. Za slovensko fiziko je bil kot voditelj narodnega preporoda.

Zgodilo se je po vojni. Čas je bil ugoden, saj so tedaj ljudje po svetu in tudi pri nas stavili vse upe v naravoslovno znanost, v kateri imata matematika in fizika vodilno vlogo. V tako pogojenem času bi kaj lahko pognala površna kvaziznanost, ki se prilagaja potrebam politikov in javnega mnenja. Čeprav je moral začeti od nič, se po njegovi zaslugi to ni zgodilo. Nasprotno. Okrog sebe je zbral večino takratnih slovenskih naravoslovcev in tudi nekaj tehnikov ter za vsa področja postavil trdne temelje. Takratni njegovi kriteriji, predvsem pa stališče, da raziskovalno delo nima vrednosti in ni dokončano, vse dokler o njem ni obveščena svetovna znanstvena javnost, so uporabni tudi danes. In ne samo, da je kriterije postavil. S svojo neomajno avtoriteto jih je vcepil mnogim mladim sodelavcem. Ni naključje, da večina teže naravoslovnega raziskovalnega dela v naši mladi državi sloni na teh sodelavcih in njihovih učencih.

Po zaslugi prof. Peterlina Slovenci v svetovni fiziki nismo neznano pleme z južne strani Alp, ampak so naša imena skupaj z njegovim zapisana v svetovni zakladnici znanja.

Slava njegovemu spominu!

France Cvelbar

IGRE NARAVE 9.

ČUDNI KVARK JE DOVOLJ TEŽEK, DA SE NE SESEDEMO V ČUDNO SNOV

MITJA ROSINA

PACS 21.65.+f; 21.80.+a

Zaradi Paulijevega principa bi bila energijsko ugodnejša jedrska snov iz kvarkov u, d in s, če bi bil kvark s dovolj lahek.

SOME TRICKS OF NATURE 9.

THE MASS OF THE STRANGE QUARK IS SUFFICIENT TO PREVENT THE COLLAPSE INTO STRANGE MATTER

The Pauli Principle would favour a nuclear matter composed of several flavours of quarks (for example s quarks in addition to u and d quarks) if s quarks were not sufficiently heavy.

Igra narave

Atomska jedra so sestavljena iz nukleonov, ti pa iz kvarkov u in d (p = = uud, n = udd). Jedrska sila, ki je rezultanta močnih sil med kvarki, je na razdalji okrog 1 fm zelo privlačna, pod 0,5 fm pa zelo odbojna. Jedra bi bila dosti močneje vezana, če se ne bi nukleoni na kratki razdalji zelo odbijali, za kar ima velik delež krivde Paulijev princip, ki ne pusti enakim kvarkom blizu. Narava bi lahko Paulija delno prelisičila, če bi del kvarkov u in d nadomestila s kvarki s in bi bila srečanja enakih kvarkov redkejša. Vendar so kvarki s „predragi" in se to ne izplača. To je sreča za nas, kajti čudna jedrska snov iz kvarkov u, d in s bi bila nevtralna, možna bi bila ogromna jedra (ker ne bi motil elektrostatski odboj), najbrž bi se vse sesedlo v supergosto snov, iz katere se verjetno ne more razviti razumno bitje.

Kritična masa čudnega kvarka

Ocenimo kritično maso čudnega kvarka, ki zagotavlja stabilnost naše snovi. Za razumevanje bistva pojava zadošča najenostavnejši kvarkov model, medtem ko s kvantitativnim računom še do danes niso uspeli. Opišimo jedro kar z idealnim plinom kvarkov u in d, ki zapolnjuje kvantna stanja od dna lonca do Fermijeve gibalne količine p_F. V vsak predalček gre $g_2 = 12$ kvarkov (u in d; spin gor in dol; 3 barve). Zveza med gostoto plina n ter p_F je

$$n = \int_0^{p_F} g_2 h^{-3} 4\pi p^2 dp = g_2 4\pi p_F^3 / 3h^3 .$$

Povprečna kinetična energija kvarka je potem

$$\bar{w}_{kin,2} = \frac{3}{5}\frac{p_F^2}{2m} = \frac{3h^2}{10m}\left(\frac{3n}{4\pi g_2}\right)^{2/3} .$$

V jedru pride na vsak nukleon parcela v velikosti krogle z radijem 1,2 fm. Gostota kvarkov je torej $n = 3/((4\pi/3)(1,2fm)^3) = 0,50\ \mathrm{fm}^{-3}$.

Potem je kinetična energija na kvark (pri dveh okusih kvarkov) $\bar{w}_{kin,2} = 19\,700\ \mathrm{MeV}^2/mc^2$. Celotna energija na nukleon pa znaša

$$E_N = 3mc^2 + 3\bar{w}_{kin,2} = 3(223 + 87,5)\mathrm{MeV} = 931\ \mathrm{MeV}\,,$$

če prilagodimo maso kvarka $m = 223\ \mathrm{MeV}/c^2$, tako da dobimo pravilno maso jeder.

Poglejmo, kaj se zgodi, če vzamemo tri okuse kvarkov (u, d in s) in zato statistični faktor $g_3 = 18$. Vzemimo isto maso $m = 223\ \mathrm{MeV}/c^2$ za kvark u in d ter neko maso m_s za čudni kvark. Kinetična energija u in d kvarkov se zmanjša za faktor $(g_2/g_3)^{2/3} = (12/18)^{2/3}$, za kvark s pa še dodatno za m/m_s. Energija na nukleon

$$E'_N = (2mc^2 + m_s c^2) + (2 + m/m_s)(12/18)^{2/3}\bar{w}_{kin,2}$$

ima isto vrednost kot E_N pri dveh okusih, če vzamemo za maso čudnega kvarka kritično vrednost

$$m_s - m = 80\ \mathrm{MeV}/c^2\,.$$

Navajam raje masno razliko, kajti absolutna vrednost kvarkove mase je zelo odvisna od modela. Odvisno je, kaj štejemo h kvarku, goli kvark ali tudi gluonsko polje in oblak parov kvark-antikvark, ki jih nosi s sabo. V našem modelu smo šteli k mirovni energiji kvarka vse razen kinetične energije, zato so mase razmeroma velike. Masne razlike pa so precej neodvisne od modela, saj se pri vseh modelih razlikujejo zaporedni hiperoni približno za $m_s - m$. Iz razlik barionov n = udd (939 MeV/c^2), Λ = uds (1116 MeV/c^2) in Ξ = uss (1315 MeV/c^2) sklepamo na razliko $m_s - m \sim 180\ \mathrm{MeV}/c^2$. Torej smo varni!

Kaj pa, če naša ocena ni zanesljiva? Mnogi natančnejši modeli tudi napovedujejo, da je masa čudnega kvarka dosti večja od kritične mase. Toda model massachusettske vreče (*MIT bag model*, MIT = Massachusetts Institute of Technology) napoveduje kolaps naše snovi v čudno snov. Ker se še nismo sesedli, naj bi bili metastabilni, prehod naj bi bil zelo oviran in neverjeten. Toda.... Da bi človeštvo potolažili, so skušali zadevo raziskati tudi eksperimentalno. Doslej še niso našli močno vezanega sistema $\Lambda\Lambda$ = uuddss kot produkta pri trkih jeder. Znanih je zelo malo dvojno hiperonskih jeder. ki vsebujejo dva Λ poleg protonov in nevtronov, toda dvojica Λ nikjer ne kaže posebnega privlaka. Najbrž je strah prazen.

AKSIOMI GEOMETRIJE V ŠOLI IN ZNANOSTI, 1. del

HERBERT ZEITLER

Math. Subj. Class. (1991) 00A35, 00A30, 97A15, 98A15

Članek je povzetek seminarja iz didaktike matematike na temo *Aksiomatika geometrije in priporočljivo ozadje sistema aksiomov za delo v šoli* na ETH v Zürichu. Ker je pouk geometrije problem v mnogih šolah po svetu in tudi pri nas, sem članek s prijaznim avtorjevim dovoljenjem prevedla.

GEOMETRY AXIOMS IN SCHOOL AND IN SCIENCE

The article is based on a seminar in didactics of mathematics with the title: *Geometry axioms and recommended background systems of axioms for use in schools* on ETH (Zürich).

1. Aksiomatika geometrije v znanosti

Iskal sem geometrijske aksiomatske sisteme, jih poskušal primerjati ter izbrati najboljši izhodiščni sistem za učitelje. Preveril sem tudi pomen aksiomatike za moderno znanost.

1.1 NEKAJ FILOZOFIJE

Kakor hitro hočemo izluščiti osnove geometrije, zaidemo v filozofske tokove, kot so platonizem, formalizem, konstruktivizem in drugi „izmi". Nekateri matematiki imajo svoja filozofska stališča za stvar vere, za svetovni nazor. Sledijo običajni opisi treh eksplicitno omenjenih struj.

Platonizem (Realizem). Matematični objekti – in tako tudi vsa matematika – obstajajo večno, onstran vseh časovnih okvirov in neodvisno od človekovega bivanja. Naloga matematika je razvozlati in raziskati obstoječe resnice. Matematik je bolj raziskovalec kot kreator.

Formalizem. Matematika je zbirka formalnih sistemov. Elemente teh sistemov upravljamo in jih sestavljamo glede na veljavna pravila igre. Ta pravila igre, definicije, dokazi izrekov so edina skrb matematikov. Formalist je kreator in ne tisti, ki odkriva. Zanj se ne pojavlja vprašanje eksistence matematičnih objektov. Zadovolji se z ugotovitvijo, da so njegova pravila igre neprotislovna.

Konstruktivizem (Intuicionizem). Matematika je priznana v obsegu, v katerem so njeni objekti konstruirani iz določenih najosnovnejših objektov v končnem številu korakov. Vprašanje konstruktivističnosti je dominantna in permanentna skrb privržencev te struje.

V zadnjih nekaj letih se je formalizem zelo okrepil z delom in aktivnostjo N. Bourbakija. Njegov vpliv je dosegel tudi naše učilnice. To je še bolj presenetljivo, ker je večina matematikov tako „platonistov" kot formalistov. Imajo se za skrite „platoniste" s formalistično masko ali pa platonizma ne poudarjajo preveč. Konstruktivisti pa so posebna skupina. Tvorijo manjšino. Zaradi velikanskega vpliva formalizma na matematiko in geometrijo, celo na matematiko po šolah in na geometrijo v šoli je prav, da to

vprašanje pretehtamo bolj podrobno. Formalizem je sinonim za aksiomatsko metodo. Lahko rečemo, da je formalizem aksiomatika v popolni obliki.

1.2 MATEMATIKA KOT IGRA

Nadaljnja dejstva nam bodo dala mero natančnosti pri določanju osnovnih konceptov. Najprej moramo preučiti v splošnem: „Kaj je aksiomatika?" Formalistična obravnava področja matematike nas vodi v raziskavo treh skupin problemov. Označimo jih z A, B, C. Pri razlagi si pomagajmo z igro. Naj bo to šah.

(A) Aksiomatski sistem

Če želimo igrati, moramo poznati vsa pravila igre. Kakšna je vloga kralja? Kako premikamo kraljico? Kaj je šah? Kaj je poteza? Pravila igre tvorijo logično ogrodje, strukturni temelj. V matematiki pravila igre nadomestijo aksiomi. Problemi v skupini A so problemi postavitve aksiomov za posamezno disciplino.

(B) Teorija

Če imamo pravila igre, lahko sklepamo o logičnih posledicah in formuliramo izreke. Pri šahu so ti rezultati v premetenih otvoritvah in bistrih končnicah iger. Celoto logičnih posledic aksiomov imenujemo teorija. Razvoj teorije je vsebina problemov skupine B. V tej povezavi citirajmo Poincaréja:

> *Da vidimo geometrijo jasno, moramo avtomatsko zaupati aksiomom takšnim, kakršni pač so.*

Poudarimo, da je raba slik in skic v geometriji v principu nepotrebna in včasih tudi škodljiva. Partijo igramo z zavezanimi očmi.

(C) Modeli

Šah igramo z dejanskimi figurami. Premikamo jih. Vidimo jih. Držimo jih v rokah. Figure so realizacija, interpretacija, model. Problemi v skupini C obravnavajo konstrukcijo takih modelov.

1.3 KAKO NAJDEMO AKSIOME?

Platonist najde aksiome v svetu, ki ga obdaja. To pomeni, da sledi zaporedju $C \to A \to B$ (heteronomen sistem aksiomov). V primeru geometrije lahko uporabimo izraz „naravna" geometrija. Formalist bo naredil drugače. On je kreator. Igra vlogo božanstva. Sledil bo zaporedju $A \to B \to C$ (avtonomen sistem aksiomov). Modele bo iskal, ko bo teorija popolnoma razvita. V tem primeru lahko govorimo o „umetni" geometriji.

Celo kreativna svoboda formalista je omejena. Meje je prvi postavil Arhimed.

1.3.1 Ne premalo aksiomov

Zahtevamo kompleten sistem aksiomov. Trditev, formulirana v jeziku sistema aksiomov, mora biti določljiva: trditev ali negacija trditve morata slediti iz sistema aksiomov. Potem je aksiomov dovolj. V šahovskem jeziku

to pomeni, da je rešljiva vsaka razporeditev figur — vedno obstaja ustrezno pravilo igre.

1.3.2 Ne preveč aksiomov

Aksiomi morajo biti neodvisni. To pomeni, da nobeden ne sme biti logična posledica drugih; ne sme biti odvečnih aksiomov. 1.3.1 je zahteva, 1.3.2 pa želja.

1.3.3 Brez protislovij

V razvoju teorije iz sistema aksiomov ne sme priti do protislovja (sintaktična konsistenca). Protislovna igra šaha je igra, v kateri lahko oba igralca istočasno proglasita zmago po pravilih igre. Največ matematikov ima eksistenco modela za dokaz konsistence (semantična konsistenca).

1.4. NEKAJ ZGODOVINE

1.4.1 Evklid

Grki so postavili prvi sistem aksiomov za „običajno" geometrijo. Zajeta je v 13 zvezkih Elementov, ki so povezano poročilo o matematiki v Platonovi šoli. Delo odlikuje izreden didaktični način. Evklid, avtor Elementov, skoraj gotovo ni bil izvrsten kreativni matematik. Najvažnejši in najtežji deli Elementov so delo drugih. Logične pomanjkljivosti Elementov so postale očitne 2000 let kasneje.

1.4.2 Hilbertova priredba Elementov

Hilbert je izkoristil delo mnogih matematikov in zapolnil vrzeli evklidske aksiomatske geometrije. Njegovo delo Osnove geometrije je sodobna verzija Evklidovih Elementov. Hilbert ne gleda premic, ravnin kot množic točk. Govori o treh različnih množicah reči. Ima jih za spremenljivke. To je zelo jasno iz njegovega stavka: „Namesto o točki, premici, ravnini lahko govorimo o mizi, stolu in vrču piva. Važno je le, da aksiomi veljajo."

1.5. DELNE GEOMETRIJE

Pogosto aksiomatiziramo le dele geometrije: na primer geometrija, ki obravnava le lastnosti incidence ali le lastnosti urejenosti ali le zrcaljenja. Podali bomo dva primera takšnih okleščenih geometrij.

1.5.1 Afine ravnine R. Lingenberga

Če bazični elementi „točke" in „premice" klasične geometrije zadoščajo samo aksiomom incidence in aksiomu o vzporednici, govorimo o afinih ravninah. Z njimi sta se ukvarjala E. Artin in kasneje R. Lingenberg. Cilj teh raziskav je bil pokazati tesno zvezo med lastnostmi afine ravnine in algebraičnimi lastnostmi pripadajočega ravninskega ternarnega kolobarja. Urejeni pari elementov kolobarja so koordinate točk ravnine: npr. če velja Pappusov izrek v afini ravnini, potem je pripadajoči ravninski ternarni kolobar obseg. Celotna evklidska ravnina nastane, ko dodamo urejenost in aksiom o zveznosti (glej [6, pog. IV in V]).

1.5.2 Geometrija zrcaljenj F. Bachmanna

Srce te geometrije so zrcaljenja. Začnemo z grupo skladnostnih preslikav, ki jih generirajo zrcaljenja. Določeni aksiomi zrcaljenja dajo geometrijo, ki jo imenujemo Bachmannova metrična ravnina. Dva dodatna aksioma dasta bogatejšo geometrijo, ki jo je Bachmann imenoval evklidska ravnina.

Kot v primeru Lingenbergove geometrije dobimo z dodatnimi aksiomi klasično evklidsko ravnino (glej [3]).

1.6 VSI POZNAMO REALNA ŠTEVILA

Kritični pregled Hilbertovega aksiomatskega sistema pokaže, da vsebuje sistem aksiomatsko osnovo za realna števila. Kljub temu je pot k $\mathbb{R}$ naporna in nadležna. Tudi tukaj so urejenost in aksiomi zveznosti nujno potrebni. Ker je tako, je naravno razvijati sisteme aksiomov, ki privzemajo realna števila. Eden takšnih sistemov aksiomov je osnova za geometrijo razdalj L. M. Blumenthala (glej [5, pog. VII]). Drugi primer pa je geometrija ravnila in kotomera G. D. Birkhoffa. Zasnova te geometrije je didaktična. Želi utemeljiti svojo izbiro aksiomov, želi, da bi bralec videl, od kod pridejo aksiomi in zakaj imajo taka imena, kot jih imajo. (Glej [4], [5] [14, pogl. 3–8]).

1.7 GEOMETRIJA IZGUBLJA SVOJO AVTONOMIJO

Bachmannov sistem aksiomov se zelo opira na elemente teorije grup, aksiomatska sistema Blumenthala in Birkhoffa pa na realna števila. Tega opiranja na znane in dobro razvite teorije je zmeraj več in njegov rezultat je vložitev klasične geometrije v bolj splošen kontekst. Tako je v primeru Blumenthalovih dognanj širši kontekst teorija metričnih prostorov. Najbolj popularen primer pa je linearna algebra — vektorski prostor. Ta pristop je propagiral J. Dieudonné z bojevito odločnostjo (glej [6]).

Samo število potrebnih aksiomov ne zagotavlja pogosto reklamirane enostavnosti razvoja tega zadnjega sistema. Po drugi strani pa spremljajo ta razvoj različne matematične prednosti (zamenjava $\mathbb{R}$ z drugim obsegom, ki ni nujno komutativen; možnost vpeljave katerekoli dimenzije $n \in \mathbb{N}$; razširitev na druge geometrije z modifikacijo nekaterih aksiomov).

Zaključimo ta razdelek s pregledom omenjenih aksiomatskih sistemov in njihovih avtorjev.

klasičen pristop	delne geometrije	privzeta $\mathbb{R}$	vložitev v širši okvir
Evklid Hilbert	Lingenberg Bachmann	Blumenthal Birkhoff	Dieudonné

1.8 SISTEMI AKSIOMOV ZA GEOMETRIJO – IGRIŠČE ZA GEOMETRIJCE IN TISTE, KI BI TO LAHKO BILI

Težko je prešteti možnosti in navesti imena.

1.8.1 Predelava in modifikacije

Dobro poznane sisteme aksiomov, kot je Hilbertov, lahko predelamo na mnogo načinov in posamezne aksiome lahko nadomestimo z ekvivalentnimi. S tem se je veliko ukvarjal R. Baldus. Naslednji nedavni primer je napravil E. Sperner s svojimi študenti; poudarimo H. Karzela. Ti geometrijci so se ukvarjali s konceptom urejenosti (med drugim) na zelo učinkovit način. Poglejmo delni spisek imen:

J. Diller, A. Kirsch, W. Klingenberg, H. Lenz, H. Meschkowski, H. Karzel, G. Pickert, E. Schröder, K. Spallek, E. Sperner, ..., A. D. Aleksandrov, A. V. Pogorelov, B. Kerekjarto,..., G. Choquet, A. Delessert, G. Papy,...

Nekateri prispevki teh avtorjev so didaktične narave. Poskušali so prilagoditi različne sisteme aksiomov za rabo v šoli. Kaže, da ima vsak ugleden geometrijec svoj lastni sistem aksiomov, na katerega prisega. Brez vsaj enega ni nihče!

1.8.2 Drugi pristopi

Še beseda o raziskovalcih, ki se niso posvetili le izboljšavam, spremembam, predelavi dobro poznanih sistemov aksiomov. J. V. Neumann je vložil klasično evklidsko geometrijo (nad projektivno geometrijo) v teorijo mrež. A. Tarski, W. Szmielew, L. Dubikaitis, W. Schwabhäuser, M. Moszynska in drugi so naredili evklidsko geometrijo kot komponento matematične logike. P. Lorenzen je razvil geometrijo v konstruktivističnem duhu. V njegovem pristopu je primer ustreznega vprašanja: Katera orodja potrebujemo, da izdelamo ravnino?

1.8.3 Vprašanje osnovnega sistema

Ubogi učitelj je na meji skrajne zmede zaradi pritiskajočega in kaotičnega množtva sistemov. Le kaj naj izbere? Izbira in stiska gresta z roko v roki! Ni matematičnih razlogov za izbiro enega od mnogih sistemov kot najbolj sprejemljivega, kot čudež, ki ga imamo pod odejo. Vse te poti vodijo v geometrijo, nobena pa ni kraljevska. Moje, za mnoge nesprejemljivo mnenje je, da bi se moral vsak bodoči učitelj naučiti vse do podrobnosti o enem od takšnih sistemov na univerzi in bi ga moral imeti kot Sistem, kot svoj sistem.

Ker pa noben sistem aksiomov ne bo nikoli takšen sistem, ki bi ga poučevali na vseh univerzah, se moramo potolažiti s Cantorjevim znanim rekom: „Bistvo matematike je njena svoboda." Ena značilnost te svobode je obilje aksiomatskih sistemov naše geometrije.

Te svobode se moramo vsi zavedati.

1.9. ZMAGA IN OMEJITVE FORMALIZMA

1.9.1 Zmaga

Vodeni s platonističnimi mislimi so matematiki izdelali drugačne aksiomatske sisteme od tistih, ki so poudarjali klasično evklidsko geometrijo, in razvili pripadajoče teorije. Nekateri sistemi in teorije vsebujejo projektivno geometrijo, sferično geometrijo, inverzijsko geometrijo, geometrijo Minkowskega in posamezne delne geometrije.

Uporaba aksiomov, ki jih ne sugerira izkušnja, oznanja zmago formalizma. Rezultati tega razvoja so hiperbolična geometrija, ne-Desargueove geometrije, ne-Arhimedove geometrije in nazadnje končne geometrije. Sedaj imamo geometrije, v katerih je število vzporednic k dani premici skozi dano točko, ki ni na tej premici, samo ena, natanko 225, nič ali neskončno. Vse to je vprašanje individualnega okusa. Aksiome lahko izbiramo po želji. Vsi so proste kreacije človekovega duha. Geometrija je reducirana na igro in vsak igra svojo geometrijsko igro.

1.9. Dobljeno izgubljeno

Prvi in najvišji cilj formalistov je bil ustvariti kompleten aksiomatski opis raznih področij. Vsaka trditev, ki pripada takšnemu področju, bi bila predvidoma določljiva znotraj sistema. Toda leta 1931 je izšel revolucionaren članek K. Gödela, v katerem je dokazal nepopolnost „dovolj bogatih" in konsistentnih aksiomatskih sistemov. „Če je aritmetika konsistentna, potem je nepopolna," je bil eden takšnih Gödelovih šokantnih zaključkov. To pomeni, da vsi takšni sistemi vsebujejo nedoločljive trditve in je zato glavni cilj formalistov – popolna aksiomatizacija vseh področij matematike – v principu nemogoče doseči. To je omejitev za vse matematične teorije.

Drugi ključni cilj formalistov je bil potrditi konsistenco aksiomatskih sistemov brez izdelave modelov za te sisteme, toda z logičnimi dokazi, ki temeljijo na ustreznih aksiomih (glej 1.3.3). Čutili so, da je eksistenca stvar prepričanja, prepričanje pa ni sprejemljiv dokazovalni način. Tu je zopet Gödel zrušil ekstremne formaliste z dokazom, da sintaktična konsistenca „dovolj bogatega" sistema aksiomov ne more biti izpeljana znotraj sistema. Takšen dokaz pripada višjemu (metamatematičnemu) sistemu. „Če je aritmetika konsistentna, potem njena konsistenca ne more biti potrjena z matematičnimi argumenti, ki slonijo na formalizmu aritmetike." To omejuje obseg aksiomatskih metod. Kljub svojim zaslugam aksiomatika ni zmožna narediti vsega, kar so od nje pričakovali ali še pričakujejo. „Še" pomeni danes, več kot petdeset let po Gödelovih odkritjih.

1.9.3 Pravkar nastala dognanja

Bistvene spremembe so nastale v filozofskih osnovah matematike v splošnem in konkretno tudi v geometriji. Na prvem mestu se moramo napotiti k pionirskemu delu K. Paperja v epistemologiji. Pogledi na pomen in metode dokaza so prav tako deležni radikalnih sprememb. Tako Imre Lakatos v svoji knjigi *Proofs and refutations* vidi matematiko kot pomanjkljivo

in zanesljivo ne brez dvomov. Verjame, da se matematika kakor druga področja znanosti, razvija skozi kritiko in izboljšavo teorij, ki niso nikoli v celoti brez dvoumnosti, ali zavarovane proti zmotam in napakam. To so resnično skrajno presenetljivi pogledi! *Morali bi jih upoštevati, ko razmišljamo o osnovnih aksiomatskih sistemih geometrije za uporabo v šolah.*

1.10 KAJ PA ERLANGENSKI PROGRAM?

Avtorja obvezuje bavarsko poreklo, da omeni erlangenski program.

1.10.1 Geometrije kot teorije o invariantah grup in preslikav

Konstruktivistične raziskave Lorenzena, ki smo ga omenili v razdelku 1.8, ne moremo stlačiti v okvir formalizma. Še manj tako imenovani „erlangenski program" iz leta 1872. Ta program nima absolutno nobenega opravka z aksiomatiko. Deklarirani in načrtno izraženi cilj avtorja F. Kleina je bil grupno-teoretična klasifikacija geometrij. Klein je cenil intuicijo bolj kot aksiomatiko. S Kleinovimi besedami: „Namesto da trošimo geometriji namenjen čas, da bi razvili njeno živo vizualno zmožnost, ga uporabljamo za obvladovanje mrtvega formalizma ali spretnih trikov brez principov." Ali ni to resnica naših dni?

1.10.2 Nekateri detajli erlangenskega programa

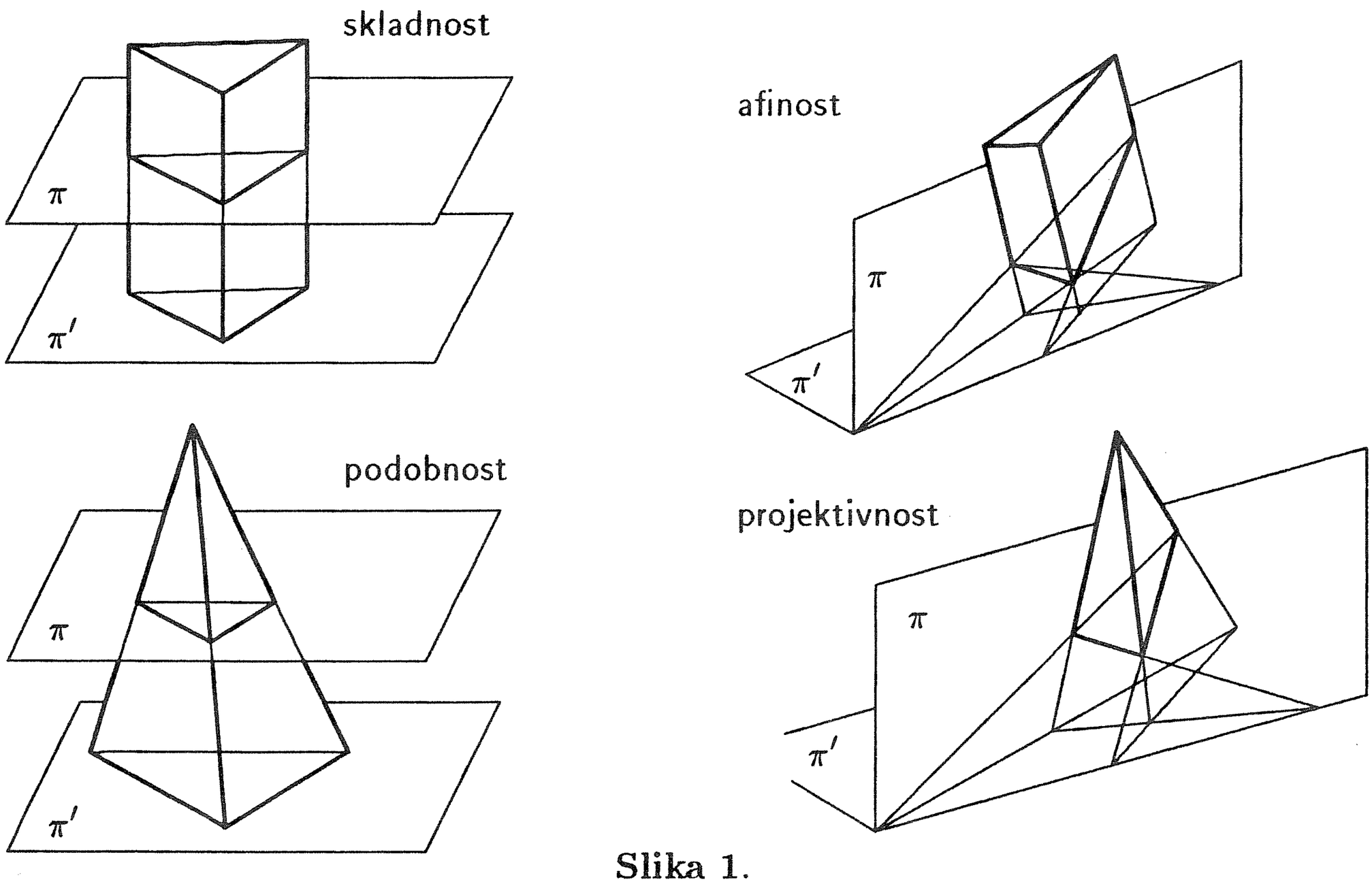
V nekem smislu predstavlja „erlangenski program" postopen razvoj. Klein je osnoval naslednje vgnezdeno zaporedje transformacijskih grup: grupe kongruenc, podobnosti (transformacije, ki ohranjajo obliko), afinosti in projektivnosti (sem sodi tudi grupa topoloških transformacij). Kakor grupe v zaporedju naraščajo po „velikosti", pa se pripadajoče geometrije ožijo v smislu upadanja števila invariant. Naslednja razpredelnica ilustrira značilnosti tega zaporedja.

	skladnostna geometrija	podobnostna geometrija	afina geometrija	projektivna geometrija
dolžina	×			
ploščina	×			
mera kota	×	×		
paralelnost	×	×	×	
dvorazmerje	×	×	×	×

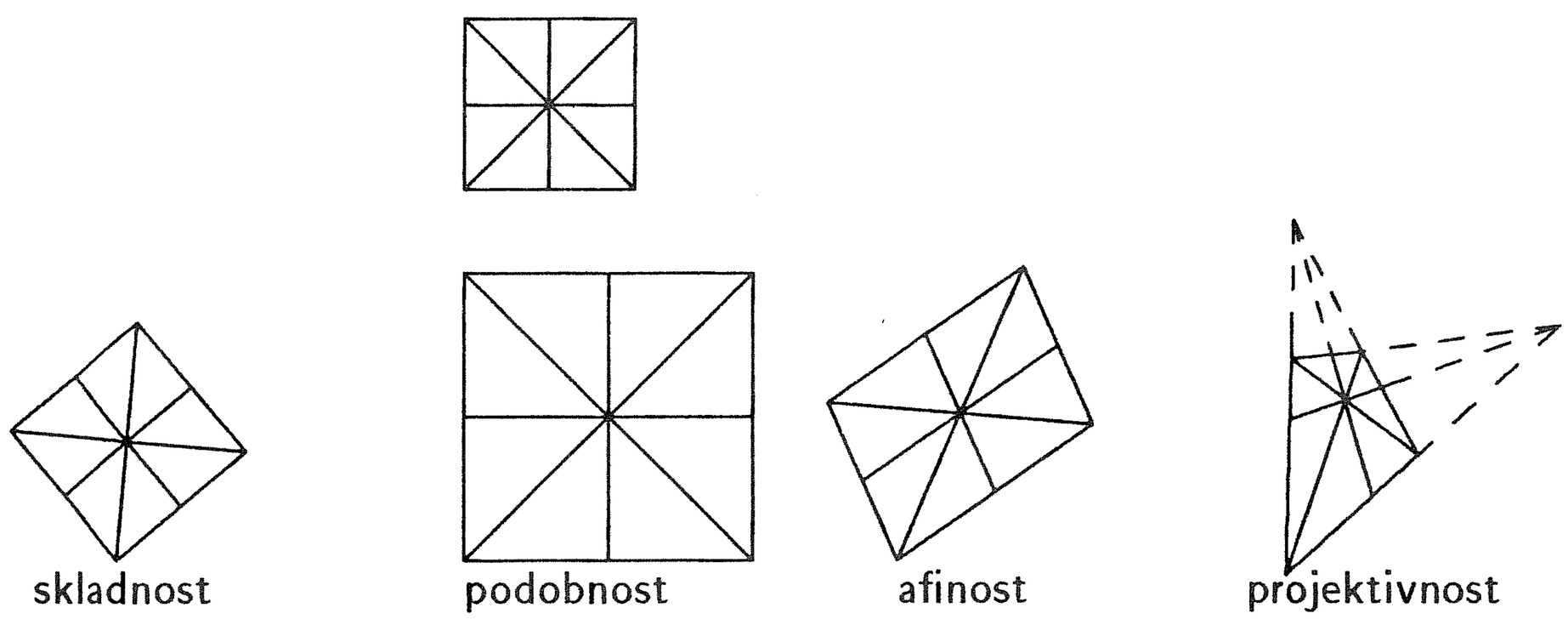
Grupa projektivnih preslikav (ravnine) da vse (ravninske) kolinearnosti. Zato Cayleyjev slavni izrek: „Projektivna geometrija je vsa geometrija."

1.10.3 Vizualizacije

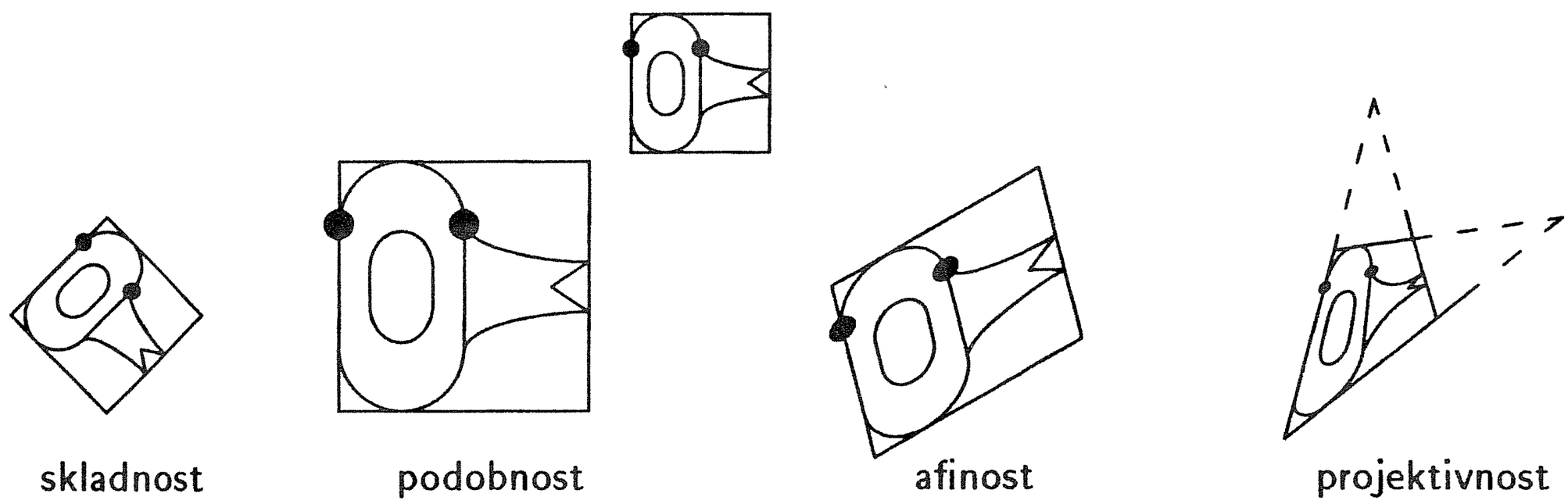
Slika 1, brez podrobnega komentarja, ilustrira, kako nastanejo prej navedene štiri geometrije. Projekcija treh točk v prostoru na dve ravnini nam vedno da dva trikotnika, povezana zaporedoma, s premikom, središčnim raztegom, vzporedno projekcijo in središčno projekcijo. Te posebne preslikave lahko uporabimo za izgradnjo štirih prej omenjenih grup transformacij.



Slika 1.



Slika 2. Kaže zaporedno, skladno, podobno, afino sliko kvadrata in sliko kvadrata v projekciji (vključno z diagonalama in srednjicama stranic).



Slika 3.

1.11. OSNOVE GEOMETRIJE KOT ŠTUDIJSKI CILJI NA UNIVERZI

Uvodna opomba. Avtorju je domača situacija na nemških univerzah in domneva, da je ta podobna, simptomatična za katerokoli univerzo. Če ne upoštevamo topologije in diferencialne geometrije, je na nemških univerzah zelo malo časa namenjenega geometriji in še manj njenim osnovam. Včasih se omenja geometrija pri predavanjih ali pri vajah iz linearne algebre. V zadnjem času postaja celo to tabu. Občasno se morda nekaj ur predavanj ukvarjajo z Lingenbergovo postopno izgradnjo geometrije. Toda cilj teh ur je pokazati tesno povezavo med izreki o zaprtju in algebraičnimi strukturami, ne pa razvijati klasično evklidsko geometrijo. Ker je to tako, se vse konča že pri Pappusovem izreku. V bistvu in naravnost povedano je status geometrije in osnov geometrije na nemških univerzah obžalovanja vreden in kaže, da bo v prihodnosti še slabše.

LITERATURA

[1] E. Artin, *Geometric algebra*, New York, 1957.

[2] R. Artzy, *Linear geometry*, Reading, 1965.

[3] F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin, 1973.

[4] G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor*, Annals of mathematics **33** (1932) 329 ff.

[5] G. D. Birkhoff and R. Beatley, *Basic geometry*, New York, 1959.

[6] L. M. Blumenthal, *A modern view of geometry*, Freeman, 1961.

[7] P. J. Davis and R. Hersh, *The mathematical experience*, Birkh-user, 1981.

[8] J. Dieudonné, *Linear algebra and geometry*, Houghton Mifflin, 1969.

[9] G. Ewald, *Geometry: an introduction*, Belmint, 1971.

[10] B. Grünbaum, *Shouldn't we teach geometry?* Proceedings of the 4th ICME Boston, 1983 165–167.

[11] T. L. Heath, *The thirteen books of Euklid's elements*, Cambridge, 1908.

[12] D. Hilbert, *Fundations of geometry*, Open Court, 1971.

[13] I. Lakatos, *Proofs and refutations*, Cambridge, 1976.

[14] E. E. Moise, *Elementary geometry from an advanced standpoint*, Addison-Wesley, 1963.

[15] R. Ossermann, *The fall and rise of geometry*, Proceedings of the 4th ICME Boston, 1983 167–171.

[16] T. Tymoczko, *New directions in the philosophy of mathematics*, Birkhauser, 1986.

[17] M. Toepell, *On the origins of Hilbert's „Fundations of geometry"*. Archive for history of exact sciences **36** (1986) 329–344.

[18] B. L. van der Waerden, *Science awakening*, Noordhoff, 1954.

[19] I. M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*, Berlin, 1979.

Prevedla *Silva Kmetič*

VESTI

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1992*

Pedagoška fakulteta — Maribor

1. stopnja

Matematika in fizika

428. Fošnarič Karmen
429. Kovačič Renata
430. Ocepek Brigita
431. Potočnik Nadica
432. Rajh Jožica

Tehnična vzgoja in fizika

331. Bevc Blaž
332. Bezjak Jože
333. Bjegović Veljko
334. Časar Alenka
335. Dmitrovič Olga
336. Erlih Katica
337. Furman Jelka
338. Hamler Anica
339. Jandrašič Bogdan
340. Juder Andrej
341. Novak Andreja
342. Polutnik Anton
343. Rajnar Stanka
344. Rožman Ivan
345. Solarič Ladislav
346. Šteger Ljudmila
347. Vaupotič Bogomir
348. Vodopivec Valerija

2. stopnja

Matematika — fizika

2. Hauptman Nataša	Pouk matematike v 4. letniku gimnazije
3. Jug Albina	Elektrokardiografija
4. Kosi Irena	Simulacija prenosa živčnega impulza s pomočjo eksperimentalnega modela vezja RC členov
5. Kostanjevec Monika	Različni dokazi problemov s trikotniki
6. Kranjec Gyongyike	Urejanje s kopicami
7. Krivec Mojca	Grafi intervalov in popolni grafi
8. Lipovec Alenka	Kompaktnost in kompaktifikacije
9. Šavora Simona	Metrizabilnost topoloških prostorov

Proizv. teh. vzgoja — fizika

1. Čeplak Tomaž	Strategije vzgojno izobraževalnih procesov v primerjavi z metodo štirih stopenj
2. Fošnarič Samo	Zvrsti vzgojno izobraževalnega dela v funkciji strategij, s poudarkom na projektni nalogi
3. Gril Franc	Zvrsti vzgojno izobraževalnega dela v funkciji strategij, s poudarkom na konstrukcijski nalogi
4. Zafošnik Tatjana	Meritve elastičnih deformacij v jeklu z rentgensko strukturno analizo

Pedagoška fakulteta — Ljubljana

2. stopnja

Fizika — tehnika

1. Djordjevič Aleksander	Računalniška regulacija frekvence elektromotorja

* Seznam diplomantov iz leta 1991 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **39** (1992) 3.

Fizika — kemija

1. Mati Danica — Naravoslovno berilo za učitelje razrednega pouka

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika s fiziko — pedagoška smer

141. Borovnik Marko
142. Colnerič Monika

Matematika — uporabna smer

238. Osterc Helena
239. Belc Jasna
240. Vrčon Erik
241. Geršak Darja
242. Ferjančič Helena
243. Košir Barbara
244. Mlakar Igor
245. Pivk Katarina
246. Trpin Miha
247. Ivšek Igor

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

464. Kavka Dušan — Nevtralna geometrija
465. Hernaus Tatjana — Linearno dušena nihanja
466. Paternost Helena — Izonemalne tkanine

Matematika — uporabna smer

422. Šajna Mateja — Generični rang matrike
423. Črnugelj Aleksander — Odnosi med nizi
424. Bubnič Marija — Karakterizacija evklidskih prostorov
425. Planinc Nataša — Geometrično programiranje
426. Indihar Mojca — Delitveni algoritmi
427. Čakš Ivan — Zlepki v aproksimativnih nalogah
428. Žefran Miloš — Postopek vlaganja grafov v ravnino z uvrščanjem v leve in desne sklade
429. Marinček Jože — Vložitve grafa v torus
430. Močivnik Primož — β-zlepki
431. Enci Matej — Teorija gnetenja
432. Žitnik Arjana — Risanje grafov na ploskve
433. Klobučar Tomaž — Bernsteinovi polinomi
434. Govekar Manica — Vzporedni sortirni algoritmi
435. Zaletel Marjeta — Pregled večkoračnih metod za numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb
436. Šenk Matija — Vodljivost in opazljivost linearnih sistemov ter povezava z geometrijo krivulj v $\mathbb{R}^n$
437. Lešnjak Branka — Polgrupe linearnih operatorjev
438. Jakončič Faganel Janja — Elastična večplastna posoda
439. Mićović Jelena — Mathematica kot orodje pri obdelavi eksperimentalnih podatkov
440. Kastelic Matejka — Konveksne vložitve grafov v torus

Matematika — teoretična smer

27.	Cigler Gregor	Linearno rekurzivna zaporedja
28.	Željko Matjaž	Eksotični faktorji prostora $\mathbb{R}^4$
29.	Strle Sašo	Poincaréjeva homološka sfera

Fizika — pedagoška smer

125.	Jejčič Sonja	Potek sija pomračitvene spremenljivke
126.	Jerič Franci	Merilnik statičnega električnega polja z elektrometrsko cevjo in ploščatim kondentzatorjem
127.	Hubat Edvard	Prikaz sil v rotirajočem sistemu
128.	Tratnik Miran	Prikaz sipanja delcev alfa z uporabo detektorja sledi
129.	Perger Maruša	Nastanek padavin
130.	Arko Marta	Toplota in temperatura pri pouku fizike v osnovni šoli
131.	Kitak Sonja	Lom svetlobe v ribjem očesu

Fizika — tehnična smer

543.	Peterlin Primož	Oblike fosfolipidnih vesiklov v zunanjem električnem polju
544.	Košir Aleš	Stefanova naloga kot model kontinuiranega ulivanja
545.	Lopert Maja	Rentgenska fluorescentna analiza ob vzbujanju z radioaktivnim izvirom gama
546.	Jaklič Janez	Hubbardov model v periodičnem magnetnem polju
547.	Orešič Matej	Model kvazi-enodimenzionalnega protonskega stekla
548.	Rihtar Janez	Mikroskopska preslikava z jedrsko magnetno resonanco
549.	Dolinar Peter	Študij feroelastičnih domen in optične dvolomnosti v kristalih
550.	Ziherl Primož	Fazni diagram nematske plasti v zunanjem polju
551.	Podobnik Boštjan	Fototermalna detekcija optičnih absorpcijskih spektrov v trdi snovi
552.	Žontar Dejan	Študij primernosti spektrometra CPLEAR za meritev redkega razpada $K_s \to e^+e^-$
553.	Mrdžen Tomo	Raziskava potencialne bariere stika Ag/Si izvedenega po metodi depozicije s curkom ioniziranih skupkov
554.	Bavdek Uroš	Merjenje magnetnih karakteristik trajnih radialno usmerjenih valjastih magnetov
555.	Podpečan Andrej	Kvantitativno mikroslikanje z jedrsko magnetno resonanco
556.	Lukač Renato	Ravnovesje nematične strukture v tekoče-kristalni celici
557.	Mertelj Alenka	Piroelektrični pojav v $La_{2-x}Sr_xCuO_4$
558.	Merzel Franci	Uporaba polarnih tenzorjev pri analizi porazdelitve nabojev v molekuli
559.	Sraka Robert	Račun polarizabilnosti nukleona v linearnem sigma modelu s tremi kvarki
560.	Rovšek Barbara	Vpliv končnih dimenzij vzorca na odziv feroelektričnih tekočih kristalov na zunanje električno polje
561.	Bajc Jurij	Fleksoelektričnost v nematični kapljici in cilindrični kapilari
562.	Babič Dušan	Magnetna levitacija in Millikanov poskus
563.	Arčon Denis	^{13}C NMR v C_{60}

564. Rajšek Miroslav — Model Stirlingovega hladilnika z ločenim pretiskalnim batom

Fizika — meteorološka smer

565. Gerjevič Marjeta — Analiza zadnjih spomladanskih in prvih jesenskih negativnih temperatur zraka v Sloveniji
566. Nadrag Mateja — Tipizacija vremena za potrebe optimalne interpolacije

3. stopnja

Matematika — izobraževalna smer

3. Fric Marija — Razvoj pojma števila
4. Cotič Mara — Pouk geometrije v srednji šoli

Matematika – raziskovalna smer

58. Hvala Bojan — Dobro omejeni operatorji
59. Turnšek Aleksej — Popolnoma pozitivne preslikave

Fizika — tehnična smer

118. Filipčič Andrej — Analiza reakcije $p\bar{p} \rightarrow K \pm \pi \pm K_s$ pri eksperimentu CPLEAR
119. Živko Tomi — Meritev parcialne širine za razpad β_ι v dva fotona
120. Gyergyek Tomaž — Eksperimentalna raziskava nestabilnosti ob pozitivni elektrodi v plazmi
121. Zidanšek Aleksander — Modeliranje raztapljanja krvnih strdkov
122. Fajdiga Andrea Maja — Študij vpliva termičnih fluktuacij na obliko spektralne črte v bližini faznega prehoda v inkomenzurabilno fazo v K_2SeO_4 in Rb_2ZnCl_4 z magnetno resonanco
123. Kopač Samo — Laserska mikrolitografija
124. Abramič Darija — Študij feroelektričnega tekočega kristala v polimeriziranem gelu z metodami jedrske magnetne resonance
125. Muhleisen Artur — Meritev sevalnega Augerjevega prispevka pri ionizaciji lupine K v elementih Ca, Ti in Cr z 0,7–1,5 MeV protoni
126. Prošek Andrej — Uporaba realistične metodologije za preračun velike izlivne nezgode v jedrski elektrarni
127. Parzer Iztok — Neravnotežni procesi med izlivnimi nezgodami v jedrski elektrarni
128. Kožuh Mitja — Verjetnostne varnostne analize v jedrski elektrarni — optimizacija razpoložljivosti sistema instrumentarnega zraka

Doktorati

Fizika

123. Kos Miha — Meritve transporta z NMR v šibkem magnetnem polju

Dragi profesorji matematike!

Mnogi se pritožujete, da je novi način točkovanja za napredovanje v velecenjene nazive nedodelan. Tako ima učitelj matematike ogromno težav, da nabere primerno število točk za povišanje med svetníke. Teh težav pri nekaterih strokah ni, saj so vedno na voljo najrazličnejša tekmovanja, pri organizaciji katerih lahko veselo nabiramo točke. Zato vam predlagamo preprosto, elegantno in dobro pretehtano rešitev. Organizirajte šolsko tekmovanje iz:
- hitrega računanja,
- natančnega računanja,
- prostoročnega risanja funkcij,
- risanja funkcij v višino in daljino,
- spretnosti na krogih in na trapezu,
- poznavanja zgodovine celih števil na Slovenskem —

in dobili boste dovolj točk.

Seveda lahko nastopijo problemi. Ta tekmovanja bodo zadoščala za točke enega, morda dveh ali treh profesorjev matematike na šoli. Kaj pa, če vas je več? Preden se stepete za organizacijo, naj vam namignemo pot iz zagate. Gornja shema namreč dopušča čudovite možnosti nadgradnje, kot na primer šolsko tekmovanje iz:
- hitrega približnega računanja za dijake,
- lepega risanja funkcij za dijakinje,
- poznavanja zgodovine praštevil na Gorenjskem v 17. stoletju.

Če to še ne bo dovolj, da postanete sam vrhovni svetnik, pa še namig, da ni nujno, da je to ravno šolsko tekmovanje — zakaj ga ne bi izvedli za vsak letnik posebej in še ločeno po krajevnih skupnostih učencev.

Slavko ex Machina

OBVESTILO

MAGISTRSKI IN SPECIALISTIČNI ŠTUDIJ ZA UČITELJE MATEMATIKE

V šolskem letu 1993/94 bomo pričeli z novim ciklom predavanj magistrskega študija matematike – izobraževalna smer. Obenem bomo začeli izvajati tudi nekoliko krajši program specializacije za učitelje matematike na srednjih in osnovnih šolah. Vpis na podiplomski študij bo septembra 1993, pogoj za vpis je diploma iz matematike. Predavanja in seminarji bodo raztegnjeni na tri leta.

Za dodatna pojasnila se obrnite na naslov Oddelek za matematiko in mehaniko, FNT, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, pp. 64, tel. (061) 265-061, kjer dobite tudi obrazce za prijavo.

Vodja podiplomskega študija
Milan Hladnik