IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

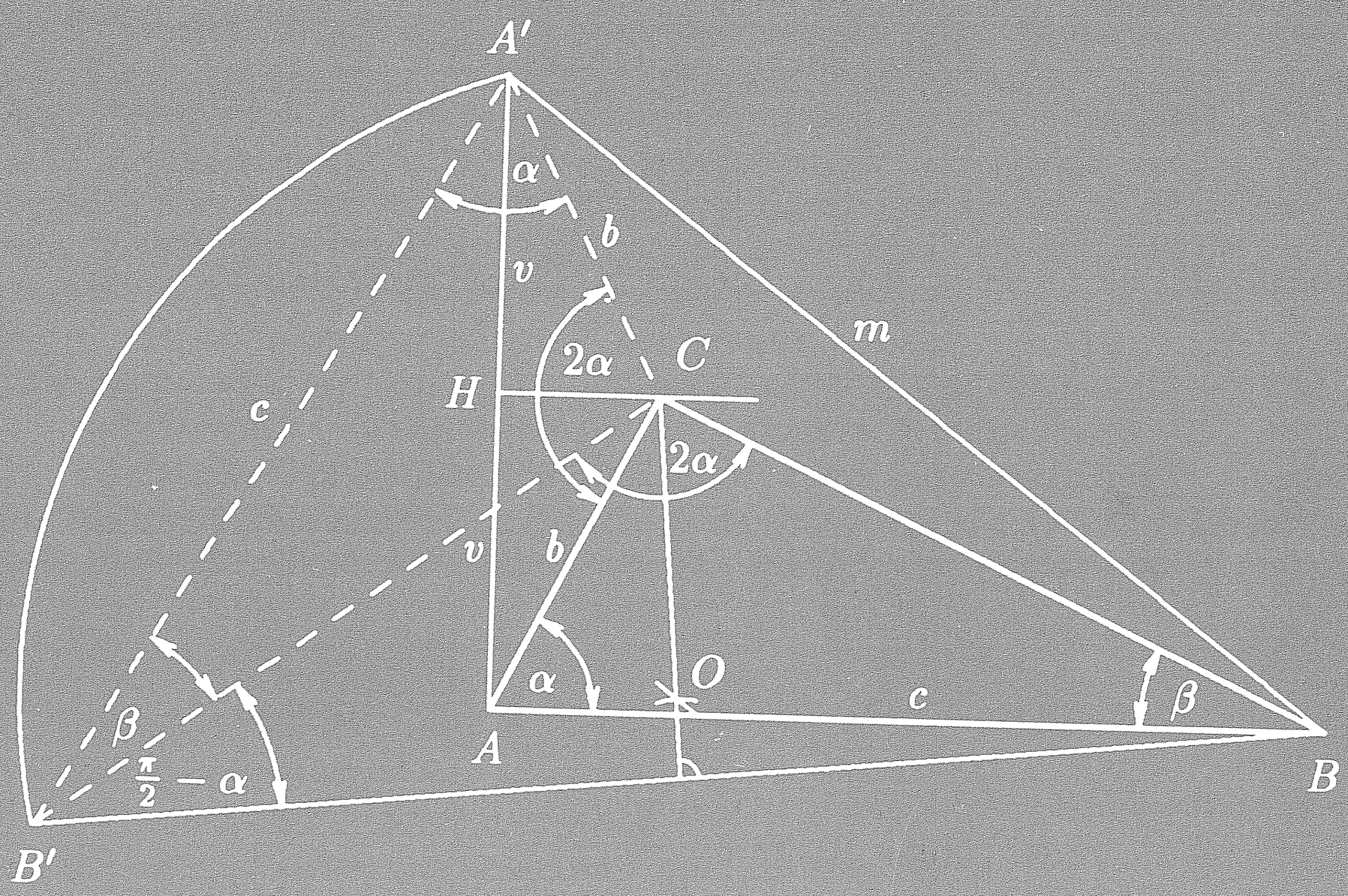
ISSN 0473-7446

CENTRALNA EKONOMSKA
KNJIŽNICA Ljubljana

2-ODPISANO
OBDELANO
LJUBLJANA

1992
Letnik 39
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1992

letnik 39, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 800.– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 1600.– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka za člane 150.– SIT, dvojna številka 300.– SIT, stare številke 80.– SIT.

Tisk: KURIR print d.o.o. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1992 DMFA Slovenije – 1134 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Algebre z absolutno vrednostjo — Absolute valued algebras (Borut Zalar) 161–166

Numerično reševanje diferencialnih enačb II. Linearne veččlenske metode — Numerical solution of differential equations II. Linear multistep methods (Bojan Orel) 167–177

Senca — The shadow (Marijan Prosén) 178

Igre narave 6. Pri sintezi ogljika iz helija pomaga resonanca — Some tricks of nature 6. The synthesis of carbon from helium is helped by resonances (Mitja Rosina) 179–180

Nove knjige — New books (Janez Strnad) 183–184

Vesti — News

Seminar iz fizike *Ionizirajoče sevanje v okolju* — Vabilo (P. Križan in F. Cvelbar) 166

Podiplomski študij fizike v ZDA (Mičo Mrkaič) 181–183

Stoletnica Močnikove smrti (Milan Hladnik) 185–187

Iz mojega življenja in dela (Josip Plemelj) 188–192

Letno kazalo 192–IV

Na ovitku: Plemljeva rešitev naloge o konstrukciji trikotnika, če je dana ena stranica, višina nanjo in razlika kotov ob njej (glej prispevek na str. 188)

ALGEBRE Z ABSOLUTNO VREDNOSTJO

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991) 17A80

V članku je opisana teorija algeber z absolutno vrednostjo in podan pregled pomembnejših rezultatov in nerešenih problemov. Dokazi nekaj lažjih trditev služijo za ilustracijo tehnik, ki se v tej teoriji uporabljajo.

ABSOLUTE VALUED ALGEBRAS

In this paper we describe the most important results and open problems in the theory of absolute valued algebras. We also present proofs of some simple propositions to serve as an illustration of tehniques used in this theory.

1. Uvod

V obsegu realnih ali kompleksnih števil je pojem absolutne vrednosti že dolgo nepogrešljiv v moderni matematiki. Topološka posplošitev tega pojma je tudi dobro znana: to so metrični prostori oziroma prostori, v katerih je definirana razdalja. Širši matematični javnosti pa so najbrž manj znani rezultati v zvezi z algebraično posplošitvijo absolutne vrednosti.

Z algebrajskega stališča je najpomembnejša lastnost absolutne vrednosti nedvomno *multiplikativnost*, to je veljavnost relacije $|xy| = |x||y|$ za poljubni kompleksni števili x in y. Zato naredimo naslednjo definicijo:

Naj bo $\mathcal{A}$ (neasociativna) algebra nad obsegom realnih števil (lahko tudi neskončno dimenzionalna). Naj bo $|\,.\,| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ preslikava, ki zadošča aksiomu $|xy| = |x|\,|y|$ za poljubna elementa $x, y \in \mathcal{A}$ in je hkrati norma na vektorskem prostoru $\mathcal{A}$. Tedaj bomo $\mathcal{A}$ imenovali *algebra z absolutno vrednostjo.*

V tem članku se bomo omejili zgolj na tiste algebre z absolutno vrednostjo, ki imajo skalarni produkt $\langle\ ,\ \rangle$ in je potem $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. To bo zelo poenostavilo dokaze, ki postanejo popolnoma elementarni in, upam, zanimivi za čimveč naših matematikov. Spomnimo se, da je skalarni produkt preslikava $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ z lastnostmi

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ za $x, y \in \mathcal{A}$,
(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ za $x, y, z \in \mathcal{A}$,
(iii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ za $\lambda \in \mathbb{R}$ ter $x, y \in \mathcal{A}$,
(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ za $x \in \mathcal{A}$,
(v) $\langle x, x\rangle = 0$, če in samo če $x = 0$.

2. Zgledi

Danes še vedno ne poznamo vseh algeber z absolutno vrednostjo. Obstajajo zelo eksotični zgledi takih algeber. Naslednji zgled je star že 30 let. Odkrila sta ga Urbanik in Wright.

Naj bo $\mathcal{A}$ množica tistih neskončnih zaporedij realnih števil $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, za katere velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty .$$

Taka zaporedja tvorijo vektorski prostor, ki ga pogosto imenujejo l_2. Skalarni produkt uvedemo s predpisom

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n .$$

Ta vrsta vedno konvergira, zato je skalarni produkt dobro definiran. Naj bo $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ neka bijekcija. Z njo definiramo produkt v $\mathcal{A}$ s predpisom

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{\phi(n,m)} = a_n b_m .$$

Ta produkt je dobro definiran, ker je ϕ bijekcija. Na ta način postane $\mathcal{A}$ algebra z absolutno vrednostjo, ki pa je zelo daleč od asociativnosti.

Obstajajo tudi enostavnejši zgledi neasociativnih algeber z absolutno vrednostjo. Taka je na primer Caylejeva algebra oktonionov, o kateri smo pisali v članku [6]. Drugi zgled je ravnina $\mathbb{R}^2$ z množenjem

$$(\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, -\beta\gamma - \alpha\delta) ,$$

ki se samo za en minus razlikuje od množenja pri kompleksnih številih.

Naš namen v tem članku je ilustrirati metode, ki se uporabljajo pri preučevanju algeber z absolutno vrednostjo, in sicer tako, da bomo klasificirali tiste izmed njih, ki so asociativne.

3. Asociativne algebre z absolutno vrednostjo

Dokazali bomo naslednji

Izrek. *Naj bo $\mathcal{A}$ asociativna algebra z absolutno vrednostjo, ki je porojena iz skalarnega produkta. Tedaj je $\mathcal{A}$ izomorfna obsegu realnih števil, obsegu kompleksnih števil ali obsegu kvaternionov.*

Kar takoj pripomnimo, da je ta izrek mogoče dokazati tudi brez predpostavke, da je absolutna vrednost porojena iz skalarnega produkta, vendar je tedaj dokaz precej težji. Dokaz bomo izvedli v nekaj lemah.

Lema 1. *Denimo, da sta $a, b \in \mathcal{A}$ pravokotna enotska vektorja in da komutirata. Tedaj je $a^2 + b^2 = 0$.*

Dokaz. Ker sta a, b pravokotna, je po Pitagorovem izreku

$$|a + b|^2 = |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 2 .$$

Ker elementa a in b komutirata, je

$$4 = |a+b|^2|a-b|^2 = |(a+b)(a-b)|^2 = |a^2-b^2|^2 =$$
$$= |a^2|^2 + |b^2|^2 - 2\langle a^2, b^2\rangle = 2 - 2\langle a^2, b^2\rangle$$

oziroma

$$\langle a^2, b^2\rangle = -1\,.$$

Od tod dobimo

$$|a^2+b^2|^2 = |a^2|^2 + |b^2|^2 + 2\langle a^2, b^2\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Lema 2. *Naj bo $\mathcal{A}$ komutativna. Tedaj je $\mathcal{A}$ izomorfna $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Denimo, da je dimenzija $\mathcal{A}$ večja od 2. Tedaj bi obstajali trije medsebojno pravokotni enotski vektorji a, b, c. Po lemi 1 bi bilo $a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = 0$, od koder sledi $a^2 = b^2 = c^2 = 0$. Toda $|a^2| = |a|^2 = 1$, kar je v nasprotju s prejšnjo vrstico, zato je dimenzija algebre $\mathcal{A}$ bodisi 1 bodisi 2. Če je $\mathcal{A}$ enodimenzionalna, je izomorfna $\mathbb{R}$. Če je $\mathcal{A}$ dvodimenzionalna, pa ravnajmo takole:

Vzemimo $a \in \mathcal{A}$, ki ima normo 1. Definirajmo operator $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $\phi(x) = ax$. Ker je

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow \ ax \ = 0 \Leftrightarrow |a|\,|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

je ϕ injektiven. Ker je $\mathcal{A}$ končnodimenzionalna, je ϕ tudi surjektiven (spomnite se na linearno algebro). Zato obstaja element e, ki zadošča pogoju $\phi(e) = ae = ea = a$. Naj bo $y \in \mathcal{A}$ poljuben. Tedaj je

$$|ey - y| = |ey - y|\,|a| = |eay - ay| = |ay - ay| = 0$$

in zato je e enota algebre $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A}$ dvodimenzionalna, jo lahko zapišemo kot $\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}i$, kjer je i enotski vektor pravokoten na e. Po lemi 1 je $i^2 = -e^2 = -e$, torej je $\mathcal{A}$ izomorfna $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Lema 3. *Naj bosta $e, f \in \mathcal{A}$ neničelna in naj bo $e^2 = e$ ter $f^2 = f$. Če e in f komutirata, je $e = f$.*

Dokaz. Algebra $\{q(e,f)\,;\, q$ polinom dveh spremenljivk$\}$ je komutativna in vsebuje elementa e, f. Po lemi 2 jo je mogoče vložiti v obseg kompleksnih števil. Enačba $x^2 = x$ ima v kompleksnih številih samo dve rešitvi: $x = 0$ in $x = 1$. Ker sta e, f neničelna, je $e = f$. $\blacksquare$

Lema 4. *Naj bosta e, f neničelna in naj bo $e^2 = e$ ter $f^2 = f$. Tedaj e in f komutirata.*

Dokaz. Denimo, da e in f ne komutirata in označimo z $g = (e-f)^2$. Element g je neničeln, saj bi iz $g = 0$ sledilo $e = f$, kar pa je v nasprotju

s predpostavko, da e in f ne komutirata. Brez težav računsko preverimo, da g komutira z elementoma e in f. Zdaj si oglejmo podalgebro $\mathcal{A}(g) = \{p(g); p \text{ polinom}\}$, generirano z g. Če je ta algebra izomorfna $\mathbb{R}$, potem je $g^2 = \alpha g$ pri nekem neničelnem $\alpha \in \mathbb{R}$. To pomeni, da je element $\frac{1}{\alpha}g$ rešitev enačbe $x^2 = x$, ki komutira z e, f. Po lemi 3 je $e = \frac{1}{\alpha}g = f$, kar je nemogoče.

Ostane nam še možnost, ko je $\mathcal{A}(g)$ izomorfna $\mathbb{C}$. V tem primeru dobimo s pomočjo leme 2

$$\mathbb{C} = \mathcal{A}(g) \subset \mathcal{A}(e, g) \subset \mathbb{C},$$

kar pomeni, da je $e \in \mathcal{A}(g)$. Podobno je $f \in \mathcal{A}(g)$. Ker je $\mathcal{A}(g)$ komutativna, smo ponovno prišli do protislovja. ■

Lema 5. *Algebra $\mathcal{A}$ ima enoto.*

Dokaz. Vzemimo poljubna neničelna elementa $x, y \in \mathcal{A}$. Po lemi 2 imata algebri $\mathcal{A}(x)$ in $\mathcal{A}(y)$, generirani z elementoma x, y, enoto (ker sta izomorfni $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Torej obstajata elementa $e \in \mathcal{A}(x)$ ter $f \in \mathcal{A}(x)$, ki zadoščata enakostim $e^2 = e$, $f^2 = f$, $ex = xe = x$ ter $fy = yf = y$. Po lemi 4 in lemi 3 je $e = f$ in ta e je očitno enota v algebri $\mathcal{A}$, saj sta x in y poljubna. ■

Dokaz izreka. Po [5] je vsak realen normiran obseg izomorfen $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ali kvaternionom. Nam ostane torej še dokaz, da je $\mathcal{A}$ res obseg.

Naj bo e enota v $\mathcal{A}$. Naj bo $a \in \mathcal{A}$ poljuben neničeln element. Pišimo ga kot $a = \lambda e + x$, kjer je x pravokoten na enoto. Enota seveda komutira z vsakim elementom, zato lahko uporabimo lemo 1. Ta nam pove, da je $x^2 = -|x^2|e$. Torej je

$$a(\lambda e - x) = (\lambda^2 + |x|^2)e,$$

kar pomeni, da je element

$$\frac{1}{\lambda^2 + |x|^2}(\lambda e - x)$$

inverz k elementu a. Ker je bil a poljuben, ima vsak neničeln element svoj inverz, zato je $\mathcal{A}$ normiran obseg. ■

4. Drugi rezultati

V tem razdelku bomo podali pregled doslej znanih rezultatov o algebrah z absolutno vrednostjo, seveda brez dokazov. Naslednji zelo zanimivi rezultat o dimenziji teh algeber sta dokazala Bott in Milnor.

Algebra z absolutno vrednostjo ima lahko samo dimenzije 1, 2, 4, 8 ali ∞.

Pripomnimo, da obstajajo dvodimenzionalne algebre z absolutno vrednostjo, ki niso izomorfne $\mathbb{C}$. En tak zgled je v drugem razdelku. Seveda obstajajo štiri in osemdimenzionalne algebre z absolutno vrednostjo, ki niso

izomorfne obsegu kvaternionov oziroma oktonionov. Že Urbaniku in Wrightu [4] je uspelo določiti tiste algebre z absolutno vrednostjo, ki imajo enoto. Zelo malo jih je.

Algebra z absolutno vrednostjo, ki ima enoto, je izomorfna bodisi obsegu realnih števil, obsegu kompleksnih števil, kvaternionom ali oktonionom.

Te štiri algebre bomo v nadaljevanju imenovali klasične. Zanimivo je, da sta pred nedavnim Cuenca [1] in Rodriguez [3] neodvisno drug od drugega odkrila primere neklasičnih algeber z absolutno vrednostjo, ki imajo levo enoto (ki pa ni tudi desna enota) in so neskončno dimenzionalne. Prejšnji rezultat pa je mogoče tudi bolj algebraično formulirati.

Algebra z absolutno vrednostjo, ki je potenčno asociativna (in je torej v nekem smislu blizu asociativnosti), ima vedno enoto in je torej izomofna eni izmed klasičnih algeber.

Pripomnimo, da se algebra imenuje potenčno asociativna, če je vsaka njena podalgebra, generirana z enim elementom, asociativna. Podoben rezultat je uspelo dokazati El-Mallahu in Micaliju [2].

Vsaka algebra z absolutno vrednostjo, ki zadošča identiteti $(xy)x = x(yx)$ (takim algebram rečemo fleksibilne), je končnodimenzionalna in je izotopna (ne izomorfna!) eni izmed klasičnih algeber.

Izotopija je trojica bijektivnih preslikav (α, β, γ), ki zadoščajo identiteti $\alpha(xy) = \beta(x)\gamma(y)$. Vsak izomorfizem α očitno generira izotopijo (α, α, α). Urbanik in El-Mallah sta raziskovala, v katerih algebrah z absolutno vrednostjo je mogoče definirati involucijo, in dobila naslednje rezultate:

Če ima algebra z absolutno vrednostjo involucijo, potem je absolutna vrednost porojena iz skalarnega produkta. Obstaja idempotent e, ki je simetričen in komutira z vsemi drugimi elementi.

Če ima algebra z absolutno vrednostjo idempotent, ki komutira z vsemi elementi, potem je v tej algebri mogoče definirati involucijo.

Za konec pa še nekaj nerešenih problemov.

Ali obstaja neklasična algebra z absolutno vrednostjo, ki ima klasično podalgebro z dimenzijo 4?

Pripomnimo, da je pri ekvivalentnem problemu pri dimenziji 2 odgovor pozitiven.

Ali je možno klasificirati vse končnodimenzionalne (obvezno dimenzij 1, 2, 4 ali 8) algebre z absolutno vrednostjo?

Najtežji nerešen problem je najbrž naslednji:

Vse dosedaj znane algebre z absolutno vrednostjo imajo absolutno vrednost, porojeno iz skalarnega produkta. Ali sploh obstaja kaka algebra z absolutno vrednostjo, ki nima skalarnega produkta?

LITERATURA

[1] J. A. Cuenca, *One-sided division infinite-dimensional normed real algebras*, Publ. Math., v tisku.

[2] M. L. El-Mallah in A. Micali, *Sur les dimensions des algebres absolument valuées*, J. Algebra **68** (1981) 237–246.
[3] A. Rodriguez, *One-sided division absolute valued algebras*, Publ. Math., v tisku.
[4] K. Urbanik in F. B. Wright, *Absolute valued algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960) 861–866.
[5] I. Vidav, *Banachove algebre*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1988.
[6] B. Zalar, *O oktonionih*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992) 79–84.

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, prireja ob sodelovanju oddelka za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Inštituta J. Štefan ter ob pomoči Zavoda republike Slovenije za šolstvo in šport

SEMINAR IZ FIZIKE
IONIZIRAJOČE SEVANJE V OKOLJU

19. in 20. februarja 1993

v veliki fizikalni predavalnici na Jadranski 26 v Ljubljani

Seminar je namenjen strokovnemu izpopolnjevanju učiteljev fizike, matematike in astronomije v srednjih in osnovnih šolah. Vabljeni so tudi drugi člani društva.

Petek, 19. februar

9–10 Naravno ionizirajoče sevanje v okolju (G. Pregl)
10–11 Radon v okolju (A. Likar)
11–12 Umetni radioaktivni izotopi v okolju (B. Pucelj)
12–13 Osnove dozimetrije ionizirajočega sevanja (F. Cvelbar)
15–17 Vaje
19 Večerja

Sobota, 20. februar

8– 9 Dozimetrijske merske tehnike (U. Miklavžič)
9–10 Merjenje sevanja v okolju v Sloveniji in intervencijska pripravljenost (R. Martinčič)
10–11 Nevarnost ionizirajočega sevanja (A. O. Župančič)
11–12 Odlaganje radioaktivnih odpadkov (M. Ravnik)
12–13 Varnost jedrske elektrarne v Krškem (B. Mavko)

Na šole bomo uradna vabila poslali v januarju. Vodstva šol prosimo, da kotizacijo 2 000 SIT nakažejo na žiro račun društva 50101-678-49168 pri SDK Ljubljana, lahko pa ga udeleženci poravnajo tudi na seminarju.

P. Križan in *F. Cvelbar*

NUMERIČNO REŠEVANJE DIFERENCIALIH ENAČB
II. LINEARNE VEČČLENSKE METODE

BOJAN OREL

Math. Subj. Class. (1991) 65L05

V članku so opisane lastnosti linearnih veččlenskih metod (LVM) za reševanje sistemov navadnih diferencialnih enačb. Podrobneje sta podani dve družini Adamsovih metod, nato pa je zbranih nekaj osnovnih rezultatov o konvergenci splošnih LVM. Poudarjen je pomen absolutne stabilnosti in naštetih nekaj problemov, ki nastopajo pri uporabi LVM za reševanje togih problemov.

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
II. LINEAR MULTISTEP METHODS

Some properties of linear multistep methods (LMM) are presented in this paper. Two families of Adams' methods are described and some basic results on the convergence of general LMM are outlined. The importance of absolute stability is presented together with some problems, arising in solving stiff problems.

1. Uvod

Med metodami za numerično reševanje začetnih problemov

$$y' = f(y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

kjer je $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ in $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so linearne veččlenske metode (v nadaljevanju LVM) že dolgo časa med najbolj popularnimi. Vgrajene so v večino programskih knjižnic. Posamezne metode so na voljo tudi v „paketih", ki omogočajo preprosto in predvsem učinkovito uporabo teh metod z avtomatskim izbiranjem dolžine koraka in celo z izbiranjem problemu primerne metode iz družine metod.

V tem članku bomo spoznali nekaj osnovnih metod in njihovo izpeljavo, pa tudi splošno obliko LVM in njihove lastnosti. Običajno jih uporabljamo v parih. Osnovna metoda je implicitna. Ustrezno nelinearno enačbo rešujemo z iteracijo, pri kateri izračunamo začetni približek s pomožno eksplicitno metodo. Tako sestavljene metode so poznane pod imenom *prediktor–korektor*.

Osnovna lastnost, ki jo mora imeti vsaka uporabna metoda za reševanje začetnih problemov (1), je konvergenca. Opisali bomo potrebne in zadostne pogoje za konvergenco LVM, kakor tudi omejitve, ki izhajajo iz teh pogojev.

Posebne težave nastanejo pri reševanju tako imenovanih *togih problemov*, kjer je izjemno pomembna stabilnost uporabljenih numeričnih metod. Zahteva po stabilnosti pa uporabi LVM za reševanje togih problemov lahko kaj hitro postavi nepremostljive zapreke.

2. Linearne veččlenske metode

Adamsove metode. Rešitev problema (1) iščemo na zaporedju vozliščnih točk $x_n = x_0 + nh, (n = 1, 2, \ldots)$. Z y_n bomo označili izračunani približek k rešitvi v točki x_n in $f_n = f(y_n)$. Točna rešitev enačbe (1) zadošča identiteti

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(y(t))\, dt. \tag{2}$$

Več razredov LVM dobimo tako, da neznano funkcijo $f(y(x))$ nadomestimo z njenim interpolacijskim polinomom s $k+1$ vozli $x_{n-k}, \ldots, x_{n-k}$. Z Newtonovo interpolacijsko formulo [6] zapišemo interpolacijski polinom

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{-s}{i} \Delta^i f_{n-i}, \qquad s = \frac{x - x_n}{h}.$$

Vstavimo ga v (2) in dobimo

$$y_{n+1} = y_n + h(\gamma_0 f_n + \gamma_1 \Delta f_{n-1} + \cdots + \gamma_k \Delta^k f_{n-k}), \tag{3}$$

kjer so koeficienti

$$\gamma_i = (-1)^i \int_0^1 \binom{-s}{i} ds.$$

Prvih nekaj koeficientov lahko enostavno izračunamo

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}, \quad \gamma_4 = \frac{251}{720}.$$

Formula (3) določa razred *Adams-Bashforthovih metod.* Zapišimo jo še v bolj običajni obliki

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n-i}. \tag{4}$$

Koeficienti prvih šestih Adams-Bashforthovih metod z ustreznimi konstantami napake (glej 3. razdelek) so zbrani v tabeli 1. Prvo ($k = 0$) izmed njih, $y_{n+1} = y_n + hf_n$, že poznamo, to je Eulerjeva metoda [8].

S k-člensko Adams-Bashforthovo metodo lahko izračunamo y_{n+1}, če poznamo vrednosti $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}$. Nato povečamo indeks n za eno in nadaljujemo, dokler ne izračunamo vseh potrebnih vrednosti. Če pa vseh vrednosti $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}$ ne poznamo (kot na začetku računanja ali pri spremembi dolžine koraka), jih moramo izračunati s pomočjo kake druge (najraje enočlenske) metode. Problemi z dodatnim računanjem k začetnih vrednosti rešitve so skupni vsem k-členskim metodam.

Tabela 1. Koeficienti Adams-Bashforthovih metod

k	i	0	1	2	3	4	5	C_{k+1}
0	β_i	1						$\frac{1}{2}$
1	$2\beta_i$	3	-1					$\frac{5}{12}$
2	$12\beta_i$	23	-16	5				$\frac{3}{8}$
3	$24\beta_i$	55	-59	37	-9			$\frac{251}{720}$
4	$720\beta_i$	1901	-2774	2616	-1274	251		$\frac{95}{288}$
5	$1440\beta_i$	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475	$\frac{19087}{61480}$

Če med interpolacijske točke za $f(y(x))$ v identiteti (2) vključimo tudi točko x_{n+1}, pridemo do razreda *Adams–Moultonovih metod*

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i^* f_{n+1-i}. \tag{5}$$

Koeficiente prvih šestih Adams-Moultonovih metod in ustrezne konstante napake najdemo v tabeli 2. Med njimi sta najbolj znani prvi dve: metoda s $k = 0$ kot *implicitna Eulerjeva metoda* in metoda s $k = 1$ kot *trapezna metoda.*

Tabela 2. Koeficienti Adams-Moultonovih metod

k	i	0	1	2	3	4	5	C_{k+1}
0	β_i^*	1						$\frac{-1}{2}$
1	$2\beta_i^*$	1	1					$\frac{-1}{12}$
2	$12\beta_i^*$	5	8	-1				$\frac{-1}{24}$
3	$24\beta_i^*$	9	19	-5	1			$\frac{-19}{720}$
4	$720\beta_i^*$	251	646	-264	106	-19		$\frac{-3}{160}$
5	$1440\beta_i$	475	1427	-798	482	-173	27	$\frac{-863}{61480}$

V nasprotju z Adams-Bashforthovimi so Adams-Moultonove metode implicitne — neznana vrednost y_{n+1} nastopa tako na levi kot tudi na desni strani enačaja kot argument funkcije $f_{n+1} = f(y_{n+1})$. Na vsakem koraku je torej potrebno rešiti enačbo (5), ki je nelinearna, če je nelinearna diferencialna enačba (1).

Metode prediktor–korektor. Na srečo že sama oblika enačbe (5) sugerira način reševanja. Uporabimo lahko enostavno funkcijsko iteracijo

$$y_{n+1}^{j+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{k} \beta_i^* f_{n+1-i} + h\beta_0^* f_{n+1}^j, \tag{6}$$

($f_{n+1}^j = f(y_{n+1}^j)$), ki hitro konvergira, če je le korak metode h dovolj majhen. Če imamo še dobro začetno vrednost y_{n+1}^0, je navadno dovolj že en korak iteracije. Za izračun vrednosti y_{n+1}^0 uporabimo kar ustrezno Adams-Bashforthovo formulo, ki ji v tem primeru pravimo *prediktor*, implicitni Adams-Moultonovi metodi pa *korektor*. S P označimo uporabo prediktorja, z E izračun vrednosti funkcije f in s C uporabo korektorja, pa lahko metodo prediktor-korektor, kjer smo korektor (iteracijo (6)) uporabili m-krat, zapišemo kot $P(EC)^m$ oziroma kot $P(EC)^m E$, če po končanih m iteracijah še enkrat izračunamo vrednost funkcije f. V praksi je navadno dovolj, če vzamemo $m = 1$ ali $m = 2$. Podrobnejši opis metod prediktor-korektor najde bralec v [7].

3. Konvergenca linearnih veččlenskih metod

Konsistentnost. Adamsove metode lahko imamo za poseben primer splošne formule

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}, \tag{7}$$

kjer je k dano celo število, $f_n = f(y_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, in so konstante α_j in β_j $(j = 0, 1, \ldots, k)$ neodvisne od n. Enačba (7) definira *splošno linearno k-člensko metodo*, če sta izpolnjena pogoja $\alpha_k \neq 0$ in $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. Metoda je eksplicitna, če je $\beta_k = 0$, in implicitna, kadar je $\beta_k \neq 0$. Enačbo (7) lahko na obeh straneh pomnožimo s poljubno od 0 različno konstanto. Da bi bili koeficienti α_i in β_i enolično definirani, se dogovorimo, naj bo $\alpha_k = 1$.

Vsaki LVM priredimo *prvi* in *drugi karakteristični polinom* $\varrho(z)$ in $\sigma(z)$ s predpisom

$$\varrho(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i,$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i z^i.$$

Zastavimo si vprašanje: *Katerim pogojem morajo zadoščati koeficienti α_i in β_i, da bo (7) „dobra" metoda za reševanje začetnih problemov razreda (1)?*

Najprej poglejmo, kakšna je lokalna napaka LVM v točki x_{n+1}. V ta namen metodi (7) priredimo *diferenčni operator*

$$L[y(x);h] = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x+ih) - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x+ih), \tag{8}$$

ki deluje na množici odvedljivih funkcij. Za funkcije z odvodi dovolj visokega reda lahko operator (8) razvijemo po potencah h:

$$L[y(x);h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \ldots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \ldots, \tag{9}$$

kjer so C_q $(q = 0, 1, \ldots)$ konstante, neodvisne od funkcije $y(x)$:

$$C_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i,$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{k} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i, \tag{10}$$

$$C_q = \frac{1}{q!} \sum_{i=1}^{k} i^q \alpha_i - \frac{1}{(q-1)!} \sum_{i=1}^{k} i^{q-1} \beta_i, \quad (q = 2, 3, \ldots).$$

Definicija 1. *LVM je* konsistentna metoda reda p, *če je* $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0$ *in* $C_{p+1} \neq 0$. *Konstanta* C_{p+1} *je* konstanta napake.
LVM je konsistentna, *če je njen red konsistence vsaj 1.*

LVM metoda je torej konsistentna, če sta izpolnjeni enačbi

$$\varrho(1) = 0, \qquad \varrho'(1) = \sigma(1).$$

Bralec se lahko prepriča, da se ta definicija reda konsistence ujema z definicijo v [8]. Lokalna napaka LVM reda p je v točki x pri majhnih h v glavnem proporcionalna $h^p y^{(p)}(x)$. Žal se izkaže, da konsistenca ni zadosten pogoj za konvergenco LVM.

Ničelna stabilnost. Oglejmo si, kako z LVM rešimo preprost začetni problem

$$y' = 0, \qquad y(0) = 0,$$

katerega rešitev je očitno $y(x) = 0$. Enačba (7) je v tem primeru

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = 0. \tag{11}$$

Če je metoda konvergentna, mora veljati

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \qquad (h = x/n)$$

za vse rešitve enačbe (11), ki zadoščajo začetnim pogojem

$$\lim_{h\to 0} y_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Diferenčna enačba (11) ima konstantne koeficiente, torej so (podobno, kot pri diferencialnih enačbah s konstantnimi koeficienti) njene rešitve

$$y_n = hr^n \cos n\varphi,$$

kjer je $z = re^{i\varphi}$, $(r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ ničla prvega karakterističnega polinoma. Pri konvergentnih metodah morajo torej vsi koreni karakterističnega polinoma imeti absolutno vrednost ≤ 1, večkratni koreni pa absolutno vrednost strogo manjšo od 1, saj bi v nasprotnem primeru še tako majhna napaka po nekaj korakih prekrila pravo rešitev.

Definicija 2. *LVM je* ničelno stabilna, *če absolutna vrednost nobenega korena karakterističnega polinoma $\varrho(z)$ ni večja kot 1 in če so vsi koreni z absolutno vrednostjo 1 enostavni.*

Sedaj pa že lahko povemo, katere LVM so konvergentne [4].

Izrek 1. *LVM je konvergentna natanko tedaj, ko je konsistentna in ničelno stabilna.*

Dokaz tega izreka je precej zahteven, bralec si ga lahko ogleda v [6].

Kolikšen je lahko največ red konsistence k-členske LVM? V enačbi (7) imamo na razpolago $2k$ parametrov, kar zadošča, da lahko zadovoljimo $2k$ enačb (10) in tako dosežemo red konsistence $2k$, vendar ta rezultat nima praktične vrednosti, ker LVM maksimalnega reda niso ničelno stabilne.

Izrek 2. *Red konsistence ničelno stabilne linearne k-členske metode ne more biti večji kot $k+1$, ko je k lih, oziroma $k+2$, ko je k sod.*

Tudi dokaz tega izreka lahko bralec najde v [6].

4. Absolutna stabilnost

Konvergenca je minimalna lastnost, ki jo mora imeti vsaka uporabna LVM. Nanjo vplivata konsistenca, od katere je odvisna lokalna napaka metode na vsakem koraku, in ničelna stabilnost, od katere je odvisno, kako se lokalne napake „združujejo" v globalno napako. Sama konvergenca pa nam kljub temu še ne zagotavlja zadovoljive rešitve, saj v praksi ne moremo poljubno zmanjševati velikosti koraka $h \to 0$, da bi numerična rešitev zanesljivo konvergirala proti pravi rešitvi začetnega problema (1).

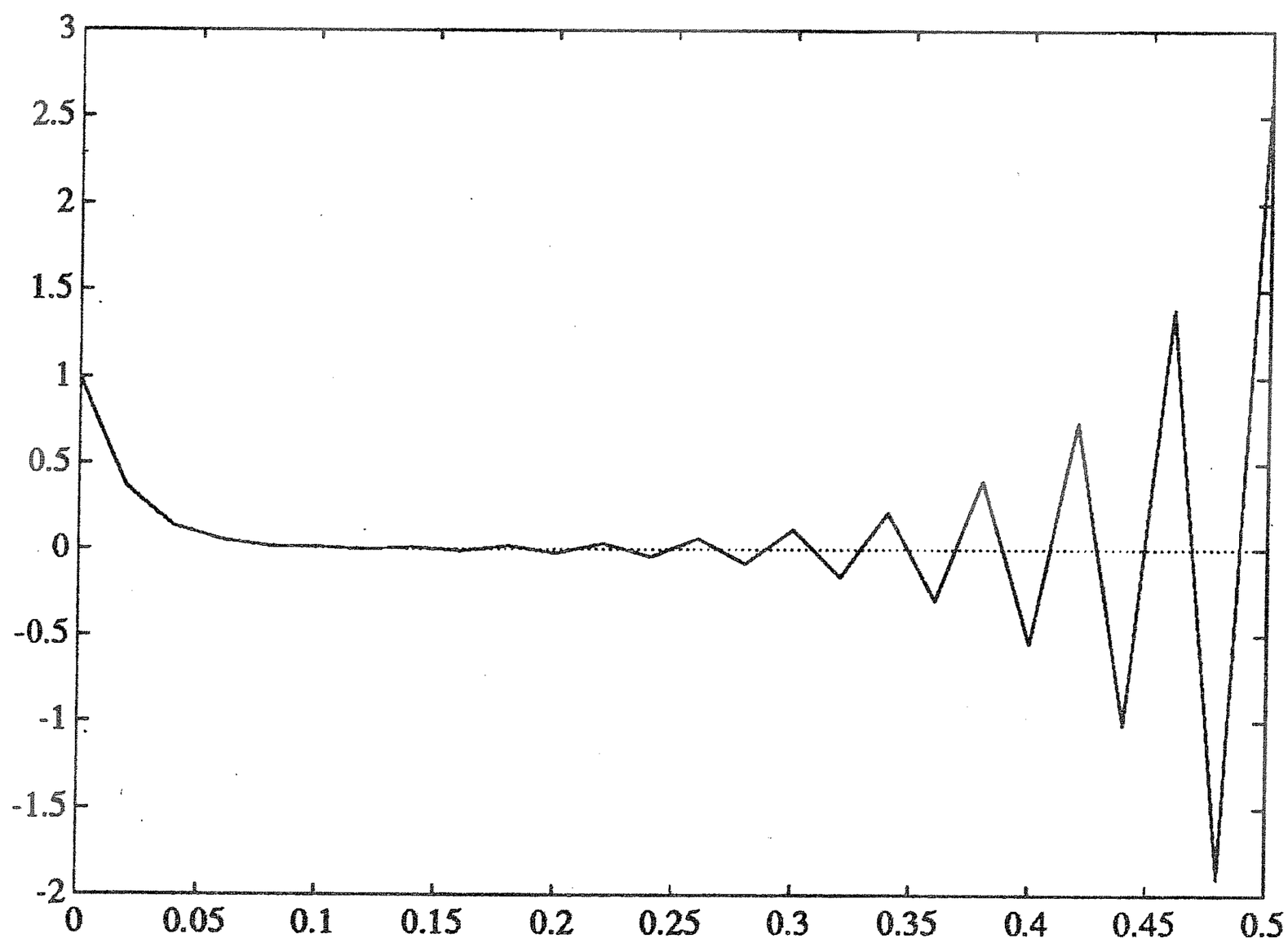
Poglejmo si naslednji primer. Začetni problem

$$y' = -50y, \qquad y(0) = 1 \qquad x \in [0,1] \tag{12}$$

rešujemo s Simpsonovo metodo. To je 2-členska, ničelno stabilna metoda četrtega reda (torej tudi konvergentna), ki jo določa enačba

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}). \tag{13}$$

Rezultat, dobljen pri velikosti koraka $h = 0.02$, je na sliki 1, kjer je numerična rešitev označena s polno, točna rešitev $y(x) = e^{-50x}$ pa s pikčasto črto. Vidimo, da numerična rešitev le v začetku dobro aproksimira točno rešitev, nato pa začne oscilirati in njena absolutna vrednost močno naraste, točna rešitev pa zelo hitro konvergira proti 0.



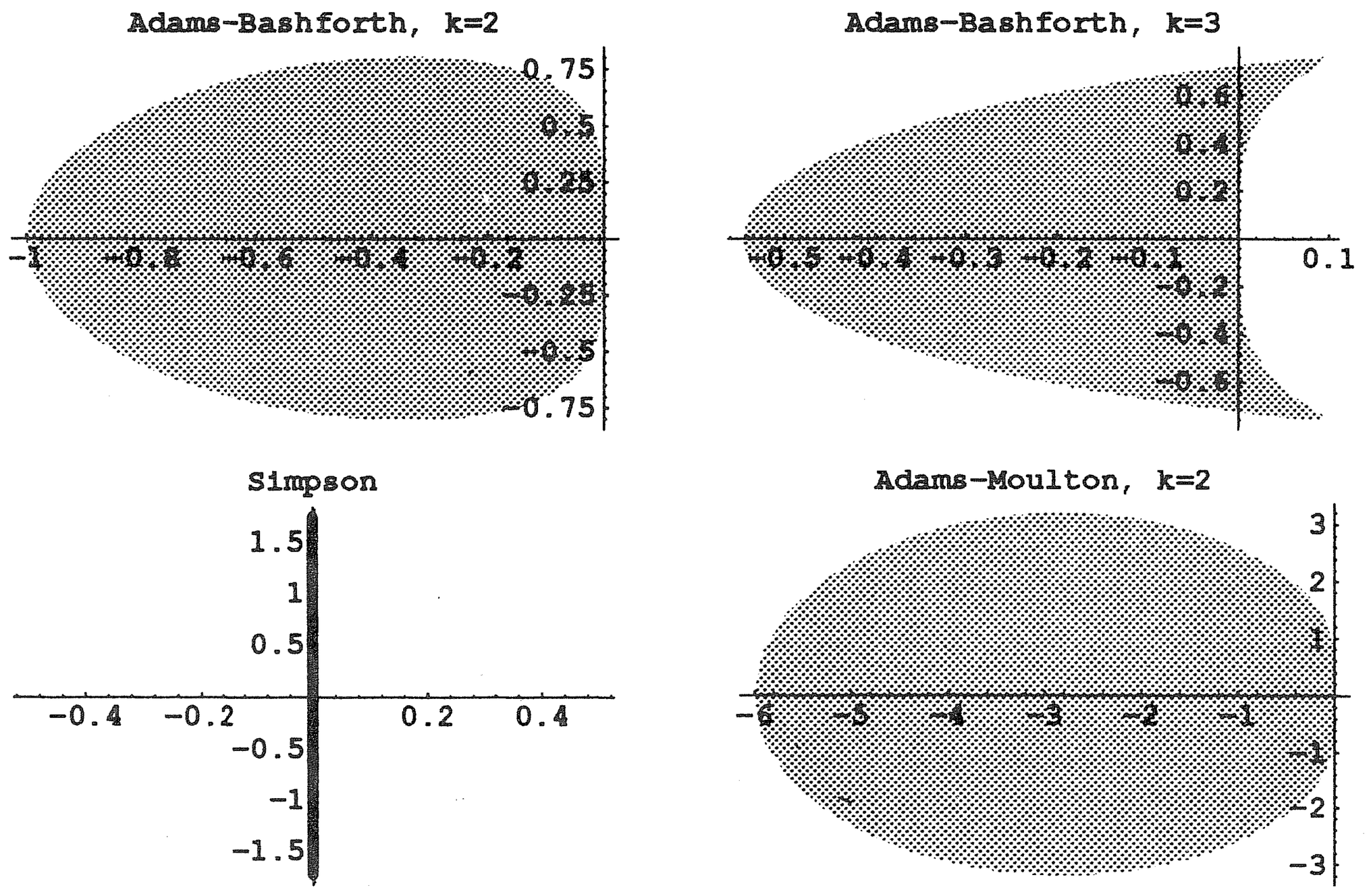
Slika 1. Rešitev začetnega problema $y' = -50y, y(0) = 1$ s Simpsonovo metodo, $h = 0.02$.

Iz tega primera vidimo, da moramo poleg konvergence od numerične metode za reševanje začetnih problemov (1) zahtevati, da se tudi pri $h > 0$ numerična in točna rešitev obnašata podobno. Da bi se tej usklajenosti približali, si bomo (kot v [8]) ogledali obnašanje LVM pri reševanju testne enačbe

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Enačba (7) je v tem primeru

$$\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i - h\lambda\beta_i)y_{n+i} = 0,$$



Slika 2. Območja absolutne stabilnosti

njena splošna rešitev pa je

$$y_{n+i} = \sum_{j=1}^{k} d_j r_j^i, \tag{15}$$

kjer so d_j poljubne konstante, r_j pa koreni (v tem primeru enostavni) algebraične enačbe, ki jo lahko zapišemo s prvim in drugim karakterističnim polinomom kot

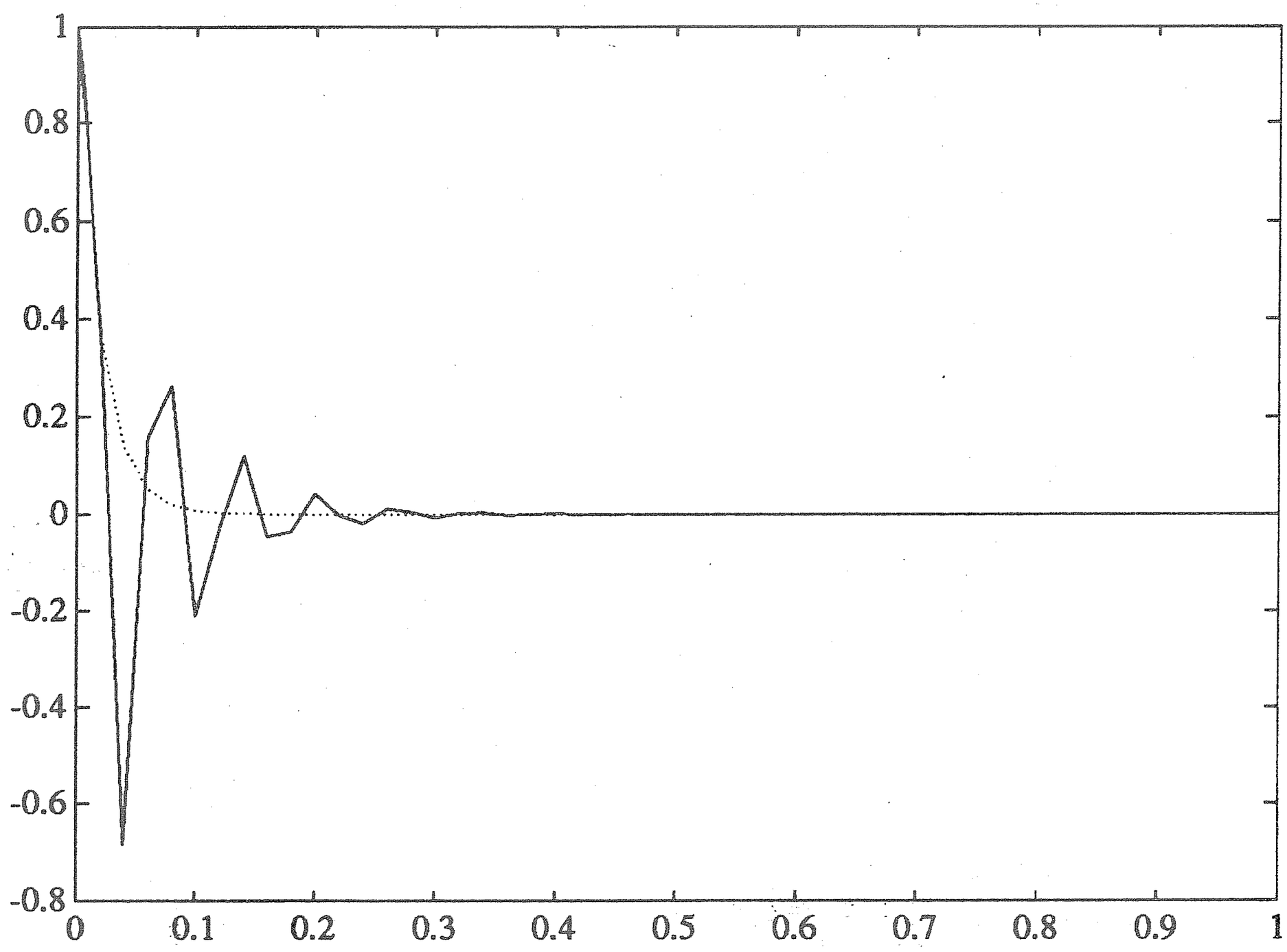
$$\varrho(r) - \hbar\sigma(r) = 0,$$

kjer je $\hbar = h\lambda$. Polinom

$$\pi(r, \hbar) \equiv \varrho(r) - \hbar\sigma(r)$$

navadno imenujemo *stabilnostni polinom linearne veččlenske metode.* Če hočemo, da bodo aproksimacije padajočih rešitev diferencialne enačbe tudi padajoče, morajo zaradi (15) pri $\lambda < 0$ vsi koreni stabilnostnega polinoma ležati znotraj enotskega kroga $|r| < 1$.

Definicija 3. *LVM je pri danem $\hbar$* absolutno stabilna, *če vsi koreni r_j, $(j = 1, \ldots, k)$ stabilostnega polinoma $\pi(r, \hbar)$ zadoščajo neenačbi $|r_j| < 1$.* Območje absolutne stabilnosti *LVM je množica vseh $\hbar \in \mathbb{C}$, za katere je dana LVM absolutno stabilna.* Interval absolutne stabilnosti *je presek območja absolutne stabilnosti z realno osjo.*



Slika 3. Rešitev začetnega problema $y' = -50y$, $y(0) = 1$ z Adams-Bashforthovo ($k = 2$) metodo, $h = 0.02$.

Primer. Na sliki 2 so prikazana območja absolutne stabilnosti za Adams-Bashforthovo ($k = 2$) in ($k = 3$), Simpsonovo in Adams-Moultonovo ($k = 2$) metodo. Vidimo lahko, da je območje absolutne stabilnosti Simpsonove metode le interval na imaginarni osi $i\hbar \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, zato se Simpsonova metoda tako slabo obnaša pri reševanju problema (12). Poskusimo isti primer rešiti še z Adams-Bashforthovo 2-člensko metodo, prav tako s korakom $h = 0.02$. Iz rešitve, ki je na sliki 3, vidimo, da je globalna napaka na začetku intervala precejšnja, vendar se hitro zmanjša in je od $x = 0.4$ dalje že zanemarljivo majhna. Opazimo lahko, da stabilnost metode močno vpliva na kvaliteto rezultata, saj smo z manj natančno, vendar stabilno metodo dobili rešitev, ki je za $x > 0.2$ precej boljša od rešitve, dobljene z bolj natančno in nestabilno metodo.

5. Togi problemi

Nekateri sistemi diferencialnih enačb, na primer tisti, ki opisujejo kemične reakcije ali elektronska vezja, predstavljajo poseben problem pri numeričnem reševanju, ker se posamezne komponente sistemov spreminjajo z zelo različnimi hitrostmi. Za primer vzemimo kar diferencialno enačbo z rešitvijo $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-100x}$, pri kateri druga komponenta z naraščajočim x pada mnogo hitreje kot prva. Večina numeričnih metod pri reševanju takih problemov (prijelo se jih je ime *togi problemi*) skoraj popolnoma odpove ali pa zahtevajo računanje z nerazumno majhnim korakom.

Značilno za toge probleme je, da ima njihova Jacobijeva matrika lastne vrednosti, katerih realni deli so negativni z zelo različnimi absolutnimi vrednostmi. Pri reševanju togih sistemov diferencialnih enačb se bolje obnesejo tiste numerične metode, katerih območje absolutne stabilnosti se razteza čimdlje po negativni realni polosi, najbolje pa tiste metode, katerih območje absolutne stabilnosti pokriva kar celo negativno polravnino.

Definicija 4. (Dahlquist [5]). *LVM je A-stabilna, če njeno območje absolutne stabilnosti vsebuje celo polravnino* $\mathrm{Re}(\hbar) < 0$.

A-stabilnost je zelo huda zahteva za LVM, saj nobena eksplicitna metoda ni A-stabilna, pa tudi nobena implicitna metoda, katere red konsistence je večji kot 2. Implicitna A-stabilna LVM z najmanjšo konstanto napake pa je trapezna metoda.

Tabela 3. Koeficienti BDF metod

k	β_k	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0	α
1	1						1	-1	90°
2	$\frac{2}{3}$					1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	90°
3	$\frac{6}{11}$				1	$-\frac{18}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{2}{11}$	88°
4	$\frac{12}{25}$			1	$-\frac{48}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{3}{25}$	73°
5	$\frac{60}{137}$		1	$-\frac{300}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{200}{137}$	$\frac{75}{137}$	$-\frac{12}{137}$	51°
6	$\frac{60}{137}$	1	$-\frac{360}{147}$	$\frac{450}{147}$	$-\frac{400}{147}$	$\frac{225}{147}$	$-\frac{72}{147}$	$\frac{10}{147}$	18°

Ker je za LVM A-stabilnost prehuda zahteva, se moramo zadovoljiti z metodami, ki imajo čim večje območje absolutne stabilnosti. Navadno se za reševanje togih problemov uporabljajo *metode z obratnimi diferencami*, (angl. BDF metode = Backward Difference Formulæ). To so metode oblike

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\beta_k f_{n+k}. \tag{16}$$

Koeficienti k-členskih metod reda konsistence k za $k < 6$ so zbrani v tabeli 3. Območje absolutne stabilnosti prvih šestih BDF metod je neomejeno in vsebuje kot $-\alpha < \pi - \arg \hbar < \alpha$. Vrednosti za α so prikazane v zadnjem stolpcu tabele 3.

Togost začetnega problema vpliva tudi na način reševanja nelinearnega sistema enačb (7). Funkcijska iteracija, kot je (6), konvergira le, če je $h\beta_0^* \|\frac{\partial f}{\partial y_{n+1}}\| < 1$, kar pa je pri togih problemih, kjer je norma Jacobijeve matrike lahko zelo velika, zelo huda omejitev za korak h. Zato je pri togih problemih za reševanje sistema (7) bolje uporabljati Newtonovo metodo.

6. Zaključek

Spoznali smo razred linearnih veččlenskih metod za reševanje sistemov navadnih diferencialnih enačb. V praksi so dokaj priljubljene, saj imajo precej lepih lastnosti:

1. Obstaja več družin LVM, ki se razlikujejo v nekaterih lastnostih, pomembnih pri reševanju določenih vrst začetnih problemov (lokalna napaka, stabilnost).
2. Znotraj vsake družine obstajajo metode različnih redov konvergence.
3. Na vsakem koraku je potrebno razmeroma malo izračunov vrednosti desne strani enačbe (1).

Žal pa imajo poleg prednosti LVM tudi vrsto pomanjkljivosti:

1. Na vsakem koraku moramo poznati nekaj vrednosti rešitve v prejšnjih točkah.
2. Na začetku računanja moramo dodatne točke izračunati s kako drugo metodo, kar dodatno zaplete računski postopek.
3. Zelo zapletena je menjava dolžine koraka, saj moramo v tem primeru ponovno računati vrednosti rešitve v prejšnjih točkah.
4. LVM imajo razmeroma majhno območje absolutne stabilnosti, zato se slabo obnašajo pri reševanju togih problemov.

V naslednjem članku si bomo pobliže ogledali metode Runge-Kutta, ki so v praksi tudi zelo priljubljene. Njihove lastnosti so v mnogočem komplementarne lastnostim veččlenskih linearnih metod.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1964.

[2] Z. Bohte, *Numerične metode*, DMFA Slovenije, 1990.

[3] K. Burrage, J. C. Butcher, and F. H. Chipman, *An implementation of singly-implicit runge-kutta methods*, BIT, **20** (1980) 326–340.

[4] G. Dahlquist, *Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations*, Math. Scan. 4 (1956) 33–53.

[5] G. Dahlquist, *A special stability problem for linear multistep methods*, BIT, **3** (1963) 27–43.

[6] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[7] J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1973.

[8] B. Orel, *Numerično reševanje diferencialnih enačb, I. Eulerjeva metoda*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992) 105–111.

SENCA

MARIJAN PROSÉN

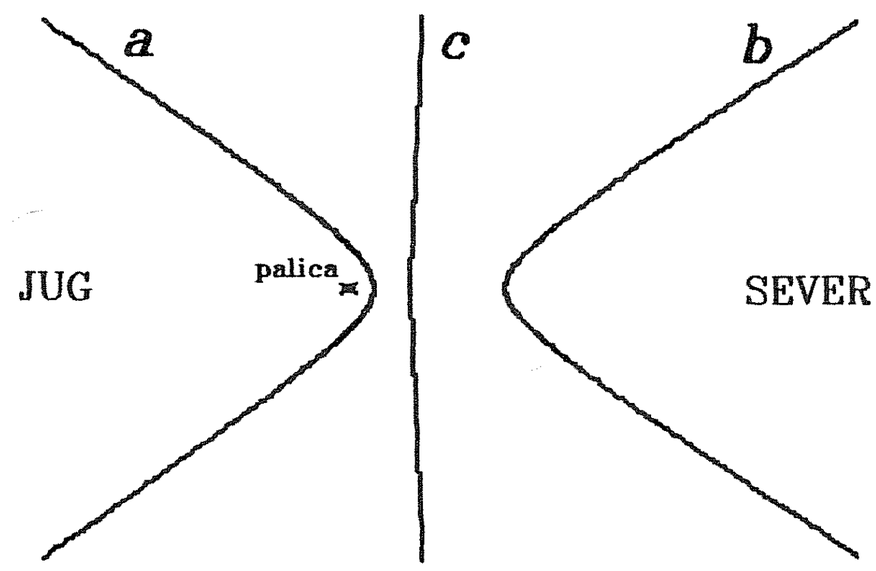
PACS 95.10.Cl

Konec sence navpične palice opiše na vodoravni ravnini hiperbolo.

THE SHADOW

The end of the shadow draws a hyperbola on the horizontal plain.

Ob sončnem vremenu ni težko z opazovanjem ugotoviti, da senca vrha navpične palice opiše na vodoravnih tleh krivuljo. Dokažimo, da je krivulja hiperbola.



Slika 1. Senca vrha navpične palice je hiperbola: a poletni solsticij (22.6.), b zimski solsticij (22.12.) in c ekvinokcij (21.3. in 23.9.).

Navpična palica z dolžino a meče na vodoravna tla senco z dolžino $r = a \cot h$, če je $h = h(t)$ višina Sonca v določenem trenutku krajevnega sončevega časa t. Zapisano enačbo preoblikujemo v polarno enačbo stožnice, če upoštevamo:

$$\cos h \sin A = \cos \delta \sin H, \tag{1}$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \tag{2}$$

$$\cos h \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H. \tag{3}$$

A je azimut, δ deklinacija, $H = t - \alpha$ časovni kot Sonca, povezan z njegovo rektascenzijo α in krajevnim sončevim časom t in φ zemljepisna širina. Z deljenjem (1) in (2) sledi polarna enačba stožnice, v našem primeru hiperbole: $r = p/(1+e\cos H)$, kjer je parameter $p = a \cot \delta \sin H / \sin \varphi \sin A$ in ekscentričnost $e = \cot \varphi \cot \delta$. Torej sta p in e funkciji več spremenljivk. Vsak dan sta drugačna in zato tudi hiperbola. Poleti je hiperbola obrnjena navznoter ($e > 0$), pozimi pa navzven ($e < 0$). Pri izračunu azimuta Sonca upoštevamo

$$\tan A = \sin H / (\sin \varphi \cos H - \cos \varphi \tan \delta),$$

kar dobimo z deljenjem (1) in (3). Za spreminjanje dolžine sence, ki jo navpična palica meče na vodoravno ravnino v različnih dneh, lahko izdelamo računalniški program. Slika 1 kaže spreminjanje dolžine sence za tri značilne dneve v letu.

IGRE NARAVE

6. PRI SINTEZI OGLJIKA IZ HELIJA POMAGA RESONANCA

MITJA ROSINA

PACS 25.70.Ef

Sinteza ogljika in težjih elementov v starejših zvezdah je možna zato, ker ima jedro ^{12}C vzbujeno stanje ravno na pravem mestu za resonančno sintezo.

SOME TRICKS OF NATURE

6. THE SYNTHESIS OF CARBON FROM HELIUM IS HELPED BY RESONANCES

The synthesis of carbon and heavier elements in older stars is possible because an excited state in ^{12}C is just at the right place to enhance the resonance synthesis.

Igra narave

Ko zvezda pokuri ves vodik v helij ($4\,^1H \to {}^4He + 2e^+ + 2\nu$), ne more več zdržati teže zgornjih plasti. Zato se skrči in pri tem segreje. Pri temperaturi kakih 10^8 K in gostoti 10^9 kg m^{-3} steče reakcija $3\,^4He \to {}^{12}C + 2\gamma$. Ta reakcija je pomembna za sintezo ogljika in iz njega težjih elementov v zvezdah. Pri tej reakciji narava nagaja: vmesno jedro ^8Be je nestabilno in se morajo srečati trije delci α hkrati, kar je zelo neverjetno. Vendar narava pomaga kar z dvema resonancama.

1. Osnovno stanje ^8Be živi $0{,}97 \cdot 10^{-16}$ s, tako da se dva delca α le lahko za kratek čas resonančno zlepita in počakata na tretjega. Energija resonance je 0,092 MeV, zato je potrebna visoka temperatura, da delca α vsaj včasih dosežeta to stanje.

2. Ogljik ima drugo vzbujeno stanje pri 7,654 MeV, kar je le 0,288 MeV nad energijo sistema $^8Be + {}^4He$. Tako je tudi drugi korak sinteze resonančen in zato dovolj verjeten. Če ogljik ne bi imel vzbujenega stanja pri približno tolikšni energiji, Obzornik za matematiko in fiziko ne bi izhajal.

Opis resonančnih reakcij

Sinteza poteka v treh korakih:

$$^4He + {}^4He \rightleftharpoons {}^8Be$$

$$^8Be + {}^He \rightleftharpoons {}^{12}C^*$$

$$^{12}C^* \to {}^{12}C + 2\gamma$$

Ker le majhen del berilijevih jeder doživi drugo reakcijo, nam prva reakcija sama določa kemijsko ravnovesje med ^4He in ^8Be. Delež jeder ^8Be izračunamo tako, da izenačimo kemijske potenciale na levi in desni strani

reakcije [1], [2]:

$$\mu_4 + \mu_4 = \mu_8 + \Delta E_8 \,,$$

$$kT \ln n_4 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_4 kT}\right)^{3/2} + kT \ln n_4 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_4 kT}\right)^{3/2} = kT \ln n_8 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_8 kT}\right)^{3/2} + \Delta E_8 \,.$$

Indeks 4 ali 8 pomeni jedro ^{4}He ali ^{8}Be, $\Delta E_8 = 92\,\mathrm{keV}$ pa reakcijsko energijo. Kemijske potenciale smo izrazili v drugi vrsti [1], in sicer s številčno gostoto n (število jeder na prostorninsko enoto). Pri tem smo privzeli, da imamo opraviti z idealnim plinom, kar v danih razmerah velja.

Za ilustracijo izberimo tipične podatke iz prejšnjega odstavka $\rho = 10^9\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ($n_4 = 1{,}5 \cdot 10^{35}\,\mathrm{m^{-3}}$) in $T = 10^8\,\mathrm{K}$ ($kT = 8{,}62\,\mathrm{keV}$). Iz prejšnje enačbe dobimo

$$n_8/n_4 = 6{,}6 \cdot 10^{-9} \,.$$

Tudi pri drugi reakciji se v večini primerov vrne $^{12}\mathrm{C}^*$ v začetno stanje (le majhen delež razpade z razpadom gama), in lahko spet zapišemo kemijsko ravnovesje

$$\mu_8 + \mu_4 = \mu_{12}^* + \Delta E_{12}^*, \quad \Delta E_{12*} = 284\,\mathrm{keV} \,,$$

$$kT \ln n_8 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_8 kT}\right)^{3/2} + kT \ln n_4 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_4 kT}\right)^{3/2} = kT \ln n_{12}^* \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_{12}^* kT}\right)^{3/2} + \Delta E_{12}^* \,.$$

Iz tega dobimo (preverite še sami!) $n_{12}^*/n_4 = 6{,}0 \cdot 10^{-27}$.

Približno eno vzbujeno ogljikovo jedro na kilomol helijevih jeder se zdi zanemarljivo malo. Toda zvezdi se ne mudi. Ocenimo, v kolikšnem času pokuri večino helija. Razpadna konstanta vzbujenega ogljika je $w = 5{,}6 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s^{-1}}$, torej pridobimo na volumsko in časovno enoto naslednjo količino ogljika

$$dn_{12}/dt = n_{12}^* w \,,$$

$$\frac{dn_{12}/dt}{n_4} = \frac{n_{12}^*}{n_4} w = 2{,}2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}} = \frac{1}{1{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{let}} \,.$$

Natančnejši računi potrjujejo oceno, da traja obdobje sinteze ogljika iz helija v tipični veliki zvezdi kak milijon let.

Zanimivo je, da je Fred Hoyle napovedal opisano vzbujeno stanje ogljika, še preden so ga izmerili, kajti sicer ni mogel razložiti obilice ogljika v vesolju [2]. Meritev je potrdila njegovo napoved.

LITERATURA

[1] I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1987, 95, 91 in 174.

[2] J. P. Cox, R. T. Giuli, *Principles of stellar structure*, Gordon and Breach, New York 1968, 496.

PODIPLOMSKI ŠTUDIJ FIZIKE V ZDA

Uvod

Prve jutranje ure predavanj so ponavadi dolgočasne, zato so profesorji, ki jih popestrijo z živahno pripombo, posebej popularni. Eden izmed njih je na Univerzi Carnegie Mellon v Pittsburghu nekega jutra pri predavanjih iz klasične elektrodinamike o fizikalni izobrazbi pripomnil, da so iz programa za inženirje črtali navor in kroženje. Navor da je za japonske načrtovalce avtomobilov, Američani ga ne potrebujejo, ker bodo pač svoj kruh služili z nepoštenimi odkupi[1]. V deželi, znani po coca-coli, J. F. Kennedyju in visoki tehnologiji, ni vse tako rožnato, kot se zdi.

Predavanja in profesorji

Ko sem prvič poslušal predavanja v ZDA, me je presenetilo, da študenti izjemno veliko sprašujejo med predavanji. Pri tem jim ni nič nerodno na ves glas priznati, da česa sploh niso razumeli, in dostikrat ne spustijo predavatelja naprej, dokler ni vsem bolj ali manj jasno, za kaj gre. Zanimivo je, da tudi predavatelji radi pohvalijo tiste, ki veliko sprašujejo, čeprav zato zaostaja ritem predavanj.

Na začetku šolskega leta vsakdo dobi svojega mentorja, tako imenovanega *advisorja*, ki potem skrbi zanj najmanj eno leto. Njegova vrata so študentu (skoraj) vedno odprta. Mentor je še posebno pomemben na začetku šolskega leta, ko študent skupaj z njim sestavi seznam predavanj, ki jih bo poslušal. Zanimivo je, da ta seznam ni dokončen, mogoče ga je poljubno spremeniti. Prav tako je zanimivo, da lahko vsakdo, celo podiplomski študent fizike, vpiše predmete, kot so aerobika, nemščina ali moderna zgodovina Rusije, pa ga mentor ne bo skušal preveč odvračati od tega. Jasno pa je, kaj je prva obveznost.

Preverjanje znanja in domače naloge

Preverjanje znanja se močno razlikuje od tistega, ki ga poznamo tukaj. Na semester se pišeta dva kolokvija. Za tiste, ki smo vajeni režima s fizike v Ljubljani, je še posebej odljudno to, da ne smete uporabljati literature. So seveda tudi izjeme, vendar je dostikrat list papirja največ, kar je dovoljeno uporabljati. Na koncu semestra pa se pišejo še tako imenovani *finals*. Dnevi za te končne izpite so določeni ponavadi vsaj pol leta vnaprej, tako da lahko

[1] „Leverage buyouts" sodijo v nepošteno poslovno prakso, ko velike družbe uničijo male ter jih nato kupijo pod ceno.

večina študentov pravočasno načrtuje svoj odhod domov. Pri mednarodni sestavi študentov je to pomembno. Drugih, tretjih in popravnih rokov ni. Prav tako ni ustnih izpitov, pri pismenih pa se v glavnem rešujejo naloge, od teh nekatere zelo težke.

Po treh ali štirih semestrih mora podiplomski študent opraviti še tako imenovani *qualifier*. To je izpit, ki obsega klasično mehaniko, elektrodinamiko, kvantno mehaniko, statistično mehaniko, eksperimentalno in matematično fiziko. Kdor izpit naredi, lahko začne z raziskovalnim delom, kdor ne, si mora izbrati drug poklic.

Vaj, kot jih poznamo v Ljubljani, za podiplomske študente ni. Pač pa ima vsak profesor eno uro na teden rezervirano za reševanje nalog in vprašanj. Da študentom ne bi zakrneli možgani, dobijo vsak teden pri vsakem predmetu domačo nalogo. Te naloge so različne: od rutinskih, ko je edini problem popisati goro papirja, do zelo težkih, ko je treba presedeti ure in ure v knjižnici in brskati po literaturi, da najdeš kak namig. Domače naloge ponavadi predstavljajo od 20% do 40% končne ocene. Natančen podatek pove profesor prvo uro predavanj skupaj z ocenjevalno politiko, kratkim pregledom snovi in številko svoje pisarne.

Asistenti

Podiplomski študenti si denar za življenje — nič kaj razkošno, mi lahko verjamete na besedo — služijo na dva načina: kot asistenti pri dodiplomskih predavanjih in kot raziskovalci. Novo prispeli študenti večinoma vsaj eno leto delajo kot asistenti. Ena od težav, na katere naletijo tuji študenti, je gotovo jezik. Marsikdo misli, da govori kar dobro angleško, vendar je presenetljivo težko natančno razložiti naloge in probleme v tujem jeziku. A občinstvo je dokaj potrpežljivo in prenese hude slovnične napake brez prehudih reakcij.

Tujih študentov je v ZDA veliko, še posebno med fiziki. Kar tretjina je Kitajcev, ki imajo dober razlog, da študirajo na tujem. Manj je ljudi iz Zahodne Evrope, iz znanih vzrokov pa se veča dotok iz Vzhodne Evrope. Pripomnim naj, da so primerjave med številom prebivalcev in številom univerz, ki kažejo, da Slovenija potrebuje vsaj štiri univerze, malce pretirane. Ne upoštevajo dejstva, da je na primer v ZDA veliko tujih študentov in da je veliko univerz, posebno tako imenovanih *liberal arts colleges*, ki po kvaliteti ne dosegajo ljubljanske. Zato je število študentov na 1000 prebivalcev bistveno večje. Ljudje pač potrebujejo številke, da „dokažejo", kar jim ustreza.

Ob primerjavi znanja naših in ameriških dodiplomcev se ne bi mudil. Naj le navedem, da 30% študentov iz moje skupine v prvem letniku ni znalo pretvoriti kg/m^3 v g/cm^3, da so skalarni produkt usvojili z veliko muko, vektorskega pa smo iz programa izpustili, da bi se izognili prehudim pretresom. Čeprav študenti kaj malo znajo, pa so se prav po ameriško pripravljeni boriti za svoje „pravice". To je še posebej očitno po kolokvijih,

ko so vrste tistih, ki pred asistentskimi pisarnami čakajo na protest, milo rečeno, precej dolge.

Primerjava z našim študijem

Iz povedanega ni težko skleniti, da študent z ameriške univerze po štirih letih študija zna bistveno manj od slovenskega. (Moj ameriški sošolec ni vedel, kaj je Lagrangeova funkcija.) Zato pa so podiplomski programi narejeni tako, da poskušajo to pomanjkljivost odpraviti. Kar precej pritisnejo na študenta, še posebno z domačimi nalogami in izpiti brez literature, tako da se po dveh podiplomskih letih znanje približno izravna. Med pravim raziskovalnim delom tukaj in doma pa ni bistvene razlike. Traja približno štiri leta, tako da v povprečju doktorski študij doseže okoli pet let in pol.

Velika razlika je seveda v opremljenosti šol, predvsem z računalniki. Na Univerzi Carnegie Mellon s 7000 študenti imajo 14 velikih sob z (dobesedno) stotinami računalnikov, med katerimi prevladujejo Apple MacIntoshi in delovne postaje DEC, ki jih je v mreži vsaj okoli 150. Pri nas priljubljeni PC je odrinjen bolj v stran.

Študij v ZDA je zanimiva izkušnja, še posebno zato, ker človeku zbriše iz glave filmsko sliko obljubljene dežele. Če ne verjamete, preskusite sami.

Mičo Mrkaič

NOVE KNJIGE

PEEBLES P. J. E., Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1992, 419 str.

S. Weinberg, ki si je pridobil ugled v fiziki delcev, je napisal uspešen učbenik o gravitaciji in kozmologiji. Ali se obeta podobna usoda učbeniku kvantne mehanike P. J. E. Peeblesa, ki je zasedel Einsteinovo mesto v Princetonu in ki ga poznamo kot pisca knjig *Large-scale Structure of the Universe* in *Physical Cosmology*?

Kvantna mehanika še kar naprej privlači pozornost fizikov in učiteljev fizike. Razprave v raziskovalnih in poučevalskih revijah se zadnje čase vrtijo predvsem okoli tega, kar je nekoliko povezano s pogledom na svet, in zadevajo, na primer, merjenje in „poskus" Einsteina, Podolskega in Rosena. Marsikatero vprašanje ostane pri tem za zdaj brez dokončnega odgovora. Ta razprava le v manjši meri seže do učbenikov. Ti se še naprej ravnajo po vodilu, da naj študenti najprej obvladajo zglede. O globljih vprašanjih pa si bodo svoje mnenje ustvarili pozneje. V resnici pri tem najbrž ni velike izbire. Peeblesov učbenik vztraja v glavnem pri tem vodilu,

vendar se poskuša, kolikor je na tej stopnji mogoče, ozreti na nekatera širša vprašanja.

Peeblesova knjiga je izšla iz „zahtevnega, toda, upam, ne nemogoče trdega" enoletnega predavanja, ki ga je v zadnjih dvajsetih letih ponavljal na princetonski univerzi. Opira se na eni strani na zgodovinski razvoj kvantne mehanike in na drugi „na podrobnosti nekaterih netrivialnih zgledov". Pisec jo postavlja med uvodne preglede, ki razkrijejo osnovne zamisli, a pustijo bralcu občutek, da ima teorija nerazumljive kotičke in standardne, za običajno rabo preobsežne učbenike.

V začetnem poglavju poskuša prepričati bralca, da teorija ni zrasla niti iz poskusov niti ni nastala z enim teoretičnim zamahom, ampak je do nje pripeljala zapletena medsebojna igra eksperimentalnih namigov, teoretičnih vpogledov in sreče, pomešanih z mnogimi zgrešenimi koraki. Pri tem priznava, da potvarja pravi zgodovinski razvoj. V tem poglavju naletimo na običajne odstavke o specifični toploti trdnin, sevanju črnega telesa, fotonih, „snovnih valovih", Schrödingerjevi enačbi, pa tudi na kratko razpravo o hladnem zlivanju.

Drugo poglavje o valovni mehaniki povzame ugotovitve iz prejšnjega in jih razvije dalje. Nazadnje obdela delec v krogelno simetričnem potencialu in delec v elektromagnetnem polju. Tretje poglavje o abstraktnih linearnih prostorih vektorjev stanja postavi teoretično osnovo in zajame še spin, delec s spinom $\frac{1}{2}$ in dva taka delca.

Kratko četrto poglavje se loti teorije merjenja, „paradoksov" kvantne mehanike in pride do skritih spremenljivk. V petem poglavju sledi teorija motenj brez časovne odvisnosti z Zeemanovim in Starkovim pojavom in hiperfino razcepitvijo osnovnega stanja v vodikovem atomu. Teorija motenj s časovno odvisnostjo se omeji na vsiljene in spontane prehode med hiperfinimi stanji vodikovega atoma.

Šesto poglavje o atomski in molekulski zgradbi podrobneje obdela osnovno in prvo vzbujeno stanje helijevega atoma, litijev atom in atome od berilija do ogljika ter molekulo vodika. V sedmem poglavju pride na vrsto teorija sipanja z optičnim izrekom, Bornovim približkom, delnimi valovi, faznimi premiki in preseki ter resonančnim sipanjem valov s. Kratko zaključno poglavje uvede Diracovo teorijo elektrona do sklopitve spin-obhod.

Na osnovi vsebine si je bralec že utegnil ustvariti površen vtis o Peeblesovem učbeniku kvantne mehanike. Podrobnejši pregled vsebine še utrdi prepričanje, da gre za dobro premišljeno knjigo s poudarkom na zgledih in nalogah, ki se ji pozna, da je nastala po dolgem brušenju v predavalnici. Prišla bo prav študentom fizike na našem oddelku pri kvantni mehaniki, in to najbrž ne samo priložnostno. Mogoče pa jo je priporočiti še drugim fizikom in ji prerokovati uspešno pot tudi drugod.

Janez Strnad

VESTI

STOLETNICA MOČNIKOVE SMRTI

Letos mineva točno sto let od smrti Franca Močnika, znanega matematičnega pedagoga in pisca matematičnih učbenikov. O njegovem življenju in delu je bilo že precej napisanega, tudi v Obzorniku (glej [4], [1]) in Preseku [2]. Kljub temu se zdi ob tej obletnici primerno, da si na kratko osvežimo glavne biografske podatke o njem, predvsem pa ponovno premislimo njegov pomen za zgodovino slovenske matematike in slovenskega naroda.

Rodil se je v Cerknem 1. oktobra 1814, šolal v Ljubljani 1824–1832 (gimnazija in licej), Gorici 1832–1836 (bogoslovje) in v Gradcu 1836–1840 (matematika), kjer je postal 1840 doktor filozofije. Najprej je služboval kot učitelj na normalki v Gorici (1836–1846), nato kot profesor elementarne matematike in trgovskega računstva na tehniški akademiji v Lvovu (1846–1849) in kot profesor matematike na vseučilišču v Olomucu (1849–1851). Leta 1851 je bil imenovan za šolskega svetnika in nadzornika ljudskih šol na Kranjskem. V Ljubljani je ostal do leta 1860, ko je bil premeščen v Gradec za nadzornika šol na Štajerskem. Po upokojitvi leta 1871 je do svoje smrti 30. novembra 1892 živel v Gradcu.

Franc Močnik je najbolj znan kot pisec učbenikov iz matematike za vse vrste in vse stopnje ljudskih in srednjih šol. Začel je z metodičnimi

knjigami leta 1840, nadaljeval z osnovnošolskimi učbeniki v skladu z novim načrtom o spremembi dotedanjih računic, ki ga je sam sestavil in leta 1844 predložil dvorni študijski komisiji (le-ta ga je potrdila), po preosnovi avstrijskega srednjega šolstva v letih 1849–1852 pa se je lotil tudi pisanja srednješolskih učbenikov. Močnikove šolske knjige so izhajale več desetletij, sam jih je dopolnjeval in spreminjal v skladu z vsakokratnimi spremembami učnih načrtov, po njegovi smrti so jih prirejali drugi. V osemdesetih in devetdesetih letih prejšnjega stoletja so bile njegove knjige najbolj razširjeni matematični učbeniki za višje razrede avstrijskih srednjih šol. Celotni njegov učbeniški opus je impozanten. V naslednji tabeli zbrani podatki so povzeti po Povšičevi bibliografiji [3], doslej najobsežnejšem viru informacij o Francu Močniku (v oklepaju je navedeno število priredb).

Tabela 1. Število Močnikovih knjig (različni naslovi)

Razprava o numeričnih enačbah (1839)	1	
Logaritmične tablice (1858, 1877)	2	
Priročniki (1858, 1873)	2	
Metodične knjige (1840–1919)	11	(2)
Učbeniki (1846–1939)	126	(64)
a) za ljudske in druge začetne šole	35	(10)
b) za meščanske in obrtne šole	24	(9)
c) za gimnazije	39	(33)
č) za realke	22	(10)
d) za učiteljišča	6	(2)
Skupaj vseh knjig	142	(66)

Če pa bi upoštevali še vse različne nemške izdaje originalov in kasnejših priredb, bi dobili skoraj 1000 različnih bibliografskih enot (brez prevodov v druge jezike).

Močnik je svoje učbenike pisal v nemščini, v slovenščino in v številne tuje jezike so jih prevajali drugi. Prvi slovenski prevod njegove računice je iz leta 1846 (prevajalec Blaž Potočnik). Ta knjižica je pomembna za slovensko kulturno zgodovino, saj je ena prvih slovensko pisanih matematičnih del. Slovenska geometrijska terminologija na nivoju nižjih srednjih šol pa se je prvič pojavila v Močnikovem učbeniku geometrije iz leta 1856. Številni prevodi v tuje jezike so razširili pomen Močnikovega dela še v druga kulturna okolja, na druge narode avstro-ogrske monarhije in tudi preko njenih meja. Skupaj je v 12 tujih jezikih izšlo čez 300 različnih naslovov, nekateri v več izdajah. Podatke spet povzemamo po [3] (glej tabelo 2).

Upoštevajoč število originalnih del, njihovih priredb in prevodov, lahko mirno trdimo, da je bil Franc Močnik do danes verjetno *najplodovitejši slovenski pisec učbenikov* (ne samo matematičnih). Z njimi je zaslovel daleč preko meja svoje domovine, iz njih so se učili matematike tudi drugi narodi. Čeprav ni bil ustvarjalni matematik v ožjem smislu (ni raziskoval matematike, ni se dokopal do novih znanstvenih odkritij), je verjetno prvi Slovenec, ki se je ukvarjal *samo* z matematiko. Njej, pravzaprav njenemu poučevanju, je posvetil vse svoje življenje in postal eden najpomembnejših

srednjeevropskih *pedagogov matematične stroke* v drugi polovici 19. stoletja. Njegov vpliv je trajal še po njegovi smrti in se pozna v kasnejših matematičnih učbenikih, ki so jih pisali drugi. Močnik je naš prvi *metodik matematike*, hkrati pa tudi prvi *reformator pouka* matematike za osnovne šole. Postavil je trdna metodična načela, ki v veliki meri še vedno veljajo. Pri preosnovanju in posodabljanju matematičnega pouka je opravil pionirsko delo, ko je uveljavil matematiko kot moderni predmet, ki naj razvija natančnost in logično doslednost v mišljenju.

Tabela 2. Prevodi Močnikovih del v tuje jezike
(v oklepaju število priredb)

1.	hrvaščina	29	(3)
2.	srbščina	32	(5)
3.	posebej za Bosno	4	
4.	albanščina	9	(9)
5.	bolgarščina	9	
6.	češčina	39	(7)
7.	italijanščina	46	(4)
8.	madžarščina	38	
9.	grščina	4	
10.	poljščina	39	(3)
11.	romunščina	21	(3)
12.	slovaščina	2	
13.	ukrajinščina	40	(7)

Poleg strokovnega ima Močnikovo delo tudi splošni narodni pomen. Svojo vlogo šolskega svetovalca in nadzornika je vzel zelo resno in se uveljavil kot prizadeven *organizator šolstva* na Slovenskem. Ustanavljal je nove šole, podpiral izobraževanje učiteljev in skrbel za izboljšanje materialnega položaja v šolstvu. Ne nazadnje je v ljudske šole uvedel slovenščino kot jezik, enakopraven z nemščino.

Brez dvoma smo imeli Slovenci boljše (raziskovalno bolj prodorne) matematike, kot je bil Franc Močnik (npr. Vega, Hočevar, Plemelj in njegovi učenci), toda Močnikovo delo bo v naši matematični tradiciji ohranilo trajno vrednost že zaradi svojega prvenstva pri uveljavljanju matematike na Slovenskem. V tem pogledu se lahko z njim v moderni dobi meri edinole Josip Plemelj, ki je opravil podobno pionirsko delo z uvedbo organiziranega visokošolskega študija matematike na naših tleh in s postavitvijo strogih meril matematičnega raziskovanja in poučevanja.

LITERATURA

[1] P. Legiša, *Franc Močnik*, Obzornik mat. fiz.**31** (1984) 15–17.
[2] P. Legiša, *Franc Močnik in njegovo delo*, Presek **12** (1984/85) št. 5, 242–243.
[3] J. Povšič, *Bibliografija Franca Močnika*, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana 1966.
[4] J. Povšič, *Ob 150-letnici rojstva Franca Močnika*, Obzornik mat. fiz. **21** (1964) 187–189.

Milan Hladnik

IZ MOJEGA ŽIVLJENJA IN DELA

JOSIP PLEMELJ

Dragi tovariši!

Prijatelji so mi sporočili, da je bila od več strani izražena želja, naj bi jaz kot nestor jugoslovanskih matematikov na našem I. kongresu spregovoril nekaj besed o svojem delu, s katerim sem se ukvarjal, ali pa o doživetjih, ki sem jih imel v svojem dolgem strokovnem življenju. Če sem prav razumel Vašo željo, da naj bi se skupno nekoliko ozrli nazaj v moje življenje, potem se dokaj ujemamo v istem interesu. Star človek se najraje ozira v življenje nazaj, saj mu misel na prihodnost ničesar več ne obeta. Pri meni je, mislim, ta starčevska lastnost še posebno močno izražena; to je pač zaradi prav izrednih razmer, v katere sem bil postavljen po sili časa. Imam občutek, da me je narava usposobila za neko misijo v matematičnem svetu, usoda pa mi je po kratkih letih odtegnila pogoje, v katerih bi se bil mogel svoji naravi primerno udejstvovati. Že po dvanajstih letih univerzitetnega profesorstva in le malo več publicističnega delovanja je nastopila prva svetovna vojna. Konec vojne je pomenil zame popoln preobrat tudi v mojem znanstvenem življenju. Zadnja desetletja pred prvo vojno so bila v stari cesarski monarhiji karakterizirana z neprestanimi notranjimi boji med nemškim in drugimi narodi, pri prvem za nadvlado, pri drugih za enakopravnost. Ti boji so se od leta do leta stopnjevali. Zase se res nisem mogel pritoževati, dosegel sem vse pravočasno, bil v stiku s stanovskimi tovariši vsega sveta in z njimi sodeloval, posebno pa so me še moji kolegi iz Nemčije kakor iz Avstrije imeli čisto za svojega, čeprav so poznali moje poreklo. Malo jih danes še živi, vsi so mi ostali zvesti do zadnjega. Če smo se menili o politiki, sem videl, da hočejo biti pravični, pa vsa njihova vzgoja je bila taka, da niso mogli razumeti resničnega stanja. Mene pa je politična napetost in očitna krivičnost v stari državi tako razdvojila z državo samo, da sem, ko je Avstrija svetovno vojno cinično izzvala, z vsakim utripom svojega srca želel pogin te države. Na univerzi v Černivicah smo imeli misijo širiti slavo nemške kulture na vzhod in jaz sem si samo želel, da neham čimprej delovati v čast nemški znanosti in se posvetiti delu za svoj narod. Toda prišel sem domov v čisto drugačne razmere, potrebe in zahteve. Povojne težave v strokovnem stiku s svetom, moja tukajšnja strokovna osamljenost, potreba po organizacijski in upravni sposobnosti, ki je prav nič nimam, in še razni drugi vzroki v meni in izven mene so povzročili, da sem od tedaj skorajda le še učitelj matematike, pa prav malo ustvarjalec novega. Prav zato se tako rad oziram nazaj na čase mlajših let, ko sem živel in sodeloval v sredi matematičnega sveta, zlasti pa me gane spomin na one čase, ko sem se še razvijal v šoli.

Ob izteku Plemljevega leta 1992 objavljamo v nespremenjeni obliki govor, ki ga je imel profesor Plemelj leta 1949 na 1. kongresu zveze jugoslovanskih društev matematikov, fizikov in astronomov na Bledu. Tekst je izšel leta 1951 v Beogradu (Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ – Naučna saopštenja i obavještenja 1951, 1–6), v Sloveniji pa dosedaj še ni bil objavljen.

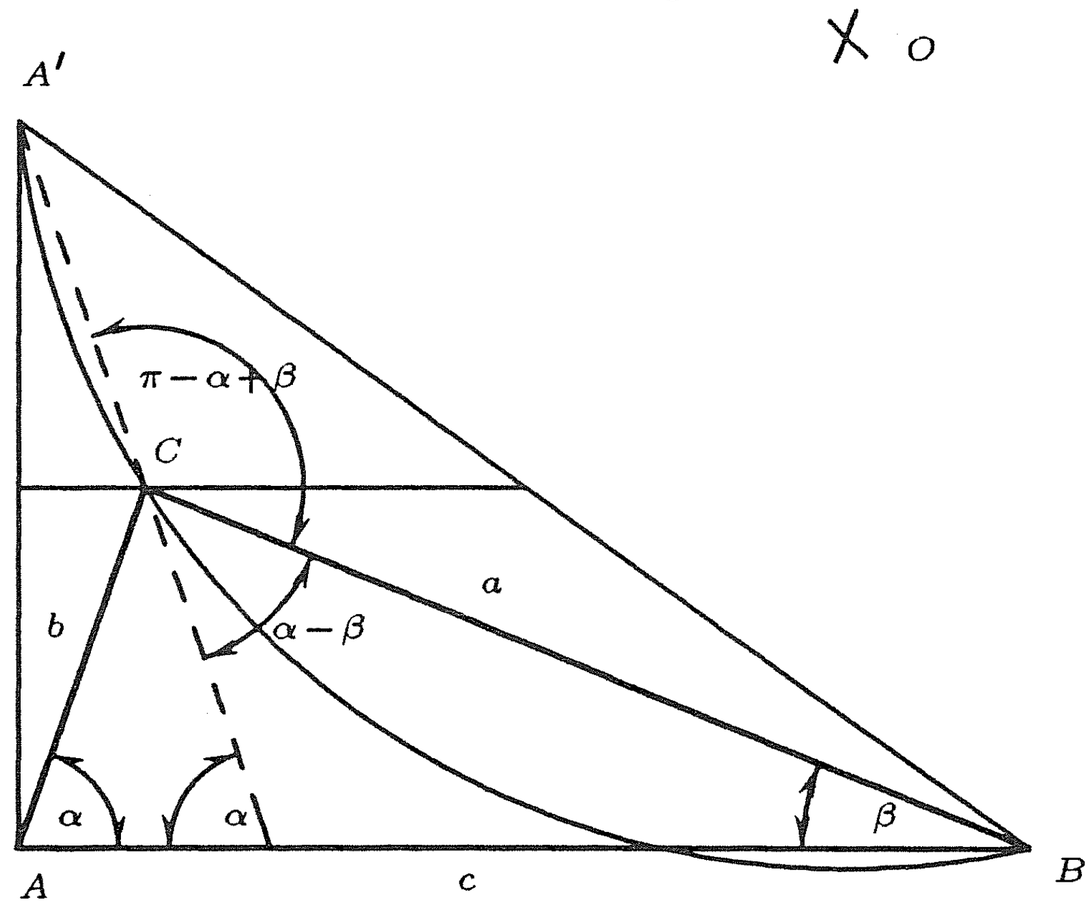
Svojih del, ki sem jih priobčeval, vam ne bom tu obnavljal. Zdi se mi, da tu ni primerna prilika za to. Če se želi kdo seznaniti s kakim mojim delom, je to vedno mogoče, saj so spisi natisnjeni. Morda pa ne boste nezadovoljni, če vam narišem tu neki doživljaj iz svojega gimnazijskega življenja. Zvezan je z nekim popolnoma elementarnim geometrijskim problemom, na katerega sem se v poznejšem času večkrat povrnil, ker se na ta doživljaj s posebnim veseljem spominjam. Za nekaj pa vas že naprej prosim: ne vzemite tega, kar vam bom pravil, kot bahanje, fanfaronado o mojem zgodnjem začetku. Res je, da sem si bil že v prvih letih gimnazije svest svoje superiornosti v matematiki. Za to zavest so mi dali ne samo dijaki, ampak tudi učitelji dosti povoda. Snov iz matematike za vso gimnazijo sem obvladal konec III. in v začetku IV. razreda in sem že, kolikor mi je bilo dostopno, posegal preko tega. Prevzel se pa kljub temu nisem nikdar; čutil sem se učenca med učenci, saj v humanističnih predmetih sem bil le srednji dijak.

Ne bom prikrival — kdo nima nekaj samoljubja — da mi je zelo dobro delo, da so me dijaki tako respektirali, pa prav radi imeli; še posebno pa mi je bilo všeč, da me je moj učitelj prof. Vincenc Borštner, ki me je dobil v četrtem gimnazijskem razredu takoj spoznal in očitno smatral, da sega moje znanje daleč preko razreda. S petim razredom pričenši me tudi ni niti enkrat v vsej višji gimnaziji vprašal za red, niti enkrat me ni klical pred tablo, kar je bila edina njegova navada, kadar je spraševal za red. Menda so mu zadoščali za formalno klasifikacijo pismeni izdelki. Tega ne morem več ugotoviti.

Sedaj pa dogodek: Bilo je v aprilu 1891. v petem razredu. Razred je imel dve vrsti klopi s prehodom v sredi in jaz sem sedel na krajnem notranjem sedežu zelo zadaj, mislim, da sta bili le dve klopi za menoj. Prof. Borštner ni predaval; je le naložil iz knjige lekcijo za prihodnjo uro, poklical k tabli po dva učenca in tam obravnaval snov in pri tem zapletal ves razred v sodelovanje. Imel pa je navado, da je prav rad dajal geometrijske konstrukcijske naloge, ki jih je narekoval iz neke zbirke, ki jo je prinesel s seboj. Nekoč da med drugim nalogo: Načrtaj trikotnik, ako je dana ena stranica, višina nanjo in diferenca kotov ob nji. Sošolci so se pred uro obračali name, če je bila naloga količkaj težka. Ta naloga se po več urah vprašanim ni posrečila in jih je vprašal kako drugo. Imel je profesor Borštner navado, da je šel izpred katedra in se ustavil pred menoj, sedel k meni v kop in odtod spraševal. Nekoč reče, da moramo tudi to nalogo vendar že napraviti in ker se mu je najbrž sumljivo zdelo, da se še ni posrečila, se obrne k meni in me vpraša, če sem morda to konstrukcijo poskusil. Jaz sem mu rekel, da ne vidim poti do rešitve. Nato je rekel, da bo v prihodnji uri sam to pokazal. To me vzpodbudi, da si to reč ponovno ogledam in prišel sem na rešitev s pomožnimi točkami, črtami itd., ki se mora zdeti človeškemu umu nedostopna, če mu je prikrita pot, ki je mene nujno privedla k cilju. V prihodnji uri je sedel profesor Borštner zopet ob meni v klopi. Po običajnem spraševanju učencev pravi: „No, sedaj pa napravimo še to konstrukcijsko nalogo.“ Jaz mu šepnem, da se mi je med tem rešitev posrečila in on reče: „No, pokažite mi, kako ste to napravili.“ Mislil je pač, da na listku. Jaz napravim kretnjo z vprašanjem: K tabli grem? On reče: „Dobro.“ Odmakne se mi in greva pred tablo. Jaz načrtam trikotnik ABC (slika 1 na ovitku) z običajno analizo: Dana stranica $AB = c$, višina v_c in diferenca $0 < \alpha - \beta < \pi$. Potegnimo pravokotnico AA'

iz A na stranico AB in naj bo $AA' = 2v_c$. Zvežimo A' s C, tako da je $A'C = AC = b$ in potegnimo $A'B = m$. Ob daljici $A'C$ nanesimo na ven ob A' kot α in na levi krak $A'B' = c$. Tako nastali trikotnik $A'B'C \cong ABC$. Pri B' je $\sphericalangle A'B'C = \beta$ in $\sphericalangle A'CB' = \gamma$. Trikotnik BCB' je enakokrak in $\sphericalangle BCB' = 2\alpha$, tako da je tedaj $\sphericalangle BB'C = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Sedaj je $\sphericalangle A'B'B = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta$ in se da konstruirati nad stranico BA' kot obodni kot nekega kroga. Točko B' dobiš potem takoj, ker je $A'B' = c$. Ker je trikotnik BCB' enakokrak, leži točka C na simetrali stranice BB' tam, kjer ta seka paralelko z AB v dani višini v_c. S tem je trikotnik ABC načrtan. Profesor Borštner strmi, videč to kuriozno rešitev, prijemajoč se za glavo: „Aber um Hergottswillen, das ist doch harsträubend, das ist doch menschenunmöglich auf so einen Einfall zu kommen; sagen Sie mir doch, was hat Sie zu dieser Idee geführt!“.

Jaz sem mu rekel, da te čudne rešitve nisem uganil, ampak sem se, ker se mi rešitev ni hotela posrečiti, vprašal po trigonometrični določitvi trikotnika in geometrijska razlaga rešitve me je privedla na tole čisto geometrično umljivo konstrukcijo. S prof. Borštnerjem nisva nadalje govorila o tem, ampak je sam pokazal potem neko drugo lažjo rešitev (slika 2), ki bi jo mogel posneti iz svoje konstrukcije, pa je nisem zapazil, ker sem imel natančno začrtano pot.



Slika 2.

Mislim pa, tovariši, če se vam je zdelo toliko zanimivo, da ste sledili mojemu izvajanju, da se ne čudite mojemu profesorju, da se mu je zdela konstrukcija za človeško pamet nedosegljiva, ampak da ste v enakem položaju, ker imate pred očmi še vedno kopreno, ki vam prikriva pot, ki je v resnici nakazala ves potek načrtanja. Zato vam hočem to zapreko odvzeti. Trigonometrična rešitev je lahka: z višino iz oglišča C na stranico AB razpade ta na dva dela $v \cot \alpha$ in $v \cot \beta$ in je tedaj

$$v(\cot \alpha + \cot \beta) = c \quad \text{ali} \quad v \sin(\alpha + \beta) = c \sin \alpha \sin \beta$$

To se da pisati

$$2v \sin(\alpha + \beta) = c[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Ker je $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, se glasi ta enačba

$$2v \sin \gamma - c \cos \gamma = c \cos(\alpha - \beta)\,.$$

Iz te enačbe je treba določiti kot γ. Najlažja pot je, če vpeljemo neki pomožni kot μ. Postavimo namreč

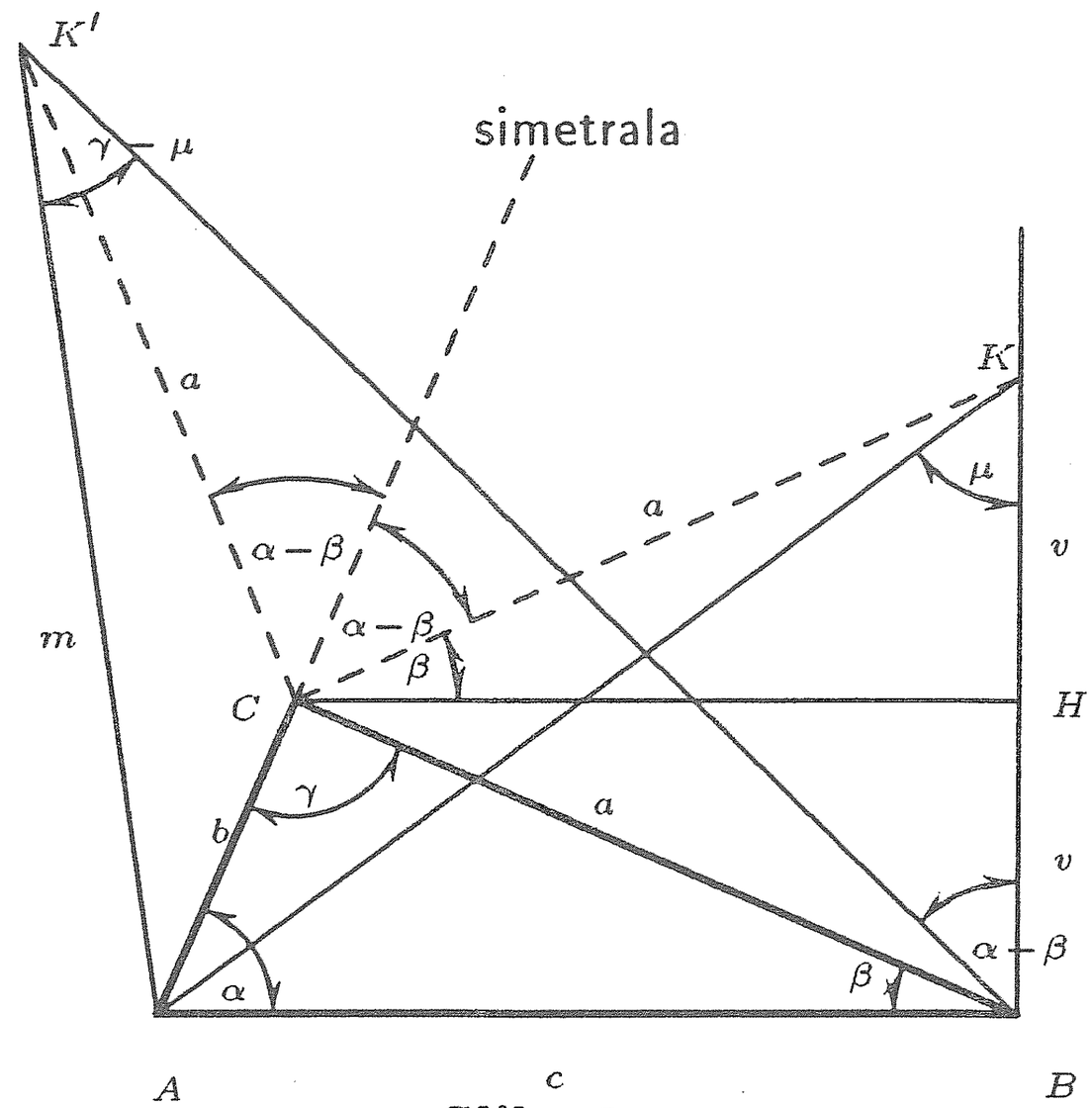
$$2v = m \cos \mu, \qquad c = m \sin \mu\,.$$

Obe enačbi dasta enolično za μ neki oster kot in za m neko pozitivno dolžino.

Enačba za γ pa se sedaj glasi

$$m\sin(\gamma-\mu)=c\cos(\alpha-\beta)\,.$$

To enačbo je možno tolmačiti kot sinusov izrek nekega trikotnika, v katerem sta c in m dve stranici, njuna nasprotna kota pa sta $\gamma-\mu$ oziroma $\frac{\pi}{2}\mp(\alpha-\beta)$. Pri navedeni konstrukciji je ta trikotnik $BA'B'$, kjer je $BA'=m$ in $A'B'=c$ in $\sphericalangle BB'A'=\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta$ ter $\sphericalangle A'BB'=$ $=\gamma-\mu$, kar je lahko uvideti. Na tej moji konstrukciji je iskani trikotnik dvakrat načrtan, uvidel pa sem nekaj pozneje, da je možno tolmačenje zgornje enačbe tudi s trikotnikom, katerega ena stranica je že kar AB. To privede na zelo lepo in kratko konstrukcijo (slika 3). Na sliki je $K'AB$ oni trikotnik.



Slika 3.

Daljica $CK=a$ je preko AC simetrično preložena v $CK'=a$ in obenem je $AK=AK'=m$. V Černovicah sem kot profesor govoril z dvema svojima učencema o tem elementarnem geometričnem problemu in rekel, da je moj srednješolski učitelj to nalogo narekoval iz neke zbirke. Prinesla sta mi res zbirko, kjer je bila med besedilom prav ona slika iz Borštnerjeve konstrukcije. Žal si nisem zapisal naslova te knjige, ki je brez dvoma bila zbirka prof. Borštnerja. V Ljubljani na klasični gimnaziji, t.j. našem nekdanjem zavodu, učiteljska knjižnica te knjige sedaj nima, pač pa sem od tam dobil knjigo Wiegand, *Geometrische Aufgaben für Obergymnasien*, kjer te naloge ni. Našel pa sem v nji nalogo: Načrtaj trikotnik, če je dana iz enega oglišča dolžina kotne simetrale, iz drugega oglišča pravokotnica na to simetralo, v tretjem oglišču pa kot. Ta naloga se da, kakor sem videl, prevesti na prejšnjo in to privede na novo, prav lepo konstrukcijo. V celoti sem poleg dveh rešitev, ki sem jih dobil od drugod, sam našel še devet različnih rešitev, zadnja ima pripis: v noči 1. jan. 1940. po Silvestru 1939.

Tako je nastala iz priložnostnih pogledov na ta problem cela monografija tega, meni v spominu tako dragega vprašanja. Priobčil o tem elementarnem problemu nisem ničesar. Pač pa sem publiciral kot elementarni problem konstrukcijo pravilnega krogu včrtanega sedmerokotnika in sicer natančno, ne aproksimativno; tako enostavno rešitev s trisekcijo kota, kakor je bila doslej neznana in ki nujno privede do stare indijske oz. babilonske približne konstrukcije. Ta moj uspeh, ki izhaja tudi iz mojih srednješolskih let, bo morda prav zato, ker se tiče vprašanja, ki izvira iz davnih časov, je preprostemu matematičnemu razumu dostopno in bo zato zagotovo vedno

izzivalo nekaj zanimanja, ta moj spis bo torej morda v prihodnosti preživel moja ostala dela, ki so se gibala na kraju tega, kar je bilo s tedanjimi pripomočki dosegljivega in kar je našlo po svetu nekaj priznanja.

Po tem mojem hvalisanju pa mi dovolite, da o sebi omenim tudi drugo stran, da napravim tako nekoliko ravnotežja. Rodil sem se l. 1873. na Bledu kot sin mizarja in malega kmeta. Oče pa mi je umrl, ko sem bil star eno leto. Po očetovi smrti je nastala gmotna stiska in sem le težko in slučajno dosegel, da me je moja mati, čisto preprosta kmečka ženska, dala v šolo v Ljubljano, kar sem si tako želel, ker sem videl, da so se šolali bogatega soseda otroci. S skromnimi prispevki od doma pa s precejšnjimi podporami dobrih ljudi sem se preživel do konca IV. razreda, s petim razredom pričenši pa sem se vzdrževal s poučevanjem svojih sošolcev iz matematike prav lahko in popolnoma sam. Ker pa nisem imel od mladih let nobenega pravega voditelja in nadzornika izven šole, se je v meni razvil silen čut samostojnosti in neodvisnosti in se mi ni bilo lahko pokoriti zahtevam drugih, to še posebno, ko sem se popolnoma osamosvojil. Tako mi ni bilo lahko vdati se pritisku disciplinskih predpisov in sem dobil že v 5. razredu 2 uri šolskega zapora, karcerja, v 6. razredu sem sedel 5 ur, seveda vedno z neogibnimi posledicami glede ocene vedenja in šolnine. Po sedmem razredu pa me ravnatelj ni več hotel vzeti kot učenca na šolo. Študiral sem zadnje leto kot privatist, ostati sem moral v Ljubljani, ker sem bil navezan na zaslužek pri sošolcih. Vendar sem napravil maturo brez vsake zamude že v tem letu.

Končno mi dovolite, dragi tovariši, ki imate na srednjih šolah pred seboj učence, kakor sem bil jaz učenec pred svojimi učitelji, pa tudi vsi drugi med vami, ki ste napravili isto pot, da pred vami skromno izpolnim svojo dolžnost do svojih učiteljev s tem, da pristavim na njihov nagrobnik pripis svoje hvaležnosti. Vsi so že dolgo pod zemljo, bili so mi dobri, prizanesljivi in naklonjeni. Niti eden mi ni očital prestopkov ali količkaj zato poslabšal svojega odnosa do mene. Celo ozirali so se na moj posebni položaj in me niso spraševali novih lekcij, dokler jih nismo predelali v šoli. Mnogo lepega in za življenje koristnega sem dobil od njih. Blag jim bodi spomin.

V svojih poznejših letih sem skušal uravnati svoje življenje po smernicah, ki sem jih prejel v šoli. Za vse življenje sem imel v sebi kritika in sodnika. Tak sodnik ni prestrog, pa moja sodba o sebi je bila negativna, nezadovoljiva, nisem mogel biti zadovoljen s svojim življenjem in svojim delom iz vzrokov, ki so bili največ v meni samem in ne bom zaključil svojega življenja v zavesti, da je bilo srečno. Zato mi je v tolažbo, da mi je dana prilika, da morem pred Vami, ki ste najširši forum naše stroke v državi, sedaj na kraju svojega življenja izpovedati svoj konfiteor, Vi pa boste sodili.

Obzornik za matematiko in fiziko 39 (1992) številke 1–6, str. 1–192

Matematika — Računalništvo

Programi za simbolično računanje – Derive — Programs for symbolic computation – Derive (Matija Lokar) 1–7
Trojke, 1. del — Triple systems, part I (Borut Zalar) 9–18
Bézierove krivulje — Bézier curves (Matija Lokar) 33–42
Trojke, 2. del — Triple systems, part II (Borut Zalar) 43–48

Arhimedsko urejeni kolobarji — Archimedean ordered rings (Boris Lavrič) 73–78
O oktonionih — On octonions (Borut Zalar) 79–84
Homomorfizmi v teoriji grafov — Homomorphisms in graph theory (Sandi Klavžar) 97–104
Numerično reševanje diferencialnih enačb, I. Eulerjeva metoda — Numerical solution of differential equations, I. Euler's method (Bojan Orel) 105–111
Verjetnostni algoritmi — Probabilistic algorithms (Janez Žerovnik) 129–139
Algebre z absolutno vrednostjo — Absolute valued algebras (Borut Zalar) 161–166
Numerično reševanje diferencialnih enačb II. Linearne veččlenske metode — Numerical solution of differential equations II. Linear multistep methods (Bojan Orel) 167–177

Fizika — Astronomija

Kdo se boji vrtinčnih tokov? — Who is afraid of eddy currents? (Gorazd Planinšič) 19–25
Igre narave 1. Sipanje termičnih nevtronov na jedru in na magnetnem atomu sta iste velikostne stopnje — Some tricks of nature 1. Scattering of thermal neutrons on a nucleus and on a magnetized atom are of the same order of magnitude (Mitja Rosina) 26–29
Oslabitev Brownovega gibanja — Squeezing Brownian motion (Janez Strnad) 49–54
Igre narave 2. Presek za sipanje nevtronov na vodiku je izjemno velik — Some tricks of nature 2. The scattering cross section of neutrons on hydrogen is exceptionally large (Mitja Rosina) 55–56
Dvigajoči se mehurčki — Rising bubbles (Janez Strnad) 85–89
Igre narave 3. Sila med nukleonoma v jedru je iste velikostne stopnje kot sila med človekom in Zemljo — Some tricks of nature 3. The force between neighbouring nucleons in the nucleus is comparable to the force between man and Earth (Mitja Rosina) 91–92
Računske naloge pri pouku fizike — The role of problem solving in physics education (Marjan Hribar) 113–116
Igre narave 4. Jedro ^{14}C je za devet velikostnih stopenj bolj dolgoživo od zrcalnega jedra ^{14}O — Some tricks of nature 4. The ^{14}C nucleus has a nine orders of magnitude longer halflife than the mirror nucleus ^{14}O (Mitja Rosina) 117–119
Opazovanje in teorija — Observation and theory (Janez Strnad) 141–150
Vrtenje neba — The rotation of the sky (Marijan Prosén) 151–155
Igre narave 5. Mioni katalizirajo fuzijo — Some tricks of nature 5. Muon catalised fusion (Mitja Rosina) 157–159
Senca — The shadow (Marijan Prosén) 178
Igre narave 6. Pri sintezi ogljika iz helija pomaga resonanca — Some tricks of nature 6. The synthesis of carbon from helium is helped by resonances (Mitja Rosina) 179–180

Vesti

Priznanja DMFA Slovenije učiteljem matematike, fizike z astronomijo ter računalništva v srednji in osnovni šoli za delo z mladimi (Ciril Velkovrh) 29–30
43. občni zbor Društva in delovno srečanje (Martina Koman) 31–32
Častni člani DMFA Slovenije v letu 1991 (Ciril Velkovrh) 32–III
Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike z astronomijo in računalništva za delo z mladimi (Peter Petek) IV
Vabilo (Milena Strnad) IV
Opravičilo IV
Prof. dr. Niko Prijatelj — sedemdesetletnik (Tomaž Pisanski) 57–58
Raziskovalne naloge Oddelka za matematiko IMFM v letu 1991 (Milan Hladnik) 59–64

Novi člani DMFA Slovenije v letu 1991 (Ciril Velkovrh) 64
Ob petindvajsetletnici smrti Josipa Plemlja (Zvonimir Bohte) 65–71
Seznam diplomantov in doktorandov ... (Zbral in ur. Ciril Velkovrh) 93–96
Plemljev dom na Bledu (Ciril Velkovrh) XI
Ustanovitev slovenskega društva za umetno inteligenco (Matjaž Gams) 104
Priznanja Ambasador Republike Slovenije v znanosti (prir. Aleš Stanovnik) 116
Plemljevo leto 1992 (Ciril Velkovrh) 121–122
Raziskovalno delo v matematiki v Sloveniji (Josip Globevnik) 122–124
Ob 190. obletnici smrti Jurija Vege — vabilo 124
Prireditve v Plemljevem letu (Peter Petek) 125
44. občni zbor DMFA Slovenije — vabilo (Peter Petek) XVI
Obvestilo MARAND 156
Mednarodna konferenca o pouku fizike v Škofji Loki (Marjan Hribar) 159–160
Delo Jurija Vege (Tomaž Pisanski) ..... XIX–XX
Seminar iz fizike *Ionizirajoče sevanje v okolju* — Vabilo (P. Križan in F. Cvelbar) ... 166
Podiplomski študij fizike v ZDA (Mičo Mrkaič) 181–183
Stoletnica Močnikove smrti (Milan Hladnik) 185–187
Iz mojega življenja in dela (Josip Plemelj) 188–192

Utrinki

Primer Dedekind (Boris Lavrič) 56
Utrinka (Janez Strnad) 150, 160

Vprašanja — Odgovori

121. Še o Rothovi nalogi (Milan Hladnik) 120

Nove knjige

Gleick J., Kaos, prev. Samo Kučer (Peter Petek) 7–8
Andrásfai B., Graph theory: flows, matrices (Martin Juvan) 8
Peierls R., More surprises in theoretical physics (Janez Strnad) 18
Lakatos I., Dokazi i opovrgavanja (Niko Prijatelj) VII
Likar A., Osnove fizikalnih merjenj in merilnih sistemov (Franc Cvelbar) 89–90
Hladnik M., Povabilo v harmonično analizo (Bojan Magajna) ..... XI–XII
Šips V., Uvod u fiziku čvrstog stanja (Peter Gosar) XII
Batagelj V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur, 2. del (Martin Juvan) 112
Paar V., Atomi, molekule, poluvodiči, supravodiči (Peter Prelovšek) 119
Prijatelj N., Osnove matematične logike (Ivan Vidav) 126–127
Zbirka testnih nalog Druge mednarodne raziskave znanja matematike z rešitvami (Zvonko Perat) 127
Lokar M., Turbo pascal 6.0 (Sandi Klavžar) 128–XV
Likar A., Planinšič G., Naloge iz fizikalnih merjenj in merilnih sistemov (Jože Pahor) XV
Stillwell J., Mathematics and its history (Milan Hladnik) 140
Butina B., Operacijski sistem MS DOS 5.0 (Sandi Klavžar) 155
Šetinc M., Znanje matematike v Sloveniji, Primerjalna raziskava preduniverzitetne matematike, SIMS Second International Mathematic Study (Zvonko Perat) 156
Peebles P. J. E., Quantum Mechanics (Janez Strnad) 183–184

Knjižne zbirke

Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 42
Publikacije DMFA Slovenije, IMFM ter FNT v letu 1991 ..... VII–VIII
Podiplomski seminar iz matematike 78
Fizika – Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij 84
Zbirka izbranih poglavij iz fizike 92