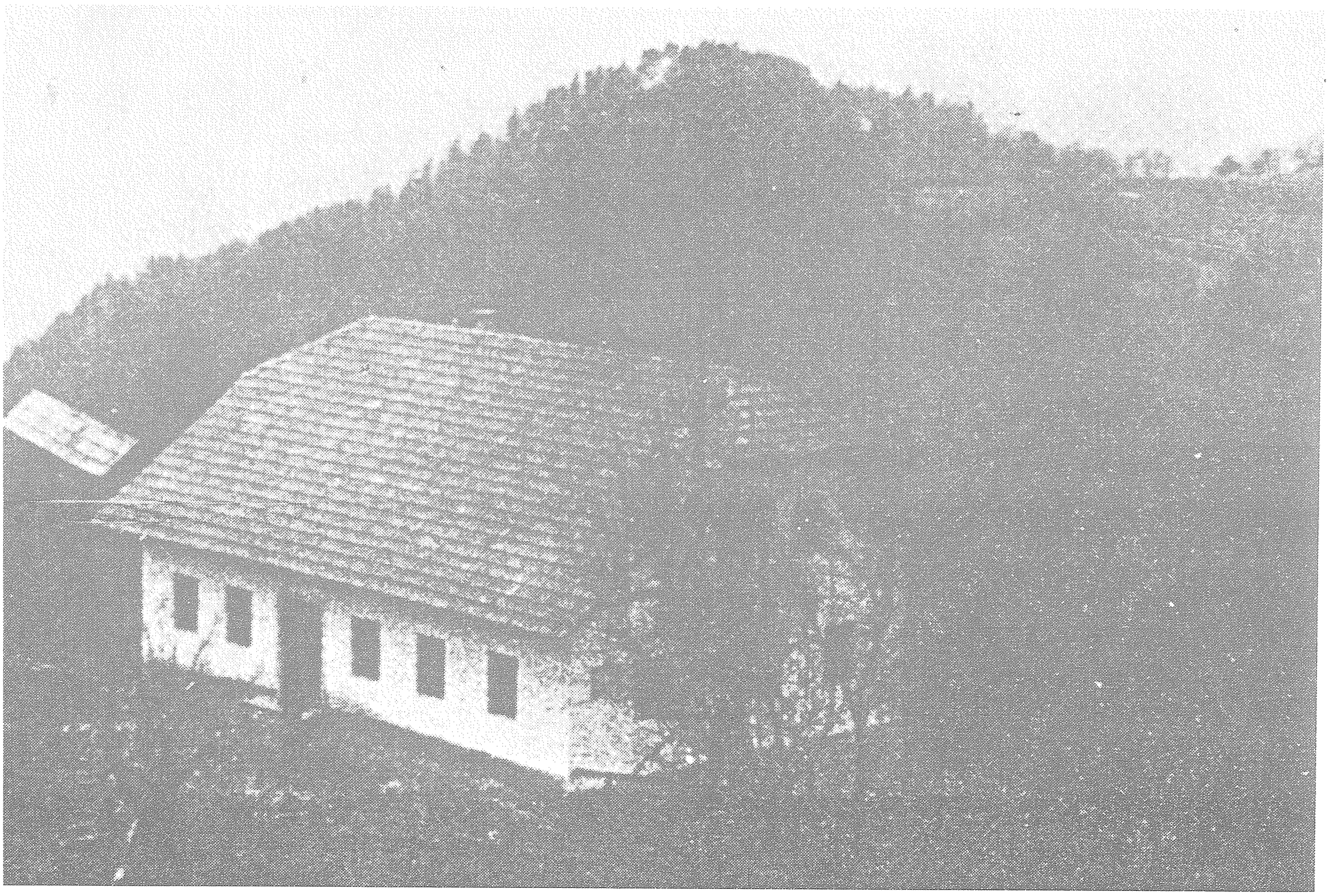
ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

CENTRALNA EKONOMSKA
KNJIŽNICA Ljubljana

2-147/92-4
ODPISANO

1992
Letnik 39
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1992

letnik 39, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Stalec, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 800.– SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 1600.– SIT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 150.– SIT, dvojna številka 300.– SIT, stare številke 80.– SIT.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1400 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Revija je oproščena prometnega davka z odlokom št. 314, Uradni list RS, št. 7/91.

© 1992 DMFA Slovenije – 1119

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Homomorfizmi v teoriji grafov — Homomorphisms in graph theory (Sandi Klavžar) 97–104

Numerično reševanje diferencialnih enačb, I. Eulerjeva metoda — Numerical solution of differential equations, I. Euler's method (Bojan Orel) 105–111

Računske naloge pri pouku fizike — The role of problem solving in physics education (Marjan Hribar) 113–116

Igre narave 4. Jedro ^{14}C je za devet velikostnih stopenj bolj dolgoživo od zrcalnega jedra ^{14}O — Some tricks of nature 4. The ^{14}C nucleus has a nine orders of magnitude longer halflife than the mirror nucleus ^{14}O (Mitja Rosina) 117–119

Odgovori — Answers

121. Še o Rothovi nalogi (Milan Hladnik) 120

Vesti — News

Ustanovitev slovenskega društva za umetno inteligenco (Matjaž Gams) 104

Priznanja Ambasador Republike Slovenije v znanosti (prir. Aleš Stanovnik) 116

Plemljevo leto 1992 (Ciril Velkovrh) 121–122

Raziskovalno delo v matematiki v Sloveniji (Josip Globevnik) 122–124

Ob 190. obletnici smrti Jurija Vege — vabilo 124

Prireditve v Plemljevem letu (Peter Petek) 125

44. občni zbor DMFA Slovenije — vabilo (Peter Petek) IV

Nove knjige — New books (Martin Juvan, Peter Prelovšek, Ivan Vidav, Zvonko Perat, Sandi Klavžar, Ivan Bratina, Jože Pahor) . . . . . 112, 119, 126–127, 127, 128, 128–III, III

HOMOMORFIZMI V TEORIJI GRAFOV*

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (1991) 05C12, 05C15, 05C25, 05C60.

V članku opišemo osnovne koncepte iz teorije grafovskih homomorfizmov: izomorfizem, homomorfizem, krepki homomorfizem, retrakcija, togi in retraktno togi grafi, jedro grafa.

HOMOMORPHISMS IN GRAPH THEORY

Basic concepts from the theory of graph homomorphisms are described: izomorphism, homomorphism, strong homomorphism, retraction, rigid and retract–rigid graphs, the core of a graph.

1. Uvod

Kaj v matematiki pomeni *(izo, homo, ...)morfizem*? Preslikavo, ki nam omogoča primerjati različne matematične objekte. Tako na primer *izomorfizem* pomeni preslikavo, ki v abstraktnem smislu izenači različne objekte; izomorfnih objektov zato ne ločimo.

In kaj so morfizmi v kategoriji grafov? Predlaganih je bilo več različnih morfizmov, med katerimi sta najpomembnejša: relacija „minor" in relacija „homomorfizem". V tem članku si bomo ogledali nekatere osnovne rezultate teorije homomorfizmov.

Za graf G naj $V(G)$ označuje množico njegovih točk in $E(G)$ množico njegovih povezav. Vsi obravnavani grafi bodo enostavni (brez večkratnih povezav in zank), neusmerjeni in končni. Vendar pripomnimo, da lahko večino konceptov in rezultatov posplošimo tudi na splošnejše grafe. K_n je polni graf na n točkah, C_n cikel na n točkah in P_n pot na n točkah.

Najpomembnejši morfizem grafov je vsekakor izomorfizem. Bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je *izomorfizem*, če je $uv \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $f(u)f(v) \in E(H)$. Grafa G in H sta izomorfna, $G \simeq H$, če obstaja izomorfizem $V(G) \to V(H)$. Izomorfizem grafa nase je *avtomorfizem*. Grupo vseh avtomorfizmov grafa G označimo z $\mathrm{Aut}(G)$. Klasični Fruchtov izrek pravi:

Izrek 1. *Za vsako končno grupo A obstaja tak graf G, da sta grupi A in $\mathrm{Aut}(G)$ izomorfni.*

Kasneje je Frucht dokazal, da za vsako končno grupo obstaja tudi ustrezni kubični graf (stopnja vsake točke je tri), še kasneje pa so Sabidussi, Izbicki in drugi pokazali, da obstajajo tudi ustrezni grafi s še natančneje predpisanimi lastnostmi.

---

* Članek je nastal na osnovi predavanja v okviru permanentnega izobraževanja učiteljev na FNT v Ljubljani, 19. 3. 1992.

2. (Krepki) homomorfizem

Naj bosta G in H dana grafa. Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je *homomorfizem* ali *grafovska preslikava*, če ohranja sosednost, tj. če iz $uv \in E(G)$ sledi $f(u)f(v) \in E(H)$. Očitno homomorfizem slika tudi povezave v povezave; ustrezno inducirano preslikavo iz $E(G)$ v $E(H)$ bomo označevali z f^*. Ker homomorfizem $f : V(G) \to V(H)$ slika točke v točke in povezave v povezave, ga bomo krajše pisali $f : G \to H$. Izomorfizem lahko redefiniramo kot obrnljiv homomorfizem, tj. homomorfizem f, za katerega obstaja f^{-1} in je tudi f^{-1} homomorfizem.

Produkt homomorfizmov $g : G \to H$, in $h : H \to I$ definiramo na običajen način: $h \circ g : G \to I$, $(h \circ g)(u) := h(g(u))$. Produkt homomorfizmov je spet homomorfizem. Homomorfizem vase imenujemo *endomorfizem.* Množica vseh endomorfizmov grafa G tvori monoid za produkt homomorfizmov, označimo ga z $\mathrm{End}(G)$. Hedrlin in Pultr sta dokazala naslednjo posplošitev Fruchtovega izreka. Tako kot za grupe lahko tudi tu pokažemo, da obstajajo ustrezni grafi s še natančneje predpisanimi lastnostmi.

Izrek 2. *Za vsak končen monoid M obstaja tak graf G, da sta monoida M in End(G) izomorfna.*

Graf H je *podgraf* grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H grafa G je *porojeni podgraf*, če je H maksimalni podgraf na točkah $V(H)$, tj. za u, $v \in V(H)$ je $uv \in E(H)$ natanko tedaj, ko je $uv \in E(G)$. Naj bosta dana grafa G in H in predpostavimo, da je $V(H) \subseteq V(G)$. Podgraf H na naraven način vložimo v G tako, da vsaki točki podgrafa priredimo ustrezno točko grafa. Torej, $\forall v \in V(H)$, $i(v) := v \in V(G)$. Tedaj je H podgraf v G natanko tedaj, ko je vložitev i homomorfizem in H je porojeni podgraf v G natanko tedaj, ko je $i : H \to i(H)$ izomorfizem.

Graf G je *n–obarvljiv*, če obstaja homomorfizem $c : G \to K_n$. Funkcijo c imenujemo *n–barvanje* grafa G. Če je n najmanjše število, za katero obstaja n–barvanje grafa G, pravimo, da je *kromatično število* grafa G enako n, $\chi(G) = n$. Ta definicija je ekvivalentna z običajno, intuitivno definicijo kromatičnega števila: to je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo, da točke grafa pobarvamo tako, da imata vsaki sosednji točki različno barvo.

Trditev 3. *Naj bo $f : G \to H$ homomorfizem. Tedaj je $\chi(G) \leq \chi(H)$.*

Dokaz. Naj bo $f : G \to H$ homomorfizem in naj bo $\chi(H) = n$. Po definiciji kromatičnega števila obstaja homomorfizem $g : H \to K_n$. Ker je $g \circ f$ homomorfizem $G \to K_n$, sledi $\chi(G) \leq n = \chi(H)$. ∎

Homomorfizem $f : G \to H$ je *krepki homomorfizem*, če sta f in f^* surjektivni preslikavi. Če je $f : G \to H$ krepki homomorfizem, H imenujemo *homomorfna slika* grafa G. *Akromatično število* grafa G, $\Psi(G)$, je največje število n, za katerega obstaja krepki homomorfizem $G \to K_n$. Definicija je ekvivalentna s standardno: akromatično število grafa je največje število barv, s katerimi lahko pobarvamo točke grafa tako, da vsaki sosednji točki

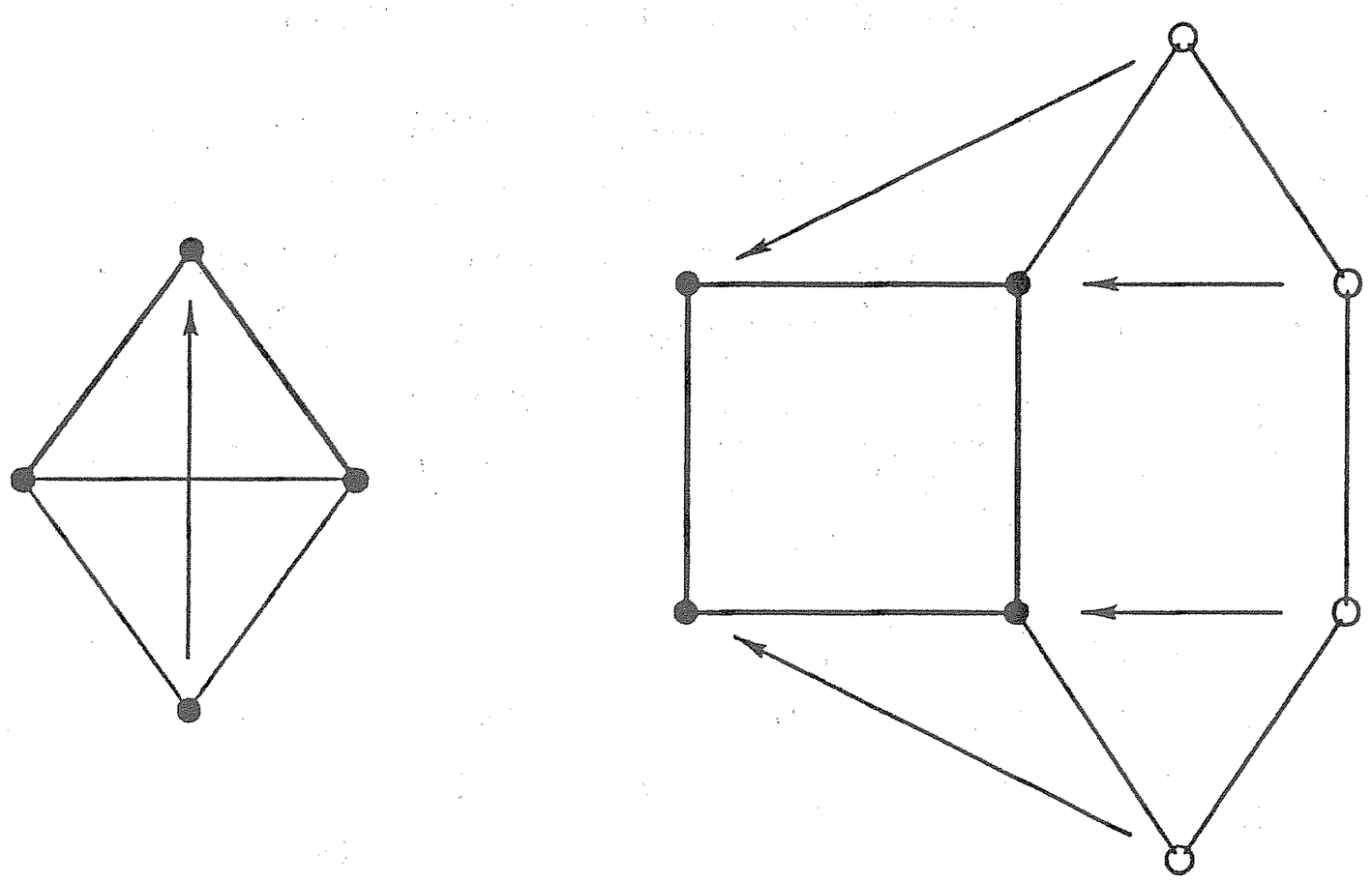
dobita različni barvi in da za vsaki dve barvi obstajata sosednji točki, ki imata izbrani barvi.

Trditev 4. *Naj bo $f : G \to H$ krepki homomorfizem. Tedaj je $\Psi(G) \geq$ $\geq \Psi(H)$.*

3. Retrakti

Naj bosta G in H dana grafa. H je *retrakt v G*, če obstajata homomorfizma $k : H \to G$ in $r : G \to H$, tako da za vsako točko $v \in V(H)$ velja $(r \circ k)(v) = v$. Preslikavo r imenujemo *retrakcija*, k pa *koretrakcija*. Če je H retrakt v G, potem lahko H identificiramo z ustreznim podgrafom v G. Zato bomo brez izgube za splošnost uporabljali poenostavljeno definicijo: podgraf H grafa G je retrakt v G, če obstaja homomorfizem $r : G \to H$, tako da za vsako točko $v \in V(H)$ velja $r(v) = v$.

Na sliki 1 sta preprosta primera retrakcij. Točke, ki pripadajo retraktu, so na sliki pobarvane črno. Leva retrakcija je enolično določena, v drugem primeru pa lahko poiščemo tudi druge retrakcije na cikel C_4.



Slika 1. Dve retrakciji

Razdalja med točkama u in v grafa G, $d_G(u, v)$, je dolžina najkrajše poti med u in v. Podgraf H grafa G je *izometrični* podgraf, če za vse $u, v \in$ $\in V(H)$ velja: $d_G(u, v) = d_H(u, v)$. Izometrični podgraf je porojeni podgraf in porojeni podgraf je podgraf. Obratni implikaciji ne veljata.

Pokažimo enostavna, vendar zelo uporabna potrebna pogoja za retrakt.

Izrek 5. *Naj bo H retrakt v G. Tedaj velja:*
(i) H je izometrični podgraf v G in
(ii) $\chi(H) = \chi(G)$.

Dokaz. (i) Naj bo H retrakt v G in r retrakcija. Naj bosta $u, v \in V(H)$ ter P pot med u in v v G, za katero velja $|P| = d_G(u,v)$. Ker je r retrakcija, je $r(P)$ sprehod med u in v v H in ker vsak sprehod vsebuje pot, mora biti $r(P)$ pot, sicer bi ne veljalo $|P| = d_G(u,v)$. Od tod sledi, da je $d_G(u,v) \geq d_H(u,v)$ in ker očitno velja $d_G(u,v) \leq d_H(u,v)$, je trditev (i) dokazana.

(ii) Naj bo $r : G \to H$ retrakcija. Tedaj iz trditve 3 sledi, da je $\chi(G) \leq \chi(H)$. Ker je H podgraf v G, je očitno tudi $\chi(H) \leq \chi(G)$. ■

Z $G - v$ označimo graf, ki ga dobimo iz G tako, da odstranimo točko v (in seveda vse povezave iz v).

Posledica 6. *Naj bo $r : G \to H$ retrakcija in naj za neko točko $v \in V(G)$ velja $\chi(G - v) < \chi(G)$. Tedaj je $r(v) = v$.*

Dokaz. Recimo nasprotno: $r(v) \neq v$ oziroma $v \notin V(H)$. Tedaj je H podgraf v $G - v$, zato je $\chi(H) \leq \chi(G - v)$. Ker je H retrakt v G, je po izreku 5 (ii), $\chi(H) = \chi(G)$. Ugotovitvi združimo v protislovje:

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \chi(G - v) < \chi(G). \blacksquare$$

4. Homomorfne razširitve

Tako kot v topologiji je tudi v teoriji grafov razširljivost homomorfizma (v posebnem razširljivost barvanja) v tesni zvezi z retrakti. Po drugi strani pa lahko retrakte karakteriziramo z zmožnostjo razširitve homomorfizmov.

Naj bo H podgraf v G, H' podgraf v G' in $f : H \to H'$ homomorfizem. Homomorfizem $g : G \to G'$ je *homomorfna razširitev* f, krajše *razširitev* f, če za vsako točko $v \in V(H)$ velja $g(v) = f(v)$. Pri razširitvah pogosto nastopa poseben primer $H' = G'$.

Izrek 7. *Naj bo H podgraf v G in $f : H \to G'$ homomorfizem. Naj bo X graf, ki ga dobimo tako, da v disjunktni uniji G in G' vsako točko $v \in V(H)$ identificiramo s sliko $f(v)$. Pri tem morebitne večkratne povezave identificiramo. Tedaj f lahko razširimo na $G \to G'$ natanko tedaj, ko je G' retrakt v X.*

Dokaz. Definirajmo preslikavo $j : V(G) \to V(X)$, $j(v) = v$. Opazimo, da j ni vedno vložitev, saj sta lahko dve različni točki iz $V(G)$ identificirani v X. Ker pa lahko identificiramo samo nesosedni točki, je j homomorfizem.

Predpostavimo najprej, da je G' retrakt v X in $r : X \to G'$ retrakcija. Produkt homomorfizmov $f' := r \circ j$ je homomorfizem $G \to G'$. Še več, naj bo $v \in V(H)$. V tem primeru je $f'(v) = r(j(v)) = r(v)$. Ker sta točki v in $f(v)$ identificirani v X, je $r(v) = r(f(v))$. Ker pa je $f(v) \in V(G')$, je $r(f(v)) = f(v)$. Za $v \in V(H)$ je tako $f'(v) = f(v)$, zato je f' homomorfna razširitev f.

Naj bo f' homomorfna razširitev f. Definirajmo $r : V(X) \to V(G')$ s predpisom:

$$r(u) = \begin{cases} f'(u), & u \in V(G); \\ u, & u \in V(G'). \end{cases}$$

Pokažimo najprej, da je r dobro definirana. Recimo, da je $u \in V(G)$ in $u \in V(G')$. Tedaj je u dobljen z identifikacijo neke točke $x \in V(H)$ ter $f(x) \in V(G')$. Zato je $r(x) = f'(x) = f(x) = r(f(x))$, torej definicija r ni protislovna. Naj bosta $u, v \in V(G)$ točki, ki ustrezata isti točki v X. Ker je tedaj $f'(u) = f(u) = f(v) = f'(v)$, je funkcija r dobro definirana. Preslikavi f' in j sta homomorfizma in ker je vsaka povezava grafa X povezava v G' ali v $j(G)$, je r retrakcija. ■

Izrek 8. *Naj bo H podgraf v G. Naslednje trditve so ekvivalentne:*
(i) H je retrakt v G,
(ii) vsak homomorfizem $H \to X$ lahko razširimo na $G \to X$,
(iii) vsak homomorfizem $X' \to H$ (X' podgraf v X), ki ga lahko razširimo na $X \to G$, lahko razširimo tudi na $X \to H$.

Dokaz. (i)⇒(ii). Naj bo r retrakcija $G \to H$ in $f : H \to X$ homomorfizem. Tedaj je $f \circ r$ homomorfizem $G \to X$ in za vsako točko $u \in$ $\in V(H)$ velja $f(r(u)) = f(u)$. Produkt $f \circ r$ je torej homomorfna razširitev f.

(ii)⇒(i). Postavimo $X = H$ in izberimo homomorfizem $i : H \to H$, $i(v) = v$. Po predpostavki i lahko razširimo do homomorfizma $G \to H$, to pa je iskana retrakcija.

(i)⇒(iii). Naj bo $r : G \to H$ retrakcija, $f' : X' \to H$ homomorfizem in $f : X \to G$ homomorfna razširitev f'. Produkt homomorfizmov $r \circ f : X \to$ $\to H$ je homomorfna razširitev f'.

(iii)⇒(i). Naj bo X' izomorfen H in X izomorfen G. Identiteto $X' \to H$ lahko razširimo na identiteto $X \to G$, zato po predpostavki lahko identiteto $X' \to H$ homomorfno razširimo do $X \to H$. Ker je X izomorfen G, je slednja razširitev retrakcija. ■

Izrek 5 (ii) je posledica izreka 8. Res, če predpostavimo $\chi(H) = n$ in v točki (*ii*) izreka 8 za X izberemo K_n, je izrek 5 (ii) pred nami.

5. Togi in retraktno togi grafi

Graf G je *asimetričen*, če je njegova grupa avtomorfizmov, $\mathrm{Aut}(G)$, trivialna in je *tog*, če je njegov monoid endomorfizmov, $\mathrm{End}(G)$, trivialen. Graf je *retraktno tog*, če nima netrivialnih retraktov.

Najprej dokažimo pomembno zvezo med togimi in retraktno togimi grafi.

Izrek 9. *Graf je tog natanko tedaj, ko je asimetričen in retraktno tog.*

Dokaz. Dokažimo najprej naslednjo lemo:

Lema A. *Vsaka končna polgrupa vsebuje idempotentni element.*

Naj bo $(A, *)$ končna polgrupa in $a \in A$. Zaradi končnosti polgrupe A obstajata naravni števili n, m, $n > m$, tako da velja $a^m = a^n$. Če je $n = m + 1$, takoj dobimo $a^{2m} = a^m$, sicer pa imamo:

$$\begin{aligned} a^{m(n-m)} * a^{m(n-m)} &= a^{m+m(n-m)} * a^{m(n-m-1)} \\ &= a^m * a^{m(n-m-1)} \\ &= a^{m(n-m)}. \end{aligned}$$

S tem je lema A dokazana, lotimo se izreka.

Če je graf tog, potem je očitno tudi asimetričen in retraktno tog. Obratno, naj bo grupa $Aut(G)$ trivialna, G retraktno tog in predpostavimo, da G ni tog. Zaradi asimetričnosti je zaloga vrednosti vsakega endomorfizma grafa G prava podmnožica v $V(G)$. Ker je množica vseh endomorfizmov grafa G polgrupa za produkt endomorfizmov, po Lemi A obstaja idempotenten endomorfizem r. Naj bo H podgraf v G, določen s sliko $r(G)$. H je pravi podgraf v G in $r : G \to H$ je očitno retrakcija, protislovje. ■

Pripomnimo, da v dokazu izreka 9 bistveno potrebujemo lemo A, saj izrek ne velja za neskončne grafe.

Vprašanje obstoja togih grafov je netrivialno vprašanje. Pozitiven odgovor seveda sledi iz izreka 2, vendar je v splošnem težko dokazati, da je kak graf tog, saj imamo na razpolago le malo tehnik za dokazovanje. Dokaz naslednjega izreka nam bo pokazal uporabnost izreka 9 (v kombinaciji z izrekom 5 in posledico 6) pri dokazovanju togosti grafa.

Izrek 10. *Za vsako naravno število n, $n \geq 8$, obstaja tog graf na n točkah.*

Dokaz. Naj bo $n \geq 8$ in $p = (n-4)/2$, če je n sodo število, ter $p = (n-5)/2$, če je n liho število. Konstruirajmo graf G_n na naslednji način. Naj bo C lih cikel dolžine $2p + 1$ in $0, 1, \ldots 2p$ njegove točke. Dodajmo točko c in jo povežimo z vsemi točkami cikla C. Nazadnje dodajmo še točki a in b ter povezave, ki so prikazane na sliki 2. Če je n liho število, dodajmo še točko d, ki jo povežemo s točkami a, b in 2.

Ker avtomorfizem izomorfno slika (porojene) cikle na (porojene) cikle in ohranja stopnje točk, se hitro prepričamo, da je graf G_n asimetričen.

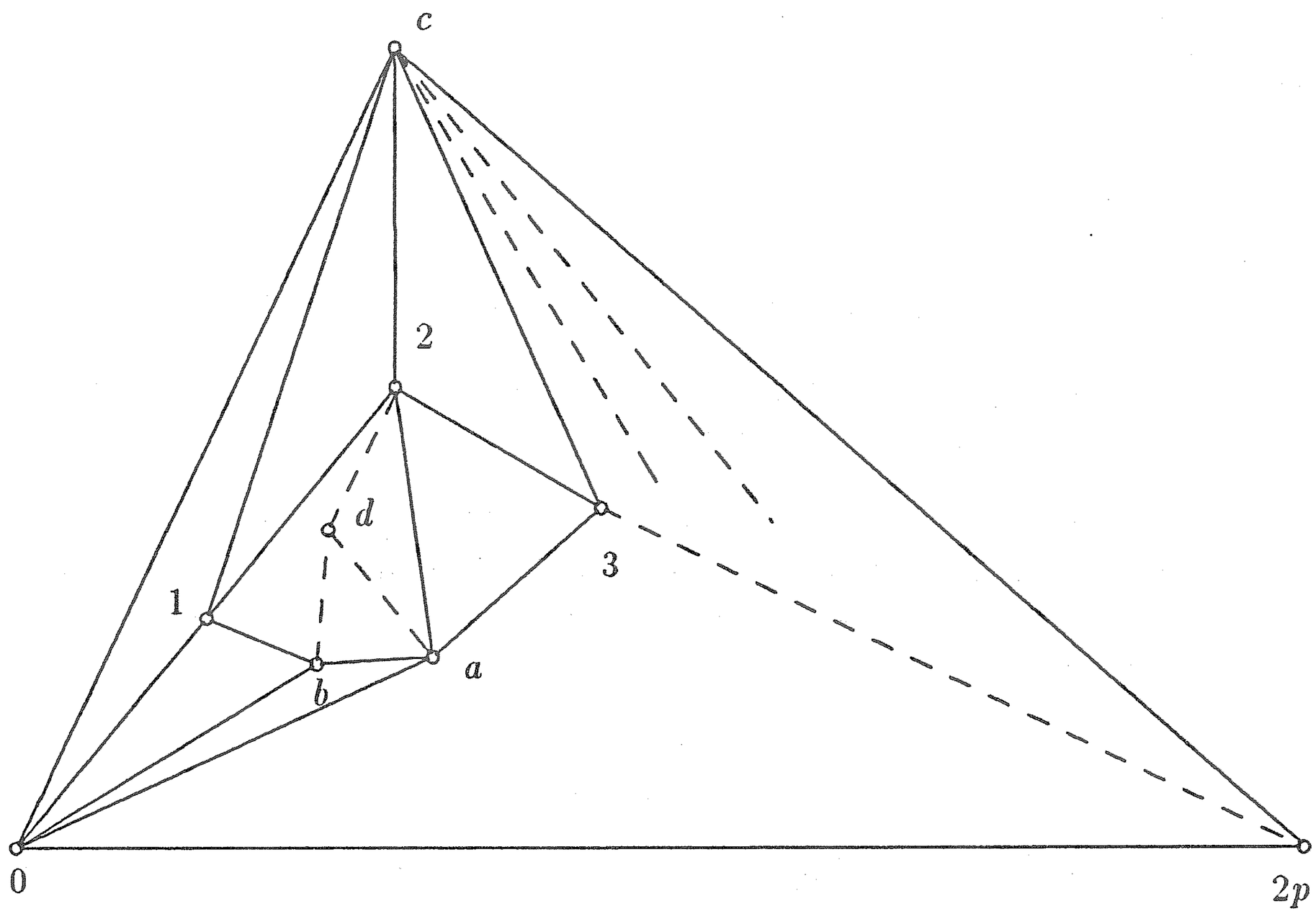
Naj bo r retrakcija $G_n \to H$. Opazimo, da je $\chi(G_n) = 4$. Neposredno se tudi prepričamo, da velja

$$\chi(G - c) = \chi(G - 0) = \chi(G - 1) = \chi(G - 2) = 3,$$

zato po posledici 6 velja $r(c) = c$, $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ in $r(2) = 2$.

Recimo, da je $r(3) \neq 3$. Tedaj je $r(3) = 1$, $r(a) = c$ in $r(b) = c$, protislovje. Torej je $r(3) = 3$.

Recimo sedaj, da je $r(a) \neq a$. Toda tedaj mora biti $r(a) = c$ in $r(b) = c$, protislovje. Zato je $r(a) = a$ in odtod tudi $r(b) = b$ in $r(d) = d$.



Slika 2. Togi grafi G_n

Ostanejo nam le še točke 4, 5, ..., $2p$. Recimo, da je $r(4) \neq 4$. Tedaj mora biti $r(4) = 2$. In dalje, $r(5) \in \{1,3\}$, $r(6) \in \{0,2\}$, ..., $r(2p-1) \in$ $\in \{1,3\}$. Nazadnje, $r(2p) = 1$, protislovje. Zato je $r(4) = 4$ in analogno ugotovimo, da se tudi preostale točke cikla C preslikajo vase.

G_n je torej retraktno tog in ker je tudi asimetričen, je po izreku 9 tog. Ker je G_n graf na n točkah, je dokaz končan. ■

Brez dokaza omenimo, da togih grafov G, $2 \leq |V(G)| \leq 7$, ni.

6. Jedro grafa

Podgraf H grafa G je *jedro grafa* G, če obstaja homomorfizem $G \to H$ in ne obstaja homomorfizem $G \to H'$, kjer je H' pravi podgraf v H. Graf imenujemo *jedro*, če je sam svoje jedro.

Trditev 11. *Jedro grafa je enolično določeno (do izomorfizma).*

Dokaz. Jedro grafa obstaja, ker ima družina podgrafov H v G, za katere obstaja homomorfizem $G \to H$, minimalne elemente glede na relacijo vsebovanosti.

Naj bosta H_1 in H_2 jedri grafa G in $f_1 : G \to H_1$ ter $f_2 : G \to H_2$ homomorfizma. Naj bo $g_1 : H_2 \to H_1$ zožitev preslikave f_1 na H_2. Ker je $g_1 \circ f_2$ homomorfizem $G \to H_1$ in ker je H_1 jedro, mora biti g_1 surjektivni homomorfizem. Podobno najdemo surjektivni homomorfizem $H_1 \to H_2$. To pa že pomeni, da sta H_1 in H_2 izomorfna. ■

Izrek 12. *Za graf G je ekvivalentno:*

(i) G je jedro,
(ii) End(G) = Aut(G),
(iii) G je retraktno tog.

Dokaz. (i)⇒(ii). V splošnem je $\mathrm{Aut}(G) \subseteq \mathrm{End}(G)$. Ker je G jedro, so njegovi edini endomorfizmi surjektivni homomorfizmi $G \to G$. Vsak tak endomorfizem pa je avtomorfizem. Zato je tudi $\mathrm{End}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$.

(ii)⇒(iii). Ker je netrivialna retrakcija endomorfizem na pravi podgraf, seveda ne more biti avtomorfizem.

(iii)⇒(i). Recimo, da G ni jedro in naj bo H jedro grafa G, $H \neq G$. Naj bo $f : G \to H$ homomorfizem. Ker je H jedro, je zožitev homomorfizma f na H izomorfizem, $g : H \to H$. Tedaj pa je $g^{-1} \circ f$ retrakcija $G \to H$, torej G ni retraktno tog. ■

LITERATURA

[1] R. Frucht, *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*, Comp. Math. **6** (1938) 239–250.
[2] Z. Hedrlin, A. Pultr, *On rigid undirected graphs,* Can. J. Math. **18** (1966) 1237–1242.
[3] P. Hell, *Absolute retracts in graphs,* Lecture Notes in Math. **406** (1974) 291–301.
[4] P. Hell, *An introduction to the category of graphs,* Ann. New York Acad. of Sci. **328** (1979) 120–136.
[5] P. Hell, J. Nešetřil, *Groups and monoids of regular graphs (and of graphs with bounded degrees),* Can. J. Math. **25** (1973) 239–251.
[6] P. Hell, J. Nešetřil, *The core of a graph,* Discrete Math., v tisku.

VESTI

USTANOVITEV SLOVENSKEGA DRUŠTVA ZA UMETNO INTELIGENCO

Ustanovna skupščina Slovenskega društva za umetno inteligenco (angl. Slovenian Artificial Intelligence Society, SLAIS) je bila na Inštitutu Jožef Stefan v Ljubljani dne 11.5.1992. Na njej je bilo 32 udeležencev, število članov pa že presega 50. Na ustanovni skupščini je bil sprejet statut in izvoljeni člani izvršnega odbora. Društvo bo intenzivno navezovalo stike s slovenskimi in mednarodnimi organizacijami in skrbelo za razširjanje področja umetne inteligence. Članarine ni, vendar pa bodo člani deležni podobnih ugodnosti kot pri drugih društvih. Pristopno izjavo in dodatne informacije dobite na naslovu:

Laboratorij za umetno inteligenco, Inštitut Jožef Stefan, Jamova 39, 61111 Ljubljana.

K sodelovanju vabimo vse posameznike, ki jih kakorkoli zanima umetna inteligenca, in vsa slovenska in mednarodna društva in združenja.

Matjaž Gams

NUMERIČNO REŠEVANJE DIFERENCIALNIH ENAČB
I. EULERJEVA METODA

BOJAN OREL

Math. Subj. Class. (1991) 65L05

V članku je opisana najpreprostejša numerična metoda za reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb: Eulerjeva metoda. Ob njej bomo spoznali osnovne pojme, ki nastopajo v numeričnem reševanju diferencialnih enačb, kot so lokalna in globalna napaka metode ter stabilnost.

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
I. EULER'S METHOD

In this paper the simplest method for solving systems of ordinary differential equations, Euler's method, is described. Some basic ideas connected with numerical solution of differential equations, such as local and global errors and stability will be explained with this simple method.

1. Uvod

Za mnoga področja naravoslovja in tehnike so diferencialne enačbe naravni jezik, s katerim opisujejo pojave, ki jih proučujejo. Ker te enačbe navadno niso rešljive s klasičnimi analitičnimi metodami, ali pa je analitična rešitev težko izračunljiva, so numerične metode za njihovo reševanje glavno orodje za pridobivanje kvantitativnih informacij o preučevanih pojavih.

Najprej si zastavimo okvir: reševati želimo začetne probleme, ki jih lahko zapišemo kot avtonomni sistem

$$y' = f(y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

kjer je $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ in $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Ta okvir je dovolj splošen, da vanj lahko spravimo tudi sisteme neavtonomnih navadnih diferencialnih enačb višjih redov, saj lahko neavtonomni sistem reda d

$$z' = g(x, z)$$

prevedemo v avtonomnega reda $d+1$ tako, da dodamo novo odvisno spremenljivko x in novo enačbo $x' = 1$. Tako dobimo razširjeni sistem oblike (1), kjer je

$$y(x) = (x, z_1, z_2, \ldots, z_d)^T$$

in

$$f(y) = (1, g_1(y), \ldots, g_d(y))^T.$$

Vseskozi bomo predpostavljali, da funkcija $f(y)$ zadošča Lipschitzovemu pogoju s konstanto L in da obstaja natanko ena rešitev problema (1).

2. Eulerjeva metoda

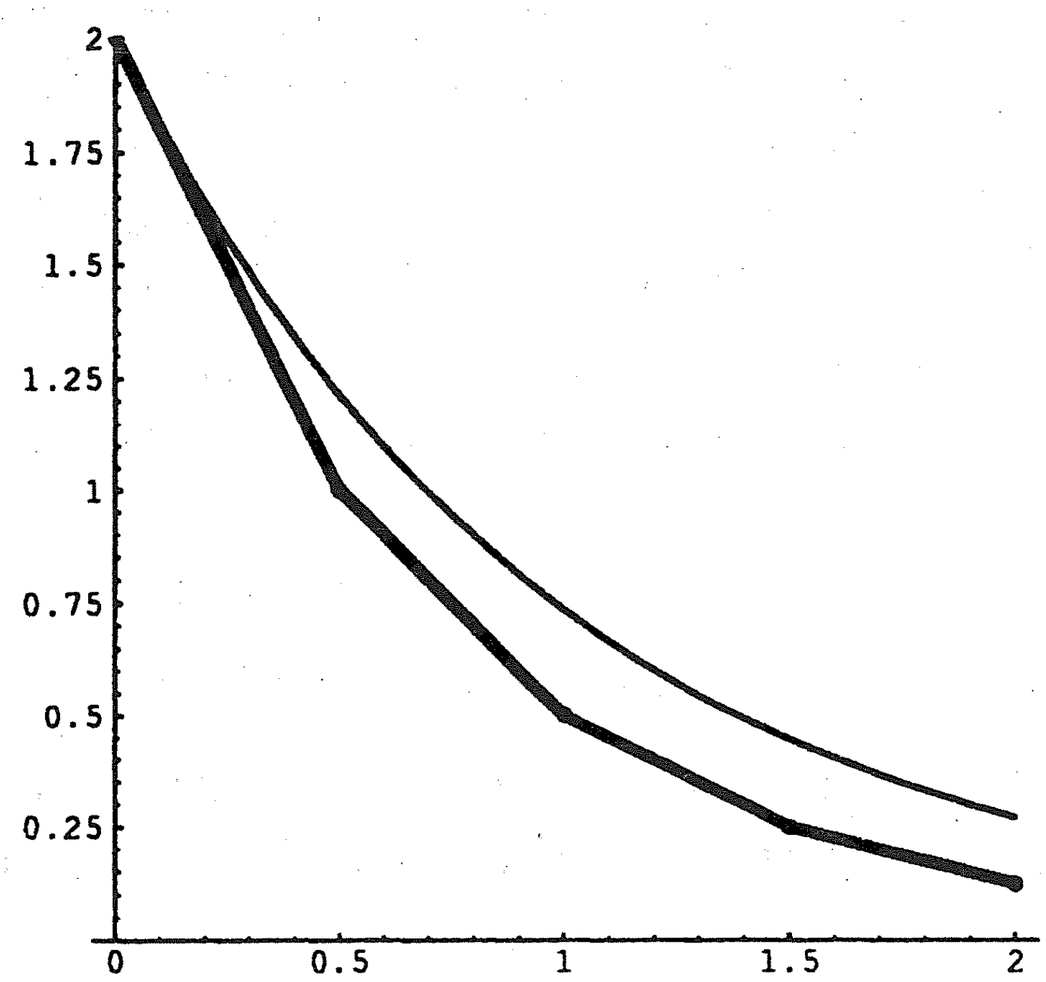
Najstarejša in najpreprostejša numerična metoda za reševanje diferencialnih enačb je Eulerjeva metoda. Z njo dobimo približke k vrednosti rešitve na zaporedju *vozliščnih* točk $(x_0, x_1, \ldots)$. Zaporedje *korakov metode* naj bo definirano kot $h_1 = x_1 - x_0, h_2 = x_2 - x_1, \ldots$. Poleg y_0, ki je enak vrednosti rešitve $y(x_0)$, je zaporedje približkov $y_1 \approx y(x_1)$, $y_2 \approx y(x_2), \ldots$ določeno s formulo

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(y_n), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Geometrijska interpretacija te formule je za skalarne enačbe $d = 1$ očitna. Diferencialna enačba (1) definira polje smeri v ravnini (x, y). Rešiti diferencialno enačbo z geometrijskega vidika pomeni določiti krivuljo $y = y(x)$, ki poteka skozi začetno točko (x_0, y_0) in njen naklon v vsaki točki sovpada z naklonom, ki ga definira polje smeri. Če približek k rešitvi, ki smo ga z (2) definirali le na diskretni množici točk, razširimo s predpisom

$$Y(x) = \begin{cases} y_0 & x = x_0 \\ y_n + (x - x_n) f(y_n) & x \in (x_n, x_{n+1}], \quad \text{za } n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

dobimo zvezno funkcijo. Graf funkcije $Y(x)$ je poligonska črta, ki se začenja v začetni točki (x_0, y_0) in ima lastnost, da je naklon vsake njene povezave predpisan s poljem smeri v njenem levem krajišču (sl. 1).



Slika 1. Rešitev diferencialne enačbe z Eulerjevo metodo kot poligonska črta.

Formula (2) nam ponuja tudi nekaj analitičnih interpretacij:

1. Če v enačbi (1) odvod v točki (x_n, y_n) aproksimiramo z diferenčnim kvocientom, dobimo
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} = f(y_n).$$
Iz te enačbe izračunamo y_{n+1} in dobimo (2).
2. Če integriramo enačbo (1) na intervalu $[x_n, x_{n+1}]$, dobimo
$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(y(t))\, dt.$$

Če integral aproksimiramo z levim pravokotniškim pravilom in vzamemo y_n namesto $y(x_n)$, spet dobimo (2).

3. Rešitev enačbe (1) lahko formalno razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke x_n:

$$y(x_n + h_{n+1}) = y(x_n) + h_{n+1} f(y(x_n)) + \frac{1}{2} h_{n+1}^2 y''(x_n) + \cdots. \tag{4}$$

Formulo (2) dobimo, če to vrsto nadomestimo z vsoto prvih dveh členov.

Lokalna napaka metode. Pri numeričnem reševanju diferencialne enačbe (1) nas predvsem zanima kvaliteta približka, ki je odvisna od različnih faktorjev (numerična metoda, velikost koraka (h_n), obnašanje točne rešitve problema $y(x)$, računalnika, na katerem računamo, ...). Tu si bomo ogledali le, kako na kakovost približka vpliva izbor metode (v našem primeru Eulerjeve metode), zanemarili pa bomo vse druge možne vplive. Najprej si oglejmo, kakšna je napaka, ki jo naredimo z Eulerjevo metodo na vsakem posameznem koraku. Definirajmo:

Definicija 1. Lokalna napaka metode *v točki x_n je razlika med numeričnim približkom y_n in točno rešitvijo začetnega problema*

$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_{n-1}) = y_{n-1},$$

izračunana v točki $x_{n-1} + h_n$:

$$l_n = y(x_n) - y_n.$$

Iz enačbe (4) vidimo, da je lokalna napaka Eulerjeve metode enaka ostanku Taylorjeve vrste, ki ga lahko izrazimo z drugim odvodom

$$l_n = \frac{h_n^2}{2} y''(\xi_n) \qquad x_{n-1} \le \xi_n \le x_n. \tag{5}$$

Red konsistence metode za reševanje diferencialnih enačb definiramo kot celo število p, za katerega je $l_n = O(h_n^{p+1})$. Metoda, ki ima red konsistence večji ali enak 1, je *konsistentna.* Eulerjeva metoda je torej konsistentna in ima red konsistence enak 1.

Globalna napaka metode. Pri ocenjevanju kvalitete numerične rešitve nas bolj kot lokalna napaka metode zanima razlika med približno in točno rešitvijo danega problema.

Definicija 2. Globalna napaka metode *v točki x_n je razlika med numerično in točno rešitvijo:*

$$g_n = y_n - y(x_n),$$

kjer je $y(x)$ točna rešitev začetnega problema (1).

Zaradi enostavnosti privzemimo, da je korak metode konstanten: $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$. Če predpostavimo še, da je točna rešitev dvakrat zvezno odvedljiva, lahko ocenimo globalno napako metode v skalarnem primeru $d = 1$.

Izrek 3. *Točna rešitev začetnega problema naj na intervalu $[x_0, x_n)$ zadošča neenačbi*

$$|y''(x)| \leq K,$$

kjer je $K > 0$. Potem je globalna napaka Eulerjeve metode v točki $x_n = x_0 + nh$ omejena z

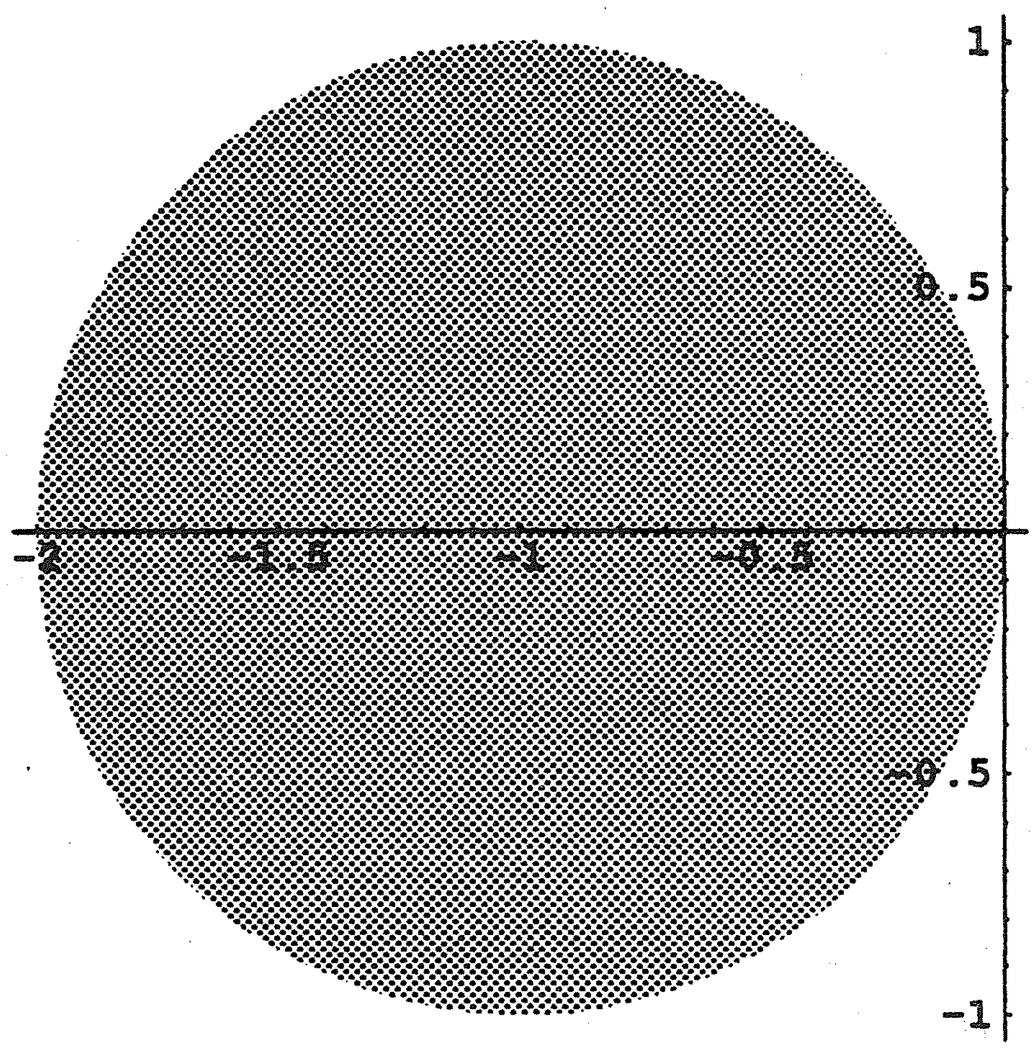
$$|g_n| \leq \frac{hK}{2L}(e^{(x_n - x_0)L} - 1), \tag{6}$$

kjer je L Lipschitzova konstanta za funkcijo f.

Dokaz tega izreka lahko najde bralec v [3] ali [4].

Iz enačbe (6) vidimo, da se pri $h \to 0$ globalna napaka v fiksni točki obnaša kot $O(h)$, torej približki, izračunani z Eulerjevo metodo, konvergirajo proti pravi rešitvi problema (1). Metode s to lastnostjo imenujemo *konvergentne* metode. Zavedati se moramo, da z oceno (6) dobimo zgornjo mejo za globalno napako, ta pa je običajno zelo pesimistična, zato pa tudi neprimerna za dejansko vnaprejšnje ocenjevanje napake.

Slika 2. Območje absolutne stabilnosti Eulerjeve metode



Stabilnost. Poleg lokalne napake metode in globalne napake na fiksnem intervalu je velikokrat zanimivo opazovati obnašanje numeričnega približka na daljšem intervalu. Za *testno enačbo* navadno vzamemo kar preprosto linearno homogeno enačbo s konstantnim koeficientom

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Eulerjeva metoda (2) nam v tem primeru da

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Če pišemo $z = h\lambda$, je torej $y_n = (1 + z)^n y_0$, prava rešitev enačbe (7) pa je seveda $y(x_n) = e^{nz} y_0$. Kadar je $\Re(z) \leq 0$ (to je na vsej levi polravnini

kompleksne ravnine), je absolutna vrednost prave rešitve omejena. Numerični približki pa so omejeni, kadar je izpolnjen pogoj $|1+z| \leq 1$, to pa je le na zaprtem disku polmera 1 in s središčem v točki -1. Ta zaprti disk imenujemo *območje absolutne stabilnosti* Eulerjeve metode (sl. 2).

Pri reševanju začetnih problemov z omejenimi rešitvami moramo velikost koraka metode vedno izbirati tako, da bo $h\lambda$ znotraj območja absolutne stabilnosti, sicer se nam lahko zgodi, da bo omejena rešitev enačbe aproksimirana z neomejeno, to pa obenem pomeni, da bo tudi napaka lahko neomejeno naraščala. Ta pogoj pa pri nekaterih problemih drastično omejuje velikost koraka h.

3. Primer

Kot primer rešimo začetni problem

$$y' = -y^2, \qquad y(1) = 1 \tag{8}$$

na intervalu $[1,2]$. V tabeli 1 so tabelirane lokalna in globalna napaka v točkah $1.1, 1.2, \ldots, 2.0$ pri treh različnih dolžinah koraka.

Tabela 1. Napaka pri reševanju problema (8) z Eulerjevo metodo.

	Lokalna napaka			Globalna napaka		
x	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
1.1	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$0.9 \cdot 10^{-2}$	$0.8 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-4}$
1.2	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
1.3	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
1.4	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$
1.5	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
1.6	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
1.7	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
1.8	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
1.9	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
2.0	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$

Opazimo lahko, da je v vsaki fiksni točki lokalna napaka sorazmerna kvadratu dolžine koraka, globalna napaka pa je sorazmerna z dolžino koraka. Torej moramo dolžino koraka zmanjšati za isti faktor, za katerega hočemo povečati natančnost rezultata.

Poglejmo še, kako dober približek za lokalno napako je (5) in kako natančna je ocena globalne napake (6). Ker je točna rešitev začetnega problema (8) $y = 1/x$, je $|y''(\xi_n)| \leq 2$ za $\xi_n \in [1,2]$, torej je po (5) lokalna napaka približno enaka $l_n \approx h_n^2$, kar je dober približek le na začetku intervala, potem pa je lokalna napaka dejansko manjša.

Zaradi $\partial f/\partial y = -2y$ lahko vzamemo za Lipschitzovo konstanto $L = 2$, iz (6) pa dobimo

$$|g_n| \leq h\frac{e^2 - 1}{2} \approx 3.2h,$$

kar je očitno zelo pesimistična ocena.

4. Možne posplošitve

Eulerjeva metoda je preprosta za uporabo, vendar ima razmeroma veliko lokalno napako in zelo omejeno območje absolutne stabilnosti. Pri iskanju boljših metod za reševanje problema (1) moramo paziti predvsem na red konsistence metode in na njeno območje absolutne stabilnosti. Ti dve lastnosti pa sta žal velikokrat v nasprotju z enostavnostjo metode in njeno računsko zahtevnostjo. Iskanje pravega kompromisa je seveda odvisno od problema, ki ga rešujemo.

Oglejmo si zato nekaj možnosti za posplošitev Eulerjeve metode.

Upoštevajmo višje odvode. Ugotovili smo že, da Eulerjevo metodo lahko interpretiramo kot Taylorjevo vrsto, pri kateri smo upoštevali le prva dva člena (do vključno prvega odvoda). Če upoštevamo en člen več, pridemo zaradi

$$y''(x) = \frac{d}{dx}f(y(x)) = \frac{d}{dy}f(y(x))f(y(x))$$

do metode

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(y_n) + \frac{h_n^2}{2}f(y_n)\frac{d}{dy}f(y_n),$$

ki je drugega reda. Z upoštevanjem še višjih odvodov lahko dobimo metodo poljubnega reda, cena ki jo moramo za to plačati, pa je seveda računanje višjih odvodov funkcije f. Zato v preteklosti te metode niso bile zelo priljubljene, s pojavom računalniških paketov za simbolično računanje pa postajajo vse bolj zanimive.

Izračunajmo več vrednosti odvoda. Namesto da vrednost funkcije f izračunamo le enkrat kot pri Eulerjevi metodi, lahko poiščemo metodo, pri kateri je potrebno na vsakem podintervalu vrednost funkcije f izračunati večkrat, zato pa dobimo mnogo boljši približek. Za primer vzemimo dvostopenjsko metodo Runge–Kutta v obliki

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1}(b_1k_1 + b_2k_2), \tag{9}$$

kjer sta

$$k_1 = f(y_n) \qquad \text{in} \qquad k_2 = f(y_n + ah_{n+1}k_1).$$

Konstante b_1, b_2 in a moramo določiti tako, da se bo desna stran enačbe (9) čim bolje ujemala z ustrezno Taylorjevo vrsto:

$$y(x_n + h_{n+1}) = y(x_n) + h_{n+1} f(y_n) + \\ + \frac{h_{n+1}^2}{2} f(y_n) f'(y_n) + O(h_{n+1}^3). \tag{10}$$

Po drugi strani pa je zaradi

$$k_2 = f(y_n) + a h_{n+1} k_1 f'(y_n) + O(h_{n+1}^3)$$

razvoj desne strani enačbe (9) v Taylorjevo vrsto enak

$$y_{n+1} = y_n + (b_1 + b_2) h_{n+1} f(y_n) + a b_2 h_{n+1}^2 f(y_n) f'(y_n) + O(h_{n+1}^3). \tag{11}$$

Primerjajmo vrsti (10) in (11), pa vidimo, da se ujemata do vključno členov drugega reda, če sta izpolnjena pogoja

$$b_1 + b_2 = 1$$
$$a b_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Ta sistem enačb ima splošno rešitev $b_1 = \frac{1}{2a}$, $b_2 = 1 - \frac{1}{2a}$, $a \neq 0$, ena izmed njih je

$$a = 1 \qquad b_1 = b_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Če želimo, da se vrsti (10) in (11) ujemata v še več členih, moramo na vsakem podintervalu vrednost funkcije f računati večkrat.

Upoštevajmo več že izračunanih točk. Namesto da na vsakem podintervalu večkrat računamo vrednost funkcije f, jo lahko računamo le enkrat, zato pa poleg y_n upoštevamo več že prej izračunanih vrednosti $y_{n-1}, f(y_{n-1}), y_{n-2}, f(y_{n-2}), \ldots$. Take metode imenujemo veččlenske metode. Kot primer navedimo 2-člensko metodo drugega reda

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(y_n),$$

ki je poznana pod imenom *sredinska metoda* ali tudi metoda *žabjega skoka* (ang. *leap-frog method*). Izpeljemo jo bodisi tako, da odvod aproksimiramo s simetrično diferenco, bodisi s sredinsko kvadraturno formulo.

V nekaj naslednjih člankih si bomo podrobneje ogledali posplošitve Eulerjeve metode v nakazanih smereh.

LITERATURA

[1] Z. Bohte, *Numerične metode*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1990.

[2] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations — Runge-Kutta and General Linear Methods*, John Wiley & Sons, Chichester 1987.

[3] S. D. Conte in C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill, New York 1980.

[4] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York 1962.

NOVE KNJIGE

BATAGELJ V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur, 2. del, DMFA Slovenije 1992, 144 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 26)

Potem, ko je pred kratkim izšel prvi del zbirke rešenih nalog iz diskretnih struktur, je sedaj pred nami še drugi del. Naloge v njem pokrivajo snov, ki jo študentje prvega letnika računalništva na ljubljanski univerzi poslušajo v drugem semestru pri predmetu Diskretne strukture.

Tako dobro polovico zbirke sestavljajo naloge iz algebre in njihove rešitve. Po vrsti sledijo poglavja z nalogami iz algebrskih struktur z eno operacijo, grup in permutacijskih grup. Večina nalog je standardna in preverja študentovo razumevanje osnovnih pojmov ter podaja nekatere osnovne prijeme pri reševanju podobnih nalog. Nato sledijo naloge iz polkolobarjev in mrež. Naloge o teh strukturah redko srečamo v zbirkah, ki obsegajo le osnove algebre, vendar pa so tako polkolobarji kot mreže pomembni pri formaliziranem pristopu k nekaterim algoritmom. Poudarek je na končnih obsegih, katerih uporaba je v računalništvu precej razširjena.

Drugi del zbirke pokriva osnove teorije grafov. Naloge so razdeljene v tri razdelke. V prvem so tiste, ki obravnavajo nekatere pomembne skupine grafov, zaporedja stopenj točk in druge osnovne invariante grafov. V drugem se reševalec sreča s sprehodi in obhodi v grafih ter povezanostjo. Tretji razdelek o grafih pa sestavljajo predvsem kombinirane naloge, ki zahtevajo preverjanje nekaterih klasičnih lastnosti grafov ali družin grafov. Študent mora ugotoviti, kako je z barvanostjo, hamiltonostjo ali ravninskostjo podanega grafa. Pri tem mora bralec poznati standardne kriterije za določanje omenjenih invariant.

Vsebina zbirke je trenutno usklajena s programom predmeta Diskretne strukture na FER (prvi avtor že nekaj let predava ta predmet) in je namenjena predvsem študentom te smeri. Naloge iz algebre so večinoma lahke in namenjene prvemu stiku bralca z abstraktno algebro. Klub temu pa bodo nekatere med njimi koristno dopolnilo tudi študentom matematike pri predmetu Algebra II in pa študentom matematične smeri na pedagoški fakulteti. Tudi naloge iz teorije grafov predstavljajo prijetno novost. Kolikor vem, dosedaj v slovenščini še nimamo podobne zbirke. Nekatere naloge iz teorije grafov bi po mojem mnenju lahko uporabili tudi na matematično usmerjenih srednjih šolah. Vse naloge v zbirki so rešene, nekatere pa poleg tega vsebujejo še dodatno razlago.

Zbirka je napisana matematično korektno in ne prezapleteno. Za bralce, ki ne poslušajo predmeta Diskretne strukture, bi bilo dobro v zbirko vključiti še nekaj dodatnih strani s seznamom uporabljenih definicij in pomembnejšimi izreki (to velja predvsem za teorijo grafov). Sicer pa je zbirka napisana primerno krogu bralcev, ki jim je namenjena.

Martin Juvan

RAČUNSKE NALOGE PRI POUKU FIZIKE

MARJAN HRIBAR

PACS 01.40.Ej 01.40.Gm

Prispevek obravnava vlogo računskih nalog pri pouku fizike v srednjih šolah.

THE ROLE OF PROBLEM SOLVING IN PHYSICS EDUCATION

Some open questions regarding the role of problem solving in secondary school are discussed.

V novejšem času je v revijah s področja pouka fizike živahna razprava o računskih nalogah iz fizike, o reševanju nalog in o njihovem pomenu za razumevanje predmeta. Razpravo je vzpodbudilo spoznanje, da z nalogami pri učencih ne dosežemo širšega razumevanja fizike [1]–[4].

Reševanje računskih nalog ima tudi pri nas dolgo tradicijo. Ne le, da so naloge učiteljem učinkovito sredstvo za zbiranje ocen, tudi tekmovanja jih vzpodbujajo, v zadnjem času pa še sprejemni izpiti na prehodu iz osnovne v srednjo in iz srednje v visoko šolo. Zato ni čudno, da so cenjene zbirke nalog iz fizike, zlasti take z rešitvami. Izid zadnje je vzpodbudil pričujoče pisanje [6].

V čem je težava?

Pri obravnavi fizikalnih pojavov pridemo do matematičnih zapisov zakonov, do enačb, ki so v okviru veljavnosti uporabne v najrazličnejših, na prvi pogled povsem nesorodnih primerih. V dijaških očeh je zato uporaba enačb nejasna in skoraj mistična. Razumevanje je dano le peščici izbrancev. Ni čudno, da je reševanje nalog za dijake od „teorije" povsem ločena veščina.

Z obširnimi raziskavami so psihologi ugotavljali razlike med postopki, ki jih uporabljajo pri reševanju fizikalnih problemov dijaki in študenti, recimo jim novinci, na eni strani in izkušeni fiziki, recimo jim eksperti, na drugi [5].

Novinci se lotevajo nalog naravnost, ne da bi si skušali ustvariti o problemu jasno kvalitativno predstavo. Pri reševanju uporabljajo nekatere standardne postopke, ki jih lahko predstavimo takole:

- zapiši vse enačbe, ki povezujejo neznane podatke z znanimi, in jih zmešaj med seboj tako, da lahko izračunaš zahtevano količino;
- pobrskaj po zbirki rešenih nalog in poskusi z zgledom, pri katerem najdeš iste ključne besede;
- povprašaj inštruktorja in se nauči na pamet.

Dijaki so lahko pri tem kar uspešni, saj različnih tipov nalog ni veliko. Za pozitivno oceno pri pismeni vaji iz posameznega poglavja fizike jih je treba obvladati le nekaj.

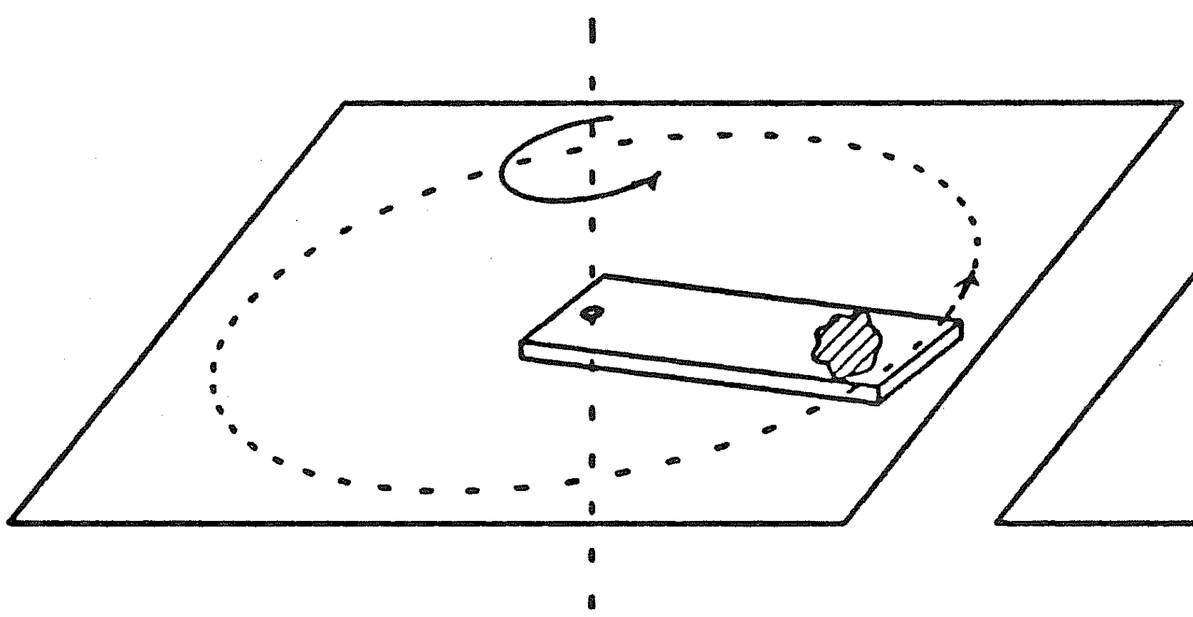
Eksperti se lotijo fizikalnih problemov najprej z okvirno kvalitativno analizo. Skušajo poiskati osnovna načela in zakone, ki jih lahko uporabijo

pri reševanju. Pri tem si pomagajo z analogijami in sploh z neformalnim razmišljanjem.

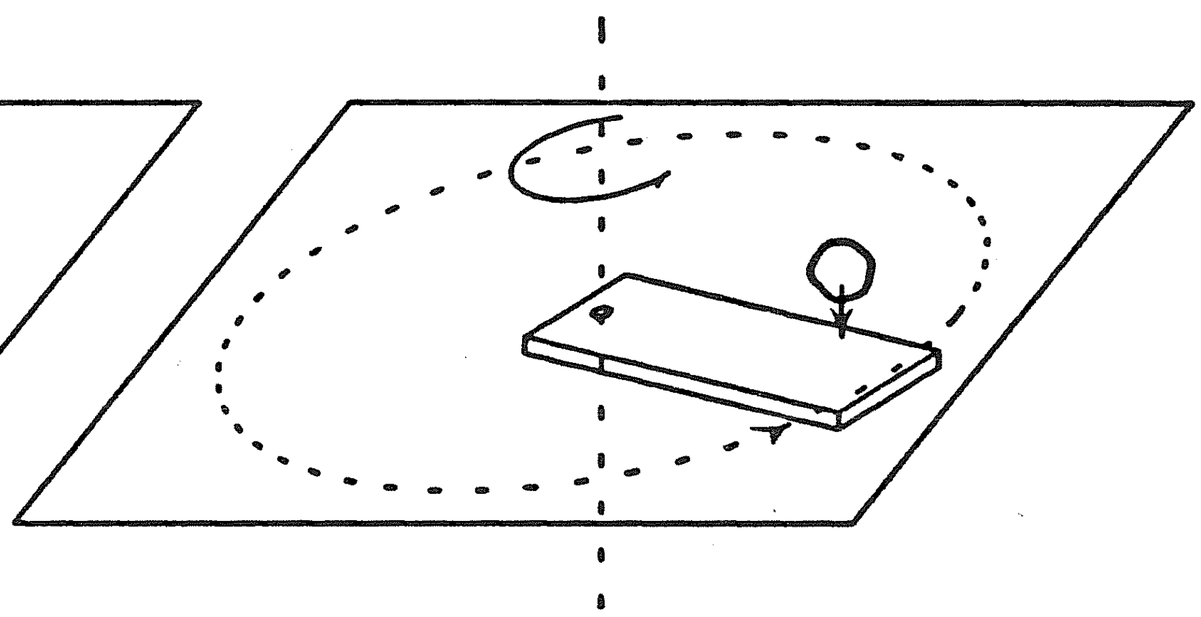
Dve spoznavnostni kategoriji, kaže, ločujeta novince od ekspertov. To sta organizacija in uporaba znanja. Znanje novincev je bolj ali manj nepovezano, amorfno. Učenci ga uporabljajo lokalno in skušajo priti do rešitev s povezavami na osnovi formalnih kriterijev. Znanje ekspertov je hierarhično urejeno, z mnogimi povezavami. Uporabljajo ga globalno, potem ko s kvalitativno analizo umestijo problem v miselno shemo.

Naslednji zgled, ki ga povzemamo po (2), naj bi kazal razliko v pristopu. Postavljeno je bilo naslednje vprašanje:

1. *Lata z maso 1 kg in z dolžino 1 m je na vodoravni podlagi in se vrti brez trenja s kotno hitrostjo 3 s^{-1} okoli navpične osi skozi krajišče (sl. 1). Na lati je 50-gramska kepa ilovice v razdalji 80 cm od osi. Kolikšna je sila med kepo in lato?*

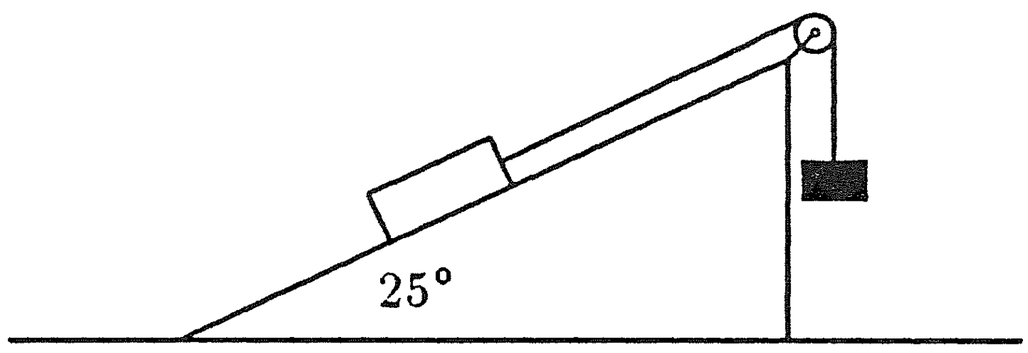


Slika 1



Slika 2

A. *Lata z dolžino 1,5 m in z maso 0,2 kg je na vodoravni podlagi in se vrti brez trenja s kotno hitrostjo 5 s^{-1} okoli navpične osi skozi krajišče. Kepa ilovice z maso 35 g pade na sredo late v navpični smeri in se prilepi nanjo (sl. 2). Kolikšna je potem kotna hitrost late?*



Slika 3

B. *Kvader z maso 60 kg zadržujemo na gladkem klancu z nagibom 25°. Na kvader navežemo lahko vrvco, ki je napeljana prek škripca na vrhu klanca in ima na drugem krajišču prosto visečo utež (sl. 3). Kolikšna naj bo masa uteži, da kvader miruje, ko ga spustimo?*

Vprašanje: *Katero od nalog A in B bi reševali na podoben način kot nalogo 1? Pojasnite odgovor!*

Novinci so se odločali za nalogo A, ker nastopata v njej vrteča se lata in kepa ilovice. Eksperti so se odločali za nalogo B, ker jo tako kot nalogo 1 rešimo z uporabo Newtonovih zakonov.

Vprašanje je, ali lahko s primernim delom v šoli pomagamo učencem vzpostaviti zvezo med zakoni fizike in vprašanji, ki jih morajo reševati, ali celo zvezo med zakoni fizike in pojavi v vsakdanjem okolju.

Zdi se, da uveljavljene metode pouka same vzpodbujajo odnos, ki ga imajo učenci do reševanja nalog. Običajno učitelj pokaže učencem na nekaj zgledih, kako je zakone mogoče uporabljati. Pri tem ne more mimo formalne plati pri reševanju naloge, kot so zapis podatkov, skiciranje, zapis zakonov in enačb. Kvalitativno predstavitev naloge in razmislek pri iskanju rešitve, ki sta bistvena za razumevanje, učenci pogosto preslišijo. Na tabli in v zvezkih ostanejo le enačbe. To ustvarja napačen vtis, da so enačbe tiste, ki prinesejo rešitve. Pri nadaljnjem delu tudi učitelj rad spregleda kvalitativni opis pojavov in je zadovoljen, če je reševanje formalno pravilno.

Kako preseči to stanje? Poskusiti bi bilo vredno s poudarjanjem kvalitativne analize problemov in z vztrajanjem na njej. Kvalitativna analiza z uvajanjem potrebnih fizikalnih količin naj bo uvod v reševanje naloge. Temu koraku naj sledi iskanje zakonov in nazadnje zapis enačb. S tem je glavni del naloge rešen. Reševanje enačb in iskanje neznanih količin v srednješolski fiziki ne bi smelo povzročati težav. Rezultate, ki jih da račun, je treba spet preveriti s fizikalnega stališča. Pomeni, da morajo imeti pravo enoto, da morajo imeti smiseln red velikosti, da morajo voditi v smiselne limitne primere. Kvalitativna analiza pogosto pelje v različne možne poti do rešitve, navaja učence k postavljanju in ocenjevanju hipotez in analogij. Razgovor o tem lahko popestri eksperiment.

V podrobnostih je smiselno ločiti postopek pri reševanju nalog nekako v pet faz. Prva je branje teksta, izvleček podatkov, morebitna skica. Druga je ustvarjanje nazorne predstave o dogajanju oziroma kvalitativna analiza, v katero vpletemo ustrezne fizikalne količine ali nadomestimo fizične objekte z njihovimi fizikalnimi predstavitvami. V to fazo sodijo vse potrebne poenostavitve in abstrakcije in iskanje fizikalnih zakonitosti, ki pri dogajanju veljajo. To je najzahtevnejša in najpomembnejša faza pri reševanju naloge. Prav bi bilo, da bi bil rezultat te analize vselej zapisan kot del rešitve. Tretja faza je zapis enačb in četrta reševanje enačb. Končna, peta faza je vrednotenje rezultatov, morebitno preverjanje limitnih vrednosti in podobno.

Kvalitativna analiza, ki naj privede do predstavitve problema s fizikalnimi pojmi in ustreznimi zakonitostmi, naj bi bila osnova pri reševanju vsake fizikalne naloge, pa čeprav še tako preproste. Tudi vrednotenje rezultata je potrebno posebej poudariti. Reševanje nalog naj bi med drugim učencem pomagalo ustvariti tudi kvantitativno predstavo o svetu okoli nas. V nalogah morajo biti zato podatki smiselni in rešitve nalog naj jih še dopolnijo.

Kakšno mesto imajo zbirke rešenih nalog pri prizadevanjih, da bi osmislili reševanje nalog?

Zapis reševanja v večini zbirk nehote poudarja formalno plat reševanja. Avtorjevega razmišljanja, ki je vodilo do rešitve, v tekstu ni. Učencu je tako prepuščen najzahtevnejši del naloge: sam si mora o postavljenem problemu ustvariti fizikalno predstavo, ki bo osmislila rešitev. Za mnoge je preprosteje, da se postopek reševanja naučijo na pamet in ga uporabijo v sličnih primerih.

Tudi najnovejša zbirka rešenih nalog iz fizike za srednješolce ne prinaša novosti. Kljub skrbno izdelanim zgledom bo za večino dijakov le zbirka receptov, ki jih bodo lahko z več ali manj sreče uporabljali pri šolskih nalogah

in sprejemnih izpitih. Na to nehote opozarja naslov zbirke, ki obeta lahko pot skozi fiziko.

LITERATURA

[1] Arnold B. Arons, *A Guide to Introductory Physics Teaching,* Wiley, New York 1990.

[2] G. Larson, *Learning and instruction in pre-college physical science,* Physics Today, Sept. 1991, 56.

[3] F. Reiff, Jill H. Larkin, George C. Brackett, *Teaching general learning and problem solving skills,* Am. J. Phys. 44 (1976) 212.

[4] Jill Larkin, *Cognition of learning physics,* Am. J. Phys. 49 (1981) 534.

[5] Michelene T. H. Chi, Paul J. Feltovich and R. Glaser, *Categorization and representation of physics problems by experts and novices,* Cognitive Science 5 (1981) 121.

[6] H. Šolinc, *Skozi fiziko z rešenimi nalogami. Kinematika in statika,* Zbirka nalog za srednje šole, DZS, Ljubljana 1992.

VESTI

PRIZNANJA AMBASADOR REPUBLIKE SLOVENIJE V ZNANOSTI

Zaradi spoznanja o pomenu znanosti tudi pri uveljavljanju mednarodne podobe in utrjevanju mednarodnega položaja Slovenije se je Ministrstvo za znanost in tehnologijo odločilo, da bo podeljevalo priznanje Ambasador republike Slovenije v znanosti, in to tistim posameznikom, ki so v zadnjih dveh letih s svojim znanstvenim delom dosegli največjo mednarodno odmevnost.

Priznanja so bila podeljena prvič v lanskem letu, ko sta med šestimi nagrajenci prejela priznanje tudi dva člana našega društva in sicer akademik **prof. dr. Robert Blinc** s Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in **prof. dr. Ivan Bratko** s Fakultete za elektrotehniko in računalništvo.

V letošnjem letu so prejeli to priznanje štirje znanstveniki, med njimi pa tudi član našega društva **prof. dr. Gabrijel KERNEL** s fakultete za naravoslovje in tehnologijo.

Profesor Kernel je ustanovitelj slovenske eksperimentalne fizike osnovnih delcev in zaslužen za njeno uveljavitev v mednarodnem prostoru, predvsem v največjih evropskih laboratorijih CERN (Conseil Europeen de Recherches Nucleaires) v Ženevi in DESY (Deutsches Elektronen-SYnchrotron) v Hamburgu.

V mednarodno raziskovalno delo je pritegnil mlajše sodelavce iz Slovenije in na Inštitutu Jožef Stefan razvil laboratorij za nove merilne metode, ki je pomembna točka za pretok znanja iz sveta in v svet. Njegova skupina je vključena v mednarodne projekte ARGUS, CPLEAR, DELPHI in v evropski projekt za meritev parametrov kršitve simetrije CP v sistemu mezonov B.

Skupaj s sodelavci je v tujini objavil več kot 120 znanstvenih prispevkov in 30 referatov.

Prir. *Aleš Stanovnik*

IGRE NARAVE

4. JEDRO ^{14}C JE ZA DEVET VELIKOSTNIH STOPENJ BOLJ DOLGOŽIVO OD ZRCALNEGA JEDRA ^{14}O

MITJA ROSINA

PACS 24.10.-i

Jedri ^{14}C in ^{14}O lahko razpadeta v osnovno stanje ^{14}N po več poteh. Slučajna destruktivna interferenca je pri ^{14}C skoraj popolna, pri ^{14}O pa ni. Poleg tega lahko ^{14}O neovirano razpade v dve vzbujeni stanji ^{14}N.

SOME TRICKS OF NATURE

4. THE ^{14}C NUCLEUS HAS A NINE ORDERS OF MAGNITUDE LONGER HALFLIFE THAN THE MIRROR NUCLEUS ^{14}O

The ^{14}C and ^{14}O nuclei can decay into the ground state of ^{14}N through several intermediate states. The accidental destructive interference is almost perfect in ^{14}C, but not in ^{14}O. Moreover, the latter nucleus can also decay into excited states of ^{14}N.

Igra narave

Jedro ^{14}C ima 6 protonov in 8 nevtronov, jedro ^{14}O pa 8 protonov in 6 nevtronov. Taki „zrcalni jedri" imata navadno zelo podobne energijske nivoje ter matrične elemente za razpade in reakcije. Razlog za to je neodvisnost jedrske sile od vrste nukleona, ki velja na odstotek natančno. Simetrijo med zrcalnimi jedri malo pokvari tudi elektrostatska energija, ki jo čutijo le protoni. Ta sicer napravi ^{14}O za nekaj MeV/c^2 težji od ^{14}C, pri matričnih elementih pa bi pričakovali kvečjemu kak dodaten odstotek razlike.

Zato nas preseneti, da je jedro ^{14}C izredno dolgoživo z razpolovnim časom 5730 let $= 1,8 \cdot 10^{11}$ s, razpolovni čas ^{14}O pa je le 71 s.

Izredna dolgoživost ^{14}C je darilo narave zgodovinarjem in arheologom, da lahko določajo starost raznih predmetov in ostankov živih bitij.

Razlaga

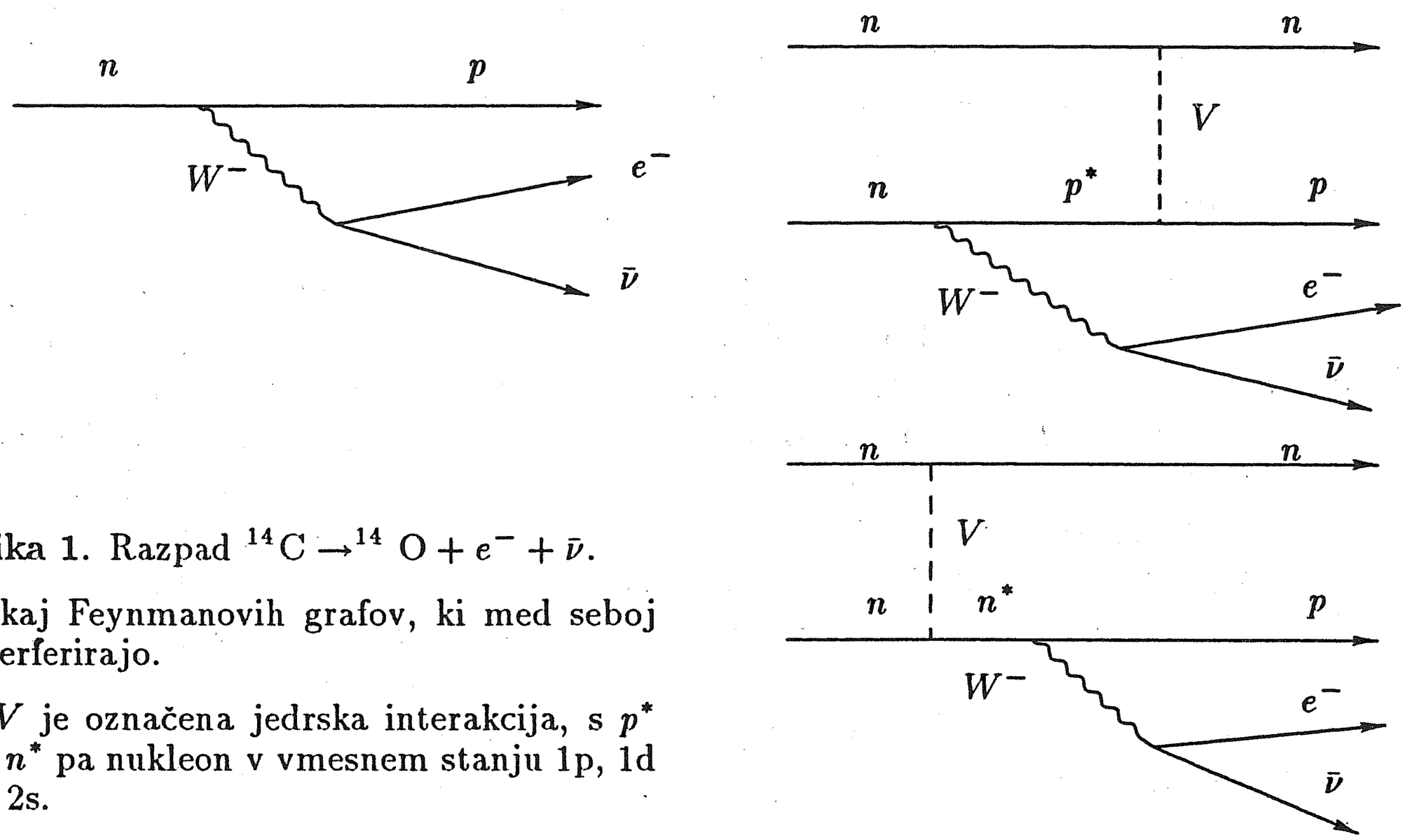
Razpadna konstanta w za razpad $\beta^{\pm}$ je sorazmerna s kvadratom matričnega elementa in s faktorjem f, ki pove, koliko faznega prostora je na razpolago za končna stanja. Če imamo več možnih končnih stanj (i) z razvejitvenimi razmerji r_i, lahko zapišemo „zlato pravilo"

$$w_i \equiv r_i \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_i|^2 f_i \,.$$

Matrični element M_i je odvisen od valovne funkcije začetnega in končnega jedra, faktor f pa je odvisen le od sproščene energije. Če želimo primerjati lastnosti jeder, faktor faznega prostora vključimo v „reducirani razpolovni čas" $f\, t_{1/2}/r$. Tipičen reducirani razpolovni čas je 3000 s. Če

se mora jedro znebiti veliko vrtilne količine ali če ima kake druge težave, je reducirani razpolovni čas mnogo daljši. V tabeli je v zadnjem stolpcu naveden reducirani razpolovni čas za razpade, ki nas zanimajo. Navedena je tudi sproščena energija, ustrezni faktor faznega prostora, razpolovni čas in razvejitveno razmerje. Ker so spremembe vrtilnih količin ΔI majhne, ne ovirajo razpadov in mora biti razlog za izjemno oviran razpad ^{14}C drugje.

	ΔI	ΔE MeV	f	$t_{1/2}$ s	r	$ft_{1/2}/r$ s
$^{14}C \rightarrow ^{14}N$	$0 \rightarrow 1$	0,156	0,0061	$1,8 \cdot 10^{11}$	100 %	$10^{9,04}$
$^{14}O \rightarrow ^{14}N$	$0 \rightarrow 1$	4,12	1600	71	0,61 %	$10^{7,3}$
$^{14}O \rightarrow ^{14}N^*$	$0 \rightarrow 0$	1,81	45	71	99,33 %	$10^{3,5}$
$^{14}O \rightarrow ^{14}N^{**}$	$0 \rightarrow 1$	0,17	0,011	71	0,058%	$10^{3,2}$



Slika 1. Razpad $^{14}C \rightarrow ^{14}O + e^- + \bar{\nu}$.

Nekaj Feynmanovih grafov, ki med seboj interferirajo.

Z V je označena jedrska interakcija, s p^* ali n^* pa nukleon v vmesnem stanju 1p, 1d ali 2s.

Kot vidimo, je razpad β^- pri ^{14}C oviran za 6 velikostnih stopenj, zrcalni razpad β^+ pri ^{14}O pa za 4 velikostne stopnje. To lahko razložimo le z destruktivno interferenco. Amplitude za razpad (Feynmanovi grafi na sl. 1) se morajo odšteti na promile, da bo verjetnost (kvadrat vsote amplitud) zmanjšana za 6 velikostnih stopenj. Amplitude pri zrcalnem razpadu se razlikujejo tipično za 1% od tistih pri razpadu ogljika, torej za ta odstotek zgrešijo skoraj popolno izravnavanje in je rezultat kak odstotek vsake amplitude zase (10^{-4} pri verjetnosti).

To je razlaga a posteriori, ko že poznamo efekt. Ali bi se dal efekt predvideti? Ker jedrskih sil ne poznamo s tolikšno natančnostjo in ker je lupinski model jedra razmeroma grob, tako delikatnega odštevanja ne moremo predvideti. S podrobnimi računi pa so preverili, da je pojav v

skladu z modelskimi silami in modeli jeder, ki jih uporabljamo (v okviru grobe napake) in ne kaže na nepoznano fiziko.

Pred leti so bile burne debate, katere značilnosti sil in mešanja konfiguracij dajo pravo velikost in predznak amplitud, da se odštejejo. Če so se omejili le na lupini 1s in 1p, so rabili močno tenzorsko (= mimobežno) jedrsko silo [1]. Če so dopustili vmesna stanja v lupini 1d2s, so shajali brez tenzorske sile, toda predpostaviti so morali močno mešanje konfiguracij, kar naj bi bilo podprto tudi s študijem nekaterih jedrskih reakcij [2]. Tretji so klicali na pomoč relativistične popravke [3]. Vsak ima po svoje prav v okviru veljavnosti svojega modela.

LITERATURA

[1] W. M. Wisscher, R. A. Ferrell, *Beta Decay of* ^{14}C *and Nuclear Forces,* Phys Rev. **107** (1957) 781.

[2] E. Baranger, S. Meshkov, *Configuration Mixing in the* ^{14}C *Ground State,* Phys. Rev. Lett. **1** (1958) 30.

[3] Y. Jin, L. E. Wright, C. Bennhold, D. S. Onley, ^{14}C *beta decay and the* ^{14}N $M1$ *form factors,* Phys. Rev. C. **38** (1988) 923 .

NOVE KNJIGE

PAAR V., Atomi, molekule, poluvodiči, supravodiči, Školska knjiga, Zagreb 1989, 197 str.

Knjiga je bila izdana kot priročnik za zaključni razred naravoslovno-matematične in matematično-informacijske usmeritve hrvaških srednjih šol. Je torej produkt (vsaj v Sloveiji) že umrlega usmerjenega izobraževanja, kjer naj bi učenec fizikalne usmeritve spoznal v zadnjem letniku precej podrobno osnove kvantne fizike kot tudi njeno uporabo za razlago periodične preglednice elementov, kemijske vezave, polprevodniških snovi in vezij ter pojava superprevodnosti. Ni težko ugotoviti, da je to skoraj nemogoča naloga pri danem splošnem predznanju srednješolcev. Očitno pa se je dela lotil zelo izkušen avtor, saj precej uspešno zaobide nevarne čeri pri opisu valovnih funkcij v kvantni mehaniki, elektronskih stanj v polprevodnikih, delovanju diode itd. Zlasti je treba pohvaliti preglednost snovi in živahnost pri podajanju. Vseeno pa ostane dvom, če ni daleč presežena raven sprejemljivosti srednješolcev, kar zlasti velja za poglavje o superprevodnosti. Tu je avtorja precej zaneslo tudi tedanje odkritje visokotemperaturnih superprevodnikov. V naših razmerah knjige ne morejo neposredno uporabljati srednješolci, je pa lahko koristen pripomoček in dodatno branje za učence in učitelje, morda pa še bolj za študente kemije, elektrotehnike in drugih tehničnih usmeritev.

Peter Prelovšek

ODGOVORI

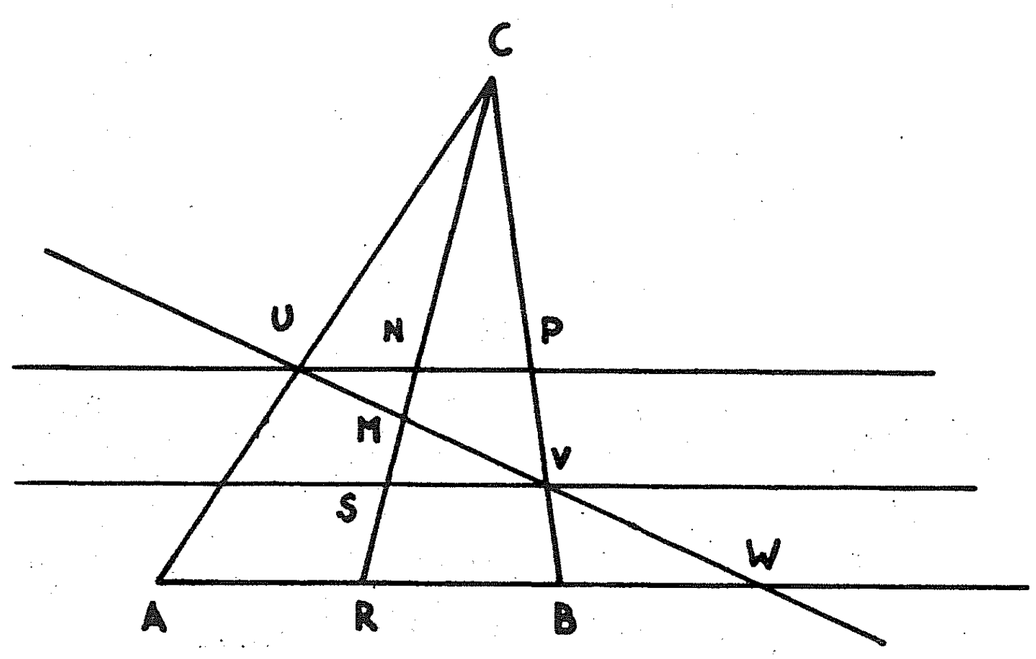
121. ŠE O ROTHOVI NALOGI

Rešitev Rothove naloge iz lanske druge številke Obzornika nam je poslal tudi *Franc Savnik* iz Dobove. Njegova rešitev se bistveno ne razlikuje od že objavljene rešitve (Obzornik mat. fiz. 38 (1991) 158). Dobil pa je med ustreznimi količinami zanimivo zvezo, iz katere lahko takoj izpeljemo enačbo za težišče trikotnika. Na kratko povzemamo ta del njegovega odgovora.

Dane so tri kolinearne točke U, V, W. Konstruirati je treba trikotnik, katerega nosilke potekajo skozi točke U, V, W (skozi vsako natanko ena) in s težiščem na premici skozi te točke.

Iz podatkov neposredno sledi, da premica skozi U in W seka natanko dve stranici iskanega trikotnika. Težišče mu označimo z M in privzemimo, da V leži med U in W; s tem na splošnosti nič ne izgubimo.

Iskani trikotnik imenujmo ABC, skupno krajišče stranic, ki ju seka premica skozi U in W, pa označimo s C. Težišče je v notranjosti trikotnika na premici med U in V ali pa med V in W. Denimo, da je med U in V (sl. 1). Premica, ki je vzporedna stranici AB in seka eno stranico v točki U, naj seka težiščnico CR v točki N, drugo stranico pa v P. Vzporednica skozi V pa naj težiščnico CR seka v točki S.



Slika 1.

Naj bo (vektorsko) $MU = \lambda MV$ in $MW = \mu MV$, tako da je $\lambda < 0$ in $\mu > 0$. (V primeru, ko težišče M leži med V in W, zamenjamo vlogi skalarjev λ in μ.) Zaradi podobnih trikotnikov UMN, VMS in WMR je $MN = \lambda MS$ in $MR = \mu MS$. Ker pa točka N razpolavlja daljico UP, velja zaradi podobnih trikotnikov CNP in CSV tudi $CN = -\lambda CS$. Z upoštevanjem dejstva, da leži težišče trikotnika na eni tretjini težiščnice, dobimo (vektorsko) $CN = CM + MN = 2MR + MN = (2\mu + \lambda)MS$ in $CS = CM + MS = 2MR + MS = (2\mu + 1)MS$. Od tod najdemo zvezo $2\mu + \lambda = -\lambda(2\mu + 1)$ oziroma

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = -1. \tag{1}$$

Če označimo $UM = tUV$ in $UW = kUV$ ter upoštevamo, da je $MV = MU + UV = (1-t)UV$ in $MW = MU + UW = (k-t)UV$, dobimo iz (1) isto enačbo $3t^2 - 2(k+1)t + k = 0$ kot v že objavljeni rešitvi.

Milan Hladnik

VESTI

PLEMLJEVO LETO 1992

Ob 25. obletnici smrti prvega rektorja Univerze v Ljubljani akademika profesorja dr. Josipa Plemlja je na predlog našega Društva Vlada Republike Slovenije proglasila leto 1992 za leto prof. dr. Josipa Plemlja. Obenem je prevzela pokroviteljstvo nad vsemi prireditvami, ki bodo letos posvečene tej obletnici. Za predsednika častnega odbora je imenovala prof. dr. Petra Venclja, takratnega ministra za šolstvo in šport, ki je v častni odbor povabil še naslednje člane, ti so:

prof. dr. Peter Tancig, minister za znanost in tehnologijo
prof. dr. Andrej Capuder, tedanji minister za kulturo
akad. prof. dr. Janez Milčinski, tedanji predsednik SAZU
akad. prof. dr. Ivan Vidav
akad. prof. dr. Peter Gosar
akad. prof. dr. Josip Globevnik
akad. prof. dr. Miha Tišler, rektor Univerze v Ljubljani
prof. dr. Alojz Križman, rektor Univerze v Mariboru
prof. dr. Aljoša Volčič, Univerza v Trstu
prof. dr. Mitja Kregar, dekan FNT
prof. dr. Peter Legiša, predstojnik Oddelka za matematiko in mehaniko FNT
prof. dr. Alojz Kodre, predstojnik Oddelka za fiziko FNT
prof. dr. Dragan Marušič, predstojnik Oddelka za matematiko PF v Ljubljani
prof. dr. Sandi Klavžar, predstojnik Oddelka za matematiko PF v Mariboru
prof. dr. Jernej Kozak, direktor IMFM
prof. dr. Joso Vukman, predstojnik oddelka za matematiko IMFM
prof. dr. Peter Petek, predsednik DMFA Slovenije
Marija Munda, profesorica matematike, Maribor
Rudolf Turšič, profesor matematike, Dutovlje
inž. Vladimir Černe, župan občine Radovljica

Prva seja častnega odbora je bila 11. maja 1992 v veliki sejni sobi Univerze v Ljubljani.

V prvi točki je akademik prof. dr. Ivan Vidav orisal življenje ter znanstveno in pedagoško delo prof. J. Plemlja.

V drugem delu je akademik prof. dr. Josip Globevnik predstavil znanstveno delo slovenskih matematikov danes (celoten referat je objavljen v nadaljevanju). Omenil je tudi pomanjkanje finančnih sredstev za nadaljevanje kvalitetnega znanstvenega dela v matematiki in delovanje centralne Matematične knjižnice.

V zadnji točki pa je predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije prof. dr. Peter Petek predstavil dolg seznam društvenih prireditev, ki bodo v letošnjem letu posvečene spominu na prof. dr. Josipa Plemlja, prvega častnega člana našega Društva. Popoln seznam je objavljen na strani 125.

Po referatih so prof. dr. Peter Vencelj, prof. dr. Ivan Vidav in prof. dr. Peter Legiša govorili še o pomanjkanju strokovnih kadrov v srednji šoli in o spremembah učnega programa za študij pedagoške smeri matematike. Doseči želimo, da bo postal poklic učitelja veliko bolj privlačen, kot je sedaj. Glede problema finančnih sredstev za znanstveno delo slovenskih matematikov, za ureditve centralne Matematične knjižnice in za obnovo Plemljevega doma na Bledu, smo pred zaključkom seje slišali več vzpodbudnih besed. Med njimi naj omenimo le besede prof. dr. Petra Tanciga, ministra za znanost in tehnologijo, ki nas je povabil, naj „trkamo na odprta vrata".

Ciril Velkovrh

RAZISKOVALNO DELO V MATEMATIKI V SLOVENIJI*

Čeprav se je raziskovalno delo v matematiki na Slovenskem zares razmahnilo šele po Plemljevi smrti, je profesor Plemelj nanj posredno močno vplival. Plemljeva matematična odkritja so bila zelo globoka in pomembna, zato je matematično raziskovanje na Slovenskem že takoj ob začetku dobilo mednarodni meter za kvaliteto in mednarodna kvaliteta je od Plemlja naprej ostala stalnica raziskovanja v matematiki v Sloveniji. Seveda meter za kvaliteto ni dovolj, treba je tudi ljudi, ki kvalitetne stvari delajo. Ker Plemelj ni ustvaril raziskovalne matematične šole, bi se prav lahko zgodilo, da takih ljudi v Sloveniji še danes ne bi bilo. Plemelj je imel le dva doktorska študenta: Antona Vakslja (1923) in Ivana Vidava (1941). Z Vidavom smo imeli Slovenci veliko srečo, saj je osnoval v Ljubljani matematično šolo. V Plemljevi tradiciji kvalitete je bil mentor šestnajstim doktorjem matematike, v Ljubljano je prinesel novejše matematične discipline in osnoval podiplomski študij matematike na Univerzi v Ljubljani. Od leta 1973 do danes je na tem študiju magistriralo 68 ljudi.

V Sloveniji je raziskovanje v matematiki do konca šestdesetih let temeljilo le na kvalitetnih posameznikih (Plemelj, Vidav), potem pa je ob povečanem zanimanju za matematiko in ob odpiranju novih asistentskih in učiteljskih mest na univerzi v začetku sedemdesetih let doživelo nagel razvoj. Delati je pričela tudi podiplomska šola matematike na Univerzi v Ljubljani in število raziskovalcev se od tedaj počasi, a stanovitno veča. Ob koncu sedemdesetih let je bilo število objav v mednarodnih matematičnih revijah že okoli deset na leto, ob koncu osemdesetih let pa že prek trideset na leto. V organiziranem raziskovanju v matematiki v Sloveniji sta najstarejši področji analiza ter numerična in računalniška matematika, saj so bile prve raziskovalne naloge na obeh področjih zaključene že l. 1964. Topologija

* Prispevek, prebran na prvi seji častnega odbora Plemljevega leta 1992, dne 11.5.1992.

se je kot področje uveljavila l. 1973. Pozneje sta se kot področji uveljavili še osnove matematike (1977) in teorija grafov (1981). L. 1990 se je kot področje uveljavil verjetnostni račun in statistika.

Danes je v matematičnem raziskovanju v Sloveniji aktivnih okoli 60 ljudi. Posejani so po različnih fakultetah obeh slovenskih univerz. Med njimi je 27 takih, ki so doktorirali v Ljubljani in devet takih, ki so doktorirali v tujini. V raziskovanju so povezani z Oddelkom za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani, prek katerega Ministrstvo za znanost in tehnologijo financira raziskovalne projekte iz matematike in izpopolnjevanje sedemnajst mladih raziskovalcev, od katerih se devet izpopolnjuje na kvalitetnih univerzah v tujini. Poleg omenjenih devetih mladih raziskovalcev se izpopolnjujejo v tujini še trije, ki niso formalno mladi raziskovalci. Na Oddelku za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko teče devet stalnih raziskovalnih seminarjev (topološki seminar od l. 1971, seminar za numerično in računalniško matematiko od l. 1971, topološki seminar Ljubljana-Zagreb od l. 1974, seminar za kompleksno analizo od l. 1975, seminar za teorijo grafov od l. 1980, seminar za numerično analizo od l. 1982, seminar za teorijo operatorjev od l. 1982, seminar za geometrijsko topologijo od l. 1983 in seminar za funkcionalno analizo od l.1987). Ob Inštitutu je zelo dobra Matematična knjižnica, za katero skupaj skrbita Oddelek za matematiko in mehaniko FNT in Oddelek za matematiko na IMFM.

Tako Plemelj kot Vidav sta se pri raziskovanju ukvarjala z matematično analizo, ki je še danes najmočnejše področje raziskovanja v matematiki pri nas: ukvarjamo se z njenimi vejami: funkcionalno analizo, operatorsko teorijo in kompleksno analizo. Prvi dve sta moderni veji analize, ki ju še ni bilo, ko je Plemelj raziskovalno delal. Kompleksna analiza pa je bila eno od področij Plemljevega zanimanja — tedaj je bila to predvsem teorija analitičnih funkcij ene spremenljivke. Danes pa se pri nas ukvarjamo s teorijo funkcij več kompleksnih spremenljivk, ki je bila v Plemljevi raziskovalni dobi šele v prvih začetkih.

Rezultate matematičnega raziskovanja v Sloveniji objavljamo v mednarodnih matematičnih revijah in v zbornikih mednarodnih konferenc. Če preštejemo le članke in razprave v mednarodnih matematičnih revijah, vidimo, da je npr. v letih 1987–1991 38 avtorjev objavilo skupaj 175 takih člankov in razprav, torej v povprečju 35 na leto. Kvaliteta raziskav je omogočila, da smo pri raziskovalnem delu, ki ga financira Ministrstvo za znanost in tehnologijo, že v letu 1992 v matematiki kot edinem področju v celoti prešli na mednarodno recenzirane projekte. Ker pa so sredstva zelo omejena, je večina dobro ocenjenih projektov le delno financirana. Poleg že omenjenih objav v mednarodnih revijah in zbornikih ima kvaliteta matematičnih raziskav v Sloveniji za posledico tudi veliko povabil našim matematikom na različne konference in na različne univerze. Rezultat tako vzpostavljenih osebnih stikov so tudi številni obiski tujih matematikov v Sloveniji. Tu ima ključni pomen kvaliteta matematične knjižnice, ki tujcem omogoča nemoteno delo med gostovanjem pri nas.

Trenutno Ministrstvo za znanost in tehnologijo financira 10,70 FTE (= Full Time Equivalent — obračunska enota v raziskovanju) za raziskave v matematiki, kar je ob 700 FTE za vse raziskovalne projekte odločno premalo glede na splošno pomembnost matematične kulture, matematike kot stroke in glede na kvaliteto matematičnih raziskav pri nas. Tako je delež matematike v celotnem številu FTE za raziskovalne projekte Ministrstva za znanost in tehnologijo pri nas le 1,5%. Za primerjavo povejmo, da npr. delež matematike v sredstvih National Science Foundation v ZDA presega 4%. Stanje je torej nezadovoljivo. Ustreznejša raven financiranja je potrebna tudi za zagotovitev pogojev, da se vrnejo domov vsi naši matematiki, ki se izpoponjujejo v tujini. Potrebe obeh slovenskih univerz po matematikih so take, da bi se vsi lahko brez težav zaposlili.

Ministrstvo za znanost in tehnologijo je šele lani z namensko dotacijo podprlo Matematično knjižnico in nabavo revij. Ta dotacija je, žal, skromna in pokrije le 8% celotnih stroškov nabave. Manjkajoča sredstva vsa leta zbirata Oddelek za matematiko in mehaniko FNT (tudi na račun osebnih dohodkov) in Oddelek za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (iz priliva za raziskovalni program, v zadnjih letih pa tudi iz programa mladih raziskovalcev). Skrb za knjižnico vsa leta spremlja strah, da bo treba zaradi pomanjkanja denarja del revij odpovedati. Ta bojazen je v zadnjem času še bolj utemeljena, saj se pripravlja sprememba financiranja univerze. Vse kaže, da na račun osebnih dohodkov ne bo več mogoče izločati dodatnih sredstev za knjižnico. Prav tako ni jasno, ali se bodo zmanjšala dodatna sredstva, ki pritekajo z Ministrstva za znanost in tehnologijo ob financiranju stažistov. Pomanjkanje sredstev za knjižnico bi za raziskovalno delo pomenilo pravo katastrofo. Ena od posledic tega bi bila, da bi se naši matematiki, ki se izpopolnjejo v tujini, teže odločili za vrnitev. Tudi tujci, s katerimi sodelujemo na raziskovalnem področju, bi se bolj neradi odločili za daljša gostovanja pri nas.

Kaj bi o vsem tem menil pokojni profesor Plemelj, če bi še živel? Najbrž bi bil zadovoljen s tem, da je raziskovanje v matematiki v Sloveniji zaživelo in da naši matematiki sodelujejo z veliko matematiki po svetu. Brez dvoma pa bi ga bilo skupaj z nami strah za usodo Matematične knjižnice; gotovo bi si prizadeval, da postane centralna knjižnica in da se njeno financiranje sistemsko uredi.

Josip Globevnik

VABILO

Ob 190. obletnici smrti velikega slovenskega matematika

JURIJA VEGE

vas vabimo na kulturno prireditev, ki bo v soboto, 26. 9. 1992 ob 11. uri, v njegovi rojstni vasi ZAGORICI nad Dolskim. Slavnostni govornik bo prof. dr. Tomaž Pisanski.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Skupščina Občine Ljubljana Moste-Polje

PRIREDITVE V PLEMLJEVEM LETU

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije s svojimi podružnicami svoje aktivnosti, ki potekajo že vrsto let, posveča v letu 1992 spominu prof. dr. Josipa Plemlja:

REDNE DEJAVNOSTI

Tekmovanja

osnovnošolcev iz matematike za Vegova priznanja: šolska, občinska, državno
srednješolcev iz matematike: izbirna, državno, udeležba na olimpiadi
osnovnošolcev iz fizike: področna, državno
srednješolcev iz fizike: izbirna, državno, udeležba na olimpiadi
osnovnošolcev iz računalništva: šolska, področna, državno
srednješolcev iz računalništva: državno, udeležba na olimpiadi
osnovnošolcev iz logike: izbirno, državno
srednješolcev iz logike: izbirno, državno, udeležba na olimpiadi
osnovnošolcev iz razvedrilne matematike
srednješolcev iz razvedrilne matematike

Udeležba v mednarodnem matematičnem tekmovanju mest

Na vseh tekmovanjih sodeluje okrog 16 000 učencev. Najboljše povabimo na naslednja srečanja: Poletna šola iz matematike za osnovnošolce, Poletna šola računalnikarjev, Raziskovalni dnevi iz matematike za srednješolce, Raziskovalni dnevi iz fizike za srednješolce

Raziskovalne naloge

Predavanja iz matematike, fizike in astronomije za učence

Izobraževanje učiteljev: 14. seminar iz matematike, statistika; permanentno izobraževanje učiteljev matematike, predavanja za učitelje fizike

JUBILEJNE DEJAVNOSTI

Obnova Plemljevega doma na Bledu

Publikacije

Pri izdajateljski dejavnosti bomo posvetili Plemljevemu letu: Obzornik za matematiko in fiziko **39** (1992) 3, Presek **19** (1991/92) 5, Zbornik *Celovita predstavitev društevene dejavnosti od 1949 do 1992*

Poster *Zgodovina slovenske matematike*, Predstavitev na I. evropskem matematičnem kongresu

Razstave *Življenje in delo Josipa Plemlja* v Skupščini Republike Slovenije in na Pedagoški fakulteti v Mariboru

Srečanje z učitelji mentorji in razgovor o tekmovanjih

OBČNI ZBOR NA BLEDU

strokovno srečanje matematikov, fizikov in astronomov, osrednja proslava Plemljevega leta, slavnostna otvoritev obnovljenega Plemljevega doma

Društvo samo ne bi moglo izvesti tako obsežnega programa. Z nami sodelujejo: Inštitut za matematiko fiziko in mehaniko, Inštitut Jožef Stefan, Ministrstvo za šolstvo in šport, Ministrstvo za znanost in tehnologijo, Oddelki Univerze v Ljubljani, Oddelki Univerze v Mariboru, Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije

Predsednik DMFA Slovenije
prof. dr. Peter Petek

NOVE KNJIGE

PRIJATELJ N., Osnove matematične logike, 2. del, Formalizacija, 196 str., DMFA Slovenije, Ljubljana 1992 (Matematika-Fizika ; 33)

V drugem delu monografije Osnove matematične logike obravnava avtor formalne sisteme, njihovo sintakso in semantiko ter dokaže nekatere pomembne teoreme o teorijah prvega reda.

Oglejmo si na kratko vsebino. Knjiga je razdeljena na tri poglavja. Prvo poglavje seznanja bravca z zgradbo formalnih sistemov, to je z jezikom sistema, s termi in formulami, s pravili sklepanja in z izpeljavami oziroma formalnimi dokazi. Drugo poglavje govori o sintaksi in semantiki izjavnega računa. V sintaksi so opisani aksiomi in pravila sklepanja. Nato so dokazani razni izreki in izpeljave, ki veljajo v tem računu. Izjavni račun ni polna teorija, v njem obstajajo namreč formule, ki niso dokazljive, prav tako pa niso dokazljive njihove negacije. Pač pa je to popolna teorija, ker so izreki izjavnega računa natanko tiste formule, ki so tavtologije. Izjavni račun je zato odločljiva teorija, obstaja namreč algoritem, s katerim je mogoče za vsako formulo teorije določiti, ali je izrek ali ni. Nadalje velja teorem o kompaktnosti, ki pravi, da je množica formul kompatibilna natanko tedaj, ko je vsaka njena končna podmnožica kompatibilna. Aksiomi izjavnega računa so med seboj neodvisni.

Najobsežnejše je zadnje poglavje, ki je posvečeno formalnim sistemom prvega reda. Opisana je splošna teorija prvega reda, posebej predikatni račun. Nadalje govori o razširitvah teorij in o ekvivalentnih teorijah. Zanimiva je semantika formalnih sestavov prvega reda. Predikatni račun je neprotislovna teorija, ni pa polna. V tem poglavju zvemo, kdaj je pri dani interpretaciji kakšna formula izpolnljiva, kdaj veljavna in kdaj ima teorija model. Pomemben je teorem o popolnosti predikatnega računa, ki trdi, da so v tem računu dokazljive natanko tiste formule, ki so logično veljavne, to se pravi, veljavne v vsaki interpretaciji. Ta teorem je ekvivalenten teoremu, da je teorija prvega reda neprotislovna natanko tedaj, ko ima model. Dokaz tega teorema je avtor naslonil na Lindenbaumovo lemo, ki pravi, da ima vsaka neprotislovna teorija prvega reda razširitev, ki je polna. Žal je pri dokazovanju te leme treba uporabiti logično načelo tertium non datur, načelo, ki pri marsikom vzbuja pomisleke. Teorem o popolnosti pove, da je pojem sintaktične dokazljivosti ekvivalenten s pojmom semantične veljavnosti. Neprotislovna teorija ima nešteto modelov. Za vsako neskončno kardinalno število obstaja model, katerega moč je to kardinalno število. Neskončna množica formul, ki so zapisane v jeziku prvega reda, pa premore model natanko tedaj, ko premore model vsaka njena končna podmnožica formul.

Zadnji razdelek zadnjega poglavja govori o teoriji prvega reda z enakostjo. Normalen model take teorije je model, v katerem pomeni predikat enakosti relacijo istosti. Vsaka neprotislovna teorija z enakostjo ima normalen model. Obstajajo pa tudi modeli, kjer pomeni ta predikat ekvivalenčno relacijo.

Poleg navedenih rezultatov so v knjigi tudi številni teoremi, ki so tehnične narave, npr. teorem o izpeljavi, teorem o enoličnem zapisu, ki pravi, da so oklepaji pri zapisu formul in termov nepotrebni, nadalje teorem o zaprtju itd. Dokazani so številni izreki, ki veljajo v formalnih sistemih. Povejmo, da uporablja avtor besede izrek, izpeljava, dokaz tedaj, kadar govori o izrekih, izpeljavah in dokazih v okviru formalne teorije. Pomembne lastnosti formalnih sistemov in teorij pa imenujemo teoreme. Veljavnost teoremov utemeljuje. Vsi izreki, izpeljave in teoremi, ki so v knjigi dokazani (oziroma utemeljeni), so zbrani na koncu knjige. Vseh skupaj je okoli 140.

Kakor prvi del je tudi drugi del monografije napisan izredno skrbno, jasno in korektno. Vsi izreki in teoremi so dokazani do vseh podrobnosti, prav nič ni prepuščenega na vero. Kljub temu je knjiga dostopna razmeroma širokemu krogu bravcev, saj za razumevanje ni potrebno kakšno posebno znanje iz matematike ali matematične logike. V roke jo lahko vzame vsak, ki je seznanjen z vsebino prvega dela monografije.

Ivan Vidav

ZBIRKA testnih nalog Druge mednarodne raziskave znanja matematike z rešitvami, DMFA Slovenije, Ljubljana 1992, 88 str. (Priročniki in učbeniki)

V tej knjižici je objavljen prevod osmih vzporednih testov druge mednarodne primerjalne študije matematičnih znanj za dijake na preduniverzitetni stopnji izobraževanja (Second International Mathematics Study). Vprašalnike so maja 1989 izpolnjevali v Sloveniji vsi dijaki 4. letnikov takratnih vzgojno-izobraževalnih programov naravoslovno-matematična tehnologija in računalništvo (samo smer programska oprema). To leto je Pedagoški inštitut testiral vse oddelke 4. letnikov srednjih šol, ki so v štirih letih šolanja na srednji šoli presegli 500 ur pouka matematike. Maja leta 1990 pa je inštitut v sodelovanju z Zavodom RS za šolstvo izvedel isto študijo na vzorcu 4. letnikov ostalih, v glavnem tehniških šol, ki so imele v štirih letih manj kot 490 in dosegle vsaj 420 ur pouka matematike.

Osemkrat po 17 vprašanj, ki so objavljena v knjižici, daje slovenskim četrtošolcem idealno priliko, da preverijo svoje znanje in si sami ustvarijo sliko o njegovi kvaliteti v primerjavi z vrstniki iz leta 1989 ali 1990. Še bolj pa bo knjižica lahko služila profesorjem matematike na srednjih šolah kot vzorec testov za pregled matematičnega znanja na srednješolskem nivoju, obenem pa kot seznam znanj, ki jih drugod zahtevajo za vstop na univerzo. Ta test je bil sestavljen s privolitvijo vseh dežel udeleženk prve izvedbe testa in nakazuje nekoliko razširjen presek zahtev srednješolskega kurza matematike. Slovenija takrat še ni sodelovala pri nastajanju tega inštrumentarija, v pripravo tretje mednarodne študije pa je že vključena.

Serijo testov je iz angleščine uspešno prevedla mag. Marija Vencelj.

Zvonko Perat

LOKAR M., Turbo pascal 6.0, DMFA Slovenije 1992, 64 str.

Iz knjige Turbo pascal istega avtorja je nastala, bolje rečeno: se je skrčila, knjižica Turbo pascal 6.0. Osnovni namen je isti kot v prvi knjigi, glej recenzijo v Obzornik mat. fiz. **37** (1990) VIII. Vsak, kdor pozna *Račkovo knjižnico*, pa tako ve, za kaj gre.

Nova knjižica je predvsem prilagojena nenapisanemu standardu, ki se je uveljavil v *Račkovi knjižnici*: okrog 60 strani. V ta namen je bilo seveda treba žrtvovati nekatere vsebine iz prvotne knjige, kot na primer objektno programiranje in seznam vseh napak, ki jih javlja prevajalnik. Vendar takoj priznajmo, da je izbor vsebin posrečen, težko bi rekli, da kaj zares pogrešamo (v okviru *Račkove knjižnice*, seveda). Kot je razvidno iz naslova, je knjižica prirejena za najnovejšo inačico Turbo pascala 6.0. V njej so okna pomembna nova filozofija delovnega okolja, zato si lahko preberemo njihov natančen opis. Knjiga je tudi dozorela v svojem dosedanjem 2–3 letnem življenju. Tako so „jedilnike" nadomestili „izbori", „utripača" je izrinil „kazalec", ..., dodana pa so tudi nekatera nova opozorila, na katera ni nihče pomislil pri prvotni knjigi, a je praksa pokazala drugače.

In kaj najdemo v knjižici? Najprej se (neučakani) naučimo tisti minimum, s katerim že lahko napišemo in poženemo program. Ko je radovednost potešena, se seznanimo z nameščanjem. Sledita osrednji poglavji knjižice. V prvem spoznamo delovno okolje (okna, pomoč, ukazi glavnega izbora, bližnjice) in v drugem posebnosti turbo pascala (dodatni številski tipi, delo z nizi in datotekami, UNIT, grafika). Na koncu izvemo najnujnejše o odkrivanju (in odpravljanju) sintaktičnih in semantičnih napak. Čeprav je to razvidno iz vsebine, morda ne bo odveč opozorilo: to ni učbenik pascala, to je priročnik, ki opiše okolje in posebnosti turbo pascala.

Skratka, dobili smo novo knjižico iz *Račkove knjižnice*, ki je prav taka, kot od nje pričakujemo in si je želimo.

Sandi Klavžar

MARION J. B., Fizika in svet fizike, prevod in opombe Ivan Bratina in Anka Primožič, Deželni šolski urad za Furlanijo-Julijsko krajino, Nicola Zanichelli S.p.A., Bologna; Trst, 1. del (1988, 194 str.), 2. del (1991, 146 str.), 3. del (1991, 289 str.)

Pred nami je slovenska izdaja obširnega ameriškega učbenika *Physics and the Physics Universe*, ki ga je leta 1971 napisal Jerry B. Marion, profesor na univerzi v Marylandu. Knjigo je izdal Deželni šolski urad za Furlanijo-Julijsko krajino v Trstu za potrebe višjih srednjih šol s slovenskim učnim jezikom.

Učbenik je sestavljen iz treh delov. Prvi prinaša nekaj zanimivih razmišljanj o pomenu fizike in je posvečen mehaniki in toploti. Vsebuje sedem poglavij: Zgradba in jezik fizike; Dolžina, čas in masa; Galaksije in atomi; Gibanje; Sila in gibalna količina; Osnovne sile v naravi; Energija. V drugem delu avtor enotno obravnava s stališča klasične fizike polja sil in valovne pojave: Polja; Gibanje električnih nabojev; Nihanje, valovanje in elektromagnetno valovanje. Tretji del je posvečen vprašanjem moderne fizike in vse-

buje osem poglavij: Relativnost; Osnove kvantne teorije; Atomi in kvanti; Zgradba snovi; Jedra; Osnovni delci; Astrofizika in kozmologija; Pogled v prihodnost. V zaključnem poglavju so s širšega gledišča opisana nekatera še nerešena vprašanja sodobne fizike, kot so se kazala v letih, ko je knjiga nastajala. Primerjava z današnjim stanjem nam pove marsikaj o razvoju fizike v zadnjem dvajsetletju.

Učbenik odlikujeta zavidljiva popolnost in prepričljiva dostopnost, saj spremlja tudi najzahtevnejšo snov učinkovit intuitiven pristop. Za preučevanje vseh obravnavanih tem pa je značilna strogo in dosledno izpeljana enotnost, ki jo avtor doseže s stalnim in pametnim povezovanjem razlag pojavov iz mikroskopskega in makroskopskega sveta. Ni naključje, da se učbenik konča s seznamom osnovnih delcev in astrofiziko.

Slovenska izdaja prinaša v opombah pod črto tudi nekaj podatkov o slovenskih fizikih, ki so se ukvarjali s problemi, ki so obdelani v učbeniku (Jurij Vega, Herman Potočnik, Simon Šubic, Jožef Stefan, Milan Vidmar), na koncu pa še kratek pregled razvoja znanstvenih institucij in pouka fizike v slovenskem prostoru.

Ivan Bratina

LIKAR A., Planinšič G., Naloge iz fizikalnih merjenj in merilnih sistemov, DMFA Slovenije, Ljubljana 1992, 108 str. (Zbirka izbranih poglavij iz fizike ; 27)

Merjenja je mogoče obravnavati po več poteh. Večini avtorjev je všeč vrstni red meritev, na katerega naletimo pri študiju fizike: mehanika, toplota, elektrika, optika, atomika. Tudi senzorje in ustrezne merilne metode nam predstavijo v tem zaporedju. V takem učbeniku ni težko najti primerne metode in ustrezne opreme, če se odločimo za kako meritev. Marsikateri deli eksperimentalne fizike o fizikalnih pojavih, v katerih izkoriščamo osnovne fizikalne pojave za meritve, so ponovljeni. Da učbenik ne bi ostal preveč nezahteven, vsebuje poglavje o šumu in o vlogi statistike pri meritvah in obdelavi merskih rezultatov. Dobra plat takega učbenika je, da je tudi priročnik, ki lahko fizika ali nefizika reši iz marsikatere zadrege. Njegova slaba stran je velik obseg.

Andrej Likar in Gorazd Planinšič sta v *Nalogah iz fizikalnih merjenj in merilnih sistemov* ubrala drugačno pot, tako, ki je bila že zastavljena v nedavno napisanem učbeniku A. Likarja *Osnove fizikalnih merjenj in merilnih sistemov.* Skupni imenovalec poglavij v zbirki nalog zato niso meritve posameznih količin, ampak merilne ali matematične metode, vezane na obdelavo merskih rezultatov. Tako so naslovi posameznih poglavij *Nalog* tile: Ocenjevanje negotovosti, Statistika in povprečevanje šuma, Fazno vpeta zanka ter kot zadnje Senzorji in merilni sistemi.

Ob reševanju zbranih nalog se bo lahko veliko naučil študent fizike, ki obvlada matematiko, matematično fiziko in elektroniko, kolikor je teh predmetov poslušal pred predavanji iz fizikalnih merjenj. Naloge ilustrirajo primere resničnih meritev, zato ne le utrjujejo, ampak tudi razširjajo osnovno poznavanje meritev.

Jože Pahor

Ob 25. letnici smrti velikega matematika Josipa Plemlja je Vlada Republike Slovenije proglasila Plemljevo leto. Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Zavod za šolstvo in šport vabita vse matematike, fizike in astronome na Bled, Plemljev rojstni kraj, kjer bo od 15.–17. oktobra 1992 v hotelu Astoria (bivša Svoboda)

STROKOVNI SEMINAR IN 44. OBČNI ZBOR DRUŠTVA

Program:

Četrtek, 15. oktobra

16.00 J. Strnad: Ali mora znati, kdor uči?
17.00 P. Križan, M. Mikuž: Mednarodno sodelovanje na področju fizike osnovnih delcev
18.00 A. Volčič: Tomografija konveksnih teles

Petek, 16. oktobra, dopoldne

Fizika:
9.15 – 11.30 Vloga eksperimenta pri pouku fizike v osnovni in srednji šoli

Matematika:
9.15 M. Petkovšek: Seštevanje v zaključeni obliki
10.15 S. Mardešić: Aproksimacija prostora poliedrima
11.15 V. Batagelj: Lokalna optimizacija

Petek, 16.oktobra, popoldne

15.00 Otvoritev in ogled obnovljene Plemljeve hiše
16.00 Razstava Plemljevih del
17.00 Turistični krožek osnovne šole prof. dr. Josipa Plemlja *Bled – kot ga še ne poznamo*

Sobota, 17. oktobra

9.00 Občni zbor

predsednik DMFA Slovenije
Peter Petek

odrežite

PRIJAVA

Prijavljam se na 44. občni zbor DMFA Slovenije, ki bo na Bledu, hotel Astoria, Prešernova 44, tel. (064) 77-404. (Prijavo pošljite na ta naslov do 12. oktobra.)

Ime in priimek (tiskano) .....

Točen naslov .....

Rezervirajte mi eno(dvo)posteljno sobo za ..... osebo(-i) (cena 28 DEM)

Pridem dne ....., prvi obrok: zajtrk, kosilo, večerja.

Odidem dne ....., zadnji obrok: zajtrk, kosilo, večerja.

(ustrezno podčrtajte)

Podpis: .....