ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

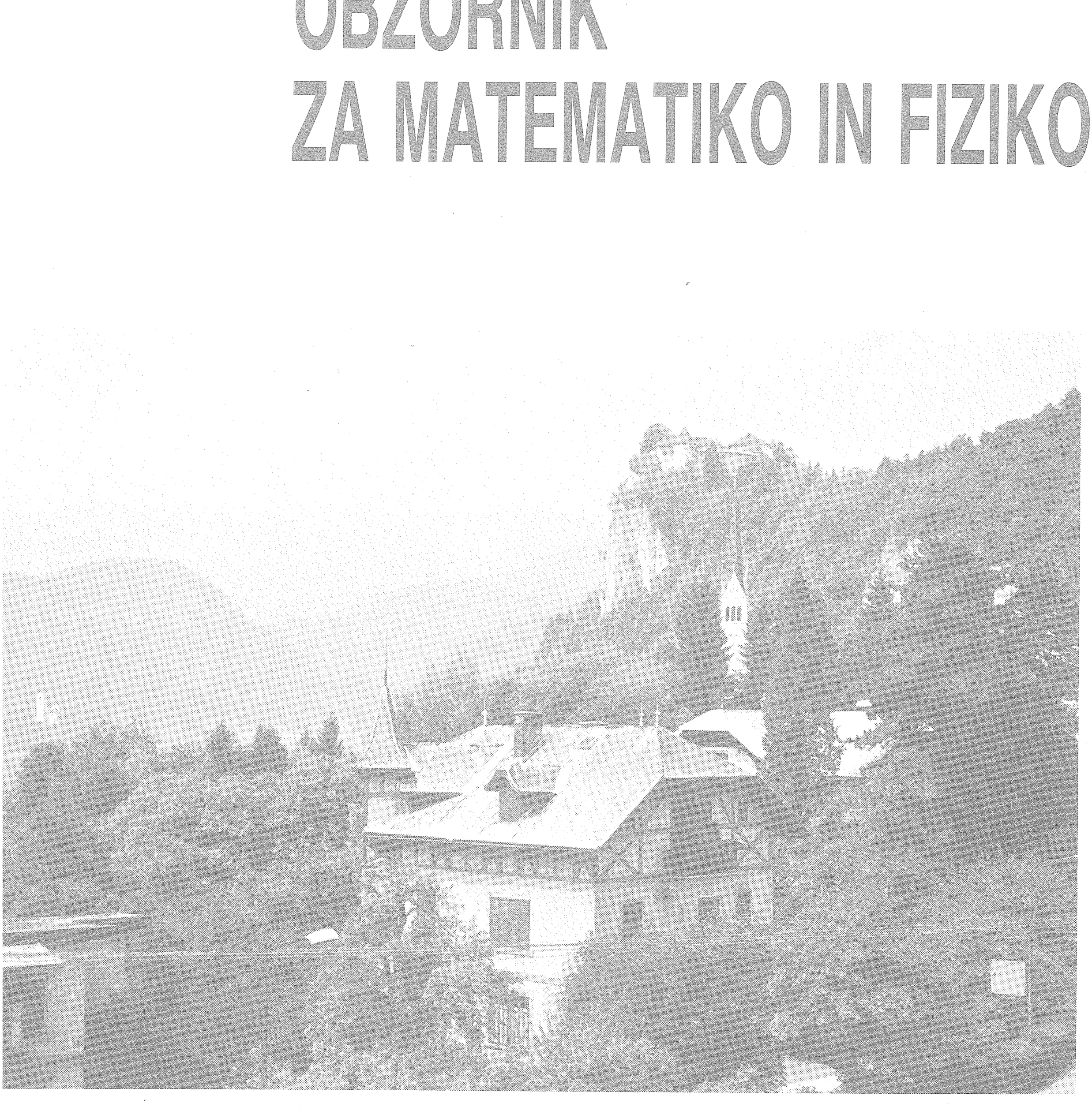
SN 0473-7446

NTRALNA EKONOMSKA
JIŽNICA Ljubljana

ODPISANO

1992
Letnik 39
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1992

letnik 39, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 800.– SLT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 1600.– SLT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 150.– SLT, dvojna številka 300.– SLT, stare številke 80.– SLT.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1400 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Revija je oproščena prometnega davka z odlokom št. 314, Uradni list RS, št. 7/91.

© 1992 DMFA Slovenije – 1105

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Ob petindvajsetletnici smrti Josipa Plemlja (Zvonimir Bohte) 65–71

Članki — Articles

Arhimedsko urejeni kolobarji — Archimedean ordered rings (Boris Lavrič) 73–78
O oktonionih — On octonions (Borut Zalar) 79–84
Dvigajoči se mehurčki — Rising bubbles (Janez Strnad) 85–89
Igre narave 3. Sila me nukleonoma v jedru je iste velikostne stopnje kot sila med človekom in Zemljo — Some tricks of nature 3. The force between neighbouring nucleons in the nucleus is comparable to the force between man and Earth (Mitja Rosina) 91–92

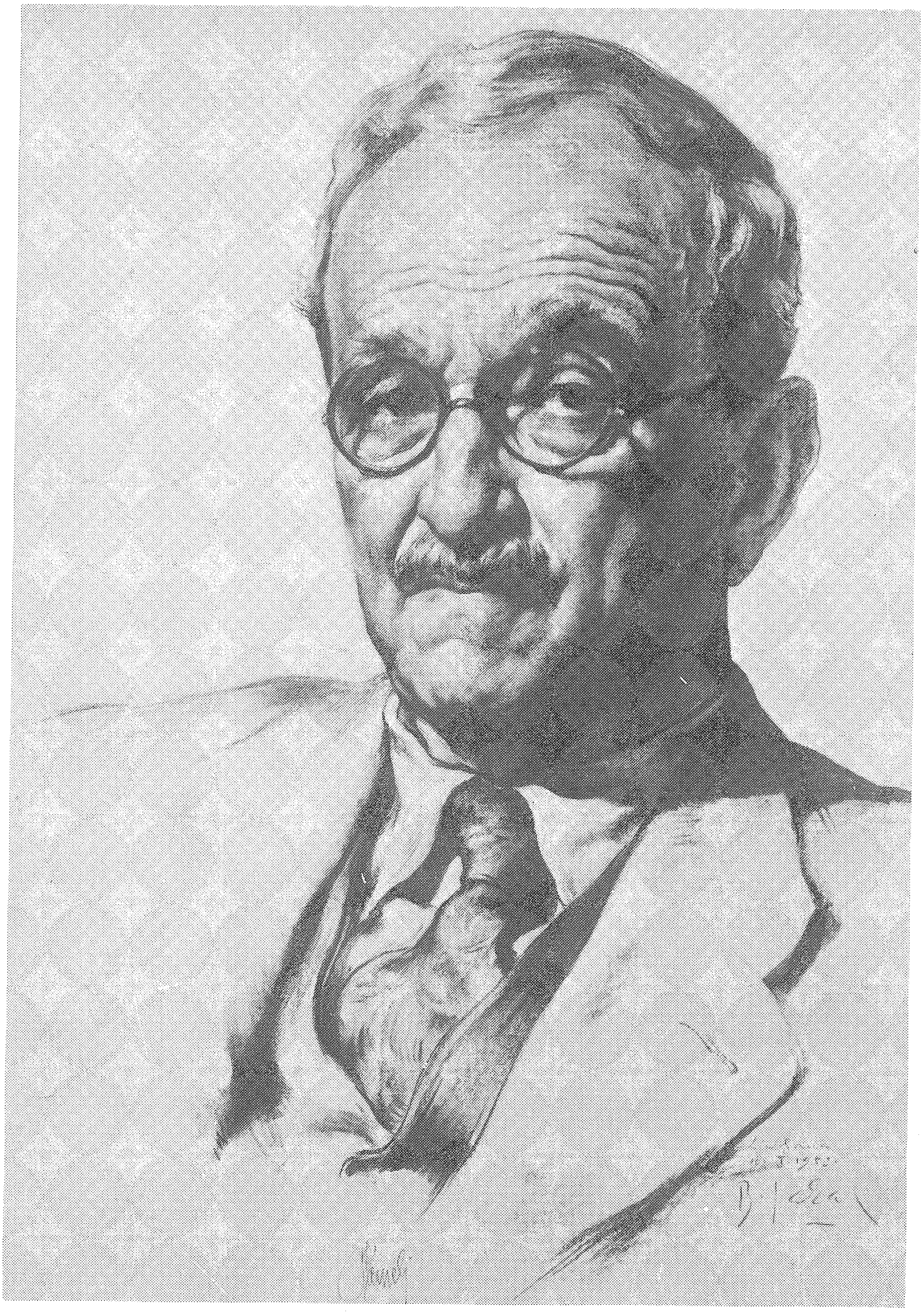
Vesti — News

Seznam diplomantov in doktorandov ... (Zbral in ur. Ciril Velkovrh) 93–96
Plemljev dom na Bledu (Ciril Velkovrh) III

Nove Knjige — New books (Franc Cvelbar, Bojan Magajna, Peter Gosar) . . . . . 89–90, III–IV, IV
Podiplomski seminar iz matematike 78
Fizika – Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij 84
Zbirka izbranih poglavij iz fizike 92

Na ovitku: Plemljev dom na Bledu (Foto Marjan Smerke)

OB PETINDVAJSETLETNICI SMRTI JOSIPA PLEMLJA



Božidar Jakac, **Josip Plemelj** — risba, 1952

Letos 22. maja bo minilo 25 let od smrti nestorja slovenske matematike akademika Josipa Plemlja. O njegovem življenju, delu in vplivu na slovensko matematiko je bilo v našem tisku že veliko objavljenega. V seznamu literature na koncu tega sestavka so navedeni le sestavki o Plemlju, ki so izšli v *Obzorniku za matematiko in fiziko,* in obe knjižici Ivana Vidava ([9], [15]). Bralcu, ki se želi podrobno seznaniti s Plemljevim življenjem in delom, Vidavovi knjižici toplo priporočam. Ivan Vidav, ki je Plemlja poznal skoraj trideset let, bil njegov učenec, kolega, prijatelj in tudi naslednik, je z njim preživel mnoge ure v prijetnem pogovoru. Tako je izvedel za mnogo zanimivih podrobnosti iz Plemljevega otroštva, študentskih let, njegove univerzitetne kariere v stari Avstriji in na ljubljanski univerzi v času med obema vojnama. Knjižici sta napisani v prijetnem tonu in z ravno pravšnjo mero strokovnosti, da bralcu z matematično izobrazbo privlačno pričarata Plemljeve znanstvene uspehe.

V tem sestavku želim le na kratko obnoviti najpomembnejše podatke o Josipu Plemlju, povzete iz dela [9]. Nekoliko več pa bi rad napisal o svojem stiku s profesorjem Plemljem, o njegovem pedagoškem delu v zadnjih letih pred upokojitvijo in o svojem pogledu na njegove zasluge za razvoj matematike na Slovenskem.

Josip Plemelj se je rodil 11. decembra 1873 v vasi Grad na Bledu. Tam je tudi obiskoval osnovno šolo, gimnazijo pa v Ljubljani, kjer je leta 1894 maturiral. Med gimnazijskim šolanjem se je vzdrževal sam z inštrukcijami. Ker je že v srednji šoli pokazal velik talent za matematiko — saj je bil z znanjem vedno daleč pred snovjo, ki so jo obravnavali — se je po maturi odločil za študij matematike na Dunaju. Bil je tako izjemen študent, da je že leta 1898 uspešno zagovarjal doktorsko disertacijo z naslovom *Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten.* Po doktoratu se je eno leto izpopolnjeval v Berlinu pri profesorjih Fuchsu in Frobeniusu, drugo leto pa v Göttingenu pri profesorjih Kleinu in Hilbertu. Leta 1902 je postal privatni docent za matematiko na dunajski univerzi, leta 1907 pa izredni profesor za matematiko v Černovicah. Že naslednje leto je bil imenovan za rednega profesorja, star komaj 35 let. Ob ustanovitvi ljubljanske univerze leta 1919 je bil imenovan za rednega profesorja na filozofski fakulteti. Postal je prvi rektor nove univerze. Na „svoji" univerzi je profesor Plemelj predaval matematiko matematikom, naravoslovcem in tehnikom prek 40 let. Upokojil se je leta 1957, star 84 let. Po upokojitvi je še nekaj let predaval matematikom kot honorarni profesor. Umrl je 22. maja 1967 v visoki starosti 94 let.

Plemljevo znanstveno delo obsega 5 knjig (eno v nemškem, tri v slovenskem in eno v angleškem jeziku) in 28 člankov (25 v mednarodnih in 3 v domačih matematičnih revijah). Izvirne prispevke ima Plemelj na mnogih matematičnih področjih: v diferencialnih in integralnih enačbah, teoriji potenciala, funkcijski teoriji in teoriji števil. Njegova dela so tako pomembna, da si je v svojem razmeroma kratkem kreativnem obdobju pridobil sloves enega vodilnih svetovnih matematikov. Najpomembnejši Plemljev uspeh je

nedvomno elegantna rešitev Riemannovega problema. Dokazati je bilo treba obstoj linearne homogene diferencialne enačbe pri danih singularnih točkah in monodromijski grupi. Pri reševanju tega problema je Plemelj leta 1906 odkril formule, ki dajejo odgovor na vprašanje, kateremu pogoju ustrezajo robne vrednosti regularne funkcije. Poljubno podane vrednosti na robu območja namreč niso vedno vrednosti neke regularne funkcije. Plemelj je dokazal tole: $f^+(z)$ so robne vrednosti v notranjosti območja regularne funkcije $f(z)$ natanko tedaj, ko je izpolnjena enačba

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f^+(\zeta)-f^+(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \;=\; 0,$$

$f^-(z)$ pa so robne vrednosti v zunanjosti območja regularne funkcije $f(z)$ z vrednostjo c v neskončnosti natanko tedaj, če velja

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f^-(\zeta)-f^-(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \;+\; f^-(z) \;-\; c \;=\; 0.$$

Integrala se raztezata po robu območja. Formuli je našel že leta 1873 J. V. Sohocki in ju objavil v svoji disertaciji, ki pa je ostala neopažena. Zdaj se formuli imenujeta formuli Plemlja-Sohockega.

Na osnovi novih metod, ki jih je vpeljal Plemelj pri rešitvi Riemannovega problema, je pozneje nastala teorija singularnih integralnih enačb, ki jo je utemeljila sovjetska šola pod vodstvom Musheliśvilija. Ta šola popolnoma priznava Plemljeve zasluge. Plemljeva dela so bila zelo odmevna v matematičnem svetu. Profesor Jože Povšič je zadnja leta svojega življenja posvetil zbiranju odmevov na Plemljeva dela. Samo v naši knjižnici, v Zagrebu in na Dunaju je našel prek 1000 citatov Plemljevih rezultatov. Takega odmeva v današnji stopnji specializacije najbrž ne bo več dosegel noben slovenski matematik.

Večino svojih izvirnih prispevkov je Plemelj vključil v svoj triletni ciklus predavanj za matematike od drugega do četrtega letnika: teorija analitičnih funkcij, algebra in teorija števil ter diferencialne enačbe. Za obdobje pred drugo svetovno vojno velja, da so bila njegova predavanja nesporno na izredno visokem nivoju. Žal je ta odlična predavanja izdal v knjižni obliki šele v letih 1953–1962, to je ob izteku svojega poučevanja, kar je bilo za večino generacij njegovih učencev prepozno. Na srečo pa je knjige napisal po zapiskih O. Sajovica s predavanj v najboljših letih, tako da je njegovo mojstrstvo matematika-pedagoga dostopno vsem naslednjim generacijam. Tudi njegova predavanja za tehnike so se ohranila v obeh knjigah Ivana Vidava: *Višja matematika I* in *Višja matematika II.*

Za svoje znanstveno in pedagoško delo je dobil Josip Plemelj številna priznanja. Še pred prvo svetovno vojno je dobil v Avstriji dve zelo pomembni nagradi za knjigo *Potentialtheoretische Untersuchungen*, po drugi svetovni vojni pa je prejel leta 1954 Prešernovo nagrado. Bil je dopisni član Jugoslovanske akademije znanosti in umetnosti, Srpske akademije nauka in Bavarske akademije, od ustanovitve leta 1938 pa redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Ob devetdesetletnici rojstva leta 1963 mu je univerza v Ljubljani podelila častni doktorat. Po smrti je bil deležen še mnogih časti. Po njem se imenuje osnovna šola na Bledu. V njegovi hiši na Bledu je Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije uredilo spominsko sobo, ki je vredna obiska. V njeni neposredni bližini stoji Plemljev doprsni kip z vklesanima znamenitima formulama. V Ljubljani v Sentvidu se po njem imenuje ulica. Leta 1969 mu je univerza v Ljubljani kot svojemu prvemu rektorju postavila spomenik pred glavnim poslopjem na Kongresnem trgu. Ob stoletnici rojstva je bil na Bledu mednarodni simpozij, ki je bil posvečen področjem, na katerih je Plemelj aktivno delal. Letos — ob petindvajsetletnici smrti — pa je koordinacijska komisija vlade Republike Slovenije dala soglasje predlogu Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, da se leto 1992 proglasi za *leto prof. dr. Josipa Plemlja.* Obenem je ta komisija sklenila, da vlada Republike Slovenije prevzame pokroviteljstvo nad vsemi prireditvami, ki bodo posvečene Plemljevemu spominu, in imenovala ministra za šolstvo in šport dr. Petra Venclja za predsednika častnega odbora za Plemljevo leto. Večjih ali enakovrednih časti je bilo doslej deležnih le malo Slovencev. Med njimi ni nobenega znanstvenika.

Po teh naštevanjih Plemljevih znanstvenih dosežkov in ustreznih priznanj naj mi bo dovoljeno napisati nekaj besed o Plemlju – učitelju, kot smo ga doživljali njegovi zadnji učenci. Kot sem že omenil, je Plemelj predaval matematikom višjih letnikov tri glavne predmete, ki so se ponavljali v triletnem ciklusu. Vsak od teh predmetov je obsegal po 5 ur predavanj in 3 ure vaj tedensko. Tako „debelih" predmetov danes v učnih načrtih ni več. Ko je prišla v drugi letnik moja generacija, ki je maturirala leta 1953, razpolovljena po bitki s profesorjem Vidavom, je bil pri profesorju Plemlju na vrsti predmet teorija analitičnih funkcij. Predavanja so se začela z uvedbo kompleksnih števil z dvojicami in naš prvi vtis je bil, da je ta predmet zelo lahek. Seveda se je kmalu pokazalo, da je resnica drugačna. Profesorju Plemlju je kljub visoki starosti 81 let in kljub mnogo počasnejšemu tempu predavanj kot v svojih najboljših letih uspelo v nekaj tednih popeljati nas v povsem nov svet kompleksnih funkcij. Na svojstven način, ki mu je bilo zelo lahko slediti, je nastajala pred nami matematična teorija. Vsako uro je profesor začel s snovjo na sredini prejšnje ure, tako da smo vso snov praktično slišali dvakrat. Tudi če doma nismo preštudirali prejšnje snovi, smo nadaljevanju lahko sledili. Predaval je počasi, jasno, razločno, na tablo je zelo lepo pisal. Definicije, izreki in dokazi so si sledili naravno, kot je narekovala potreba. Njegov slog je bil daleč od današnjega suhega, strogo znanstvenega zaporedja: izrek, dokaz, izrek, dokaz ... brez vmesne povezave in potrebne

motivacije. Šele po izidu njegovih treh učbenikov *Teorija analitičnih funkcij* leta 1953, *Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba* leta 1960 in *Algebra in teorija števil* leta 1962 smo spoznali, koliko več snovi je profesor Plemelj predaval, ko je bil mlajši. Kljub visoki starosti pa profesor pri predavanjih ni nikdar uporabljal zapiskov, pa tudi zmotil se ni nikdar, ali izgubil rdeče niti. Vsem generacijam matematikov je bil vzor odličnega predavatelja in še danes se matematiki ponašamo pred drugimi strokami z vzornostjo svojih predavanj.

Plemljeva spominska soba na Bledu (foto Marjan Smerke).

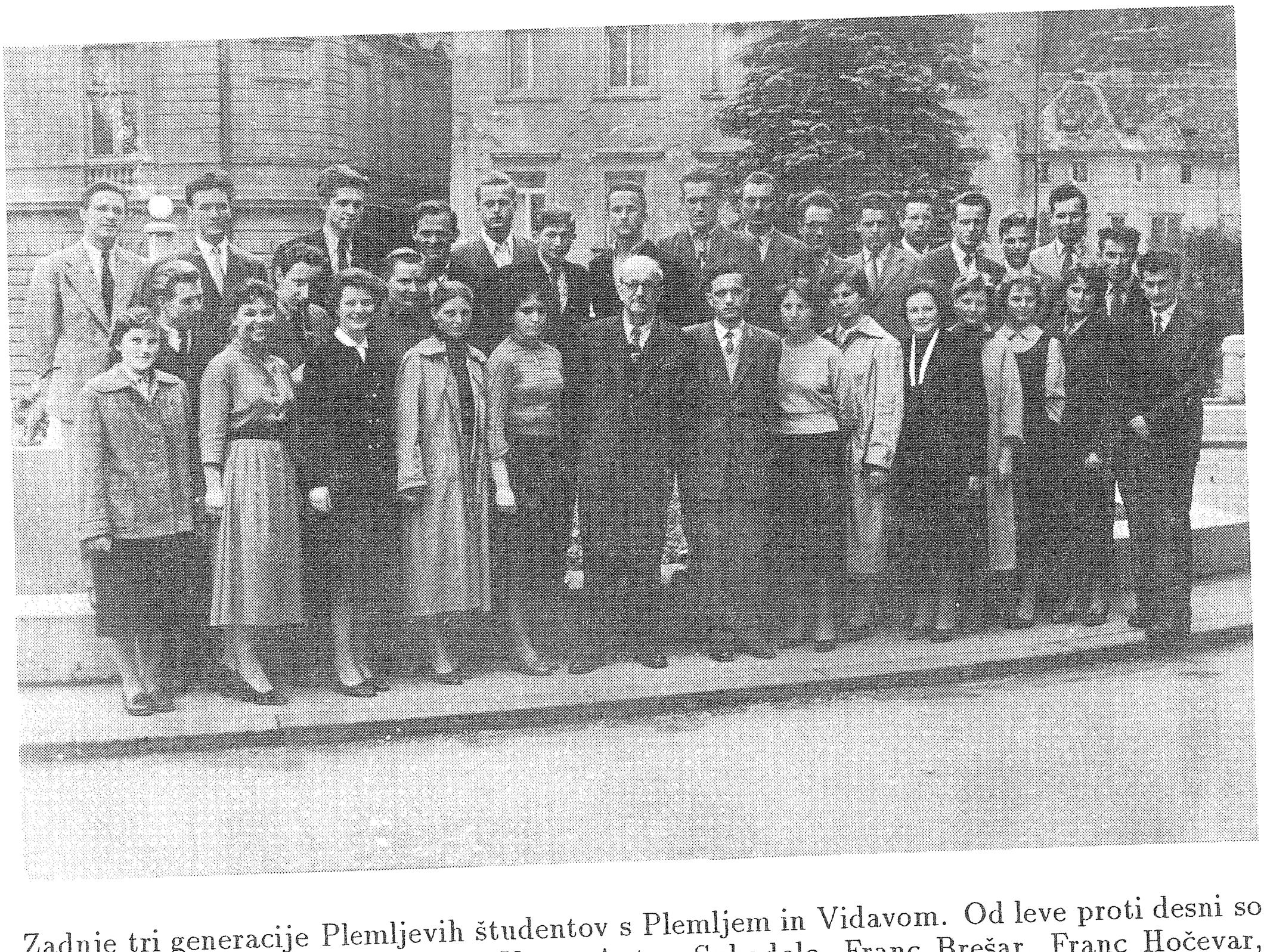
Na vajah, ki jih je profesor vodil sam, smo nekateri posamezniki pridobili še mnogo več. Navada je bila, da so k tabli hodili le zelenci iz drugega letnika. Za to so poskrbeli višji letniki tako, da so zasedli zadnje klopi. Profesor je potem poklical k tabli koga iz prve klopi in ga kar nekako posvojil. Izbrani revež je moral hoditi k tabli kar ves semester. Seveda pa je zato imel priložnost odnesti od vaj kar največ. Ker sem bil ta revež najprej sam, vem, da mi je to zelo koristilo. Moral sem se za vaje pripravljati, preštudirati kak Plemljev članek, mimogrede sem se naučil pisanja grških črk (sedanji študenti take šole očitno niso imeli), pisati enačaj z dvema črtama, ne pa z dvopičjem, pisati ulomkovo črto v višini enačaja in podobnega. Profesor je bil do žrtve vedno zelo prijazen in ji skušal pomagati prek ovir. Včasih pa, ko nesrečnežu ni in ni uspelo prav napisati narekovane formule, je tudi profesor izgubil potrpljenje. Takrat je nastopila navadno menjava nastopajočega.

Princip cikličnih predavanj je bil po eni strani zelo pameten in ekonomičen, saj je en predavatelj opravljal delo treh, po drugi strani pa ni bilo vseeno, kdaj si se rodil. Mi, ki smo začeli z analitičnimi funkcijami, nadaljevali z algebro in teorijo števil, smo prišli do diferencialnih enačb šele v četrtem letniku. Potrebovali pa smo jih že v prvem in drugem letniku pri fiziki in mehaniki. No, tolažili smo se na koncu s tem, da smo vsaj pri študiju za diplomski izpit razumeli tisto, kar smo že imeli za seboj. Profesor Plemelj je izpraševal matematike le pri obeh diplomskih izpitih. Pri B diplomi so bile na vrsti diferencialne enačbe, pri A pa teorija analitičnih funkcij in algebra in teorija števil. Bil je zelo prizanesljiv eksaminator, saj je bila stroga selekcija storjena že po prvem letniku. Kdor je prišel do diplomskega izpita, je praktično ta izpit tudi opravil. Izjeme so bile zelo redke. Izpraševal je tako, da je moral kandidat v pregledni obliki obnoviti približno polovico snovi. Govoriti je bilo treba vedno na pamet, brez pisanja na tablo ali na papir.

Naša generacija 1953–57 je bila zadnja, ki je poslušala Plemlja kot aktivnega profesorja. Leta 1957 je konec maja odpredaval svojo zadnjo redno uro. Ko nam je to povedal, se mu je v imenu študentov zahvalil France Brešar. Ob spontanem aplavzu smo bili vsi zelo ginjeni, saj smo se zavedali, da odhaja velikan, ki je bil na svoje delo zelo navezan. Takrat nam namreč ni bilo znano, da je bil že pred petdesetimi leti svetovno znan znanstvenik, zavedali smo se le, da je po svojih sposobnostih visoko nad nami, a vendar človek, učitelj, dobričina.

Na koncu tega sestavka pa bi rad po svoje ocenil Plemljeve zasluge za razvoj matematike na Slovenskem. Slovenci smo imeli izredno srečo, da se je med nami rodil tak matematični veleum, da je dobil za tiste čase ugodne pogoje za razvoj, da se je uveljavil v svetu kot avstrijski matematik in tako imel vse možnosti za stike z vodilnimi matematiki tistega časa. Ko je bila po prvi svetovni vojni ustanovljena nova univerza v Ljubljani, pa smo imeli dodatno srečo, da se je profesor Plemelj odpovedal svojemu nadaljnjemu uveljavljanju v svetu, se vrnil domov in zaoral ledino ne samo na novoustanovljenem visokošolskem študiju matematike, pri poučevanju višje matematike za tehnike, ampak tudi pri vodenju nove univerze in njene katedre za matematiko. Zdi se mi, da je današnja visoka kvaliteta naše visokošolske matematike predvsem posledica dejstva, da je bil prvi matematik na naši univerzi tako uspešen raziskovalec in tako izvrsten pedagog. Njegova osebna zasluga je, da se na matematiki ni mogel uveljaviti povprečnež, ki bi začel zbirati okrog sebe kvečjemu manj sposobne. Nekatere druge stroke na novi univerzi take sreče niso imele in še danes se poznajo posledice. Profesor Plemelj je imel tako razvit čut za ocenjevanje sposobnosti posameznikov in tako dobro intuicijo, da je lahko počakal na pravega naslednika. Rajši je sam predaval za tri, kot da bi si za naslednika izbral neprimernega. Tako mu je uspelo dočakati, da se je na matematiko vpisal Ivan Vidav, talent istega reda, kot je bil sam. Plemelj je že kmalu spoznal Vidavove sposobnosti, ko je ta še kot študent rešil problem, ki ga je profesor kot nerešenega omenil pri predavanjih iz diferencialnih enačb. Rezultat tega je bil, da je Vidav

napisal doktorsko disertacijo še pred diplomo leta 1941. Od tedaj je bilo za bodočnost slovenske matematike poskrbljeno.



Zadnje tri generacije Plemljevih študentov s Plemljem in Vidavom. Od leve proti desni so v drugi vrsti Srečo Piškur, Ivan Kapš, Anton Suhadolc, Franc Brešar, Franc Hočevar, Janez Grad, Danijel Vevar, Ciril Velkovrh, Stanislav Zorko, Vinko Jelovčan, Marjan Vodopivec, Janez Novak, Franc Krumberger, Gabrijel Tomšič in Cveto Trampuž, v prvi vrsti pa Kristina Mlakar, Vili Kogovšek, Majda Kastelic, Aleksander Cokan, Silva Škufca, Silva Weigl, Terezija Grobelnik, Marjeta Poljanec, **Josip Plemelj, Ivan Vidav,** Terezija Mlinar, Judita Plut, Marija Krajnik, Marija Grabrijan, Ema Krainer-Janežič, Egidija Urankar, Franc Lebedinec in Zvonimir Bohte.

Ivan Vidav je takoj po vojni napredoval v docenta in kmalu je prevzel vse izpite pri Plemljevih predmetih za tehnike in preizkusni izpit za matematike pri prehodu v drugi letnik. Bil je zelo strog in vsakdo, ki je pri njem opravil preizkusni izpit, je imel odprto pot do diplome, če le ni sam prenehal s študijem. Redni profesor je postal že leta 1953 in kmalu nato tudi redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Po Plemlju je podedoval strogost pri objavljanju matematičnih člankov, saj je vsako Vidavovo delo izpiljeno do skrajnosti. Obenem pa je bil prav tak pedagoški talent, tako da se je tradicija, ki jo je začel Plemelj, nadaljevala. V nečem pa je Vidav prekosil svojega učitelja: bil je veliko bolj toleranten do mlajših. Od njih ni zahteval, da so mu po sposobnostih enakovredni, ampak je vsakemu, ki je le malo obetal, dal priložnost, da se razvije v samostojnega znanstvenega delavca. Res je tudi, da so potrebe po matematikih po drugi svetovni vojni

močno narastle, saj je tudi število študentov in število študijskih smeri, ki so vpeljale matematiko kot predmet, močno narastlo. Izključno Vidavova zasluga je, da je število doktorjev znanosti, ki je bilo pred njim zelo majhno (Anton Vakselj in Alojzij Vadnal), kmalu začelo naraščati. Bil je mentor Francetu Križaniču, Rajku Jamniku, Niku Prijatelju, Jožetu Grasselliju, Antonu Suhadolcu, Zvonimirju Bohtetu in Gabrijelu Tomšiču, da naštejem le tiste, ki so še poslušali profesorja Plemlja. Do danes je število doktorjev matematičnih znanosti narastlo na 40 in med njimi so nekateri tako sposobni, da sami skrbijo za naraščaj. Za bodočnost slovenske matematike se ni treba bati, saj ni več odvisna od rojstva enega, za matematiko izjemno nadarjenega posameznika.

Zvonimir Bohte

LITERATURA

[1] *Profesorju Josipu Plemlju ob osemdesetletnici prisrčno čestitamo in mu posvečamo to številko našega lista.* (S fotografijo J. Branca.) Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 129.

[2] *Seznam del prof. J. Plemlja,* Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 130.

[3] A. Peterlin, *Znanstveno delo akademika Josipa Plemlja. Predavanje ob proslavi njegove osemdesetletnice na slavnostni skupščini Akademije dne 11. decembra 1953,* Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 131–133.

[4] *Akademik profesor doktor Josip Plemelj — častni doktor matematičnih in tehniških znanosti. (S fotografijo, ob 90. rojstnem dnevu.)* Obzornik mat. fiz. **10** (1963) 145.

[5] *Profesor dr. Josip Plemelj. 11. decembra 1873 – 22. maja 1967.* (S fotografijo.) Obzornik mat. fiz. **14** (1967) 1.

[6] Ivan Vidav, *Dragi gospod profesor!* (Iz govora, ki ga je imel ob odprtem grobu.) Obzornik mat. fiz. **14** (1967) 2.

[7] France Križanič, *Spoštovani tovariš profesor!* (Govor ob odprtem grobu.) Obzornik mat. fiz. **14** (1967) 3.

[8] Ivan Vidav, *O življenju in delu prof. Josipa Plemlja.* (Govor pri odkritju spomenika, s fotografijo doprsnega kipa pred glavnim poslopjem Univerze v Ljubljani, delo B. Kalina.) Obzornik mat. fiz. **16** (1969) 146–148.

[9] Ivan Vidav, *Josip Plemelj. Ob stoletnici rojstva.* Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1973.

[10] Ciril Velkovrh, *Seznam člankov in drugih publikacij, objavljenih v Jugoslaviji, posvečenih profesorju dr. Josipu Plemlju in njegovemu delu,* Obzornik mat. fiz. **20** (1973) 157–159.

[11] Ciril Velkovrh, *Seznam del prof. J. Plemlja* (Nadaljevanje.) Obzornik mat. fiz. **20** (1973) 160.

[12] Ciril Velkovrh, *Plemljeva spominska soba,* Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 189.

[13] Ciril Velkovrh, *Bibliografija člankov in drugih publikacij, objavljenih v Jugoslaviji, posvečenih profesorju dr. Josipu Plemlju in njegovemu delu* (dopolnitev), Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 189–191.

[14] Ciril Velkovrh, *Ob 110. obletnici rojstva Josipa Plemlja,* Obzornik mat. fiz. **30** (1983), 188–189.

[15] Ivan Vidav, *Josip Plemelj. Ob dvajsetletnici smrti,* Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1987.

ARHIMEDSKO UREJENI KOLOBARJI

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991): 66F25, 13J25

Na elementaren način dokažemo, da je urejen arhimedski kolobar izomorfen enolično določenemu podkolobarju urejenega obsega $\mathbb{R}$, in poiščemo vse polne urejene kolobarje.

ARCHIMEDEAN ORDERED RINGS

It is shown in an elementary way that an Archimedean ordered ring is isomorphic to a uniquely determined subring of the ordered field $\mathbb{R}$, and a description of all complete ordered rings is given.

Najprej osvežimo nekaj pojmov.

Definicija 1. Množica $\mathcal{K}$ z dvema binarnima operacijama, seštevanjem $(a,b) \longmapsto a+b$ in množenjem $(a,b) \longmapsto ab$, je *kolobar*, kadar je $(\mathcal{K},+)$ Abelova grupa, obe operaciji pa sta povezani z distributivnostnima zakonoma

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca,$$

kjer je $a, b, c \in \mathcal{K}$.

Nekateri odsotnost asociativnostnega zakona za množenje poudarijo s tem, da takó definiranemu kolobarju rečejo *neasociativen kolobar*. Množenje v takšnem kolobarju je lahko asociativno.

Definicija 2. *Urejen kolobar* je kolobar $\mathcal{K}$ z dano podmnožico $\mathcal{K}^p \subset \mathcal{K}$, ki ustreza pogojem :

1. $\mathcal{K} = \mathcal{K}^p \cup \mathcal{K}^n \cup \{0\}$ in $\mathcal{K}^p \cap \mathcal{K}^n = \emptyset$, pri čemer je $\mathcal{K}^n = \{a \in \mathcal{K} : -a \in \mathcal{K}^p\}$.
2. $\mathcal{K}^p$ je zaprta za seštevanje in množenje, torej

$$\mathcal{K}^p + \mathcal{K}^p \subset \mathcal{K}^p, \quad \mathcal{K}^p\mathcal{K}^p \subset \mathcal{K}^p .$$

Relacijo urejenosti $<$ uvedemo z zahtevo

$$a < b \ (\text{ali } b > a) \iff b - a \in \mathcal{K}^p , \quad a, b \in \mathcal{K} .$$

Množico $\mathcal{K}^p$ sestavljajo elementi $a \in \mathcal{K}$, ki zadoščajo pogoju $a > 0$ in jih imenujemo pozitivni elementi.

Na podoben način kot urejen kolobar definiramo tudi *urejen obseg* (glej [1, III.9]). Marsikatero lastnost urejenega kolobarja lahko dokažemo na enak način kot za urejen obseg. Tako na primer vidimo, da je relacija $<$ asimetrična, tranzitivna ter sovisna (velja zakon trihotomije) in da veljata sklepa

$$a < b \implies a + c < b + c, \quad a, b, c \in \mathcal{K} ,$$
$$a < b \text{ in } c > 0 \implies ac < bc \text{ in } ca < cb .$$

Podkolobar urejenega kolobarja uredimo z isto relacijo $<$ in je urejen kolobar.

Definicija 3. Naj bosta $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ urejena kolobarja.
Preslikava $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ je *naraščajoča*, če velja

$$a < b \implies \varphi(a) < \varphi(b), \quad a, b \in \mathcal{K}\,.$$

Bijektivna preslikava $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ je *izomorfizem* (urejenih kolobarjev), če je aditivna, multiplikativna in naraščajoča.

Naraščajoča preslikava je injektivna, zato z zožitvijo kodomene aditivne, multiplikativne in naraščajoče preslikave $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ na njeno zalogo dobimo izomorfizem $\mathcal{K} \to \varphi(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}$.

1. Arhimedski kolobarji

Definicija 4. Urejen kolobar $\mathcal{K}$ je *arhimedski*, kadar za vsak par pozitivnih elementov $a, b \in \mathcal{K}$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $b < na$.

Urejen obseg je arhimedski natanko takrat, kadar je arhimedsko urejen po definiciji iz [1, III.9]. Vsak podkolobar kolobarja $\mathbb{R}$ z običajno urejenostjo je arhimedski. Tudi obratno je (do izomorfizma natančno) res, saj velja naslednja posplošitev izreka 18 iz [1, III].

Izrek 1. *Urejen arhimedski kolobar $\mathcal{K}$ je izomorfen nekemu podkolobarju urejenega kolobarja $\mathbb{R}$. Pri tem sta podkolobar in izomorfizem nanj enolično določena.*

Dokaz. Če je $\mathcal{K}$ ničelni kolobar, izrek očitno velja. Denimo, da je $\mathcal{K} \neq \neq \{0\}$. Potem obstaja pozitiven element $e \in \mathcal{K}$. Vzemimo poljuben $a \in \mathcal{K}$. Za vsak par $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ velja bodisi $me \leq na$ bodisi $me > na$, vendar ne oboje hkrati. Če para $m' \in \mathbb{Z}$, $n' \in \mathbb{N}$ in $m'' \in \mathbb{Z}$, $n'' \in \mathbb{N}$ ustrezata pogoju $m'/n' = m''/n''$, velja

$$m'e \leq n'a \iff m''e \leq n''a\,,$$

zato množica vseh racionalnih števil razpade na podmnožici

$$S_a = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},\ me \leq na\}\,,$$
$$Z_a = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},\ me > na\}\,.$$

Ker je $\mathcal{K}$ arhimedski, sta S_a in Z_a neprazni. Dokažimo, da je vsako število iz S_a manjše od vsakega števila iz Z_a.

Če je m_1/n_1 v S_a in m_2/n_2 v Z_a, velja

$$m_1 e \leq n_1 a \text{ in } m_2 e > n_2 a\,.$$

Od tod brez težav dobimo oceno

$$m_1 n_2 e \leq n_1 n_2 a < n_1 m_2 e\,,$$

ki pove, da je $(n_1 m_2 - m_1 n_2)e > 0$. Zato je število $n_1 m_2 - m_1 n_2$ pozitivno, torej $m_1/n_1 < m_2/n_2$.

Iz dobljenih lastnosti sledi, da S_a in Z_a določata realno število

$$\varphi(a) = \sup S_a = \inf Z_a\,. \tag{1}$$

S tem smo opredelili preslikavo $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Očitno velja $\varphi(e) = 1$ in $\varphi(0) = 0$. Dokažimo, da velja

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ za vsak } a, b \in \mathcal{K}\,. \tag{2}$$

Če $m_1/n_1 \in S_a$ in $m_2/n_2 \in S_b$, potem je

$$m_1 e \leq n_1 a \text{ in } m_2 e \leq n_2 b\,,$$

od koder sledi

$$(m_1 n_2 + m_2 n_1)e \leq n_1 n_2 (a+b)\,.$$

Torej velja $m_1/n_1 + m_2/n_2 \in S_{a+b}$ in zato

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \sup S_a + \sup S_b \leq \sup S_{a+b} = \varphi(a+b)\,.$$

Podobno vidimo, da je vsota števil iz Z_a in Z_b v Z_{a+b}, zato

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \inf Z_a + \inf Z_b \geq \inf Z_{a+b} = \varphi(a+b)\,,$$

kar skupaj s prejšnjo oceno da (2).

Dokažimo, da je preslikava φ naraščajoča. Naj bo $a, b \in \mathcal{K}$ in $a < b$. Poiščimo tak naraven n, da je $e \leq n(b-a)$. Potem $1/n \in S_{b-a}$ in zato $\varphi(b-a) \geq 1/n$. S pomočjo (2) dobimo

$$\varphi(a) < \varphi(a) + \varphi(b-a) = \varphi(b)\,,$$

torej je φ res naraščajoča. Od tod sledi, da je φ injektivna in da pozitivne elemente preslika v pozitivna števila.

Vzemimo zdaj poljubna pozitivna elementa $a, b \in \mathcal{K}$ in pozitivni racionalni števili $m_1/n_1 \in S_a$, $m_2/n_2 \in S_b$. Potem velja

$$m_1 e \leq n_1 a \text{ in } m_2 e \leq n_2 b\,,$$

zato

$$m_1 m_2 e^2 \leq n_1 n_2 ab$$

in zaradi naraščanja φ še

$$\frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2}\varphi(e^2) \leq \varphi(ab)\,.$$

Od tod s pomočjo (1) dobimo oceno

$$\varphi(a)\varphi(b)\varphi(e^2) \leq \varphi(ab)\,.$$

Podobno s pomočjo množic Z_a in Z_b dokažemo, da velja tudi obratna neenakost, kar skupaj s prejšnjo oceno da enakost

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(e^2)\,. \tag{3}$$

Ker je $\varphi(0) = 0$ in zaradi (2) $\varphi(-c) = -\varphi(c)$ za vsak $c \in \mathcal{K}$, velja (3) za vsak par $a, b \in \mathcal{K}$.

Zaradi naraščanja preslikave φ iz $e^2 > 0$ sledi $\varphi(e^2) > 0$.

Opredelimo preslikavo $\psi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\psi(a) = \varphi(e^2)\varphi(a), \quad a \in \mathcal{K}\,.$$

Iz (2) sledi aditivnost ψ, enakost (3) pa nam pove, da je ψ multiplikativna:

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b) \text{ za vsak } a, b \in \mathcal{K}\,.$$

Ker je funkcija φ naraščajoča, ψ preslika urejeni kolobar $\mathcal{K}$ na izomorfen podkolobar $\psi(\mathcal{K})$ kolobarja $\mathbb{R}$.

Dokažimo še enoličnost. Naj bosta $\mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$ urejena podkolobarja urejenega kolobarja $\mathbb{R}$ in

$$\sigma : \mathcal{K} \to \mathcal{L} \text{ in } \tau : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$$

izomorfizma urejenih kolobarjev. Potem je

$$\rho = \tau\sigma^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$$

izomorfizem urejenih kolobarjev $\mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$. Vzemimo poljuben pozitiven $r \in \mathcal{L}$ in pri vsakem naravnem n izberimo tak $m \in \mathbb{Z}$, da velja

$$\frac{m}{n} \leq r < \frac{m+1}{n}\,.$$

Potem je $mr \leq nr^2 < (m+1)r$, in zato $m\rho(r) \leq n\rho(r^2) < (m+1)\rho(r)$. Ker je $\rho(r) > 0$ in $\rho(r^2) = \rho(r)^2$ velja

$$\frac{m}{n} \leq \rho(r) < \frac{m+1}{n}\,.$$

Pri tem je bil $n \in \mathbb{N}$ poljuben, torej velja enakost $\rho(r) = r$. Ta se ohrani za $r \leq 0$, zato je preslikava $\rho : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ identiteta. Seveda je potem $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ in $\sigma = \tau$.

Posledica 1. *Množenje v urejenem arhimedskem kolobarju je asociativno in komutativno.*

Opomba. V dokazu izreka 1 nismo uporabili v celoti distributivnostnih zakonov iz definicije kolobarja. Namesto njih zadostuje naslednji šibkejši zakon:

$$(ma)(nb) = (mn)(ab) \quad \text{za vsak} \quad a, b \in \mathcal{K},\ m, n \in \mathbb{Z}\,.$$

2. Polni kolobarji

Definicija 5. Urejen kolobar $\mathcal{K}$ je *poln*, kadar ima vsaka njegova neprazna navzgor omejena podmnožica najmanjšo zgornjo mejo.

Vsak poln urejen obseg je izomorfen obsegu $\mathbb{R}$ (glej [1, III. izrek 19]). Za polne urejene kolobarje velja podoben

Izrek 2. *Poln urejen kolobar $\mathcal{K}$ je izomorfen bodisi urejenemu kolobarju $\mathbb{R}$ bodisi enemu od njegovih (paroma neizomorfnih) podkolobarjev $\mathbb{Z}n = \{mn : m \in \mathbb{Z}\}$, kjer je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Dokaz. Ničelni kolobar je izomorfen kolobarju $\mathbb{Z}0$, zato naj bo odslej $\mathcal{K} \neq \{0\}$. Najprej dokažimo, da je $\mathcal{K}$ arhimedski. Vzemimo poljubna pozitivna elementa $a, b \in \mathcal{K}$ in si oglejmo množico $M = \{na : n \in \mathbb{N}\}$. Če bi bil b zgornja meja množice M, bi zaradi polnosti $\mathcal{K}$ obstajal $c = \sup M \in \mathcal{K}$. Tedaj bi veljalo

$$c - a \geq na - a = (n-1)a \quad \text{za vsak} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

torej bi bila razlika $c - a$ zgornja meja množice M. To pa vodi v protislovje $c \leq c - a$, ki pove, da b ni zgornja meja množice M. Zato obstaja tak naraven n, da je $na > b$, torej je $\mathcal{K}$ arhimedski.

Po izreku 1 je $\mathcal{K}$ izomorfen podkolobarju $\mathcal{L}$ urejenega kolobarja $\mathbb{R}$. Seveda je tudi $\mathcal{L}$ poln. Ločimo dve možnosti.

1. *Množica $\mathcal{L}^p$ ima najmanjši element*, denimo e. Ker je $\mathcal{L}$ arhimedski, za vsak $a \in \mathcal{L}$ obstaja tak $m \in \mathbb{Z}$, da je $me \leq a < (m+1)e$, torej velja $0 \leq a - me < e$. Od tod zaradi minimalnosti e sledi $a = me$, zato so v $\mathcal{L}$ točno vsi celi večkratniki števila e. Torej obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $e^2 = ne$ in tedaj $e = n$, zato $\mathcal{L} = \mathbb{Z}n$.

2. *Množica $\mathcal{L}^p$ nima najmanjšega elementa.* Kolobar $\mathcal{L}$ zagotovo vsebuje kak pozitiven element, denimo a. Ker a ni minimalen v $\mathcal{L}^p$, obstaja v $\mathcal{L}$ tak b, da je $0 < b < a$. Če je $2b \leq a$, postavimo $a_1 = b$, če pa je $2b > a$, naj bo $a_1 = a - b$. V obeh primerih velja $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}a$. Podobno zaporedoma poiščemo števila $a_2, a_3, \cdots$, ki ustrezajo pogojem

$$0 < a_{k+1} \leq \frac{1}{2}a_k, \quad a_k \in \mathcal{L},\ k = 1, 2, 3, \cdots$$

Ker zaporedje števil $a_k > 0$ konvergira proti 0 in ker $\mathcal{L}$ vsebuje vse cele večkratnike členov a_k, je $\mathcal{L}$ gost v $\mathbb{R}$. Od tod sledi, da je $\mathcal{L} = \mathbb{R}$, saj v nasprotnem primeru pri $r \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{L}$ navzgor omejena množica $\{a \in \mathcal{L} : a < r\}$ v $\mathcal{L}$ ne bi imela najmanjše zgornje meje.

Pravkar dokazani izrek nam da naslednjo karakterizacijo sistema realnih števil.

Posledica 2. *Poln urejen kolobar $\mathcal{K}$ je izomorfen urejenemu kolobarju $\mathbb{R}$, če ima vsaj eno od naslednjih lastnosti:*

(1) Množica $\mathcal{K}^p$ je neprazna in nima najmanjšega elementa (za vsak pozitiven $a \in \mathcal{K}$ obstaja tak $b \in \mathcal{K}$, da je $0 < b < a$).

(2) Obstaja tak $a \in \mathcal{K}$, da je $a^2 < a$.

$\mathcal{K}$ je tedaj urejen obseg, izomorfizem urejenih kolobarjev $\mathcal{K} \to \mathbb{R}$ pa je en sam in je tudi izomorfizem obsegov.

Posledica 2 nam pomaga skrčiti običajno družino aksiomov za sistem realnih števil, ki jo najdemo v [2, I.1].

Ohranimo aksiome I, II, III in IV, ki zahtevajo, da so realna števila za seštevanje Abelova grupa, ter aksiome XI, XII in XIII, ki govore o urejenosti števil. Distributivnostni aksiom X nadomestimo z zahtevo

$$(ma)(nb) = (mn)(ab), \text{za vsak par števil } a, b \text{ in poljubna } m, n \in \mathbb{Z},$$

aksiome V, VI, VII, VIII in IX v zvezi z množenjem (asociativnost, komutativnost, obstoj enote $1 \neq 0$ in obstoj inverznega elementa) pa z naslednjim:

Obstaja tako število a, da je število $a - a^2$ pozitivno.

LITERATURA

[1] I. Vidav, *Algebra,* DMFA Slovenije, Ljubljana 1989.
[2] I. Vidav, *Višja matematika I,* DMFA Slovenije, Ljubljana 1990.

NOVE KNJIGE

PODIPLOMSKI SEMINAR IZ MATEMATIKE

Na zalogi imamo še naslednje učbenike:

7. Suhadolc A., O kolokaciji, 1975, 34 str.
11. Vidav I., Banachove algebre, 2. natis, 1982, 132 str.
12. Vidav I., Uvod v teorijo C*-algeber, 2. natis, 1982, 80 str.
13. Vrabec J., Bordism, homology, and Stiefel-Whitney numbers, 1982, 84 str.
14. Vidav I., Linearni operatorji v Banachovih prostorih, 1982, 148 str.
15. Suhadolc A., Nekorektni problemi, 1984, 148 str.
17. Suhadolc A., Linearni topološki prostori, 2. del, 1987, 144 str.
18. Vidav I., Diferencialna geometrija, 1989, 144 str.
19. Magajna B., Vložitve matričnih algeber, 1991, 172 str.
20. Razpet M., Umbralni račun, 1992, 144 str.

O OKTONIONIH

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991): 17 A 35, 17 D 05

Namen članka je približati bralcu študij neasociativnih struktur. Opisana je konstrukcija algebre oktonionov s Cayley-Dicksonovim procesom in obravnavane nekatere enačbe v tej algebri.

ON OCTONIONS

The purpose of this paper is to give a review of some results in the theory of nonassociative structures to non-specialists. We describe a construction of octonions via the Cayley-Dickson process and find solutions of some equations in this algebra.

0. Uvod

Na različnih seminarjih sem že večkrat opazil odpor do struktur, ki niso asociativne. Mogoče je delno vzrok tudi dejstvo, da se pri nas ne na dodiplomskem ne na podiplomskem študiju ne predavajo teme o neasociativnih algebrah.

Namen tega članka je, da vsaj kakšnega (mlajšega in raziskovalno še neopredeljenega) bralca prepriča, da neasociativna algebra ni tako grda, nezanimiva ali patološka, da se z njo ne bi bilo vredno ukvarjati.

Za zgled sem si izbral oktonione. Ti so osemdimenzionalna razširitev realnih števil in so se zelo naravno pojavili v matematiki na začetku tega stoletja. Kako pridemo do njih, je opisano v prvem razdelku.

V drugih razdelkih so obravnavani nekateri povsem elementarni problemi, ki si jih lahko zastavimo, ko se prvič srečamo z novo strukturo.

1. Konstrukcija oktonionov

Naj bo $\mathcal{A}$ poljubna algebra z enoto 1 nad obsegom F. Denimo, da obstaja F-linearna preslikava $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, ki zadošča identitetama $x^{**} = x$ in $(xy)^* = y^*x^*$. Tako preslikavo imenujemo *involucija*. Naj bo $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ direktna vsota dveh kopij algebre $\mathcal{A}$. Produkt v $\mathcal{A}_1$ definiramo s formulo

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - db^*, cb + a^*d)\,. \tag{1}$$

Definirajmo še involucijo na $\mathcal{A}_1$ s predpisom

$$(a, b)^* = (a^*, -b). \tag{2}$$

Enostavna računa

$$(a, b)^{**} = (a^*, -b)^* = (a^{**}, -(-b)) = (a, b)\,,$$
$$((a, b) \circ (c, d))^* = (ac - db^*, cb + a^*d)^* =$$
$$= (c^*a^* - bd^*, -cb - a^*d) = (c^*, -d) \circ (a^*, -b) = (c, d)^* \circ (a, b)^*$$

nas prepričata, da je preslikava $* : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ res involucija. Algebro $\mathcal{A}$ lahko vložimo v algebro $\mathcal{A}_1$ tako, da elementu $a \in \mathcal{A}$ priredimo element $(a, 0)$. Prav tako se hitro prepričamo, da je element $(1, 0)$ enota v algebri $\mathcal{A}_1$.

Če zdaj ponovimo isto konstrukcijo z $\mathcal{A}_1$ namesto $\mathcal{A}$, dobimo algebro $\mathcal{A}_2$. Očitno lahko postopek ponavljamo v nedogled in tako dobimo zaporedje algeber $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$, v katerem je vsak člen razširitev prejšnjih. To zaporedje se imenuje *Cayley-Dicksonovo zaporedje.*

Zanimal nas bo samo primer, ko je $\mathcal{A}_0$ obseg realnih števil in $n = 3$. Preslikavo $* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uvedemo kar s predpisom $x^* = x$. Najprej si poglejmo, kaj je $\mathbb{R}_1$. Če označimo s črko i element $i = (0, 1) \in \mathbb{R}_1$, potem nam formula (1) pove, da je $(a + ib)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Torej je $\mathbb{R}_1$ izomorfen obsegu kompleksnih števil. Formula (2) nam pove, da je $(a + ib)^* = a - ib$, kar je enako običajnemu konjugiranju kompleksnih števil.

Zdaj bomo določili algebro $\mathbb{R}_2$. Naredili bomo kar multiplikacijsko tabelo za to štiridimenzionalno algebro. Naj bo i imaginarna enota v obsegu kompleksnih števil. Kot vektorski prostor je $\mathbb{R}_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Pišimo $1 = (1, 0)$, $i = (i, 0)$, $j = (0, 1)$ ter $k = (0, -i)$. S pomočjo formule (1) dobimo

$$ij = (i, 0) \circ (0, 1) = (i \cdot 0 - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + (-i) \cdot 1) = (0, -i) = k\,.$$

S podobnimi računi lahko določimo celo multiplikacijsko tabelo za algebro $\mathbb{R}_2$, ki je naslednja:

$\bullet$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Dobili smo znano multiplikacijsko tabelo obsega *kvaternionov.* Ta obseg je asociativen, ni pa komutativen, saj je $ij \neq ji$. Formula (2) nam pove, da je

$$(t_0 + t_1 i + t_2 j + t_3 k)^* = t_0 - t_1 i - t_2 j - t_3 k\,.$$

Na naslednjem koraku Cayley-Dicksonovega procesa dobimo 8-dimenzionalna „števila" $\mathbb{R}_3$, ki se imenujejo *oktonioni.* Pišimo $i = (1, 0)$, $e_1 = (i, 0)$, $e_2 = (j, 0)$, $e_3 = (k, 0)$, $e_4 = (0, 1)$, $e_5 = (0, -i)$, $e_6 = (0, -j)$ ter $e_7 = (0, -k)$. S pomočjo formule (1) in multiplikacijske tabele za kvaternione lahko napišemo multiplikacijsko tabelo za oktonione, ki je naslednja:

$\bullet$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Iz te tabele lahko razberemo, da $e_3e_4 \cdot e_5 \neq e_3 \cdot e_4e_5$, kar pomeni, da algebra oktonionov ni asociativna.

2. Nekatere identitete v algebri oktonionov

Čeprav množenje pri oktonionih ni asociativno, pa so oktonioni „zelo blizu" asociativnosti. Preden povemo natančneje, kaj to pomeni, vpeljimo še pojem sledi in norme oktoniona. Naj bo $x = t_0 + \sum_{i=1}^{7} t_i e_i$ oktonion. Iz formule (2) takoj dobimo, da je $x^* = t_0 - \sum_{i=1}^{7} t_i e_i$. *Sled* oktoniona definiramo s predpisom $s(x) = t_0$, *normo* oktoniona pa s predpisom $n(x) = t_0^2 + \sum_{i=1}^{7} t_i^2$. Tako sled kot norma sta realni števili. V bistvu je norma oktoniona kar kvadrat običajne evklidske norme v prostoru $\mathbb{R}^8$ in je zato enaka 0 le, kadar je $x = 0$.

Trditev 1.

(i) Za vsak oktonion x velja $x + x^* = 2s(x)$ in $xx^* = x^*x = n(x)$.

(ii) Vsak oktonion je ničla kvadratnega polinoma z realnimi koeficienti.

Pripomnimo, da se algebre z lastnostjo (ii) imenujejo *kvadratične*. Naša trditev torej pravi, da je algebra oktonionov kvadratična.

Dokaz. (i) Očitno je, da je $x + x^* = 2s(x)$. Nadalje je

$$x^*x = (t_0 - \sum_{i=1}^{7} t_i e_i)(t_0 + \sum_{i=1}^{7} t_i e_i) =$$

$$= t_0^2 - \sum_{i<j} t_i t_j e_i e_j - \sum_{i>j} t_i t_j e_i e_j - \sum_{i=1}^{7} t_i^2 e_i^2.$$

Iz multiplikacijske tabele oktonionov razberemo, da je $e_i^2 = -1$ in da je $e_i e_j = -e_j e_i$ za $i \neq j$. Zato se v zadnjem izrazu drugi in tretji člen odštejeta, četrti pa je enak $\sum_{i=1}^{7} t_i^2$.

(ii) S pomočjo (i) dobimo

$$x^2 = x(2s(x) - x^*) = 2s(x)x - xx^* = 2s(x)x - n(x).$$

Ker sta $s(x)$ in $n(x)$ realni števili, je x ničla realnega polinoma $x^2 - 2s(x)x + n(x)$. ■

Trditev 2. *Naj bo $x \neq 0$ oktonion. Če je $x = s(x)$, potem je podalgebra, generirana z x, izomorfna obsegu realnih števil. Če je $x \neq s(x)$, potem je podalgebra, generirana z x, izomorfna obsegu kompleksnih števil.*

Dokaz. Če je $x = s(x)$, je trditev očitna. Naj bo $x \neq s(x)$. Ker je $n(x)^{-1}(2s(x)x - x^2) = 1$, podalgebra, generirana z x, vsebuje $\mathbb{R}$. Definirajmo element $e = \frac{1}{\sqrt{n(x-s(x))}}(x - s(x))$. Brez težav lahko izračunamo, da je $n(e) = 1$ in $s(e) = 0$. Iz dokaza Trditve 1 dobimo $0 = e^2 - 2s(e)e + n(e) = e^2 + 1$ oziroma $e^2 = -1$. Podalgebra $\{t_1 + t_2 e; t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ je izomorfna obsegu kompleksnih števil. Videti moramo samo še, da ta podalgebra vsebuje element x. To sledi direktno iz $\sqrt{n(x - s(x))}\, e + s(x) = x$. ■

Naloga 3. S pomočjo formule (1) in dejstva, da je obseg kvaternionov asociativen, dokažite, da za poljubna oktoniona x in y veljajo enakosti $x^2 y = x \cdot xy$, $yx^2 = yx \cdot x$ in $xy \cdot x = x \cdot yx$.

Algebre, ki zadoščajo prvima dvema od zgornjih identitet, se imenujejo *alternativne* algebre. Ravno algebra oktonionov je bila prvi primer alternativne algebre, ki ni asociativna. Kleinfeld je dokazal, da je, ob primernih dodatnih predpostavkah, to tudi edini možni primer. Precizna formulacija te trditve je naslednja:

Naj bo $\mathcal{A}$ alternativna algebra, ki nima netrivialnih idealov. Če $\mathcal{A}$ ni asociativna, je izomorfna oktonionski algebri nad obsegom, ki je izomorfen centru algebre $\mathcal{A}$.

V vseh alternativnih algebrah je podalgebra, generirana z enim elementom, vedno asociativna. Torej so alternativne algebre potenčnoasociativne. Velja celo več. Artin je dokazal naslednji izrek:

Algebra je alternativna natanko tedaj, ko je vsaka podalgebra z dvema generatorjema asociativna.

3. Linearna enačba

Naj bosta a in b dva oktoniona in naj bo a različen od nič. Zanimajo nas rešitve enačb $ax = b$ in $xa = b$. Definirajmo element a^{-1} s predpisom

$a^{-1} = \frac{1}{n(a)} a^*$. Da je ta element res neke vrste inverz k elementu a, bomo pokazali v naslednji trditvi. Pripomnimo še, da v splošnih neasociativnih algebrah ni mogoče uporabno definirati pojma inverza.

Trditev 4.

(i) V algebri oktonionov je enačba $ax = b$ enolično rešljiva, če je le $a \neq 0$. Njena rešitev je $x = a^{-1}b$.

(ii) Enačba $xa = b$ je enolično rešljiva, če je le $a \neq 0$. Njena rešitev je $x = ba^{-1}$.

(iii) V algebri oktonionov ni deliteljev niča.

Dokaz. Izračunajmo

$$a^{-1}b = a^{-1} \cdot ax = \frac{1}{n(a)}(2s(a) - a) \cdot ax = \frac{1}{n(a)}(2s(a)ax - a \cdot ax) =$$

$$= \frac{1}{n(a)}(2s(a)ax - a^2x) = \frac{1}{n(a)}(2s(a)a - a^2)x = \frac{1}{n(a)} a^* a \cdot x = x\,.$$

Če je potem $ax = 0$, je $x = a^{-1} \cdot 0 = 0$. Povsem podobno obravnavamo tudi enačbo $xa = b$. ■

Algebre z lastnostjo, ki je opisana v zgornji trditvi, se imenujejo *algebre z deljenjem*. Poleg oktonionov obstajajo tudi druge algebre z deljenjem. Zelo zanimivo pa je dejstvo, da dimenzija takih algeber ne more biti kakršnakoli. Bott in Milnor sta dokazala, da ima realna končnodimenzionalna algebra z deljenjem dimenzijo 1,2,4 ali 8. Torej algebre, ki jih dobimo iz oktonionov z nadaljevanjem Cayley-Dicksonovega procesa, nimajo več deljenja.

4. Kvadratna enačba

V prejšnjem razdelku smo videli, da rešujemo linearno enačbo pri oktonionih tako kot pri kompleksnih številih. Pri kvadratni enačbi se že pokažejo povsem nove težave.

Trditev 5. *Naj bo a od nič različen oktonion.*

(i) Če je $a = s(a) < 0$, potem ima enačba $x^2 - a = 0$ neskončno mnogo rešitev: $\{x; s(x) = 0, n(x) = -s(a)\}$.

(ii) V vseh drugih primerih ima enačba $x^2 - a = 0$ dve nasprotno predznačeni rešitvi.

Opomba: Analogna trditev velja tudi pri kvaternionih.

Dokaz. Če je $x = t_0 + \sum t_i e_i$ in $a = s_0 + \sum s_i e_i$, potem pišimo $y = \sum t_i e_i$ ter $z = \sum s_i e_i$. Naša enačba nam da

$$t_0^2 - n(y) + 2t_0 y = s_0 + z\,.$$

Torej je $t_0^2 - n(y) = s_0$ in $2t_0 y = z$. Denimo najprej, da $z \neq 0$. V tem primeru tudi $t_0 \neq 0$ in $y = \frac{1}{2t_0} z$. Tedaj je $n(y) = \frac{n(z)}{4t_0^2}$. To nam da

$$t_0^2 - \frac{n(z)}{4t_0^2} = s_0 \quad \text{oziroma} \quad t_0 = \pm\sqrt{\frac{s_0 + \sqrt{s_0^2 + n(z)}}{2}}$$

in rešitvi sta $x_{1,2} = t_0 + \frac{1}{2t_0} z$.

Naj bo zdaj še $z = 0$. Tedaj je tudi $2t_0 y = 0$. Tokrat imamo dve možnosti. Oglejmo si najprej primer, ko je $y = 0$. Tedaj je $t_0^2 = s_0 = a$, kar pomeni, da je $a > 0$. Rešitvi sta spet dve. Če pa je $t_0 = 0$, potem je $-n(y) = s_0 = a$, kar pomeni, da je $a < 0$. V tem primeru je y določen samo z enačbo $n(y) = -a$. Rešitev te enačbe predstavlja presek sfere $S_{\sqrt{-a}}(0)$ v $\mathbb{R}^8$ s podprostorom $\{0\} \times \mathbb{R}^7$. Rešitev je torej ne samo neskončno mnogo, ampak tudi neštevno mnogo. To seveda pomeni, da kakršnakoli enolična faktorizacija (kvadratnih) polinomov v oktonionih ni možna. ■

V knjigi [2] je zelo obsežen spisek literature o alternativnih algebrah. V tem spisku med drugim najdemo tudi članke Kleifelda, Artina ter Botta in Milnorja, kjer so dokazani izreki, ki smo jih omenjali.

LITERATURA

[1] A. A. Albert, *Studies in Modern Algebra Vol. 2,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.
[2] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras,* Academic Press, New York 1966.
[3] K. A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I. P. Shestakov in A. I. Shirsov, *Rings that are Nearly Associative,* Academic Press, New York 1982.

NOVE KNJIGE

FIZIKA — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

Na zalogi imamo še naslednja dela:

9. Strnad J., Fizika, 1.del, Mehanika, Toplota, 6.natis, 1990, 284 str.
11. Strnad J., Fizika, 2.del, Elektrika, Optika, 3.natis, 1989, 562 str.
14. Strnad J., Fizika, 3.del, Posebna teorija relativnosti, Kvantna fizika, Atomi, 3.natis, 1988, 320 str.
17. Strnad J., Fizika, 4.del, Molekule, Kristali, Jedra, Delci, 2.natis, 1986, 284 str.
28. Kuščer I., Toplota, 1987, 220 str.
30. Pahor S., Uvod v analitično mehaniko, 1989, 112 str.

DVIGAJOČI SE MEHURČKI

JANEZ STRNAD

PACS 47.10.+g

Dviganje mehurčkov v pivu je mogoče približno opisati s preprostimi enačbami. To je dobrodošel zgled, pri katerem ne velja ne linearni ne kvadratni zakon upora.

RISING BUBBLES

The motion of bubbles rising in beer can be approximately described with simple equations. This is a wellcome example where the dragg does not depend neither linearly nor quadratically on velocity.

Mehurčki v kapljevinah so imeli v sodobni fiziki precejšnjo vlogo. Z mehurčnimi celicami so, na primer, raziskali veliko reakcij med delci in odkrili precej novih delcev. V taki celici so naelektreni delci na poti hitrega naelektrenega delca rabili kot jedra, na katerih so v pregreti kapljevini zrasli mehurčki. Šele v zadnjem času so se prepričali, da ni mogoče zaznavati hitrih naelektrenih delcev tudi v prenasičeni kapljevini z raztopljenim plinom, na primer v pivu z ogljikovim dioksidom [1]. Nastanek mehurčkov v pivu in njihovo dviganje sta zanimiva tudi sama po sebi [2]. Pred nedavnim so poročali o merjenju [3], ki je zbudilo nekaj zanimanja [4]. Enačbe so dokaj preproste. Ker za dviganje mehurčkov v pivu ne velja ne linearni ne kvadratni zakon upora, je zgled tudi poučen.

Pivo je v steklenici pod nekoliko povišanim tlakom. Ko steklenico odpremo, se tlak nad pivom zmanjša na zunanji zračni tlak. V pivu se izloča ogljikov dioksid v mehurčkih. Nastajajo predvsem na drobnih nepravilnostih na steni posode, ki delujejo kot jedra. Ko mehurček dovolj zrase, se zaradi vzgona odtrga in dviga proti gladini. Na nepravilnosti začne rasti drug mehurček in igra se nadaljuje. Nad nepravilnostjo na dnu posode lahko tako opazujemo vrsto mehurčkov, ki se dvigajo z istega mesta. Mehurčki so med seboj enaki, ko se odlepijo, kar olajša opazovanje.

Mehurčki se med dviganjem večajo. Tega ni kriv hidrostatični tlak v pivu, ki z naraščajočo višino pojema. Tlak v globini kakih deset centimetrov se le neznatno razlikuje od navadnega zračnega tlaka. Pač pa deluje mehurček sam kot jedro, na katerem se izloča plin. Masa plina v mehurčku torej ob dviganju narašča, tako da je mehurček zgled za *odprt sistem*, kot na primer raketa, ki izpihava curek plinov.

Opazujmo mehurček v obliki kroglice z radijem r in maso m. Masa kroglice narašča, ker vstopa v mehurček nov plin. Masni tok plina skozi površje je sorazmeren s površino: $dm/dt \propto r^2$. Po plinski enačbi je pri konstantnem zračnem tlaku in konstantni temperaturi piva masa mehurčka sorazmerna z njegovo prostornino $V = 4\pi r^3/3$, tako da velja $dm/dt \propto$

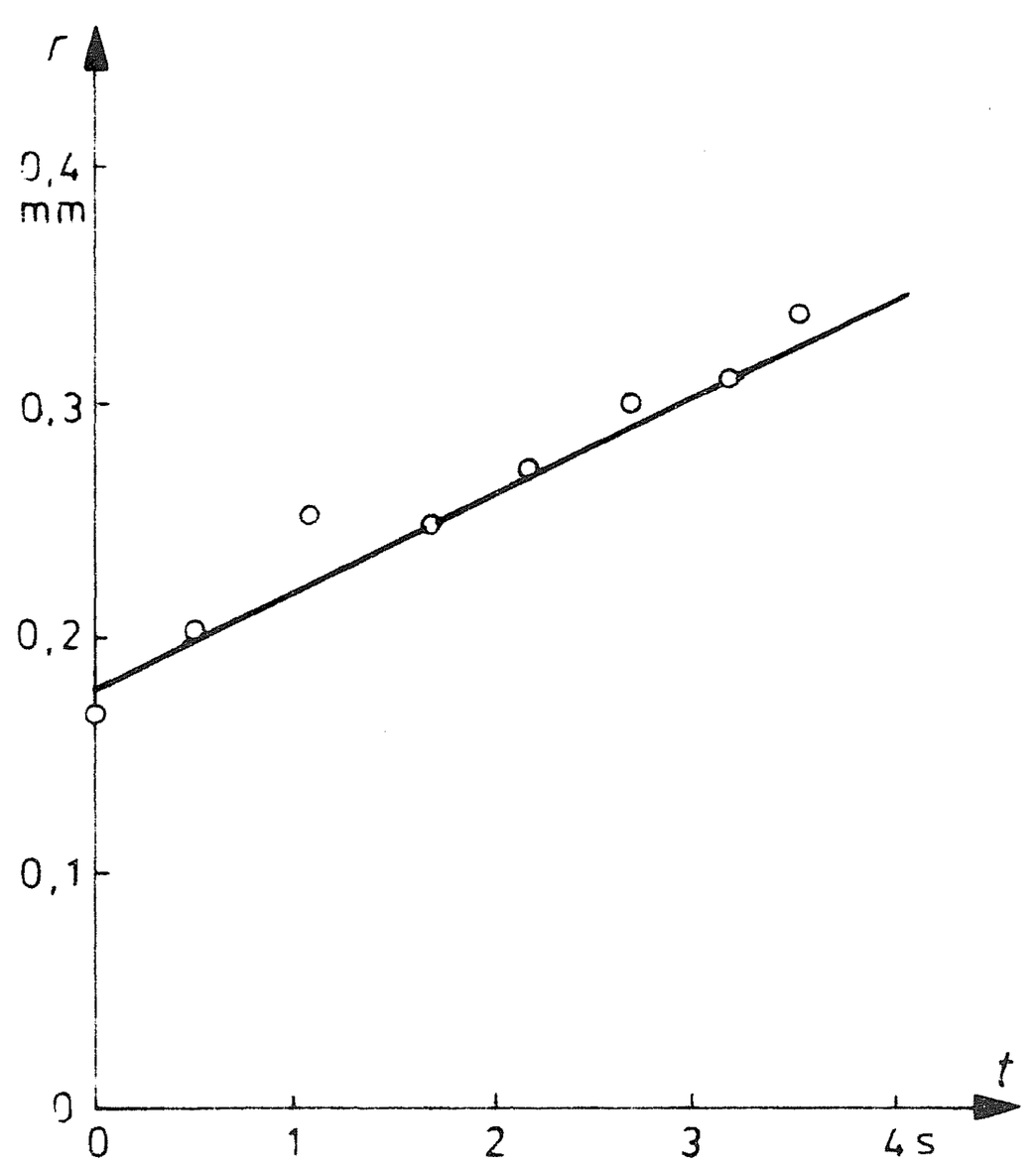
$\propto dV/dt \propto r^2$. Iz obeh zvez izhaja, da je hitrost $dr/dt = v_r$, s katero narašča radij mehurčka, konstantna in radij linearno odvisen od časa

$$r = r_0 + v_r t\,. \tag{1}$$

Pri merjenju je treba paziti na to, da je kozarec s pivom valjasta leča in je slika mehurčka, ki jo vidimo, popačena. Merilo je treba namestiti v pivo in določiti radij mehurčka z merilom na fotografiji. Merjenje potrjuje enačbo (1) [3].

Na mehurček deluje Zemlja s težo navzdol, pivo z uporom F_u v enaki smeri in z vzgonom navzgor. Vzgon je enak teži izpodrinjenega piva z gostoto $\rho = 1{,}00$ g/cm^3. V primeri z njo lahko zanemarimo težo mehurčka, saj je gostota ogljikovega dioksida mnogo manjša. Produkt mase mehurčka in njegovega pospeška je tudi majhen v primeri z vzgonom. Zato iz Newtonovega zakona približno izhaja, da vzgon uravnoveša upor:

$$F_u = \frac{4\pi r^3}{3}\rho g\,. \tag{2}$$



Slika 1. Odvisnost radija dvigajočega se mehurčka od časa. Premica (1) se ujema z izmerki, če postavimo za začetni radij $r_0 = 0{,}18$ mm in za hitrost naraščanja $v_r = 0{,}04$ mm/s. Radij so izmerili le na 0,04 mm natančno zaradi zrnatosti fotografij. V pivo so pomočili navpično bakreno žico z zarezami in ugotavljali velikost mehurčkov po fotografiji [3].

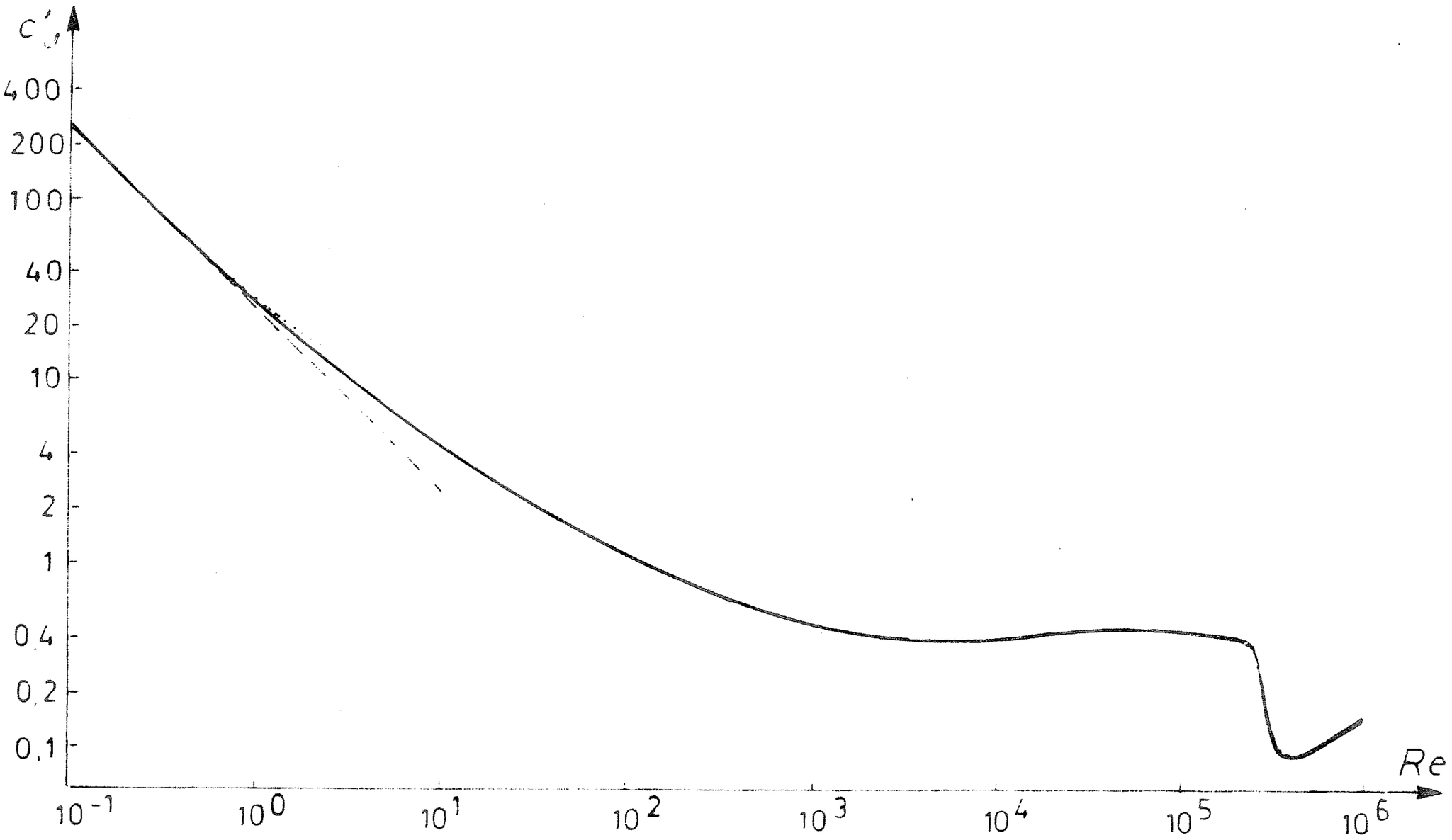
Izmerjene podatke za upor navadno strnemo v *koeficient upora* c_u v *kvadratnem zakonu*, ki se za kroglo z radijem r pri hitrosti v glede na tekočino glasi

$$F_u = c_u \cdot \tfrac{1}{2}\rho v^2 \pi r^2$$

(Sl. 2). Za naše namene je bolje navesti ustrezni koeficient upora v linearnem zakonu v tekočini z viskoznostjo η:

$$F_u = c_u' \cdot 6\pi r \eta v,$$

za katerega velja $c'_u = c_u Re/24$. Pri tem je $Re = 2r\rho v/\eta$ Reynoldsovo število. Če velja linearni zakon ali Stokesova enačba, je $c'_u = 1$ in $c_u = 24/Re$, če velja kvadratni zakon, pa $c_u \approx 0,4$ in $c'_u \approx Re/60$.



Slika 2. Koeficient upora c_u v odvisnosti od Reynoldsovega števila na širokem območju. Merilo je logaritemsko na obeh oseh. Črtkana črta kaže linearni zakon, pikčasta pa Oseenov približek [5].

Z izmerjeno hitrostjo mehurčkov v pivu z viskoznostjo $\eta = 1,30 \cdot 10^{-3}$ Ns/m^2 ugotovimo, da zanje leži Reynoldsovo število med 6 in 31. Samo na tem območju se izmerjenim podatkom (Sl. 2) od vseh linearnih približkov najbolje prilega (Sl. 3)

$$c'_u = 1,4 + 0,043Re, \qquad c_u = \frac{58,8}{Re} + 1,032.$$

Približek odstopa od *Oseenovega približka*

$$c'_u = 1 + \frac{3}{16}Re, \qquad c_u = \frac{24}{Re} + \frac{9}{2},$$

čeprav oba vključujeta poteze linearnega in kvadratnega zakona, le da z različnima utežema.

Enačbo (2) prepišemo:

$$\frac{4\pi r^3}{3}\rho g = 6\pi r\eta v(\alpha + \beta Re) = 6\pi r\eta v(\alpha + \beta \cdot \frac{2r\rho v}{\eta}),$$

tako da zajamemo z $\alpha = 1, \beta = 0$ linearni zakon, z $\alpha = 1, \beta = 3/16$ Oseenov približek in z $\alpha = 1,4, \beta = 0,043$ našega. Iz kvadratne enačbe izračunamo hitrost

$$v = \frac{\eta\alpha}{4r\rho\beta}\left[\left(1 + \frac{16g\rho^2 r^3\beta}{9\eta^2\alpha^2}\right)^{1/2} - 1\right].$$

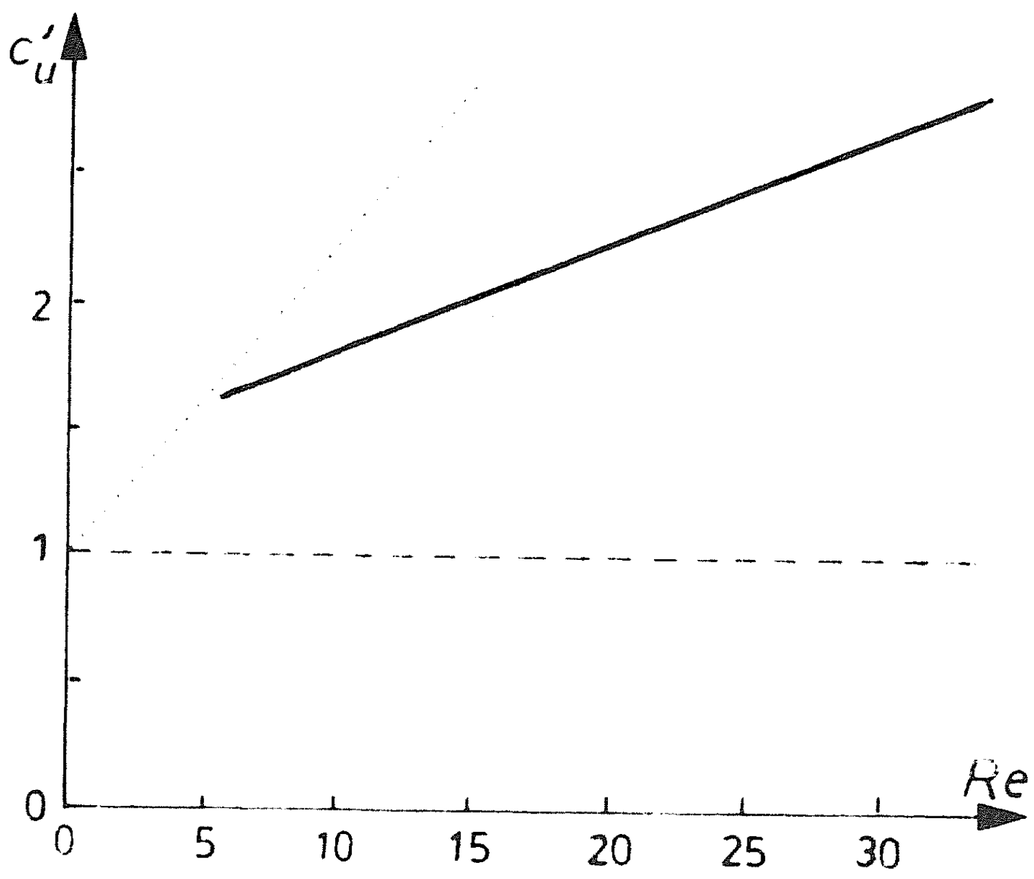
Izrazimo jo z višino z mehurčka nad mestom, na katerem je nastal: $v = dz/dt = (dz/dr)(dr/dt) = v_r\,dr/dt$, in z integracijo dobimo višino v odvisnosti od časa:

$$\frac{z}{z_0} = \int_1^{1+v_r t/z_0} [(1+\gamma x^3)^{1/2} - 1]\frac{dx}{x}, \quad z_0 = \frac{\eta\alpha}{4\rho v_r \beta},\ \gamma = \frac{16 g \rho^2 r_0^3 \beta}{9\eta^2\alpha^2}.$$

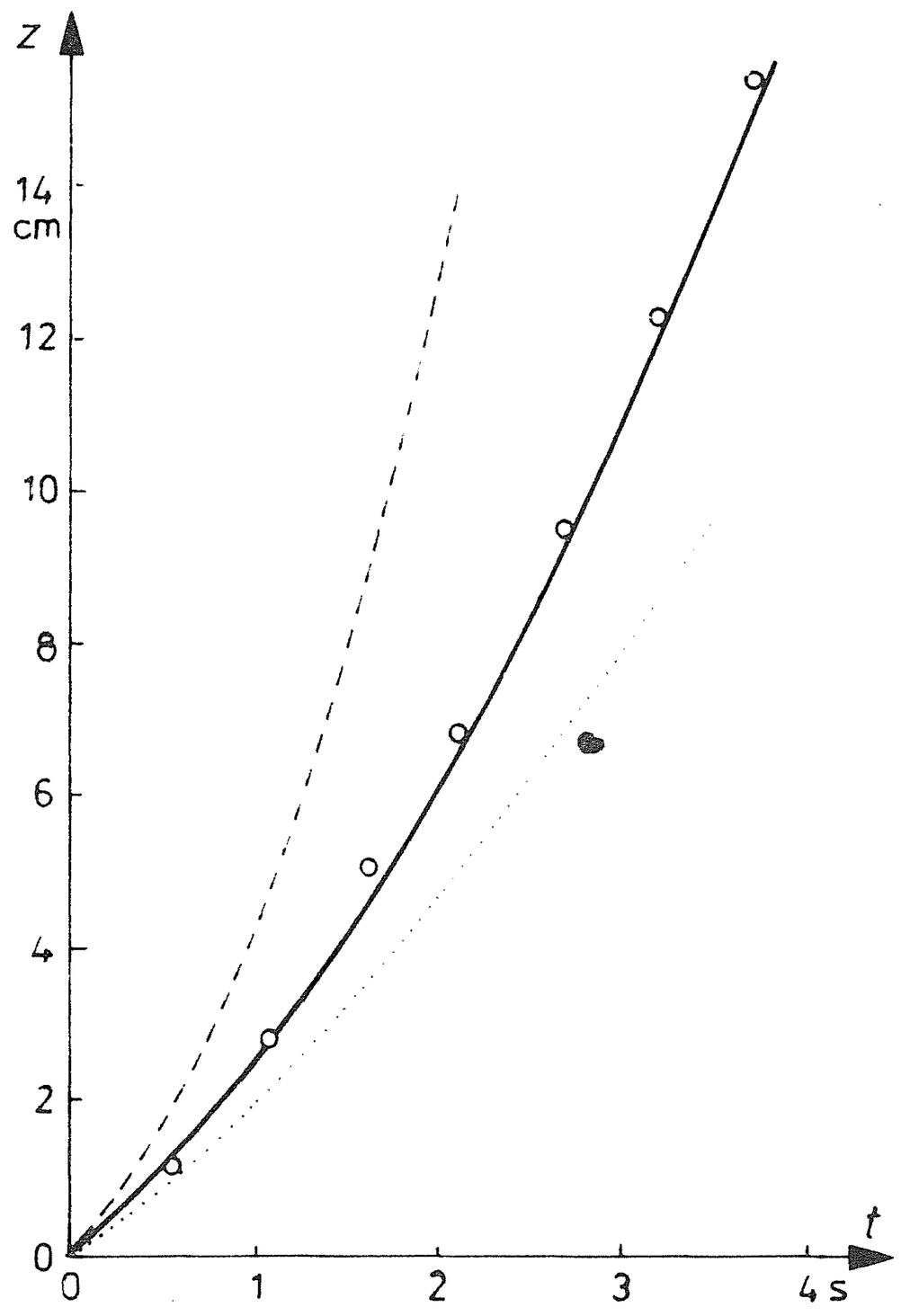
Najprej smo vpeljali $x = r/r_0$ in v zgornji meji izrazili z (1) radij mehurčka s časom. Račun je kratek samo za linearni zakon ($\alpha = 1$, $\beta \to 0$):

$$\frac{z}{z_0'} = x^3 - 1, \qquad z_0' = \frac{2\rho g r_0^3}{27\eta v_r}.$$

V obeh preostalih primerih moramo numerično integrirati. Naš približek za upor da izid, ki se zadovoljivo ujema z merjenji, mehurček pa bi se dvigal mnogo hitreje, če bi veljal linearni zakon, in počasneje, če bi veljal Oseenov približek.



Slika 3. Koeficient upora c_u' na ozkem območju Reynoldsovih števil, ki je pomembno za dviganje majhnih mehurčkov. Črtkana črta kaže linearni zakon, pikčasta Oseenov približek, sklenjena pa našega.



Slika 4 (desno). Izmerjena in izračunana višina mehurčka v odvisnosti od časa. Črtkana črta je dobljena z linearnim zakonom, pikčasta z Oseenovim približkom, sklenjena pa z našim. Pri tem smo uporabili $r_0 = 0,143$ mm in $v_r = 0,042$ mm/s.

Tako obvladamo gibanje mehurčkov v pivu do višine deset centimetrov in več, ko radij ne preseže nekaj desetin milimetra. V mnogo debelejši plasti piva bi prišlo do zanimivih zapletenih pojavov. Gibanja večjega mehurčka

ne bi več mogli opisati s tako preprostimi enačbami. Najprej bi na njegovo gibanje vplivala površinska napetost zaradi naravnih ali dodanih površinsko aktivnih snovi. Take snovi so v pivu, ker bi sicer pena hitreje izginila. Poleg tega gibajoči se mehurček z večjim radijem kot 0,3 mm preneha biti kroglast in se splošči v elipsoid s krajšo navpično osjo. Če bi radij dosegel 1 mm, bi zaradi sodelovanja z vrtinci radij mehurčka začel nihati in se mehurček ne bi gibal navpično navzgor, ampak po cikcakasti ali vijačni poti. Tedaj bi se tudi upor znatno povečal. V čisti vodi je, na primer, končna hitrost zračnega mehurčka z radijem 1,3 mm večja kot mehurčka z radijem 2 mm, ker večji mehurček niha. Ko bi radij dosegel centimeter, bi se oblika mehurčka še bolj popačila — v krogelno kapico z ravnim dnom. Toda tedaj mehurček ne bi bil več obstojen in bi se razdelil na več manjših. Najbrž tako razmišljanje nič ne koristi pivcem piva, ki so tudi med fiziki. Poučno pa je za tiste, ki jih zanima, na primer, upor kroglic pri srednjih Reynoldsovih številih. Tudi prek piva se je mogoče naučiti česa novega.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Mehurčki,* Presek **19** (1991) 22.
[2] J. Walker, *Reflections on the rising bubbles in a bottle of beer*, Sci. Am. **245** (1981) 124 (6).
[3] N. E. Shafer, R. N. Zare, *Through a beer glass darkly,* Phys. Today **44** (1991) 48 (10).
[4] A. Coglan, *The flight of a beer bubble from first principles,* New scientist **132** (1991) 24 (9. november).
[5] H. L. Anderson (ur.), *A Physicist's Desk Reference,* American Institute of Physics, New York 1989.

NOVE KNJIGE

LIKAR A., Osnove fizkalnih merjenj in merilnih sisitemov. DMFA Slovenije, Ljubljana 1992, 190 strani. Izbrana poglavja iz fizike ; 26.

Kakega predmeta se lahko lotimo s pogledom od zgoraj in izhajamo iz teorijskih osnov, ali s pogledom od spodaj, ko se zadovoljimo s fenomenologijo in brez posebne povezave obdelamo najbolj značilne primere. Pri fizikalnih merjenjih je v preteklosti pri nas in po svetu prevladoval bolj razdrobljeni pogled, pri katerem so obravnavali predvsem senzorje in merjenje skalarnih količin.

V zadnjem času so se razvili računalniki, merilna in regulacijska analogna in digitalna elektronska vezja. Z njimi prihaja v ospredje poleg merjenja in sprotne obdelave količin, ki se med meritvijo spreminjajo, predvsem vprašanje, kako dinamični sistem zasledovati z minimalnim naborom senzorjev. Pri fizikalnih merjenjih se torej ne sprašujemo pretežno, kako naj z danim sistemom merimo, ampak nas vse bolj zanimata tudi matematična analiza in optimalno načrtovanje. To je močno odvisno od sprotne merske napake, ki jo obravnavamo kot šum. Ni težko poiskati najustreznejše vrednosti iz izmerkov, ki so obremenjeni s statističnim šumom (napako) pri

nespremenljivih količinah. Pri zasledovanju dinamičnih procesov pa je ta naloga razmeroma zahtevna, posebno še pri istočasnem merjenju več (vektorskih) količin sisitema, ki so lahko dodatno med seboj povezane. Splošna rešitev, ki jo poznamo šele od leta 1961 pod pojmom *optimalno filtriranje* (Kalmanov filter), si je A. Likar izbral kot osnovo za vse izpeljave.

Po tej poti za merjeno količino najprej poiščemo približno oceno in njeno zanesljivost na osnovi prejšnjih meritev in vsaj približnega poznavanja časovnega poteka, to je dinamike sistema. Nato zadnjo izmerjeno vrednost upoštevamo z optimalno utežjo, ki je odvisna od velikosti šuma, to je natančnosti izmerkov in poznavanja dinamike. Podobno ravnamo pri določanju optimalnih parametrov znane funkcije po metodi najmanjših kvadratov. Avtor drugače, kot je bilo doslej v navadi, izpelje enačbe te metode iz enačb optimalnega filtriranja.

Metodo optimalnega filtriranja, ki je v prvotni obliki namenjena obdelavi vektorskih količin, A. Likar s pedagoškim namenom in originalno uporabi najprej za merjenje in obdelavo časovno odvisnih skalarnih količin. Nato jo izkoristi za optimalno sprotno obdelavo podatkov ob znani ali delno znani dinamiki merjene količine.

Kljub temu je uvodna obravnava razmeroma zahtevna. Če pa se je bralec pripravljen poglobiti v optimalno filtriranje, ga avtor v nadaljnjih poglavjih nagradi z elegantnimi izpeljavami optimalne merilne zanke, fazno vpete zanke, senzorjev in nekaterih kompletnih merilnih sistemov.

Knjigo bodo uporabljali pri predmetu fizikalna merjenja v tretjem letniku na oddelku za fiziko vsi študenti razen študentov matematično-fizikalne smeri. Po zahtevnosti in po načinu obravnave pomeni predlagana rešitev prelom s tradicijo tega predmeta. Pri fizikalnih merjenjih so v preteklosti posvečali šumu manjšo skrb, v novem pristopu pa vse izhaja iz posplošene predpostavke, da je njegov vpliv na rezultat bistven. Zato je glavna naloga njegov učinek zmanjšati na najmanjšo možno mero.

Fizikalna merjenja so zaradi poenotenega pogleda postala za študente privlačnejša. Vendar pa je predlagani obseg snovi za dodiplomsko stopnjo nekoliko preobsežen. Učitelj mora zato opredeliti poglavja (na primer merjenje vektorskih količin) ali njihove dele (na primer detajli o merjenju odvoda pospeška), za katera pričakuje le okvirno znanje.

Knjiga je zaradi zgoščenosti mišljena predvsem kot pomoč študentu pri razumevanju snovi. Uporabna bo tudi kot repetitorij za bralce, ki o merilnih in regulacijskih sistemih že kaj vedo. Začetnik pa bo pogrešal nekaj izpeljav in poti do nastavkov osnovnih dinamičnih enačb sistemov, ki jih delo preskoči.

Knjiga bo razveselila študente fizike, saj jim bo ob študiju po zapiskih pomagala snov s predavanj povezati v celoto in se dokopati do bistva. Zanimiva bo tudi za diplomirane fizike. Študenti in diplomanti elektrotehniške in strojne fakultete pa bodo v razmeroma neobsežni publikaciji našli zgoščen pregled snovi, ki jo srečujejo ali so jo manj povezano srečali pri različnih predmetih.

Franc Cvelbar

IGRE NARAVE

3. SILA MED NUKLEONOMA V JEDRU JE ISTE VELIKOSTNE STOPNJE KOT SILA MED ČLOVEKOM IN ZEMLJO

MITJA ROSINA

PACS 01.55.+b

Gravitacijska sila med nukleonoma na razdalji radija Zemlje je sicer za 80 velikostnih stopenj šibkejša od jedrske sile na razdalji 2 fm, zato pa ima Zemlja 10^{51} nukleonov in človek skoraj 10^{29} nukleonov, kar 10^{80}-krat poveča našo težo.

SOME TRICKS OF NATURE

3. THE FORCE BETWEEN NEIGHBOURING NUCLEONS IN THE NUCLEUS IS COMPARABLE TO THE FORCE BETWEEN MAN AND EARTH

The gravitational force between nucleons at the distance of the Earth radius is 80 orders of magnitude weaker than the nuclear force at 2 fm, on the other hand, the Earth contains 10^{51} nucleons and man contains 10^{29} nucleons which increases our weight by a factor of 10^{80}.

Igra narave

Sosednja nukleona sta v povprečju oddaljena 2 fm in čutita medsebojno silo 600 N, enako, kot je teža šestdesetkilogramskega človeka.

Zabavna je tudi naslednja primerjava. Kvarki v nukleonu se privlačijo s silo 100 000 N; če kvark izbijemo, recimo z elektronom, se silnice „strgajo" in se rodi množica parov kvark-antikvark in merilniki zaznajo pljusk mezonov. Natezna trdnost 100 000 N ustreza jekleni vrvi prereza 4 mm^2.

Ali ima podobnost mikroskopskih in makroskopskih količin globlje razloge ali je čista šala ?

Komentar k sili med nukleonoma

Jedrsko silo med nukleonoma lahko na razdalji okrog 2 fm aproksimiramo z Yukawovim izrazom iz mezonske teorije

$$F_j(r) \approx A\mathrm{e}^{-\mu r}/r^2 \,.$$

Pri tem je $A \approx 60\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm} = 9,6\cdot 10^{-27}\,\mathrm{Nm}^2$ in $\mu = m_{\mathrm{piona}}c/\hbar = 0,7\,\mathrm{fm}^{-1}$. Gravitacijska sila pa znaša

$$F_g(r) = \varkappa m_p^2/r^2, \quad \varkappa m_p^2 = 1,87\cdot 10^{-64}\,\mathrm{Nm}^2 \,.$$

Pri majhnih razdaljah je torej gravitacijska sila za 37 velikostnih stopenj šibkejša od jedrske. Na 2 fm je jedrska sila med nukleonoma tipično 600 N, gravitacijska pa $450\cdot 10^{-37}$ N. Na razdalji radija Zemlje $R = 6400$ km pa je

gravitacijska sila še za faktor $(6,4 \cdot 10^{21}\ \mathrm{fm}/2\ \mathrm{fm})^{-2} = 10^{-43}$-krat manjša, torej skupno 10^{-80}-krat.

Po drugi stran pa ima Zemlja $N_z = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}^{-1} = 3,6 \cdot 10^{51}$ nukleonov in človek $N_c = 60\ \mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}^{-1} = 3,6 \cdot 10^{28}$ nukleonov, kar ravno izravna faktor 10^{-80}.

Vprašanje, zakaj je sila med nukleonoma enaka teži človeka, sodi torej v *biologijo* (zakaj dobro funkcionira človek iz $\sim 10^{27}$ atomov $\sim 3,6 \cdot 10^{28}$ nukleonov) ter v *geologijo in astrofiziko* (zakaj nastanejo planeti iz $\sim 10^{51}$ nukleonov).

Komentar k sili med kvarkoma

Kvarke v nukleonu veže močna sila, atome v jekleni žici pa elektromagnetna. Na razdalji okrog 1 fm je električna sila 10^{-3} močne (močna sila je 10^5 N, električna pa 230 N). Na razdalji okrog 0,1 nm je električna sila še $(0,1\mathrm{nm}/1\mathrm{fm})^{-2} = 10^{-10}$-krat šibkejša, skupno torej 10^{-13}-krat. Po drugi strani pa sodeluje v prerezu žice s presekom 4 mm^2 in stranico kristalne celice 0,23 nm kar $(2\,\mathrm{mm}/0,23\,\mathrm{nm})^2 = 10^{14}$ atomov, kar izravna faktor 10^{-13} (tudi ko zaradi napak v kristalu niso vsi atomi učinkoviti).

Pripomba

Čeprav so sile v mikroskopskem svetu zares velikanske, nas običajno zanima *delo*, ki je sila krat pot. Poti so pa kratke, nekaj fm, tako da so energijske spremembe (delo) nukleonov nekaj MeV in kvarkov nekaj GeV, kar so značilne mikroskopske vrednosti za jedra oziroma hadrone.

Posvaril bi tudi rad, da so navedene vrednosti sil le nekakšna tipična povprečja, saj so sile odvisne tudi od orientacij spinov in še marsičesa.

NOVE KNJIGE

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ FIZIKE

Na zalogi imamo še naslednje učbenike:

9. Gros M., Hribar M., Kodre A., Strnad J., Naloge iz fizike, 8.natis, 1991, 108 str.
12. Ahlin F., Kuščer I., Moljk A., Strnad J., Izpitna vprašanja iz fizike, 9.popravljena izdaja, 1989, 40 str.
15. Kuščer I., Pregled klasične fizike, 1979, 120 str.
17. Ahlin F., Hribar M., Kuščer I., Pahor S., Stepišnik J., Fizikalni praktikum, 5.natis, 1990, 130 str.
18. Zupančič I., Fizikalni praktikum II, 3.natis, 1991, 84 str.
23. Pahor J., Ponikvar D., Elektronski praktikum, 2.natis, 1992, 84 str.
24. Golli B., Kvarkovski modeli hadronov, 1991, 68 str.
25. Strnad J., Na pot k Schwarzschildu, 1991, 52 str.

VESTI

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1991*

Pedagoška fakulteta — Maribor

Matematika in fizika

425. Brumec, Tatjana
426. Kajzovar, Marjana
427. Rogač, Andrej

Matematika-fizika

1. Marhl, Marko

Fizika — tehnična vzgoja

316. Črešnar, Marija
317. Djuran, Anton
318. Fašalek, Angela
319. Furman-Suvajac, Milena
320. Gričnik-Treska, Karmen
321. Jurgec, Janez
322. Kantoci, Mirjana
323. Mesek, Nenad
324. Roškar, Antonija
325. Štampah-Kepe, Liljana
326. Šteger, Marko
327. Štok, Srečko
328. Šumej, Darja
329. Tibaut, Anton
330. Urisk, Zmago

Pedagoška fakulteta — Ljubljana

Matematika-fizika

881. Škafar, Karmen	Metoda zaporednih približkov za reševanje enačb
882. Jerič, Miran	Vpliv sploščenosti Zemlje na gibanje umetnih satelitov
883. Kandus, Milojka	Lucasov izrek
884. Lah-Rajkovič, Tatjana	Reševanje neenačb v osnovni šoli
885. Ježek, Ladislava	Vzorci učiteljevih priprav na pouk fizike v 8. razredu (1. polletje)
886. Smrdelj, Radislav	Naravoslovje za učitelje razrednega pouka
887. Zavodnik, Nives	Absorpcija svetlobe
888. Frelih, Marinka	Kompozitum formalnih potenčnih vrst
889. Gorišek, Mirjam	Izrek o implicitni funkciji

Matematika-tehnična vzgoja

101. Jenko, Tomaž	Oblikovanje in spajanje tanke pločevine
102. Lenče, Damijan	Crpalka kot delovni stroj
103. Narat, Ivan	Zbirka Fisher technik pri pouku elektrotehnike ter krmiljenje in regulacije
104. Brajer, Zdravka	Povezava šole z okoljem in metodična obdelava lesa v osnovni šoli
105. Habjanič, Gregor	Zanimive vsebine o ulomkih
106. Kunčič, Karmen	Diferenciacija in individualizacija matematike v 8. razredu osnovne šole
107. Mlinar, Janez	Naloge objektivnega tipa za 6. razred osnovne šole

* Seznam diplomantov iz leta 1990 je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. **38** (1991) 121–126.

Fizika-tehnična vzgoja

750.	Hostar, Vinko	Metodično-didaktično gradivo za pouk elektrotehnike v osnovni šoli
751.	Cizel, Vladimir	Didaktično gradivo za pouk elektrotehnike v osnovni šoli
752.	Bertoncelj, Alenka	Tehtanje in redukcija spremenljivk
753.	Drnovšek, Robert Rajko	Model kolektorskega elektromotorja za učence osnovne šole
754.	Majhenič, Friderik	Korelacija med fiziko in tehnično vzgojo pri poučevanju električnih pojavov
755.	Cvelbar, Tatjana	Lastnosti lesa

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika s fiziko — pedagoška smer

138.	Novak, Vera	—
139.	Klanjšek, Vasja	—
140.	Rozman-Klanjšek, Alenka	—

Matematika — uporabna smer

237.	Držaj, Janja	Računanje singularnih vrednosti matrik

Fizika

293.	Hvalec, Darin Jurij	—
294.	Žonta, Nada	—

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

460.	France, Sonja	Globalni izreki v ravninski diferencialni geometriji
461.	Lipušček, Sergeja	Posplošeni Riemannov integral
462.	Šrot, Alenka	Metrika v geometriji
463.	Skalicky, Miro	Stabilni polinomi

Matematika — uporabna smer

413.	Bizjak, Matej	Matematična kartografija
414.	Povše, Barbara	Resolucija (Avtomatično dokazovanje izrekov v matematični logiki)
415.	Hajdinjak, Samo	Hamiltonovi grafi
416.	Kokol, Damjana	Totalno pozitivne matrike
417.	Krstulovič, Branko	Krivulje in ploskve v računalniški grafiki
418.	Dejak, Polona	Problem razvoza z več vozili
419.	Kastelic, Uroš	Asimetrični problem trgovskega potnika
420.	Thaler, Petra	Aritmetično-geometrična sredina in eliptični integral
421.	Trobec, Mojca	Pogojne funkcijske enačbe

Fizika — pedagoška smer

124. Škof, Špela — Planckov in Stefanov zakon

Fizika — tehnična smer

518. Hren, Rok — Razločevanje ekvivalentnih tokovnih izvirov v biomagnetizmu
519. Vaupotič, Nataša — Meritev elastičnih konstant nematičnega tekočega kristala z mešanjem svetlobnih valovanj
520. Majhenc, Janja — Analiza termičnih fluktuacij fosfolipidnih mehurčkov
521. Ivančič, Nataša — Mešanje štirih svetlobnih valovanj v nematskem tekočem kristalu
522. Serša, Igor — Prostorsko selektivna jedrska magnetna resonanca s pomočjo površinskih tuljav
523. Tiselj, Igor — Hidrodinamski model gorenja vodika v zaprti posodi
524. Zupan, Aleš — Izračun kristalnega magnezija s Hartree-Fockovo metodo
525. Golob, Boštjan — Dielektrične in piroelektrične lastnosti keramike $Pb_5Ge_3O_{11}$
526. Verk, Tomaž — Nelinearno sipanje svetlobe v nematičnih tekočih kristalih
527. Kveder, Miha — Prevodnost vakuumskih elementov za atomarni vodik
528. Peršič, Andreja — Vpliv porazdelitve izvorov fisijskih nevtronov na meritev moči reaktorja jedrske elektrarne
529. Vrenko, Andraž — Sinteza računalniškega holograma z iterativno kvantizacijo
530. Stanojevič, Mladen — Vpliv močnega magnetnega polja na karakteristiko Langmuirove sonde
531. Gantar, Gregor — Tokovno polje okoli lopatičnega profila nameščenega v kavitacijskem polju
532. Mrkaić, Mićo — Nematična ureditev v tanki plasti tekočega kristala
533. Vidovič, Mitja — Študij zamrzovanja organskega stekla s pomočjo 2D NMR
534. Racman, Sergej — Raziskava faznega prehoda v KSCN s ^{39}K NMR
535. Vrbančič, Nataša — Študij polimerno dispergiranih tekočih kristalov s pomočjo 2D NMR
536. Prosen, Tomaž — Transport energije in verifikacija Fourierovega zakona o prevajanju toplote v verigi trkajočih harmonskih oscilatorjev
537. Škarabot, Miha — Magnetno označevanje
538. Pelicon, Primož — Spektrometrija tankih plasti z Rutherfordovim sipanjem
539. Mandič, Igor — Določitev zgornje meje razvejitvenega razmerja za razpad resonance Υ (4 S) v direktne fotone
540. Hvalec, Darin Jurij — Križno optično stikalo
541. Galičič, Mirjana — Merjenje frekvence pulzarja PSRO531+21
542. Robar, Vlado — Koincidenčne meritve sevalcev β in γ

3. stopnja

Matematika — izobraževalna smer

1. Červ, Roman — Posplošene funkcije
2. Grušovnik, Saška — Lokalno evklidske geometrije

Matematika — raziskovalna smer

54.	Bren, Matevž	Matrično urejeni in matrično normirani prostori
55.	Lovrečič-Saražin, Marko	Hamiltonski indeks grafa
56.	Pavešič, Petar	Kohomologija majhnih kategorij
57.	Govekar, Darja	Odpravljive singularnosti Cauchy-Riemannovih funkcij

Mehanika

3.	Oberdank, Kazimir	Določitev tokovnega polja v turbinskem stroju
4.	Jošt, Dragica	Navier-Stokesova enačba

Fizika — pedagoška smer

13.	Dominko, Ciril	Pedagoška obravnava jedrske kvadrupolne resonance

Fizika — tehnična smer

109.	Kutnjak, Zdravko	Dielektrične lastnosti in rotacijska viskoznost feroelektričnih tekočih kristalov
110.	Seljak, Uroš	Tvorba resonanc pri procesu $p\bar{p} \to K^+K^-\pi^+\pi^-$
111.	Drevenšek, Irena	Sipanje svetlobe na orientacijskih fluktuacijah v feroelektričnih tekočih kristalih
112.	Zalar, Boštjan	Določevanje Edwards-Andersonovega parametra reda in porazdelitve lokalne polarizacije v prostorskih steklih z magnetno resonanco
113.	Jarh, Orest	Študij kapljic tekočega kristala dispergiranih v polimeru z metodo devterijeve in protonske jedrske magnetne resonance
114.	Rokavec, Aleš	Analiza reakcije $^{16}\mathrm{O}\ (e,\ e'p_0)\ ^{15}\mathrm{N}$ v območju jedrske veleresonance pri veliki preneseni gibalni količini
115.	Bajc, Borut	Sipanje mezonov ρ in pionov v kiralnem in v umeritvenem modelu
116.	Bezič, Janez	Strukture in prehodi v kapljicah holesterinske tekoče kristalne faze
117.	Jamnik, Janez	Električne lastnosti mejnega sloja med kovino in ionskim prevodnikom

Doktorske disertacije

Matematika

41.	Orel, Bojan	Metode Runge-Kutta z realnimi lastnimi vrednostmi

Mehanika

3.	Mejak, Georg	Osnosimetrični tok s prosto površino

Fizika

121.	Kralj, Samo	Ravnovesne strukture v nematični kapljici
122.	Vrhovec, Tomaž	Mezometeorološki model vetrovnih in temperaturnih polj v razgibanem reliefu

PLEMLJEV DOM NA BLEDU

Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je v zadnjih mesecih uspelo skleniti nekaj pogodb in si s tem zagotoviti, da bo že v letošnjem letu lahko obnovilo Plemljev dom na Bledu. Z dediči Plemljeve zapuščine, ki so nam pred 15 leti darovali 5/6 hiše, smo se sporazumeli za odkup tudi zadnje šestine. Sklenili smo kupoprodajno pogodbo in jim dogovorjeni znesek tudi že nakazali. Sedaj je hiša s pripradajočim dvoriščem in vrtom v celoti v lasti Društva tako, da bomo v prihodnje lahko po enotnem kriteriju urejali obnovo in program.

Ljubljanski investicijski zavod je pripravil vso potrebno dokumentacijo in načrte za obnovo doma, v katerem bo predavalnica s šestnajstimi sedeži, kabinet, kuhinja, jedilnica oziroma dnevni prostor, Plemljeva spominska soba, društvena soba, pet apartmajev ter dve skupni ležišči s potrebnimi sanitarijami. Če bo v hiši oskrbnik, bo lahko zasedal enega od apartmajev.

Z Ministrstvom za šolstvo in šport smo se dogovorili in tudi že podpisali pogodbo za sofinanciranje večinskega dela obnove Plemljevega doma s tem, da bodo njihovi programi v domu potekali pod enakimi pogoji kot društveni. Trudili se bomo, da si bomo ob letošnjem občnem zboru, ki bo na Bledu, lahko ogledali tudi obnovljen Plemljev dom.

Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

HLADNIK M., Povabilo v harmonično analizo, DMFA Slovenije, Ljubljana 1992, 104 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 26)

Klasične Fourierove vrste so zelo pomemben del matematike in z njimi se prvič srečamo že v drugem letniku študija. (Vsaj takrat, ko je bil avtor tega zapisa še študent, je bilo tako.) Nepogrešljive so na primer pri reševanju valovne ter toplotne enčbe in prav problem prevajanja tolpote je pred približno 185 leti motiviral Fouriera pri vpeljavi njegovih vrst. Problemi z drugih področij matematike so kasneje vzpodbudili bistveno posplošitev klasične teorije Fourierovih vrst — pokazalo se je, da teorija zelo dobro uspeva v okolju lokalno kompaktnih grup. Študij lokalno kompaktnih grup in njihovih reprezentacij je še sedaj raziskovalno zelo aktivno področje in je bistvenega pomena za mnoge druge veje matematike in moderne fizike. Tudi v zvezi s klasičnimi Fourierovimi vrstami so še ostali nerešeni zanimivi problemi.

Hladnikovo delo je dober in zelo zanimiv uvod v harmonično analizo. Knjiga je razdeljena na štiri poglavja. V prvem poglavju in v prvih treh razdelkih tretjega poglavja so dokazani osnovni klasični izreki o Fourierovih vrstah in Fourierovi transformaciji — gre za rezultate, ki so splošno uporabni v matematiki, naravoslovju in tehniki, zato bi morali to snov študentje spoznati že na dodiplomskem študiju. Drugo poglavje obravnava enoličnost razvoja v trigonometrisjke vrste in pri tem pokaže na zelo zanimive povezave Fourierove analize s teorijo števil. Četrto (zadnje) poglavje pa povabi bralca v analizo na komutativnih topoloških grupah. V zadnjem poglavju avtorjev namen ni sistematično razvijanje splošne harmonične analize, temveč se osredotoči na rezultate, ki jih potrebuje, da lahko na koncu prikaže

presenetljivo uporabo harmonične analize v dokazu Gaussovega kvadratnega recipročnega zakona in Dirichletovega rezultata o pogostosti praštevil v aritmetičnem zaporedju.

Po vsebini in zahtevnosti je knjiga v celoti primerna za študente matematike od drugega letnika naprej. Vsebina drugega in zadnjega dela četrtega poglavja je tudi med matematiki manj poznana in bo zato zanimiva za vsakogar. Manj znano je tudi dejstvo, na katero nas opozorijo zgodovinske opombe v knjigi, da je namreč harmonična anliza motivirala razvoj tudi takih matematičnih področij, ki z njo na videz nimajo nikakršne zveze (na primer teorije množic).

Bojan Magajna

ŠIPS V., Uvod u fiziku čvrstog stanja, Školska knjiga, Zagreb 1991, 267 str.

Knjiga je učbenik fizike trdnega stanja za študente Naravoslovno-matematične fakultete v Zagrebu. Učbenik je v prvi vrsti namenjen bodočim profesorjem fizike. Obsega gradivo za predmet osnove fizike trdnega stanja, ki ga vpisujejo slušatelji pedagoških smeri matematika-fizika, fizika-kemija in fizika-politehnika. Gre za enosemestrski predmet v obsegu 2+1. Učbenik je precej obsežen. Zdi se, da toliko snovi ni mogoče obdelati v enem semestru ob navedenem številu ur. Vsebinsko in tudi didaktično se snov, ki je obravnavana v učbeniku, v veliki meri ujema z delom programa za dvosemestrski predmet fizika trdne snovi na Oddelku za fiziko FNT, ki je namenjena inženirskim smerem. Zato bo učbenik prof. Šipsa dobrodošel tudi našim študentom. Naši pedagogi pa izobrazbe o fiziki trdne snovi v primerljivem obsegu sploh niso deležni.

Prof. Šips ima dolgoletne pedagoške izkušnje in obsežen znanstveni opus. Doktoriral je leta 1963. Na raziskovalnem področju se je pretežno ukvarjal s teorijskimi vprašanji interakcij med elektroni v kovinah in v plinski plazmi.

Učbenik ima 10 poglavij: Kristalna struktura, Medatomske vezi v kristalih, Dinamika kristalne mreže, Sommerfeldov model kovine, Elektron v periodičnem potencialu, Transportni pojavi, Polprevodniki, Magnetne lastnosti snovi, Superprevodnost, Dodatki. Poglavja so zaključena z zbirkami nalog in rešitvami. Zelo hvalevreden je natančen in ekstenziven opis reševanja nalog.

Poleg standardne snovi, ki spada v vsak elementarni učbenik za fiziko trdne snovi, avtor tu in tam obravnava tudi bolj specializirane teme. Tako zvemo nekaj o napakah v kristalih, amplitudah atomskih nihanj, rentgenskih spektrih kovin, Nordheimovem pravilu in teoriji Josephsonovega pojava.

Knjigo zaključuje kratek *Kdo je kdo* pomembnejših fizikov od Newtona naprej. Pri posameznikih so navedeni osnovni biografski podatki in njihov prispevek k fizikalni znanosti.

Peter Gosar