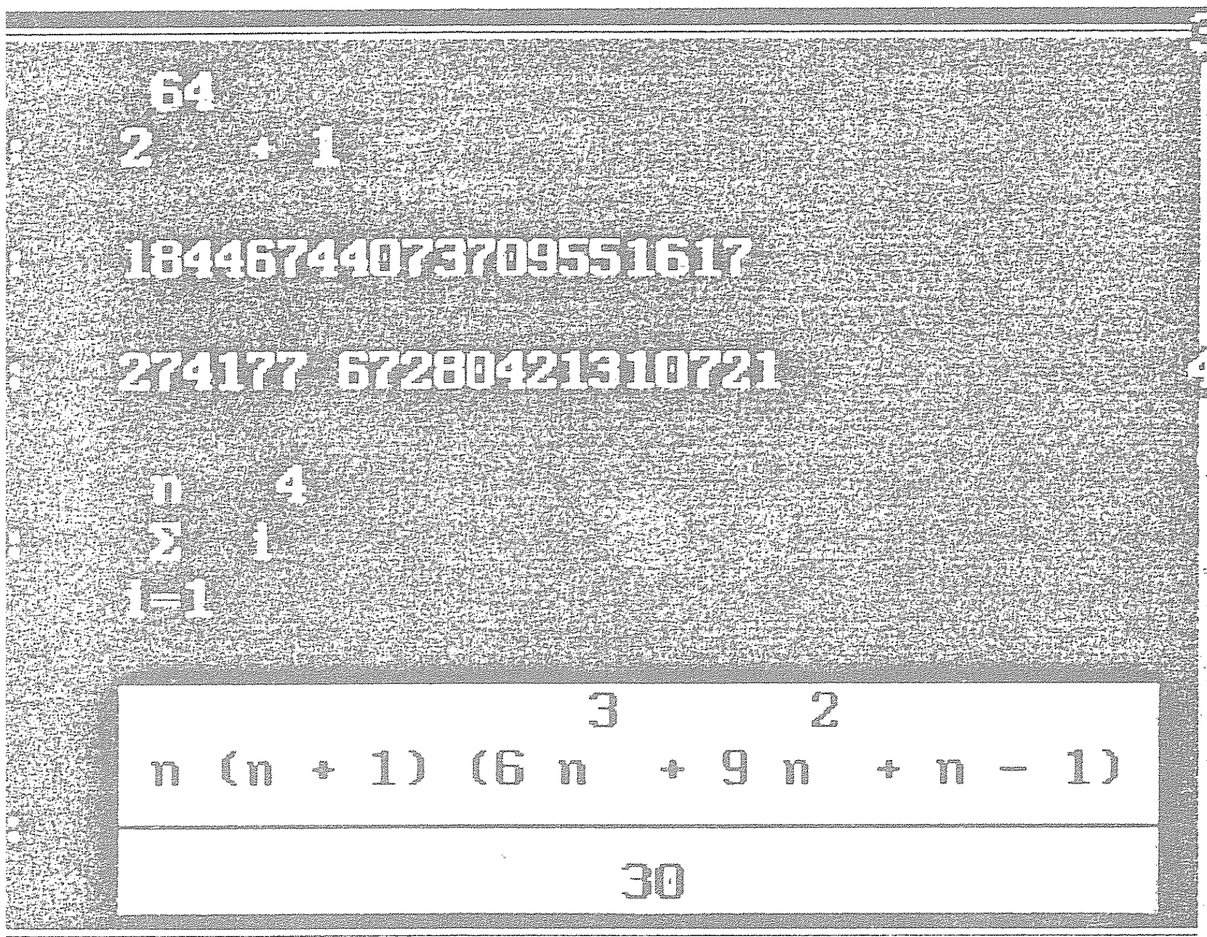
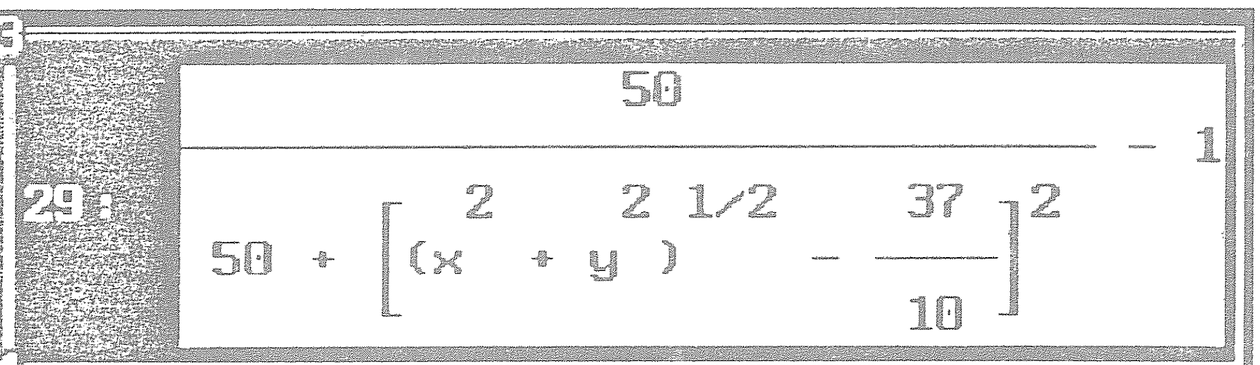
:DAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

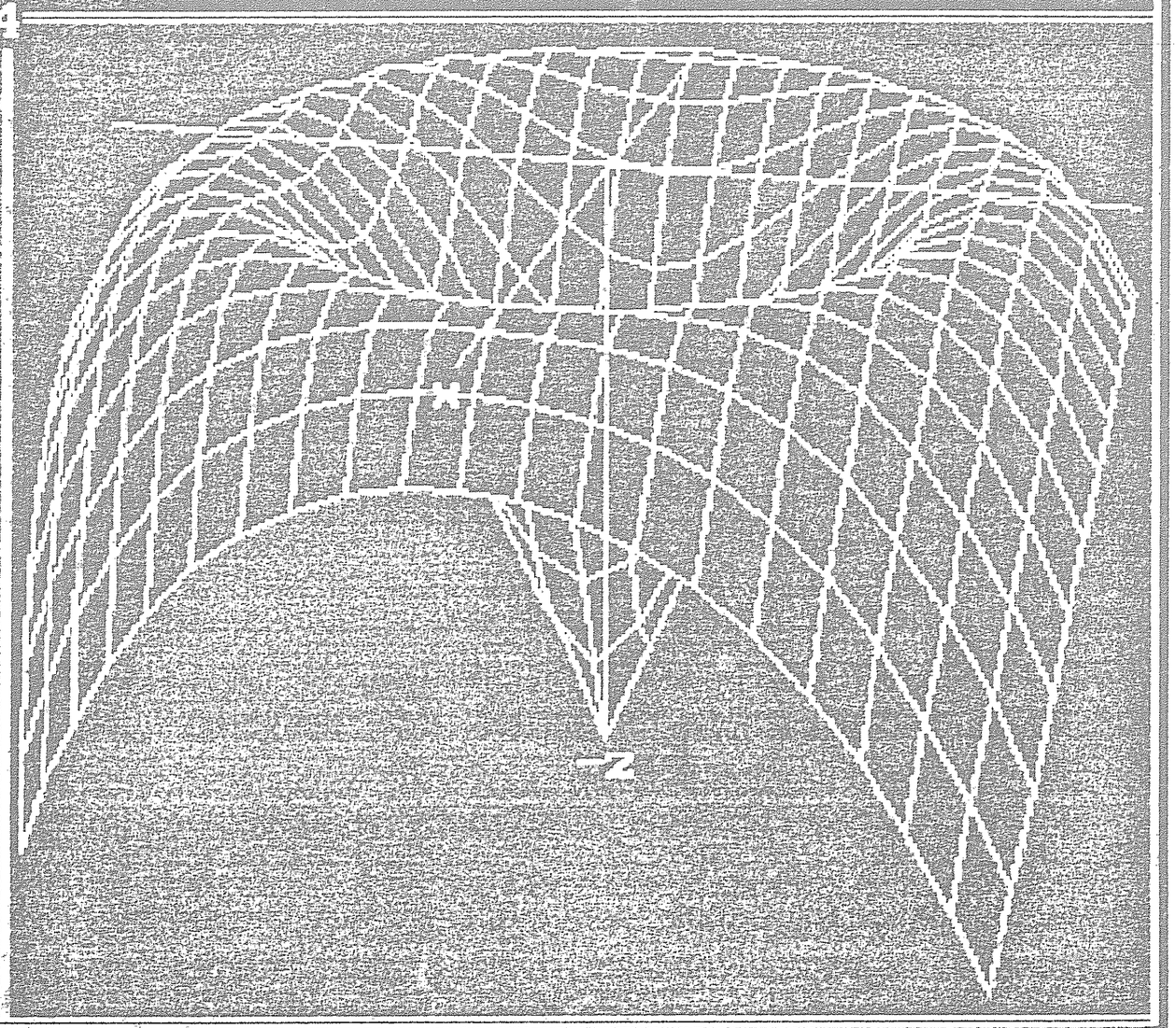
ITRALNA EKONOMSKA
JIŽNICA Ljubljana
OBPISANO
477/92-1

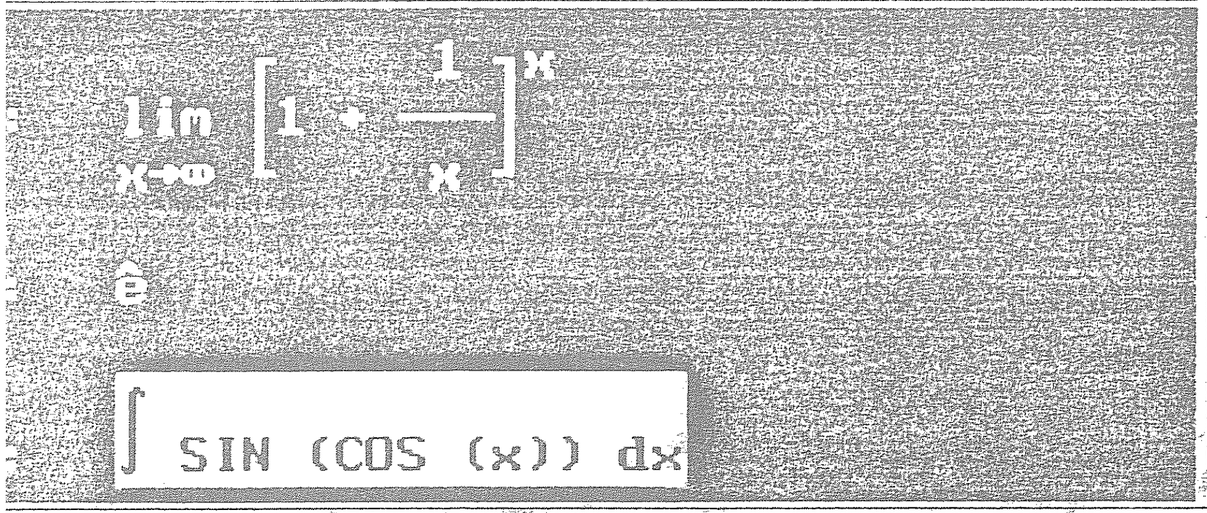
1992
Letnik 39
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO









OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1992

letnik 39, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 800.– SLT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 1600.– SLT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 150.– SLT, dvojna številka 300.– SLT, stare številke 80.– SLT.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1400 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Revija je oproščena prometnega davka z odlokom št. 314, Uradni list RS, št. 7/91.

© 1992 DMFA Slovenije – 1093

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

ODPISANO

R – 177 / P

CENTRALNA ENOTA KNJIŽNICA LJUBLJANA

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Programi za simbolično računanje – Derive — Programs for symbolic computation – Derive (Matija Lokar) 1–7

Trojke, 1. del — Triple systems, part I (Borut Zalar) 9–18

Kdo se boji vrtinčnih tokov? — Who is afraid of eddy currents? (Gorazd Planinšič) 19–25

Igre narave 1. Sipanje termičnih nevtronov na jedru in na magnetnem atomu sta iste velikostne stopnje — Some tricks of nature 1. Scattering of thermal neutrons on a nucleus and on a magnetized atom are of the same order of magnitude (Mitja Rosina) 26–29

Nove knjige — New books

(Peter Petek, Martin Juvan, Janez Strnad) 7–8, 8, 18

Vesti — News

Priznanja DMFA Slovenije učiteljem matematike, fizike z astronomijo ter računalništva v srednji in osnovni šoli za delo z mladimi (Ciril Velkovrh) 29–30

43. občni zbor Društva in delovno srečanje (Martina Koman) 31–32

Častni člani DMFA Slovenije v letu 1991 (Ciril Velkovrh) 32–III

Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike z astronomijo in računalništva za delo z mladimi (Peter Petek) IV

Vabilo (Milena Strnad) IV

Opravičilo IV

Na ovitku: Programi za simbolično računanje pomenijo nov izziv v matema-

PROGRAMI ZA SIMBOLIČNO RAČUNANJE — DERIVE

MATIJA LOKAR

Math.Subj.Class.(1991): 68Q40, 97A30, 97B25, 98A30

Pred leti so kalkulatorji spremenili naš pogled na določena področja matematike in njene uporabe. Sedaj je na pomolu nova sprememba. Prinašajo jo programi za simbolično računanje. Poglejmo, kaj ti programi sploh so in ali imajo mesto v šolah. Na kratko bomo predstavili tudi program DERIVE, po avtorjevem mnenju trenutno najprimernejši program za rabo v slovenskih šolah.

PROGRAMS FOR SYMBOLIC COMPUTATION — DERIVE

A few years ago electronic calculators changed our view of certain areas of mathematics and its applications. Now new changes are coming. They are brought about by programs for symbolic computation. Let us have a look at what these programs are and how they can be used in education. We will also briefly introduce DERIVE, in author's opinion a program most suitable for use in Slovenian schools at the present time.

1. Programi za simbolično računanje

Programi za simbolično računanje so zadnjih nekaj let vroča tema ne le proizvajalcev programske opreme, ampak tudi številnih uporabnikov računalnikov, predvsem pa inženirjev, matematikov in tudi učiteljev vseh predmetov, ki so bodisi matematični, bodisi se opirajo na matematiko. Te vrste programi namreč prinašajo tudi nov pogled na uporabo matematike — omogočajo enostavnejšo uporabo številnih matematičnih postopkov. Tako nudijo npr. možnost odvajanja funkcij, računanja limit, razvoja v Taylorjevo vrsto, kompozituma funkcij, poenostavljanja izrazov, nedoločeno in določeno integracijo in še mnogo tega. Posebej velja omeniti, da ti programi računajo točno — števila hranijo bodisi kot okrajšane ulomke ali pa kot iracionalna števila, če so takšna. Programi te vrste vsebujejo tudi večino numeričnih postopkov. Zato je za dani izraz mogoče zahtevati, naj se izračuna bodisi numerično, bodisi simbolično.

Poenostavitev določenih postopkov, ki so v dobršni meri dokaj rutinsko opravilo, a večkrat zelo zamudno in dovzetno za številne napake, omogoča, da se bolj posvetimo problemu samemu. Večina teh programov nudi tudi grafični prikaz tako v dveh kot tudi treh dimenzijah. Tako si končno lahko brez težav ogledamo znamenito sedlo ($z = x^2 - y^2$) iz različnih zornih kotov.

Seveda pa od programov te vrste ne smemo pričakovati preveč. Pri simboličnem računanju nastopajo tako teoretične kot tudi praktične omejitve. Za določene probleme niso poznani algoritmi, ki bi pripeljali do rešitve v splošnem (npr. reševanje algebraičnih enačb višjih stopenj, reševanje linearnih diferencialnih enačb z nekonstantnimi koeficienti, ...). Za nekatere druge probleme algoritmi sicer obstajajo, a so za praktično uporabo neprimerni, saj so bodisi prostorsko bodisi časovno prezahtevni. Prav zaradi avtomatizacije določenih postopkov (npr. odvajanja funkcij) so se zlasti v ZDA „bile

vroče bitke" o tem, ali so te vrste programi primerni za uporabo pri pouku, predvsem pri pouku matematike. Mnenja o tem so bila dokaj deljena, vendar so si programi v glavnem izborili svoj prostor v šolstvu.

Uporabnost programov za simbolično računanje se v šoli kaže na dveh ravneh (kot demonstracijsko sredstvo učitelja in za laboratorijske vaje učenca) in v dveh skupinah (pri pouku matematike in pouku nematematičnih predmetov). Posebej bi želel poudariti, da izkušnje z uporabo teh programov kažejo, da so zlasti uporabni pri nematematičnih predmetih (npr. fizika, strokovni predmeti, ...), ki se močno opirajo na matematične postopke. Tam omogočajo, da se izognemo poenostavitvam, uporabljenim le zaradi zapletenosti ali dolgotrajnosti določenega izračuna (npr. integrala, limite, ...). Po drugi strani pa tuje izkušnje kažejo tudi na to, da je priporočljivo, še več, praktično nujno, da se učenec s te vrste programi spozna pri pouku matematike.

Da lahko učitelj tovrstne programe uspešno uporablja, ni dvoma. Če drugega ne, lahko z njimi dokaj hitro in enostavno preveri rezultate. Številne knjige, ki so že izšle, pa tudi članki v izobraževalnih revijah kažejo tudi na to, da programe te vrste uspešno uporabljajo učenci pri samostojnem odkrivanju določenih postopkov, lastnosti, kontroli svojih rezultatov in podobno. Seveda je pri uporabi teh programov potrebna tudi prava mera — vendar nevarnost, da zaradi uporabe kalkulatorjev ne bi znali več seštevati, ne more preprečiti uporabe le-teh.

2. Derive

Vse doslej povedano velja za poljuben program za simbolično računanje. Teh je za s PC združljive računalnike kar nekaj. Med njimi je najbolj razvpit program Mathematica, nekaj zaradi kvalitete, nekaj zaradi uspešnega marketinga. Drugi programi te vrste so še Macsyma, Maple, Reduce, Axiom, delno MathCad in MatLab in ne nazadnje program Derive. Obstajajo tudi drugi, vendar je večina bolj ozko usmerjenih. Med njimi prav posebno vlogo zasluži program Derive in sicer iz povsem enostavnega razloga. Večina teh programov zahteva dokaj močno strojno opremo. Praktično vsi našteti programi potrebujejo računalnik, zgrajen okrog procesorja Intel 80386, opremljen še z matematičnim koprocesorjem in vsaj 1 Mb pomnilnika. Glede na opremljenost slovenskih šol in finančno stanje v šolstvu je tovrstna oprema v glavnem le želja. Na drugi strani pa program Derive za svoje delovanje potrebuje le s PC XT združljiv računalnik, opremljen z disketno enoto in 512 Kb pomnilnika. Tudi razlika v ceni programa ni zanemarljiva, saj se tipična cena programov te vrste giblje med 700$ in 1200$, Derive pa proizvajalec prodaja po 250$. Na srečo teh prednosti ne plačamo prehudo. Seveda se program ne more meriti npr. z Mathematico po kvaliteti grafičnih izpisov, tudi prej ‚obupa' nad določeno nalogo, vendar testi kažejo, da po kvaliteti dobljenih rešitev ne zaostaja za drugimi programi, ampak jih večkrat celo prekaša. To je po eni strani razumljivo, saj je to eden od starejših programov te vrste in zato vsestransko preizkušen.

Poglejmo na kratko, kaj program omogoča:

- računanje z ulomki, celimi, realnimi in kompleksnimi števili (seštevanje, množenje, deljenje, potenciranje) — vrne točne (ne zaokrožene) rezultate,
- uporabo funkcij (trigonometrične, ciklometrične, logaritemska, eksponentna, gama, nekatere statistične funkcije, ...) nad vsemi naštetimi tipi števil — dobimo lahko točen ali zaokrožen rezultat (npr. $\sin(\pi/4) \rightarrow$ $\rightarrow \sqrt{2}/2$ ali pa 0.707 106),
- simbolično računanje z vsemi operatorji in funkcijami: $(a+b)*2-2*$ $*\,b \rightarrow 2a$, $\sqrt{x^2} \rightarrow |x|$, ...),
- faktorizacijo celih števil in racionalnih funkcij,
- zamenjavo spremenljivk v izrazih in izračun vrednosti izrazov,
- risanje v dveh dimenzijah z možnostjo povečav, pomanjšav, premika koordinatnega sistema, hkratnega izrisa več funkcij, risanja v polarnem koordinatnem sistemu, parametričnih funkcij, ...,
- risanje v treh dimenzijah (žični model) z odpravo skritih črt, možnostjo premika točke opazovanja, povečave, pomanjšave, ...
- računanje integralov, limit, odvodov poljubnih redov,
- razvoj v Taylorjevo vrsto,
- računanje z matrikami in vektorji,
- iskanje lastnih vrednosti matrik,
- točno in približno reševanje linearnih in nelinearnih enačb in neenačb
- ...

Moč programa seveda ni neomejena. V dokaj žolčnem pismu, objavljenem v prvi številki biltena evropskega združenja uporabnikov programa Derive, pisec, ki je goreč nasprotnik uvajanja računalnikov v pouk matematike (tudi kalkulatorjev), protestira, češ kaj početi s programom, ki ne reši enačbe $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Vendar ta primer lepo kaže ravno na to, da je Derive pripomoček, ki nam pomaga, ne pa nadomešča znanje matematike. Če namreč enačbo množimo z $(x-1)$, dobimo enačbo $x^7-1=0$. To pa Derive reši v trenutku. Dodatno rešitev $x=1$ zavržemo in dobimo rešitve prvotne enačbe.

Takih primerov je še več. Tudi pri razvoju v Taylorjevo vrsto ne dobimo splošnega člena, ampak le nekaj prvih členov. Nihče tudi ne pričakuje, da bo program znal rešiti poljubno enačbo, izračunati poljuben integral, limito, ... Večkrat sploh ne obstaja postopek, po katerem bi prišli do rezultata v splošnem, drugič pa je veliko problemov, ki jih je načelno mogoče rešiti eksaktno, so pa praktično nerešljivi zaradi kombinatorične eksplozije pri vmesnih rezultatih, težav pri poenostavljanju izrazov, velike časovne in prostorske zahtevnosti in podobno.

Oglejmo si sedaj še, kako praktično delamo s tem programom.

Večino izrazov posredujemo programu tako, da jih vtipkamo. Osnovni pripomoček pri tem je izbira *Author*. Poleg osnovnih štirih operacij (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje) pozna Derive še potenciranje, za kar uporablja znak `^`, in faktorielo. Če vnesemo npr. izraz `5 * (9 - 3) / 12`, se

ta na delovno površino izpiše kot ulomek in brez znaka za množenje, drugače pa nespremenjen. Program izraze torej le oblikuje in jih ne ovrednoti. Z izbiro *Simplify* izraze poenostavimo. Če je izraz, ki ga poenostavljamo, realno število, kot rezultat dobimo okrajšan ulomek ali kar se da skrčeno iracionalno število. Programu ne delajo nobenih preglavic tudi zelo velika števila. Tako 26! poenostavi v 403 291 461 126 605 635 584 000 000. Večkrat pa nas ne zanima točen, ampak le približen rezultat. Takrat uporabimo izbiro *approX*, ki nam vrne približek vrednosti izraza. Tako je $(7/8)^{99}$ približno $1.81467 \cdot 10^{-6}$. Seveda lahko poiščemo tudi točen rezultat. Ta se izraža v obliki okrajšanega ulomka z 82-mestnim številcem in 90-mestnim imenovalcem.

Z ukazom *Factor* razstavimo število na prafaktorje. Prej izračunanih 26! se razcepi na $2^{23}\ 3^{10}\ 5^6\ 7^3\ 11^2\ 13^2\ 17\ 19\ 23$ v trenutku na še tako počasnem računalniku. Razcepimo lahko tudi ulomek, ki se pri tem tudi okrajša.

Pri računanju z iracionalnimi števili Derive uporablja različne poenostavitve. Tako Derive $\sqrt{(4 - 2 * \sqrt{3})}$ poenostavi v $\sqrt{3} - 1$,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3\sqrt{3}+3}}{\sqrt{24\sqrt{3}+40}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2},$$

in $\sqrt{5+\sqrt{24}} + \sqrt{5-\sqrt{24}}$ v $2\sqrt{3}$.

Derive pozna številne funkcije. Uporabljamo jih lahko tako nad realnimi kot tudi nad kompleksnimi števili. Če pa katere funkcije ne pozna, jo lahko definiramo sami.

Izraze, ki vsebujejo spremenljivke, vnašamo tako kot številske izraze, z izbiro *Author*. Dobljene izraze poenostavimo z ukazom *Simplify*. Oglejmo si nekaj primerov.

$$(x+a)^2 - 2*a*x \quad \rightarrow \quad x^2 + a^2$$

$$2*(x^2-y^2)^6 - (x^2-y^2)^5 * (2*x^2-3) \quad \rightarrow \quad (3-2*y^2)*(x^2-y^2)^5$$

$$(x+(a+1)^{10})^2 - (a+1)^{20} \quad \rightarrow \quad x^2 + 2*x*(a+1)^{10}$$

$$\frac{a^3}{(a-b)*(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)*(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)*(c-b)} \quad \rightarrow \quad a+b+c$$

$$\frac{(a*n+b*m)^2 + (a*m-b*n)^2}{(a*p+b*q)^2 + (a*q-b*p)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{m^2+n^2}{p^2+q^2}$$

$$\frac{(p*x^2+(k-s)*x+r)^2 - (p*x^2+(k+s)*x+r)^2}{(p*x^2+(k+t)*x+r)^2 - (p*x^2+(k-t)*x+r)^2} \quad \rightarrow \quad -s/t$$

Pri poenostavitvah Derive teži k izrazom, kjer ni odvečnih spremenljivk, korenov in možnosti znižanja stopnje polinoma. Seveda pa je skoraj filozofsko vprašanje, kaj je dovolj enostaven izraz in kdaj je posamezni izraz enostavnejši od drugega. Tako Derive poenostavi

$$x^2 - (x + (y+1)^{50})(x - (y+1)^{50}) \quad \rightarrow \quad (y+1)^{100},$$

vendar tudi $(5x - 3x + 1)^7 - x$ v $128x^7 + 448x^6 + 672x^5 + 560x^4 + 280x^3 + + 84x^2 + 13x + 1$.

Pogosto bi radi polinom razstavili. V ta namen uporabljamo izbiro *Factor*. Derive pozna več načinov faktorizacije. Tako v načinu *Trivial* Derive le izpostavi skupne faktorje. Na primer $2x^3 - 8x^2 + 8x$ pretvorimo v $2x(x^2 - - 4x + 4)$. Najbolj običajen je način *Rational*. Tu polinom razcepimo na produkt členov čim nižje stopnje, ne da bi uporabili kompleksna števila ali nove korene. Gornji primer tako faktoriziramo v $2x(x-2)^2$, izraz $x^3 + x^2 - -2x - 2$ pa v $(x+1)(x^2-2)$. V načinu *Complex* polinom razcepimo na produkt samih linearnih faktorjev. Pri tem pogosto potrebujemo kompleksna števila. Ker Derive računa točno, so dobljeni rezultati večkrat nepregledni. Običajno jih potem približno ovrednotimo z ukazom *approX*.

Z izbiro *soLve* rešujemo enačbe in neenačbe. Pri običajni nastavitvi Derive poskuša rešiti enačbo točno. Večkrat to ni možno. Tedaj kot rezultat vrne le poenostavljeno obliko enačbe, kot bi jo dobili z izbiro *Simplify*, ali pa le delni rezultat.

Če v relaciji nastopa več spremenljivk, nas program vpraša, glede na katero spremenljivko iščemo rešitev. Tako lahko poiščemo eksplicitno izražavo implicitno podane funkcije, seveda, če se Derive ne bo prej upehal.

Če je enačba prezahtevna za točno reševanje, bomo morda zadovoljni s približno rešitvijo. Seveda bo to šlo le, če v enačbi nastopa le ena spremenljivka. Če pri približnem načinu računanja uporabimo ukaz *soLve*, nas program vpraša, v kakšnih mejah naj išče rešitev. Tudi če je na izbranem intervalu več rešitev, bo program poiskal le eno. Če niti približno ne poznamo intervala, kjer bi rešitve lahko bile, je dobro, če prej ustrezno funkcijo narišemo.

Problem obstoja algoritma, ki bi poiskal nedoločeni integral poljubne elementarne funkcije, če je tudi integral elementarna funkcija, je bil dolgo zelo trd oreh za matematike. Tako ni čudno, da je večina uporabnikov zelo presenečenih, ko vidi, da program zna izračunati večino integralov, s katerimi smo se mučili v šolskih letih. Seveda rahla doza skepse tudi tu ne bo odveč, saj z malo truda lahko poiščemo primer, pri katerem bo program odpovedal. Včasih enostavno ne „vidi" npr. zamenjave spremenljivk, ki je nam povsem očitna. Pa saj so vsi algoritmi taki. Tako in tako nismo trdili, da nam bo program prihranil vse delo. Včasih mu je pač treba pomagati in do rezultata priti vsaj na pol.

Derive računa tudi določeni integral in sicer ne njegovega numeričnega približka, ampak kar točno vrednost. Zato so tudi meje integracije lahko simbolične vrednosti in ne nujno številske.

Nekaj integralov, ki jih Derive uspešno užene:

- $$\int x^2 \cos(ax^3 + b)dx \to \frac{\sin(ax^3 + b)}{3a},$$

- določeni integral

$$\int_a^b x^2 dx \to \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

- integral na neskončnem območju

$$\int_{a^2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \to \frac{1}{a^2},$$

- integral s singularnostjo v končni točki

$$\int_0^{b^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \to 2|b|,$$

- večkratni integral

$$\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} xy\, dy\, dx \to \frac{r^4}{8}.$$

Seveda bi lahko navedli tudi precej integralov, ki so za Derive trd oreh. Z večino srednješolskih integralov pa ne bo večjih težav.

Seveda program ni idealen in mu lahko precej stvari zamerimo. Tako ima glede na današnjo raven programske opreme dokaj zastarel uporabniški vmesnik, ki pa je enostaven za uporabo. Vgrajena pomoč je dosegljiva le na glavnem nivoju in nas običajno napoti samo na ustrezno stran v priročniku. Čeprav imamo možnost dela z več okni, pa jih ne moremo poljubno povečevati in zmanjševati in premikati po zaslonu. Glavna pomanjkljivost programa pa je ta, da grafične slike ni mogoče neposredno poslati na tiskalnik in si moramo pomagati z enim od rezidenčnih programov.

Po drugi strani pa je program dokaj enostaven za uporabo. Tako smo na oddelku za matematiko v sklopu trajnega izobraževanja učiteljev matematike izvedli dveurno predavanje o tem programu. Ker je bilo zanimanje za uporabo programa precejšnje, smo nato izvedli še dva šesturna tečaja, vsakega s približno dvajsetimi udeleženci. Čeprav se je večina tečajnikov s programom srečala prvič, so ga po šestih urah že dokaj zadovoljivo uporabljali. Na predavanjih so se mnogi zanimali za nakup tega programa. Po številnih dogovorih, ki jih je, žal, prekinila vojna v Sloveniji, so se na Zavodu za šolstvo odločili, da program uvrstijo med programsko opremo srednjih šol. Tako naj bi šole program dobile v prvi polovici tega leta. Obenem se bo v začetku leta začelo usposabljanje za uporabo tega programa v obliki začetnih in nadaljevalnih seminarjev.

Zaključimo z mislijo iz članka [2]. „Način njihove uporabe (programov za simbolično računanje) bo še stvar premisleka in poskusa, je pa nujno, da imajo *vsi* učitelji matematike dostop do njih na *vseh* stopnjah poučevanja. Predstavljajo izziv k premisleku o tem, *kaj* učimo in *zakaj*. S prihodom programov za simbolično računanje matematika ne bo nikoli več taka, kot je bila."

Kaj pa vi mislite o programih te vrste in njihovi rabi v šoli? Sporočite nam svoje mnenje!

LITERATURA

[1] E. L. Grinberg, *The menu with college education,* Notices of AMS, **36** (1989) 838–842.
[2] David Tall, *Derive: A Mathematical Assistant for your personal computer,* MicroMath **3** (1991) 42–43.
[3] Soft Warehouse, *Derive version 2,* programski paket.

NOVE KNJIGE

GLEICK J., Kaos, prev. Samo Kuščer, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1991, 308 str.

Avtor je novinar, znanstveni urednik New York Timesa. Pogovarjal se je z večino protagonistov „nove znanosti" in na osnovi teh pogovorov je nastala knjiga. To seveda ni strokovno pisanje, niti poljudno ne. Je pa odličen novinarski zapis, ki se bere kot napeta zgodba. Opis kaotičnih pojavov je strokovno neoporečen in vendar dostopen vsakomur, ki ima le malo naravoslovne izobrazbe.

Že Poincaré je na začetku stoletja zaslutil, da lahko v nekaterih dinamičnih sistemih pride do kaotičnega obnašanja. Vendar je pravi razcvet doživela teorija kaosa šele v zadnjih desetih, petnajstih letih. Razlog je preprost: računalnik. Ta imenitna naprava nam je omogočila vpogled v pojave, podobno kot je mikroskop izostril pogled biologov pred več kot enim stoletjem. Kaos se lahko pojavi le tedaj, ko sistem ni linearen. Tri lastnosti karakterizirajo kaotično vedenje sistema: občutljivost za začetni pogoj, goste periodične točke in topološka tranzitivnost. V različnih znanostih so se srečali s kaosom: meteorologiji, biologiji, ekonomiji, astronomiji, elektrotehniki, medicini, fiziki, matematiki.

V Gleickovi knjigi spoznamo Lorenzov model vremena in „metuljasto" rešitev. Zvemo, zakaj ima Jupiter rdečo pego. Preprost model naraščanja populacije nas popelje preko podvojitvenih bifurkacij do kaosa. Čudni objekti, kot so fraktalni atraktorji ali Juliajeve množice, kažejo svojevrstno abstraktno lepoto. Novih idej in njihovih zagovornikov znanstvena srenja ni vedno gledala s prijaznim očesom. Mandelbrot, oče fraktalov, je še danes

po mnenju mnogih sporna osebnost. Feigenbaumovo univerzalnost so na začetku na lahko odpravili kot igranje s številkami, poceni numeriko.

Kuščerjev prevod je lep in tekoč. Zelo dobro je, da imamo Kaos tudi v slovenskem prevodu. Po njem bodo segali izobraženci vseh strok.

Peter Petek

ANDRÁSFAI B., Graph theory: flows, matrices, Akadémiai Kiadó, Budapest 1991, 280 str.

Pričujoče delo je nadaljevanje knjige Introductory Graph Theory, ki jo je pred več kot desetimi leti napisal isti avtor. Ker se je v zadnjih letih močno povečal vpliv algebraičnih metod v teoriji grafov, se je avtor odločil, da bo v nadaljevanje vključil tudi obširno poglavje o matrikah, ki jih lahko priredimo grafu. Knjiga je razdeljena na štiri poglavja.

V prvem poglavju avtor na kratko obnovi definicije in izreke, ki jih v nadaljevanju potrebuje. Poudarek je na bločni strukturi usmerjenih in neusmerjenih grafov.

Drugo poglavje opravičuje prvi del naslova knjige. Obravnava predvsem problem pretoka v omrežjih in mnoge njegove posplošitve. Avtor dokaže več standardnih izrekov in iz njih nato izpelje algoritme za reševanje različnih transportnih problemov. Večina teh postopkov temelji na klasičnem Ford-Fulkersonovem algoritmu. Podan je tudi preprost primer, ki pokaže, da običajna varianta tega algoritma pri iracionalnih kapacitetah ne vrne nujno pravega rezultata.

V drugem delu knjige srečamo različne matrike, ki jih lahko priredimo grafu. Tako so predstavljene matrika sosednosti, incidenčna matrika, matrika ciklov in matrika prerezov grafa. Dodan je tudi razdelek o spektru matrike sosednosti. Poglavje se zaključi s krajšim prikazom uporabe teorije grafov in njim prirejenih matrik pri študiju električnih vezij.

Vsa poglavja imajo na koncu dodane naloge. Rešitve večjega števila nalog so zbrane v zadnjem poglavju.

Za branje knjige ni potrebno posebno predznanje, zadošča poznavanje osnov teorije grafov in linearne algebre. Razlaga je nazorna in ne prezapletena. Knjigo bodo tako uporabljali vsi tisti, ki želijo s pomočjo grafov reševati predvsem probleme na omrežjih, kot pomožni učbenik pri predmetu računalništvo 3 pa bo koristila tudi študentom uporabne matematike.

Martin Juvan

TROJKE, 1. DEL

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991): 17A40, 46H99

V članku so opisane osnove teorije trojk. Definicije so ilustrirane na primeru matrične trojke $\mathcal{M}_{n,m}$.

TRIPLE SYSTEMS, PART I

In this paper we describe some basic concepts in the theory of the triple systems. Definitions are illustrated on the example of the matrix triple $\mathcal{M}_{n,m}$.

1. Uvod

Namen članka je predstaviti slovenski matematični javnosti novo področje algebre, ki je nastalo okrog leta 1970 in je še vedno precej neraziskano. Nekaj pomembnejših člankov o tej temi je navedenih v spisku literature.

Študij asociativnih trojk se je začel z obravnavanjem posplošenih inverzov nekvadratnih matrik in njihove spektralne teorije. Poleg tega je asociativna trojka tudi posplošitev pojma kolobarja, ki je eden od centralnih pojmov moderne algebre.

Naj bo $(\mathcal{W}, +)$ neka komutativna grupa (torej je na množici $\mathcal{W}$ definirano seštevanje). Tedaj se $\mathcal{W}$ imenuje trojka, če obstaja triaditivna preslikava $\{\ldots\} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$. To pomeni, da veljajo identitete

$$\begin{aligned}\{(x_1 + x_2)yz\} &= \{x_1yz\} + \{x_2yz\},\\ \{x(y_1 + y_2)z\} &= \{xy_1z\} + \{xy_2z\},\\ \{xy(z_1 + z_2)\} &= \{xyz_1\} + \{xyz_2\},\end{aligned}$$

kjer so $x_i, y_i, z_i \in \mathcal{W}$ poljubni elementi. Pomemben zgled, ki je tudi eden od motivov za preučevanje trojk, je naslednji:

Naj pomeni oznaka $\mathcal{M}_{n,m}$ množico matrik, ki imajo n vrstic in m stolpcev. Če so matrike kvadratne, torej če je $n = m$, potem je ta množica kolobar za običajno množenje matrik. Če matrike niso kvadratne, potem ne tvorijo kolobarja za običajno množenje matrik, možno pa je uvesti v $\mathcal{M}_{n,m}$ naravno strukturo trojke s predpisom

$$\{ABC\} = AB^TC,$$

kjer so $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,m}$ in pomeni oznaka B^T transponirano matriko k matriki B. Bralec se bo brez težav prepričal, da je množenja matrik v definiciji produkta $\{\ldots\}$ res mogoče izvesti in da ima končna matrika spet n vrstic in m stolpcev.

V skladu z zgledom, ki smo ga navedli zgoraj, se asociativnost pri trojkah definira nekoliko neobičajno.

Definicija 1. Trojka $\mathcal{W}$ se imenuje *asociativna*, če velja identiteta

$$\{\{abc\}de\} = \{a\{dcb\}e\} = \{ab\{cde\}\}$$

za vse $a, b, c, d, e \in \mathcal{W}$. Opozoriti želimo zlasti na nekoliko obrnjen vrstni red elementov v srednjem izrazu. Bralec se lahko hitro prepriča, da je trojka $\mathcal{M}_{n,m}$ asociativna.

Navedli bomo še dva zgleda, ki kažeta, da je pojem asociativne trojke posplošitev pojma asociativnega kolobarja.

Naj bo $\mathcal{K}$ asociativni kolobar. Na množici $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ bomo definirali trojni produkt s predpisom

$$\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)\} = (x_1 y_2 x_3, y_3 x_2 y_1)$$

za vse $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathcal{K}$. Brez težav preverimo, da je tako definiran produkt asociativen v smislu definicije 1.

Naj bo $\mathcal{K}$ asociativni kolobar z involucijo $*$. *Involucija* je preslikava na $\mathcal{K}$, ki zadošča aksiomom

$$\begin{aligned}(x + y)^* &= x^* + y^*,\\ x^{**} &= x,\\ (xy)^* &= y^* x^*\end{aligned}$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{K}$. Primer za tako involucijo je kar transponiranje matrik na kolobarju kvadratnih matrik dimenzije n. Tedaj množica $\mathcal{K}$ postane asociativna trojka, če uvedemo trojni produkt s predpisom

$$\{xyz\} = xy^*z.$$

Vzemimo interval $[-1, 1]$. Naj bo $\mathcal{W}$ množica zveznih lihih funkcij iz $[-1, 1]$ v $\mathbb{R}$. To pomeni, da so v $\mathcal{W}$ tiste funkcije f, ki zadoščajo enakosti $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in [-1, 1]$. Takoj se lahko prepričamo, da je vsota lihih funkcij spet liha funkcija in da produkt lihih funkcij nasploh ni liha funkcija. Lahko pa definiramo v $\mathcal{W}$ trojni produkt s predpisom $\{fgh\}(x) = f(x)g(x)h(x)$ za vsak $x \in [-1, 1]$.

2. Ideali

Ideale v trojkah definiramo podobno kot v kolobarjih.

Definicija 2. Naj bo $\mathcal{W}$ trojka in naj bo $\mathcal{J} \subset \mathcal{W}$ podgrupa komutativne grupe $(\mathcal{W}, +)$. To pomeni, da je za vsaka elementa $x, y \in \mathcal{J}$ njuna razlika $x - y$ tudi element množice $\mathcal{J}$.

(i) $\mathcal{J}$ je *levi ideal* trojke $\mathcal{W}$, če iz $x, y \in \mathcal{W}$ in $a \in \mathcal{J}$ sledi, da je tudi $\{xya\}$ v $\mathcal{J}$. S simboli to zapišemo tudi kot $\{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{J}\} \subset \mathcal{J}$.

(ii) $\mathcal{J}$ je *desni ideal* trojke $\mathcal{W}$, če iz $x, y \in \mathcal{W}$ in $a \in \mathcal{J}$ sledi, da je tudi $\{axy\} \in \mathcal{J}$ oziroma, da je $\{\mathcal{J}\mathcal{W}\mathcal{W}\} \subset \mathcal{J}$.

(iii) $\mathcal{I}$ je *zunanji ideal* trojke $\mathcal{W}$, če je hkrati levi in desni ideal.
(iv) $\mathcal{I}$ je *ideal* trojke $\mathcal{W}$, če velja $\{\mathcal{I}\mathcal{W}\mathcal{W}\}, \{\mathcal{W}\mathcal{I}\mathcal{W}\}, \{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{I}\} \subset \mathcal{I}$

Včasih je v trojki definirano tudi množenje s skalarjem. Tak primer je na primer trojka $\mathcal{M}_{n,m}$, ki smo jo definirali v uvodu. Matriko pomnožimo s skalarjem na običajni način tako, da pomnožimo vsak element matrike posebej. V takem primeru zahtevamo pri zgornji definiciji od idealov še, da je ideal zaprt za množenje s skalarjem. To pomeni, da za vsak $a \in \mathcal{I}$ ter za vsak skalar λ tudi λa leži v $\mathcal{I}$.

Če je $\mathcal{I}$ ideal trojke $\mathcal{W}$, lahko definiramo kvocientno trojko $\mathcal{W}\backslash\mathcal{I}$. Podobno kot pri kolobarjih množimo ekvivalenčne razrede s predpisom

$$\{(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I})(c+\mathcal{I})\} = \{abc\} + \mathcal{I}.$$

To definicijo bomo ilustrirali s tremi preprostimi trditvami v zvezi s trojkami, ki smo jih definirali v uvodu.

Trditev 1. *Naj bo $\mathcal{I}$ ideal trojke $\mathcal{M}_{n,m}$. Tedaj je bodisi $\mathcal{I} = (0)$ bodisi $\mathcal{I} = \mathcal{M}_{n,m}$.*

Pripomnimo, da se trojke, ki nimajo netrivialnih idealov, imenujejo enostave. Naša trditev torej pravi, da je trojka $\mathcal{M}_{n,m}$ enostavna.

Dokaz. Naj bo E_{ij} matrika, ki ima na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca enko, na vseh drugih mestih pa same ničle. V primeru trojke $\mathcal{M}_{2,3}$ bi torej imeli naprimer

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Očitno je vsaka matrika linearna kombinacija matrik E_{ij}. Z rutinsko vajo iz matričnega računa se lahko prepričamo, da velja

$$\{E_{il}AE_{kj}\} = a_{kl}E_{ij} \tag{1}$$

za poljubno matriko $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ in poljubne indekse, ki so smiselni (seveda ne morejo biti večji od dimenzije matrik). Tu smo z a_{kl} označili tisti element matrike A, ki leži na križišču k-te vrstice in l-tega stolpca.

Denimo, da je ideal $\mathcal{I}$ različen od (0). Tedaj mora obstajati v $\mathcal{I}$ neka neničelna matrika A. Ker je A neničelna, mora imeti neki neničelen element a_{kl} pri nekih indeksih k in l. Vzemimo zdaj poljubna indeksa $i \in \{1, \ldots, n\}$ ter $j \in \{1, \ldots, m\}$. Iz enakosti (1) dobimo

$$E_{ij} = \frac{1}{a_{kl}}\{E_{il}AE_{kj}\},$$

ta element pa spada v $\mathcal{I}$, ker je $\mathcal{I}$ ideal (glej definicijo 2(iv)). Torej so vse matrike E_{ij} v $\mathcal{I}$ in zato tudi vse druge, ki so njihove linearne kombinacije. ■

Trditev 2. *Naj bo $\mathcal{K}$ asociativen kolobar z involucijo $*$ in enoto 1. Naj bo $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ trojka s produktom $\{xyz\} = xy^*z$. Tedaj velja*

(i) *$\mathcal{J}$ je zunanji ideal trojke $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{J}$ ideal kolobarja $\mathcal{K}$.*

(ii) *$\mathcal{J}$ je ideal trojke $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{J}$ ideal kolobarja $\mathcal{K}$ in je $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}$.*

Dokaz. (i) Naj bo najprej $\mathcal{J}$ ideal kolobarja $\mathcal{K}$. Torej je

$$\mathcal{J}\mathcal{K}, \mathcal{K}\mathcal{J} \subset \mathcal{J}\,.$$

Zato je tudi

$$\begin{aligned}\{\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{K}\} &= (\mathcal{J}\mathcal{K}^*)\mathcal{K} \subset \mathcal{J}\mathcal{K} \subset \mathcal{J} \\ \{\mathcal{K}\mathcal{K}\mathcal{J}\} &= \mathcal{K}(\mathcal{K}^*\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}\mathcal{J} \subset \mathcal{J}\,,\end{aligned}$$

kar nam pove, da je $\mathcal{J}$ zunanji ideal trojke $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ (glej definicijo 2).

Naj bo $\mathcal{J}$ zunanji ideal trojke $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mathcal{J} &= \mathcal{K}^{**}\mathcal{J} = \{1\mathcal{K}^*\mathcal{J}\} \subset \mathcal{J} \\ \mathcal{J}\mathcal{K} &= \mathcal{J}\mathcal{K}^{**} = \{\mathcal{J}\mathcal{K}^*1\} \subset \mathcal{J}\,,\end{aligned}$$

kar pomeni, da je $\mathcal{J}$ ideal kolobarja $\mathcal{K}$.

(ii) Dokažemo povsem podobno kot (i). ■

Trditev 3. *Naj bo $\mathcal{K}$ asociativen kolobar z enoto. Naj bo $\mathcal{W} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ trojka, ki smo jo definirali v uvodu. Tedaj velja*

(i) *$\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ je zunanji ideal trojke $\mathcal{W}$ natanko tedaj, ko obstajata taka ideala $\mathcal{J}$ in $\mathcal{L}$ kolobarja $\mathcal{K}$, da je $\mathcal{S} = \mathcal{J} \times \mathcal{L}$.*

(ii) *$\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ je ideal trojke $\mathcal{W}$ natanko tedaj, ko obstaja tak ideal $\mathcal{J}$ kolobarja $\mathcal{K}$, da je $\mathcal{S} = \mathcal{J} \times \mathcal{J}$.*

Dokaz je podoben dokazu trditve 2 in ga prepuščamo bralcu.

3. Komutativnost in centroid

Trojka $\mathcal{W}$ se imenuje *komutativna*, če za vse $x, y, z \in \mathcal{W}$ velja identiteta

$$\{xyz\} = \{zyx\}\,.$$

V zvezi s komutativnostjo se definira tudi *centroid* trojke $\mathcal{W}$ kot množica vseh tistih parov aditivnih preslikav $(C_+, C_-) : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$, ki zadoščajo pogojem

$$C_\sigma(\{xyz\}) = \{C_\sigma(x)yz\} = \{xC_{-\sigma}(y)z\} = \{xyC_\sigma(z)\} \qquad (2)$$

za oba indeksa $\sigma \in \{+,-\}$ ter vse $x, y, z \in \mathcal{W}$. Brez težav se prepričamo, da centroid trojke postane kolobar, če vanj uvedemo seštevanje in množenje takole:

$$(C_+, C_-) + (D_+, D_-) = (C_+ + D_+, C_- + D_-)$$
$$(C_+, C_-)(D_+, D_-) = (C_+ D_+, C_- D_-)\,.$$

Ker je komponiranje preslikav vedno asociativno, je centroid avtomatično asociativen kolobar, tudi če trojka $\mathcal{W}$ morebiti ni asociativna. Nadalje je očitno, da je centroid kolobar z enoto, ki jo predstavlja par $(\mathrm{id}_{\mathcal{W}}, \mathrm{id}_{\mathcal{W}})$. V nadaljevanju bomo centroid trojke $\mathcal{W}$ označili z $Z(\mathcal{W})$.

Trditev 4. *Centroid matrične trojke $\mathcal{M}_{n,m}$ je izomorfen obsegu realnih števil, če gre za realne matrike, ter obsegu kompleksnih števil, če gre za kompleksne matrike.*

Dokaz. Ogledali si bomo zgolj realni primer, ker je kompleksni povsem podoben. Naj bo λ poljubno realno število. Definirajmo $C_+(X) = C_-(X) = \lambda X$ za vsak $X \in \mathcal{M}_{n,m}$. Brez težav se prepričamo, da velja pogoj (2), kar pomeni, da je obseg realnih števil mogoče vložiti v centroid trojke $\mathcal{M}_{n,m}$.

Dokaz obrata bomo ilustrirali na primeru $\mathcal{M}_{2,3}$, ker bi se sicer ideja dokaza izgubila v mnogih dvojnih indeksih in kompliciranih matričnih množenjih. Enako kot v dokazu trditve 1 bomo uporabljali standardno matrično bazo E_{ij}. Vzemimo matriko $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in naj bo $C_+(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Vzemimo še poljubno matriko $Y = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$. Iz pogoja (2) dobimo matrično enačbo

$$\{C_+(E_{11}) Y E_{11}\} = \{E_{11} Y C_+(E_{11})\}$$

oziroma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Ko te matrike medsebojno zmnožimo in primerjamo obe strani, dobimo za poljubne $x, y, z \in \mathbb{R}$ enakosti

$$dx + ey + fz = 0,$$
$$bx + eu = 0,$$
$$cx + fu = 0\,.$$

Zdaj vstavimo za matriko Y po vrsti E_{11}, E_{12}, E_{13} oziroma

$$\begin{array}{llll} x = 1, & y = 0, & z = 0, & u = 0; \\ x = 0, & y = 1, & z = 0, & u = 0; \\ x = 0, & y = 0, & z = 1, & u = 0\,. \end{array}$$

Dobimo $b = c = d = e = f = 0$ oziroma $C_+(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_{11}$.
Podobno naredimo še za ostale izbire indeksov i in j in dobimo, da za vsak par (i, j) obstaja tako realno število λ_{ij}, da je $C_+(E_{ij}) = \lambda_{ij}E_{ij}$.

Videti moramo še, da so ta števila vsa enaka. Iz (2) dobimo tudi enačbo

$$\{C_+(E_{ij})E_{kj}E_{kl}\} = \{E_{ij}E_{kj}C_+(E_{kl})\}\,,$$

ki nam skupaj z zgornjim razmislekom pove, da je

$$\lambda_{ij}E_{il} = \lambda_{kl}E_{il}\,.$$

Ker je matrika E_{il} neničelna, morata biti konstanti λ_{ij} in λ_{kl} enaki.

Torej je $C_+(E_{ij}) = \lambda E_{ij}$ za vse možne pare indeksov (i, j). Iz pogoja (2) takoj sledi, da sta C_+ in C_- celo linearni preslikavi. Ker je vsako matriko mogoče zapisati kot linearno kombinacijo baznih matrik E_{ij}, je $C_+(X) = \lambda X$ za vse matrike $X \in \mathcal{M}_{n,m}$.

Če zamenjamo vlogo preslikav C_+ in C_-, dobimo $C_-(X) = \mu X$ za neki skalar μ. Če to še enkrat vstavimo v (2), vidimo, da mora biti $\lambda = \mu$. ■

Trditev 5. *Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar z involucijo in enoto 1. Tedaj je centroid trojke $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ izomorfen centru kolobarja $\mathcal{K}$.*

Dokaz. Označimo center kolobarja $\mathcal{K}$ s $\mathcal{C}$ in centroid z $Z(\mathcal{K})$. Naj bo c element centra $\mathcal{C}$. Tedaj je $cx = xc$ za vse $x \in \mathcal{K}$. Od tod dobimo, da je tudi

$$c^*x = c^*x^{**} = (x^*c)^* = (cx^*)^* = xc^*\,,$$

kar pomeni, da je c^* tudi element centra $\mathcal{C}$. Zdaj definirajmo

$$C_+(x) = cx, \quad C_-(x) = c^*x$$

za vse $x \in \mathcal{K}$. Zdaj brez težav preverimo, da velja

$$\begin{aligned} C_+(\{xyz\}) =& c(xy^*z) = (cx)y^*z = \{C_+(x)yz\} = xy^*(cz) = \\ =& \{xyC_+(z)\} = x(y^*c)z = x(y^*c^{**})z = x(c^*y)^*z = \{xC_-(y)z\}, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je (C_+, C_-) element centroida trojke $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$. To pomeni, da je mogoče z vsakim elementom centra generirati kak element centroida.

Naj bo zdaj (C_+, C_-) kak element centroida. Videti želimo, da je generiran z elementom $c \in \mathcal{C}$. Lahko kar direktno definiramo $c = C_+(1)$. Iz enakosti

$$C_+(\{11z\}) = \{C_+(1)1z\}$$

dobimo $C_+(z) = cz$ za vsak $z \in \mathcal{K}$. Povsem analogno dobimo, da obstaja tak d, da je $C_-(z) = dz$, kjer je $d = C_-(1)$. Iz enačbe

$$C_+(\{111\}) = \{1C_-(1)1\}$$

dobimo $c = d^*$ oziroma $d = c^*$. Podobno dobimo tudi, da je za vsak $x \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} cx - xc =& c1x - x1c = \{c1x\} - \{x1c\} = \\ =& \{C_+(1)1x\} - \{x1C_+(1)\} = C_+(\{11x\}) - C_+(\{x11\}) = \\ =& C_+(x) - C_+(x) = 0\,, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je c element iz centra kolobarja $\mathcal{K}$. ■

Povsem podobno kot zgoraj lahko bralec sam dokaže naslednjo

Trditev 6. *Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar z enoto. Naj bo $\mathcal{W} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ trojka definirana v uvodu. Naj bo $\mathcal{C}$ center kolobarja $\mathcal{K}$. Tedaj je centroid trojke $\mathcal{W}$ izomorfen $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.*

4. Inverzi

Naj bo $\mathcal{W}$ asociativna trojka. Element $u \in \mathcal{W}$ imenujemo *obrnljiv*, če obstaja tak element v, da so izpolnjene identitete

$$\{uvx\} = \{vux\} = \{xvu\} = \{xuv\} = x$$

za vsak $x \in \mathcal{W}$. Element v tedaj imenujemo *inverz* elementa u. Iz te definicije in asociativnosti se hitro vidi, da je inverz enolično določen (kadar obstaja seveda). Očitno je tudi, da če ima element u inverz, potem ima tudi element v inverz in ta je enak kar elementu u.

Formula za inverz produkta je nekoliko drugačna kot pri kolobarjih. Naj bo $\mathcal{W}$ asociativna trojka in $a, b, c \in \mathcal{W}$ trije obrnljivi elementi. Označimo z a^{-1}, b^{-1} in c^{-1} njihove inverze. Tedaj je element $\{abc\}$ tudi obrnljiv in njegov inverz je dan s formulo $\{abc\}^{-1} = \{a^{-1}b^{-1}c^{-1}\}$. Za ilustracijo preverimo prvo od štirih enakosti. Vzemimo poljuben $x \in \mathcal{W}$ in računajmo:

$$\begin{aligned} \{\{abc\}\{a^{-1}b^{-1}c^{-1}\}x\} =& \{ab\{c\{a^{-1}b^{-1}c^{-1}\}x\}\} = \\ =& \{ab\{cc^{-1}\{b^{-1}a^{-1}x\}\}\} = \\ =& \{ab\{b^{-1}a^{-1}x\}\} = \{\{abb^{-1}\}a^{-1}x\} = \\ =& \{aa^{-1}x\} = x. \end{aligned}$$

Ostale enakosti preverimo podobno.

Trditev 7. *Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar z involucijo in enoto 1. Naj bo $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ trojka, definirana v uvodu. Tedaj je element $u \in \mathcal{K}$ obrnljiv v kolobarju $\mathcal{K}$ natanko tedaj, ko je obrnljiv v trojki $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$.*

Dokaz. (i) Naj bo u obrnljiv v kolobarju $\mathcal{K}$ in naj bo u^{-1} njegov inverz (glede na kolobar). Definirajmo $v = u^{-1*}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \{uvx\} =& uv^*x = uu^{-1**}x = uu^{-1}x = x \\ \{vux\} =& u^{-1*}u^*x = (uu^{-1})^*x = 1^*x = 1x = x\,. \end{aligned}$$

Podobno dobimo, da je tudi $\{xuv\} = \{xvu\} = x$, kar pomeni, da je v inverz elementa u v trojki $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$.
(ii) Naj bo u obrnljiv element v trojki $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ in naj bo v njegov inverz (glede na trojko). Iz enakosti

$$1 = \{uv1\} = uv^* \quad \text{in} \quad 1 = \{1vu\} = v^*u$$

dobimo, da je $v^* = u^{-1}$. ■

Trditev 8. *Naj bo $\mathcal{K}$ kolobar z enoto in naj bo $\mathcal{W} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ trojka, definirana v uvodu. Tedaj je element u obrnljiv v trojki $\mathcal{W}$ natanko tedaj, kadar je u oblike $u = (a, b)$ in sta obe komponenti para obrnljivi v kolobarju $\mathcal{K}$. Tedaj je inverz elementa u oblike (b^{-1}, a^{-1}).*

Dokaz te trditve lahko bralec brez težav izdela sam. Tisti bralci, ki so vajeni matričnega računa, si lahko dokažejo tudi naslednjo

Trditev 9. *Naj bo $\mathcal{M}_{n,m}$ matrična trojka, definirana v uvodu. Če matrike niso kvadratne, potem noben element nima inverza. Če je $n = m$ in so torej matrike kvadratne, potem so v tej trojki obrnljive natanko tiste matrike, ki so obrnljive tudi v običajnem smislu.*

5. Potence

Naj bo $\mathcal{W}$ asociativna trojka. V splošnem ni mogoče definirati operacije, ki bi bila ekvivalentna kvadriranju elementov v kolobarjih, zato pa lahko na očiten način induktivno definiramo vse lihe potence s formulama $x^1 = x$ ter $x^{2n+3} = \{x^{2n+1}xx\}$. Dokazali bomo, da se te potence medsebojno množijo povsem podobno kot potence v kolobarjih.

Trditev 10. *Naj bo $\mathcal{W}$ asociativna trojka ter k, n, m liha naravna števila. Tedaj velja $\{x^k x^n x^m\} = x^{n+k+m}$ za vsak $x \in \mathcal{W}$.*

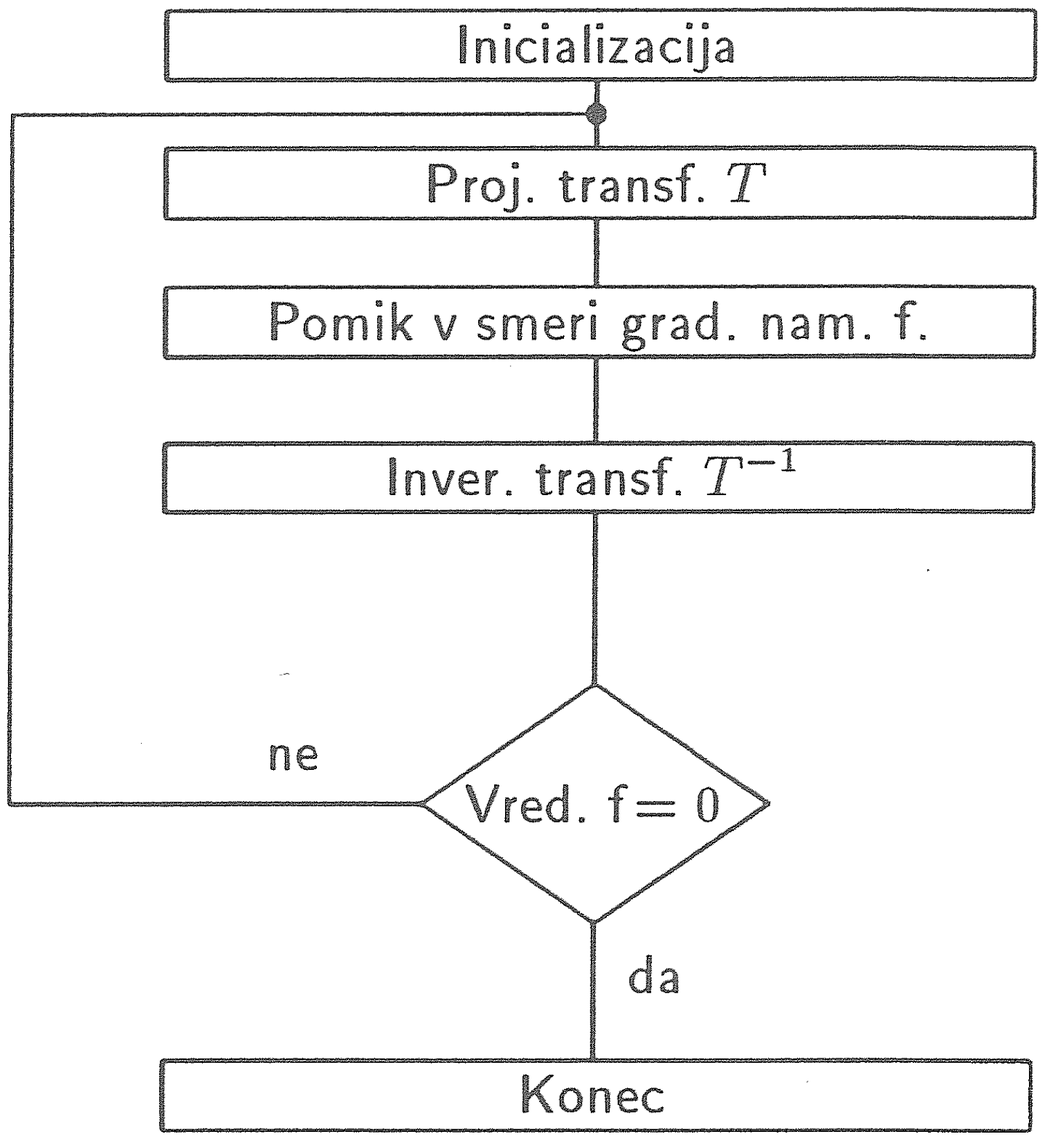
Dokaz. Trditev bomo dokazali z indukcijo na liho naravno število $s = k + n + m \geq 3$. Denimo, da je $s = 3$. Tedaj je $\{xxx\} = x^{1+1+1}$ kar definicija potence v $\mathcal{W}$. Naj bo $s > 3$ in naj trditev velja za vsa liha naravna števila, ki so manjša od števila s. Vsaj eno izmed števil k, n, m je večje od 1.

1. primer: $k > 1$ oziroma $k = j + 2$.

$$\begin{aligned}
\{x^k x^n x^m\} &= \{x^{j+2} x^n x^m\} = \{\{x^j xx\} x^n x^m\} = \\
&= \{x^j x\{xx^n x^m\}\} = \{x^j xx^{n+m+1}\} = \{x^j x\{x^n x^m x\}\} = \\
&= \{x^j\{x^m x^n x\}x\} = \{x^j\{xx^n x^m\}x\} = \{\{x^j x^m x^n\}xx\} = \\
&= \{x^{j+n+m} xx\} = x^{j+n+m+2} = x^{k+n+m}.
\end{aligned}$$

Dodamo naj še tole: V prvi iteraciji uporabimo kot tekočo rešitev že vnaprej poznano rešitev x_0; iteracije seveda izvajamo toliko časa, dokler ne dobimo dovolj majhne vrednosti namenske funkcije.

Na sliki 3 je podan diagram poteka računalniškega programa za izračun linearnega programa po Karmarkarjevem algoritmu.



Slika 3. Diagram poteka Karmarkarjevega algoritma

Polinomska časovna zahtevnost algoritma

Kot smo že omenili, ima Karmarkarjev algoritem glede časovne zahtevnosti prednost pred metodo simpleksov, saj je mogoče dokazati, da je polinomsko časovno zahteven.

Karmarkar je namreč dokazal, da za poljubno naravno število $q \in \mathbb{N}$ pade namenska funkcija $c^T x$ pod 2^{-q} v največ $\frac{n}{\delta}(q + \ln(n))$ iteracijah, kjer je n dimenzija rešitve linearnega programa x, δ pa neka konstanta [6]. Dokaz je precej obsežen; sestoji iz petih izrekov, od katerih navajamo dva najvažnejša, po Karmarkarjevem označevanju najprej drugega, nato prvega. Ker namenska funkcija $c^T x$ v teku algoritma ni vedno linearna, uporabimo za dokazovanje takoimenovano potenčno funkcijo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{c^T x}{x_i}.$$

Izrek 4.1 (Karmarkar, Izrek 2) [6]. *Naj bo $x^{(k)}$ zaporedje točk, ki jih algoritem generira. Potem za vsako iteracijo k velja:*

$$ali\ c^T x^{(k+1)} = 0$$

$$ali\ f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \delta,$$

kjer je δ konstanta.

Izrek 4.1 nam torej zagotovi naslednje: v vsaki iteraciji, razen v tisti, kjer se algoritem konča, se vrednost potenčne funkcije zmanjša za neko konstanto.

Glede na definicijo potenčne funkcije iz izreka 4.1 hitro sledi naslednji izrek

Izrek 4.2 (Karmarkar, Izrek 1) [6]. *Za poljuben* $q \in \mathbb{N}$ *najde algoritem rešitev* x *linearnega programa* (2), *za katero velja*

bodisi $c^T x = 0$

bodisi $c^T x / c^T a_0 \leq 2^{-q}$

v m *iteracijah,* $m = O(n(q + \ln(n)))$.

Če upoštevamo, da logaritemska funkcija narašča počasneje od funkcije $f(n) = n$, to praktično pomeni: algoritem najde rešitev problema v številu iteracij, ki je polinomsko odvisno od razsežnosti problema. Tudi če upoštevamo časovno zahtevnost posamezne iteracije, const $\cdot\, n^3$, je zahtevnost celotnega algoritma še vedno polinomska.

Implementacija algoritma

Implementacija Karmarkarjevega algoritma — izbira ustreznih postopkov pri izdelavi računalniškega programa — je še posebej pomembna, saj je od nje dejansko odvisna uspešnost algoritma na praktičnih primerih. Pri izdelavi računalniškega programa je potrebno skrbno izbrati naslednje postopke:

a) Kako pretvoriti linearni program (1) v obliko (2) in pridobiti začetno rešitev x_0.
b) Kako ravnati, kadar minimalna vrednost namenske funkcije ni 0.
c) Katero metodo uporabiti za izračun inverzne matrike

$$(B^{(k)} B^{(k)^T})^{-1}$$

pri projekciji gradienta (5).

Na kratko si oglejmo nekaj možnih postopkov:

a) Pri pretvarjanju linearnega programa (1) v obliko (2) navedimo dva načina. Pri prvem uporabimo posebno transformacijo, ki problem oblike (1) preslika v obliko (2), začetno rešitev x_0 pa pridobimo z reševanjem pomožnega linearnega programa.

Pri drugem načinu dosežemo obliko (2) in začetno rešitev z dodajanjem ustreznega števila umetnih spremenljivk.

Vsak od obeh načinov ima dobre in slabe lastnosti: pri prvem se, na primer, zaradi reševanja pomožnega linearnega programa poveča računalniški čas, pri drugem pa se poveča dimenzija problema. Vendar glede na izsledke, objavljene v raznih publikacijah, lahko rečemo, da se je drugi način v praksi bolje obnesel.

b) V večini praktičnih primerov minimalna vrednost namenske funkcije ni 0, kot zahteva Karmarkarjev algoritem. V takih primerih je seveda dovolj,

KRANJC T., Čopič M., Golli B. (zbrali in uredili), Naloge iz fizike II, 2., razširjena izdaja, DMFA Slovenije, Ljubljana 1991, 72 str. (Zbirka izbranih poglavij iz fizike ; 20 a)

Fizika II je v drugem letniku na Oddelku za fiziko prehodni predmet med klasično fiziko v prvem letniku ter kvantno mehaniko v tretjem in fiziko trdne snovi ter fiziko jedra in osnovnih delcev v četrtem. *Naloge iz fizike II* zajemajo naloge iz tega predmeta, ki so jih večinoma preskusili študenti na pismenih vajah v prejšnjih letih. Po poglavjih so razvrščene takole: Teorija relativnosti (63 nalog), Kvantna fizika (70), Atomi z več elektroni in molekule (40), Osnove kvantne statistike (50), Elektroni v kristalih (50) in Jedra in Delci (45). Nalogam sledijo dodatki: Osnovne fizikalne konstante, Nekaj matematičnih formul, Elektronske konfiguracije, spektroskopske oznake in ionizacijske energije atomov v osnovnem stanju, Nekaj podatkov o dvoatomnih molekulah, Fermijeva energija za nekatere kovine, Širina energijske špranje in gibljivost elektronov in vrzeli za nekatere polprevodnike ter Preglednica izotopov in Preglednica nekaterih osnovnih delcev. Nazadnje so navedene še rešitve nalog.

Novo izdajo je pripravil Tomaž Kranjc po prejšnji izdaji Martina Čopiča in Bojana Gollija. Izločil je dvomljive naloge in dodal nekaj novih, od katerih so maloštevilne zahtevnejše posebej zaznamovane. Pomembna novost so rešitve nalog na koncu knjige. Z njimi bodo študenti po samostojnem reševanju nalog lahko preverili svoje izide. Poti do izida rešitve ne nakažejo. Pri načinu, da si smejo študenti na pismenih vajah pomagati z učnimi knjigami, je to najbolj smiselna rešitev.

Nova izdaja je stavljena računalniško in je mnogo prikupnejša od stare, natipkane. Najbolj je bodo veseli študenti drugega letnika, ki so že negodovali, ker je stara izdaja pred časom pošla.

Janez Strnad

KRUPKA D., JANYŠKA J., Lectures on Differential Invariants, Univerzita J. E. Purkyně v Brně 1990, 193 str.

Diferencialne invariante je vpeljal že Sophus Lie in jih povezal s teorijo klasičnih invariant, ki se je v tistem času živahno razvijala. Vendar pa je razvoj teorije invariant proti koncu prejšnjega stoletja zamrl in tako so se tudi diferencialne invariante, ob sicer silovitemu razvoju teorije Liejevih grup, v začetku tega stoletja skoraj izgubile. V zadnjih nekaj desetletjih se je spet obudilo zanimanje zanje, za invariante nasploh in za njim sorodne nelinearne invariantne operatorje, predvsem zaradi njihove uporabe v algebraični geometriji in teoretični fiziki (na primer v povezavi z umeritvenimi grupami). Knjiga D. Krupke in J. Janyške je geometrijski pristop k diferencialnim invariantam, saj jih predstavi in obravnava predvsem kot geometrijske objekte.

Knjiga je razdeljena v dva dela. Prvi del, ki ga je napisal prvi avtor, se začne z uvodnim poglavjem o Liejevih grupah in nadaljuje s postopno vpeljavo geometrijskih struktur, ki vodijo do pojma diferencialne invariante in njene posplošitve — invariantne operacije. Diferencialna invarianta je pravzaprav ekvivariantna preslikava med mnogoterostma z delovanjem diferencialne grupe, to je grupe brizgov (ali poganjkov, kot bi tudi smiselno prevedli francoski izraz „jet" v slovenščino) lokalnih difeomorfizmov prostora $\mathbb{R}^n$ iz izhodišča v izhodišče. Po drugi strani lahko vsako diferencialno invarianto predstavimo kot naravno transformacijo med funktorji iz kategorije gladkih n-dimenzionalnih mnogoterosti v kategorijo določenih naravnih svežnjev nad mnogoterostmi. Tako lahko nanje gledamo kot na geometrijske objekte in jih neposredno povežemo na primer z zunanjim odvodom, Liejevim oklepajem ali Levi-Civitajevo povezavo.

Eden osnovnih problemov teorije diferencialnih invariant je njihova klasifikacija. V drugem delu knjige, ki ga je napisal drugi avtor, so zbrani primeri, ki kažejo, kako lahko metode za klasifikacijo diferencialnih invariant uporabimo pri naravnih diferencialnih operatorjih in naravnih konstrukcijah s tenzorji. Tako je dokazana med drugim enoličnost zunanjega odvoda, Liejevega oklepaja in Levi-Civitajeve povezave.

Čeprav predstavljena snov še zdaleč ni lahka, je knjiga napisana dovolj sistematično, da je dostopna in zanimiva tudi bralcem, ki niso strokovnjaki z obravnavanega področja.

Neža Mramor

DEVIDÉ V., Matematička čitanka, Školska knjiga, Zagreb 1991, 295 str.

Znani zagrebški matematik Vladimir Devidé je v tej knjigi objavil svoje izbrane članke, eseje in govore ter jih ponudil v branje in razmislek srednješolcem in njihovim profesorjem. S to knjigo želi avtor bralcu približati in pojasniti bistvo matematike, njeno širino in lepoto.

Čitanka obsega okoli 30 člankov in esejev, razdeljenih v tri poglavja. V poglavju *Matematični problemi in metode* je na nekaj primerih iz elementarne matematike prikazano, s kako raznoterimi (in na pogled nič matematičnimi) problemi se lahko spopada matematik. Poudarjeno je, da matematično nalogo lahko rešimo z uporabo različnega matematičnega orodja, na različne načine, ki so lahko bolj ali manj izvirni, duhoviti, dopadljivi. Drugo poglavje *Matematične strukture in teorija* obsega razlago osnov teorije množic, matematične logike in algebrskih struktur. V zadnjem poglavju *Kaj je in kašna je matematika* so zbrani eseji o osnovah matematike, o smereh sodobne matematike itd. Za mnoge bralce bo to najtežji, a najzanimivejši del knjige. Tu zvemo odgovore na številna vprašanja, ki begajo tudi mlade razmišljujoče matematike: Ali so matematične resnice večne? Ali je matematika v bistvu le logika? Ali je ena sama matematika? Ali je v matematiki vsaka (smiselna) trditev bodisi pravilna ali nepravilna? Ali so dokazi z matematično indukcijo za vse matematike neoporečni?

2. primer: $n > 1$ oziroma $n = j + 2$.

$$\begin{aligned}\{x^k x^n x^m\} &= \{x^k x^{j+2} x^m\} = \{x^k \{x^j xx\} x^m\} = \\ &= \{x^k x \{x x^j x^m\}\} = \{x^k x \{x^j x^m x\}\} = \{x^k \{x^m x^j x\} x\} = \\ &= \{x^k \{x x^j x^m\} x\} = \{\{x^k x^m x^j\} xx\} = \{x^{k+m+j} xx\} = \\ &= x^{k+m+j+2} = x^{k+n+m}\,.\end{aligned}$$

3. primer: $m > 1$ oziroma $m = j + 2$.

$$\begin{aligned}\{x^k x^n x^m\} &= \{x^k x^n x^{j+2}\} = \{x^k x^n \{x^j xx\}\} = \\ &= \{\{x^k x^n x^j\} xx\} = \{x^{k+n+j} xx\} = x^{k+n+j+2} = x^{k+n+m}\,.\end{aligned}$$ ■

6. Homotopi in homomorfizmi

Naj bo $\mathcal{W}$ asociativna trojka in naj bo $u \in \mathcal{W}$. Na množici $\mathcal{W}$ definiramo binarni produkt s predpisom $x \circ y = \{xuy\}$. Tako dobljen kolobar, ki je vedno asociativen, označimo z $\mathcal{W}^{(u)}$ in ga imenujemo *u-homotop* trojke $\mathcal{W}$. Brez težav se prepričamo, da je u-homotop kolobar z enoto natanko tedaj, ko ima element u inverz v trojki $\mathcal{W}$.

Par preslikav $(H_+, H_-) : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ med dvema trojkama $\mathcal{W}$ in $\mathcal{V}$ imenujemo *homomorfizemski par*, če zadošča pogojem

$$H_\sigma(\{xyz\}) = \{H_\sigma(x) H_{-\sigma}(y) H_\sigma(z)\}$$

za oba $\sigma \in \{+, -\}$ ter vse $x, y, z \in \mathcal{W}$. Če je $H_+ = H_- = H$, potem imenujemo H *homomorfizem* med trojkama $\mathcal{W}$ in $\mathcal{V}$. Homomorfizemski par se imenuje *izomorfizemski par*, če sta obe preslikavi H_+ in H_- obrnljivi.

Vsak homomorfizemski par na naraven način inducira dva homomorfizma kolobarjev med homotopoma $\mathcal{W}^{(u)}$ in $\mathcal{V}^{(H_-(u))}$ ter med homotopoma $\mathcal{W}^{(u)}$ in $\mathcal{V}^{(H_+(u))}$.

Naj bosta $\mathcal{K}$ in $\mathcal{R}$ asociativna kolobarja z involucijo. Naj bo $H : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{R}$ homomorfizem kolobarjev. Definirajmo $H_+ = H$ in $H_-(x) = H(x^*)^*$. Tedaj je par (H_+, H_-) homomorfizemski par med trojkama $(\mathcal{K}, \{\ldots\})$ in $(\mathcal{R}, \{\ldots\})$. Obratno ni nujno res. Obstajajo kolobarji in homomorfizemski pari trojk, ki niso porojeni s homomorfizmi kolobarjev.

Naj bosta $\mathcal{K}$ in $\mathcal{R}$ asociativna kolobarja. Označimo z $\mathcal{W} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ in $\mathcal{V} = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ trojki, generirani s tema kolobarjema. Naj bosta H_1 in H_2 dva homomorfizma iz kolobarja $\mathcal{K}$ v kolobar $\mathcal{R}$. Definirajmo preslikavi $H_+, H_- : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ s predpisoma

$$H_+(k_1, k_2) = (H_1(k_1), H_2(k_2))$$

ter

$$H_-(k_1, k_2) = (H_2(k_1), H_1(k_2))\,.$$

Z enostavnim računom se prepričamo, da je (H_+, H_-) homomorfizemski par med obema trojkama.

Naj bo $\mathcal{W}$ matrična trojka $\mathcal{M}_{n,m}$ in naj bo A neka obrnljiva $n \times n$ matrika ter B neka obrnljiva $m \times m$ matrika. Definirajmo

$$H_+(X) = AXB \quad \text{in} \quad H_-(X) = (A^T)^{-1} X (B^T)^{-1} .$$

Hitro se prepričamo, da je (H_+, H_-) celo avtomorfizemski par trojke $\mathcal{W}$. Če je $n = m$, potem je ta zgled tudi primer za homomorfizemski par, ki ni porojen s homomorfizmom kolobarjev, če $B \neq A^{-1}$.

LITERATURA

[1] W. G. Lister, *Ternary rings,* Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971) 37–55.
[2] O. Loos, *Assoziative tripelsysteme,* Manuscripta Math. **7** (1972) 103–112.
[3] O. Loos, *Alternative tripelsysteme,* Math. Ann. **198** (1972) 205–238.

NOVE KNJIGE

PEIERLS R., More surprises in theoretical physics, Princeton series in physics, Princeton University Press, Princeton 1991, 106 str.

Pred dvanajstimi leti je Rudolf Peierls pri isti založbi izdal *Presenečenja v teoretični fiziki.* Tako je naslovil zbirko pet do šest strani dolgih sestavkov o vprašanjih, pri katerih se da spotakniti. Pisec je opozoril na težavo in utemeljil pravi odgovor. Vprašanja so segala od kvantne mehanike do statistične mehanike. Ugoden sprejem knjižice je vzpodbudil sira Rudolfa k pisanju nadaljevanja. (Medtem je leta 1985 izdal še spomine *Birds of Passage, Recollections of a Physicist.*) V nadaljevanju z naslovom *Še več presenečenj v teoretični fiziki* je uporabil enak prijem. Zopet je zajel vprašanja, ki imajo drugačen ali preprostejši ali bolj zapleten odgovor, kot bi pričakovali. Zopet segajo vprašanja od kvantne mehanike (4 vprašanja), prek fizike trdnin (7), statistične mehanike (2), transportnih problemov (4), jedrske fizike (6) do teorije polja (2) in hidrodinamike (2). Vprašanja so preprosta in zanimiva in odgovori s komentarjem kratki in pregledni. Pisec je sam ali skupaj s sodelavci nekdaj pomagal razčistiti precej teh vprašanj, nekatera pa je vključil v knjigo, ker so mu bila sicer pri srcu.

Za drugo knjigo presenečenj lahko zapišemo, kot so zapisali za prvo, da „je to ena izmed zelo redkih knjig iz teoretične fizike, ki jih je mogoče prebrati v postelji". Na eni strani potrebno znanje komaj kje preseže predavanja na dodiplomskem študiju fizike, na drugi strani pa je potrebna določena stopnja zrelosti, da bi zares uživali nad presenečenji.

Janez Strnad

KDO SE BOJI VRTINČNIH TOKOV?

GORAZD PLANINŠIČ

PACS 41.10.Fs

Magnetno polje vrtinčnih tokov v tanki prevodni plošči lahko določimo z metodo slik na osnovi Maxwellovih enačb. Iz enačb izračunamo časovno zamiranje vrtinčnih tokov in izpeljemo pogoj za senčenje izvira izmenične magnetne motnje. Preprost poskus potrdi pogoj za senčenje.

WHO IS AFRAID OF EDDY CURRENTS?

Eddy curents in a thin conducting plate produce a magnetic field which can be determined by the image method based on Maxwell's equations. Time evolution of eddy currents and screening condition for given source of time dependent magnetic field are derived from eddy currents equation. A simple experiment which confirms the screening condition is described.

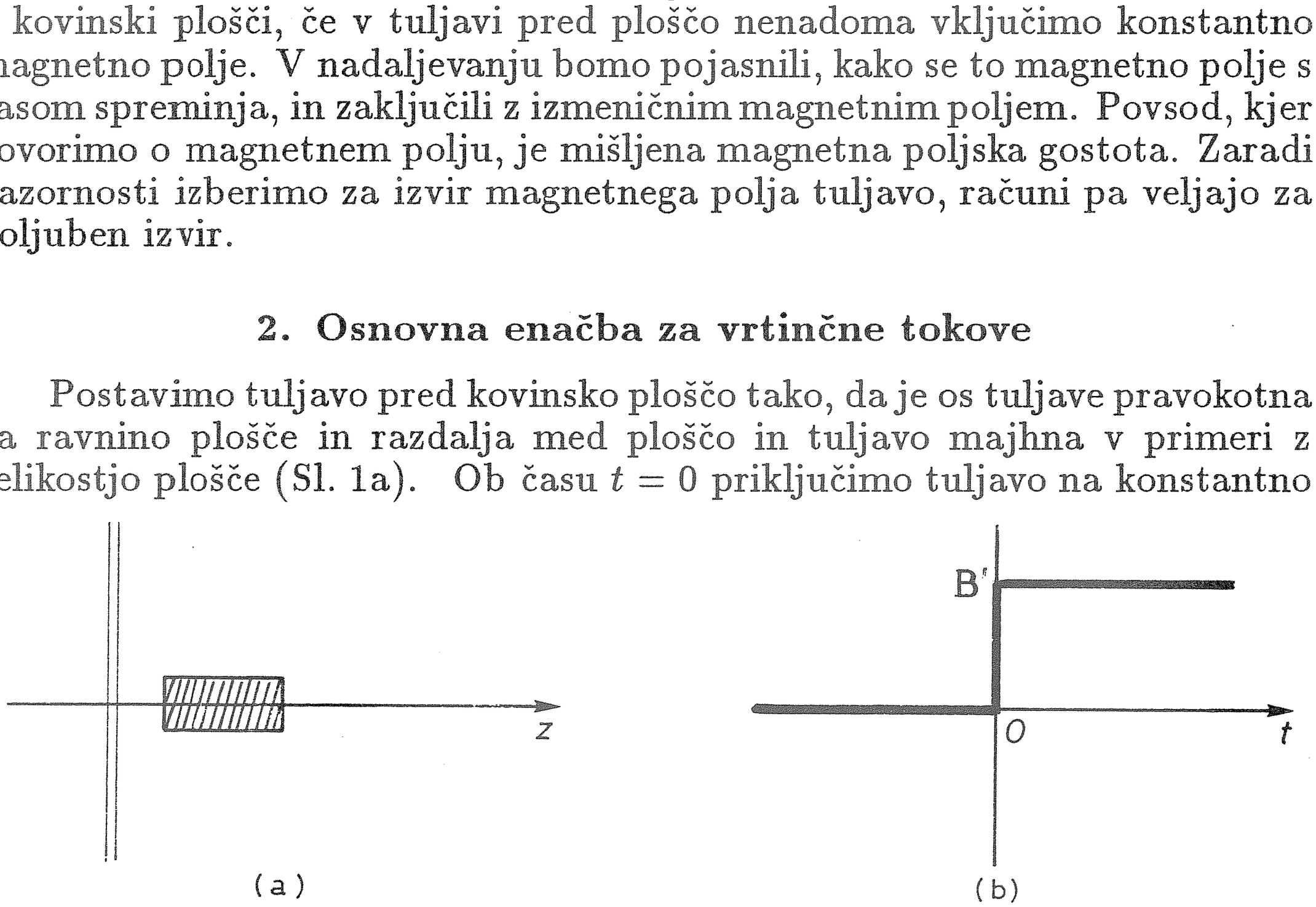
1. Uvod

Pri delu z magnetnim poljem pogosto srečamo vrtinčne tokove, malokdaj pa se spoprimemo z njimi računsko. Celo zahtevnejši učbeniki elektrodinamike se vprašanja le bežno dotaknejo. Pred kratkim objavljeni članek [1] je nakazal bližnjico. Prehodimo pot za preprost primer, zahtevnejši bralec se bo lahko po nevarnejših poteh odpravil sam [2].

Najprej bomo pokazali, kakšno magnetno polje ustvarijo vrtinčni tokovi v kovinski plošči, če v tuljavi pred ploščo nenadoma vključimo konstantno magnetno polje. V nadaljevanju bomo pojasnili, kako se to magnetno polje s časom spreminja, in zaključili z izmeničnim magnetnim poljem. Povsod, kjer govorimo o magnetnem polju, je mišljena magnetna poljska gostota. Zaradi nazornosti izberimo za izvir magnetnega polja tuljavo, računi pa veljajo za poljuben izvir.

2. Osnovna enačba za vrtinčne tokove

Postavimo tuljavo pred kovinsko ploščo tako, da je os tuljave pravokotna na ravnino plošče in razdalja med ploščo in tuljavo majhna v primeri z velikostjo plošče (Sl. 1a). Ob času $t = 0$ priključimo tuljavo na konstantno



Slika 1. Tuljava in velika prevodna plošča (a) ter časovno spreminjanje magnetnega polja tuljave (b).

napetost. Prehodni pojavi v tuljavi nas ne zanimajo, zato privzemimo, da magnetno polje, ki ga ustvari tuljava, nenadoma naraste na $\mathbf{B}'$ (Sl. 1b).

Sprememba magnetnega polja inducira napetost, ki požene vrtinčne tokove v plošči. Inducirano napetost povezuje s spremembo magnetnega polja Faradayev zakon

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d(\mathbf{B} + \mathbf{B}')}{dt}. \tag{1}$$

$\mathbf{B}'$ je polje tuljave in $\mathbf{B}$ polje vrtinčnih tokov. Računi tečejo lepše, če namesto gostote magnetnega polja računamo z magnetnim vektorskim potencialom $\mathbf{A}$. Količini povezuje enačba

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2}$$

Da so računi preglednejši, zahtevamo še $\nabla \mathbf{A} = 0$. S tem je pri danem $\mathbf{B}$ vektorski potencial natanko določen. Krajevna odvisnost vektorskega potenciala mora zadoščati Maxwellovim enačbam. Če združimo Ampèrov zakon

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} \tag{3}$$

z enačbo (2) in upoštevamo, da je $\nabla \mathbf{A} = 0$, dobimo diferencialno enačbo [3]

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mu_0 \mathbf{j}, \tag{4}$$

iz katere lahko pri danih tokovih in robnih pogojih izračunamo vektorski potencial (μ je permeabilnost).

Iz (1) in (2) sledi za tuljavo

$$\mathbf{E} = -\frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{A}')}{dt} \tag{5}$$

in od tod dobimo z Ohmovim zakonom $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$:

$$-\frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{A}')}{dt} = \rho \mathbf{j}\,. \tag{6}$$

Tu je ρ specifični upor plošče in $\mathbf{j}$ gostota vrtinčnih tokov. Iz geometrije problema sklepamo, da je komponenta toka j_z zanemarljiva v primeri s komponentama j_x in j_y — vrtinčni tokovi tečejo pač v ravnini plošče. Gostota magnetnega polja, ki ga ustvarjajo takšni tokovi, ima v plošči prav tako zanemarljivo komponento B_z. Količini povezuje Ampèrov zakon (3), ki ga ob navedenih predpostavkah zapišemo po komponentah

$$j_x \mu\mu_0 = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad j_y \mu\mu_0 = \frac{\partial B_x}{\partial z}. \tag{7}$$

Ker je plošča tanka, lahko odvoda komponent magnetnega polja v smeri koordinate z izrazimo s spremembo magnetnega polja na mejnih ploskvah plošče z debelino d

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} \approx \frac{B_y(d/2) - B_y(-d/2)}{d} = \frac{2B_y}{d}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} \approx -\frac{2B_x}{d}. \tag{8}$$

V (8) smo upoštevali, da sta zaradi simetrije problema tangentni komponenti magnetnega polja vrtinčnih tokov v zrcalnih točkah glede na ravnino ($z = 0$) nasprotno enaki: $\mathbf{B}_t(x, y, z) = -\mathbf{B}_t(x, y, -z)$. Komponenti tokov (7) lahko prek enačb (8) in (2) povežemo s komponentami vektorskega potenciala na mejah plošče[1]

$$j_x = -\frac{2}{\mu\mu_0 d} B_y = -\frac{2}{\mu\mu_0 d} \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad j_y = \frac{2}{\mu\mu_0 d} B_x = -\frac{2}{\mu\mu_0 d} \frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{9}$$

Zapišimo rezultat z vektorji

$$\mathbf{j}_t = -\frac{2}{\mu\mu_0 d} \frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial z}. \tag{10}$$

Indeks t pomeni tangentni vektor (komponenta z je enaka 0). Združimo (6) in (10) in dobimo enačbo, ki povezuje časovno spreminjanje celotnega vektorskega potenciala v plošči s skokom induciranega vektorskega potenciala na mejah plošče

$$\frac{d(\mathbf{A}_t + \mathbf{A}_t')}{dt} = \frac{2\rho}{\mu\mu_0 d} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial z}. \tag{11}$$

Vektorski potencial, ki ga ustvarijo sami vrtinčni tokovi v polprostoru na eni strani plošče, reši Laplaceovo enačbo

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0. \tag{12}$$

To dobimo iz (4), saj v prostoru zunaj plošče ni tokov. Enačbo rešujemo pri pogoju, da je vektorski potencial na površini plošče tak, kot ga določa enačba (11).

3. Metoda slik

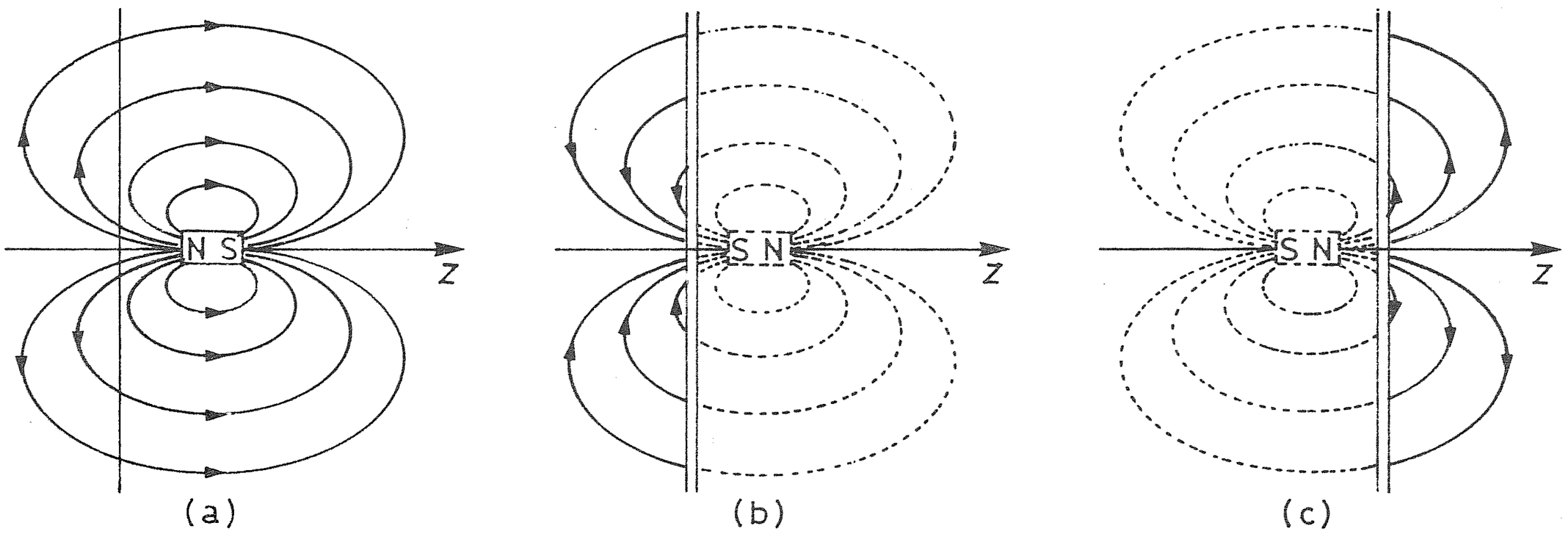
Čeprav nakazana pot vodi do rešitve, pa se po njej le malokdaj zares podamo. Pomudimo se raje ob enačbi (11).

Desna stran enačbe je vedno končna — neskončen odvod vektorskega potenciala bi pomenil neskončno magnetno polje — zato je ob vsakem času končen tudi časovni odvod na levi strani enačbe. Pri trenutni spremembi zunanjega vektorskega potenciala $\mathbf{A}'$ torej iz $\delta t \to 0$ sledi $\delta(\mathbf{A}_t + \mathbf{A}_t') \to 0$.

---

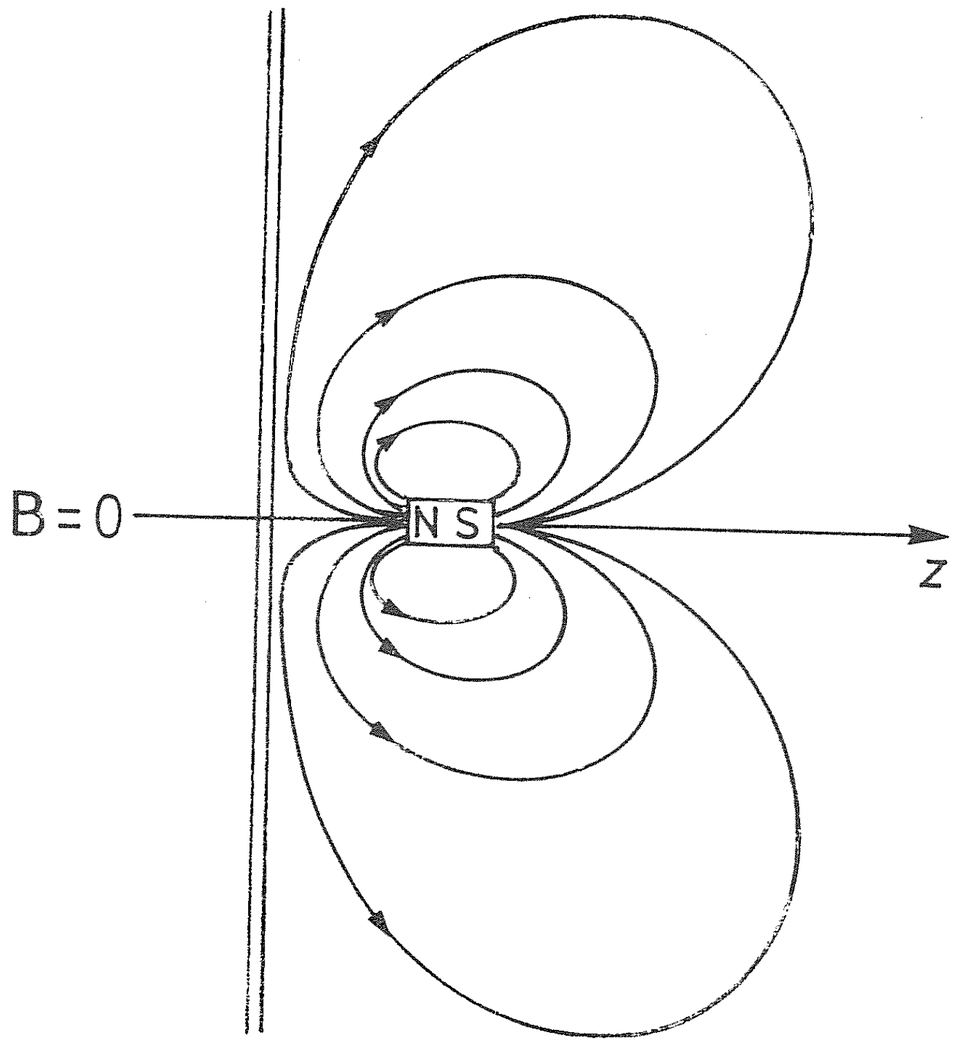
[1] Odvode A_z zanemarimo iz istega razloga, kot smo zanemarili j_z.

To pomeni, da se vrtinčni tokovi v plošči inducirajo tako, da ostane vektorski potencial na mejnih ploskvah nespremenjen. Če je bil v začetku vektorski potencial povsod enak 0, ob času $t = 0$ pa smo vključili zunanji vektorski potencial $\mathbf{A}'$ na pozitivni strani plošče ($z > 0$), bodo vrtinčni tokovi v plošči ustvarili tak vektorski potencial, da bo na mejah plošče nasprotno enak vektorskemu potencialu izvira. Polprostor na negativni strani plošče tako ne zve za dogajanje na nasprotni strani. Vektorski potencial na negativni strani je namreč določen z Laplaceovo enačbo (12) in z robnimi pogoji na plošči, ki se, kot smo ravnokar ugotovili, niso spremenili. Vrtinčni tokovi se torej inducirajo tako, da ščitijo prostor za izvirom pred spremembo magnetnega polja.



Slika 2. Magnetno polje tuljave za $t > 0$ (a), magnetno polje vrtinčnih tokov na negativni (b) in na pozitivni strani plošče (c)

Vzemimo tuljavo. Magnetno polje, ki ga ustvarjajo vrtinčni tokovi na negativni strani plošče, je nasprotno enako polju, ki ga na tem mestu ustvari tuljava. Takšno polje dobimo, če na mesto tuljave postavimo enako tuljavo s tokom v nasprotni smeri. Magnetno polje vrtinčnih tokov na negativni strani plošče je torej enako polju obrnjene tuljave na pozitivni strani plošče (Sl. 2b). Kakšno polje ustvarijo vrtinčni tokovi na pozitivni strani plošče? Simetrija problema narekuje, da je magnetno polje vrtinčnih tokov enako na obeh straneh plošče. Spremeni se le predznak tangentne komponente magnetnega polja, podobno kot pri magnetnem polju krožne tokovne zanke. Magnetno polje *vrtinčnih tokov* na pozitivni strani plošče je enako polju, ki ga ustvari zrcalna slika tuljave na negativni strani plošče (Sl. 2c). Končno magnetno polje je vsota magnetnega polja vrtinčnih tokov in tuljave (Sl. 3). Magnetno polje vrtinčnih tokov popači magnetno polje tuljave.



Slika 3. Končno magnetno polje

4. Časovno spreminjanje vrtinčnih tokov

Z metodo slik smo določili magnetno polje vrtinčnih tokov, ki so posledica trenutne spremembe magnetnega polja v izviru. Končno magnetno polje (Sl. 3) ustreza razmeram takoj po spremembi zunanjega polja. Če za tem magnetno polje izvira ostane konstantno, vrtinčni tokovi s časom zamrejo; po določenem času preostane le magnetno polje izvira, kot da prevodne plošče sploh ne bi bilo. Kako hitro se to zgodi, prav tako izda enačba (11).

Časovni potek magnetnega polja izvira naj bo še vedno skokovit (Sl. 1). V času $t > 0$ je vektorski potencial izvira $\mathbf{A}'$ konstanten in ga zato lahko v enačbi (11) izpustimo. Enačba za vektorski potencial vrtinčnih tokov na površini plošče se tako glasi, če izpustimo indeks t

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{2\rho}{\mu\mu_0 d}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,. \tag{13}$$

Kakšen je vektorski potencial vrtinčnih tokov ob času $t = 0$, smo ugotovili v prejšnjem odstavku. Če zaznamujemo vektorski potencial izvira z $\mathbf{A}' = \mathbf{f}(x, y, z)$, velja za vektorski potencial vrtinčnih tokov

$$\mathbf{A}_{t=0} = -\mathbf{f}(x, y, z);\, z < 0, \quad \mathbf{A}_{t=0} = -\mathbf{f}(x, y, -z);\, z > 0 \tag{14}$$

ali zapisano v eni sapi

$$\mathbf{A}_{t=0} = -\mathbf{f}(x, y, -|z|). \tag{15}$$

V enačbi (13) nastopa na desni strani odvod funkcije $\mathbf{f}$, v kateri so lahko koordinate x, y in z tudi funkcije časa. Pravilo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{16}$$

pripelje od (13) do

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho}{\mu\mu_0 d}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}, \tag{17}$$

integracija pa da

$$z = \frac{2\rho}{\mu\mu_0 d}t + z_0. \tag{18}$$

S časom se torej spreminja le komponenta z vektorskega potenciala. Časovno spreminjanje vektorskega potenciala vrtinčnih tokov podaja enačba

$$\mathbf{A} = -\mathbf{f}(x, y, -|z| - \frac{2\rho}{\mu\mu_0 d}t). \tag{19}$$

Konstanto z_0 smo določili z začetnim pogojem (15), predznak pa tako, da potencial s časom zamira.

Iz enačbe (19) izvemo, da magnetno polje vrtinčnih tokov s časom pojema tako, kot bi se sliki navideznih tuljav (Sl. 2) oddaljevali od plošče s konstantno hitrostjo

$$v = \frac{2\rho}{\mu\mu_0 d}. \tag{20}$$

Časovno spreminjanje celotnega magnetnega polja je vsota ugašajočega polja vrtinčnih tokov in polja tuljave, ki se s časom ne spreminja. Po dolgem času, ko navidezni tuljavi izgineta v $z \to \pm\infty$, ostane samo nemoteno magnetno polje tuljave.

5. Izmenično magnetno polje

Najprej poiskusimo oceniti, koliko časa prevodna plošča senči magnetno polje izvira, če polje skokovito vključimo. Pri tem privzemimo, da magnetno polje izvira pada z oddaljenostjo, ker mislimo na dipolno magnetno polje. Zaznamujmo s h oddaljenost izvira magnetnega polja od plošče. Magnetno polje izvira začne prodirati skozi ploščo že tedaj, ko sta navidezna izvira, ki se oddaljujeta od plošče, prepotovala del razdalje h. Plošča prepušča znaten del magnetnega polja po času t_0

$$t_0 \approx \frac{\mu\mu_0 dh}{2\rho}. \tag{21}$$

Iz enačbe je razvidno, da mora dober ščit magnetnih motenj imeti veliko permeabilnost in majhen upor.

Izmenično motnjo lahko sestavimo iz številnih stopničastih motenj. Pogoj (21) prevedemo v takegale: če se v enem nihajnem času navidezni sliki nista premaknili za več kot del h, bo prostor za ploščo senčen pred izmeničnim magnetnim poljem, če je frekvenca magnetnega polja

$$\nu \gg \frac{2\rho}{\mu\mu_0 dh}. \tag{22}$$

Pri izpolnjenem pogoju (22) magnetno polje za ploščo praktično izgine, na strani izvira pa je oblika polja enaka kot v hipu nenadne spremembe (Sl. 3) in niha s frekvenco izvira.

Pri senčenju elektromagnetnega valovanja običajno zahtevamo, da mora biti debelina ščita nekajkrat večja od vdorne globine

$$d \gg \delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu\mu_0\pi\nu}}. \tag{23}$$

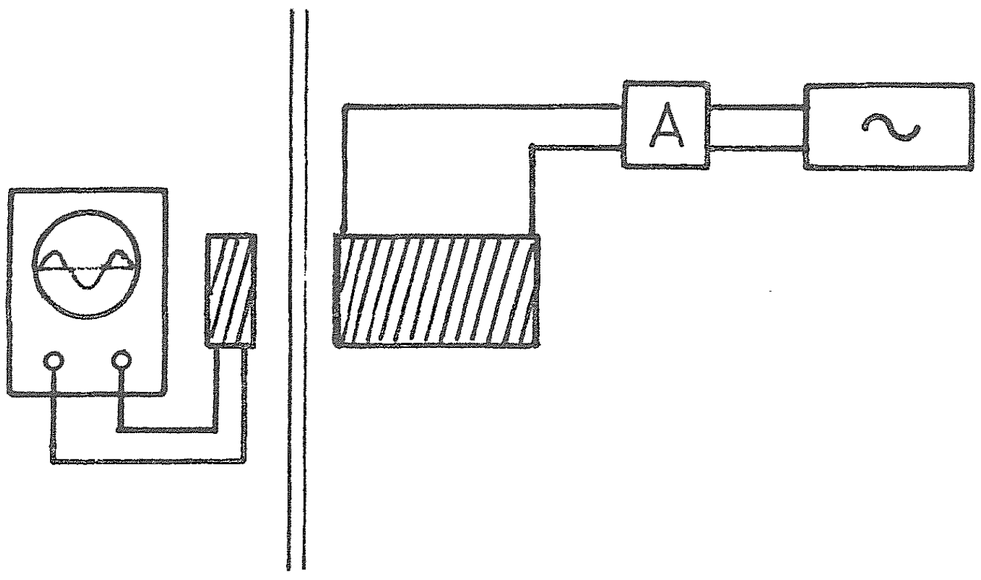
Da bomo pogoja (22) in (23) laže primerjali, izrazimo frekvenco v prvem pogoju z ustrezno vdorno globino:

$$d \gg \frac{2\pi\delta^2}{h}. \tag{24}$$

Izvir izmeničnega magnetnega polja lahko zasenčimo s ščitom, ki je veliko tanjši od ustrezne vdorne globine, saj je običajno $h \gg \delta$. Trditev na videz izpodbija pravilo (23). Toda ne pozabimo, da smo v izpeljavi pogoja (22) privzeli, da magnetno polje izvira pojema z oddaljenostjo od izvira. Ocena (23) velja za nihajoče homogeno magnetno polje, pri katerem amplituda prepuščenega magnetnega polja pojema eksponentno z debelino plošče — s karakteristično razdaljo δ. V prvem primeru je magnetno polje za ploščo zasenčeno z vrtinčnimi tokovi, v drugem primeru pa je prepustnost plošče tako majhna, da prepuščeni del magnetnega polja zanemarimo.

6. Poskus

Za konec opišimo še preprost poskus, s katerim smo preverili pogoj (22). Merili smo amplitudo magnetnega polja, ki ga prepušča 0.02 mm debela bakrena plošča. Za oddajnik smo uporabili majhno tuljavico z dolžino in premerom 1 cm, z 10 ovoji bakrene žice z debelino 0.5 mm in jo priključili preko ojačevalnika na generator sinusne napetosti. Kot sprejemnik smo uporabili podobno tuljavico s tremi ovoji. Tuljavici smo pritrdili tako, da sta se osi pokrivali, bakrena plošča pa je bila stisnjena med tuljavici (Sl. 4).



Slika 4. Shema poskusa

Tabela 1. Izmerjena prepustnost bakrenega ščita z debelino 0.02 mm in ustrezna prepustnost izračunana iz eksponentnega pojemanja. Vdorna globina v bakru meri 0.02 mm pri frekvenci 11 MHz.

ν[MHz]	$(U_s/U_0)_{merjeno}$	$e^{-d/\delta}$
0.1	0.273	0.91
0.5	0.069	0.81
1.0	0.032	0.74
1.6	0.029	0.68
2.2	0.016	0.67
3.0	0.012	0.61
3.5	0.011	0.57
4.0	0.010	0.54

Merili smo frekvenčno odvisnost sprejetega signala z bakrenim ščitom in brez njega. Prepustnost, to je kvocient amplitud v odvisnosti od frekvence, podaja preglednica.

Iz nje razberemo, da v danem primeru vrtinčni tokovi prispevajo k senčenju znatno več kot oslabitev zaradi debeline ščita.

LITERATURA

[1] W. M. Saslow, *How a superconductor supports a magnet, how magnetically „soft" iron attracts a magnet, and eddy currents for the uninitiated,* Amer. J. Phys. **59** (1991) 16–25.

[2] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity,* McGraw-Hill, New York 1950.

[3] P. Prelovšek, I. Kuščer, *Zbirka formul za vektorje in tenzorje,* DMFA Slovenija, Ljubljana 1982.

IGRE NARAVE

1. SIPANJI TERMIČNIH NEVTRONOV NA JEDRU IN NA NAMAGNETENEM ATOMU STA ISTE VELIKOSTNE STOPNJE

MITJA ROSINA

PACS 25.40 Dn

V Bornovem približku je sipalna amplituda sorazmerna z volumskim integralom potenciala. Podobnost obeh amplitud lahko razložimo s tem, da je jedrski potencial sicer za petnajst velikostnih stopenj močnejši od „magnetnega", vendar je omejen na petnajst stopenj manjši volumen.

SOME TRICKS OF NATURE

1. SCATTERING OF THERMAL NEUTRONS ON A NUCLEUS AND ON A MAGNETIZED ATOM ARE OF THE SAME ORDER OF MAGNITUDE

In the Born approximation, the scattering amplitude is proportional to the volume integral of the potential. The similarity of both amplitudes can be explained by noting that the nuclear potential is fifteen orders of magnitude stronger than the „magnetic" potential, but its volume range is fifteen orders of magnitude smaller.

Predgovor

Pogosto nas v naravi preseneti, da se dva prispevka skoraj natanko pokrajšata ali da sta dva navidez različna pojava skoraj natanko enako „velika". Marsikdaj najdemo za to razlago, na primer simetrijo, ohranitveni zakon, povratno zanko. Včasih pa za to ni prav nobenega razloga in se to zgodi čisto slučajno. Narava se z nami poigra in nam ponudi kako romantično izkušnjo ali vtis. O takih igrah narave, ki so me zabavale, bom govoril v nadaljevanki v zaporednih številkah Obzornika.

Navdih za tak zapis sem dobil od Sira Rudolfa Peierlsa, ki je svoja navdušujoča presenečenja zapisal v knjižicah *Surprises in Theoretical Physics* [1] ter *More Surprises in Theoretical Physics* [2]. Tam govori o primerih, ki so presenetili kot paradoksi, pa so jih potem razložili z znanimi zakoni ali prijemi (mnoge R. Peierls sam). Kot paradoksi so se zdeli zaradi kratkovidnega gledanja ali slabe analogije, toda s preudarkom bi bili lahko že na samem začetku predvideli pravilen rezultat. Moji zgledi so mnogo skromnejši, presenetljiv rezultat ni posledica zvite, toda neizprosne logike, temveč je igra narave, da si včasih privošči za dramatične efekte goli slučaj.

Nadaljevanka ima tudi namen, vzpodbuditi bralca, da bi še sam iskal pri svojem delu zglede, kjer se da slikovit efekt preprosto razložiti. Neprekosljiv mojster za to je Victor Weisskopf, ki je dobro leto objavljal rubriko *Search for Simplicity* [3].

Igra narave

Meritve pokažejo, da prispeva k sipalni amplitudi za sipanje počasnega nevtrona na atomu železa železovo jedro 9,7 fm, atomsko magnetno polje

pa $\pm 1,3$ fm [4]. Pri slednjem je predznak odvisen od polarizacije nevtrona, pozitiven predznak ustreza lastni vrednosti $+\frac{1}{2}$ za komponento nevtronovega spina v smeri magnetnega polja. Interferenca med jedrsko in atomsko sipalno amplitudo je torej lahko konstruktivna ali destruktivna in jo izkoriščamo za polarizacijo nevtronskega curka. Namagneteno železo namreč bolje prepušča tiste nevtrone, ki se sipljejo z destruktivno interferenco in imajo torej manjši sipalnega presek. Še lepše ločimo obe polarizaciji, če vpada nevtronski curek zelo poševno na ploskev namagnetenega železa, saj je kot totalnega odboja zaradi različnih sipalnih amplitud različen („Nicolova prizma").

Preseneti nas ista velikostna stopnja obeh sipalnih amplitud. Pojava spadata v različni nadstropji narave, jedrsko in atomsko nadstropje, v katerih se vrednosti fizikalnih količin običajno razlikujejo za mnogo velikostnih stopenj. Vprašamo se, kakšen mehanizem se skriva za podobnostjo sipalnih amplitud.

Klasična razlaga

Totalni odboj lahko razložimo skoraj klasično, tako da bodo igro narave uživali tudi tisti bralci, ki niso vajeni kvantne mehanike in Bornovega približka. Edina bistvena kvantna začimba je spoznanje, da nevtron ni ostro lokaliziran, $\Delta x \sim \hbar/\Delta p$. Če izberemo dovolj majhno gibalno količino nevtrona ($p \ll \hbar/A$, kjer je A rob kristalne celice), je nevtron razmazan preko več kristalnih celic ($\Delta x \gg A$) in čuti le povprečni potencial $\bar{V} = \int V(\mathbf{r})d^3r/A^3$. (Integral gre preko ene celice.)

Do totalnega odboja pride na potencialnem hribu, če vzdolžna komponenta gibalne količine ne zadošča za premagovanje hriba. Prečna komponenta se namreč ohranja in nič ne pomaga pri plezanju. Gibalna količina na prostem znaša $p_o = \sqrt{2mE}$, v snovi pa $p = \sqrt{2m(E - \bar{V})}$. Iz ohranitve prečne komponente gibalne količine dobimo lomni zakon

$$\sqrt{2mE}\sin\alpha = \sqrt{2m(E-\bar{V})}\sin\beta$$

ter mejni kot totalnega odboja za $\beta = 90^o$:

$$\sin\alpha_{\mathrm{tot}} = \sqrt{2m(E-\bar{V})}/\sqrt{2mE} \simeq 1 - \bar{V}/2E\,.$$

Kot vidimo, je za kot totalnega odboja pomemben povprečni potencial in ne podrobnosti potenciala, če so le nevtroni dovolj počasni. K povprečnemu potencialu prispevata jedrski potencial V_j in „magnetni potencial" $V_m = -\mu\mathbf{B}$, kjer je $\mu = -60,3 \cdot 10^{-15}$ MeV/T magnetni moment nevtrona. Pa ocenimo volumski integral obeh potencialov preko enega atoma (ene kristalne celice).

Efektivni jedrski potencial je tipično velikostne stopnje 10 MeV in deluje znotraj jedra železa z radijem $R = 4,6$ fm. (Naj nas ne preseneti, da kaže

pri železu totalni odboj na to, da imamo pozitiven hrib; jedrske sile so sicer privlačne, efektivni potencial pa je vendarle lahko odbojen zaradi kvantnih efektov, kot so Paulijev princip in vozli valovne funkcije.) Torej je volumski integral

$$V_{\text{ef}} \cdot 4\pi R^3/3 = 10 \text{ MeV} \cdot 400 \text{ fm}^3 = 4000 \text{ MeVfm}^3 .$$

Tipično magnetno polje 1 T pa dá pri stranici kristalne celice $A = 0,23 \text{ nm} = 2,3 \cdot 10^5$ fm volumski integral

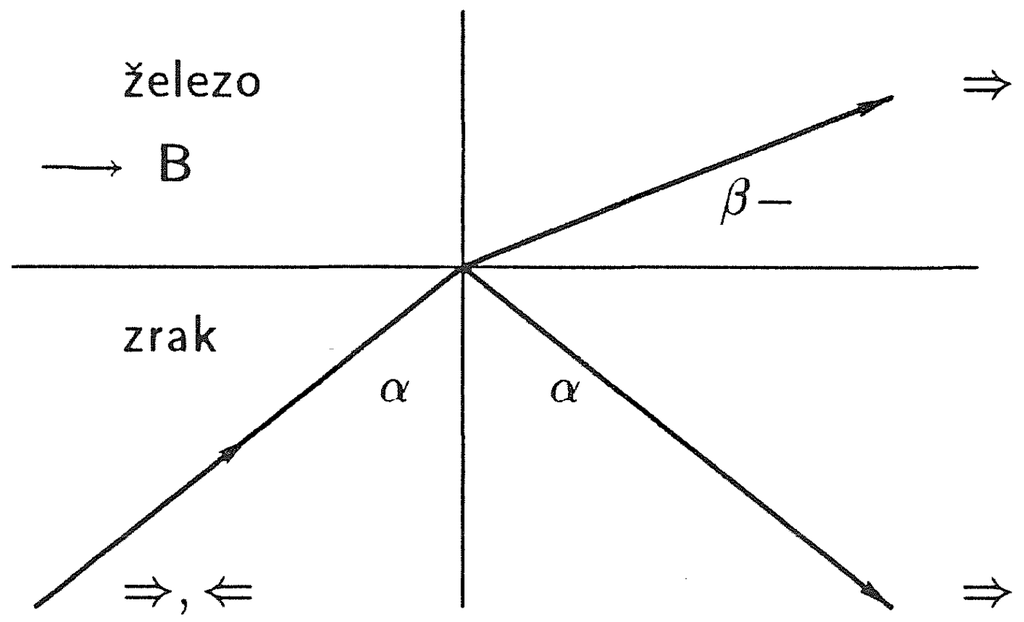
$$\mp\mu B \cdot A^3 = \pm 60 \cdot 10^{-15} \text{ MeV} \cdot 12 \cdot 10^{+15} \text{ fm}^3 = \pm 720 \text{ MeVfm}^3 .$$

Torej sta oba iste velikostne stopnje. Jedrski potencial je sicer za 15 stopenj velikosti močnejši od magnetnega, zato ima pa za petnajst stopenj velikosti manjše območje delovanja. Vemo sicer, da so tipične energije v nižjih nadstropjih večje, tipične razdalje pa manjše, vendar v splošnem ni volumen tisti, ki bi bil v nižjem nadstropju večji. To je tu goli slučaj, igra narave, ki pa nam seveda pride prav (na primer za polarizacijo nevtronov).

Ocenimo še mejni kot totalnega odboja. Povprečni magnetni potencial smo ocenili s $\pm 0,6 \cdot 10^{-4}$ meV, povprečje efektivnega jedrskega potenciala preko ene celice pa da $3,3 \cdot 10^{-4}$ meV. Celo za „hladne nevtrone" z $E = 1$ meV je kot

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_{tot}^{(\pm)} \simeq \sqrt{\bar{V}/E} = (1,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \text{ radiana}$$

zelo majhen, toda poskus se da dobro izvesti. V zgornjem izrazu se znak + tiče ene polarizacije, znak − pa druge. Če vpada curek med oba mejna kota, se ena polarizacija totalno odbije, druga pa prepusti (Sl. 1).



Slika 1. Pri primernem vpadnem kotu α se nevtroni z eno smerjo spina totalno odbijejo, z drugo pa vstopijo v železo.

Kvantna razlaga

Pri kvalitativni razlagi nam pomaga Bornov približek [4], ki pravi za počasne nevtrone ($pR \ll \hbar$)

$$\sigma = 4\pi a^2, \qquad a = (m/2\pi\hbar^2) \int V(\mathbf{r}) d^3 r .$$

Pri tem ima $V(\mathbf{r}) = V_j(\mathbf{r}) + V_m(\mathbf{r})$ jedrski in magnetni prispevek. Spet vidimo, da sta oba prispevka k sipalni amplitudi (jedrski a_j in magnetni a_m) odvisna samo od volumskega integrala potenciala in sta pri danem zgledu *slučajno* iste velikostne stopnje.

Če uporabimo grobo oceno za volumski integral potenciala iz prešnjega odstavka, dobimo $a_j = 15,4$ fm in $a_m = \pm 2,8$ fm, kar se smiselno sklada z izmerjeno vrednostjo $a_j = 9,7$ fm in $a_m = \pm 1,3$ fm.

Naj pripomnim, da pri danem jedrskem potencialu Bornov približek ne velja dobesedno, zato smo (že v prejšnjem odstavku) vpeljali „efektivni jedrski potencial", ki je tako prilagojen, da da Bornov približek pravilne rezultate.

Poskus s totalnim odbojem lahko pojasnimo, če vpeljemo lomni količnik [4]

$$n = 1 - \frac{2\pi N a}{(p/\hbar)^2} = 1 - \frac{\int V d^3r}{2EA^3} = 1 - \frac{\bar{V}}{2E}.$$

Kot totalnega odboja $\sin \alpha_{\text{tot}} = n$ se ujema s klasičnim izrazom v prejšnjem odstavku! Spet je rezultat odvisen le od volumskega integrala potenciala (ali, kar je enakovredno, od povprečnega potenciala preko celice) in sta jedrski in magnetni prispevek iste velikostne stopnje.

LITERATURA

[1] R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics,* Princeton University Press, Princeton 1979.

[2] R. Peierls, *More Surprises in Theoretical Physics,* Princeton University Press, Princeton 1991. (Glej poročilo na str. 18.)

[3] V. F. Weisskopf, Amer. J. Phys. **53** (1985) 19, 109, 206, 304, 399, 522, 618, 814, 940, 1140; **54** (1986) 13, 110.

[4] E. Segre, *Nuclei and Particles,* Benjamin, New York 1965, str. 580, 697 in 576.

VESTI

Priznanja DMFA Slovenije učiteljem matematike, fizike z astronomijo ter računalništva v srednji in osnovni šoli za delo z mladimi

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je že leta 1968, to je 19 let po svoji ustanovitvi (1949) in več let po prvih tekmovanjih dijakov srednjih šol v Sloveniji, ustanovilo poseben sklad za nagrajevanje tistih učiteljev matematike in fizike v srednjih in osnovnih šolah, ki se prav posebej trudijo pri zunajšolskem delu z boljšimi dijaki in učenci v srednjih in osnovnih šolah. Tekmovalce smo za uspehe nagrajevali že vrsto let prej, čeprav so tekmovali po lastnih nagnjenjih in v svoje zadovoljstvo. Na zadnjem občnem zboru DMFA Slovenije v Mariboru pa smo sprejeli razširjeno besedilo pravilnika, ki upošteva pri kriterijih za pridobitev tega priznanja tudi prispevke članov Društva v tistih, predvsem društvenih publikacijah, knjigah in revijah, ki so namenjeni popularizaciji matematike, fizike, astronomije in računalništva med mladino v Sloveniji.

Seznam dosedanjih nagrajencev objavljamo na naslednji strani.

Ciril Velkovrh

1968 Ljubljana

1. Bogomila Kolenko, pok., Koper
2. France Perne, Nova Gorica
3. Marija Pilgram, pok., Ljubljana
4. Ivan Štalec, Ljubljana

1969 Celje

5. France Avsec, Kranj
6. Sonja Križanič, Ljubljana
7. Anton Kuštrin, Nova Gorica
8. Marija Munda, Maribor

1970 Nova Gorica

9. Ivanka Habe, pok., Celje
10. Dušan Modic, Novo mesto
11. Branko Roblek, Škofja Loka
12. Pavle Zajc, Ljubljana

1971 Novo mesto

13. Janez Ferbar, Novo mesto
14. Maks Pagon, pok., Cerkno
15. Marjan Vagaja, Ljubljana

1972 Murska Sobota

16. Ciril Memon, Koper
17. Tomaž Skulj, Ljubljana

1973 Bled

18. Ivan Brecelj, Koper
19. Anton Fajfar, Kanal
20. Marija Jemec, Ljubljana
21. Vladimir Kuster, pok., Kranj
22. Neda Marjanov, Nova Gorica
23. Franc Oblak, Ljubljana
24. Anda Tomec, Celje

1974 Portorož

25. Jože Karčnik, Idrija
26. Janez Krajnik, Jesenice
27. Vera Maver, Nova Gorica
28. Draga Poženel, Ljubljana
29. Marjeta Valentinčič, Novo mesto

1975 Grad Borl

30. Angela Blaznik, Ljubljana
31. Nikolaj Kontler, Maribor
32. Jože Kotnik, Ljubljana
33. Viljem Sladič, pok., Ljubljana

1976 Portorož — Bernardin

34. Franjo Jakhel, pok., Maribor
35. Karel Šmigoc, Šmarje pri Jelšah
36. Fedor Tomažič, Ajdovščina
37. Anita Zornada, Izola
38. Ivana Žunič, Črnomelj

1977 Bovec

39. Miro Bornšek, Izola
40. Alojz Krumberger, Tolmin
41. Matilda Lenarčič, Ljubljana

1978 Radenci

42. Marica Abrahamsberg, Nova Gorica
43. Jožica Dolenšek, Celje
44. Štefanija Miloševič, Maribor

1979 Velenje

45. Rozika Panjan, Ljubljana
46. Aljoša Žerjal, Koper

1980 Postojna

47. Zlatko Bradač, Maribor

1981 Bled

48. Mirko Cvahte, Maribor
49. Milena Kožar, Koper
50. Jerica Lorger, Maribor
51. Sonja Plevnik, pok., Ljubljana

1982 Čateške toplice

52. Rado Torkar, Ljubljana

1983 Cerkno

53. Eda Okretič-Salmič, Koper
54. Davorin Tomažič, Ljubljana

1985 Škofja Loka

55. Anita Fakin, Nova Gorica

1987 Topolšica

56. Terezija Draginc, Črnomelj
57. Miha Štalec, Ljubljana

1988 Gozd-Martuljek

58. Zora Gomilšček, Nova Gorica
59. Darka Hvastija, Ljubljana
60. France Plevnik, Ljubljana
61. Stanislav Zazula, Portorož

1989 Nova Gorica

62. Marija Boštjančič, Ajdovščina
63. Ivanka Zajc, Nova Gorica

1990 Črni Vrh nad Idrijo

64. Izidor Hafner, Ljubljana
65. Anton Podvršnik, Koper
66. Nika Šilc, Celje

1991 Maribor

67. Dragica Pavšek, Celje
68. Loredana Sabaz-Deranja, Koper

VESTI

43. OBČNI ZBOR DRUŠTVA IN DELOVNO SREČANJE

V štajerski metropoli Maribor je bil občni zbor z delovnim srečanjem od 10. do 12. oktobra 1991, ki je letos potekal dvotirno. Iz uporabne matematike so predavanja pripravili mariborski kolegi: Stane Indihar, *Problem očrtane sfere*, Sandi Klavžar, *Grafovski homomorfizmi* in Svitan Gaborovič, *O pojmu izračunljivosti v matematiki.* Pri fiziki so predstavili svoje raziskovalno delo Marko Starič, *Pozitronska tomografija*, Dušan Brajnik, *Pet let po Černobilu* in Slavko Amon, *Sončne celice.* Mitja Rosina pa je predavanjem dodal zanimiv video film: *ALEPH — the anatomy of an experiment* o gradnji pospeševalnika LEP in detektorja ALEPH v evropskem centru za raziskave osnovnih delcev CERN v Ženevi.

V petek je bilo delovno srečanje šolsko obarvano. Za učitelje matematike so predavali Uroš Milutinovič, *O neenakosti med sredinami*, Sandi Klavžar, *Barvanje grafov* in Dušan Pagon, *Kongruenčna relacija na množici celih števil.* Za fizike je program vodila projektna skupina Zavoda RS za šolstvo in šport. Govorili so o zunanjem preverjanju znanja in o izkušnjah z mednarodno maturo. Popoldne so matematiki organizirali okroglo mizo o položaju učitelja matematike v srednji šoli. Zvonka Alt je pripravila in obdelala anketo o obremenjenosti učitelja matematike. Iz 180 odgovorov je razvidno, da učitelj matematike porabi v povprečju 435 ur za dodatne obveznosti: za pripravo in popravo pisnih nalog, za popravne, sprejemne in zaključne izpite. Te dodatne obremenitve so pri predmetih različne.

V soboto smo se na občnem zboru spomnili najprej lani umrlih članov društva Helene Velikonja, Mire Kandare, Sonje Plevnik in Ernesta Kučana.

Občni zbor so pozdravili podpredsednik izvršnega sveta občinske skupščine Maribor Rudolf Moge, prof. mat., rektor mariborske univerze prof. dr. Alojz Križman, predstojnika oddelka za matematiko prof. dr. Peter Legiša in oddelka za fiziko prof. dr. Alojz Kodre z Univerze v Ljubljani. Občni zbor dobi svečano obeležje ob imenovanju častnih članov. Častni član podružnice Maribor je postal prof. dr. Milan Kac, prof. Marija Munda pa častna članica republiškega društva. Društveno priznanje za delo z mladimi sta letos dobili Loredana Sabaz-Deranja iz Kopra in Dragica Pavšek-Guzej iz Celja.

Pri delu Društva v letu 1991 ni bilo novosti. Izpeljali smo vsa tekmovanja, čeprav je bilo z denarnimi sredstvi skrajno težko. Še vedno pa uspešno dela naša Komisija za tisk, ki je kot običajno pripravila razstavo publikacij ob občnem zboru. V razpravi o delu Društva, predstavljenem v biltenu, so se udeleženci vračali na šolske probleme.

Zaradi samostojnosti Slovenije prevzema naše Društvo nove mednarodne obveznosti. Pri Društvu se zato ustanovi nova komisija za raziskovalno delo in znanstveno sodelovanje s tujino. Nekatere sekcije kot sekcija za fiziko osnovnih delcev in polj, za kondenzirano materijo, biofiziko so že sedaj delovale predvsem v jugoslovanskem merilu, sedaj se bo treba vključevati v evropske in regionalne raziskovalne projekte.

Po poročilu nadzornega odbora je bil izvoljen nov upravni odbor. Pred tem je bila še razprava, kakšne funkcije v Društvu lahko prevzamejo sodelavci Zavoda RS za šolstvo in šport. Ker je bilo ugotovljeno, da le-ti nimajo posebnih pooblastil, so se udeleženci občnega zbora strinjali, da v zvezi s tem ni potrebno postavljati omejitev. Nov upravni odbor je sestavljen takole: predsednik Peter Petek, podpredsednica Nada Razpet, tajnica Ivica Turfan, blagajničarka Agica Tiegl ter sekretarji komisij: za pedagoško dejavnost Milena Strnad, za popularizacijo matematike OŠ Aleksander Potočnik, fizike OŠ Jelisava Sakelšek, matematike SŠ Darjo Felda, fizike SŠ Ciril Dominko, astronomije Boris Kham, razvedrilne matematike Izidor Hafner, za uporabno matematiko Marko Razpet, za uporabno fiziko Dušan Brajnik, za raziskovalno dejavnost in znanstveno sodelovanje s tujino Norma Mankoč-Borštnik, vodje raziskovalnih dni: za matematiko Darjo Felda, za fiziko Branko Borštnik, za predavanja učencem Blaža Cedilnik, finančne komisije Darjo Felda. Člani UO so tudi predstavniki podružnic.

Upravni odbor Komisije za tisk deluje v naslednji sestavi: predsednik in glavni urednik Mirko Dobovišek, tajnik in urednik Ciril Velkovrh, blagajnik Janez Markelj ter odgovorni uredniki za publikacije: Obzornik za matematiko in fiziko Milan Hladnik, Presek Marija Vencelj, Presekova knjižnica Sandi Klavžar, Priročniki in učbeniki OŠ, SŠ, droben tisk Ciril Velkovrh, Knjižnica Sigma in Izbrana poglavja iz matematike in računalništva Ivan Vidav, Zbirka izbranih poglavij iz fizike Janez Strnad, Podiplomski seminar iz matematike ter Matematika-Fizika Bojan Magajna. Za Plemljev dom skrbi Ciril Velkovrh.

Sklepi okrogle mize in občnega zbora:

1. Zahtevamo, da se delo učitelja bolje plača na vseh šolskih stopnjah.
2. Učna obveznost učitelja naj bo diferencirana. Vrednotenje naj bo utemeljeno in primerljivo s šolskimi sistemi drugih držav.
3. Zahtevamo, da se omogoči, upošteva in pravilno ovrednoti tudi učiteljevo delo zunaj osnovnega programa. Zato predlagamo, da se na šolah ponovno uvedejo interesne dejavnosti.
4. Permanento izobraževanje učiteljev naj se tudi omogoči, ne pa le zahteva.
5. Zaradi zaščite kvalitete dela naj bo natanko navedena zgornja meja učiteljeve delovne obveznosti. Za učitelja matematike in fizike naj ne presega 23 ur tedensko.
6. Na delovno srečanje in na predavanja iz permanentnega izobraževanja naj ne vabi le društvo ampak tudi druge institucije, učitelje zlasti Zavod RS za šolstvo in šport, na občni zbor pa samo Društvo.
7. Ministrstvo za šolstvo in šport naj uskladi finančno in organizacijsko stran permanentnega izobraževanja in drugih delovnih srečanj učiteljev, Društvo pa bo skrbelo za strokovno stran.
8. Upravni odbor bo naknadno izvolil manjkajoče člane in predsednika nadzornega odbora.
9. Treba je doseči sporazum vseh, ki jih stvar zadeva, da bo komisija za Plemljev dom lahko pričela učinkovito delati. Treba je oblikovati nov statut Društva, da bodo tudi znotraj Društva relacije urejene.

Tudi dejavnosti, ki popestrijo vsakoletno srečanje članov Društva, so kolegi iz Maribora posrečeno izbrali. Dr. Jože Mlinarčič je v petek popoldne govoril o zgodovini Maribora. V četrtek zvečer smo imeli bogato pokušnjo štajerskih vin s strokovno razlago. Družabni večer v petek smo zapolnili bolj s klepetom kot s plesom. V soboto popoldne pa smo si ogledali Mariborske znamenitosti: Lent, Slomškov spomenik in mestni park.

Martina Koman

Častni člani DMFA Slovenije v letu 1991

Po več letih je bil spet redni letni občni zbor DMFA Slovenije v Mariboru. Republiška komisija za častne člane je zato pregledala delo članov Društva na Slovenskem, posebno na Štajerskem, in predlagala UO DMFA Slovenije, da imenuje za 11. častno članico Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije profesorico Marijo Munda. S tem je Društvo želelo izreči priznanje za večletno delo ne samo njej, temveč tudi vsem njenim sodelavcem v severni slovenski metropoli in vsem njenim nekdanjim učencem, ki so se tudi pozneje izkazali v šoli in pri delu.

Upravni odbor mariborske podružnice pa je na tej slovesnosti še imenoval prof. dr. Milana Kaca za prvega častnega člana DMFA Slovenije — Podružnice Maribor. Slovesnost so popestrile prisrčne zahvalne besede in spomini na opravljeno delo obeh nagrajencev.

V Sloveniji so podružnični častni člani še pok. prof. Bogomila Kolenko in prof. Ivan Brecelj, oba iz Kopra.

Ciril Velkovrh

Utemeljitvi

Prof. Marija Munda

Marija Munda se je rodila 24. januarja 1932 v Frankolovcih pri Ormožu. L. 1952 je maturirala na ptujski gimnaziji, po diplomi iz matematike l. 1957 na ljubljanski univerzi je najprej službovala na I. gimnaziji v Mariboru, od 1959 do 1981 pa na II. gimnaziji v Mariboru, ko se je zaradi bolezni upokojila.

Od leta 1966 do 1981 je bila tajnica DMFAS — podružnice Maribor. V teh letih je za dijake in kolege srednjih šol organizirala številna predavanja priznanih strokovnjakov in na njih tudi sama aktivno sodelovala. Več let je uspešno delovala v področni komisiji za tekmovanja iz matematike za Vegova priznanja. Veliko stikov pa je imela tudi z republiškim društvom, za katerega je trikrat organizirala republiško tekmovanje dijakov srednjih šol (iz matematike 1972 in 1978 ter fizike 1976), 1978 pa je pripravila republiški občni zbor v Radencih. Vsa leta službe je na šoli vodila krožke mladih matematikov in dijake uspešno pripravljala na tekmovanja. Njeni učenci so dobili številna priznanja in mnogi so se pozneje zelo uveljavili v stroki doma in na tujem. Od leta 1972 je poučevala v oddelkih z intenzivnim poukom matematike. Za udeležence šolskih krožkov je iz ruščine prevedla zbirko tekmovalnih nalog, sestavila obsežno zbirko maturitetnih nalog ter pripravila zvezek matematičnih nalog za srednjo šolo. V šolskem letu 1980/81 je vestno opravila kritično spremljavo Križaničevega učbenika *Matematika I.*

Nekaj let je izjemno uspešno vodila šolski aktiv matematikov in fizikov. Pripravila je več zelo uspešnih vzornih nastopov za šolski in mariborski aktiv. Bila je zelo dobra mentorica mlajšim kolegicam in kolegom. Veliko priznanj poslušalcev je požela s predavanji učiteljem osnovnih šol ob uvajanju „nove matematike".

Za svoje uspešno in skrajno požrtvovalno delo je dobila na občnem zboru DMFA Slovenije l. 1969 v Celju društveno priznanje za večletno izvenšolsko delo z mladimi matematiki in fiziki, ob 30. obletnici DMFA Slovenije pa je dobila diplomo — priznanje za delo v društvu.

Prof. dr. Milan Kac

Milan Kac je bil rojen 25. oktobra 1924 v Lendavi. V Šentvidu pri Ljubljani je obiskoval nižjo gimnazijo, šolanje na trgovski akademiji pa je prekinila vojna. Iz izgnanstva v Srbiji mu je uspelo priti na Madžarsko in tam je končal šolanje na trgovski akademiji. Po vojni je moral v JLA in šele 1949. leta se je vpisal na študij matematike v Ljubljani. Že pred diplomo leta 1953 je učil matematiko in fiziko na mariborski klasični gimnaziji. Ko so leta 1960 ustanovili Višjo tehniško šolo v Mariboru, so ga povabili, naj študentom predava matematiko. Na tej šoli, današnji Tehniški fakulteti, predava še tudi sedaj, po upokojitvi. Iz matematike je doktoriral na tehniški visoki šoli v Gradcu leta 1975.

Za njegovo življenjsko pot je značilen izreden posluh za probleme, s kakršnimi se ob matematiki srečujejo učenci, študenti, učitelji, pa tudi strokovnjaki z drugih področij, predvsem tehnike. Kot odličen pedagog in vsestransko razgledan učitelj je slovel že kot srednješolski profesor. Nenehno se je izpopolnjeval, med drugim je zgodaj spoznal pomen numeričnih metod in uporabe računalnika. Sodeloval je pri vzgoji strokovnjakov za delo z računalniki, pisal učbenike in veliko predaval. Njegove obveznosti so bile vedno primerljive s srednješolskimi. Študenti in sodelavci ga poznajo kot odličnega predavatelja, duhovitega in razgledanega sogovornika, zanesljivega sodelavca in predvsem človeka, ki pomaga pri reševanju vseh, ne zgolj matematičnih problemov.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je na 43. rednem občnem zboru, dne 12. 10. 1991 v Mariboru sprejelo predlog za dopolnjena

PRAVILA O PODELJEVANJU PRIZNANJ UČITELJEM MATEMATIKE, FIZIKE, ASTRONOMIJE IN RAČUNALNIŠTVA ZA DELO Z MLADIMI

1. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije podeljuje priznanja zaslužnim članom, učiteljem matematike, fizike z astronomijo in računalništva na srednjih in osnovnih šolah.
2. Priznanje lahko prejme član društva, ki
   - s svojim delom izboljša pouk matematike, fizike, astronomije ali računalništva v osnovni in srednji šoli,
   - razširja zanimanje za svoj predmet med učenci, jih uspešno uči, vodi in usmerja njihovo delo v krožkih, tako da dosegajo vidne uspehe v šoli in na tekmovanjih,
   - sodeluje s članki, učbeniki in drugimi učnimi in strokovnimi knjigami predvsem pri društvenih publikacijah in s tem izdatno prispeva k popularizaciji svojega predmeta ali k izboljšanju poučevanja.
3. Pismeni predlog za priznanje, ki ga podpišeta dva predlagatelja ali odbor podružnice, mora obsegati dovolj podatkov, da je mogoča vsestranska presoja.
4. Predloge obravnava tričlanska komisija, ki jo sestavljajo predsednik društva, sekretar komisije za pedagoško dejavnost in član upravnega odbora, o njenih predlogih pa z glasovanjem odloči upravni odbor društva.
5. Razpis za prijavo kandidatov mora biti objavljen v Obzorniku za matematiko in fiziko do konca šolskega leta.
6. Priznanja podeli predsednik Društva na občnem zboru.

Predsednik DMFA Slovenije
Peter Petek

VABILO

Na osnovi Pravil o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike z astronomijo in računalništva v osnovni in srednji šoli za delo z mladimi vabimo podružnice DMFA Slovenije, aktive matematikov in fizikov na šolah in posamezne člane društva, da do 20. maja 1992 predlagajo kandidate. Kandidati morajo biti člani Društva. Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64.

Milena Strnad

OPRAVIČILO

V šesti številki lanskega letnika Obzornika za matematiko in fiziko so v tiskarni pomotoma odtisnili sliko na strani 165 v zrcalni legi. Zato v tej številki prilagamo pravilno odtisnjene štiri strani (165, 166, 187, 188) ter vas prosimo, da jih zamenjate v vašem izvodu. Da bi se v bodoče izognili podobnim napakam, bomo pred razpošiljanjem revije opravili dodatno kontrolo prvega vezanega izvoda.

Uredniki