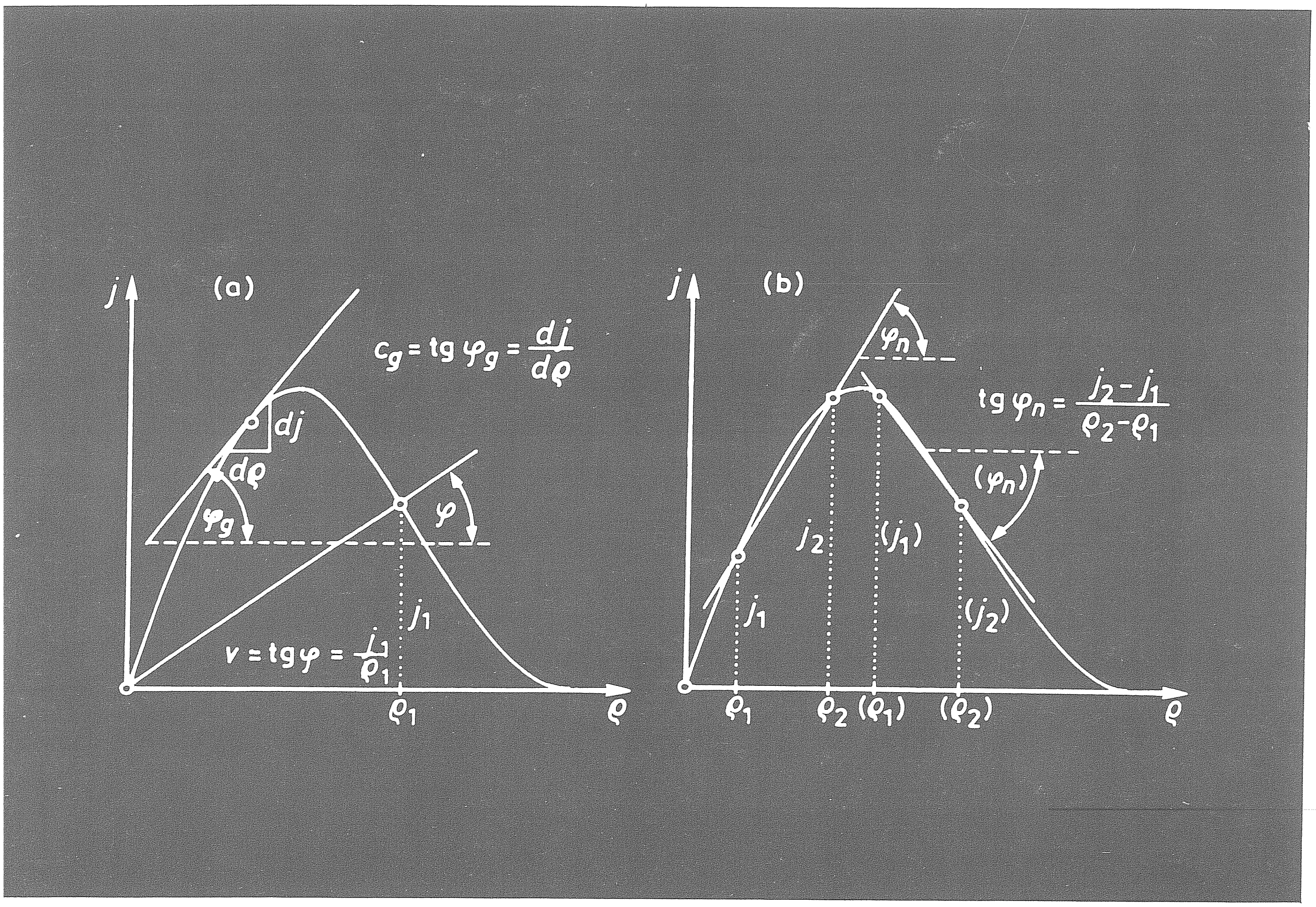
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

CENTRALNA EKONOMSKA
KNJIŽNICA Ljubljana
ODPISANO

1991
Letnik 38
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1991

letnik 38, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 250.– SLT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 350.– SLT, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 40.– SLT, dvojna številka 80.– SLT, stare številke 20.– SLT.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Revija je oproščena prometnega davka z odlokom št. 314, Uradni list RS, št. 7/91.

© 1991 DMFA Slovenije – 1090 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Karmarkarjev algoritem za reševanje linearnih programov — Karmarkar's algorithm for linear programming (Jana Jamšek) 161–169

Prometni tok — Vehicular flow (Janez Strnad) 171–178

Računalništvo v srednjih šolah — Computer education in secondary schools (Peter Prelog) 179–185

Nove knjige — New books (Marko Petkovšek, Norma Mankoč-Borštnik, Martin Juvan, Janez Strnad, Neža Mramor, Zlatan Magajna) 169, 170, 186, 187–188, 188

Vesti — News

Prof. dr. Boštjan Žekš, redni član SAZU (Peter Gosar) 190

14. seminar iz matematike: Statistika — Vabilo(Milena Strnad) 191

Plemljev dom na Bledu (Peter Petek, Ciril Velkovrh) 192

Utrinka

Pogovor s Kennethom Wilsonom (Izbr. in prev. Janez Strnad) 189

Na predavanjih (Mitja Rosina) 191

Na ovitku: Slika 2 k članku na str. 171–178.

KARMARKARJEV ALGORITEM ZA REŠEVANJE LINEARNIH PROGRAMOV

JANA JAMŠEK

Math. Subj. Class. (1991) 90C05

Članek obravnava algoritem za reševanje linearnih programov, ki ga je leta 1984 objavil Narendra Karmarkar. Karmarkarjev algoritem je bil zelo odmeven predvsem iz dveh razlogov. Pri njem je možno dokazati polinomsko časovno zahtevnost, metoda simpleksov — za zdaj največ uporabljana metoda za reševanje linearnih programov — pa ima eksponentno časovno zahtevnost. Nekateri izmed številnih preizkusov, ki so sledili objavi algoritma, so pokazali, da je ta predvsem pri obsežnih linearnih programih hitrejši od metode simpleksov.

KARMARKAR'S ALGORITHM FOR LINEAR PROGRAMMING

The algorithm for linear programming published in 1984 by Narendra Karmarkar is described. There are two reasons for large publicity of the Karmarkar's algorithm. It has, unlike the simplex method, polynomial bound on the worst-case running time. Some of the tests have shown that it can solve large problems much more rapidly than the simplex method.

Uvod

Linearno programiranje je ena najvažnejših in najbolj razširjenih tehnik optimizacije v okviru operacijskih raziskav. Začetki te vede segajo v čas druge svetovne vojne, saj se je prvotno razvila v vojaške namene, kasneje pa se je razširila v industriji in posebno močno razmahnila z razvojem računalnikov. Uporablja se največ v raznih proizvodnih procesih, pridobivanju naftnih derivatov in zlitin, mešanju hranil in tako dalje.

Najbolj razširjena metoda za reševanje linearnih programov je metoda simpleksov, ki jo je iznašel G.B. Dantzig leta 1947 [2]. Od tedaj je bilo razvitih že nekaj novih metod, vendar se je metoda simpleksov do sedaj v praksi najbolje obnesla. V Obzorniku za matematiko in fiziko je profesor A. Vadnal že leta 1957 opisal linearni program in njegovo uporabo v gospodarstvu, podal pa je tudi kratek opis metode simpleksov [13]. Kasneje je opisal tudi algebraično ozadje linearnega programiranja [14], z dvema krajšima člankoma pa je opozoril na razvoj te tehnike in njeno vključevanje v ekonomske znanosti [15,16].

Pričujoči članek obravnava metodo N. Karmarkarja za reševanje linearnih programov, objavljeno leta 1984, ki je bila med novejšimi metodami gotovo najbolj odmevna. Karmarkarjev algoritem si je pridobil veliko popularnost predvsem iz dveh razlogov:

- Prvi razlog je dokazana polinomska časovna zahtevnost algoritma. Kot je znano, je metoda simpleksov eksponentno časovno zahtevna — računalniški čas, potreben za izračun po tej metodi, lahko narašča eksponentno glede na količino podatkov. Karmarkarjev algoritem pa je samo polinomsko časovno zahteven — računalniški čas lahko naraste kvečjemu polinomsko glede na količino podatkov.

• Drugi razlog je obnašanje algoritma na praktičnih primerih. Karmarkar sam kot tudi nekateri drugi raziskovalci, ki so algoritem preizkusili, trdijo, da je v praksi zlasti na velikih problemih mnogo hitrejši od metode simpleksov.

Bistveni ideji algoritma

Najprej si oglejmo bistveni ideji Karmarkarjeve metode. Linearni program z že dodanimi dopolnilnimi spremenljivkami zapišemo standardno v obliki

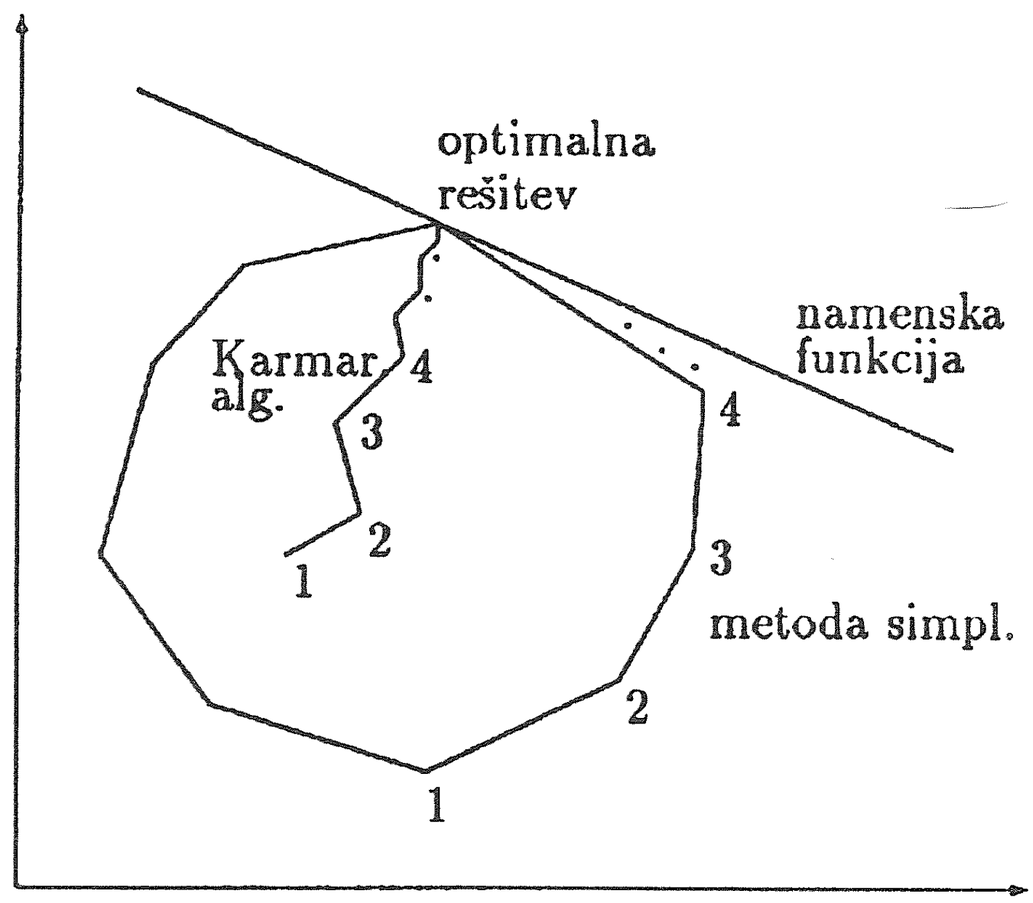
$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &A\,x = b,\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kjer je

A – matrika dimenzije $m \times n$, ki predstavlja pogoje linearnega programa in koeficiente pri dopolnilnih spremenljivkah,
c – vektor dimenzije n, ki predstavlja koeficiente namenske funkcije,
b – vektor dimenzije m, ki predstavlja omejitve linearnega programa,
x – vektor dimenzije n, optimalna rešitev — rešitev pri minimalni vrednosti namenske funkcije.

Množica možnih rešitev (1) tvori konveksni polieder (v afini strukturi politop) v $\mathbb{R}^n$, optimalna rešitev pa je ena izmed njegovih ekstremnih točk. Metoda simpleksov išče optimalno rešitev tako, da preiskuje ekstremne točke politopa, Karmarkarjev algoritem pa se pomika po točkah iz notranjosti navzven.

Slika 1 ilustrira primerjavo med načinoma obeh metod.



Slika 1. Primerjava obeh metod

Prva bistvena Karmarkarjeva ideja je naslednja: med izvajanjem algoritma pomaknemo trenutno rešitev kolikor mogoče daleč v smeri negativnega gradienta namenske funkcije.

Iz slike 1 lahko tudi razberemo, da se bomo hitreje približali rešitvi, če pomaknemo v tej smeri točko, ki je čim bliže središču politopa; pri premiku točke na obrobju bi namreč v večini primerov hitro zadeli ob rob politopa. Iz tega sledi druga bistvena Karmarkarjeva ideja: v vsaki iteraciji algoritma transformiramo afini prostor tako, da pride tekoča rešitev čim bliže središču politopa.

Opis algoritma

Za reševanje po Karmarkarjevem algoritmu je potrebno, da je linearni program (1) v posebni obliki, in sicer

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & A\,x = 0 \\ & e^T x = 1, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

kjer pomeni e vektor $[1, 1, ..., 1]^T$; potrebno je tudi poznati neko strogo pozitivno začetno rešitev, označimo jo z x_0; pred nas pa je postavljena še ena zahteva: minimalna vrednost namenske funkcije naj bo 0. Pozneje bomo videli, kako vsem tem zahtevam ustrežemo, zaenkrat pa privzemimo, da so že izpolnjene, in si podrobneje oglejmo potek algoritma.

Množica možnih rešitev linearnega programa (2) tvori presek prostora $A\,x = 0$ ter enotnega simpleksa $e^T x = 1$, $x \geq 0$. S sliko 2 si predstavimo množico možnih rešitev naslednjega linearnega programa:

$$\begin{aligned} \min\ & 2\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Množica možnih rešitev je v tem primeru trikotnik, presek ploskve

$$x_1 + 2\,x_2 - 3x_3 = 0$$

ter piramide, ki predstavlja simpleks

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

V posamezni iteraciji algoritma, recimo da je to k-ta iteracija, izvedemo tri faze:

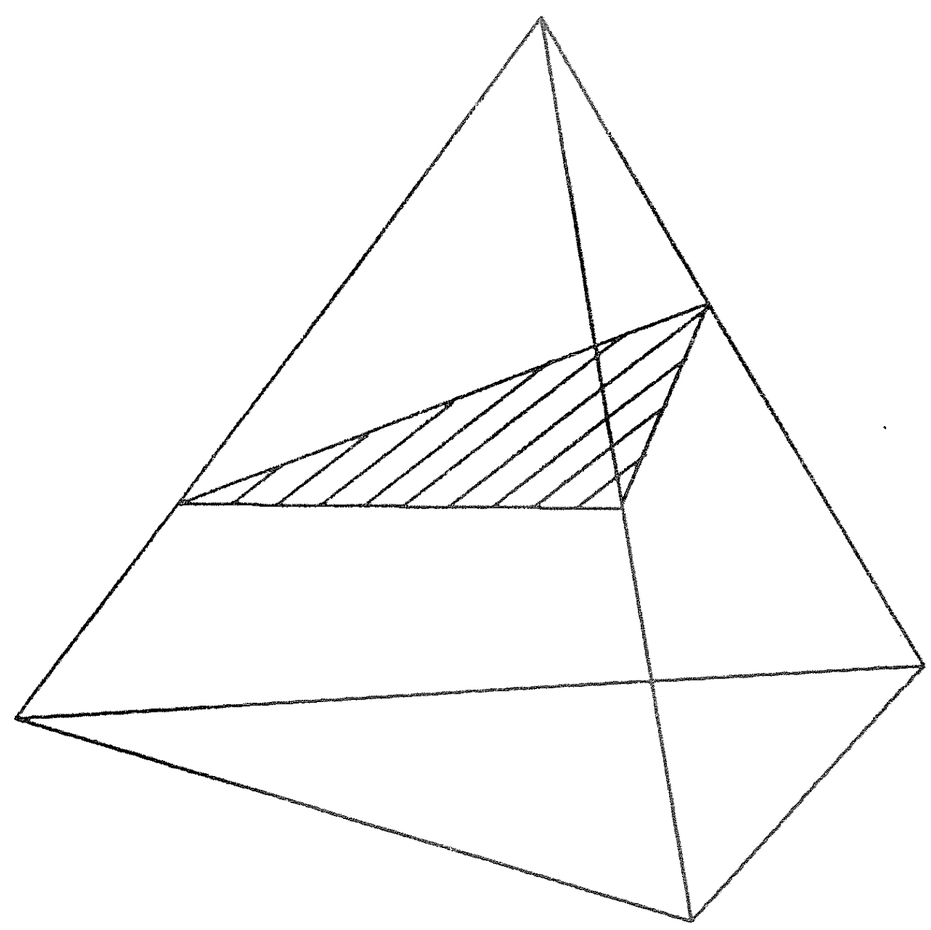
1. faza: Uporabimo ustrezno projektivno transformacijo, označimo jo s $T^{(k)}$, tako da se tekoča rešitev preslika v središče simpleksa, ki je zelo blizu središču politopa možnih rešitev.

$$z = T^{(k)}(x) = \frac{{D^{(k)}}^{-1} x}{e^T\, {D^{(k)}}^{-1} x}, \tag{4}$$

kjer je

$$D^{(k)} = \mathrm{diag}\,(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$$

in $x^{(k)}$ — tekoča rešitev v k-ti iteraciji.



Slika 2. Množica rešitev linearnega programa v Karmarkarjevi obliki

Linearni program (2) dobi po transformaciji tole obliko:

$$\min \frac{c^T D^{(k)} z}{e^T D^{(k)} z}$$
$$A\, D^{(k)} z = 0$$
$$e^T z = 1, \quad z \geq 0.$$

Kot vidimo, namenska funkcija ni več linearna, kar pa ne predstavlja kake bistvene težave, saj jo v bližini središča simpleksa lahko aproksimiramo s $c^T D^{(k)} z^{(k)}$.

2. faza: Tekočo rešitev pomaknemo v smeri negativnega gradienta namenske funkcije, in sicer na naslednji način: Najprej projiciramo negativni gradient namenske funkcije $-D^{(k)}c$ na politop možnih rešitev, kar naredimo z metodo najmanjših kvadratov. Projekcija ima obliko:

$$c_p^{(k)} = (I - B^{(k)^T}(B^{(k)} B^{(k)^T})^{-1} B^{(k)})\, D^{(k)} c, \tag{5}$$

kjer je

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} AD^{(k)} \\ e^T \end{bmatrix}$$

in I enotna matrika.

Tekočo rešitev $z^{(k)}$, ki je po transformaciji prišla v središče simpleksa a_0, pomaknemo v tej smeri toliko daleč, da ne pademo iz politopa možnih rešitev, torej kvečjemu za polmer simpleksu včrtane sfere

$$r = 1/\sqrt{n(n-1)}.$$

Pomik za vsak primer še zmanjšamo, pomnožimo ga s faktorjem α, $0 < \alpha < < 1$:

$$z^{(k+1)} = a_0 - \alpha\, r\, \bar{c}_p^{(k)}, \tag{6}$$

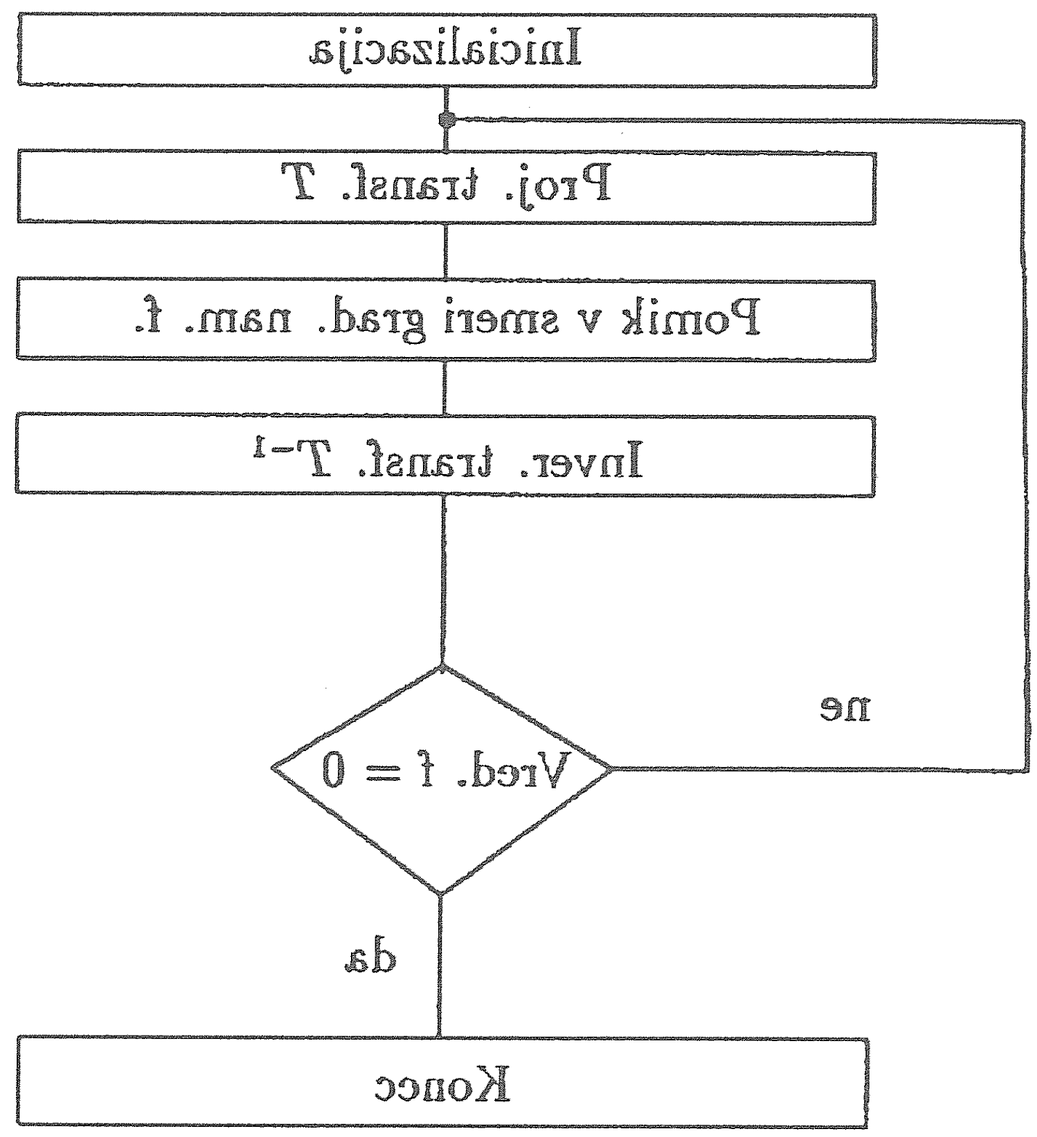
kjer $\bar{c}_p^{(k)}$ pomeni normirano, zgoraj izračunano projekcijo.

3. faza: Nanovo pridobljeno tekočo rešitev $z^{(k+1)}$ transformiramo nazaj z inverzno transformacijo $T^{(k)^{-1}}$

$$x^{(k+1)} = T^{(k)^{-1}}(z^{(k+1)}).$$

Dodamo naj še tole: V prvi iteraciji uporabimo kot tekočo rešitev že vnaprej poznano rešitev x_0; iteracije seveda izvajamo toliko časa, dokler ne dobimo dovolj majhne vrednosti namenske funkcije.

Na sliki 3 je podan diagram poteka računalniškega programa za izračun linearnega programa po Karmarkarjevem algoritmu.



Slika 3. Diagram poteka Karmarkarjevega algoritma

Polinomska časovna zahtevnost algoritma

Kot smo že omenili, ima Karmarkarjev algoritem glede časovne zahtevnosti prednost pred metodo simpleksov, saj je mogoče dokazati, da je polinomsko časovno zahteven.

Karmarkar je namreč dokazal, da za poljubno naravno število $q \in \mathbb{N}$ pade namenska funkcija $c^T x$ pod 2^{-q} v največ $\frac{n}{\delta}(q + \ln(n))$ iteracijah, kjer je n dimenzija rešitve linearnega programa x, δ pa neka konstanta [6]. Dokaz je precej obsežen; sestoji iz petih izrekov, od katerih navajamo dva najvažnejša, po Karmarkarjevem označevanju najprej drugega, nato prvega. Ker namenska funkcija $c^T x$ v teku algoritma ni vedno linearna, uporabimo za dokazovanje takoimenovano potenčno funkcijo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{c^T x}{x_i}.$$

Izrek 4.1 (Karmarkar, Izrek 2) [6]. *Naj bo $x^{(k)}$ zaporedje točk, ki jih algoritem generira. Potem za vsako iteracijo k velja:*

ali $c^T x^{(k+1)} = 0$

ali $f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \delta,$

kjer je δ konstanta.

Izrek 4.1 nam torej zagotovi naslednje: v vsaki iteraciji, razen v tisti, kjer se algoritem konča, se vrednost potenčne funkcije zmanjša za neko konstanto.

Glede na definicijo potenčne funkcije iz izreka 4.1 hitro sledi naslednji izrek

Izrek 4.2 (Karmarkar, Izrek 1) [6]. *Za poljuben $q \in \mathbb{N}$ najde algoritem rešitev x linearnega programa* (2), *za katero velja*

bodisi $c^T x = 0$

bodisi $c^T x / c^T a_0 \leq 2^{-q}$

v m iteracijah, $m = O(n(q + \ln(n)))$.

Če upoštevamo, da logaritemska funkcija narašča počasneje od funkcije $f(n) = n$, to praktično pomeni: algoritem najde rešitev problema v številu iteracij, ki je polinomsko odvisno od razsežnosti problema. Tudi če upoštevamo časovno zahtevnost posamezne iteracije, const $\cdot\, n^3$, je zahtevnost celotnega algoritma še vedno polinomska.

Implementacija algoritma

Implementacija Karmarkarjevega algoritma — izbira ustreznih postopkov pri izdelavi računalniškega programa — je še posebej pomembna, saj je od nje dejansko odvisna uspešnost algoritma na praktičnih primerih. Pri izdelavi računalniškega programa je potrebno skrbno izbrati naslednje postopke:

a) Kako pretvoriti linearni program (1) v obliko (2) in pridobiti začetno rešitev x_0.
b) Kako ravnati, kadar minimalna vrednost namenske funkcije ni 0.
c) Katero metodo uporabiti za izračun inverzne matrike

$$(B^{(k)} B^{(k)^T})^{-1}$$

pri projekciji gradienta (5).

Na kratko si oglejmo nekaj možnih postopkov:

a) Pri pretvarjanju linearnega programa (1) v obliko (2) navedimo dva načina. Pri prvem uporabimo posebno transformacijo, ki problem oblike (1) preslika v obliko (2), začetno rešitev x_0 pa pridobimo z reševanjem pomožnega linearnega programa.

Pri drugem načinu dosežemo obliko (2) in začetno rešitev z dodajanjem ustreznega števila umetnih spremenljivk.

Vsak od obeh načinov ima dobre in slabe lastnosti: pri prvem se, na primer, zaradi reševanja pomožnega linearnega programa poveča računalniški čas, pri drugem pa se poveča dimenzija problema. Vendar glede na izsledke, objavljene v raznih publikacijah, lahko rečemo, da se je drugi način v praksi bolje obnesel.

b) V večini praktičnih primerov minimalna vrednost namenske funkcije ni 0, kot zahteva Karmarkarjev algoritem. V takih primerih je seveda dovolj,

da minimalno vrednost, recimo ji c_m, vnaprej poznamo, saj potem lahko rešujemo linearni program z namensko funkcijo

$$c^T x - c_m ,$$

ki pa ima minimalno vrednost 0. Toda v praksi navadno tudi vrednosti c_m ne poznamo vnaprej, v takih primerih si lahko pomagamo na različne načine. Zopet navajamo dva od njih:

Prvi je takoimenovana „metoda drseče namenske funkcije", kjer si v začetku postavimo neko zgornjo in spodnjo mejo minimalne vrednosti namenske funkcije, rešujemo algoritem kot da bi bila spodnja meja prava vrednost c_m, meji pa v teku algoritma zožujemo.

Pri drugem načinu v vsaki iteraciji sproti rešujemo dualni program in vrednost c_m aproksimiramo z ustrezno dualno spremenljivko.

Tudi tu ima vsak postopek dobre in slabe lastnosti, v splošnem pa se je bolj uveljavil način z dualnim programom.

c) V vsaki iteraciji algoritma je potrebno izračunati inverzno matriko

$$(B^{(k)} B^{(k)^T})^{-1} .$$

Tu se največ uporabljata metoda Choleskega [10] ali pa faktorizacija z ortogonalnimi transformacijami po Householderju ali Givensu) [11].

V zadnjem času pa se uveljavlja tudi „rank one update" metoda, ki jo je predlagal že Karmarkar sam v prvi publikaciji algoritma. Bistvo metode je v tem, da inverzne matrike v posamezni iteraciji dejansko ne računamo, ampak inverzno matriko iz prejšnje iteracije ustrezno „popravimo", to je, nanovo izračunamo le tiste elemente, ki se od prejšnjih razlikujejo za več kot neko konstanto.

Kot lahko sklepamo že po tem kratkem pregledu, sta od opisanih postopkov bistveno odvisni konvergenca in hitrost Karmarkarjevega algoritma.

Praktični preizkus algoritma

V okviru raziskovalnega projekta, pri katerem sta sodelovala Ekonomska fakulteta Univerze v Ljubljani in Intertrade ITS, IBM Operations, smo napisali računalniški program za izračun linearnega programa po Karmarkarjevem algoritmu in ga preizkusili na nekaj praktičnih primerih različnih dimenzij [12]. Naši izsledki se v glavnem ujemajo z že objavljenimi rezultati preizkusov [3,7,5], strnili bi jih lahko v naslednje ugotovitve:

• Parameter α iz enačbe (6), ki določa velikost pomika v smeri negativnega gradienta namenske funkcije, vpliva na število iteracij kot tudi na stabilnost algoritma. Čim večji je α, tem manjše število iteracij je potrebno, da dosežemo optimalno rešitev, vendar se natančnost rešitve slabša. Karmarkar priporoča „varno" vrednost $\alpha = 0.25$, vendar iz testiranja sledi, da lahko α brez škode povečamo na 0.3, mnogokrat tudi na 0.5 in več, s čimer bistveno zmanjšamo število iteracij.

• Značilno za Karmarkarjev algoritem je, da se sorazmerno hitro približa rešitvi, nato pa porabi precej iteracij, da doseže potrebno natančnost. Primeri so pokazali, da potrebujemo samo okoli polovico iteracij, če se zadovoljimo s 5% natančnostjo optimalne vrednosti namenske funkcije. Ta lastnost se da s pridom uporabiti v kombinaciji z metodo simpleksov: s Karmarkarjevim algoritmom se optimalni rešitvi približamo, nato pa z metodo simpleksov nadaljujemo do potrebne natančnosti.

• Primerjava z metodo simpleksov je pokazala naslednje: Glede na število iteracij je Karmarkarjev algoritem proti njej tem uspešnejši, čim večja je dimenzija problema. Če smo se pri večjih primerih zadovoljili z nekaj odstotno natančnostjo rešitve, je algoritem zahteval manj iteracij kot metoda simpleksov. Računalniški čas, porabljen za posamezno iteracijo, pa je bil pri Karmarkarjevem algoritmu večji, za kar je verjetno vzrok še ne dovolj raziskana implementacija, kot smo že prej omenili.

Zaključek

Ne glede na dokazano polinomsko časovno zahtevnost je Karmarkarjev algoritem postal zelo popularen predvsem zaradi trditev, da je v praksi hitrejši kot metoda simpleksov. Čeprav se zdi, da so novejše raziskave te trditve ovrgle, vseeno lahko pripomnimo naslednje: Karmarkarjev algoritem oziroma razne njegove kasnejše variante [9,4] kot tudi razne druge metode notranje točke, imajo gotovo obetajočo prihodnost, v začetku verjetno v kombinaciji z metodo simpleksov.

LITERATURA

[1] A. Brondsted, *An Introduction to Convex Polytopes,* Springer, New York 1983.

[2] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, Princeton 1963.

[3] M. C. Ferris, A. B. Philpott, *On the Performance of the Karmarkar's Algorithm,* J. Operational Research **39** (1988) 257–270.

[4] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, J. A. Tomlin, M. H. Wright, *On Projected Newton Barier Methodes for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method,* Mathematical Programming **36** (1986) 183–209.

[5] J. N. Hooker, *Karmarkar's Linear Programmming Algorithm,* The Institute of Management Sciences, 1986.

[6] N. Karmarkar, *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming,* Proc. 16th Annual ACM Symposia on the Theory of Computing, Washington 1984.

[7] W. Nickels, W. Rodder, L. Xu, H. J. Zimmermann, *Intelligent Gradient Search in Linear Programming,* European J. Operational Research **22** (1985) 293–303.

[8] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications,* Harcourt Brace Jovanovich Publishers, San Diego 1988.

[9] M. J. Todd, B. P. Burrell, *An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables,* Algorithmica **1** (1986) 409–424.

[10] Z. Bohte, *Numerične metode,* DMFA Slovenije, Ljubljana 1991.

[11] M. Gutnik, *Reševanje predoločenih sistemov linearnih enačb,* diplomska naloga, Ljubljana 1988.

[12] J. Jamšek, *Karmarkarjev algoritem za reševanje linearnih programov,* magistrsko delo, Ljubljana 1991.

[13] A. Vadnal, *Linearno programiranje,* Obzornik mat. fiz. **5** (1956–57) 101–106.
[14] A. Vadnal, *Lastnosti rešitev problemov linearnega programiranja,* Obzornik mat. fiz. **8** (1961) 65–71.
[15] A. Vadnal, *Uvodne misli o uporabi matematike v ekonomski znanosti,* Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 65–66.
[16] A. Vadnal, *Linearno programiranje,* Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 67.

NOVE KNJIGE

RAZPET M., Umbralni račun, DMFA Slovenije, 1992, 144 str. (Podiplomski seminar iz matematike ; 20)

Knjižica je razdeljena na tri poglavja: 1. Formalne potenčne vrste, 2. Umbralni račun, 3. Umbralni račun v kombinatoriki. V prvem poglavju je definiran kolobar $K[[t]]$ formalnih potenčnih vrst nad komutativnim kolobarjem K z enoto ter operacija komponiranja vrst brez konstantnega člena. V nadaljevanju privzamemo, da je K polje. Karakterizirani so avtomorfizmi in surjektivna odvajanja algebre $K[[t]]$ in konstruirana vložitev v obseg $K((t))$ formalnih Laurentovih vrst nad K.

Drugo poglavje predstavi umbralni račun, ki gleda na formalne potenčne vrste kot na linearne operatorje nad $K[x]$. Paru vrst priredimo Shefferjevo zaporedje polinomov, posamezni vrsti pa zaporedje pridruženih polinomov; le-ti imajo binomsko lastnost. Umbralni operator vrste f priredi polinomu x^n vrsti f pridruženi polinom $p_n(x)$, Shefferjev operator para vrst f, g pa paru f, g ustrezajoči Shefferjev polinom $s_n(x)$.

Tretje poglavje je posvečeno primerom, ki ilustrirajo uporabo umbralnega računa v kombinatoričnem preštevanju. Izpeljana teorija je uporabljena za preštevanje mrežnih poti dveh posebnih tipov v dveh izbranih mrežah. Izračunane so tudi ustrezne rodovne funkcije ter raziskana deljivost dobljenih števil. Pokazano je, da zanje — tako kot za binomske koeficiente — velja Lucasov izrek. Med primeri pogrešamo obravnavo splošnejših mrež, kot je npr. $\mathcal{R}_k := \{(i,j);\ 0 \le j \le ki\}$.

Posamezne razdelke zaključujejo naloge, ki so namenjene utrjevanju obdelane snovi ali pa vsebujejo dodatne zglede. Večina nalog je rešenih na koncu knjige. Sledijo še seznam literature, seznam oznak in stvarno kazalo. Knjiga je pisana zelo skrbno, razumljivo in matematično korektno ter v lepem jeziku. Tu in tam bi si želeli več živahnosti v načinu pisanja, kar pa je seveda stvar okusa.

Delo vsebuje več originalnih rezultatov iz avtorjeve disertacije. V slovensko matematično literaturo prinaša novosti, katerih bodo veseli vsi, ki se ukvarjajo s kombinatoriko in z diskretno matematiko. Še zlasti bo prišla prav podiplomskim študentom matematike, ki bodo v šolskem letu 1991/92 poslušali predavanja iz umbralnega računa na 3. stopnji pedagoške smeri.

Marko Petkovšek

NOVE KNJIGE

STRNAD J., Na pot k Schwarzschildu, DMFA Slovenije, Ljubljana 1991, 52 str. (Zbirka izbranih poglavij iz fizike ; 25)

Študenti fizike poznajo Janeza Strnada ne le kot učitelja, ampak tudi kot avtorja številnih učbenikov, v katerih je študijska snov vselej skrbno zbrana in urejena. Poznajo ga tudi učenci srednjih šol, po učbenikih in prispevkih v Preseku, njihovi učitelji fizike in matematike pa po prispevkih v Obzorniku za matematiko in fiziko. Napisal je tudi nekaj poljudnih knjig ter s tem približal fiziko laikom.

Nedvomno je Janez Strnad uspešen in plodovit pedagog. Sam pravi, da rad tuhta, kako približati fizikalno snov, posebej tisto, ki se zdi težko razumljiva, ne le študentom fizike, ampak tudi ljubiteljem naravoslovja.

Pričujoča knjižica, ki ji pišem popotnico, je avtorjev poskus povabiti vse tiste fizike, ki med rednim študijem fizike splošne teorije relativnosti niso poslušali (takih, ki so jo poslušali, ni prav dosti, nekaj pa jih je), da skupaj z njim uberejo bližnjico.

Do splošne teorije relativnosti je nekaj poti. Je tista, ki jo je predstavil Einstein; v njej gravitacijsko polje določa metriko prostora. Je pot, vzporedna tisti, ki jo hodimo, ko obravnavamo elektromagnetno ali barvno ali šibko polje kot lokalno polje, ki umeri naboj izvira: gravitacijsko polje umerja rotacijo in pomik v štirirazsežnem prostoru.

V polju se telo giblje. Je pa telo hkrati tudi izvir polja. Problem poenostavimo, če iščemo enačbe gibanja in njihovo rešitev za telo, ki se giblje v znanem polju. Rešitve nam povedo pot telesa. Ali pa gibanje telesa poznamo in iščemo enačbe gibanja za polja, ki jih telo rodi, da spoznamo, kakšna so ta polja. Točkast mirujoč izvir rodi Schwarzschildovo gravitacijsko polje.

Strnadova bližnjica k splošni teoriji relativnosti je v tem, da se izogne iskanju in reševanju enačb gibanja za gravitacijsko polje, ker polje ugane. Ugane ga iz enačb gibanja za točkasto telo v zunanjem polju, ki veljajo za Newtonovo mehaniko. Poskrbi za relativistično dinamiko točkastega telesa v sistemu z lastnim časom, obdrži pa polje iz Newtonove mehanike.

Ugibanje najbrž ni čisto prava bližnjica do splošne teorije relativnosti. Res pa je polje, ki ga avtor ugane, prav takšno, kot ga dobimo iz Einsteinovih enačb gibanja za točkast izvir. Strnad pove tudi napovedi splošne teorije relativnosti ter komentira njihovo eksperimentalno potrditev.

Morda bo knjižica vzpodbudila posameznike, da se bodo lotili študija splošne teorije relativnosti brez bližnjice in bodo spoznali, da nobena od poti ni posebej težka, pač pa lepa in pregledna. Upam tudi, da bo vzpodbudila Oddelek za fiziko, da ponudi vsem študentom fizike splošno teorijo relativnosti po eni ali drugi poti ali po obeh vsaj kot fakultativni predmet za vse tiste, ki so bolj zvedavi in več hočejo.

Norma Mankoč Borštnik

PROMETNI TOK

JANEZ STRNAD

PACS 89.40+k

Tok avtomobilov na avtocesti je mogoče opisati podobno kot tekočinski tok v hidrodinamiki. S tem pojasnimo nekatere pojave med vožnjo in predvidimo ukrepe, s katerimi bi se lahko izognili zastojem.

VEHICULAR FLOW

The vehicular flow on an expressway can be described similarly as the fluid flow within hydrodynamics. Therewith some features observed in driving can be explained and measures considered to avoid jams.

Osnovne količine in enačbe

Sodobno življenje si je težko zamisliti brez avtomobila. Zato avtomobil ponuja pripravno možnost, da pokažemo, kako uporabna je fizika [1]. Njegovo gibanje opišemo v mehaniki, delovanje stroja v termodinamiki, vžiganje v elektriki, žaromete v optiki. Pri tem obravnavamo eno samo vozilo ali njegov del. Vendar vozimo po cesti, na kateri so še drugi avtomobili, in avtomobili vplivajo drug na drugega. Gibanje avtomobilov po pasu avtoceste spominja na tekočinski tok. V tem toku ustreza posamezen avtomobil molekuli tekočine. Tok avtomobilov je mogoče pogosto opisati podobno kot tekočinski tok s hidrodinamičnimi prijemi.

Promet na avtocestah že dalj časa opazujejo v raziskovalne namene [2]–[6]. Odkar so v prodaji razmeroma cenene videokamere, pa lahko raziskuje promet na avtocestah tudi — učitelj fizike s člani fizikalnega krožka [7]. Postavimo se na nadvoz nad avtocesto in z nepremično kamero snemamo promet na enem izmed pasov. Izberemo odsek avtoceste z dolžino l, na katerem ni ne dovoza ne izvoza. Na izbranem odseku nekateri avtomobili začnejo prehitevati in zavijejo na prehitevalni pas ali končajo prehitevanje in zavijejo s prehitevalnega pasu na opazovani pas. Po dogovoru upoštevamo samo avtomobile, ki vstopijo na opazovani odsek na začetku in prevozijo po njem vsaj pol razdalje l.

Na zaslonu s samolepilnim trakom zaznamujemo začetek in konec odseka. Razdaljo l med njima določimo z razmerjem iz podatkov za razdaljo med trakovoma in dolžino slike avtomobila znanega tipa na zaslonu ter dolžino tega avtomobila. Denimo, da razdalja med trakovoma, ki ustreza na zaslonu dolžini odseka voznega pasu, meri 20 cm in da je na zaslonu kombi dolg 2 cm. Z znano dolžino kombija 5 m izračunamo dolžino odseka avtoceste $l = 20\mathrm{cm} \cdot 5\mathrm{m}/2\mathrm{cm} = 50\mathrm{m}$.

Izberemo *opazovalni čas* T. Najprej določimo število avtomobilov N, ki v opazovalnem času preidejo prvega izmed trakov, in vpeljemo *prometni tok*

$$j = \frac{N}{T}.$$

Večina kamer ima vgrajeno uro, tako brez težav zasledujemo gibanje avtomobila i čez prvi in čez drugi trak in izmerimo *čas prehoda* t_i, ki ga porabi za pot l. Najbolje je, da zasledujemo vsak avtomobil posebej. Za vsakega od njih izmerimo čas prehoda in iz vseh izračunamo povprečni čas prehoda $\bar{t} = \sum_{i=1}^{N} t_i/N$. Z njim vpeljemo *prometno hitrost*

$$v = \frac{l}{\bar{t}} = \frac{Nl}{\sum t_i}.$$

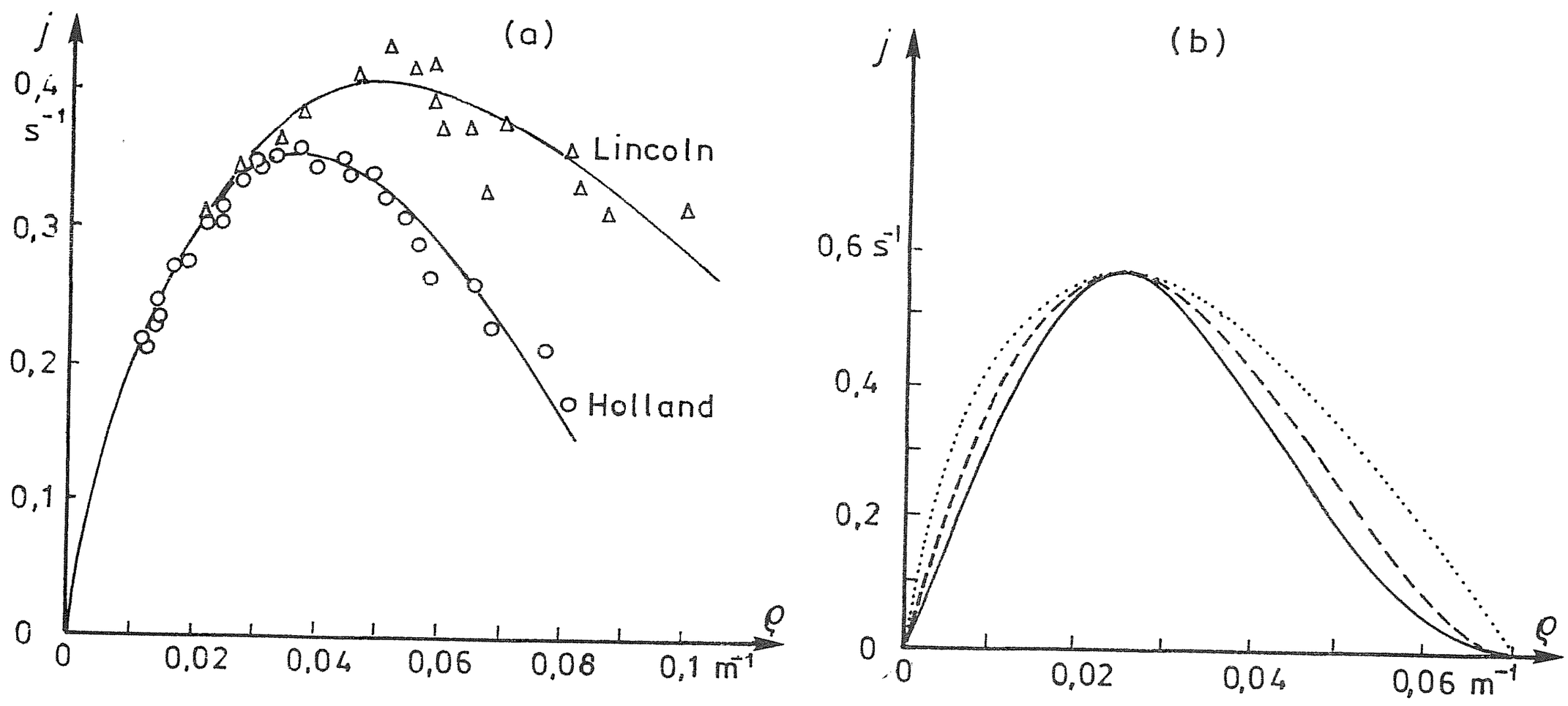
V času T naredi avtomobil v povprečju pot vT. Vpeljemo še *prometno gostoto*

$$\rho = \frac{N}{vT}$$

tako, da velja zveza

$$j = \rho v. \tag{1}$$

Navedimo zgled. Opazujemo $l = 50$ metrov dolg odsek desnega pasu zahodne ljubljanske obvoznice pod nadvozom pred Podutikom v smeri od Šiške proti Viču. Za opazovalni čas izberemo $T = 60$ sekund. V tem času preide prvi presek $N = 15$ avtomobilov. Čas prehoda meri od 1,2 do 1,8 sekunde in za skupni čas dobimo $\sum t_i = 22{,}5$ sekunde. Povprečni čas meri torej $\bar{t} = 22{,}5$ s$/15 = 1{,}5$ sekunde. Iz teh podatkov izračunamo prometni tok $j = 15/60$ s $= 0{,}25$ s^{-1}, prometno hitrost $v = 50$ m$/1{,}5$ s $= 33{,}3$ m/s $= 120$ km/h in prometno gostoto $\rho = 0{,}25$ s$^{-1}/33{,}3$ ms$^{-1} = 0{,}0074$ m^{-1}. Po enotah uvidimo, da je naš tok j s presekom pomnožena običajna gostota toka in naša gostota ρ s presekom pomnožena običajna gostota.



Slika 1. Z merjenji ugotovljena odvisnost prometnega toka od gostote za dva newyorška predora [5] (a) in za nemške avtoceste [6] (b, sklenjeno). S pikami je narisana funkcija (4) z $\rho_1 = 0{,}071$ m^{-1} in $v_1 = 21$ m/s in s črticami funkcija (5) z $\rho_1 = 0{,}071$ m^{-1}, $n = 1{,}8$ in $v_1' = 49$ m/s. Pri veliki gostoti napake pri merjenju močno narastejo.

Izmerjeni izidi se spreminjajo s časom. Ob prometnih konicah, na primer pred začetkom dela ali po njegovem koncu, je prometna gostota precej večja kot sicer. Zato moramo pazljivo izbrati opazovalni čas. Biti mora dovolj dolg, da preštejemo v njem precej avtomobilov, a ne predolg, da bi se zabrisalo spreminjanje prometne gostote s časom. Količine, ki smo jih vpeljali, so povprečja čez opazovalni čas.

Prometni tok in prometna gostota se ne spreminjata samo s časom, ampak se spreminjata tudi s koordinato x, ki jo merimo od prvega preseka v smeri vožnje. Število avtomobilov se ohrani, zato velja *kontinuitetna enačba*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Z izbranimi oznakami ima enačba znano obliko [8].

Prometni tok je odvisen od prometnih predpisov, denimo od največje dopustne hitrosti, od stanja cestišča, od vremenskih razmer. Izkušnja pa kaže, da je odvisen tudi od prometne gostote. Pri majhni gostoti je tok majhen in narašča z naraščajočo gostoto, doseže vrh in nato pojema, dokler pri mejni gostoti ρ_1 ne pade na nič:

$$j = j(\rho). \tag{3}$$

To „enačbo stanja" imenujejo *osnovno odvisnost* ali *osnovni diagram* (Sl.1). Največja mogoča gostota, pri kateri se avtomobili domala dotikajo, je okoli $(5\ \mathrm{m})^{-1} = 0{,}2\ \mathrm{m}^{-1}$. Mejna gostota je kake trikrat manjša. Zaradi enačb (1) in (3) je tudi prometna hitrost odvisna od prometne gostote $v = j(\rho)/\rho = v(\rho)$. Za osnovno odvisnost vzamejo, na primer, [4]

$$j = v_1 \rho \ln \frac{\rho_1}{\rho}, \qquad v = v_1 \ln \frac{\rho_1}{\rho} \tag{4}$$

ali [6]

$$j = v_1' \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)^n, \qquad v = v_1' \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)^n. \tag{5}$$

Motnje in udarni valovi

Enačbo stanja (3) upoštevamo v kontinuitetni enačbi (2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

in s transformacijo $x' = x - c_g t$ preidemo v nov koordinatni sistem, ki se v prvotnem giblje s konstantno hitrostjo c_g. V zapisano enačbo vstavimo x' in z zahtevo, da motnja v novem koordinatnem sistemu miruje, dobimo

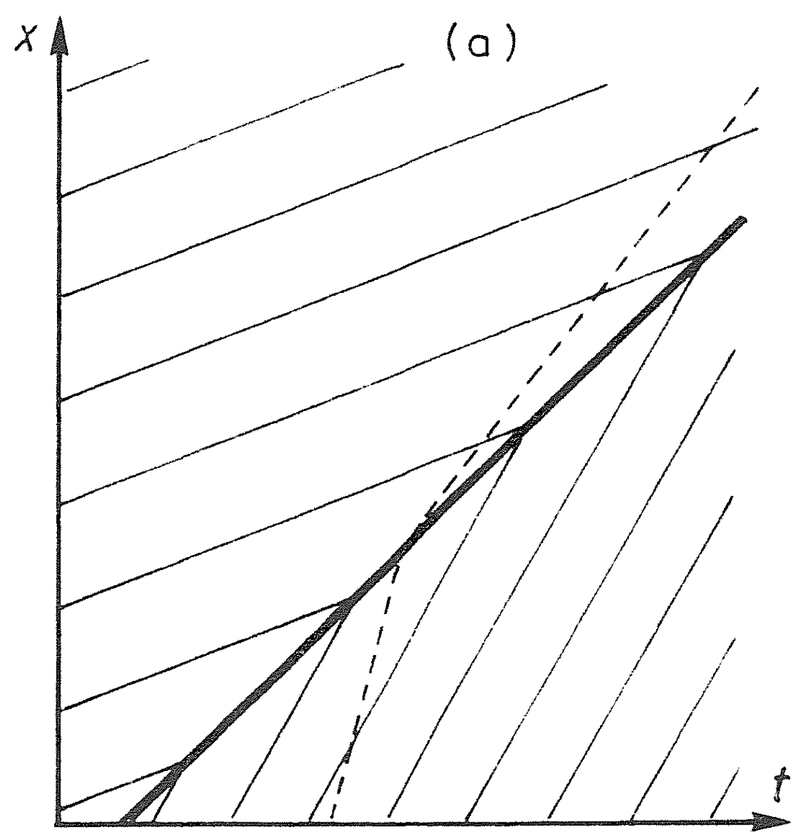
$$c_g(\rho) = \frac{\partial j}{\partial \rho}. \tag{6}$$

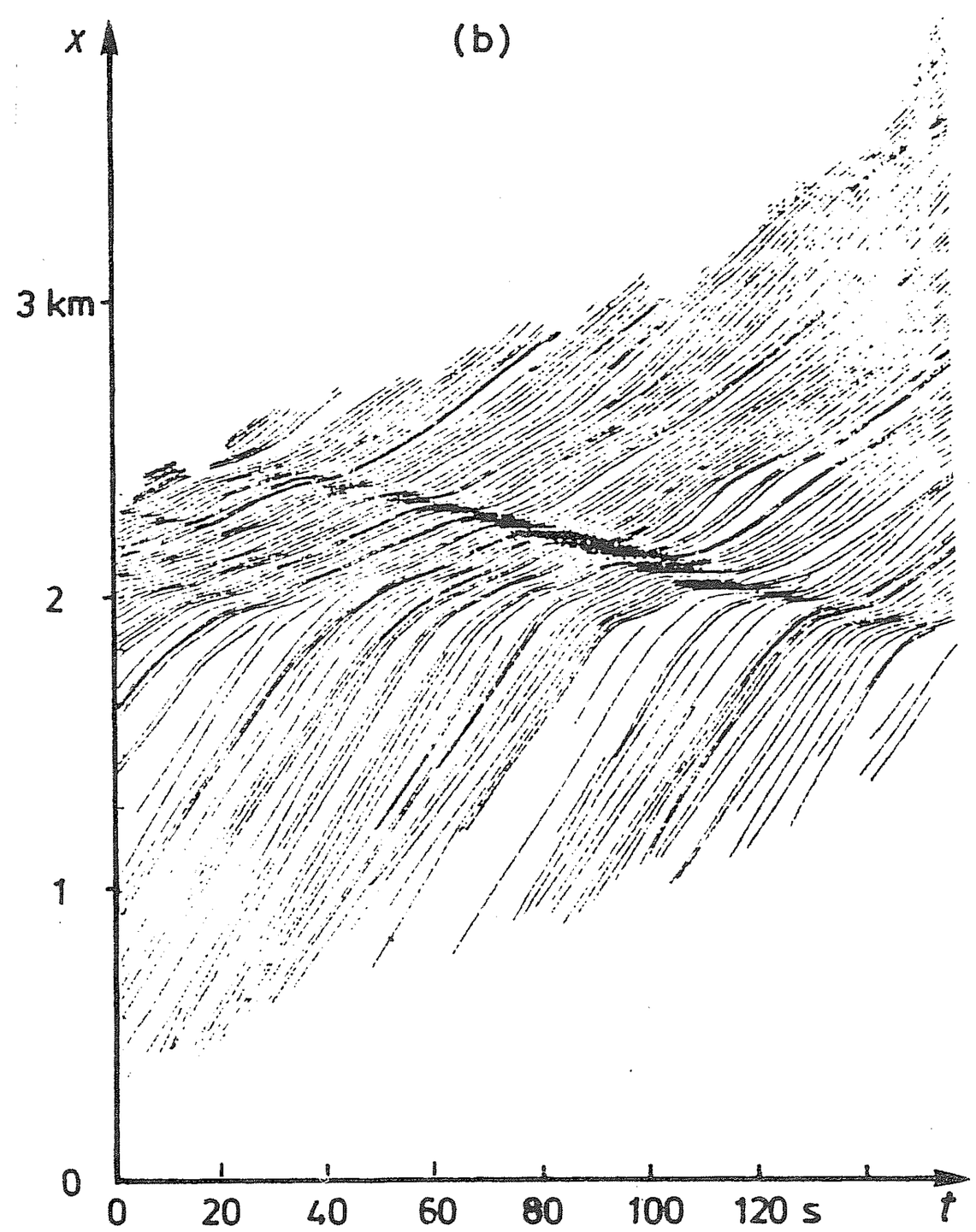
V novem koordinatnem sistemu je prometni tok j' neodvisen od x':

$$j' = \rho v' = \rho(v - c_g(\rho)). \tag{7}$$

Po vrsti avtomobilov potuje motnja gostote s hitrostjo (6), ne da bi se ji pri tem spremenila oblika. Voznik vozi s konstantno hitrostjo, dokler ga pri tem ne zmoti kak drug avtomobil. Hitrost pa zmanjša, ko se približa počasnejšim vozilom, ali jo poveča, ko pripelje na daljši bolj prazen odsek ceste. Tako motnjo sta M.J.Lighthill in G.B.Whitham imenovala *kinematični val*, češ da ga je mogoče pojasniti z zapisanimi enačbami, ne da bi uporabili enačbo gibanja. Prometni tok sta obdelala z enakim prijemom kot plimski val v dolgi reki [2].[1]

Slika 2. (glej I. stran ovitka) Prometno hitrost v določa nagib zveznice izhodišča in točke na krivulji $j(\rho)$ in hitrost kinematičnih valov c_g nagib tangente (a). Hitrost udarnih valov c_u določa nagib zveznice točk, ki ustrezata razmeram onstran in tostran udarnega vala; ta hitrost je pozitivna ali negativna (b).





Slika 3. Časovni potek poti avtomobila (črtkani črti), kinematičnih valov (tanke črte) in udarnega vala (debelejša črta) [7] (a). Valovno čelo, ki ga je raziskal J. Treiterer 25.6.1967 na ameriški meddržavni cesti blizu Columbusa. Tostran valovnega čela se gibljejo avtomobili s hitrostjo okoli 100 km/h, onstran pa s skoraj dvakrat manjšo hitrostjo. Valovno čelo potuje s hitrostjo okoli 15 km/h v nasprotni smeri [6] (b).

---

[1] V plitvih kanalih z globino vode h veljata enačbi [8]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Poleg motenj, v katerih se gostota zvezno spreminja s krajem in časom, lahko po vrsti avtomobilov potujejo tudi motnje, v katerih se gostota skokovito spremeni. Takim motnjam pravimo *udarni valovi.* Tostran vala se gostota ρ_2 znatno razlikuje od gostote ρ_1 onstran. Meja med obema območjema — udarni val — potuje s hitrostjo c_u, ki jo izračunamo iz enačbe (7): $j'(\rho_1) = j'(\rho_2)$. Glede na val je prometna hitrost tostran $v_2 - c_u$ in onstran $v_1 - c_u$, tako da velja v koordinatnem sistemu, ki miruje glede na cesto:

$$\rho_1(v_1 - c_u) = \rho_2(v_2 - c_u).$$

Iz nje izračunamo hitrosti udarnega vala

$$c_u = \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{v_2 - v_1} = \frac{j(\rho_2) - j(\rho_1)}{v_2 - v_1}. \tag{8}$$

V diagramu $j(\rho)$ določa prometno hitrost pri dani prometni gostoti nagib zveznice točke na krivulji z izhodiščem. Hitrost kinematičnega vala določa nagib tangente na krivuljo (Sl.2a). Hitrost udarnega vala pa določa nagib zveznice točk, ki ustrezata prometni gostoti onstran in tostran vala (Sl.2b). V redkem prometu je hitrost udarnega vala pozitivna in potuje val v smeri vožnje, v gostem je hitrost negativna in potuje val v nasprotni smeri vožnje. Udarni val se pokaže, ko zasledujemo gibanje posameznih avtomobilov na določenem odseku avtoceste (Sl.3).

Enačba gibanja

Ne moremo se nadejati, da bi do *prometne enačbe gibanja* prišli po poti, po kateri izpeljemo enačbo za gibanje tekočine iz Newtonovega zakona. Namesto, da bi se zanimali za skupino avtomobilov, ki ustreza delu tekočine, se omejimo spočetka na dva avtomobila. V *linearnem modelu* privzamemo, da je odziv voznika, to je pospešek, sicer sorazmeren z dražljajem, a zakasnjen:

$$\left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)_{t+\tau} = k\left[\left(\frac{dx_{i-1}}{dt}\right)_t - \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_t\right].$$

Kot dražljaj nastopa hitrost predhodnika glede na opazovani avtomobil i: voznik si prizadeva, da bi sledil predhodniku. Merjenja so pokazala, da je z enačbo mogoče dobro opisati gibanje dveh avtomobilov, ne pa izrazitejšega prehoda iz danih prometnih razmer v druge. Da bi zajeli tudi to, so v *nelinearnem modelu* upoštevali spremenljiv koeficient k:

$$k = v_1\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t+\tau}\right]^l : [x_{i-1}(t) - x_i(t)]^m.$$

V najpreprostejšem nelinearnem modelu so za števili v eksponentih postavili $l = 0$ in $m = 1$ in dobili naposled odvisnost (4). Do nje je prišel H.Greenberg že prej z zgledovanjem na hidrodinamiko.

Enačbo gibanja je raziskoval tudi I.Prigogine, ki se je s prometnim tokom ukvarjal, ker so razmere dovolj preproste, da ga je mogoče pojasniti z vedenjem posameznega voznika [5]. Spraševal se je, če bi lahko izkušnje pri tem koristile, da bi pojasnili bolj zapletene družbene pojave z vedenjem posameznika. Ne da bi sledili Prigoginu, uporabimo Eulerjev opis. V njem povemo, kolikšna je hitrost na danem kraju in danem trenutku, ne da bi spraševali, kje je bil del tekočine v začetnem trenutku. Pospešek tega dela je potemtakem

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Delu tekočine ustreza skupina avtomobilov in tako zapišemo tudi levo stran prometne enačbe gibanja. Na njeni desni strani pa vodi člen, ki je v sorodu z nelinearnim modelom za $l = 0$ in $m = 1$ in ki izraža težnjo voznika, da bi vozil s hitrostjo $v_0(\rho)$ glede na dano prometno gostoto. Če vozi z manjšo hitrostjo, pospeši, če vozi z večjo, zavre, oboje naredi z zakasnitvijo, za katero je značilen čas τ, torej $-(v - v_0(\rho))/\tau$ [4]–[6].

Nato se naslonimo na hidrodinamične enačbe. Na desni strani enačbe gibanja dodamo člen $-(c^2/\rho)\partial\rho/\partial x$, ki ga srečamo pri obravnavanju majhnih motenj v tekočini.[2] Člen upošteva, da se voznik odzove tudi na naraščanje ali pojemanje krajevne prometne gostote: če gostota narašča, zavre, če pojema, pospeši. Enačbi dodamo še člen $\nu\partial^2 v/\partial x^2$, ki po obliki spominja na tak člen v enačbi za gibanje viskozne tekočine.[3] Člen poskrbi, da se izrazite spremembe prometne hitrosti s časom in krajem zabrišejo. Obeh dodanih členov v prometni enačbi gibanja ne poskusimo podrobno pojasniti, koeficiente v njiju, relaksacijski čas τ, „hitrost zvoka" c in „kinematično viskoznost" ν pa določimo po merjenjih prometnih tokov. Naposled zapišemo prometno

---

[2] Upoštevamo kontinuitetno enačbo in Newtonov zakon v eni razsežnosti:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Enačbi preideta v

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},$$

če se gostota in tlak $\rho = \rho_0 + \rho'$ in $p = p_0 + p'$ le malo spreminjata okoli srednjih vrednosti ρ_0 in p_0. Povezuje ju enačba stanja $p' = (\partial p/\partial\rho)_S\rho'$ za izentropno spremembo. Iz treh enačb sledi valovna enačba za ρ' ali v s hitrostjo valovanja $c = (\partial p/\partial\rho)_S^{1/2}$. V tekočini je to valovanje zvok in c hitrost zvoka. Iz zapisanih enačb sledi tudi $\partial v/\partial t = -(c^2/\rho)(\partial\rho/\partial x)$ [8].

[3] V Navier-Stokesovi enačbi v eni razsežnosti se pojavi tak člen pomnožen s $\frac{4}{3}$ [8].

enačbo gibanja v celoti [6]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{v - v_0(\rho)}{\tau} - \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Po merjenjih na nemških avtocestah so pripravne vrednosti treh koeficientov: $\tau = 30$ s, $c = 70$ km/s in $\nu = 7 \cdot 10^4$ m^2/s.

Iz enačbe gibanja (9) nastane pri prehodu v gibajoči se koordinatni sistem s transformacijo $x' = x - (\partial j/\partial \rho)t$ navadna diferencialna enačba

$$\frac{d^2 v}{dx'^2} + F(v)\frac{dv}{dx'} - \frac{v}{\nu\tau} = -\frac{v_0(\rho)}{\nu\tau}. \tag{10}$$

Kontinuitetna enačba obvelja v obliki (5). Enačba (10) nekoliko spominja na enačbo za vsiljeno nihanje, le da koeficient drugega člena ni konstanten in da nastopata namesto odmika in časa hitrost in spremenljivka x'. Z enačbo (1) dobimo koeficient:

$$F(v) = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial j}{\partial \rho} - v - \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\rho}{\nu}\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v}\left(\frac{\rho \partial v}{\partial \rho} - c\right)\left(\frac{\rho \partial v}{\partial \rho} + c\right).$$

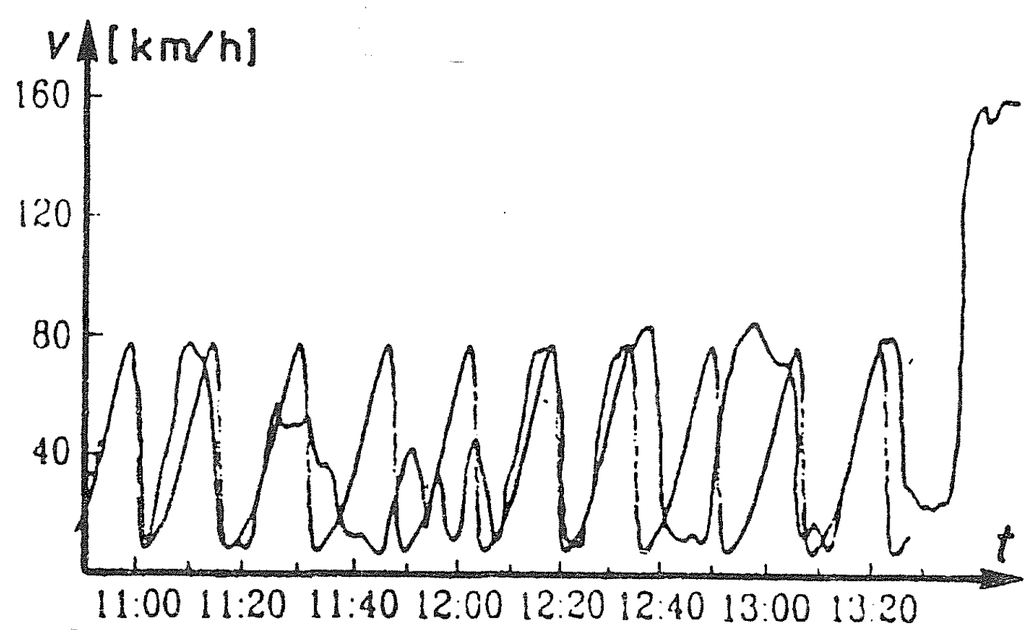
Odvod $\partial v/\partial \rho$ je negativen: za odvisnost (4) je enak $-v_1 =$ konst., za odvisnost (5) pa $-nv_1'(\rho/\rho_1)(1 - \rho/\rho_1)^{n-1}$. Odvisnost (4) za prometno enačbo gibanja torej sploh ni za rabo. Za odvisnost (5) pa postane koeficient negativen, če velja $c \leq -\frac{\rho \partial v}{\partial \rho}$ ali $\rho \geq \rho^* = 0,29\rho_1 = 0,02$ m^{-1}. Zadnji rezultat dobimo kot numerično rešitev enačbe z odvisnostjo (5) in navedenimi koeficienti.

Enačbo (10) reši konstantna hitrost: $v = v_0(\rho)$. Ali je rešitev stabilna, ugotovimo, če dopustimo majhne odmike hitrosti okoli v_0. Vzamemo koeficient drugega člena $F(v_0)$ za konstanten in prometno gostoto blizu ρ^*. Navodila za reševanje diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti nas pripeljejo do rešitve

$$v = v_0(\rho) + \mathrm{e}^{-Fx'/2}(A_1 \mathrm{e}^{x'/\sqrt{\nu\tau}} + A_2 \mathrm{e}^{-x'/\sqrt{\nu\tau}}),$$

v kateri smo zanemarili $F^2(v_0)$ v primeri z $1/\nu\tau$. Rešitve z $A_1 = 0$ majhni odmiki od v_0 ne prizadenejo, dokler je koeficient $F(v_0)$ večji od nič. Zaradi prvega faktorja v drugem členu pa rešitev naraste z naraščajočo spremenljivko x' čez vsako mejo, če je koeficient F negativen. Enakomerno potovanje motnje z nespremenjeno obliko s hitrostjo $v = v_0$ je potemtakem za $\rho > 0,02$ m^{-1} nestabilno.

V dolgo računanje smo se spustili zaradi tega izida, čeprav je odvisen še od izbire odvisnosti $v(\rho)$. Opozarja namreč na to, da majhni odmiki močno narastejo in lahko privedejo do zastoja že pri gostoti, ki je znatno — v našem primeru skoraj desetkrat — manjša od gostote, ko se avtomobili domala dotikajo. Zaradi tega je mogoče upati, da bi lahko z začasnimi ukrepi, denimo z zmanjšanjem dopustne hitrosti na odseku avtoceste, preprečili hude motnje ali celo zastoj. Vendar bi morali ob avtocesti postaviti merilnike, ki bi samodejno krmilili prometne znake.



Slika 4. Pri precejšnji gostoti prometa so mogoče periodične rešitve, ki ustrezajo zatikajočemu se prometu. Izmerjeni časovni potek prometne hitrosti na veliki petek 17.4.1981 na nemški avtocesti A5 v bližini Karlsruheja se dobro ujema z modelsko periodično rešitvijo [6]. Za ta primer so postavili Reynoldsovo število $c^2\tau/\nu$, v katerem so za tipično razdaljo vstavili $c\tau$, enako 100.

Z zahtevnejšimi matematičnimi prijemi lahko pridemo pri raziskovanju prometnih tokov do še zanimivejših ugotovitev. Med take sodi, na primer, limitni cikel, ki opisuje zatikajoči se promet, v katerem vozniki speljejo in se zaustavijo in se to nekaj časa ponavlja (Sl.4). Na tem mestu bi nas razpravljanje v tej smeri odvedlo predaleč. Zadovoljimo se z dosedanjim bežnim pogledom v raziskovanje prometnih tokov in pribijmo, da je tudi družabno življenje avtomobilov zelo zanimivo in da ga je mogoče z matematiko in fiziko bolje razumeti.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Vozi me, avto, v daljave. Fizika in avtomobil,* DMFA Slovenije, Ljubljana 1991 (Knjižnica Sigma ; 49).

[2] M. J. Lighthill, G. B. Whitham, *On kinematic waves,* I. *Flood movements in long rivers;* II. *A theory of traffic on long crowded roads,* Proc. Roy. Soc. A **229** (1955) 281; 317.

[3] R. Herman, K. Gardels, *Vehicular traffic flow,* Sci. Am. **209** (1963) 35 (6).

[4] D. C. Gazis, *Mathematical theory of automobile traffic,* Science **157** (1967) 273.

[5] I. Prigogine, R. Herman, *Kinetic Theory of Vehicular Traffic,* American Elsevier, New York 1971.

[6] R. Kühne, *Verkehrsablauf auf Fernstrassen,* Phys. Bl. **47** (1991) 201.

[7] Y. Walker, *How to analyze the shock waves that sweep through expressway traffic,* Sci. Am. **261** (1989) 84 (2).

[8] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics,* Pergamon Press, Oxford 1987.

RAČUNALNIŠTVO V SREDNJIH ŠOLAH

PETER PRELOG

Math. Subj. Class. (1991) 68-01

Pred dvajsetimi leti smo v naših srednjih šolah začenjali pouk računalništva in prek deset let uporabljamo v šoli računalnike. Kljub temu še danes nimamo jasnih pedagoških izhodišč za to delo.

COMPUTER EDUCATION IN SECONDARY SCHOOLS

Computer education was introduced in our school programmes twenty years ago. Computers have been applied on education for more than ten years, however, we still don't have any clear educational starting-point for teaching the subject.

1. Obetavni začetek

Prve informacije o računalništvu so učencem v večini slovenskih srednjih šol posredovali njihovi profesorji matematike in fizike. Kdaj se je vse to začelo in kaj so ti profesorji takrat vedeli o računalništvu, bi morda lahko ocenili iz vsebin sorazmerno redkih strokovnih besedil, ki so jim bila takrat dostopna. Tuje literature je bilo malo, zato kaže pregledati takratni Obzornik za matematiko in fiziko. V stvarnem kazalu za letnike 1951 do 1968 najdemo skromen seznam člankov pod naslovom Računski stroji.

Prva informacija o novosti je bila dovolj zgodnja, leta 1951 — že v prvem letniku Obzornika (Ridenour, *Hitri številčni računski stroji*) [1]. Ta članek je prav zanimiv, saj kaže takratno stopnjo razvoja računalništva. V prvih desetih letnikih Obzornika lahko najdemo samo še dva članka o računalnikih, kar dovolj dobro odraža takratni interes naših matematikov in fizikov za novotarijo. Še manj je o računalnikih vedela javnost, največ iz znanstvene fantastike — pa še te je bilo takrat bolj malo.

Začetek računalništva v naših šolah bom opisal iz lastne izkušnje. Prvo obsežnejšo in uporabno informacijo o računalništvu sem dobil iz knjižice Franceta Križaniča, *Elektronski aritmetični računalniki* [2]. Takrat (1960) v Sloveniji še ni bilo nobenega računalnika, bilo je samo nekaj klasičnih elektronskih strojev za obdelavo podatkov [3]. Jeseni 1962 pa je Univerza skupaj z IJS kupila za 90000 $ naš prvi elektronski računalnik Zuse Z-23 [4] in že v decembru istega leta so bili prvi tečaji za neposredne uporabnike tega računalnika. Kasneje smo se s strojem lahko seznanili tudi srednješolski profesorji, to je bilo tudi moje prvo srečanje s pravim računalnikom.

Po branju Obzornika dobimo vtis, da so z računalništvom pri nas začeli v IJS in v takratnem Računskem centru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani. Za računalnike so se seveda zanimali tudi drugi, predvsem elektrotehniki, zunaj Univerze pa večje organizacije v upravi in gospodarstvu. Do leta 1966 so v Sloveniji kupili le še pet računalnikov [3], potem se je število nakupov večalo hitreje, ker so računalniki postajali dostopnejši. Kupovali so predvsem računalnike IBM 360 in 1130, tega je kasneje dobila tudi fakulteta na Jadranski 19. Kljub danes nepojmljivo

visoki ceni, („mali" računalnik IBM 1130 je npr. stal 200.000 $ [3]), je pri nas število računalnikov hitro naraščalo, saj je nakup računalnika postal za podjetja in ustanove tudi vprašanje ugleda in prestiža (ali je danes drugače?).

V srednješolskih učnih načrtih takrat o računalnikih še ni bilo ničesar. Za pripovedovanje učencem o njih smo si ukradli nekaj časa pri matematiki, nekaj žic in žarnic pri fiziki, prebirali smo Križaničevo knjižico in sestavljali „preklopna vezja".

Že leta 1970 pa sem lahko izkoristil bližino podjetja, ki je imelo nov računalnik. Znanec — matematik, vodja novoustanovljenega „računskega centra" — mi je omogočil dostop na njihov pripravljalni tečaj za uporabo računalnika, učili smo se programirati v fortranu, programe smo luknjali na kartice in jih „spuščali skozi" računalnik. Za učence pa je bil računalnik še nekaj časa nedosegljiva naprava, o kateri jim je pripovedoval profesor. Kasneje so nam dovolili tudi ekskurzije v računske centre; učenci so skozi stekleno pregrado smeli opazovati delo pri (za današnje pojme ogromnem) računalniku, ki je bil v posebnem klimatiziranem prostoru. Posvečeni so se sukali okoli njega v belih plaščih, na računalniku so se prižigale in ugašale lučke, bilo je kot v kinu, zares imenitno! V šoli smo sestavili preproste programe v fortranu, ljubeznivi gostitelji so jih „zluknjali", vložili v računalnik in nam potem vrnili metre papirja, potiskanega s seznami napak.

Vedno več je bilo tudi v slovenščini napisanega o računalnikih, razmnoževala so se interna navodila za njihovo uporabo in programiranje. V Ljubljani je (1971) izšla o računalnikih prva obširnejša knjiga [6], začel je delati Republiški računski center.

Končno je novotarija tudi formalno pričela vstopati v šole. V letu 1971 — eno leto po rojstvu mikroprocesorja smo bili slovenski šolniki z računalništvom še kar na tekočem: v Ljubljani je bil prvi daljši seminar, ki naj bi nas profesorje pripravil za bodoči pouk računalništva. Skripta [8], ki so jih napisali predavatelji tega seminarja, so nam bila v naslednjih letih prvi priročnik pri pouku v šoli. Tri leta kasneje pa je že bil potrjen prvi učbenik: I.Bratka in V.Rajkoviča, *Uvod v računalništvo* [7].

2. Ponesrečeno nadaljevanje

Začetni pouk računalništva je pač ustrezal znanju, ki smo ga o tem imeli predavatelji; po svojih najboljših močeh smo poskušali učencem posredovati tisto, kar smo pridobili na seminarju in iz skromne literature. Seveda je bil ta pouk največkrat brez vsakega stika z računalnikom (saj jih takrat v šolah še nismo imeli), zato je s časom začel postajati rutinski, tipičen šolski „predmet", dolgočasen kot pouk klavirja — brez klavirja. Poleg tega je kazalo, da bo uspešno in pravočasno posajena sadika srednješolskega računalništva ostala prepuščena sama sebi. Na republiškem Zavodu za šolstvo za ta predmet sploh ni bilo svetovalca, med fakultetami, ki so izobraževale bodoče srednješolske profesorje, se nobena ni čutila odgovorno za to področje. Nihče pa ni mogel pričakovati od nas (na gimnazijah smo računalništvo učili največkrat profesorji matematike in fizike), da bomo

prevzeli vso iniciativo tudi pri tretjem šolskem predmetu, že prva dva sta bila dovolj zahtevna.

Potem so se, ob prihodu mikroračunalnikov, razmere spremenile. Zaradi nižjih cen so računalniki postali dostopni tudi šolam. Učenci so prvič lahko računalnike uporabljali neposredno in interaktivno. Za učitelje se je šele s tem začelo pravo šolsko računalništvo. Seveda smo takrat potrebovali strokovno pomoč in usmerjanje, toda — odkod? V Sloveniji kratkomalo ni bilo pedagoškega računalniškega vrha.

Hkrati z nekaterimi učenci smo se potem prebijali skozi takšne in drugačne priročnike raznih računalnikov, učili smo se kopico potrebnih in nepotrebnih reči. Vse skupaj je zahtevalo dosti časa, čeprav ni bilo na nobenem seznamu „del in nalog". Potrjevali smo pač že dolgo znano javno mnenje, da je poučevanje, npr. računalništva, delo, ki se mu lahko sam priučiš in pri tem fakulteta ni potrebna. To je — s svojim dosedanjim odnosom do šolskega računalništva — potrdilo tudi slovensko visoko šolstvo, saj se mu ni zdelo potrebno izobraževati računalnikarjev — pedagogov. Ob prihodu prvih inženirjev računalništva, ki prevzemajo pouk tega predmeta, bi pa vendarle ne smeli pozabiti tega, kar smo „priučeni delavci" počeli v teh dvajsetih letih.

3. Zlato tele

Izjemna uporabnost in privlačnost, ki jo ima — še posebej v očeh mladine — mikroračunalnik, mu daje v šoli poseben položaj med učili in računalništvu med šolskimi predmeti. Kako smo pedagogi obvladali položaj ob prihodu novega idola na naše šole?

Spomnimo se najprej, kako je bilo pred desetimi leti, na začetku usmerjenega izobraževanja. Predmet računalništvo je bil v reformiranih predmetnikih skoraj vseh srednjih šol pete stopnje. Z nekakšnimi „osnovami" računalništva so v prvem razredu pri OTP posiljevali celó vso generacijo srednješolcev, dobili smo nekaj srednjih računalniških šol in seveda tudi študij računalništva na visoki šoli, rojeval se je nov strokovnjak, računalnikar. Začeli smo kupovati najcenejše računalnike. Kako sem bil ponosen, ko so se učenci lahko vrstili pri pouku kar na treh računalnikih v istem prostoru! Bilo je sicer nekoliko zapleteno, saj so bili različni, imeli so različne operacijske sisteme in niso razumeli istega dialekta basica (ki pa sploh ni bil v učnem načrtu) — toda kdo bi se takrat menil za take malenkosti.

Takrat se je pokazala še ena posebnost novega šolskega predmeta: nekateri mladi navdušenci, učenci, so z lastnim izobraževanjem začeli daleč prehitevati šolo. Vzpodbujal jih je predvsem sam računalnik kot fantastični učni stimulator. Ti učenci so seveda računalnike (ki so bili nasploh boljši kot tisti v šoli) imeli doma ali pa pri starših v službi. Če so se preveč posvetili delu z računalnikom, so pogosto zanemarili druge šolske obveznosti. Strokovnega odmeva na to najnovejšo obliko zasvojenosti ni bilo, tudi pedagogi in psihologi so odpovedali.

V šoli je začelo odtekati nesorazmerno mnogo denarja za drage računalnike namesto za nakup druge opreme in učil za druge predmete. Tako je nastal nov problem: računalništvo je za naše šolstvo kratkomalo predrago. Neusklajenost med zahtevami družbe po računalniško dobro opremljeni šoli in skromno finančno podlago, ki jo ta družba šoli daje, je osnovno protislovje šolskega računalništva. Ali bo treba za celotno opremljanje šol žrtvovati več denarja ali pa se sprijazniti (toda enakovredno za vso šolsko opremo in učila, tudi za računalnike) z nižjim standardom.

Nesmiselno je izsiljevati nakup velikega števila računalnikov, če potem nimamo denarja za njihovo redno vzdrževanje in potrebni potrošni material (papir in trakove za tiskalnike, diskete, itd.). Že plačevanje redne računalniške servisne službe je zaradi brezobzirno zasoljenih cen za šolo nemogoče. Redno servisiranje pa je za korektno vzdrževanje drage (a pod množico nestrokovnih prstov zelo obremenjene) računalniške opreme v šoli zelo potrebno. Dosti škode nastane tudi zaradi nekakšne bogataške velikopoteznosti mladih uporabnikov, ki potem opreme ne varujejo tako, kot smo bili navajeni v dosedanji skromnejši šoli. Računalnike je menda treba zamenjati že po petih, šestih letih, zato se ne splača prav posebej paziti nanje!

Le kako smo mogli nekatera druga učila uporabljati več desetletij?

Kljub vsem težavam smo začeli kupovati vedno dražje in boljše računalnike, tudi šolo je zagrabila računalniška nakupovalna mrzlica. Vsak je seveda kupoval po svojem okusu, zato smo kmalu imeli na šolah pravi semenj vseh vrst računalnikov. Da bi to nekako uredili, so na Zavodu za šolstvo zbrali komisijo, ki naj bi določila enoten tip računalnika in omogočila sistematično opremljanje šol z njimi. Prizadevnim članom komisije je deloma uspelo zajeziti neurejenost in sistematično opremiti nekaj šol — vendar pa se osnovnejših računalniških problemov niso lotevali.

Sploh je bilo za ves razvoj našega šolskega računalništva značilno, da so se uradni šolski organi (ravnatelji šol, Zavod za šolstvo) več ukvarjali z reševanjem finančnih in organizacijskih problemov kot pa z iskanjem osnovnega smisla in namena uvedbe računalnika v šolo. Toda prav tega bi se vendar morali lotiti najprej, saj tudi dober gospodar najprej premisli, kaj potrebuje in zakaj potrebuje prav to — šele potem žrtvuje denar za nakup. Idejna pedagoška izhodišča bi morali že na začetku postaviti tisti strokovnjaki, računalnikarji in pedagogi, ki so to bili zmožni in dolžni storiti. To se, žal, ni zgodilo in zato šolstvo do uvajanja računalništva ni imelo prav nič bolj resnega odnosa kot katerikoli razvajeni najstnik, ki je s tečnarjenjem prisilil starše, da so mu kupili računalnik zato, ker ga je imel tudi sosedov sin.

4. ... in kako je danes?

V šolah je že dosti računalnikov, pedagoških izhodišč pa še vedno nimamo in jih morda sploh nihče ne išče. Za takšno računalništvo, kot ga imamo, smo zapravili preveč denarja. Seveda nam danes ni več potrebno

dokazovati upravičenost uporabe računalnika v šoli. Izkazal se je kot dobro učilo in orodje v učiteljevih rokah. Gotovo je prav naša naloga seznaniti učence z računalnikom in jih naučiti uporabljati ga. Računalnike bomo uporabljali tudi v šolskih pisarnah in v knjižnici.

Pač pa se zdi, da je v srednji šoli nepotrebno napihovanje računalništva v nekakšno znanost. Za večino učencev popolnoma zadošča seznanjanje z možnostmi uporabe računalnika in učenje za to potrebnih spretnosti. Vse to lahko poteka izključno ob računalniku in (pri učiteljih) tako priljubljena predavanja sploh niso potrebna. Presenetljivo je, da prav računalnikarji, ki obvladajo najbolj učinkovito orodje sedanjosti, tega pri pouku nekako neradi uporabljajo in raje predavajo ...

5. Računalnik — stroj za učenje?

Računalnik je treba sneti s potrošniškega prestola in ga podrediti potrebam šole, učitelji se ga morajo naučiti uporabljati. Predvsem se mora razširiti področje uporabe, dostopen naj bo tako šolskemu psihologu kot profesorju angleščine, čeprav ga bodo gotovo še vedno največ uporabljali pri določenih predmetih. Profesor računalništva bi pa moral na šoli postati osrednji koordinator tega dela in predvsem strokovni svetovalec vsem kolegom, uporabnikom računalnikov.

Za splošno šolsko uporabo računalnikov je že bilo nekaj prizadevanj ob prodaji šolskih kompletov Partnerjev, v njihovi programski opremi je bilo pripravljenih tudi nekaj programov za šolo. Nekateri so bili prav obetavni (čeprav še nedodelani), žal, njihova uporaba iz različnih razlogov ni zaživela. Tem bolj pa je presenetljivo, da ob sedanjem relativnem šolskem računalniškem izobilju takih programov skorajda ni najti. Popolnoma neobdelano je področje inštruktažnih tutorskih programov (za vsa učna področja), kjer bi bil računalnik s svojo diskretnostjo (ob učenčevih neumnih napakah), s svojim neskončnim potrpljenjem pri opozarjanju na napake, z usmerjanjem v njihovo odpravljanje in z izrednim stimulativnim potrjevanjem vsakega, tudi najmanjšega učenčevega uspeha — učitelju dragocen pomočnik — seveda, če bi ga znal uporabiti. Takih programov se pri nas očitno ne zdi vredno izdelovati (nisem še slišal o tem), prepričan pa sem, da jih v tujini že imajo in bi te lahko uporabljali v originalu ali prirejene tudi mi. Za uporabo takšnih programov učencu ni treba kaj dosti vedeti o računalniku, treba ga je naučiti le vključiti računalnik in poklicati željeni program (tega naj se nauči pri uvodu v računalništvo), lahko pa to stori tudi učitelj in mora potem učenec biti sposoben samo tipkati odgovore na vprašanja, ki mu jih zastavlja računalniški program. Pri tem lahko uporabljamo tudi „zastarele" računalnike, saj postane pomembna le vsebina programa in ne operacijski sistem. Preprostejše programe te vrste (prilagojene določenemu učencu) bi pravzaprav moral znati sestavljati — sam ali pa s pomočjo računalnikarja — vsak učitelj, seveda bi jih prej morali tega na fakultetah naučiti. Ali danes katerikoli fakultetni program to že vsebuje?

Na šoli bi bila dobrodošla kamrica z računalnikom, kamor bi se učenec lahko napotil in tam nemoteno vadil razne šolske neprijetnosti: nepravilne

angleške glagole, dvojne ulomke ... Disketo z ustreznim programom bi dobil v šolski knjižnici ali pri profesorju. Tak način uporabe računalnika bi tega morda približal tudi tistim učencem, ki ga sedaj neradi uporabljajo, morda bi pa zamikalo celo katerega „neračunalniškega" profesorja, da bi se ga na samem naučil uporabljati?

Tak učni stroj za individualno učenje lahko skupaj s primernim priročnikom uporabljamo v šoli ali doma (tudi za izobraževanje odraslih). S primernimi programi pa je še posebej uporaben za inštruktažo tistih najmanj sposobnih učencev, ki smo jih dosedaj pri uporabi računalnikov odrivali in prepuščali obetavni vrsti „učiteljev" — trgovcem z računalniškimi igrami!

Očitno računalniški učni programi omogočajo učitelju tudi tisto — dosedaj skoraj samo deklarativno možno — notranjo diferenciacijo v večjih skupinah učencev. Seveda bi takšno delo morali najprej obvladati sami fakultetni predavatelji, ki vzgajajo bodoče srednješolske profesorje. Celoten paket šolskih računalniških programov bi moral tak študent spoznati že na fakulteti — pa ne po pripovedovanju predavateljev, ampak po njihovem delu; predavatelji bi morali vse te učne programe popolnoma obvladati in jih tekoče uporabljati pri svojem delu s študenti. Seveda bo to mogoče pričakovati šele takrat, ko bo tudi v miselnosti učiteljev bodočih učiteljev računalnik sestopil s prestola nekakšne samozadostnosti in dobil pravo vlogo: uspešno orodje za dosego drugih, npr. izobraževalnih, ciljev.

6. Organizacija pouka računalništva

Nasploh se mi zdi, da pri nujnem iskanju izboljšav v šolstvu lahko precej prispevamo pri računalništvu. Poleg aktiviranja uporabnega učnega orodja, računalnika, lahko k racionalizaciji šolskega dela prispevamo tudi s smiselnim poukom računalništva. To je pri popolnoma novem predmetu, kot je računalništvo, lažje storiti kot pri drugih predmetih. Pri tem predmetu ne učimo nič „na zalogo", učimo samo to, kar bodo učenci takoj ali kmalu uporabljali. Ne obremenjujmo jim spomina z nepotrebnimi podatki tam, kjer to ni potrebno, saj je vendar prav računalnik tista naprava, ki nam lahko takoj postreže s podatki in navodili, ki jih potrebujemo. Učence moramo naučiti, da znajo to računalnikovo pomoč poklicati in uporabiti. Za zgodbe o zgodovini računalništva in za neskončna filozofiranja o informatiki je v računalniški učilnici škoda časa, vse to lahko učenci preberejo v berilu. Najbolje bi bilo, če bi računalništvo kot učni predmet odpravili in vpeljali kratke tečaje, ki bi jih prirejali takrat, ko bi učenci to znanje potrebovali in bi ga takoj tudi uporabljali. Tečaji naj bi bili izbirni (učenci sami odločijo, ali se ga bodo udeležili) ali obvezni (tisti, ki izberejo določeno aktivnost, morajo prej opraviti tečaj) in nasploh kratki (dolžina odvisna od vsebine). Vsebina tečajev bi lahko bila na disketah, z vmesnimi vprašanji in s povratno informacijo učencu o doseženem znanju. Učitelj bi pri teh tečajih nasploh bolj malo „predaval", saj bi bila potrebna samo začetna navodila in vmesna pomoč.

Celoletni računalniški predmeti naj bi bili obvezni samo pri določenih strokah (npr. računalništvo, elektronika), kjer so vsebine obsežnejše in je

učenje „na zalogo" smiselno. Uvodni pouk računalništva („za vse") naj bo le kratek tečaj privajanja in seznanjanja z računalnikom. Opravili bi ga lahko že v osnovni šoli (če bi to bilo mogoče), sicer pa v 1. razredu srednje šole. Naj bi bil brez ocenjevanja in naj bi predvsem odstranil odpor nekaterih učencev do dela z računalnikom. Pri tem bi jih naučili osnovnih spretnosti pri rokovanju z računalnikom in z njegovimi uporabnimi programi. Mimogrede bi se lahko nekoliko naučili tipkanja (z več kot enim prstom!).

Nasploh bi lahko pri računalniških tečajih opustili ocenjevanje in tako prispevali k zmanjševanju napetosti pri šolskem delu — če je le kje upravičeno opustiti ocenjevanje, bi to gotovo lahko bilo pri — s tradicijo neobremenjenem — neobveznem predmetu. Seveda prav računalnik omogoča določeno sprotno merjenje znanja; tudi to spretnost bi morali učitelji obvladati (ali jo obvladajo predavatelji na fakultetah?), rezultati so lahko namenjeni samo učencu (za lastno kontrolo) ali pa tudi učitelju (za povratno informacijo in nasploh ne za vpis v spričevalo).

Nekateri učitelji se nikakor nočejo odpovedati ocenjevanju tudi zato, ker se jim zdi to še edino sredstvo, s katerim lahko ohranijo red v razredu. Pri izbirnih predmetih bi pač lahko uporabili drugačno grožnjo: kdor moti — naj izgubi pravico biti pri tem pouku! Zakaj bi vse učence (saj se vendar razlikujejo) silili v enake šolske napore, nemirni in manj motivirani učenci naj bodo z izbirnimi predmeti manj obremenjeni! Za vsako namerno poškodovanje naprav bi pa moral učenec izgubiti pravico, da uporablja računalnik (in seveda plačati škodo). Tako bi še nekoliko zmanjšali gnečo pri pouku, omogočili učencem boljše delovne razmere in dosegli večji pregled nad dogajanjem.

Držati bi se morali železnega pravila, da naj za računalnikom sedi samo en učenec. Morda se bo komu zdelo to neznansko razkošje, toda primerjajmo stanje v glasbeni šoli. Če je ta šola še tako revna in ima morda samo en klavir, ne bo nihče zaradi stiske predvidel na urniku tri učence, ki bi na tem klavirju vadili hkrati. Če je računalnikov premalo in učencev preveč, bo pač vsakemu pripadlo manj računalniških ur. Morda to učencem in staršem (družbi) ne bo všeč. Potem naj šolo opremijo v skladu s svojimi željami in možnostmi.

LITERATURA

[1] L. N. Ridenour, *Hitri številčni računski stroji,* Obzornik mat. fiz. **1** (1951) 89.

[2] F. Križanič, *Elektronski aritmetični računalniki,* Knjižnica Sigma 4, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.

[3] Z. Bohte, I. Kuščer, E. Zakrajšek, *Elektronski računalniki v Sloveniji,* Obzornik mat. fiz. **15** (1968) 21.

[4] T. Skubic, *Računski center IMFM,* Obzornik mat. fiz. **11** (1964) 145.

[5] Z. Bohte, *572 opravil računalnikov,* Obzornik mat. fiz. **19** (1972) 46.

[6] I. Bratko, V. Rajkovič, *Uvod v računalništvo,* DZS, Ljubljana 1974.

[7] I. Bratko, J. Grad, M. Kac, J. Lesjak, V. Rajkovič, J. Virant, E. Zakrajšek, ur. B. Roblek, *Računalništvo, gradivo s tečaja za srednješolske profesorje,* Zavod za šolstvo SRS, Ljubljana 1972.

NOVE KNJIGE

BATAGELJ V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur, 1. del, 2. razširjena izdaja, DMFA Slovenije, Ljubljana 1991, 120 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 25)

Predmet diskretne strukture je eden pomembnejših predmetov v prvem letniku študija računalništva na Univerzi v Ljubljani. Pri tem predmetu študentje spoznajo osnove diskretne matematike, poznavanje večine snovi pa v višjih letnikih potrebujejo pri sestavljanju učinkovitih programov. Zbirka nalog iz tega predmeta ima že dolgo zgodovino. V začetku osemdesetih let je Vladimir Batagelj zbral in delno uredil naloge, ki jih je pripravljal za vaje, kolokvije in izpite. Zbirka, ki ni vsebovala rešitev nalog, je izšla kot 5. zvezek Matematičnih rokopisov. Z leti se je vsebina predmeta nekoliko spremenila in pojavila se je potreba po preureditvi in dopolnitvi zbirke. Ko se je prvemu avtorju pridružil še Sandi Klavžar, smo v zbirki Izbrana poglavja iz matematike in računalništva dočakali izid prve izdaje današnje knjige. Ta obsega snov, ki jo študentje računalništva spoznajo pri predmetu diskretne strukture v prvem semestru. Zbirka vsebuje tudi poglavje z (delnimi) rešitvami večine nalog. Po dveh letih je naklada pošla. Ker je imela prva izdaja, kljub veliki opori, ki jo je nudila študentom, precej pomanjkljivosti, sta se avtorja odločila, da bosta drugo izdajo razširila, poenotila izrazoslovje in pisavo, dodala rešitve še nekaterih nalog ter seveda odpravila opažene napake in pomanjkljivosti. Zbirka je še vedno razdeljena na devet poglavij: induktivni razredi, izjavni račun, predikati, teorije, množice, relacije, funkcije, moč množic in najobsežnejše poglavje z rešitvami nalog.

Kot sem že omenil, je zbirka namenjena predvsem študentom računalništva kot „obvezni" učbenik pri predmetu diskretne strukture. Ker prvi avtor že nekaj let (s premori) predava ta predmet na FER, je zbirka usklajena z izbiro snovi na predavanjih. Naloge v zbirki so pestre, tako najdemo take, ki zahtevajo le poznavanje definicij, večina zahteva poleg tega še nekaj računske spretnosti, srečamo pa tudi take (sicer redke), kjer pri reševanju potrebujemo še nekaj domišljije in navdiha. Seveda zbirka ni namenjena le študentom računalništva. Ker se uporaba in poučevanje področij, ki jih pokriva zbirka, širi, bodo knjigo lahko s pridom uporabljali tudi študenti nekaterih smeri na Pedagoški akademiji v Ljubljani in na Pedagoški in Tehniški fakulteti v Mariboru. Predvsem naloge iz množic in relacij pa bodo koristile tudi študentom prvega in drugega letnika matematike.

Ker pa menim, da se da vsako knjigo še izboljšati, avtorjema predlagam, da v naslednji izdaji vsaj nekaterim poglavjem dodasta krajši uvod z opisom osnovnih prijemov pri reševanju nalog in seznamom izbranih definicij in izrekov, ki jih pri tem potrebujemo. Za sladokusce pa bi lahko dodala še nekaj težjih nalog.

Martin Juvan

KRANJC T., Čopič M., Golli B. (zbrali in uredili), Naloge iz fizike II, 2., razširjena izdaja, DMFA Slovenije, Ljubljana 1991, 72 str. (Zbirka izbranih poglavij iz fizike ; 20 a)

Fizika II je v drugem letniku na Oddelku za fiziko prehodni predmet med klasično fiziko v prvem letniku ter kvantno mehaniko v tretjem in fiziko trdne snovi ter fiziko jedra in osnovnih delcev v četrtem. *Naloge iz fizike II* zajemajo naloge iz tega predmeta, ki so jih večinoma preskusili študenti na pismenih vajah v prejšnjih letih. Po poglavjih so razvrščene takole: Teorija relativnosti (63 nalog), Kvantna fizika (70), Atomi z več elektroni in molekule (40), Osnove kvantne statistike (50), Elektroni v kristalih (50) in Jedra in Delci (45). Nalogam sledijo dodatki: Osnovne fizikalne konstante, Nekaj matematičnih formul, Elektronske konfiguracije, spektroskopske oznake in ionizacijske energije atomov v osnovnem stanju, Nekaj podatkov o dvoatomnih molekulah, Fermijeva energija za nekatere kovine, Širina energijske špranje in gibljivost elektronov in vrzeli za nekatere polprevodnike ter Preglednica izotopov in Preglednica nekaterih osnovnih delcev. Nazadnje so navedene še rešitve nalog.

Novo izdajo je pripravil Tomaž Kranjc po prejšnji izdaji Martina Čopiča in Bojana Gollija. Izločil je dvomljive naloge in dodal nekaj novih, od katerih so maloštevilne zahtevnejše posebej zaznamovane. Pomembna novost so rešitve nalog na koncu knjige. Z njimi bodo študenti po samostojnem reševanju nalog lahko preverili svoje izide. Poti do izida rešitve ne nakažejo. Pri načinu, da si smejo študenti na pismenih vajah pomagati z učnimi knjigami, je to najbolj smiselna rešitev.

Nova izdaja je stavljena računalniško in je mnogo prikupnejša od stare, natipkane. Najbolj je bodo veseli študenti drugega letnika, ki so že negodovali, ker je stara izdaja pred časom pošla.

Janez Strnad

KRUPKA D., JANYŠKA J., Lectures on Differential Invariants, Univerzita J. E. Purkyně v Brně 1990, 193 str.

Diferencialne invariante je vpeljal že Sophus Lie in jih povezal s teorijo klasičnih invariant, ki se je v tistem času živahno razvijala. Vendar pa je razvoj teorije invariant proti koncu prejšnjega stoletja zamrl in tako so se tudi diferencialne invariante, ob sicer silovitemu razvoju teorije Liejevih grup, v začetku tega stoletja skoraj izgubile. V zadnjih nekaj desetletjih se je spet obudilo zanimanje zanje, za invariante nasploh in za njim sorodne nelinearne invariantne operatorje, predvsem zaradi njihove uporabe v algebraični geometriji in teoretični fiziki (na primer v povezavi z umeritvenimi grupami). Knjiga D. Krupke in J. Janyške je geometrijski pristop k diferencialnim invariantam, saj jih predstavi in obravnava predvsem kot geometrijske objekte.

Knjiga je razdeljena v dva dela. Prvi del, ki ga je napisal prvi avtor, se začne z uvodnim poglavjem o Liejevih grupah in nadaljuje s postopno vpeljavo geometrijskih struktur, ki vodijo do pojma diferencialne invariante in njene posplošitve — invariantne operacije. Diferencialna invarianta je pravzaprav ekvivariantna preslikava med mnogoterostma z delovanjem diferencialne grupe, to je grupe brizgov (ali poganjkov, kot bi tudi smiselno prevedli francoski izraz „jet" v slovenščino) lokalnih difeomorfizmov prostora $\mathbb{R}^n$ iz izhodišča v izhodišče. Po drugi strani lahko vsako diferencialno invarianto predstavimo kot naravno transformacijo med funktorji iz kategorije gladkih n-dimenzionalnih mnogoterosti v kategorijo določenih naravnih svežnjev nad mnogoterostmi. Tako lahko nanje gledamo kot na geometrijske objekte in jih neposredno povežemo na primer z zunanjim odvodom, Liejevim oklepajem ali Levi-Civitajevo povezavo.

Eden osnovnih problemov teorije diferencialnih invariant je njihova klasifikacija. V drugem delu knjige, ki ga je napisal drugi avtor, so zbrani primeri, ki kažejo, kako lahko metode za klasifikacijo diferencialnih invariant uporabimo pri naravnih diferencialnih operatorjih in naravnih konstrukcijah s tenzorji. Tako je dokazana med drugim enoličnost zunanjega odvoda, Liejevega oklepaja in Levi-Civitajeve povezave.

Čeprav predstavljena snov še zdaleč ni lahka, je knjiga napisana dovolj sistematično, da je dostopna in zanimiva tudi bralcem, ki niso strokovnjaki z obravnavanega področja.

Neža Mramor

DEVIDÉ V., Matematička čitanka, Školska knjiga, Zagreb 1991, 295 str.

Znani zagrebški matematik Vladimir Devidé je v tej knjigi objavil svoje izbrane članke, eseje in govore ter jih ponudil v branje in razmislek srednješolcem in njihovim profesorjem. S to knjigo želi avtor bralcu približati in pojasniti bistvo matematike, njeno širino in lepoto.

Čitanka obsega okoli 30 člankov in esejev, razdeljenih v tri poglavja. V poglavju *Matematični problemi in metode* je na nekaj primerih iz elementarne matematike prikazano, s kako raznoterimi (in na pogled nič matematičnimi) problemi se lahko spopada matematik. Poudarjeno je, da matematično nalogo lahko rešimo z uporabo različnega matematičnega orodja, na različne načine, ki so lahko bolj ali manj izvirni, duhoviti, dopadljivi. Drugo poglavje *Matematične strukture in teorija* obsega razlago osnov teorije množic, matematične logike in algebrskih struktur. V zadnjem poglavju *Kaj je in kašna je matematika* so zbrani eseji o osnovah matematike, o smereh sodobne matematike itd. Za mnoge bralce bo to najtežji, a najzanimivejši del knjige. Tu zvemo odgovore na številna vprašanja, ki begajo tudi mlade razmišljujoče matematike: Ali so matematične resnice večne? Ali je matematika v bistvu le logika? Ali je ena sama matematika? Ali je v matematiki vsaka (smiselna) trditev bodisi pravilna ali nepravilna? Ali so dokazi z matematično indukcijo za vse matematike neoporečni?

Sestavki v knjigi so vsekakor zanimivi in vredni branja. Žal pa se vsebina člankov ponavlja (tako je vsaj na treh mestih z istimi besedami povedano, kako se je Gauss obotavljal objaviti svoje izsledke o neevklidski geometriji). Vprašljiv se mi zdi tudi naslov *Matematična čitanka*, saj knjiga obravnava pravzaprav dokaj ozko področje sodobne matematike, številna področja, ki so srednješolcem povsem dostopna, pa v knjigi niso omenjena.

Zlatan Magajna

UTRINEK

Pogovor s Kennethom Wilsonom[1].

Učitelji in profesorji mislijo, da bodo devetdeseta leta novo obdobje z novimi možnostmi in novimi izzivi; utegne se povečati vloga poučevanja. Kako vi vidite razmere?

Eden izmed problemov, ki je v ZDA nekoliko izrazitejši kot drugod po svetu, je v tem, da so razvrednotili učiteljski poklic. ZDA povečajo industrijsko proizvodnjo za 2 do 3 % na leto. Žal pa nismo povečali učinkovitosti poučevanja, ampak dovolili, da so se znižale plače dobrih učiteljev. Zato se je zanimanje mladih za učiteljski poklic zmanjšalo. Industrijska učinkovitost se je povečala zaradi raziskovanja in razvoja. Raziskovanju in razvoju poučevanja pa nismo posvetili dovolj pozornosti, zato se učinkovitost poučevanja ni povečala. Učitelji imajo dokaj velike obveznosti in nimajo časa, da bi razvijali boljše metode, se pogovarjali z drugimi učitelji na šoli, se učili drug od drugega in obnavljali svoje znanje. Ob tem so znižali tudi raven pri izobraževanju učiteljev na univerzi.

Kako lahko izboljšamo poučevanje naravoslovja?

Najprej pričakujemo več podpore pri izobraževanju učiteljev in več dobrih študentov. To zahteva boljše plače za učitelje, da bi postal poklic v ZDA privlačnejši. Potrebujemo tudi boljše možnosti na šolah in na univerzah. Predvsem pa moramo povečati učinkovitost poučevanja, sicer družba ne bo mogla dajati višjih plač.

Kako vidite odnos klasične in sodobne fizike v šoli?

Ne zagovarjam poučevanja klasične ali sodobne fizike, pač pa poučevanje resnično osnovnih pojmov naravoslovja, morda s sodobnega gledišča. Pri električnih vezjih se učenci najprej naučijo vezati baterije, žarnice in stikala, toda seznanijo naj se tudi s pojmoma toka in ohranitve naboja, ki sta nadvse pomembna za sodobno fiziko.

---

[1] K.G.Wilson (rojen 1936) je delal na Cornellovi univerzi, ko je leta 1982 dobil Nobelovo nagrado iz fizike za „teorijo kritičnih pojavov in faznih sprememb". Njegovo delo je povezano z renormalizacijsko grupo, ki jo uporabljajo v fiziki trdnin in fiziki delcev. Z njim se je na univerzi zvezne države Ohio novembra 1990 pogovarjal George Marx. Daljši odlomek iz pogovora je izšel v septembrski številki *International Newsletter on Physics Education*, ki ga izdaja International Commision on Physics Education, z naslovom *Učiteljski poklic so razvrednotili.* Utrinek je izbral in prevedel Janez Strnad.

PROF. DR. BOŠTJAN ŽEKŠ, REDNI ČLAN SAZU

Slovenska akademija znanosti in umetnosti je letos spomladi izvolila dr. Boštjana Žekša, rednega profesorja za biofiziko na Medicinski fakulteti v Ljubljani, za rednega člana SAZU v razredu za matematične, fizikalne in tehniške vede.

B. Žekš se je rodil leta 1940 v Ljubljani. Leta 1966 je diplomiral iz tehniške fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Ravno tam je magistriral leta 1970 in doktoriral 1972. Za docenta fizike je bil izvoljen leta 1977, za izrednega profesorja leta 1982 in za rednega 1987. Od leta 1966 do leta 1977 je bil B. Žekš zaposlen na Inštitutu J. Stefan, nato je postal sodelavec Inštituta za biofiziko Medicinske fakultete. S prehodom na Medicinsko fakulteto pa ni prenehal sodelovati z Inštitutom J. Stefan; tam še vedno aktivno dela v odseku za teorijsko fiziko in pri upravljanju inštituta.

Prof. Žekš dela na področju teorijske fizike kondenzirane materije in biofizike. Njegov znanstveni opus je impozanten. Obsega nad 150 objavljenih del, pretežno v inozemskih znanstvenih revijah in zbornikih. Večinoma gre za pomembna in zelo kvalitetna dela, ki uvrščajo prof. Žekša med vodilne teorijske fizike pri nas. Njegov ugled v svetu pa izpričujejo številna vabljena predavanja in gostovanja na tujih univerzah. Slovenska akademija znanosti in umetnosti ga je leta 1987 izvolila za dopisnega člana.

Prof. Žekša odlikuje izredna dejavnost in obsežno teorijsko znanje. Spekter teorijskih problemov, ki jih je obravnaval, je zelo raznolik, kar kaže na veliko razgledanost in širino njegovega zanimanja in znanstvenega delovanja. Njegova dela lahko glede na obravnavano tematiko razvrstimo na več obsežnih skupin: fazni prehodi v feroelektrikih, splošna teorija tekočih kristalov, smektični feroelektrični tekoči kristali, rotacijska viskoznost pri smektičnih tekočih kristalih, van der Waalsove sile in biološke membrane. Raziskave prof. Žekša znatno bogatijo znanje o feroelektrikih, tekočih kristalih in o umetnih ter bioloških membranah, še posebej o njihovih elastičnih lastnostih.

Pri teorijskih raziskavah prof. Žekša je praviloma sodelovalo več raziskovalcev, saj je pokazal izredno pripravljenost za skupinsko delo in vodstvo mlajših sodelavcev. Uveljavil se je tudi kot dober pedagog.

Prof. Žekš je predsednik Odbora za znanstvenoraziskovalno delo na Medicinski fakulteti in predsednik znanstvenega sveta Inštituta J. Stefan. Je tudi član predsedstva Društva biofizikov Slovenije.

Leta 1988 je dobil skupaj z dr. Adrijanom Levstikom tudi Kidričevo nagrado.

Peter Gosar

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije prireja ob sodelovanju Oddelka za matematiko in mehaniko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, Inštituta J. Stefan ter ob pomoči Zavoda Republike Slovenije za šolstvo in šport

14. seminar iz matematike

S T A T I S T I K A

14. in 15. februarja 1992
v veliki fizikalni predavalnici na Jadranski 26 v Ljubljani.

Seminar je namenjen strokovnemu izpopolnjevanju učiteljev matematike, fizike in astronomije na srednjih in osnovnih šolah. Vabljeni so tudi drugi člani društva.

PETEK, 14. februar

9.15 do 10.00 **J.A.Čibej**, *Enorazsežna normalna porazdelitev*
10.15 do 11.00 **J.A.Čibej**, *Večrazsežna normalna porazdelitev*
11.00 do 11.30 Odmor s kavo
11.30 do 12.15 **J.A.Čibej**, *Primer uporabe večrazsežne normalne porazdelitve*
16.15 do 17.00 **M.Perman**, *Centralni limitni izrek kot eksperimentalno dejstvo*
17.15 do 18.00 **M.Perman**, *Centralni limitni izrek kot matematični izrek I*

18.45 Na družabno srečanje z večerjo v Maximu vabi Oddelek za matematiko in mehaniko

SOBOTA, 15. februar

9.15 do 10.00 **M.Perman**, *Centralni limitni izrek kot matematični izrek II*
10.15 do 11.00 **M.Perman**, *Uporaba centralnega limitnega izreka v statistiki*
11.00 do 11.30 Odmor s kavo
11.30 do 12.15 **M.Perman**, *Uporaba centralnega limitnega izreka v statistiki*

Vodstva šol prosimo, da kotizacijo za seminar 800 SLT nakažejo na žiro račun DMFA Slovenije Ljubljana 50101-678-49168, lahko pa ga udeleženci poravnajo tudi na seminarju.

Milena Strnad in *Peter Petek*

UTRINEK

NA PREDAVANJIH

Fizik posluša predavanje iz molekularne biologije. Predavatelj pokaže shematsko sliko neke beljakovine. Fizik podzavestno vzklikne pri sebi: „To pa poznam, to je Veliki voz!"

Tedaj se zave, da posluša predavanje sicer z zanimanjem, toda kot nestrokovnjak. Nato pomisli: „Kaj pa ko se zvečer na romantičnem sprehodu ozre *molekularni biolog* v nebo, ali vzklikne ‚Glej no, tam je ta-pa-ta beljakovina!'"

Mitja Rosina

PLEMLJEV DOM NA BLEDU

Tričlanska komisija za Plemljev dom (Ciril Velkovrh — predsednik, dr. Ivan Vidav in Darjo Felda) s sedežem v Ljubljani (61111, pp 64, Jadranska c. 19, tel. št. (061) 157-100/80, ŽR 50101-678-47233 DMFAS — Podružnica Ljubljana) ima nalogo, da dom obnovi in poskrbi za uresničitev predvidenega programa. Kmalu po občnem zboru ji je uspelo opraviti najnujnejšo sanacijo strehe in tako zaustaviti nadaljnje propadanje v prihajajoči zimi.

Po sklepu upravnega odbora DMFA Slovenije bodo v domu poleg Plemljeve spominske sobe ter društvenega prostora še prostori za razne seminarje, letne šole, posvetovanja, tekmovanja ter — če bo le mogoče — za bivanje udeležencev.

Za pridobitev potrebnih finančnih sredstev bomo prosili pravne in fizične osebe, da prispevajo denarne zneske in druga volila, ki bodo namensko uporabljena. Podjetja bomo prosili za nepovratne subvencije, strokovnim institucijam z naših področij pa predlagali, da prispevajo del svojega programa, ki bi tekel v Plemljevem domu na Bledu. Hkrati bomo prosili strokovne ustanove, da prispevajo tudi ustrezni del za obnovo hiše.

Tudi člane Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabimo, da nam s predlogi v ustni in pisni obliki ter s priporočili pomagajo pridobiti potrebna finančna sredstva.

V Ljubljani, 11. decembra 1991 *Peter Petek, Ciril Velkovrh*

Obzornik za matematiko in fiziko 38 (1991) št. 1–6, str. 1–192

Matematika — Računalništvo

Heronovi trikotniki in diofantske enačbe — Heron triangles and diophantine equations (Ivan Vidav) . . . 1–7
Tajnopisi — On cryptography (Bojan Magajna) . . . 9–18
Nenegativne nilpotentne matrike — Nonnegative nilpotent matrices (Boris Lavrič) . . . 33–38
Fermatova enačba za polinome — Fermat equations for polynomials (Bojan Magajna) . . . 39–44
Izboljšano urejanje s kopicami — Bottom-up heapsort (Sandi Klavžar, Jože Marinček) . . . 45–52
Pogovor o pouku matematike — On teaching mathematics (Serge Lang, prev. Janko Moder) . . . 52–III
Iteracija kvadratne funkcije v kompleksnem — Iteration of complex quadratic function (Peter Petek in Andrej Vitek) . . . 65–70
Uporaba projektorjev pri dokazovanju zveznosti odvajanj — Projections and automatic continuity of derivations (Borut Zalar) . . . 97–103
Matematično izobraževanje v ZDA — Mathematical education in the U.S.A. (William P. Thurston, prevedel Peter Legiša) . . . 111–120
Inverzne limite in njihova uporaba — Inverse limits and its applications (Milan Hladnik) . . . 129–137
Karmarkarjev algoritem za reševanje linearnih programov — Karmarkar's algorithm for linear programming (Jana Jamšek) . . . 161–169
Računalništvo v srednjih šolah — Computer education in secondary schools (Peter Prelog) . . . 179–185

Fizika — Astronomija

Trajni magneti pri slikanju z magnetno resonanco — Permanent magnets in NMR imaging (Gorazd Planinšič) 19–26
Kvantni Zenonov pojav — Quantum Zeno's effect (Janez Strnad) 71–79
Večstopenjske rakete — Multistage rockets (Janez Žitnik) 105–108
Zanimiva določitev zemljepisne dolžine — An interesting example of geographical latitude determination (Marijan Prosén) 109–110
Osnove statistike na praktičnem zgledu — Fundamentals of statistics based on students' data (Franc Cvelbar) 139–150
Atomski interferometer — The atom interferometer (Janez Strnad) 151–156
Prometni tok — Vehicular flow (Janez Strnad) 171–178

Vesti

Publikacije DMFAS, IMFM in FNT v letu 1990 (Ciril Velkovrh) . . . . . III–IV
Vloga eksperimenta pri pouku fizike — Vabilo (Seta Oblak) 18
42. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman) 27–29
Obvestilo članom društva 30
Popravek (Janez Strnad) 32
Magistrski študij za učitelje matematike — Vabilo (Peter Petek) IV
Raziskovalne naloge Oddelka za matematiko IMFM v letu 1990 (Milan Hladnik) 80–84
Obvestilo članom društva 84
23. mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM 90 (Miran Černe) 85–89
Umrla je profesorica Helena Velikonja (Darjo Felda) 89
Poskusni zaključni izpit na naravoslovnih šolah (Zvonko Perat) 90–93
Prešernove nagrade študentom matematike in fizike za leto 1990 (Zbral Ciril Velkovrh) 94
Novi člani društva v letu 1990 (Zbral Ciril Velkovrh) 94
Seznam diplomantov in doktorandov v letu 1990 (Zbral Ciril Velkovrh) 121–126
Društveni seminar Astrofizika zvezd (Milena Strnad) 138
Obvestilo III
Nagrade Sklada Borisa Kidriča v letu 1991 (Zbral Ciril Velkovrh) 160–III
Delovno srečanje in 43. občni zbor Društva — Vabilo (Martina Koman) IV
Prof. dr. Bojan Žekš, redni član SAZU (Peter Gosar) 190
14. seminar iz matematike: Statistika — Vabilo (Milena Strnad) 191
Plemljev dom na Bledu (Peter Petek, Ciril Velkovrh) 192

Utrinki

Iz srednje šole pred sto leti (Anton Suhadolc) 30
Duh nad snovjo (Val Telegdi, prev. Janez Strnad) 103
Pogovor s Kennethom Wilsonom (izbr. in prev. Janez Strnad) 189
Na predavanjih (Mitja Rosina) 191

Vprašanja — Odgovori

121. Rothova naloga (Marija Vencelj) 38, 158–160

Atiyah M. in dr. ur., Physics and mathematics of strings (Janez Strnad) 32
Batagelj V., Golli B., TEX. Povabilo v TEX, LATEX, BIBTEX, PICTEX (Marko Čibej) 8
Batagelj V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur, 1. del, 2. razširjena izdaja (Martin Juvan) 186
Battestin J., Optika, osnove in meritve (Franc Cvelbar) 108
Devidé V., Matematička čitanka (Zlatan Magajna) 188–189
Dobovišek M., Kobal D., Magajna B., Naloge iz algebre I. (Jože Grasselli) 44
Dumitrascu L., Ioachim A., Generating fortran programs for decision tables (Janez Grad) VIII
Forgó F., Nonconvex programming (Vladimir Batagelj) 52
Golli B., Kvarkovski modeli hadronov (Mitja Rosina) 110
Horst R., Tuy H., Global optimization, Deterministic approaches (Stane Indihar) 104
Kranjc T., Čopič M., Golli B., (zbr. in ur.) Naloge iz fizike II. (2. razširjena izd.) (Janez Strnad) 187
Križanič F., Temelji realne matematične analize (Dušan Repovš) XII
Krupka D., Janyška J., Lectures on differential invariants (Neža Mramor) 187–188
L'elaboratore nella didattica della fisica (Silvia Pugliese Jona, prev. in prir. Janez Strnad) 126
Lang S., Matka! Pogovori z učenci (Janez Rakovec) VIII
Lokar M., Mohar B., dBASE III Plus (Jana Vrabec) 120
Magajna B., Vložitve matričnih algeber (Milan Hladnik) 156-157
McCourt F.R.W., Beenakker J.J.M., Koehler W.E., and Kuščer I., Nonequilibrium phenomena in polyatomic gases, Vol. 1., Dilute gases (Slobodan Žumer) 96
Oznake, jedinice, nazivi i fundamentalne konstante u fizici (Janez Strnad) 79
Razpet M., Sedi in piši z LATEX-om. Programski paket emTEX 3.0 (Matija Lokar) 95–96
Razpet M., Umbralni račun (Marko Petkovšek) 169
Ribarič M., Šušteršič L., Conservation laws and open questions of classical electrodynamics (Janez Strnad) 31–32
Schipp F., Wade W.R., Simon P., Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis (Milan Hladnik) XI
Strnad J., Na pot k Schwarzschildu (Norma Mankoč-Borštnik) 170
Szekely G.J ., Paradoxa. Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik (Milan Hladnik) XI
Tarnóczy T., Einführung in die musikalische Akustik (Janez Strnad) 138
Vidav I., Eliptične krivulje in eliptične funkcije (Franc Forstnerič) . . . . . XV–XVI
Vujnović V., Astronomija I., Osnove astronomije i planetski sustav (Andrej Čadež) 127–XV