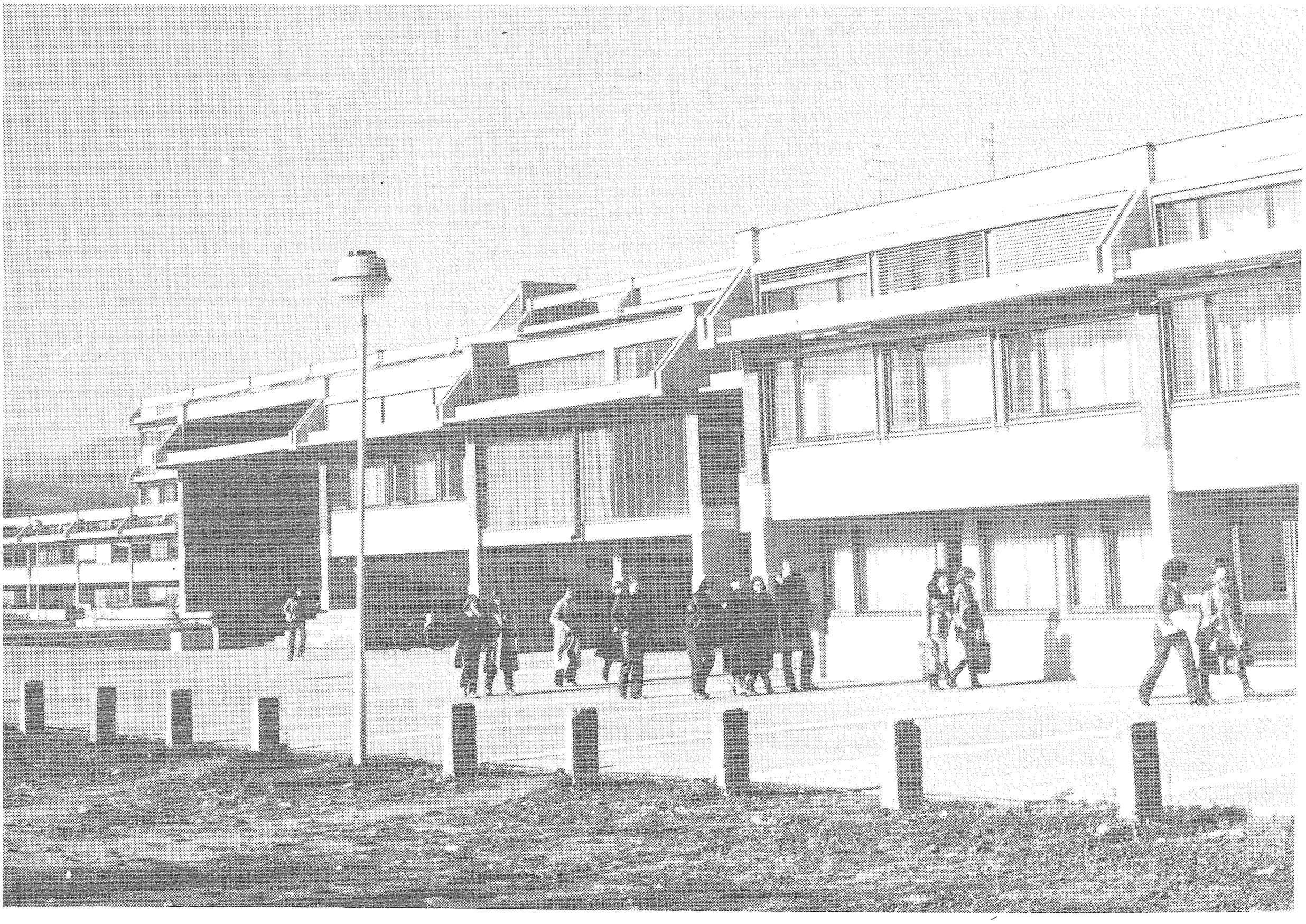
ZDAJA DRUSTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ENTRALNA EKONOMSKA
NJIŽNICA Ljubljana

2-177/91
ODPISANO

1991
Letnik 38
5

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1991

letnik 38, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.



**Uredniški odbor:** Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

**Odbor svetovalcev:** Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.



Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 250.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 350.– din, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 40.– din, dvojna številka 80.– din, stare številke 20.– din.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.



© 1991 DMFA Slovenije – 1081



Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana


---

## VSEBINA — CONTENTS

### Članki - Articles


Inverzne limite in njihova uporaba — Inverse limits and its applications (Milan Hladnik) . . . . . 129–137

Osnove statistike na praktičnem zgledu — Fundamentals of statistics based on students' data (Franc Cvelbar) . . . . . 139–150

Atomski interferometer — The atom interferometer (Janez Strnad) . . . . . 151–156


### Vesti — News


Društveni seminar Astrofizika zvezd (Milena Strnad) . . . . . 138

Obvestilo . . . . . III

Nagrade Sklada Borisa Kidriča v letu 1991 (Zbral Ciril Velkovrh) . . . . . 160–III

Delovno srečanje in 43. občni zbor Društva — Vabilo (Martina Koman) . . . . . IV

**Nove knjige — New books** (Janez Strnad, Milan Hladnik) . . . . . 138,156–157

**Odgovori** — 121 - Rothova naloga (Marija Vencelj) . . . . . 158–160

**Na ovitku:** Letošnji občni zbor našega društva bo v Mariboru, kjer je vse več matematikov zaposlenih na Pedagoški fakulteti . . . . . I

# INVERZNE LIMITE IN NJIHOVA UPORABA

MILAN HLADNIK

Math. Subj. Class. (1985): 54 B 25, 54 E 50

Osnovni izrek o inverznih limitah v polnih metričnih prostorih omogoča preprosto izpeljavo nekaterih pomembnih klasičnih rezultatov iz analize.

## INVERSE LIMITS AND ITS APPLICATIONS

A fundamental theorem on inverse limits in complete metric spaces enables a simple derivation of important classical results in analysis.

Ena od glavnih značilnosti sodobne matematike je njena skoraj neverjetna učinkovitost pri reševanju različnih, na videz popolnoma nepovezanih konkretnih problemov z istimi ali podobnimi metodami. Skrivnost te njene "uporabnosti" tiči v zmožnosti abstraktne formulacije problema, katerega splošna metoda reševanja je potem seveda uspešna tudi v posameznih primerih.

Tak preprost splošen princip iz topologije metričnih prostorov, ki je uporaben na različnih področjih klasične in moderne analize, si bomo ogledali tudi v tem sestavku, v glavnem povzetem po prvem delu članka [2]. Princip izhaja iz dokaza znanega klasičnega Mittag-Lefflerjevega izreka iz teorije analitičnih funkcij (o njem bo govor pozneje), zato ga nekateri imenujejo kar *splošni Mittag-Lefflerjev izrek.* Ker pa njegova abstraktna formulacija (izrek 2 v prvem razdelku) vsebuje pojem inverzne limite, je nemara primerneje uporabljati zanj ime *izrek o inverzni limiti.*

## 1. Inverzna limita

Imejmo poljubno zaporedje $E_1$, $E_2$, ... nepraznih množic in zaporedje $f_1$, $f_2$, ... preslikav $f_n : E_{n+1} \to E_n$, torej diagram

$$E_1 \xleftarrow{f_1} E_2 \xleftarrow{f_2} E_3 \xleftarrow{f_3} \dots$$

Zaporedje parov $(E_n, f_n)_{n\geq 1}$ imenujemo *projektivni sistem.*

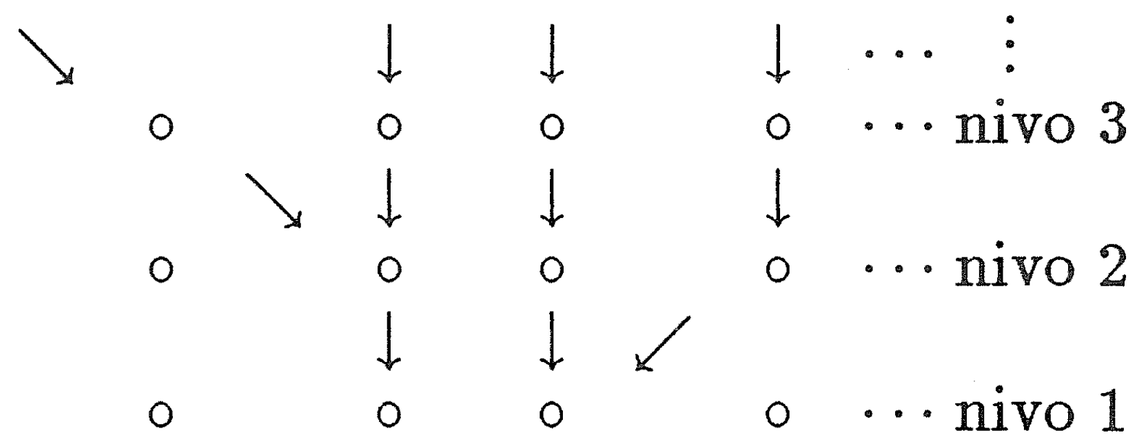
**Definicija.** Za poljuben projektivni sistem $(E_n, f_n)_{n\geq 1}$ definiramo *inverzno* (ali *projektivno*) *limito* kot

$$\varprojlim(E_n, f_n) = \{(x_n) \in \Pi_{n\geq 1} E_n ; x_n = f_n(x_{n+1}) \text{ za vsak } n\} .$$

Torej je inverzna limita neka (lahko tudi prazna) podmnožica kartezičnega produkta množic $E_n$. V tem produktu bomo projekcijo na $k$-to komponento označevali s $\pi_k$, torej

$$\pi_k : \Pi_{n\geq 1} E_n \to E_k , \quad \pi_k((x_n)) = x_k .$$

Elemente inverzne limite si lahko predstavljamo kot (neskončne) navzdol usmerjene poti v neskončnem drevesu, ki se med seboj lahko združujejo, ne pa tudi razcepljajo in potekajo skozi vse nivoje (glej sliko 1).




Slika 1.

**Zgled.** Če imamo npr. padajoče zaporedje množic $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ in za vsak $n \geq 1$ pomeni $f_n : E_{n+1} \to E_n$ vložitev množice $E_{n+1}$ v množico $E_n$, se pravi identično preslikavo $f_n(x) = x$ za $x \in E_{n+1}$, potem predstavlja to zaporedje očitno preprost primer projektivnega sistema in po definiciji inverzne limite imamo

$$\varprojlim(E_n, f_n) = \{(x_n) \in \Pi_{n\geq 1} E_n; x_n = x_{n+1} \text{ za vsak } n\}\,.$$

Elementi inverzne limite so torej natanko vsa konstantna zaporedja iz kartezičnega produkta $\prod_{n\geq 1} E_n$. Ker mora biti ta skupna konstanta očitno v preseku $\cap_{n\geq 1} E_n$, vidimo, da je inverzna limita v tem primeru pravzaprav kar presek vseh množic. Njena projekcija na $k$-to komponento pa je spet presek $\prod_{n\geq 1} E_n$, vložen kot podmnožica v $E_k$. Iz tega primera tudi vidimo, da je inverzna limita lahko prazna množica.

Naj bo sedaj za vsak $n \geq 1$ množica $E_n$ poln metrični prostor z metriko $d_n$ (glej [7] ali [4], ki sta primerni referenci tudi za druge metrične oziroma topološke pojme, uporabljene v nadaljevanju). Polnost prostora potrebujemo, da bomo imeli zagotovljeno konvergenco različnih Cauchyjevih zaporedij, ki jih bomo konstruirali. Poleg tega naj za vsak $n$ preslikava $f_n$ ne povečuje razdalj med točkami, torej naj ima lastnost

$$d_n(f_n(x), f_n(y)) \leq d_{n+1}(x, y)$$

za vsak par $x, y \in E_{n+1}$. Taki preslikavi rečemo *kontrakcija.* Med drugim to pomeni, da je $f_n$ (enakomerno) zvezna preslikava iz metričnega prostora $E_{n+1}$ v metrični prostor $E_n$.

Za vsak $n \geq 1$ označimo

$$\lambda_n = \sup_{x\in E_n} \operatorname{dist}_n(x, f_n(E_{n+1}))\,.$$

Tu pomeni $\operatorname{dist}_n(x, f_n(E_{n+1}))$ razdaljo točke $x$ do podmnožice $f_n(E_{n+1})$ v metričnem prostoru $E_n$, torej

$$\operatorname{dist}_n(x, f_n(E_{n+1})) = \inf\{d_n(x, y); y \in f_n(E_{n+1})\}\,.$$

Zgornji supremum je lahko končen ali neskončen, torej je $\lambda_n$ nenegativno realno število ali pa $\infty$.

Naslednji izrek govori o zadostnem pogoju za nepraznost inverzne limite polnih metričnih prostorov.

**Izrek 1.** *Pri zgornjih pogojih in oznakah naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. *Tedaj je* $\varprojlim(E_n, f_n) \neq \emptyset$ *in za vsak* $k \geq 1$ *in vsak* $x \in E_k$ *velja*

$$\operatorname{dist}_k(x, \pi_k(\varprojlim(E_n, f_n))) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n .$$

**Dokaz.** Izberimo $\varepsilon > 0$ in $x \in E_1$ ter rekurzivno definirajmo zaporedje točk $y_i \in E_i$, $i = 2, 3, \ldots$ na naslednji način:

$$\begin{aligned} &d_1(x, f_1(y_2)) < \lambda_1 + \varepsilon/2, \\ &d_n(y_n, f_n(y_{n+1})) < \lambda_n + \varepsilon/2^n, \quad \text{za} \quad n \geq 2 . \end{aligned}$$

To lahko storimo zaradi definicije števil $\lambda_n$ kot infimumov ustreznih razdalj.

Pri danem $k \geq 1$ definirajmo

$$y_n^{(k)} = f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}(y_n)$$

za $n \geq k+1$. Tu pomeni seveda $\circ$ operacijo komponiranja funkcij. Na ta način dobimo zaporedje točk $y_n^{(k)}$, $n > k$, iz prostora $E_k$. Zanj velja

$$d_k(y_n^{(k)}, y_{n+1}^{(k)}) \leq d_n(y_n, f_n(y_{n+1})) < \lambda_n + \varepsilon/2^n$$

za vsak $n > k$. Upoštevali smo, da so preslikave $f_i$ kontrakcije in definicijo zaporedja $(y_n)$. Iz dobljene ocene takoj vidimo, da je zaporedje $(y_n^{(k)})_{n \geq k+1}$ Cauchyjevo v polnem metričnem prostoru $E_k$, torej konvergentno. Njegovo limito označimo z $x_k$.

Ker je

$$x_k = \lim_{n \to \infty} y_n^{(k)} = \lim_{n \to \infty} f_k(y_n^{(k+1)}) = f_k(x_{k+1})$$

za vsak $k \geq 1$, velja

$$(x_k)_{k \geq 1} \in \varprojlim(E_n, f_n) .$$

Poleg tega je

$$\begin{aligned} d_1(x, x_1) &= \lim_{n \to \infty} d_1(x, y_{n+1}^{(1)}) \leq \\ &\leq \lim_{n \to \infty} [d_1(x, y_2^{(1)}) + d_1(y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) + \cdots + d_1(y_n^{(1)}, y_{n+1}^{(1)})] \leq \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon/2^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + \varepsilon . \end{aligned}$$

To velja za vsak $\varepsilon > 0$, zato je

$$\mathrm{dist}_1(x, \pi_1(\varprojlim(E_n, f_n)) \leq d_1(x, x_1) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,.$$

Ta ocena je veljavna za vsak $x \in E_1$.

Ker je tudi $(E_n, f_n)_{n \geq k}$ projektiven sistem, dobimo podobno

$$d_k(x, \pi_k(\varprojlim(E_n, f_n)_{n \geq k})) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i$$

za vsak $x \in E_k$. Elemente iz $\varprojlim(E_n, f_n)_{n \geq k}$ pa lahko "podaljšamo" do elementov iz $\varprojlim(E_n, f_n)$ s tem, da postavimo $x_i = f_i \circ f_{i+1} \circ \cdots \circ f_{k-1}(x_k)$ za $1 \leq i < k$. Ker je $\pi_k(\varprojlim(E_n, f_n)_{n \geq k}) = \pi_k(\varprojlim(E_n, f_n))$, je izrek dokazan.

Naj bo sedaj $(E_n, f_n)$ projektiven sistem polnih metričnih prostorov, pri čemer pa zahtevajmo od preslikav $f_n : E_{n+1} \to E_n$ samo to, da so zvezne.

**Izrek 2** (Izrek o inverzni limiti). *Če je za vsak $n \geq 1$ slika $f_n(E_{n+1})$ gosta v prostoru $E_n$, je za vsak $k \geq 1$ tudi projekcija $\pi_k(\varprojlim(E_n, f_n))$ gosta v prostoru $E_k$.*

**Dokaz.** Preslikave $f_n$ sedaj niso nujno kontrakcije tako kot v trditvi 1, vendar lahko to pomanjkljivost preprosto odpravimo, če vpeljemo v prostore $E_n$ nove metrike.

Zaradi enostavnejšega zapisa uporabimo že znano oznako iz dokaza trditve 1: za vsak $z \in E_n$ in vsak $k \leq n-1$ naj bo

$$z^{(k)} = f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}(z)$$

in $z^{(n)} = z$. Potem pa definirajmo

$$\delta_n(x, y) = \max\{d_k(x^{(k)}, y^{(k)}); 1 \leq k \leq n\}$$

za vsak par elementov $x, y \in E_n$.

Tako definirana preslikava $\delta_n : E_n \times E_n \to \mathbb{R}$ je nova metrika na prostoru $E_n$ (bralec naj se sam prepriča, da veljajo vsi potrebni aksiomi [7]).

Očitno velja $d_n \leq \delta_n$, tako da so odprte krogle glede na metriko $\delta_n$ vsebovane v enako velikih odprtih kroglah glede na metriko $d_n$. Po drugi strani pa zaradi zveznosti preslikav $f_i$ in definicije nove metrike vsaka odprta krogla glede na $\delta_n$ vsebuje dovolj majhno odprto kroglo glede na $d_n$. Oboje skupaj pomeni, da določata nova in stara metrika na $E_n$ isto topologijo (primerjaj [7], str. 54 in 55). Torej so v obeh metrikah konvergentna ista zaporedja.

Nadalje je vsako zaporedje, ki je Cauhcyjevo v metriki $\delta_n$, Cauchyjevo tudi v metriki $d_n$, zaradi polnosti prostora $(E_n, d_n)$ torej konvergentno. Potemtakem je $E_n$ poln metrični prostor tudi v primeru, če ga opremimo z novo metriko $\delta_n$.

Poleg tega velja za vsak $x, y \in E_{n+1}$ še

$$\delta_n(f_n(x), f_n(y)) \leq \delta_n(x, y),$$

tako da so preslikave $f_n$ v novi metriki kontrakcije.

Rezultat sedaj takoj sledi iz izreka 1, v katerem vzamemo $\lambda_n = 0$ za vsak $n > 1$.

## 2. Uporaba izrekov o inverzni limiti

Ozrimo se sedaj po uporabi obeh navedenih izrekov. Najprej si (bolj za ilustracijo kot zares) poglejmo dve preprosti posledici izreka 1, ki sta nam dobro znani iz osnovne analize, potem pa bomo v dveh pomembnejših primerih uporabili še izrek 2.

1. Prva posledica izreka 1 je t.i. *lema o vloženih kroglah*, ki pravi:

*V polnem metričnem prostoru imejmo zaporedje zaprtih krogel $B_1, B_2, \ldots$, ki so vložene druga v drugi: $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, njihovi premeri $r_n$ pa konvergirajo proti 0. Tedaj je presek krogel neprazen: $\cap_{n\geq 1} B_n \neq \emptyset$.*

Običajni dokaz te leme uporablja dejstvo, da središča teh krogel tvorijo Cauchyjevo zaporedje, njihova limita (ki v polnem prostoru obstaja) leži v preseku vseh krogel (in je v njem edina točka).

Kako pa lahko za dokaz uporabimo izrek 1? Zaprte krogle so v polnem prostoru tudi same polni metrični prostori v inducirani metriki, vložitve pa izometrije. Poleg tega za vsak $n \geq 1$ velja $\lambda_n = \sup_{x\in B_n} \operatorname{dist}_n(x, B_{n+1}) \leq$ $\leq 2r_n$. Ker je za vsako podzaporedje $(n_k)_{k\geq 1}$ presek $\cap_{k\geq 1} B_{n_k}$ enak preseku $\cap_{n\geq 1} B_n$, lahko z izbiro primernega podzaporedja vedno predpostavimo, da vrsta iz polmerov konvergira. V tem primeru konvergira tudi vrsta $\sum_n \lambda_n$ in lahko uporabimo izrek 1, ki zagotavlja, da inverzna limita, to je, presek vseh krogel, ni prazna množica.

**Opomba.** V dokazu potrebujemo dejstvo, da polmeri konvergirajo proti 0, vendar to ni zgolj tehnično vprašanje. Brez tega pogoja lema o vloženih zaprtih kroglah ne velja, kar kaže naslednji primer (primerjaj [1], str. 95).

Naj bo npr. $l^1$ prostor (kompleksnih) zaporedij *z absolutno konvergentno vrsto iz členov* (njena vsota je ravno norma v $l^1$) in $(e_n)_{n\geq 1}$ v njem običajna baza (zaporedje $e_n$ je sestavljeno iz samih ničel in enojke na $n$-tem mestu). Za vsak $n \geq 1$ naj bo $x_n = (1/2 + 1/n)e_n$. Potem je $X = \{x_n; n = 1, 2, \cdots\}$ metrični podprostor v $l^1$, v katerem so Cauchyjeva natanko tista zaporedja, ki so od nekega člena naprej konstantna. Torej je prostor poln. Vzemimo v tem prostoru zaprto kroglo $B_n$ s polmerom $1 + 2/n$ in središčem v točki $x_n$.

Potem se hitro vidi, da je $B_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Zaporedje krogel $B_1$, $B_2$, $\cdots$ je torej padajoče, njihovi polmeri konvergirajo proti 1, presek $\cap_{n\geq 1} B_n$ pa je očitno prazen.

2. Drugi primer uporabe izreka 1 je *Banachov skrčitveni princip* ([7], izrek 14.14):

*Naj bo $(E, d)$ poln metrični prostor in $f : E \to E$ stroga skrčitev, to je preslikava z lastnostjo $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ za vsak $x, y \in E$, kjer je $0 \leq k < 1$. Tedaj ima preslikava $f$ natanko eno negibno točko, to je točko $x$ z lastnostjo $x = f(x)$.*

Tudi tu je običajni dokaz zelo preprost. Rekurzivno definiramo zaporedje, za katerega pokažemo, da je Cauchyjevo. Njegova limita je negibna točka skrčitve $f$.

Če hočemo uporabiti izrek 1, se zaradi lažjega dokazovanja omejimo na primer, ko je $\delta = \sup_{x\in E} \operatorname{dist}(x, f(E)) < \infty$. Ta pogoj je npr. izpolnjen vedno, ko je prostor $E$ omejen.

Za vsak $n \geq 1$ vzemimo $E_n = E$, $f_n = f$ in $d_n(x, y) = k^n d(x, y)$, $x, y \in$ $\in E$. Tedaj je $d_n$ kontrakcija, saj za vsak $x, y \in E_n$ velja

$$d_n(f_n(x), f_n(y)) = k^n d(f(x), f(y)) \leq k^{n+1} d(x, y) = d_{n+1}(x, y)\,.$$

Poleg tega je $\operatorname{dist}_n(x, f_n(E_{n+1})) = k^n \operatorname{dist}(x, f(E))$ za vsak $x \in E_n = E$, torej

$$\lambda_n = \sup_{x\in E_n} \operatorname{dist}_n(x, f_n(E_{n+1})) = k^n \sup_{x\in E} \operatorname{dist}(x, f(E)) = \delta k^n.$$

Ker vrsta $\sum_n \lambda_n$ očitno konvergira, je po izreku 1 $\varprojlim(E_n, f_n) \neq \emptyset$.

Elementi inverzne limite so zaporedja $(x_n)_{n\geq 1}$ z lastnostjo $x_1 = f(x_2) =$ $= f(f(x_3)) = \cdots$. Pa denimo, da je tudi zaporedje $(x'_n)$ v $\varprojlim(E_n, f_n)$. Tedaj za vsak $j \geq 1$ in za vsak $n \geq 1$ velja

$$\begin{aligned} d(x_j, x'_j) &= d(f(x_{j+1}), f(x'_{j+1})) \leq kd(x_{j+1}, x'_{j+1}) = \\ &= kd(f(x_{j+2}), f(x'_{j+2})) \leq k^2 d(x_{j+2}, x'_{j+2}) \leq \cdots \leq k^n \delta. \end{aligned}$$

Od tod sledi $x_j = x'_j$ za poljuben $j \geq 1$. Vidimo torej, da vsebuje inverzna limita en sam element. Ker sta hkrati z zaporedjem $(x_n)_{n\geq 1}$ elementa inverzne limite očitno tudi zaporedji $(x_{n+1})_{n\geq 1}$ in $(f(x_n))_{n\geq 1}$, mora zaradi enoličnosti veljati $x_n = x_{n+1}$ in $x_n = f(x_n)$ za vsak $n$. Torej je $x_1 = f(x_1)$ (edina) negibna točka preslikave $f$ v metričnem prostoru $E$.

3. Z izrekom o inverzni limiti je povezan eden najvažnejših izrekov analize — znameniti *Bairov izrek o kategoriji* (glej [7], izrek 14.19.):

**Izrek** (Baire). *Naj bo $E$ poln metrični prostor in $(U_n)_{n\geq 1}$ zaporedje podmnožic v $E$, tako da je za vsak $n$ podmnožica $U_n$ odprta in gosta v $E$. Tedaj je $\cap_{n\geq 1} U_n$ gosta podmnožica v $E$.*

Bairov izrek je tako fundamentalen, da leži v osnovi mnogih znanih trditev iz analize, npr. da ima števen poln metrični prostor vsaj eno izolirano točko, da so le "redke" zvezne funkcije odvedljive vsaj v eni točki danega intervala (glej [7], izrek 14.22), da je limitna funkcija zaporedja zveznih funkcij zvezna na gosti množici in še mnogo drugih (glej npr. [3]). Uporablja se tudi v običajnih dokazih izreka o enakomerni omejenosti in izreka o odprti preslikavi ([7], izrek 14.24).

Potrebovali bomo naslednje manj znano dejstvo:

**Trditev.** *Naj bo $G$ poljubna odprta podmnožica polnega metričnega prostora $(E,d)$. Tedaj je množica $G$ poln metrični prostor v metriki $d_G$, definirani z*

$$d_G(x,y) = \max\{d(x,y), |\frac{1}{\operatorname{dist}(x,G^c)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(y,G^c)}|\}$$

*$(x,y \in G)$, ki je na množici $G$ ekvivalentna prvotni metriki $d$.*

**Dokaz.** Takoj vidimo, da je preslikava $d_G$ zaradi odprtosti podmnožice $G$ dobro definirana, da je res metrika na $G$ in da velja $d \leq d_G$. Obe metriki določata na množici $G$ isto topologijo. Po eni strani je namreč zaradi $d \leq$ $\leq d_G$ vsaka nova krogla vsebovana v enako veliki stari krogli. Po drugi strani pa zaradi zveznosti preslikave $x \mapsto \operatorname{dist}(x,G^c)$ na množici $G$ (glej npr. [7], izrek 4.13) in posledično tudi preslikave $x \mapsto 1/\operatorname{dist}(x,G^c)$ za vsak $x \in G$ in vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo tak $\delta > 0$, da iz $d(x,y) < \delta$ sledi $d_G(x,y) < \varepsilon$. Torej sta metriki $d$ in $d_G$ na množici $G$ res ekvivalentni. Nazadnje je vsako zaporedje točk $x_n \in G$, ki je Cauchyjevo v metriki $d_G$, Cauchyjevo in zato zaradi polnosti prostora $(E,d)$ konvergentno tudi v metriki $d$. Konvergira pa proti neki točki $x \in G$. Če bi namreč konvergiralo proti neki točki iz $G^c$, bi bilo zaporedje $1/\operatorname{dist}(x_n,G^c)$ in s tem za vsak fiksen $m$ tudi zaporedje $d_G(x_n,x_m)$ neomejeno. To pa bi bilo v nasprotju s predpostavko, da je zaporedje $(x_n)_{n\geq 1}$ Cauchyjevo v metriki $d_G$. Potemtakem je metrični prostor $(G,d_G)$ poln.

Vidimo, da smo z izbiro primerne ekvivalentne metrike v $G$ dosegli, da tista zaporedja iz $G$, ki so v prejšnji metriki $d$ konvergirala proti robu množice $G$, v novi metriki $d_G$ niso več Cauchyjeva. S tem smo zagotovili polnost metričnemu prostoru $(G,d_G)$.

Baireov izrek lahko sedaj neposredno izpeljemo iz izreka o inverzni limiti.

Najprej tvorimo novo zaporedje odprtih podmnožic: $V_1 = E$, $V_{n+1} =$ $= \cap_{k\leq n} U_n$ za $n \geq 1$. S tem dosežemo, da je novo zaporedje $V_n$ padajoče: $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$. Pri tem velja $\cap_{n\geq 1} U_n = \cap_{n\geq 1} V_n$, množice $V_n$ pa so prav tako kot množice $U_n$ goste v prostoru E.

Za projektivni sistem $(E_n, f_n)$ vzemimo $E_n = V_n$, $d_n = d_{V_n}$ (kjer je $d_{V_n}$ nova metrika na odprti množici $V_n$, definirana kot v prejšnji trditvi) in $f_n : V_{n+1} \to V_n$ identična preslikava. Ker je očitno tudi v novi metriki $d_n$ podmnožica $V_{n+1}$ gosta v $V_n$, so vse predpostavke izreka 2 izpolnjene, inverzna limita je neprazna in množica $\pi_1(\varprojlim(E_n, f_n)) = \cap_{n\geq 1} V_n = \cap_{n\geq 1} U_n$ je gosta v prostoru $E_1 = E$. To pa je ravno vsebina Baireovega izreka.

4. Kot smo obljubili v uvodu, poglejmo še, kakšno zvezo ima izrek o inverzni limiti s klasičnim *Mittag-Lefflerjevim izrekom o meromorfnih funkcijah.* Ta izrek govori o konstrukciji meromorfne funkcije s predpisanimi poli in glavnimi deli v teh polih (glej npr. [6], Theorem 13.10).

**Izrek** (Mittag-Leffler). *Naj bo $U$ odprta množica v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ in $(a_k)_{k\geq 1}$ zaporedje točk v $U$, ki nimajo stekališča v $U$, za vsak $k \geq 1$ pa naj bo $s_k$ racionalna funkcija na $U$ s polom stopnje $m_k$ v točki $a_k$, torej oblike*

$$s_k(z) = \sum_{i=1}^{m_k} \frac{c_{k,i}}{(z - a_k)^i}$$

*za vsak $z \in U$ in za primerne konstante $c_{k,i}$. Tedaj obstaja na množici $U$ meromorfna funkcija s poli v točkah $a_k$ in z glavnimi deli v $a_k$, enakimi $s_k$.*

**Dokaz.** Dokažimo nekoliko preprostejši primer, ko je množica $U$ enaka $\mathbb{C}$. Dokaz splošnega izreka je tehnično bolj zapleten, osnovna ideja pa je ista.

Za vsak $n \geq 1$ naj bo $U_n = \{z \in \mathbb{C}; |z| < n\}$ in $\mathcal{H}(U_n)$ množica vseh holomorfnih (analitičnih) funkcij na odprti množici $U_n$. Znano je, da je $\mathcal{H}(U_n)$ topološki vektorski prostor (celo algebra) s topologijo enakomerne konvergence na vseh kompaktnih podmnožicah v $U_n$, hkrati pa je tudi poln metrični prostor v neki metriki $\delta_n$, ki je translacijsko invariantna, se pravi, da za vsako trojico $f, g, h \in \mathcal{H}(U_n)$ velja $\delta_n(f + h, g + h) = \delta_n(f, g)$ (glej npr. [5], 1.45).

Definirajmo $E_n$ kot množico tistih meromorfnih funkcij $f$ na $U_n$, katerih edini poli v $U_n$ so enaki točkam $a_k \in U_n$, glavni deli v njih pa enaki ravno funkcijam $s_k$. Če označimo $t_n = \sum_{a_k \in U_n} s_k$, tako vidimo, da je za vsak $f \in E_n$ funkcija $f - t_n \in \mathcal{H}(U_n)$. V množico $E_n$ uvedimo metriko $d_n$ s predpisom $d_n(f, g) = \delta_n(f - t_n, g - t_n)$ za $f, g \in E_n$. Bralec naj se sam prepriča, da je $d_n$ res metrika in da je v njej prostor $E_n$ poln.

Naj bo $r_n : E_{n+1} \to E_n$ običajna restrikcija funkcij. Če je torej $f \in E_{n+1}$, se pravi meromorfna funkcija na $U_{n+1}$, je $r_n(f) = f|_{U_n}$, to je meromorfna funkcija na $U_n$, ki je očitno v $E_n$. Ker je topologija v prostoru $E_n$ v bistvu določena z enakomerno konvergenco uztreznih funkcij $f - t_n \in \mathcal{H}(U_n)$ na kompaktnih podmnožicah v $U_n$, se hitro vidi, da so restrikcije $r_n$ zvezne. Poleg tega je podmnožica $r_n(E_{n+1})$ gosta v $E_n$. To vidimo takole: Naj bo $f \in E_n$. Ker je $f - r_n(t_{n+1}) \in \mathcal{H}(U_n)$, lahko to funkcijo na vsaki kompaktni podmnožici v $U_n$ poljubno natančno aproksimiramo

s polinomi, npr. kar po Taylorjevi formuli. Obstaja torej tako zaporedje polinomov $p_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots$, da velja

$$\delta_n(f - r_n(t_{n+1}), p_k^{(n)}) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Naj bo $p_k^{(n+1)}$ isti polinom kot $p_k^{(n)}$, vendar nad množico $U_{n+1}$. Potem je $r_n(p_k^{(n+1)}) = p_k^{(n)}$. Prav tako je $r_n(t_{n+1}) = t_n + r_n(\sum_{a_k \in U_{n+1} \setminus U_n} s_k)$. Ker je $p_k^{(n+1)} + t_{n+1} \in E_{n+1}$, lahko zaradi invariantnosti metrike $\delta_n$ pišemo

$$d_n(f, r_n(p_k^{(n+1)} + t_{n+1})) = \delta_n(f - t_n, p_k^{(n)} + r_n(t_{n+1}) - t_n) =$$

$$= \delta_n(f - t_n, p_k^{(n)} + r_n(\sum_{a_k \in U_{n+1} \setminus U_n} s_k)) = \delta_n(f - t_n - r_n(\sum_{a_k \in U_{n+1} \setminus U_n} s_k), p_k^{(n)}) =$$

$$= \delta_n(f - r_n(t_{n+1}), p_k^{(n)}) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Torej smo dokazali gostost restrikcij elementov množice $E_{n+1}$ v $E_n$.

Predpostavke izreka 2 so izpolnjene, zato je inverzna limita $\varprojlim(E_n, r_n)$ neprazna. Vsak element inverzne limite pa očitno definira ravno meromorfno funkcijo na $U$ s predpisanimi lastnostmi.

Kot že rečeno, je dokaz splošnega primera nekoliko bolj zapleten, čeprav v bistvu isti. Namesto Taylorjevega razvoja je pri aproksimaciji s polinomi potrebno uporabiti Rungejev izrek (glej [6], Theorem 13.7).

5. Na koncu omenimo, da se izrek o inverzni limiti pogosto uporablja tudi v funkcionalni analizi, zlasti v teoriji Fréchetovih in Banachovih algeber, in v teoriji operatorjev, npr. v teoriji avtomatične zveznosti. Podrobnejše poročilo o teh aplikacijah pa seveda presega okvir in namen tega članka.

V vseh primerih, ki smo jih obravnavali, bi se kajpak uporabi izrekov o inverzni limiti lahko preprosto (in največkrat tudi upravičeno) izognili. Konec koncev so vse trditve dokazali davno pred uvedbo pojma inverzna limita. Vendar pa je včasih le koristno na znano zadevo pogledati še z drugega, bolj splošnega zornega kota, kar nam je lahko v pomoč tudi v novih situacijah.

## LITERATURA


[1] A. B. Antonevič, Ja. V. Radino, *Funkcionalnij analiz i integralnie uravnenija,* Minsk 1984.

[2] J. Esterle, *Mittag-Leffler methods in the theory of Banach algebras and a new approach to Michael's problem,* Contemporary Mathematics, **32** (1984) 107-129.

[3] D. Ostruh, *Bairov izrek in njegova uporaba v elementarni analizi* (diplomsko delo), Ljubljana 1981.

[4] N. Prijatelj, *Uvod v matematično analizo, 1.del,* Matematika-Fizika ; 12, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1980.

[5] W. Rudin, *Functional Analysis,* McGraw-Hill, New York 1973.

[6] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, London 1970.

[7] J. Vrabec, *Metrični prostori,* Matematika-Fizika ; 31, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1990.

**TARNÓCZY T., Einführung in die musikalische Akustik, Akadémia Kiadó, Budapest 1991, 508 str.**

Pred nami je razširjeni nemški prevod dela o glasbeni akustiki, ki je izšlo v madžarščini leta 1982 in je zbudilo tedaj precejšnje zanimanje. Pri nastajanju prevoda je sodeloval J. Meyer.

Delo obravnava glasbo, za pisca časovno zaporedje zvokov, na treh ravneh, ki jim posveča tri dele. Prvi del opisuje zvok v okviru fizike. Vsebuje poglavja o zvočilih in zvočnem polju, analizi zvoka, načinih vzbujanja zvoka in potovanju zvoka. Ta del bi od vseh utegnil najbolj pritegniti pozornost fizika, a se mu pozna, da je napisan za nefizika. Navaja samo najpomembnejše enačbe. Drugi del zajema zaznavanje zvoka in obdelavo zvoka v možganih s poglavji o lastnostih ušesa, glasnosti, višini tona, barvi zvoka in posluhu. Tretji del zadeva glasbo in estetski užitek ob njenem poslušanju in vsebuje poglavja o začetkih glasbe, o glasbenih inštrumentih, ki jih razdeli na najprepostejše, na primer gong, zvonec in boben, na inštrumente s strunami in na inštrumente na zračni tok, o umetnem zvoku in o glasbi v zvezi z arhitekturo.

Knjiga posrečeno povezuje vse tri ravni, fizikalno, fiziološko in psihološko in jo bodo glasbeniki, študenti glasbe in ljubitelji, ki jim je predvsem namenjena, zagotovo dobro sprejeli. Zanimiva utegne biti tudi za fizike, katerih delo se dotika zaznavanja in dojemanja zvoka, in za psihologe in arhitekte, ki se ukvarjajo z glasbo.

*Janez Strnad*



## DRUŠTVENI SEMINAR ASTROFIZIKA ZVEZD

Društveni seminar, 14. po vrsti iz fizike, ki je bil 15. in 16. februarja 1991 v Ljubljani, je že tretjič posegel v astronomijo. Naslov *Astrofizika zvezd* in izbira tém sta veliko obetali in odlična izvedba je upravičila pričakovanja. Pohvalo je mogoče zapisati v imenu vseh devetdesetih udeležencev, ki so odšli iz Ljubljane zelo zadovoljni. Škoda je le, da se seminarja ni udeležilo več profesorjev matematike. Brez težav bi lahko spremljali dobro pripravljena predavanja. Zasluga gre predavateljem Martinu Čopiču, Andreju Čadežu in Tomažu Zwittru. Prvi je zanimivo opisal, kaj merimo v optični astronomiji. Drugi je poskrbel za vsebino seminarja in pritegnil poslušalce s predavanjema o fizikalnih podatkih, ki jih daje svetloba zvezd, in o zvezdnih kopicah. Tretji je na svež in prijeten način razčlenil vesolje na različnih velikostnih skalah.

Astronomske delavnice, ki jo je skrbno pripravil T. Zwitter, se je udeležilo trideset kolegov. Več jih v delavnico z razpoložljivim številom računalnikov ne bi mogli sprejeti. Dario Felda in Bojan Dintinjana sta premagala vse ovire in naposled dosegla, da je delavnica stekla na računalnikih, ki so jih ljubeznivo dali na voljo na Gimnaziji Vič.

*Milena Strnad*

# OSNOVE STATISTIKE NA PRAKTIČNEM ZGLEDU

FRANC CVELBAR

PACS A 0710 + k

S preprostim učilom opazujemo v raznih okoliščinah različne statistične porazdelitve dosega ležajnih kroglic v izteku klanca in ob njihovi analizi spoznamo osnovne pojme statistike.

## FUNDAMENTALS OF STATISTICS BASED ON STUDENTS' DATA

A simple didactic aid allowing observation of statistically distributed ranges of ball bearing balls in the horizontal plane, following an inclination, is described. Analysing various distributions, obtained in the set-up, fundamental concepts of statistics are met.

Eksperimentalci si predstavljajo, da je matematični izrek, matematikom pa je eksperimentalno dejstvo.

*G. Lippmann* (1845–1921)
o Gaussovi krivulji

Pri vajah iz statistike si navadno pomagamo kar s tabeliranimi podatki, ki so za študente in dijake nezanimivi. Zares ni veliko možnosti, da bi si sami pripravili ustrezne porazdelitve. Opazovanje porazdelitve dosega trdnih (ležajnih) kroglic v izteku klanca pa vaje znatno popestri. S preprostim pomagalom dobimo različne podatke in jih statistično obdelamo. Članek vsebuje navodilo za delo in podaja nekatere rezultate.

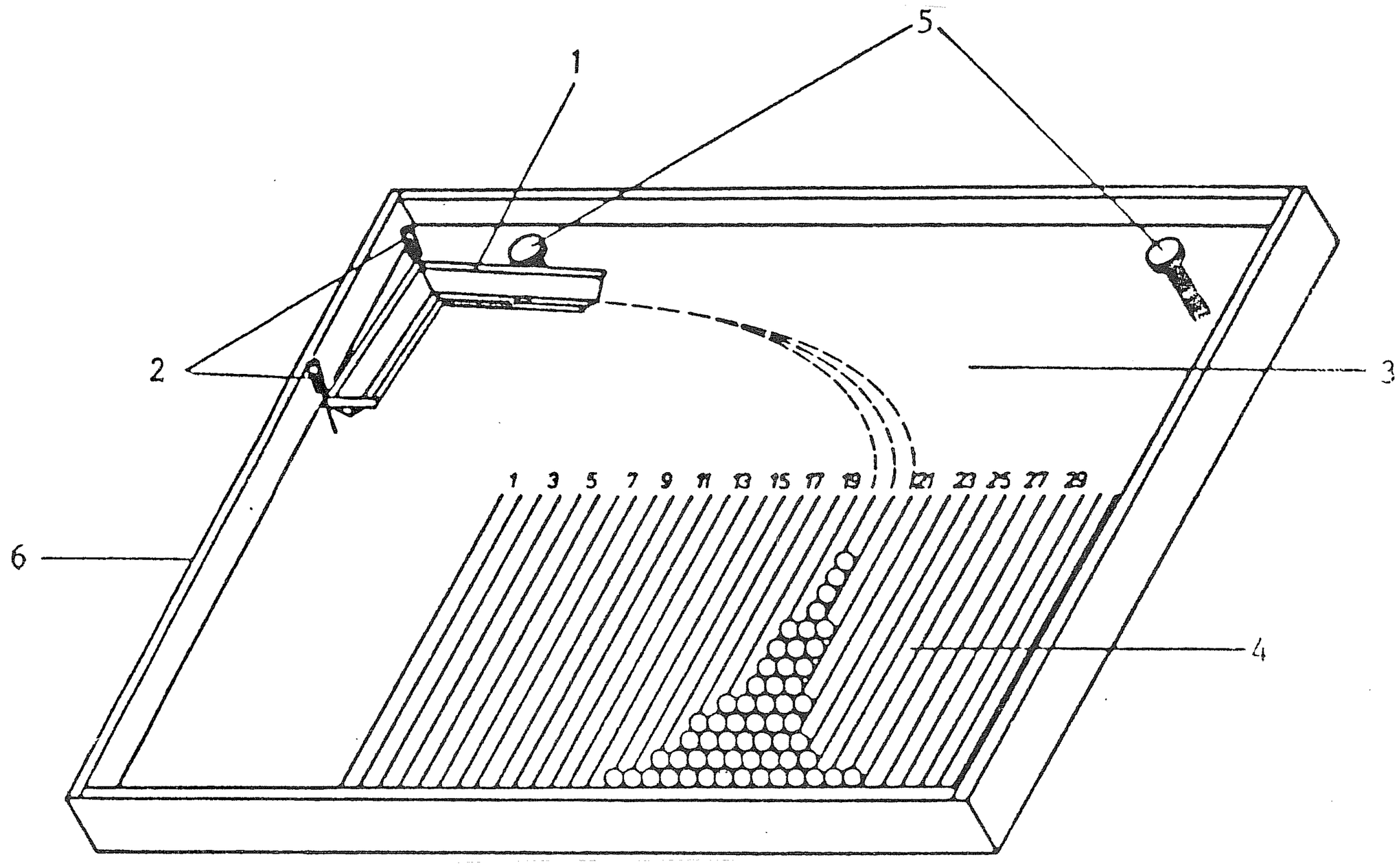
V članku ni podrobne razlage postopkov pri statistični analizi. Dijak ali študent naj se z njimi seznani v šoli ali pri predavanjih, ali pa naj jih prouči v učbeniku osnov statistike [1]–[8].

### Učilo

Učilo (Sl. 1) sestoji iz drče v obliki žleba, v katerem se (ležajne) kroglice (s premerom 3 do 4 mm) pospešijo, in vodoravne iztečne ravnine (velikosti 30 cm × 30 cm), kjer se kroglice zaustavljajo. Ravnina je rahlo nagnjena proti sortirnemu delu, ki je razdeljen v kanalčke. Zaradi tega nagiba se kroglice usmerijo proti kanalčkom in se zvonasto razporedijo. Hitrost kroglic, s tem pa tudi lego in širino porazdelitve spreminjamo z nagibi drče in iztečne ravnine. Njen nagib je prilagojen nagibu drče, če kroglice vstopajo v kanalčke približno v smeri njihove osi. Pri opazovanju koreliranih dosegov naklon drče namenoma spreminjamo.

Drča ima pod kotom 90° dva kraka z dolžino okoli 8 cm. Pri najpreprostejših poskusih kroglice z določenim polmerom natresemo v zgornji krak. Med natresanjem jih pridržimo, nato pa spustimo. Kotaleče se kroglice se najprej ustavijo na vogalu, nato pa se usmerijo k izteku. Pri drugih

poskusih spuščamo kroglice posamično. Pri nekaterih uporabimo kroglice z različnimi velikostmi. Poskuse in njihovo statistično obravnavo razdelimo na štiri skupine vaj.




Slika 1. Sistem za opazovanje statistične porazdelitve dosega kroglic v izteku klanca: 1 drča, 2 vijaka, ki določata nagib žleba, 3 iztečna ravnina, 4 izžlebljeni del iztečne ravnine, 5 vijaka za naravnavanje nagiba iztečne ravnine, 6 okvir.

## 1. Osnovna statistična obdelava izmerjenih podatkov

Opredelimo za naš primer osnovne pojme statistične analize:

1. Poskus: spustimo kroglice po drči.
2. Dogodek: pristanek kroglice v $i$-tem kanalu (razredu).
3. Statistična spremenljivka: razdalja $x$ v smeri drče, ki jo v izteku doseže kroglica. Razdaljo merimo npr. z milimetrskim merilom ali pa z zaporedno številko kanala.
4. Populacija: spustimo neomejeno število enakih kroglic ali neomejenokrat spustimo isto kroglico.
5. Vzorec: spustimo končno število enakih kroglic ali končnokrat spustimo isto kroglico.

### 1.1. Pogostost, relativna pogostost

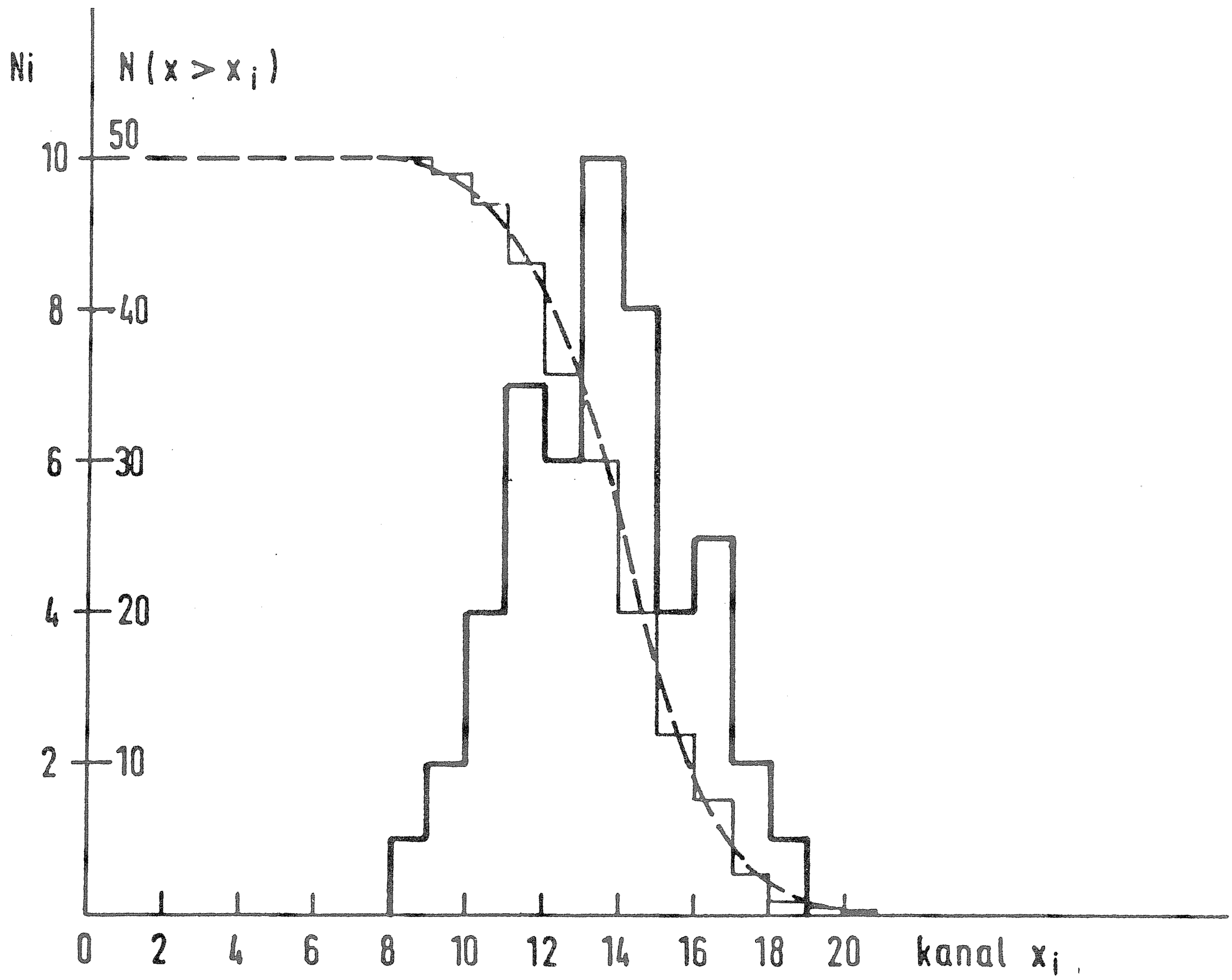
V tabelo zapišemo porazdelitev dosegov za večji vzorec npr. $N = 50$ kroglic. Število kroglic $N_i$ v posameznem kanalu $i$ imenujemo *pogostost*. Delimo jo s številom vseh kroglic in dobimo *relativno pogostost* $p_i = N_i/N$. To je približek za *verjetnost*, da bo opazovana kroglica pristala v kanalu $i$. Relativna pogostost je od kanala do kanala različna. Podatek za

vse kanale imenujemo *porazdelitev* dosegov. Porazdelitev narišemo v kanalnem in milimetrskem merilu.

V matematični literaturi namesto *pogostosti* uporabljajo besedo *frekvenca*. Ker je v fiziki frekvenca rezervirana za število obratov v enoti časa, bomo namesto nje raje uporabljali besedo pogostost.

## 1.2. Gostota pogostosti, gostota relativne pogostosti

Vrednosti $N_i$ in $p_i$ delimo s širino kanala $\Delta x$. Dobimo *gostoto pogostosti* $F_i = N_i/\Delta x$ in *gostoto relativne pogostosti* $f_i = p_i/\Delta x$ *dosega za i-ti kanal.* Gostota relativne pogostosi je *približek* za *gostoto verjetnosti.*




Slika 2. Izmerjena pogostostna porazdelitev dosega za $N = 50$ kroglic (debela črta). Njeno kumulativno porazdelitev $N(x > x_j)$ (tanka črta) primerjamo s kumulativno Gaussovo porazdelitvijo, pomnoženo s celotnim številom kroglic (črtkasta črta).

Pri obeh dobljenih gostotah ne moremo nič natančnega povedati o vrednostih $F$ ali $f$ znotraj posameznega kanala. V najpreprostejšem približku privzamemo, da pripada katerikoli vrednosti $x$ znotraj kanala ista vrednost $F$ ali $f$. Ustrezni stopničasti sliki pravimo *histogram.* Za vajo narišemo oba histograma izmerjenih gostot pogostosti.

V fiziki računamo gostoto pogostosti ali relativne pogostosti, kadar želimo rezultat meritve spektra z večkanalnim analizatorjem primerjati s

teorijsko zvezno porazdelitvijo. Izmerjeno diskretno porazdelitev tako predelamo v zvezno porazdelitev.

### 1.3. Kumulativna porazdelitev

Izračunamo tudi vsoto pogostosti in vsoto relativnih pogostosti za vse kanale nad izbranim $j$-tim kanalom, to je

$$N(x > x_j) = \sum_{j+1} N_i \quad \text{in} \quad P(x > x_j) = \sum_{j+1} p_i \ .$$

Porazdelitev $N(x > x_j)$ imenujemo *kumulativna (integralna) porazdelitev pogostosti.* Porazdelitev $P(x > x_j)$ je *kumulativna (integralna) porazdelitev relativne pogostosti* in je približek za *kumulativno (integralno) porazdelitev verjetnosti.* Statistiki ji pravijo *porazdelitvena funkcija.* Zaradi večje nazornosti in ker tako rabo v fizikalni literaturi najpogosteje srečamo, bomo za $P(x > x_j)$ v tem zapisu uporabljali ime kumulativna (integralna) porazdelitev.

Porazdelitvi $N(x > x_j)$ in $P(x > x_j)$ narišemo na poseben diagram. Kumulativno porazdelitev verjetnosti $P(x > x_j)$ za vajo grafično primerjamo s kumulativno *Gaussovo (normalno) porazdelitvijo* $P_G(x > x_j)$ (Prim. sl. 2, razlago za delo glej dalje).

Kumulativna porazdelitev pogostosti ali relativne pogostosti je tudi $N(x \leq x_j)$ ali $P(x \leq x_j)$. Z ustreznima kumulativnima vrednostma $N(x > x_j)$ in $P(x > x_j)$ sta v preprosti zvezi:

$$\begin{aligned} N(x \leq x_j) &= N - N(x > x_j)\,, \\ P(x \leq x_j) &= 1 - P(x > x_j)\,. \end{aligned}$$

Kumulativno porazdelitev pogostosti vrste $N(x > x_j)$ zelo pogosto srečujemo pri fizikalnih merjenjih. To posebej velja pri štetju električnih sunkov iz števcev ionizirajočega sevanja. Kumulativna pogostost $N(U > U_0)$ za vzorec $N_0$ sunkov, ki v času celotne meritve $t$ vstopijo v števec, je v tem primeru število sunkov, preštetih v času $t$ s števcem, ki ima diskriminacijski prag nastavljen na napetost $U_0$.

Pri opazovanju kroglic bi porazdelitev $N(x > x_j)$ neposredno izmerili tako, da bi med vsaka zaporedna dva kanala namestili laserske žarke pravokotno na drčo in bi za vsakega od njih prešteli število prekinitev. Žarke ob prvih kanalih bi prekinile vse kroglice, žarki ob zgornjih kanalih pa bi ostali ves čas neprekinjeni. Našli bi porazdelitev s stopničasto obliko, kot jo iz naše izmerjene porazdelitve dobimo s seštevanjem.

Stopničasto kumulativno porazdelitev $N(x > x_j)$, podobno naši, najdemo tudi pri štetju monoenergijskih delcev $\alpha$, ki preidejo skozi različno debele absorberje. Tanjše absorberje preidejo vsi delci; v bližini debeline, ki je enaka dosegu delcev, pa že majhna sprememba povzroči veliko spremembo v številu preštetih delcev. V debelejših plasteh se zaustavijo vsi delci $\alpha$.

Da bi primerjali izmerjeno porazdelitev $P(x > x_j)$ z Gaussovo porazdelitvijo $P_G(x > x_j)$, bi morali poznati parametra Gaussove porazdelitve, to je povprečno vrednost $a$ in pravi standardni odmik $\sigma$. Ker je naš vzorec velik (npr. $N > 30$), ju v dobrem približku nadomestimo s povprečno vrednostjo vzorca $\bar{x}$ in s *standardnim odmikom vzorca* $s$. Izračunamo ju iz definicijskih enačb (če je vseh kanalov $r$):

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} N_i x_i$$

in

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{r} N_i (x_i - \bar{x})^2 .$$

(Če povprečno vrednost $a$ naprej natančno poznamo, v izrazu za $s^2$ vrednost $N-1$ zamenjamo z $N$, $\bar{x}$ pa z $a$).

Gaussovo integralno verjetnost $P_G(x > x_j)$ podaja enačba:

$$P_G(x > x_j) = \int_{x_j}^{\infty} f_G(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_j}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}\,dx .$$

Račun opravimo po substituciji $t = \frac{x-a}{\sigma}$, ki vodi do integralov

$$P_G(x > x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_j}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u_j} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u_j} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt .$$

V tabelah poiščemo vrednost enega izmed njih.

## 2. Obdelava ponovljenih vzorčnih meritev

### 2.1. Večkratno vzorčenje

Najprej si pripravimo nove podatke tako, da $k$-krat (npr. $k = 15$) ponovimo meritev porazdelitve za *vzorec* $n$ kroglic (število $n$ bi moralo biti vsaj 5, vendar je zaradi pomanjkanja časa pri vaji še sprejemljiva vrednost $n = 3$). Vzorčna povprečja $m_l = \sum_{i=1}^{n} x_{li}/n$ $(l = 1, 2, ..., k)$ so na splošno med seboj različna in porazdeljena okrog prave povprečne vrednosti $a$ po Gaussovem zakonu, podobno kot predpostavljamo, da velja za posamične vrednosti $x_{li}$. Standardni odmik $\sigma_m$ za ta povprečja je manjši od standardnega odmika velikega vzorca posamičnih meritev $\sigma$. Teorijsko velja $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$.

Pri vaji izračunamo vrednost

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(m_l - a)^2} .$$

Primerjamo jo s teorijsko vrednostjo $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$. Pri tem vrednosti za $a$ in $\sigma$ nadomestimo s prej dobljenima približkoma za $\bar{x}$ in $s$. Isto velja pri naslednjih vajah 2.2 in 2.3.

### 2.2. Studentova razdelitev

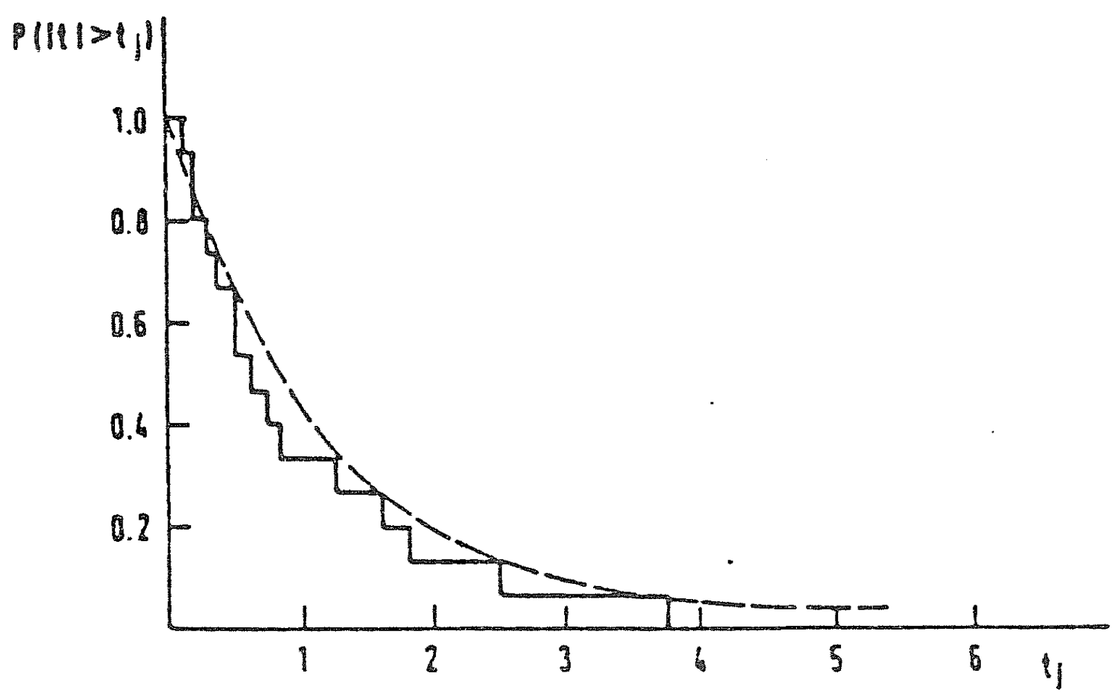
Vsaki povprečni vrednosti dosega $m_l$ priredimo *Studentovo spremenljivko* $t_l = (m_l - a)\sqrt{n}/s_l$, kjer $s_l$ pomeni standardni odmik $l$-tega malega vzorca. Njeno kumulativno porazdelitev $P(t > t_j)$ primerjamo za vajo s tabelirano kumulativno Studentovo porazdelitvijo z $n-1$ prostostnimi stopnjami (Sl. 3). Porazdelitvi se približno ujemata, če je porazdelitev vzorčnih povprečij Gaussova in je število vzorcev dovolj veliko.

### 2.3. Porazdelitev $\chi^2$

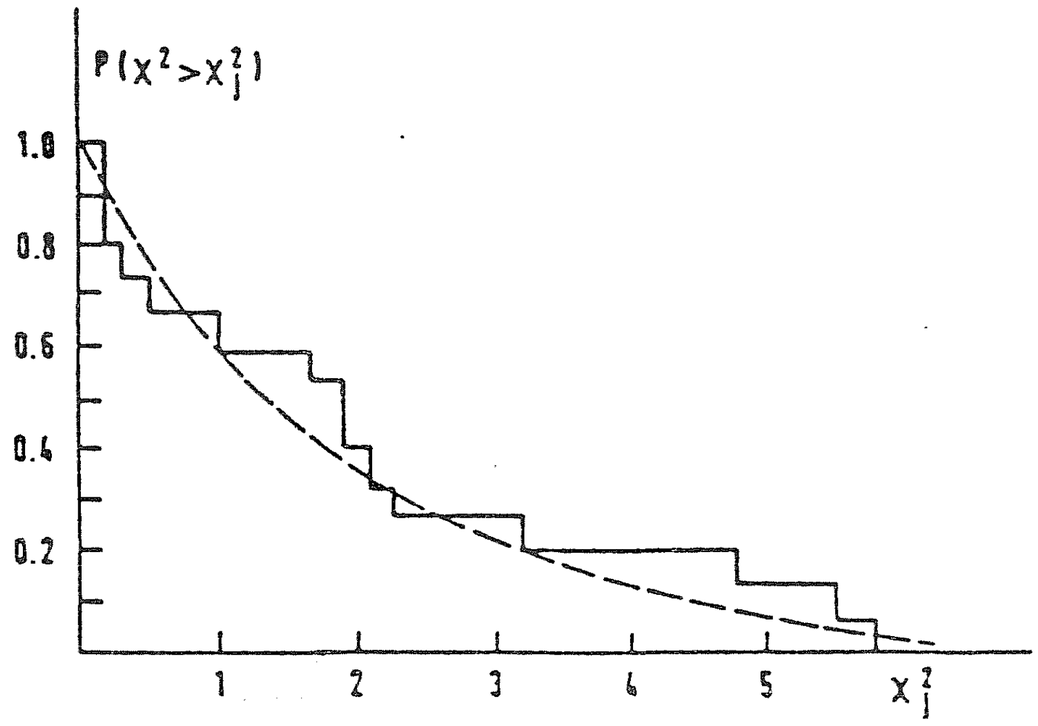
Grafično primerjamo tudi kumulativno porazdelitev *spremenljivke*

$$\chi_l^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2/\sigma^2 = ns_l^2/\sigma^2$$

s tabelirano kumulativno $\chi^2$ porazdelitvijo za $n-1$ prostostnih stopenj (Sl. 4).




**Slika 3.** Izmerjeno kumulativno porazdelitev pogostosti za absolutne vrednosti $t_l = (m_l - a)\sqrt{n}/s_l$, t.j. $P(|t| > t_j)$ za $K = 15$ vzorcev po $n = 3$ dogodkov (histogram), primerjamo s kumulativno Studentovo porazdelitvijo za dve prostostni stopnji (črtkana črta).




**Slika 4.** Izmerjeno kumulativno porazdelitev pogostosti spremenljivke $\chi_l^2 = ns_l^2/\sigma^2$, t.j. $P(\chi^2 > \chi_j^2)$ za $K = 15$ vzorcev po $n = 3$ dogodkov (histogram), primerjamo s kumulativno porazdelitvijo $\chi^2$ za dve prostostni stopnji (črtkasta črta).

Za popolnejšo sliko primerjamo grafično tudi porazdelitev normiranih kvadratov odmikov posamičnih dosegov od povprečja $\chi_{1i}^2 = (x_i - a)^2/\sigma^2$ s tabelirano kumulativno porazdelitvijo $\chi^2$ za eno prostostno stopnjo. Pri tem uporabimo vseh $k \cdot n$ meritev dosegov (Sl. 5).

## 3. Zanesljivostni interval in preizkus hipoteze

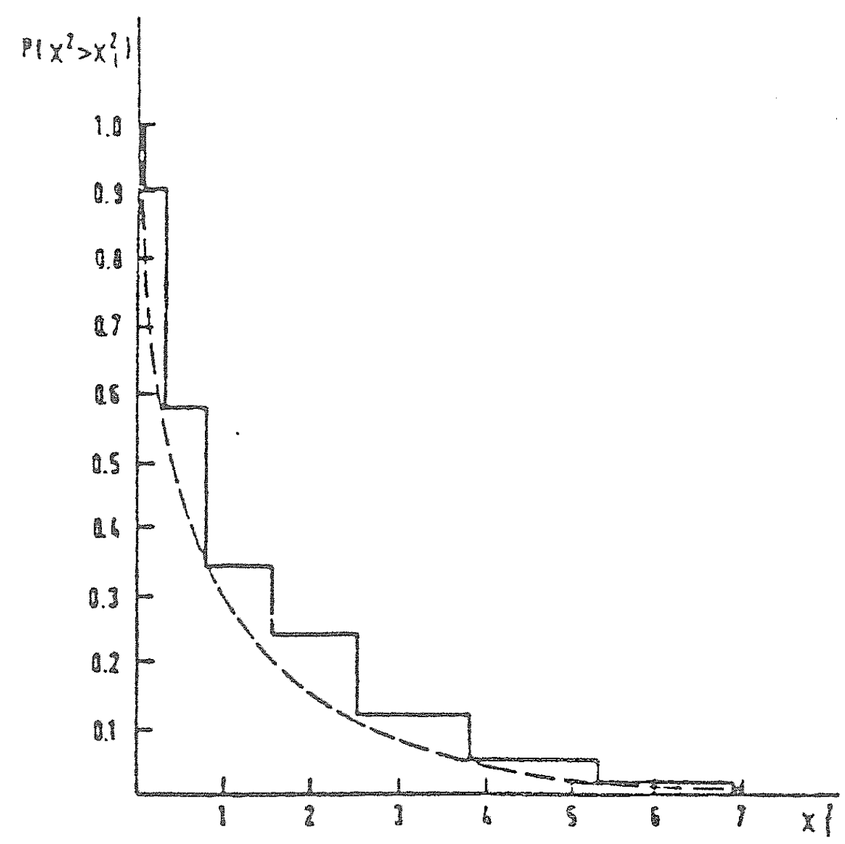
### 3.1. Zanesljivostni interval posamičnih meritev

Če so merjene vrednosti količine $x$ porazdeljene okrog povprečne vrednosti $a$ po Gaussovem zakonu, je 68 % vseh meritev v intervalu $a - \sigma < x < a + \sigma$. Imenujemo ga *68-odstotni interval zanesljivosti.* Zanesljivost za dani interval je ploščina pod Gaussovo krivuljo na tem intervalu. Poiščemo jo v tabeli za kumulativno Gaussovo porazdelitev.

Za vajo spustimo po strmini posamično npr. 10 kroglic ob nespremenjenih okoliščinah in zabeležimo njihov doseg. Na osnovi podatkov za $a = \bar{x}$ in $\sigma = s$ vaje 1.3 in ob predpostavki, da je porazdelitev Gaussova, določimo, katere vrednosti $x_i$ ustrezajo intervalu zanesljivosti npr. 80 %, ki obsega vrednosti $a - 1.3\sigma < x < a + 1.3\sigma$. Ugotovimo tudi, ali je teh vrednosti res 80 % glede na celotno število opazovanih dogodkov.

### 3.2. Zanesljivostni interval za vzorčne povprečne vrednosti

Pri vaji 2.1 smo videli, da so *povprečne vrednosti vzorcev $m_l$ porazdeljene okrog pravega povprečja $a$* s standardnim odmikom $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$. Če so verjetnosti za posamične eksperimentalne vrednosti porazdeljene po Gaussovem zakonu, velja to studi za vzorčna povprečja $m_l$. Zanesljivostni interval za povprečja torej lahko obravnavamo enako kot posamične vrednosti, le da standardni odmik $\sigma$ nadomestimo s $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$. Ob upoštevanju tega navodila ponovimo vajo 3.1 za več povprečnih vrednosti dosega $m_l$ vaje 2.1.




**Slika 5.** Izmerjeno kumulativno porazdelitev pogostosti spremenljivke $\chi_i^2 = (x_i - a)^2/\sigma^2$, t.j. $P(\chi^2 > \chi_j^2)$ za $N = 50$ dogodkov (histogram) primerjamo s kumulativno porazdelitvijo $\chi^2$ za eno prostostno stopnjo (črtkana črta).

### 3.3. Zanesljivostni interval razlike dveh količin

Manjše kroglice (npr. premera 3 mm) se zberejo v vrh pri nižjih (spodnjih — indeks $s$) kanalih kot večje kroglice (npr. premera 4 mm), ki se zberejo pri višjih (gornjih — indeks $g$) kanalih. Povprečni doseg večjih kroglic $a_g$ je torej večji od povprečnega dosega manjših kroglic $a_s$. Če je porazdelitev obeh dosegov Gaussova s standardnim odmikom $\sigma_g$ in $\sigma_s$, je po Gaussovem zakonu porazdeljena tudi razlika $x_d = x_g - x_s$ okrog povprečne razlike $a_d = a_g - a_s$. Standardni odmik te porazdelitve je teoretično $\sigma_d = \sqrt{\sigma_g^2 + \sigma_s^2}$. Podobno kot v prejšnjih primerih, ko smo obravnavali interval zanesljivosti

za izmerjene vrednosti, je za njihovo razliko interval 68 % ali 95 % zanesljivosti enak: $a_d - \sigma_d < x_d < a_d + \sigma_d$ ali $a_d - 2\sigma_d < x_d < a_d + 2\sigma_d$.

Enako zapišemo zanesljivostni interval tudi za razliko vzorčnih povprečnih vrednosti $m_i = m_g - m_s$, le da namesto $\sigma_d$ uporabimo standardni odmik za povprečje vzorcev

$$\sigma_{dm}^2 = \sqrt{\sigma_{gm}^2 + \sigma_{sm}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_g^2}{n} + \frac{\sigma_s^2}{n}}\,.$$

Za vajo spustimo npr. 15-krat veliko in malo kroglico. Zabeležimo dosege, izračunamo razlike $x_{di} = x_{gi} - x_{si}$, določimo njihovo povprečje $m_d$ in standardni odmik $s_d$. Ob predpostavki, da je $s_d = \sigma_d$, ugotovimo, katere izmerjene vrednosti padejo npr. v zanesljivostni interval 80 %, t.j. $a - 1.3\sigma < x < a + 1.3\sigma$. Nato dogodke razdelimo npr. v $k = 5$ skupin po $n = 3$ meritve. Za vsak vzorec določimo povprečni doseg velike in male kroglice $m_{gl}$ in $m_{sl}$, njuno razliko ter povprečje teh razlik. Pokažemo splošno, da mora biti to povprečje enako povprečju iz prvega dela vaje, t.j. razliki povprečij, nato ugotovitev preverimo z rezultati meritev.

Pravi standardni odmik $\sigma_m$ povprečij $m_l$ izračunamo iz zveze $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$.

### 3.4. Preizkus hipoteze o razliki

Zanesljivostni interval npr. razlik dosegov $x_d = x_g - x_s$ je območje, v katerem z dano verjetnostjo najdemo izmerjene vrednosti $x_d$, ki pripadajo povprečni vrednosti $a_d$. Seveda se v tem intervalu pojavijo tudi vrednosti $x_d$, ki pripadajo drugim povprečnim vrednostim. Med njimi je lahko celo $a_d = 0$.

Če torej izmerjena vrednost $x_d$ pade v izbrani zanesljivostni interval dane povprečne vrednosti, *to še ne pomeni*, da pripada porazdelitvi s to povprečno vrednostjo. Če torej poznamo širino zanseljivostnega intervala in izmerjeno vrednost, ne moremo ničesar povedati o povprečni vrednosti, ki ji izmerjena vrednosti pripada.

Ali pa morda z neko vrednostjo $x_d$ ob poznavanju širine zanesljivostnega intervala potrdimo bolj ohlapno trditev, da je npr. $a_d > 0$? *Pomagamo si tako, da poskušamo dokazati neveljavnost nasprotne trditve, t.j., da je* $a_d = 0$. Če namreč nasprotna trditev, $a_d = 0$, z dano zanesljivostjo ne velja, z isto zanesljivostjo sklepamo, da je $a_d > 0$. Postopku pravimo *preizkus parametrične statistične hipoteze.*

Veljavnost nasprotne hipoteze $a_d = 0$ v našem primeru pomeni, da so vrednosti $x_d$ porazdeljene okrog $a_d = 0$. V intervalu $-\sigma_d < x_d < \sigma_d$ tem vrednostim pripada verjetnost 68 %, v dvakrat daljšem intervalu je ta vrednost 95 %.

Na drugi strani pa npr. vrednosti $x_d$, ki so večje od $2\sigma_d$, z zanesljivostjo 95 % ali s stopnjo tveganja 100 % − 95 % = 5 % *zanikajo* nasprotno hipotezo $a_d = 0$ in *potrjujejo* trditev, da je $a_d > 0$.

Če pa je izmerjena razlika $x_d < 2\sigma_d$, moramo biti z izjavo bolj previdno. *Pravimo, da razlika ni značilna (signifikantna) in z našo stopnjo zanesljivosti*

*ne nasprotuje hipotezi* $a_d = 0$. To seveda ne pomeni, da je $a_d = 0$; lahko je $a_d > 0$, vendar je ta razlika tako majhna, da je z našim preizkusom ne moremo odkriti.

Da si utrdimo pojme, ugotovimo, katere meritve razlike dosegov iz vaje 3.3 s stopnjo tveganja 5 % zanikajo nasprotno trditev, da je $a_d = 0$, in katere meritve ji ne nasprotujejo. Postopek ponovimo še za povprečne razlike dosegov skupin po 3 meritve iste vaje.

### 3.5. Preizkus hipoteze o ujemanju teorijske in eksperimentalne porazdelitve

Na videz je porazdelitev dosegov, izmerjena v prvi vaji, enaka Gaussovi porazdelitvi, v katero za vrednosti $a$ in $\sigma$ vstavimo $\bar{x}$ in $s$. V nadaljevanju si oglejmo kriterij za to, da hipotezo o ujemanju eksperimntalne porazdelitve z izbrano teorijsko porazdelitvijo zavržemo.

Eksperimentalna in teorijska porazdelitev sta (približno) enaki, če je vsota (po kanalih $i = 1$ do $r$) normiranih kvadratov razlik med eksperimentalnimi $N_i$ in teorijskimi pogostostmi $N_{it}$, to je $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}(N_i - N_{it})^2/N_{it}$, porazdeljena približno po zakonu $\chi^2$ s $k = r - 1$ prostostnimi stopnjami (kadar naprej poznamo parametre Gaussove porazdelitve oziroma z $r - 3$ prostostnimi stopnjami, če približni vrednosti za $a$ in $\sigma$ določimo iz istih podatkov kot vrednost $\chi^2$). Za določitev vrednosti $\chi^2$ kanale navadno (tudi neenakomerno) grupiramo tako, da je v vsakem kanalu vsaj 6 dogodkov.

Teorijska vrednost $N_{it}$ za $i$-ti kanal s spodnjo mejo oz. zgornjo mejo pri $x_i - \Delta x/2$ oz. pri $x_i + \Delta x/2$ je s celotnim številom dogodkov $N$ pomnožena verjetnost $p_i$, ki pripada temu kanalu. Dobimo jo kot razliko dveh integralnih verjetnosti, saj velja:

$$p_i = \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} f(x)\,dx = \int_{x_i-\Delta x/2}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{x_i+\Delta x/2}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{x+\Delta x/2} f(x)\,dx - \int_{0}^{x-\Delta x/2} f(x)\,dx\,.$$

Tu je $f(x)$ gostota hipotetične (Gaussove) porazdelitve.

Hipotezo o enakosti obeh porazdelitev sprejmemo ali ovržemo s podobnim postopkom, kot smo pri prejšnji vaji sprejeli ali zavrgli hipotezo $a_d = 0$, le da v tem primeru obravnavamo spremenljivko $\chi^2$. *Pri dani zanesljivosti (npr. 95 %), ki ji pripada mejna verjetnost* $\chi_0^2$, *vsaka vrednost* $\chi^2$, *za katero velja* $\chi^2 > \chi_0^2$, *nasprotuje trditvi o enakosti obeh porazdelitev (hipotezo o enakosti zavrnemo). Na drugi strani ji vrednosti* $\chi^2 < \chi_0^2$ *sicer ne nasprotujejo (hipotezo o enakosti sprejmemo), vendar ne smemo reči, da jo potrjujejo.*

Pri porazdelitvah dosegov kroglic, izmerjenih z dobro prilagojenimi nakloni, je eksperimentalna vrednost $\chi^2$ navadno manjša od $\chi_0^2$, ki ustreza zanesljivosti 95 %. Taka vrednost torej z zanesljivostjo 95 % (s stopnjo tveganja 5 %) ne nasprotuje hipotezi, da je porazdelitev dosegov kroglic Gaussova. Za študij primera, ko je eksperimentalna vrednost $\chi^2$ z znatno verjetnostjo

večja od $\chi_0^2$ stopnje tveganja 5 %, si pripravimo bolj razpršene podatke. Najpreprosteje jih dobimo tako, da med spuščanjem kroglic obračamo naklonski vijak v desnem zgornjem kotu zaviralne ravnine.

## 4. Korelirane porazdelitve

### 4.1. Analiza koreliranih količin

Zaporedna dosega večje kroglice in manjše kroglice sta *nepovezana (nekorelirana), če je odklon strmine stalen.* Če pa v presledku pred meritvijo dosega naslednjega para naklon spremenimo, postaneta, glede na povprečje, oba nova dosega vsaj delno prevelika ali premajhna. Pravimo, da sta vrednosti $(x_g - a_g)$ in $(x_s - a_s)$ pozitivno korelirani. Korelacijski koeficient (za $N$ parov dosegov)

$$c_{12} = \frac{1}{N\sigma_g\sigma_s}\sum_{i=1}^{N}(x_{gi} - a_g)(x_{si} - a_s)$$

je različen od nič, pri stalnem odklonu in ob normalno porazdeljenih dosegih pa je njegova napovedana vrednost enaka 0. Da dosežemo korelacijski koeficient okrog 0.5, je dovolj, da periodično obračamo vijak v zgornjem desnem kotu opazovalne ravnine v mejah $\pm 1/2$ obrata ($\pm 0,25$ mm) v korakih po 1/8 obrata ali 1/4 obrata za vsak opazovani par.

Za vajo izračunamo za nekorelirane in korelirane meritve standardni odmik razmerja dosegov malih in velikih kroglic $R = x_s/x_g$:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{x_g^2}\sigma_s^2 - 2\frac{x_s}{x_g^3}c_{gs}\sigma_g\sigma_s + \frac{x_s^2}{x_g^4}\sigma_g^2 .$$

Izraz sledi iz povprečja kvadrata diferenciala funkcije $R$:

$$\langle dR^2\rangle = (\frac{\partial R}{\partial x_s})^2\langle dx_s^2\rangle + 2\frac{\partial R}{\partial x_s}\frac{\partial R}{\partial x_g}\langle dx_s\, dx_g\rangle + (\frac{\partial R}{\partial x_g})^2\langle dx_g^2\rangle .$$

Pri tem povprečje kvadratov diferencialov izenačimo s kvadrati efektivnih odmikov, povprečje njihovih produktov pa se izraža s korelacijskim koeficientom kot: $\langle dx_g\, dx_s\rangle = c_{gs}\sigma_g\sigma_s$. Ko so dogodki nekorelirani, je srednji člen enak nič, saj je korelacijski koeficient $c_{gs} = 0$. (Če pa bi bila dosega v linearni funkcijski zvezi, bi bil $c_{gs} = 1$.)

### 4.2. Zgled

Pri opazovanju dosega 30 parov kroglic spreminjamo strmino okrog povprečja v 8 korakih po 0,06 mm. Za kroglice premera 3 mm in 4 mm dobimo naslednje vrednosti povprečnih dosegov $\bar{x}_g$ in $\bar{x}_s$, efektivnih odmikov

$s_g \approx \sigma_g$ in $s_s \approx \sigma_s$, korelacijskega količnika $c_{gs}$ in efektivnega odmika $s_R$ za razmerje $R = x_s/x_g$:

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{x}_s = 8,1$ kanala | $s_s = 2,2$ kanala | $\bar{x}_s/\bar{x}_g = 0,57$ |
| $\bar{x}_g = 14,3$ kanala | $s_g = 2,6$ kanala | |
| $c_{gs} = 0,73$ | $s_R = 0,11$ | |

Če bi bil pri ostalih nespremenjenih pogojih korelacijski koeficient enak 0, bi bil efektivni odmik $s_R = 0,19$ namesto ugotovljene vrednosti 0,11. Relativni efektivni odmik $s_R/R$ bi se torej povečal od 19 % na 33 %.

Ponovimo to analizo s svojimi podatki; narišemo tudi povezavo med $x_g$ in $x_s$. (Kaj opazimo?) Še prej pa se za vrednosti meritev iz vaje 3.3 prepričamo, ali je njihov korelacijski koeficient enak 0, oziroma majhen.

Pripomba: Meritev dosegov si poenostavimo tako, da izmerimo npr. dosege za 10 parov kroglic v standardni legi regulirnega vijaka, po 10 parov pa po tem, ko zavrtimo vijak za $-\frac{1}{2}$ obrata in $+\frac{1}{2}$ obrata. Vse te meritve obravnavamo kot en sam vzorec.

## Uporabljene oznake

$N$ število poskusov v velikem vzorcu
$N_i$ število dogodkov (kroglic) v $i$-tem kanalu — pogostost
$p_i = N_i/N$ relativno število dogodkov v $i$-tem kanalu — relativna pogostost (približek za verjetnost)
$\Delta x$ širina kanala
$F_i = N_i/\Delta x$ gostota dogodkov za $i$-ti kanal — gostota pogostosti
$f_i = p_i/\Delta x$ gostota relativnega števila dogodkov za $i$-ti kanal — gostota relativne pogostosti (približek za gostoto verjetnosti)
$j$ indeks mejnega kanala (spodnje meje) v integralni porazdelitvi
$r$ indeks najvišjega kanala, do koder sežejo kroglice
$x$ statistično porazdeljena spremenljivka (doseg kroglic)
$x_i$ diskretizirana vrednost spremenljivke $x$ — razdalja sredine kanala od referenčne točke
$\bar{x}$ povprečna vrednost spremenljivke $x$ za merjeni vzorec
$s$ standardni odmik spremenljivke $x$ za izbrani vzorec
$p_G$ Gaussova gostota verjetnosti
$P_G$ kumulativna Gaussova porazdelitev verjetnosti
$N_G = N \cdot P_G$ kumulativna Gaussova porazdelitev dosegov v vzorcu
$a$ prava povprečna vrednost spremenljivke $x$ (v Gaussovi porazdelitvi)
$\sigma$ pravi standardni odmik spremenljivke $x$ (v Gaussovi porazdelitvi)
$n$ število dogodkov v delnem vzorcu
$k$ število delnih vzorcev
$l$ indeks delnegà vzorca
$m_l$ povprečna vrednost spremenljivke $x$ za $l$-ti delni vzorec
$s_l$ standardni odmik spremenljivke $x$ za $l$ ti delni vzorec
$s_m$ standardni odmik povprečij $m_l$ za $k$ delnih vzorcev
$\sigma_m$ pravi standardni odmik povprečij $m_l$
$t_l$ Studentova spremenljivka za $l$ ti delni vzorec
$P(t > tj)$ kumulativna porazdelitev Studentove spremenljivke
$\chi_l^2$ spremenljivka $\chi^2$ za $l$-ti delni vzorec
$N_{it}$ pogostost dogodkov, izračunana iz izbrane teorijske porazdelitve
$g$ oznaka velike kroglice
$s$ oznaka male kroglice

$x_d$ izmerjena razlika dosega velike in male kroglice
$m_d$ povprečje razlike dosega velike in male kroglice za delni vzorec
$a_d$ prava povprečna razlika med dosegom velike in male kroglice
$s_d$ standardni odmik razlik dosegov velike in male kroglice za $n$ meritev
$s_{dm}$ standardni odmik povprečij razlik dosegov velike in male kroglice za $k$ delnih vzorcev
$\sigma_d$ pravi standardni odmik razlik dosegov velike in male kroglice
$c_{gs}$ korelacijski koeficient med dosegoma velike in male kroglice
$R$ razmerje dosega velike in male kroglice
$\sigma_R$ standardni odmik razmerja $R$, ki ga izenačimo s povprečnim kvadratom diferenciala razmerja $R$ t.j. $\langle dR^2 \rangle$

## Zaključek

Opisani preprosti sistem za opazovanje statistične porazdelitve dosegov kroglic v izteku klanca nudi študentu možnost, da si za vaje iz statistične analize pripravi svoje lastne podatke in opazuje tudi vpliv njihove spremembe na končne rezultate. To je še posebej zanimivo pri računalniški obdelavi podatkov.

Priporočam osebni računalnik ali pa vsaj elektronski kalkulator z vgrajeno statistično analizo, vključno z računanjem korelacijskega koeficienta (npr. SHARP serija PC-1400 ali PC-E500).

Pri analizi izmerjenih podatkov ali njihovih izpeljank se študent sreča s pojmi statistične analize kot so Gaussova in Studentova porazdelitev ter porazdelitev $\chi^2$, korelacijski koeficient, zanesljivostni interval in testiranje statistične hipoteze. Ker so podatki nazorni in sami kažejo potrebo po statistični obravnavi, si z opravljenimi vajami študent ustvari jasno predstavo o osnovnih postopkih statistične analize in o njihovi medsebojni povezanosti. Pri obravnavi drugačnih podatkov ali bolj poglobljeni analizi mu bodo vedno služile kot miselno izhodišče.

Čeprav je sistem v zasnovi prirejen za naravoslovno in tehnično usmerjenega študenta, so izmerjeni podatki po majhnem miselnem preskoku zaradi nazornosti privlačni tudi za družboslovce in ekonomiste. V celoti so vaje prirejene za univerzno stopnjo. Prva skupina vaj pa bo gotovo postala nepogrešljiva tudi v srednjih šolah vseh vrst, ki imajo v programu statistiko ali fizikalna merjenja.

## LITERATURA


[1] J. A. Čibej, *Verjetnostni račun in statistika,* DZS, Ljubljana 1988.
[2] R. Jamnik, *Verjetnostni račun in statistika,* Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana 1986.
[3] R. Jamnik, *Matematična statistika,* DZS, Ljubljana 1980.
[4] R. Jamnik, *Verjetnostni račun in statistika* v *Višja matematika II,* uredil I. Vidav, DZS, Ljubljana 1975.
[5] A. L. O'Toole, *Elementary practical statistics,* MacMillan, New York 1964.
[6] I. Guttman, S. S. Wilks, J. S. Hunter, *Introductory engineering statistics,* J. Willey 1971.
[7] R. Walpole, *Introduction to statistics,* MacMillan, New York 1974.
[8] W. T. Eadie, D. Dryard, F. E. James, M. Roos, B. Sadoulet, *Statistical methods in experimental physics,* North-Holland Publ. Co. 1971.

# ATOMSKI INTERFEROMETER

JANEZ STRNAD

PACS 07.60Ly, 35.10.-d

Interferenčni poskusi z elektroni so pred dobrimi šestimi desetletji podprli osnovne zakone kvantne mehanike. Kmalu so sledili interferenčni poskusi z atomi in potem še z nevtroni. Pozneje so zgradili interferometre za elektrone in nevtrone. Nedavno pa so poročali še o poskusih z napravo, ki jo lahko imamo za interferometer za atome.

## THE ATOM INTERFEROMETER

Sixty years ago interference experiments with electrons have supported the fundamental laws of quantum mechanics. Soon interference experiments with atoms and then with neutrons followed. Later on interferometers for electrons and neutrons were built. Recently, experiments with a device which can be considered an interferometer for atoms were reported.

## Uvod

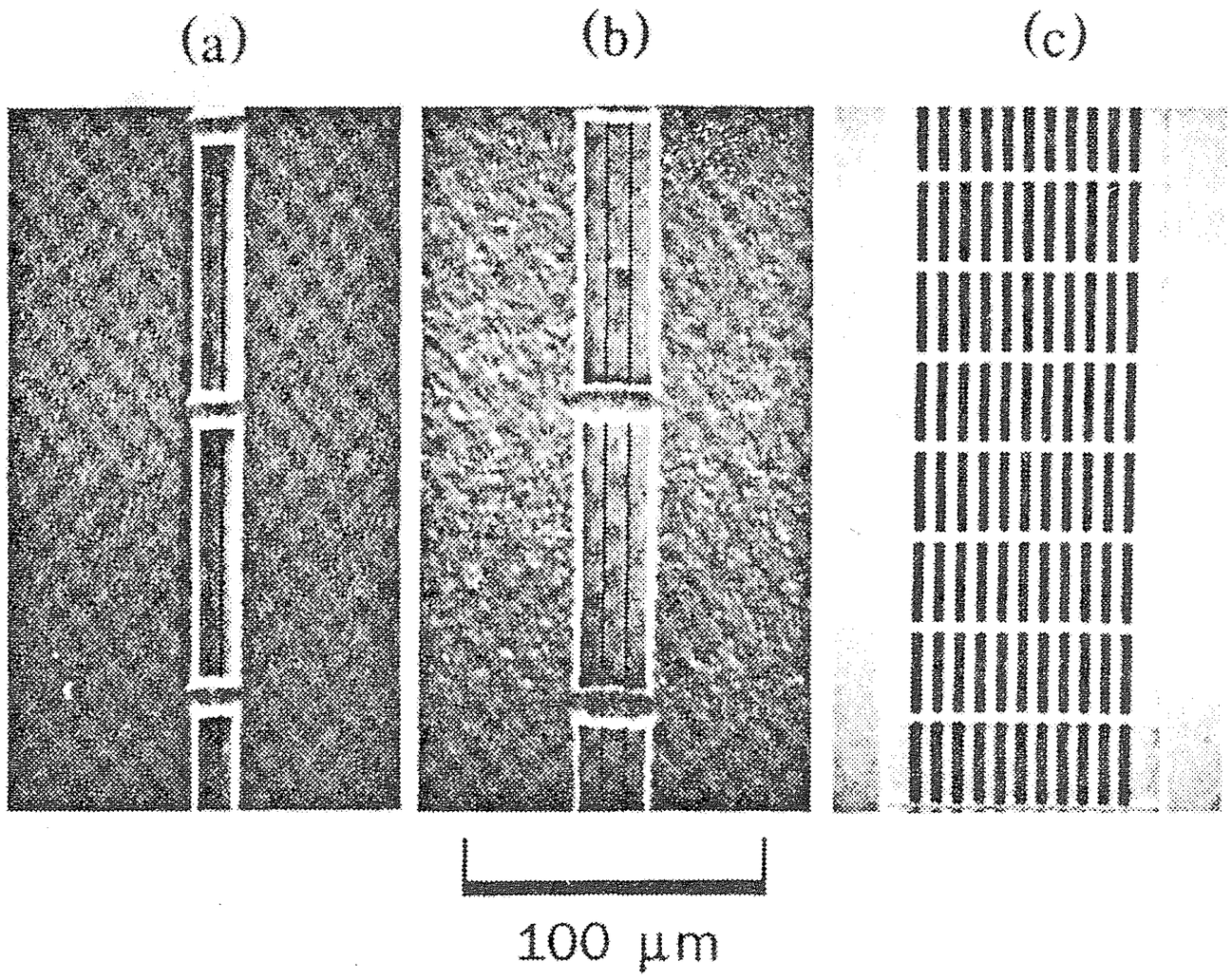
Uvodne knjige o kvantni mehaniki podrobno opišejo interferenčne poskuse s curki delcev [1]. "Valovne lastnosti", ki jih je treba pripisati delcem, so fizike ob nastajanju kvantne mehanike dokaj presentile. Tudi dijaki ali študenti jih med uvajanjem v kvantno mehaniko sprejmejo le z oklevanjem. Interferenčni poskusi, ki so jih naredili C. D. Davisson in L. H. Germer ter G. P. Thomson z elektroni leta 1927 in I. Estermann in O. Stern z atomi leta 1930, so podprli napovedi kvantne mehanike. Po drugi svetovni vojni so se jim pridružili še poskusi z nevtroni. Pri vseh teh poskusih so se delci sipali na vrstah ali ravninah atomov v kristalih. Leta 1961 je C. Jönson naredil prve interferenčne poskuse z elektroni na umetnih režah [2]. Pred tremi leti je skupina, ki je prej raziskovala interferenčne poskuse z atomi na svetlobi [3], opazovala uklon atomov na umetni mrežici [4].

Elektronski interferometer so naredili L. Marton, J. Arol Simpson in J. A. Sudeth leta 1954 s tremi bakrovimi kristali [5]. Interferometer je spominjal na Mach-Zenderjevega za svetlobo. Nevtronski interferometer iz monokristala silicija s tremi rebri so uporabili H. Rauh, W. Treimer in U. Bonse deset let pozneje [6], [7]. Zadnja majska številka revije Physical Review Letters pa je prinesla članka, ki poročata o poskusih z interferometrom za atome [8], [9].

Vsi interferometri za delce spominjajo na optične interferometre, ki uporabljajo prvo uklonsko mrežico za delitev valovanja na delna valovanja. V optiki so takšni *akromatični interferometri* skoraj popolnoma pozabljeni. Z njimi je mogoče opazovati interferenco v visokem redu tudi pri svetlobi, ki ni enobarvna, in v širokem curku. Na eni strani zaradi tega ni treba posebej zagotoviti, da izvir seva stabilno, na drugi strani pa z njimi ni mogoče preiskati koherentnosti valovanja, ki ga izseva izvir.

## Youngov poskus

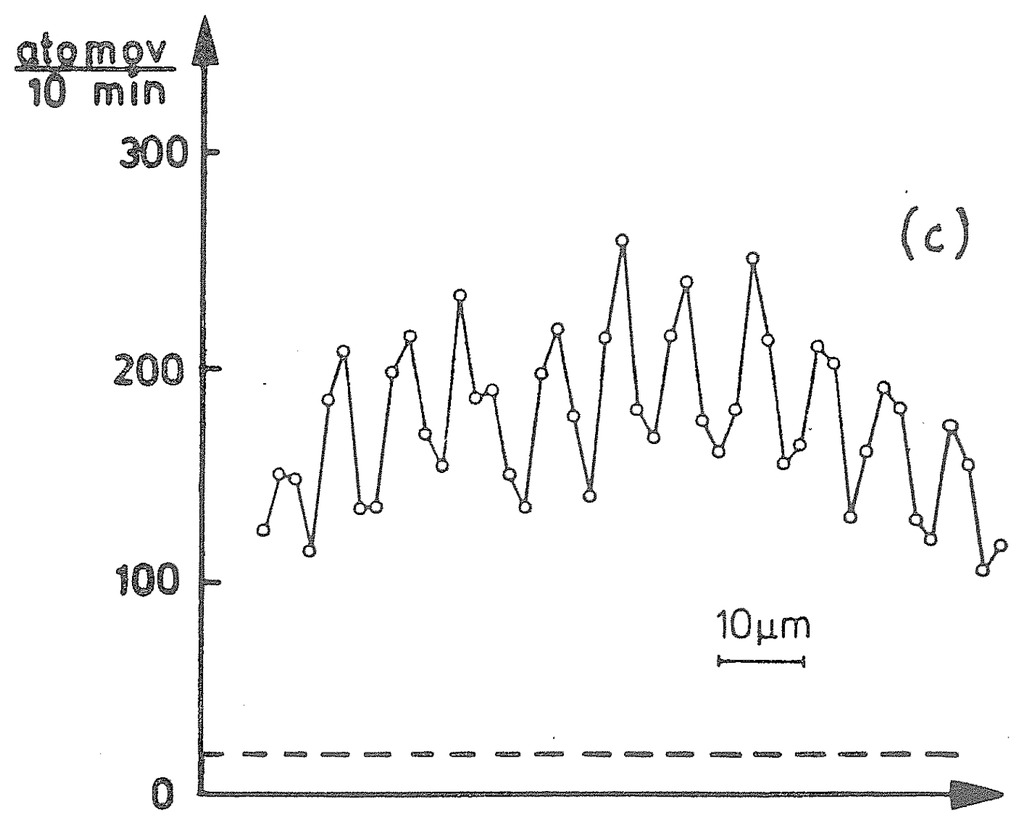
O. Carnal in J. Mlynek z univerze v Konstanci v Nemčiji sta naredila Youngov poskus z atomi na umetnih režah [8]. Iz šobe je izhajal nadzvočni curek atomov helija, v katerem je vzdolžni elektronski curek vzbudil kako milijonino atomov v metastabilni stanji $2^1S_0$ (90 %) in $2^3S_1$ (10 %). Razpolovna širina hitrosti je merila 1/20 do 1/15 povprečne hitrosti. Na to hitrost so lahko vplivali s temperaturo šobe in plina v posodi pred njo. Pri temperaturi 22 °C je povprečna hitrost dosegla $1{,}77 \cdot 10^3$ m/s, čemur je ustrezala de Brogliejeva valovna dolžina $\lambda_B = h/mv = 0{,}056$ nm, pri temperaturi −190 °C pa $0{,}96 \cdot 10^3$ m/s z $\lambda_B = 0{,}103$ nm. V razdalji $L = 64$ cm od vstopne reže s širino 2 $\mu$m je bil nameščen zaslon z dvema režama s širino $b = 1$ $\mu$m in višino 4 mm v razmiku $a = 8$ $\mu$m. V razdalji $L$ od dveh rež je curek zadel zadnji zaslon, na katerem so opazovali interferenčno sliko. To so storili ali s posebno, 2 $\mu$m široko režo ali z mrežico desetih rež v razmiku 8 $\mu$m. Režo in mrežico so skupaj z elektronsko pomnoževalko pritrdili na ogrodje, ki so ga premikali v korakih po 1,88 $\mu$m prečno na smer rež. V elektronski pomnoževalki za režo ali mrežico so helijevi atomi v metastabilnih stanjih oddali elektrone, ki so se pomnoževali in dali napetostni sunek. Pomnoževalka se ni odzvala na helijeve atome v osnovnem stanju. Sunke, višje od določene meje, so ojačili in šteli. Reže v treh zaslonih so bile med seboj vzporedne bolj kot na 0,03° natančno. Pri uravnavanju so si pomagali z laserjem, s katerim so svetili skozi dodatne 20 $\mu$m široke reže v vseh treh zaslonih.



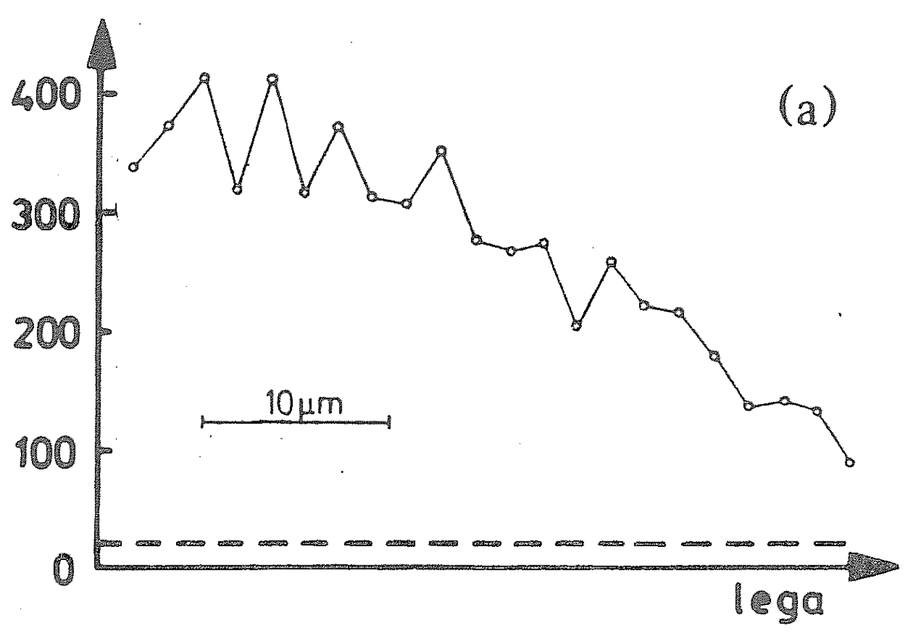

**Slika 1.** Posnetek 2 $\mu$m široke vstopne reže (a), dveh po 1 $\mu$m širokih rež v razmiku 8 $\mu$m (b) in mrežice desetih rež v razmiku 8 $\mu$m konstanške naprave s tipalnim elektronskim mikroskopom [8].

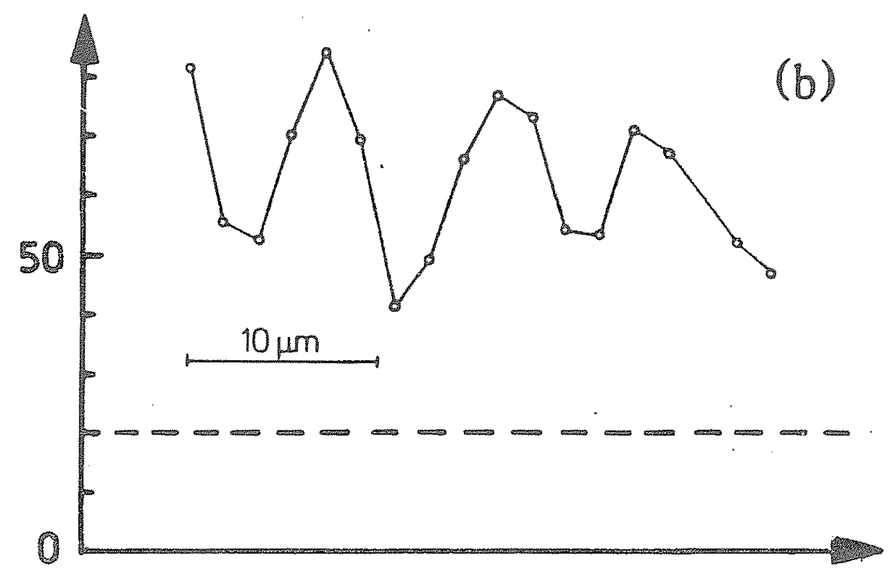
Atome je teže zaznavati kot elektrone in tudi nevtrone, a najteže je izdelati ustrezne reže. Za opisani poskus jih je izdelalo neko podjetje. Na stekleno ploščico nanesejo elektrodno plast in jo prekrijejo s plastjo, občutljivo za svetlobo. To osvetlijo na želenih mestih in naparijo zlato. Na mestih, ki jih svetloba ni razkrojila, se zlato ne prime. Naposled odluščijo okoli 20 $\mu$m debelo plast zlata z režami in jo vpnejo v jekleni nosilec. Tako dobljene reže imajo ostre, samo po 1 $\mu$m široke robove.

Lego interferenčnih vrhov izračunamo z enačbo za uklonsko mrežico: $a \sin\beta = N\lambda_B$, $N = 1, 2, 3....$ Pri majhnem kotu $\beta$ proti pravokotnici približno velja $a\beta = N\lambda_B$. Sosednja vrhova sta pod kotom $\Delta\beta = \lambda_B \Delta N/a = \lambda_B/a$, ki mu na zaslonu ustreza razmik $L\lambda_B/a$. Pri hitrejših atomih so za režo na zadnjem zaslonu zanj namerili $(4,5 \pm 0,6)$ $\mu$m in pri počasnejših $(8,4 \pm 0,8)$ $\mu$m (Sl. 2). Oboje se je dobro ujemalo z izračunanima razmikoma $L\lambda_B/a = 0,64 \text{ m} \cdot 0,056 \cdot 10^{-9} \text{ m}/8 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4,48$ $\mu$m in $0,64 \text{ m} \cdot 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m}/8 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8,24$ $\mu$m. Vrhov ni bilo mogoče jasno razločevati, ker je bil pri hitrih atomih razmik med sosednjima vrhovoma samo dvakrat večji od širine vstopne reže merilnika. Nekoliko jasnejši so bili vrhovi za mrežico (Sl. 2c). Pri razmiku okoli $L\lambda_B/b$ zginejo vrhovi zaradi lastne širine obeh rež. Nekoliko je zabrisalo vrhove tudi sipanje atomov na preostanku plina v vakuumski posodi, v kateri je tlak meril $5 \cdot 10^{-7}$ milibara.




Slika 2. Tok atomov helija v metastabilnih stanjih z večjo hitrostjo (a) in z manjšo hitrostjo (b) za režo in z manjšo hitrostjo za mrežico (c) pri konstanškem poskusu [8]. Črtkana črta kaže ozadje. Interferenčni vrhovi v razmiku po $4,5$ $\mu$m (a), $8,4$ $\mu$m (b) in $7,7$ $\mu$m (c) pričajo o interferenci atomov. S pomnoževalko so šteli atome v vsaki legi po 10 minut.



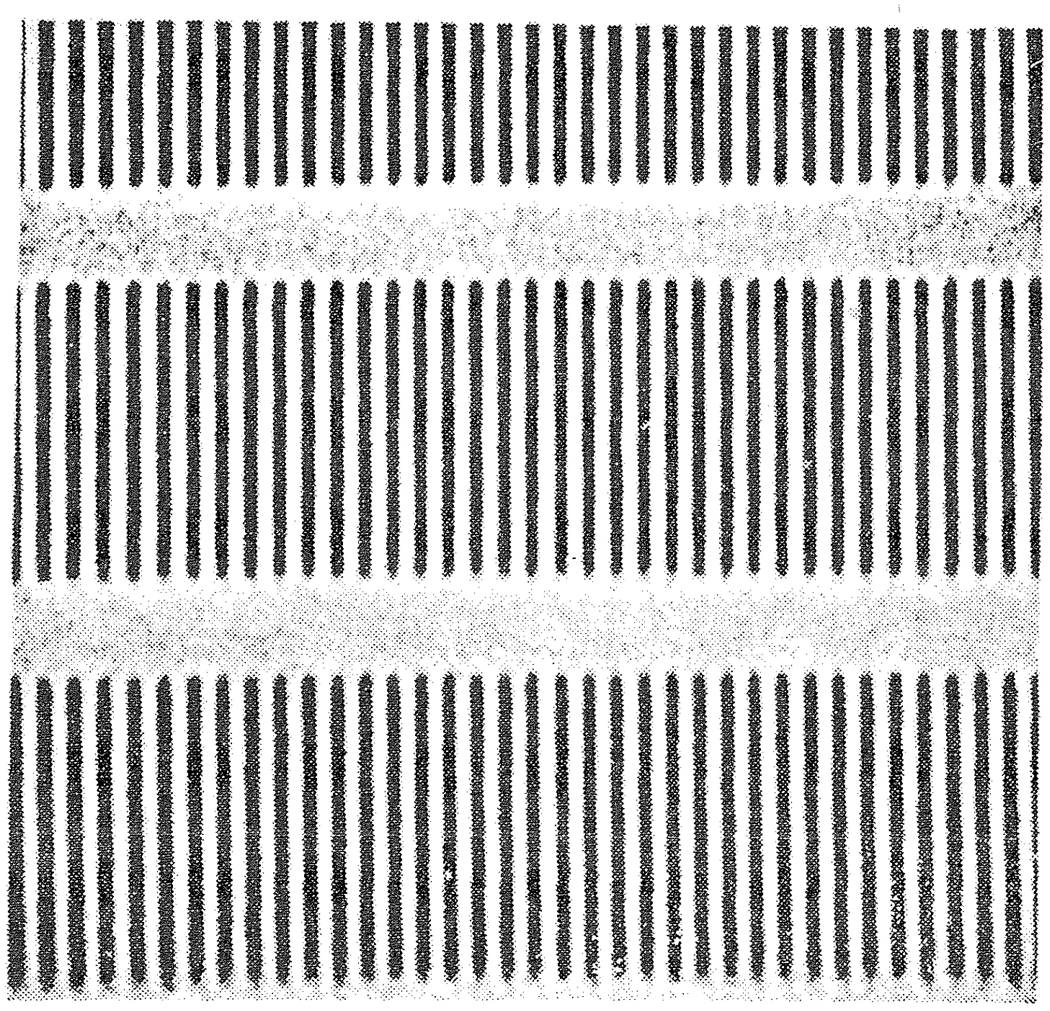




## Interferometer

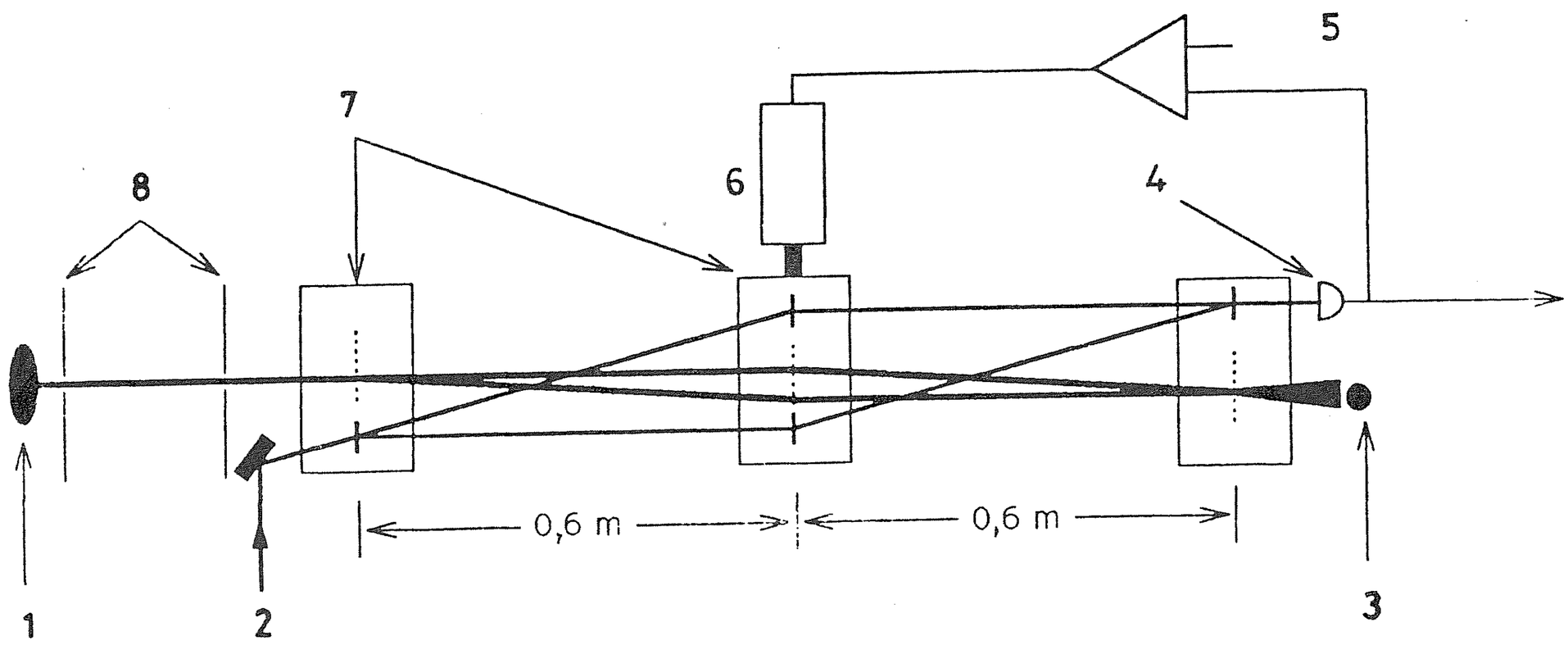
Raziskovalna skupina z MIT v ameriškem Cambridgeu si je nabrala bogate izkušnje pri delu z atomskimi curki in z interferenco na svetlobi in na mrežici [3],[4]. Uporabili so curek argona z dodatkom natrija iz nadzvočne šobe. Atomi natrija so imeli enako hitrost kot atomi argona. Povprečna hitrost je merila $10^3$ m/s in razpolovna hitrost 1/8 te vrednosti. Ustrezala ji je de Brogliejeva valovna dolžina $\lambda_B = h/m_{Na}v = 0,017$ nm.

Uporabili so tri mrežice iz silicijevega nitrida $Si_3Na_4$. Pri izdelavi so se oprli na izkušnje pri integriranih polprevodniških vezjih. Četrt milimetra debelo silicijevo ploščico so na obeh straneh izpostavili delovanju dušikove

plazme, da je nastala $0,2$ $\mu$m debela plast silicijevega nitrida. Na zadnji strani so naparili nanjo za svetlobo občutljivo plast, jo na želenih mestih osvetlili in odjedkali tam nitrid in silicij. Tako je preostala tanka plast nitrida na sprednji strani in ogrodje, ki jo je nosilo. Na to plast nitrida so naparili $0,15$ $\mu$m debelo plast organske spojine in desetkrat tanjšo plast zlata. Z elektronskim curkom so v plasti vrezali vzorec mreže, ki so ga nato izjedkali s posebnim postopkom z ioni. Tako so dobili mrežice z režami v razmiku po $0,2$ $\mu$m in $0,4$ $\mu$m z ostrimi robovi (Sl. 3)



**Slika 3.** Posnetek cambriške mrežice s tipalnim elektronskim mikroskopom. Reže so v razmiku po $0,2$ $\mu$m, opore, ki rabijo kot reže pri naravnavanju treh mrežic z laserjem, pa v razmiku po 4 $\mu$m [9].

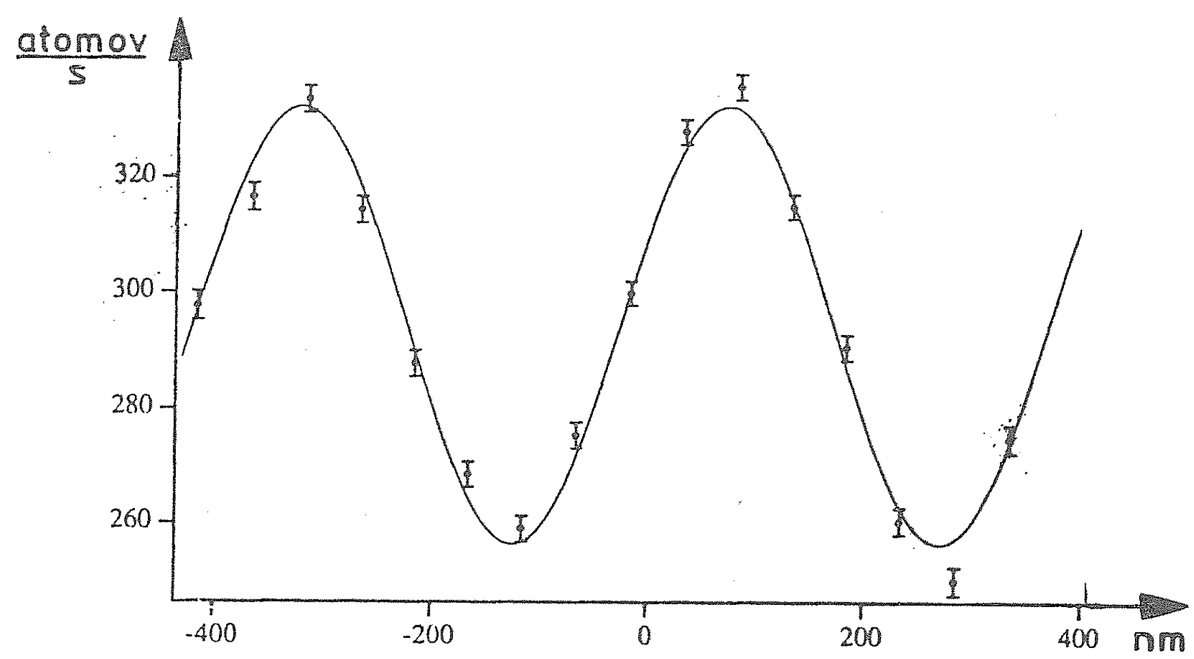



**Slika 4.** Interferometer za atome, s katerim je delala poskuse skupina v Cambridgeu [9]: **1** šoba, iz katere izhaja curek argona z dodatkom natrija, **2** laserski curek, **3** merilnik z vročo žičko, **4** fotodioda, **5** zunanja napetost, **6** piezoelektrični premikalnik, **7** premična nosilca, **8** vstopni reži. Mrežice z režami v razmiku $0,4$ $\mu$m atomskega interferometra so narisane s pikčastimi črtami, mrežice z režami v razmiku $3,3$ $\mu$m svetlobnega interferometra pa s sklenjenimi.

V napravi so uporabili tri mrežice z režami v razmiku po $0,4$ $\mu$m. Druga je bila v razdalji $L = 66,3$ cm od prve in tretja v tolikšni razdalji od druge (Sl. 4). 30 cm za tretjo mrežico je zaznaval natrijeve atome merilnik na vročo žičko iz zlitine platine in iridija s premerom 25 $\mu$m. Mrežice so naravnali z laserskim curkom, da so bile med seboj vzporedne bolj kot na $0{,}1^\circ$. Za ta

curek so opore v mrežicah z razmikom po 4 $\mu$m delovale kot reže v uklonskih mrežicah.

Naprava je bila zelo občutljiva za tresljaje. Vpliv hitrejših tresljajev so učinkovito zmanjšali z gumijastimi nožicami. Počasnejših tresljajev so se ubranili drugače. V zaslonih so poleg mrežic za atome bile še posebne mrežice z režami v razmiku $3,3$ $\mu$m za svetlobo. Iz teh so sestavili laserski interferometer, katerega končni signal so prek fotodiode speljali na piezoelektrične naprave, ki so uravnavale lego mrežic. S tem niso samo zmanjšali vpliva tresljajev, ampak so si tudi pomagali pri zaznavanju interferenčne slike. Na piezoelektrično napravo so priključili zunanjo trikotniško napetost s periodo 5 s. Z njo so uravnavali tudi lego mrežic atomskega interferometra in tako nazadnje tok preštetih natrijevih atomov povezali z lego mrežic. Dobili so dokaj jasno interferenčno sliko (Sl. 5).




**Slika 5.** Interferenčni vrhovi v toku atomov natrija pri cambriškem poskusu. Sosednja vrhova sta v razmiku po $0,38$ $\mu$m. Vsakemu podatku ustreza čas merjenja samo 23 s. Ozadje okoli 40 $s^{-1}$ so že odšteli [9].

Napravi, o katerih smo poročali, sta zanimivi že zato, ker kažeta napredek merilne tehnike. Kdo bi si ob rojstvu kvantne mehanike pred šestdesetimi leti mislil, da bo mogoče pokazati "valovne lastnosti" atomov pri Youngovem poskusu in izdelati interferometer za atome. Poleg tega bo morda mogoče s tako ali izpopolnjeno napravo narediti poskuse, ki zadevajo temelje kvantne mehanike.

Zanimivo je tudi, da sta poslali evropska in ameriška raziskovalna skupina svoja članka skoraj sočasno, rokopis evropskega je dobilo uredništvo tri dni pred ameriškim. Ni dvoma, da je ameriška naprava bolj izpopolnjena. V tej zvezi je zanimiva opomba ameriških raziskovalcev. Za interferometer velja navadno naprava, ki razdeli valovanje na delna valovanja, jih krajevno loči in naposled sestavi. Bistvena se zdi možnost, da lahko vplivamo na fazo enega izmed delnih valovanj. Naprav, ki tega ne dopuščajo, pogosto, na primer v znanem učbeniku optike M. Borna in E. Wolfa, ne štejejo k interferometrom. Ameriški raziskovalci nekoliko pikro mimogrede pripominjajo, da naprava za Youngov poskus ni interferometer. Bralci Obzornika lahko sami presodijo, ali je razlika med obema napravama zares bistvena.

## LITERATURA

[1] J. Strnad, *Kvantna fizika,* Mladinska knjiga, Ljubljana 1969, str.81; *Fizika*, 3. del, DZS, Ljubljana 1982, str. 11; *Mala kvantna fizika*, DMFA, Ljubljana 1989, str. 90.

[2] C. Jönsson, *Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten,* Z. Phys. **161** (1961) 454; *Electron diffraction at multiple slits*, Am. J. Phys. **42** (1974) 4.
[3] J. Strnad, *Interferenčni poskus s curkom atomov na svetlobi,* Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 87.
[4] D. W. Keith, M. L. Schattenburg, H. I. Smith, D. E. Pritchard, *Diffraction of atoms by a transmision grating,* Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1580.
[5] L. Marton, J. Arol Simpson, J. A. Suddeth, *Electron beam interferometer,* Phys. Rev. **90** (1954) 490.
[6] H. Rauch, W. Treimer, U. Bonse, *Test of single crystal neutron interferometer,* Phys. Lett. **47A** (1974) 369.
[7] I. Drevenšek, *Nevtronski interferometer,* Obzornik mat. fiz. **35** (1988) 55–59.
[8] O. Carnal, J. Mlynek, *Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer,* Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2689.
[9] D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette, D. E. Pritchard, *An interferometer for atoms,* Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2693.

# NOVE KNJIGE

## MAGAJNA B., Vložitve matričnih algeber, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1991, 172 str. (Podiplomski seminar iz matematike ; 19) Cena 250.– din (200.– din)

Že kar na začetku zapišimo, da je knjiga nov tehten prispevek k slovenski matematični literaturi. Skušajmo na kratko osvetliti njen pomen.

Predvsem gre za tematiko, ki je v centru pozornosti sodobnih raziskav na mejnem področju med algebro in analizo, zlasti v teoriji operatorskih algeber. Za posebne vrste von Neumannovih algeber, t.i. faktorje tipa $\mathrm{II}_1$, je V. Jones pred približno osmimi leti vpeljal pojem indeksa, ki meri, na kakšen način je en podfaktor vsebovan v drugem. Kasneje je ustrezno teorijo prestavil v povsem algebraičen okvir. O svojem delu je poročal na mednarodnem kongresu matematikov v Berkeleyu leta 1986, leta 1990 pa je zanj na naslednjem kongresu v Kyotu prejel najvišje matematično priznanje: Fieldsovo medaljo. Torej je knjiga Bojana Magajne kar se da aktualna. Slovencem predstavlja delček najnovejših vrhunskih matematičnih dosežkov in tako tudi na tem področju vzpostavlja stik s svetom.

Ob vsem tem je zanimivo, da ne glede na globoko in pomembno teoretično ozadje, iz katerega je avtor črpal vzpodbudo za svoje pisanje, knjiga ne zahteva posebnega poznavanja teorije operatorskih algeber. Samo na koncu so v dodatku (bolj kot motivacija za poznavalce) vpeljani osnovni pojmi iz teorije von Neumannovih algeber in uveden Jonesov indeks za podfaktorje. V glavnem, drugem poglavju, so namreč rezultati o indeksu podani povsem algebraično, za poseben primer t.i. večmatričnih algeber. Gre torej za posrečeno in večkrat uspešno uporabljeno metodo, ko pomembne (in težke) rezultate predstavimo le v posebnem, lažje dostopnem, vendar še vedno netrivialnem primeru.

Pojmovni aparat, ki je potreben za obravnavo teh algeber in ki ga avtor postopoma gradi vse od začetka, je tak, da bi ga načeloma lahko razumel in osvojil tudi študent pred diplomo, če le (dobro) obvlada osnove splošne algebre. V resnici sta zlasti prvo in tretje poglavje zelo primerna za nadaljevalni

tečaj algebre za študente teoretične matematike. Prinašata namreč koristna splošna spoznanja o algebrah in modulih, upodobitvah (končnih) grup, involutivnih algebrah in *-reprezentacijah, polenostavnosti, projektivnih modulih, sledi in pogojnem pričakovanju. Ker je pri nas v zadnjem času čutiti potrebo po večjem znanju algebre, ki ga zahteva algebraični pristop na raznih področjih matematike, je knjiga dobrodošel prispevek v tej smeri.

Morda je treba omeniti še dejstvo, da je prvič v slovenščini (vsaj v knjižni obliki) predstavljena tudi Perron-Frobeniusova teorija nenegativnih matrik, ki se v knjigi uporablja pri izračunu indeksa za inkluzije v večmatričnem primeru.

Čeprav pojmovno vsebina torej ne presega dodiplomskega nivoja, pa po drugi strani po načinu pisanja delo vsekakor sodi na nivo tretje stopnje. To se zlasti vidi po količini dela, ki ga je potrebno vložiti v študij, npr. pri izdelavi detajlov, ki jih avtor prepušča bralcu, predvsem pa pri številnih nalogah ob koncu razdelkov.

Naloge so posebna odlika knjige, ki je doslej pri tovrstnih (podiplomskih) tekstih nismo bili vajeni. Niso zgolj primeren način za utrjevanje predelane snovi, brez česar si resnega podiplomskega študija ne moremo misliti, ampak marsikdaj bistveno razširjajo obravnavo in ji dajejo dodatno perspektivo (npr. vpeljava Jacobsonovega radikala v prvem poglavju ali povezava s teorijo kit v drugem). Naloge po večini niso lahke, zato pa je skoraj vedno dodano primerno navodilo, ponekod kar obsežen program reševanja. Kdor jih predela, je lahko prepričan, da obvlada velik del algebre tudi praktično in ne le informativno.

Knjiga obsega nad 170 strani teksta z okrog 130 nalogami. Opremljena je, kot je običaj, s kazalom, kratkim povzetkom v slovenščini in angleščini in stvarnim kazalom. V predgovoru avtor pojasni, zakaj se je lotil pisanja, in predstavi vsebino poglavij. Seznam citirane literature prinaša 17 naslovov monografij in znanstvenih razprav, ki so v tesni zvezi z obravnavano snovjo. Iz celotne zasnove in izvedbe se vidi, da je delo pripravljeno izredno skrbno, v duhu najboljše tradicije slovenskega matematičnega pisanja.

Tudi jezik je tekoč in razumljiv, brez nasilja nad slovenščino. Avtor je pri izražanju vedno zelo natančen. Opozoriti pa je potrebno, da je argumentacija včasih precej zgoščena in zahteva primerno izkušenega bralca. (To je seveda razumljivo, če vemo, za kakšen nivo je knjiga pisana. V nasprotnem primeru bi obseg dela močno narastel, izgubil pa bi se tudi njegov smisel.)

Kakor smo po eni strani veseli vsake slovenske matematične novitete, je po drugi strani škoda, da je knjiga Bojana Magajne zaradi jezika dostopna razmeroma majhnemu krogu bralcev. Njen prevod v angleščino bi bil prav gotovo zanimiv tudi za tuje matematike.

*Milan Hladnik*

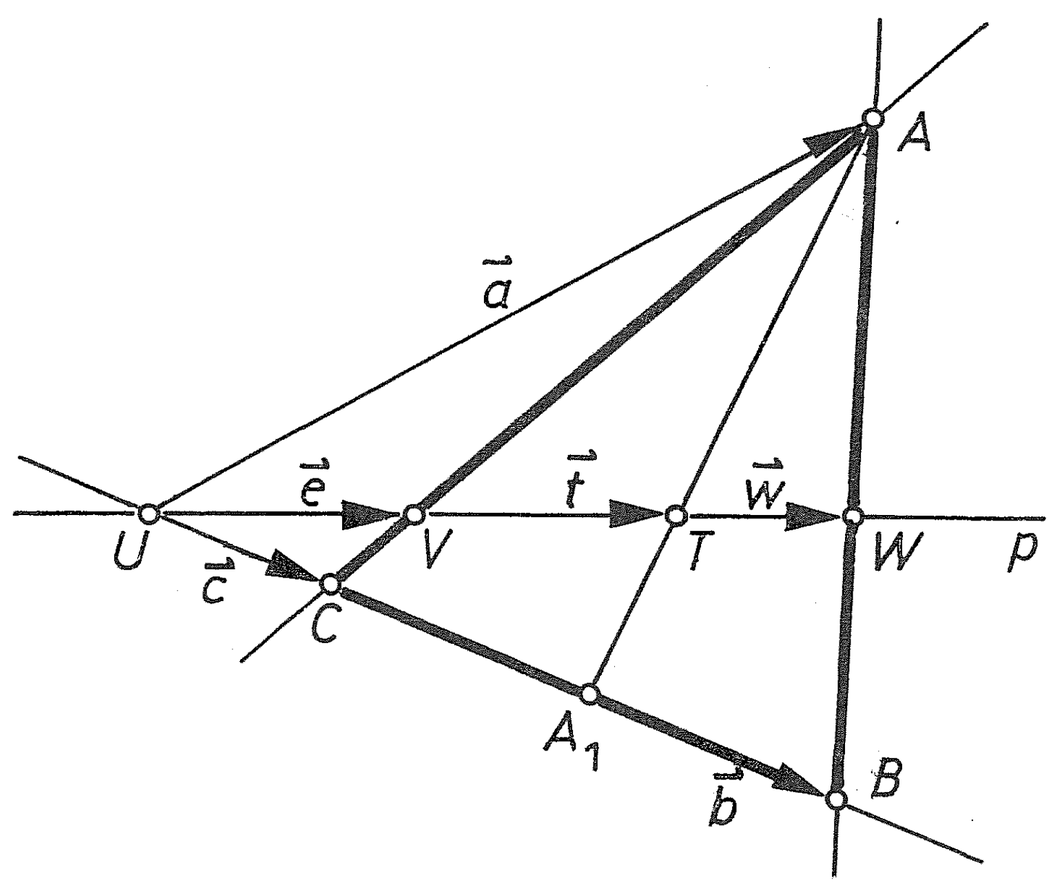
## 121. — ROTHOVA NALOGA (Obzornik mat. fiz. **38** (1991) 38)

Na vprašanje, kako konstruirati trikotnik, katerega nosilke stranic potekajo skozi tri dane kolinearne točke $U$, $V$, $W$ in s težiščem na premici skozi te točke, nismo dobili nobenega odgovora. Tako ostajamo brez čiste geometrijske rešitve, oglejmo pa si, kako lahko nalogo rešimo z algebrsko analizo.

Nobene omejitve splošnosti ne predstavlja, če si oznake izberemo tako, da je $V$ srednja od danih kolinearnih točk $U$, $V$, $W$, to je, da leži med $U$ in $W$. Nadalje izberimo oznake za trikotnik $ABC$, ki ga želimo konstruirati, tako da oglišče $A$ ne bo ležalo na premici skozi $U$, $B$ ne na premici skozi $V$ in $C$ ne na premici skozi točko $W$.

Za delo si moramo izbrati primeren koordinatni sistem. Naj bo točka U koordinatno izhodišče, $UV = \vec{e}$ enotni vektor. Nadalje naj bo $UW = k\vec{e}$. Zaradi zgornjega domenka o medsebojni legi točk $U$, $V$, $W$ je $k > 1$. Pri teh oznakah imamo situacijo kot na sliki 1.

Zanima nas seveda rešitev, za katero trikotnik $ABC$ ni izrojen. Tedaj leže vsa tri oglišča trikotnika izven premice $p$. Izberimo poljuben $A \notin p$ in opazujmo družino trikotnikov, ki imajo $A$ za oglišče, nosilke njihovih stranic pa potekajo skozi točke $U$, $V$, $W$. Č je v tej družini tak trikotnik, ki ima težišče na $p$, veljajo za pripadajoče vektorje zveze:



Slika 1

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= k\vec{e},\\
\vec{c} &= \lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{e},\\
\vec{b} &= \mu\vec{a} + (1-\mu)k\vec{e},\\
\vec{t} &= \tfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = t\vec{e}.
\end{aligned}$$

Pri tem sta $\vec{a}$ in $\vec{e}$ linearno neodvisna, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pa kolinearna vektorja. Zaradi kolinearnosti $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je

$$\lambda(1-\mu)k = \mu(1-\lambda), \tag{1}$$

zaradi kolinearnosti $\vec{t}$ in $\vec{e}$ pa velja

$$1 + \lambda + \mu = 0 \tag{2}$$

ter

$$3t = (1-\lambda) + (1-\mu)k\,. \tag{3}$$

Iz (1) in (2) dobimo

$$(k-1)\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0 \tag{4}$$

ter iz (2) in (3)

$$\lambda = \frac{1}{k-1}(3t - 2k - 1)\,.$$

Ker $k \neq 1$, sledi z vstavljanjem v (4) enačba za $t$:

$$3t^2 - 2(k+1)t + k = 0\,. \tag{5}$$

Rezultat je prvi hip presenetljiv. Vrednost koeficienta $t$, in s tem lega težišča trikotnika na premici $p$, je odvisna le od koeficienta $k$, ki je določen z lego točk $U$, $V$, $W$. Prav nič pa ni lega težišča in seveda tudi ne eksistenca rešitve odvisna od tega, kje smo si izbrali točko $A$. Torej si eno oglišče trikotnika lahko še poljubno izberemo in ima naloga, če je rešljiva, neskončno rešitev. Ker pa so podatki in zahteve za iskani trikotnik pravzaprav kolinearni, to niti ne preseneča preveč.

Konstrukcija je od tod dalje preprosta. Ker je enačba (5) kvadratna, lahko na njeni osnovi le s šestilom in ravnilom iz $\overline{UV} = 1$ in $\overline{UW} = k$ konstruiramo koeficient $t$ in z njim težišče $T$. Nato si izven $p$ poljubno izberemo eno oglišče trikotnika, konstruiramo pripadajočo težiščnico in risbo dokončamo.

*Eksistenca rešitve.* Diskriminanta $D$ enačbe (5) je zaradi

$$\frac{1}{4}D = (k+1)^2 - 3k = k^2 - k + 1 > 0$$

vedno pozitivna, torej imamo pri poljubno dani trojki kolinearnih točk $U$, $V$, $W$ dve rešitvi, torej dve težišči na razpolago. To sta točki $T_1$ in $T_2$, za kateri velja:

$$UT_1 = t_1\vec{e}$$

in

$$UT_2 = t_2\vec{e}\,,$$

kjer je

$$t_{1,2} = \frac{1}{3}(k + 1 \pm \sqrt{k^2 - k + 1})\,. \tag{6}$$

Ocenimo $t_1$ in $t_2$. Ker je zaradi $k > 1$

$$k^2 - 2k + 1 < k^2 - k + 1 < k^2\,,$$

torej

$$k - 1 < \sqrt{k^2 - k + 1} < k\,,$$

je

$$\frac{2k}{3} < t_1 < \frac{2k}{3} + \frac{1}{3} \tag{7}$$

in

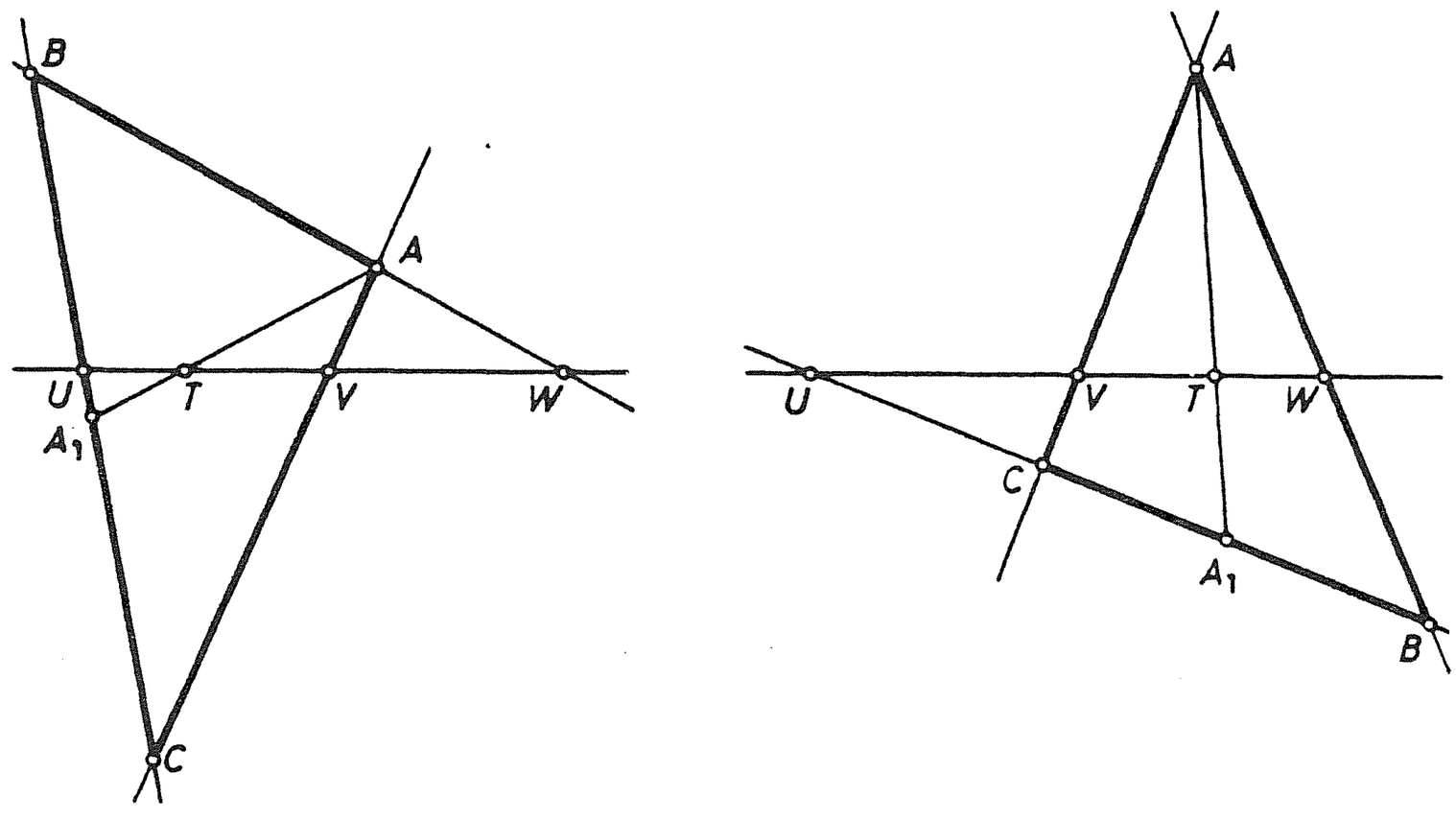
$$\frac{1}{3} < t_2 < \frac{2}{3}\,. \tag{8}$$

Ocena (8) pove, da je eno od možnih težišč vedno na srednji tretjini daljice $UV$. Pričakovati bi bilo, da je drugo težišče vedno na daljici $VW$, vendar to iz ocene (7) ni razvidno. Zato ocenimo $t_1$ še drugače. Za $k > 1$ je

$t_1$ očitno naraščajoča funkcija spremenljivke $k$. Zaradi (6) je $t_1(1) = 1$, tako da imamo namesto (7) natančnejšo oceno

$$\max(1, \frac{2k}{3}) < t_1 < \frac{2k}{3} + \frac{1}{3}. \tag{9}$$

Ta ocena pa pove, da je drugo težišče res vedno na odseku $VW$.




Slika 2

Za $k = 2$ sta obe možnosti ilustrirani na sliki 2.

*Marija Vencelj*

# VESTI

## NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1991

Sklad Borisa Kidriča pri Republiškem komiteju za raziskovalno dejavnost in tehnologijo je letos podelil 62 raziskovalcem 29 priznanj, in to 4 Kidričeve nagrade, 12 nagrad Sklada Borisa Kidriča, 6 nagrad za izume in izboljšave ter 7 priznanj mladim raziskovalcem. Med dobitniki so tudi štirje člani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Zanje objavljamo v nadaljevanju kratke utemeljitve.

Zbral *Ciril Velkovrh*

### Kidričeva nagrada

### Prof. dr. Gabrijel KERNEL za vrhunske dosežke na področju fizike srednjih in visokih energij

Profesor dr. Gabrijel Kernel je v preteklih letih opravil zelo uspešna raziskovanja v eksperimentalni fiziki delcev. Vodil je slovensko zastopstvo v okviru dveh mednarodnih raziskovalnih skupin. Prva je ob protonskem sinhrotronu v Mednarodnem središču za jedrska raziskovanja CERN v Ženevi na področju srednjih energij uporabljala merilnik Omicron, druga pa ob nakopičevalniku Doris II v laboratoriju DESY v Hamburgu na področju visokih energij merilnik ARGUS. Obe skupini sta raziskovali sodelovanje med delci, prva pri trkih pionov z nukleoni, druga pri trkih elektronov in pozitronov, in obe dosegli izide, ki so zbudili pozornost mednarodne fizikalne javnosti. Zgradili in izpopolnili sta merilnika in premišljeno izbirali poskuse, ki so dali popolne ali delne odgovore tudi na teorijsko zanimiva vprašanja.

Obe skupini sta poročali o svojih uspehih v mednarodnih znanstvenih revijah in na znanstvenih sestankih. Seznam za zadnji dve leti obsega 28 del. Še dve leti prej je izšlo

39 objav in te so s poznejšimi povezane v celoto. Z delom je povezanih šest doktorskih in sedem magistrskih del.

## Nagrada Sklada Borisa Kidriča

**Dr. Rudi PODGORNIK za pomembne dosežke na področju teorijske biofizike — za študij interakcij med biološkimi makromolekulami**

Dogajanja na meji med vodno raztopino in nabitimi oziroma polarnimi površinami so predmet intenzivnih raziskav. Podrobno razumevanje teh dogajanj je izrednega pomena za spremljanje nekaterih procesov v živih sistemih in njihovo uporabo v vrsti modernih tehnologij.

Dr. Podgornik je razvil nove teoretske metode pri raziskovanju makromolekulskih sil v vodnih raztopinah in s tem rešil vrsto osnovnih problemov, posebno v mejnem področju majhnih razdalj med površinami.

Izsledki dr. Podgornika so pomemben dosežek pri razumevanju fizikalnih osnov interakcij med biološkimi makromolekulami in membranami.

## Priznanje mlademu raziskovalcu

**Mag. Gorazd PLANINŠIČ za delo Venčni resonator kot sprejemna tuljava v poizkusih z magnetno resonanco.**

Med podiplomskim izobraževanjem je mag. Gorazd Planinšič opravil zanimive raziskave s področja slikanja z magnetno resonanco. Posebej kaže poudariti njegovo delo pri slikanju pretoka in študiju odstranjevanja krvnih strdkov v ožilju. Rezultati dela so bili zelo odmevni.

Mag. Planinšič sodeluje tudi pri uresničitvi zamisli slikanja z magnetno resonanco brez magneta. Pri tem je njegovo delo povezano s študijem magnetizacije in detekcije signala.

Je soavtor štirih samostojnih člankov in 11 referatov v zbornikih mednarodnih srečanj.

## Nagrada za izum

**Dipl. ing. Matija Kodrič, prof. dr. Tomaž SLIVNIK in Vladimir Kavrečič za izum vezja za kompenzacijo spremembe upornosti povezovalnega kabla med merilno dozo in merilnim instrumentom.**

Avtorji so izumili elektronsko vezje, ki odpravlja napake pri elektronskem tehtanju, nastale zaradi dolžine povezovalnih kablov med mehansko tehtnico in instrumenti za krmiljenje ter obdelavo podatkov. Z izumom je odstranjen vpliv dolžine kabla in hkrati je odpravljena napaka zaradi nestabilnosti izvora na rezultat merjenja. Oddaljenost merilnega mesta in elektronskega instrumenta se z uporabo tega vezja lahko poveča ali zmanjša tudi za polovico (prej le za 2,8 %), ne da bi bilo treba tehtnico na novo umeriti.

## OBVESTILO ČLANOM DRUŠTVA

Ob izidu četrte številke Obzornika za matematiko in fiziko smo poslali poseben opomin vsem, ki še niso plačali članarine za leto 1991. Vljudno vas prosimo, da to storite čimprej, ali vsaj do občnega zbora. Po izidu šeste številke, ko bomo pričeli pripravljati kartoteko članov društva za prihodnje leto in bomo določali tudi naklado v novem letu, bomo žal morali črtati vse, ki svojih obveznosti do takrat še ne bodo poravnali. Ob koncu leta ne bomo pošiljali ponovnih opominov, ker imamo takrat v pisarni obilico drugih obveznosti.

Z lepimi pozdravi!

*Milan Hladnik, Janez Strnad, Ciril Velkovrh*

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavod RS za šolstvo in šport vabita vse matematike, fizike in astronome na

## DELOVNO SREČANJE IN 43. OBČNI ZBOR DRUŠTVA

od 10. do 12. oktobra 1991 v hotelu Slavija v Mariboru z naslednjim sporedom:

### Četrtek, 10.10.1991

**uporabna matematika**

16.00 Stane Indihar, Problem očrtane sfere
17.00 Sandi Klavžar, Grafovski homomorfizmi
18.00 Svitan Gaborovič, O pojmu izračunljivosti v matematiki

**fizika**

16.00 Marko Starc, Pozitronska tomografija
17.00 Dušan Brajnik, Pet let po Černobilu
18.00 Slavko Amon, Sončne celice

20.30 Kulturno strokovni program

### Petek, 11.10.1991

9.00 Otvoritev razstave publikacij Komisije za tisk

**matematika**
(predavanja so namenjena vsem učiteljem matematike na osnovni in srednji šoli)

9.30 Uroš Milutinović, O neenakosti med sredinami
10.30 Sandi Klavžar, Barvanje grafov
11.30 Dušan Pagon, Kongruenčna relacija na množici celih števil

**fizika**
(program vodi projektna skupina Zavoda RS za šolstvo in šport)

9.30 Zunanje preverjanje znanja
11.30 Izkušnje z mednarodno maturo

15.30 Maribor nekoč in danes
17.30 Okrogla miza
a) Položaj učitelja matematike v srednji šoli
b) Razgovor o popoldanskih predavanjih iz fizike

20.00 Večerja in družabni večer

### Sobota, 12.10.1991

9.00 Občni zbor
1. Otvoritev
2. Društvena priznanja
3. Poročila o delu društva
4. Razprava o poročilih
5. Poročilo nadzornega odbora
6. Volitve novega odbora
7. Pregled sklepov
8. Razno

12.30 Kosilo
14.00 Ogled Maribora, izlet po dogovoru

Podpredsednica DMFA Slovenije
*Martina Koman*

---

## PRIJAVA

Prijavljam se na 43. občni zbor DMFA Slovenije, ki bo v Mariboru, v hotelu Slavija, Vita Kraigherja 3, tel. (062) 23-661. (Prijavo pošljite na ta naslov do 5.10.1991.)

Ime in priimek (tiskano): .....

Točen naslov: .....

Rezervirajte mi prenočišče – penzion za ..... osebo(-i) v enoposteljni – dvoposteljni sobi (ustrezno podčrtajte)

Pridem dne ....., prvi obrok: zajtrk, kosilo, večerja

Odidem dne ....., zadnji obrok: zajtrk, kosilo, večerja
(ustrezno podčrtajte)

Podpis: .....