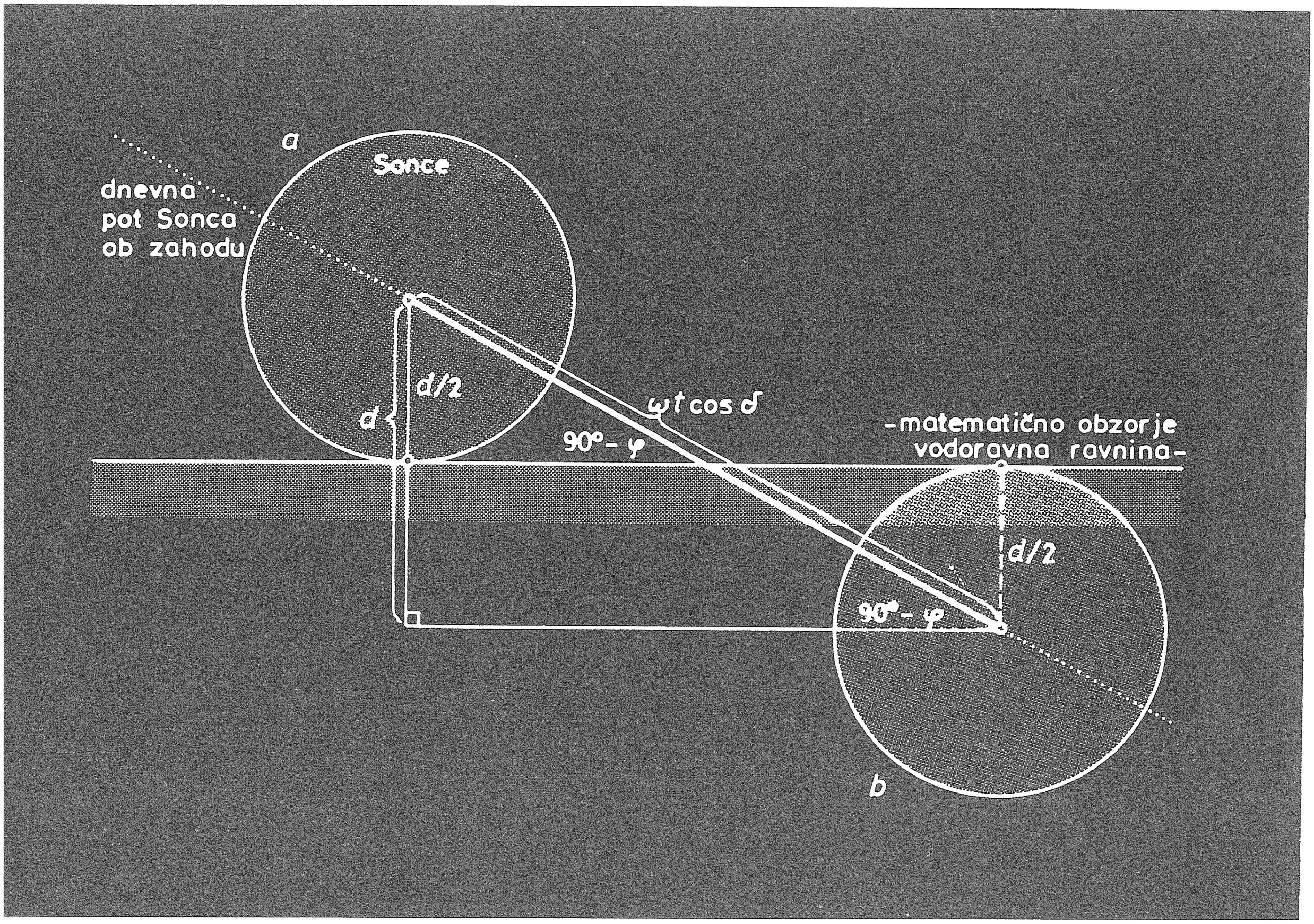
ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

U ISSN 0473-7446

1991
Letnik 38
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1991

letnik 38, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško stavil Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 250.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 350.– din, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 40.– din, dvojna številka 80.– din, stare številke 20.– din.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški sekretariat za raziskovalno dejavnost in tehnologijo ter Republiški sekretariat za vzgojo, izobraževanje in telesno kulturo.

© 1991 DMFA Slovenije – 1074

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Uporaba projektorjev pri dokazovanju zveznosti odvajanj — Projections and automatic continuity of derivations (Borut Zalar) 97–103

Večstopenjske rakete — Multistage rockets (Janez Žitnik) 105–108

Zanimiva določitev zemljepisne dolžine — An interesting example of geographical latitude determination (Marijan Prosén) 109–110

Matematično izobraževanje v ZDA — Mathematical education in the U.S.A. (William P. Thurston, prevedel Peter Legiša) 111–120

Vesti — News

Seznam diplomantov in doktorandov v letu 1990 (Zbral Ciril Velkovrh) 121–126

Nove knjige — New books (Stane Indihar, Franc Cvelbar, Mitja Rosina, Jana Vrabec, Silvia P. Jona, Andrej Čadež, Franc Forstnerič) . . . . . 104, 108, 110, 120, 126, 127, III

Utrinek

Duh nad snovjo (Val Telegdi, prev. Janez Strnad) 103

Na ovitku: Slika 1. K določitvi zemljepisne širine ϕ izmerjenega časa t zahajanja Sonca za vodoravno ravnino: a začetek zahajanja, b konec zahajanja. Med zahajanjem središče Sonca opiše na nebu kot $\omega t \cos\delta$. V tem času preide Sonce svoj zorni kot d [2]. Sledi $\sin(90^\circ - \phi) = d/\omega t \cos\delta$.

UPORABA PROJEKTORJEV PRI DOKAZOVANJU ZVEZNOSTI ODVAJANJ

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991) 46 H 99

Opisana je metoda dokazovanja avtomatične zveznosti odvajanj na nekaterih Banachovih algebrah. Ilustrirana je na primeru algebre vseh zveznih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru.

PROJECTIONS AND AUTOMATIC CONTINUITY OF DERIVATIONS

We describe a method for proving automatic continuity of derivations in some Banach algebras. The method is illustrated on the example of the algebra of all bounded linear operators on a Banach space.

1. Uvod

Naj bo $\mathcal{A}$ neka algebra nad obsegom F. Preslikava $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ se imenuje *linearni operator*, če velja

$$\text{(i)} \qquad D(x+y) = D(x) + D(y)$$
$$\text{(ii)} \qquad D(\lambda x) = \lambda D(x)$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$ ter vsak $\lambda \in F$. Linearni operator D imenujemo *odvajanje*, če velja še

$$\text{(iii)} \qquad D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$.

Aksiom (iii) spominja na pravilo za odvajanje produkta funkcij. Če za $\mathcal{A}$ vzamemo algebro $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vseh neskončnokrat odvedljivih realnih funkcij realne spremenljivke, potem je operator $D(f) = f'$, kjer je f' odvod (po diferencialnem računu) funkcije f, primer za odvajanje.

Vrstni red na desni strani identitete (iii) je zelo pomemben, če algebra $\mathcal{A}$ ni komutativna.

Obstajajo tudi odvajanja na bolj abstraktnih algebrah, ki se v marsičem obnašajo povsem drugače od odvajanj funkcij. Zgled so na primer notranja odvajanja. Če je $\mathcal{A}$ asociativna algebra, potem vsak element $a \in \mathcal{A}$ generira neko odvajanje s predpisom $D_a(x) = ax - xa$. Da so pogoji (i), (ii) in (iii) izpolnjeni, se je mogoče hitro prepričati s kratkim računom. Odvajanje D_a imenujemo *notranje odvajanje*, prirejeno elementu a. Če je algebra komutativna (kot je na primer algebra odvedljivih funkcij), potem je vsako notranje odvajanje ničelno. To pomeni, da odvajanje funkcij po diferencialnem računu ni notranje.

Ena razlika med odvajanjem funkcij ter notranjimi odvajanji je na primer v tem, da pri veliki večini algeber enačba

$$D_a(x) = 1$$

ni rešljiva oziroma konstanta ni "notranji odvod" nobenega elementa.

Odvajanja se preučujejo tako v algebri kot analizi. V tem članku si bomo pogledali naslednji problem iz analitične teorije odvajanj:

Denimo, da je na algebri $\mathcal{A}$ definirana neka topologija. Ker je odvajanje D preslikava iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}$, je smiselno vprašanje, ali je D v tej topologiji zvezna ali ne. Cilj je torej dokazati izrek "Na algebri $\mathcal{A}$ je vsako odvajanje zvezno" za čimveč topoloških algeber.

Tu velja pripomniti, da algebre z nezveznimi odvajanji sicer obstajajo, vendar je po drugi strani za mnoge zanimive in pomembne algebre znano, da je vsako odvajanje na njih zvezno. Veliko problemov o zveznosti odvajanj je še nerešenih, zlasti pri neasociativnih algebrah (gl. [2]).

Dokazali bomo izrek, ki pravi, da so vsa odvajanja na algebri vseh zveznih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru zvezna. Dokazati je mogoče še precej več: vsako odvajanje na tej algebri je celo notranje (gl. [1]). Naš dokaz zveznosti je precej drugačen od običajnih in služi samo za ilustracijo metode, ki jo je mogoče uporabiti tudi v dosti bolj splošnih algebrah.

2. Priprava

Banachov prostor je vektorski prostor $\mathcal{X}$ nad obsegom realnih ali kompleksnih števil, ki je opremljen z normo. *Norma* je vsaka preslikava $||.|| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim aksiomom:

$$(1) \qquad ||x|| \geq 0$$

$$(2) \qquad ||x|| = 0 \iff x = 0$$

$$(3) \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

$$(4) \qquad ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$ ter vsak $\lambda \in F$. Poleg tega mora še veljati, da je vsako Cauchyjevo zaporedje v $\mathcal{X}$ konvergentno. Cauchyjeva in konvergentna zaporedja definiramo podobno kot pri kompleksnih številih, le da namesto absolutne vrednosti uporabimo normo. Torej velja $x_n \to a$, če in samo če je $\lim_{n\to\infty} ||a - x_n|| = 0$. Prav tako je zaporedje x_n Cauchyjevo, če in samo če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako naravno število n, da za vsaka $p, q \geq n$ velja $||x_p - x_q|| \leq \varepsilon$.

Banachov prostor je eden od centralnih pojmov v moderni analizi. O njem se učimo v tretjem in četrtem letniku pri predmetih funkcionalna analiza, analiza III ter analiza IV. Primer takega prostora je vektorski prostor vseh n-terk kompleksnih števil z normo

$$||(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|| = \sqrt{|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2}\,.$$

Izkaže se, da je linearni operator T na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ zvezen natanko tedaj, ko velja

$$\text{(iv)} \qquad \sup_{||x||=1} ||T(x)|| < \infty\,.$$

Zvezni operatorji tvorijo algebro, če definiramo

$$(\lambda T)(x) = T(\lambda x)$$
$$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$$
$$(TS)(x) = T(S(x))$$

za vsak $x \in \mathcal{X}$ ter vsak $\lambda \in F$. To algebro označimo navadno z oznako $B(\mathcal{X})$. Za operator $T \in B(\mathcal{X})$ definiramo

(v) $$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|\,.$$

Izkaže se, da je s tem predpisom vpeljana norma na $B(\mathcal{X})$ in da $B(\mathcal{X})$ s tem postane Banachov prostor. Če je Banachov prostor $\mathcal{X}$ končno razsežen (kot vektorski prostor), potem so **vsi** linearni operatorji na $\mathcal{X}$ avtomatično zvezni. Zveznost odvajanj je torej problem, zanimiv le za neskončno razsežne algebre. Če je Banachov prostor neskončno razsežen, ima vedno linearne operatorje, ki niso zvezni.

Kot zanimivost omenimo, da obstaja obsežna teorija, ki se ukvarja z zveznostjo linearnih operatorjev (t.i. teorija avtomatične zveznosti).

Mogoče je najlepša plat obravnave avtomatične zveznosti odvajanj povezava med algebro in analizo. Definicija odvajanja (i)–(iii) je namreč povsem algebraična (smiselna je tudi za algebre brez topologije), a kljub temu kot rezultat dobimo zveznost, ki je povsem analitični ali, če hočete, topološki pojem.

Preden se lotimo dokazovanja, moramo vpeljati še en pomemben pojem. Naj bo $\mathcal{X}$ vektorski prostor nad obsegom F. Linearni operator iz $\mathcal{X}$ v F se imenuje *linearni funkcional.* Če je $\mathcal{X}$ Banachov prostor, je funkcional zvezen natanko tedaj, ko zadošča (iv), kjer znotraj supremuma nadomestimo normo z absolutno vrednostjo. Normo funkcionala definiramo kot v (v), kjer ponovno nadomestimo normo z absolutno vrednostjo.

Zgled: Naj bo $\mathcal{X}$ prostor parov kompleksnih števil (λ, μ) in

$$f((\lambda,\mu)) = \lambda\,.$$

Enostavno je preveriti, da preslikava f zadošča aksiomoma (i) in (ii). Ker je slika v $\mathbb{C}$, je torej linearni funkcional. Poleg tega velja

$$|f((\lambda,\mu))| = |\lambda| \le \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|2} = \|(\lambda,\mu)\|\,.$$

Torej je f zvezen in $\|f\| \le 1$.

Naša metoda bo temeljila na dveh **klasičnih** trditvah o Banachovih prostorih.

Trditev 1. *Naj bo $\mathcal{Y}$ Banachov prostor in $y \in \mathcal{Y}$ nek neničeln vektor. Tedaj obstaja tak zvezni funkcional f na $\mathcal{Y}$, da je $f(y) = 1$.*

Trditev 2. *Naj bo $\mathcal{Y}$ Banachov prostor in $T : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ linearen operator. Če iz $y = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$ in $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ lahko sklepamo, da je $y = 0$, potem je operator T zvezen.*

V literaturi najdemo prvo trditev pod imenom Hahn-Banachov izrek, drugo pa pod imenom izrek o zaprtem grafu. Dokazali bomo, da vsako odvajanje na $B(\mathcal{X})$ zadošča pogoju, ki je naveden v Trditvi 2 in je zato zvezno.

Pri dokazovanju bomo ubrali nekoliko zavito pot. Naj bo torej D neko odvajanje na $B(\mathcal{X})$, kjer je $\mathcal{X}$ Banachov prostor. Definirajmo $\mathcal{S}(D)$ kot množico tistih operatorjev $T \in B(\mathcal{X})$, za katere obstaja zaporedje zveznih linearnih operatorjev T_n, ki konvergira proti operatorju 0, zaporedje $D(T_n)$ pa konvergira proti operatorju T.

Ta množica je očitno vektorski podprostor v $B(\mathcal{X})$. Trditev 2 nam pove, da je D zvezen operator, če $\mathcal{S}(D)$ vsebuje samo ničelni operator. $\mathcal{S}(D)$ vedno vsebuje operator 0, saj lahko vzamemo konstantno zaporedje $T_n = 0$ in dobimo $D(T_n) = D(0) = 0$, kar seveda konvergira proti 0.

Najprej bomo pokazali, da $\mathcal{S}(D)$ ni samo podprostor v $B(\mathcal{X})$, ampak nekaj več; je dvostranski ideal algebre $B(\mathcal{X})$.

Če je $\mathcal{A}$ neka algebra, potem njen podprostor $\mathcal{J}$ imenujemo *dvostranski ideal*, če zadošča zahtevama

$$aj \in \mathcal{J} \quad \text{in} \quad ja \in \mathcal{J}$$

za vsak $a \in \mathcal{A}$ ter vsak $j \in \mathcal{J}$. Torej vsak produkt elementov algebre $\mathcal{A}$, ki ima vsaj en faktor iz $\mathcal{J}$, ponovno leži v $\mathcal{J}$.

Trditev 3. *$\mathcal{S}(D)$ je dvostranski ideal algebre $B(\mathcal{X})$.*

Dokaz. Vzemimo dva operatorja T in A. T naj bo iz $\mathcal{S}(D)$, A pa naj bo poljuben zvezen operator na $\mathcal{X}$. Videti moramo, da operatorja AT ter TA spadata v $\mathcal{S}(D)$.

Po definiciji podprostora $\mathcal{S}(D)$ obstaja tako zaporedje zveznih operatorjev T_n, ki konvergira proti 0, da $D(T_n)$ konvergira proti T. Ker je množenje zveznih operatorjev zvezno, zaporedje $S_n = AT_n$ tudi konvergira proti 0. Iz aksioma (iii) razberemo, da je

$$\lim_{n\to\infty} D(S_n) = \lim_{n\to\infty} D(AT_n) = \lim_{n\to\infty} D(A)T_n + \lim_{n\to\infty} AD(T_n)\,.$$

Prva limita na desni strani je enaka 0, ker je $D(A)$ neki določen operator, ki ga lahko iz limite izpostavimo, zaporedje T_n pa konvergira proti 0. V drugem členu vsote na desni strani izpostavimo A pred limito in tako dobimo končni rezultat

$$\lim_{n\to\infty} D(S_n) = AT\,.$$

Po definiciji je torej $AT \in \mathcal{S}(D)$. Podobno dokažemo, da je tudi $TA \in \mathcal{S}(D)$. ■

Zaradi Trditve 3 se množica $\mathcal{S}(D)$ imenuje *separirni ideal* odvajanja D. V dokazu nismo nikjer uporabljali asociativnosti množenja, zato v nespremenjeni obliki velja tudi za neasociativne Banachove algebre.

3. Metoda dokazovanja

Naj bo $\mathcal{Y}$ neka Banachova algebra. Metoda za dokazovanje zveznosti odvajanj na algebri $\mathcal{Y}$, ki jo želimo predstaviti, sestoji iz dveh korakov:

(1) Najprej pokažemo, da **neničeln** dvostranski ideal v algebri $\mathcal{Y}$ vsebuje tak **neničeln** element x_0, da velja
   (a) $p(x_0) = 0$ za neki polinom p
   (b) za vsak $y \in \mathcal{Y}$ obstaja neki Q_λ iz enoparametrične družine polinomov dveh spremenljivk, da je $Q_\lambda(x_0, y) = 0$.

(2) Dokažemo, da separirni ideal odvajanja ne more vsebovati takega elementa x_0.

V prvi točki je poudarek na besedi neničeln. Če veljata trditvi iz točk (1) in (2), separirni ideal odvajanja na algebri $\mathcal{Y}$ ne more biti neničeln, torej vsebuje samo element 0 in po izreku o zaprtem grafu (Trditev 2) je vsako odvajanje algebre $\mathcal{Y}$ zvezno.

Za zgled si bomo pogledali, kako funkcionira ta metoda na primeru algebre $\mathcal{Y} = B(\mathcal{X})$, kjer je $\mathcal{X}$ Banachov prostor. Vzamemo polinom $p(a) = a^2 - a$ in enoparametrično družino polinomov $Q_\lambda(a, b) = aba - \lambda a$, kjer teče λ po realnih ali kompleksnih številih, odvisno od tega, ali je $\mathcal{X}$ realen ali kompleksen prostor. Da bi konstruirali še element x_0, bomo uporabili Hahn-Banachov izrek (Trditev 1).

Za neničeln element $x \in \mathcal{X}$ ter funkcional f, ki nam ga da trditev 1, definiramo linearni operator P_x s predpisom

$$P_x(y) = f(y)x$$

za vsak $y \in \mathcal{X}$. Dokaz zveznosti operatorja P_x prepuščam bralcu. Vzemimo poljuben $y \in \mathcal{X}$ ter izračunajmo

$$P_x^2(y) = P_x(P_x(y)) = P_x(f(y)x) = f(f(y)x)x\,.$$

Ker je f linearen funkcional, je $f(y)$ skalar. Od tod vidimo, da je $f(f(y)x) = f(y)f(x) = f(y)$, saj smo f izbrali tako, da je $f(x) = 1$. Dobili smo torej

$$P_x^2(y) = P_x(y)\,.$$

Ker gornja enakost velja za vsak y, je $P_x^2 = P_x$ oziroma $p(P_x) = 0$. Operator s to lastnostjo imenujemo *projektor*. Naj bo zdaj T poljuben zvezni operator na $\mathcal{X}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} P_x T P_x(y) &= P_x(T(f(y)x)) = f(y)P_x(T(x)) = \\ &= f(y)f(T(x))x = f(T(x))P_x(y) \end{aligned}$$

oziroma

$$P_x T P_x = \lambda P_x \,,$$

kjer je λ skalar $f(T(x))$. Da bi končali s prvim delom naše metode, moramo še dokazati, da vsak neničeln ideal $\mathcal{J}$ algebre $B(\mathcal{X})$ vsebuje neki projektor zgornje oblike.

Naj ideal $\mathcal{J}$ vsebuje neki neničelni operator T. Ker je T neničeln, obstaja tak vektor x, da je $y = T(x) \neq 0$. Vzemimo vektorju y pripadajoči funkcional f iz trditve 1 ter definirajmo $P_y(z) = f(z)y$ ter $R(z) = f(z)x$ za $z \in \mathcal{X}$. P_y je kot prej projektor, R pa neki zvezni linearni operator. Preprost račun nam pokaže, da velja $P_y T R = P_y$. Ker je T iz $\mathcal{J}$, le-ta pa je ideal, je potem tudi P_y iz $\mathcal{J}$.

S prvim delom metode smo zdaj opravili. Naj bo D odvajanje algebre $B(\mathcal{X})$. Pokazali bomo, da separirni ideal operatorja D ne more vsebovati nobenega projektorja P_y. Pa privzemimo, da projektor P_y pripada idealu $\mathcal{S}(D)$. Tedaj obstaja tako zaporedje operatorjev T_n, ki konvergira proti 0, da je

$$\lim_{n\to\infty} D(T_n) = P_y \,.$$

Iz prvega dela pa vemo tudi, da obstaja tako zaporedje skalarjev λ_n, da je

$$Q_{\lambda_n}(P_y, T_n) = P_y T_n P_y - \lambda_n P_y = 0 \,.$$

Ker zaporedje T_n konvergira proti 0, tudi zaporedje $P_y T_n P_y$ konvergira proti 0. To pa pomeni, da mora tudi zaporedje skalarjev λ_n konvergirati proti 0. Ker je $D(P_y)$ konstantni operator, tudi zaporedje $\lambda_n D(P_y)$ konvergira proti 0. To nam dá

$$0 = \lim_{n\to\infty} D(\lambda_n P_y) = \lim_{n\to\infty} D(P_y T_n P_y) \,.$$

Ker je D odvajanje, od tod sledi

$$0 = \lim_{n\to\infty} D(P_y) T_n P_y + \lim_{n\to\infty} P_y D(T_n) P_y + \lim_{n\to\infty} P_y T_n D(P_y) \,.$$

V vseh treh limitah sta levi in desni faktor konstantna, zato ju lahko iz limite izpostavimo. Srednji faktorji pa limitirajo po vrsti proti 0, P_y oziroma 0. Torej sta prva in tretja limita enaki 0, druga pa $P_y P_y P_y = P_y$. Dobimo $0 = P_y$. To ni mogoče, ker je $P_y(y) = y \neq 0$.

Opravili smo še drugi del naloge in tako dokazali

Izrek. *Naj bo $\mathcal{X}$ Banachov prostor. Vsako odvajanje na algebri $B(\mathcal{X})$ je zvezno.*

4. Naloga za bralca

Naj bo $\mathcal{A}$ poljubna algebra. Linearni operator $A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ se imenuje avtomorfizem, če velja $A(xy) = A(x)A(y)$ za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$. Dokažite, da so vsi avtomorfizmi algebre $B(\mathcal{X})$ zvezni, kjer je $\mathcal{X}$ neki Banachov prostor.

LITERATURA

[1] I. Vidav, *Uvod v teorijo C^*-algeber*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1989.
[2] B. Zalar, *Continuity of derivations on Mal'cev H^*-algebras, izide v reviji* Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

UTRINEK

DUH NAD SNOVJO — INTELEKTUALNA VSEBINA EKSPERIMENTALNE FIZIKE

Po moji izkušnji želijo najboljši študenti na kateri koli univerzi na obeh straneh Atlantika postati teoretični fiziki. Redkokdo z intelektualnimi zmožnostmi kakega Gell-Manna ali Cabibba izbere eksperimentalno fiziko. Fizika, ki je znanost o naravi, zaradi tega očitno veliko izgubi. Pogosto sem se vprašal, zakaj je nastal ta obžalovanja vredni položaj. Če bi to spoznali, bi morda lahko predlagali zdravila.

Prišel sem do dveh razlogov. Prvi je slog, v katerem poučujejo fiziko v bistvu povsod po svetu. V nobenem od dveh modelov, A in B, ne posredujejo študentu intelektualne vsebine pomembnih poskusov. V modelu A povedo študentom, da je veliki genij — z določenim imenom — napovedal znamenito odvisnost $y(x)$ ene merljive količine od druge. To odvisnost je potem z izrednim poskusom potrdila nedoločena oseba. V modelu B začnejo z odvisnostjo $y(x)$, ki je bila ob svojem času velika uganka. Zopet je prišel veliki genij — z določenim imenom — in podal teorijo, ki se je popolnoma ujemala z opazovanji.

Naj misel podprem z zgledoma. Okunova mojstrska knjiga *Leptoni in kvarki* sploh ne opisuje poskusov, čeprav imenuje avtorje. Navede le rezultate kot "Ugotovimo ...". Ob neki priliki sem imel vrsto predavanj z naslovom *O velikih poskusih sodobne fizike* za mlade študente in starejše teoretike. Mnogi izmed slednjih so prvič slišali, kako je Willis Lamb izmeril "svoj" premik in koliko izrednih spoznanj je zahtevala pot do tega. Kar nekaj jih je pravilno sklepalo, da je v Lambovem poskusu prav toliko intelektualne vsebine kot v njegovi kvantnoelektrodinamični razlagi. (Zgled moti dejstvo, da je bil Lamb v resnici izurjen teoretik.)

Drugi popolnoma različni razlog izvira iz nečesa, kar bi lahko imenoval "teorija očetove podobe". V praksi so vsa naša predavanja teoretična, če naslov to pove ali ne. Teoretiki, ki poučujejo teorijo, večinoma vedo, o čem predavajo, za eksperimentalce pa pogosto tega ni mogoče trditi. Tako si študent (čeprav morda sam ne razume zadeve, nezgrešljivo pa prepozna pomanjkljivo predavateljevo razumevanje) pravi: "Nočem postati tak kot ta (vstavite ime eksperimentalca), ampak kot oni (vstavite ime teoretika)."

Kaj lahko storimo, da popravimo to stanje? Dvoje. Prvič, bodoči teoretiki in eksperimentalci morajo študirati skupaj, dokler je to mogoče. Drugič, uvesti moramo predavanja, pri katerih pomembne izredne poskuse razčlenimo do podrobnosti. Snovi za to ne manjka.

Val Telegdi, Iz CERN Courier **31** (1991) 15, prev. *Janez Strnad*

NOVE KNJIGE

HORST R., Tuy H., Global optimization, Deterministic approaches, Springer-Verlag 1990, 696 str.

Odkar je bil v letu 1964 objavljen osnovni članek Tuy H., *Vognutoe programirovanije pri linejnih ograničenijah*, DAN SSSR **159** (1964) 32–35, se področje matematičnega programiranja, ki je dobilo naziv globalna optimizacija, zelo naglo razvija. O tem pričajo številni članki, monografije in poseben časopis *Journal of Global Optimization* z glavnim urednikom R. Horstom (Trier). Časopis bo začel izhajati v tem letu.

Globalna optimizacija se ukvarja s karakterizacijo in izračunavanjem globalnih ekstremov nelinearnih funkcij. Funkcija, za katero iščemo minimum ali/in maksimum na zaprti podmnožici $D \subset \mathbb{R}^n$, ima praviloma številne lokalne ekstreme. Za probleme globalne optimizacije se je zato uveljavilo tudi ime mnogoekstremalni globalni optimizacijski problemi. Standardne metode, ki so znane v nelinearnem programiranju, vodijo kvečjemu do lokalnih ekstremov. Znanih je le malo kriterijev (bolj teoretične narave), ki zagotavljajo, da je dobljeni lokalni ekstrem hkrati tudi globalni. Iskanje globalnega ekstrema zahteva povsem nove metode.

Cilj Horstove in Tuyjeve knjige je podati sistematičen in poenoten prikaz različnih pristopov k reševanju globalnih optimizacijskih problemov. Knjiga je v grobem razdeljena na tri dele.

V prvem delu so uvedeni glavni razredi teh problemov: konveksna minimizacija, obrnjeno konveksno programiranje, DC programiranje, Lipschitzova optimizacija. Pokazano je tudi, kako je mogoče reševanje splošnega sistema enačb in/ali neenačb prevesti na problem globalne optimizacije.

V drugem delu je podrobno obravnavana konkavna minimizacija. Njene metode so razvrščene v tri kategorije: metode odsečnih ravnin, metode zunanje in notranje aproksimacije, metode delitve množice možnih rešitev.

Tretji del pa je namenjen proučevanju dokaj splošnih globalnih optimizacijskih problemov. Sem sodita DC programiranje in Lipschitzova optimizacija. Posebej sta obravnavana problem oblikovnega središča (design centering problem), ki je poseben primer DC programiranja, in bikonveksno programiranje.

Predznanje, potrebno za razumevanje razlage, je le analiza realnih funkcij, linearna algebra in teorija konveksnosti.

Obsežna citirana literatura (543 enot) priča o temeljitem pristopu k pisanju knjige.

Glede na pomen, ki ga ima globalna optimizacija tako v teoriji kot pri reševanju praktičnih problemov (v naravoslovju, tehniki, ekonomiji), bo knjiga našla številne bralce.

Stane Indihar

VEČSTOPENJSKE RAKETE

JANEZ ŽITNIK

PACS 95.55 Pe

Članek obravnava končno hitrost večstopenjske rakete in določi optimalno število stopenj, ki jih mora imeti raketa, da doseže potrebno hitrost.

MULTISTAGE ROCKETS

In the article the ultimate velocity of a multistage rocket is considered and an optimum number of stages is computed.

Pri pouku fizike kdaj pa kdaj naletimo tudi na sisteme, ki oddajajo okolici snov ali jo od nje sprejemajo. Mednje sodi tudi enostopenjska raketa. Gibanje večstopenjskih raket navadno odpravimo zelo na kratko. Ker izstrelijo satelite in rakete s človeško posadko vedno z večstopenjskimi raketami, si oglejmo, kako je končna hitrost koristnega tovora odvisna od števila stopenj. Poskusimo določiti optimalno število stopenj, če je raketa sestavljena iz enakih stopenj.

Gibanje enostopenjske rakete opisuje enačba

$$F = \frac{d}{dt}(mv) - u\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}(v-u)\,, \tag{1}$$

v je hitrost rakete in u hitrost iztekajočih plinov. Na raketo, ki se giblje premo in enakomerno, naj ne deluje nobena zunanja sila. Tak privzetek je največkrat upravičen, saj so teža, zračni upor in druge zunanje sile majhne v primeri s silo curka $(v-u)dm/dt$. Če je $v_0 = u - v$ hitrost iztekajočih izgorelih plinov glede na raketo, sledi iz (1)

$$m\frac{dv}{dt} + v_0\frac{dm}{dt} = 0 \tag{2}$$

z rešitvijo

$$v = -v_0 \ln m + k\,. \tag{3}$$

To velja, če je izgorevanje plina ves čas enakomerno. Naj bo m_0 začetna masa rakete, masa goriva pa naj bo εm. *Strukturni faktor* $1-\varepsilon$ podaja razmerje med maso ogrodja rakete in začetno skupno maso rakete. Navadno velja $0.75 < \varepsilon < 0.90$. Raketa nosi tudi koristni tovor z maso M. Končno hitrost rakete, ki sprva miruje, dobimo iz (3)

$$v = -v_0 \ln\frac{m}{m_0} + m\,. \tag{4}$$

Ko izgori vse gorivo, doseže raketa končno hitrost

$$v = -v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon m_1}{m_0 + M}\right)\,. \tag{5}$$

Če privzamemo značilne vrednosti $v_0 = 3\,000$ m/s, $M/m_0 = 0.01$ in $\varepsilon = 0.8$, dobimo za največjo hitrost enostopenjske rakete približno 4700 m/s. To je manj, kot *prva vesoljska hitrost* 7800 m/s, ki je potrebna za izstrelitev tovora na tir okrog Zemlje.

Dvostopenjsko raketo obravnavamo enako. Vzemimo, da sta obe stopnji enaki in da uporabljata enako gorivo. Ko zgori gorivo v prvi stopnji, sledi iz (5) končna hitrost

$$v = v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon m_1}{m_1 + m_2 + M}\right),$$

kjer sta m_1 in m_2 masi posameznih stopenj. Ko izgori še gorivo v drugi stopnji, se hitrost rakete poveča za

$$v = -v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon m_2}{m_2 + M}\right).$$

Končna hitrost koristnega tovora je potem

$$v = v_1 + v_2 = -v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon m_1}{m_1 + m_2 + M}\right) - v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon m_2}{m_2 + M}\right). \quad (6)$$

Z enakimi podatki kot prej dobimo končno hitrost $v = 6200$ m/s. S primernim razmerjem med masama obeh stopenj se da doseči še večja končna hitrost. Vzemimo, da je masa obeh stopenj $m_0 = m_1 + m_2$ naprej predpisana. Enačbo (6) zapišemo takole

$$v = -v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon(m_0 - m_2)}{m_0 + M}\right) - v_0 \ln\left(1 - \frac{\varepsilon m_2}{m_2 + M}\right).$$

Pri največji hitrosti je $dv/dm_2 = 0$, iz česar sledi

$$(1 - \varepsilon)(m_2^2 + 2m_2 M - m_0 M) = 0.$$

Ker je vedno $\varepsilon \neq 1$, mora biti izraz v drugem oklepaju enak nič. Fizikalno smiselna rešitev kvadratne enačbe za m_2 je

$$m_2 = -M + \sqrt{M^2 + M m_0}.$$

Postavimo še $\mu = M/m_0$ in upoštevamo, da je $m_1 = m_0 - m_2$, ter dobimo za razmerje mas obeh stopenj

$$\frac{m_1}{m_0} = \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}}\left(\sqrt{\mu + \mu^2} - \mu\right), \qquad \frac{m_1}{m_2} = \sqrt{1 + 1/\mu}.$$

Če je razmerje $\mu = M/m_0 = 0.01$, je razmerje mas obeh stopenj $m_1/m_2 \simeq 10$ in končna hitrost koristnega tovora $v \simeq 7560$ m/s. Ta hitrost je skoraj dovolj velika za izstrelitev satelita. Vsaka naslednja stopnja rakete poveča končno hitrost koristnega tovora. Ker vsaka naslednja stopnja poveča stroške, je zanimivo ugotoviti, kolikšno število stopenj je najugodnejše.

Raketa iz n enakih stopenj nosi koristni tovor z maso M. Začetna masa stopnje i naj bo m_i. Poiskati moramo razmerje m_i/m_0, če je $m_0 = \sum m_i$, tako da bo končna hitrost koristnega tovora največja. Vpeljimo novo spremenljivko $x_i = m_i/m_0$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Končna hitrost tovora je potem

$$v = -v_0 \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\varepsilon x_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + \mu}\right). \tag{7}$$

Pri tem velja $\mu = M/m_0$ in $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. To je vezani ekstrem funkcije več spremenljivk $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ pri pogoju $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Postopek za reševanje takih problemov je znan [2]. Vpeljemo konstanto λ in izrazimo hitrost rakete taole

$$v^* = -v_0 \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\varepsilon x_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + \mu}\right) - \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - 1\right).$$

Če naj bo ta hitrost maksimalna, mora veljati

$$\frac{\partial v^*}{\partial x_j} = 0\,, \qquad j = 1, 2, 3, ..., n\,.$$

Po daljšem, a nezahtevnem računu dobimo za razmerja mas posameznih stopenj

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n + \mu}{\mu} = \varkappa \tag{8}$$

ali

$$x_i = \varkappa^{n-1} x_n\,, \qquad i = 1, 2, 3, ..., n\,.$$

Ker je $\sum x_i = 1$, dobimo za $\varkappa$ izraz

$$\varkappa = (1 + \frac{1}{\mu})^{\frac{1}{n}}\,.$$

Za maso posamezne stopnje rakete sledi potem za $i = 1, 2, ..., n$

$$m_i = (1 + \mu)^{1 - \frac{i}{n}} \mu^{\frac{i-1}{n}} \left((1 + \frac{1}{\mu})^{\frac{1}{n}} - \mu^{\frac{1}{n}}\right) m_0\,.$$

Največje povečanje hitrosti je med $n = 2$ in $n = 3$, z naraščajočim n pa narašča hitrost proti končni vrednosti 11 080 km/s. Z $v_0 = 3000$ m/s, $\mu = M/m = 0,01$ in $\varepsilon = 0,8$ dobimo za največje hitrosti rakete vrednosti

n	1	2	3	4	8
v[m/s]	4711	7646	8904	9519	10 364

.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Fizika 1,* DMFAS, Ljubljana 1991.
[2] I. Vidav, *Višja matematika I,* DMFAS, Ljubljana 1990.
[3] H. O. Ruppe, *Introduction to astronautics,* Academic Press, London 1966.
[4] W. T. Thomson, *Introduction to space dynamics,* Wiley, London 1961.

NOVE KNJIGE

BATTESTIN Jožko, Optika, osnove in meritve. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1991, 580 str.

V slovenščini doslej nismo imeli obsežnejšega strokovnega besedila o optiki; posebno ne takega, ki bi bilo uporabno pri praktičnem delu.

Profesor Battestin je kot nadaljevanje svojih dveh knjig Fizikalni praktikum I in II, ki pokrivata poglavja klasične fizike (in del tehnike) od mehanike do elektrike, zdaj pripravil tretji del, namenjen optiki.

Delu se pozna, da se je avtor s področjem ukvarjal več desetletij kot konstruktor optičnih naprav (nekatere je tudi patentiral) in kot srednješolski in višješolski profesor, ki je pripravil obsežno zbirko laboratorijskih vaj iz optike.

Prvi del obravnava fizikalne osnove valovne in geometrijske optike na razmeroma zahtevni ravni. Drugi del vsebuje praktične vaje od preprostih srednješolskih poskusov do laboratorijskih meritev.

Iz tega sledi, da bo delo, ki bi ga lahko označili kot razširjeni repetitorij fizkalnih osnov uporabne optike, našlo širok krog uporabnikov. Knjiga bi lahko postala priročnik učiteljev fizike v osnovnih, srednjih in visokih šolah, posebno pri pripravi praktičnih vaj. Zaradi temeljite obravnave tehničnih detajlov optičnih naprav bo prišla prav tudi tistim, ki take naprave načrtujejo ali izdelujejo. Po knjigi bodo pogosto segali v laboratorijih, v katerih uporabljajo optične instrumente.

Kdor se bo v našem okolju naslednji lotil pisanja knjige s področja optike, mu torej ne bo treba orati ledine, ampak se bo lahko posvetil le novejšim poglavjem, kot so na primer kvantna optika in tehnika optičnih vlaken. Teh poglavij v knjigi — že zaradi obsega — ni bilo mogoče detaljno obdelati.

Franc Cvelbar

ZANIMIVA DOLOČITEV ZEMLJEPISNE DOLŽINE

MARIJAN PROSÉN

PACS a 9510 Cl

Zemljepisno širino določimo s časom zahajanja Sonca za vodoravno ali navpično ravnino.

AN INTERESTING EXAMPLE OF GEOGRAPHICAL LATITUDE DETERMINATION

The geographical latitude is determined from the sun setting time behind a horizontal or vertical plane.

Sonce zahaja od trenutka, ko se navidezno dotakne vodoravne ravnine (matematičnega obzorja), do trenutka, ko izgine za njo. V tem času t središče Sonca opiše na nebu kot $\omega t \cos\delta$, če je δ deklinacija Sonca (točneje — njegovega središča), $\omega = 15°/\mathrm{h} = 15'/\mathrm{min}$ pa kotna hitrost navideznega dnevnega gibanja Sonca (Sl. 1 je na naslovni strani) [1]. Po sliki ugotovimo, da velja zveza $\cos\varphi = d/\omega t \cos\delta$. Če izmerimo čas zahajanja Sonca za vodoravno ravnino, deklinacijo δ in zorni kot d Sonca pa vzamemo iz astronomskih efemerid, lahko iz te enačbe določimo zemljepisno širino φ v poljubnem dnevu leta.

V praksi težko dosežemo, da se vidno obzorje pokrije z matematičnim. Četudi bi to uspelo, bi prišlo pri merjenju časa do napake več sekund, kar bi poslabšalo natančnost določitve zemljepisne širine. Boljše rezultate dobimo, če merimo čas zahajanja t_1 Sonca za navpično ravnino, npr. za steno oddaljene hiše, navpičnim stolpom, drogom. Seveda mora biti Sonce blizu obzorja. V tem primeru določimo φ iz zveze $\sin\varphi = d/\omega t_1 \cos\delta$. Ker velja $d = \omega t_2 \cos\delta$, sledi $\sin\varphi = t_2/t_1$, če je t_2 čas zahajanja Sonca za steno, ki je pravokotna na smer njegovega dnevnega gibanja [2]. Pri tej določitvi φ sploh ne potrebujemo efemerid. Merimo le časa t_1 in t_2. Način je preprost in uporaben v šoli. S skrbnim merjenjem časa določimo φ natančneje kot na $0.1°$, kar je za šolo tudi primerna natančnost.

Pri opazovanju Sonca moramo biti zelo previdni. Navadno je Sonce ob obzorju, posebno v jesenskih megličastih večerih, dovolj šibko, da je mogoče njegovo zahajanje opazovati s prostim očesom. Sicer pri opazovanju uporabimo filter, okajeno šipico, varilsko steklo, očrnjeni (osvetljeni) film. Med opazovanjem ne premikamo glave. Opazujemo z enim očesom, da se izognemo paralaksi. Če opazujemo z daljnogledom, vedno uporabimo zaščitni filter. Najbolje pa je zahajanje Sonca opazovati na zaslonu.

Ob tem je na mestu še drobna, a pomembna pripomba. Včasih slišimo, da je čas zahajanja (vzhajanja) Sonca odvisen od naklonskega kota dnevne poti Sonca k matematičnemu obzorju, da je pozimi naklonski kot manjši kakor poleti in da zato pozimi Sonce dalj časa zahaja kakor poleti [1]. To

ne drži. Naklonski kot navidezne dnevne poti Sonca k obzorju se med letom ne spreminja in je $90° - \varphi$ [3]. Drži pa, da nam je pozimi Sonce bližje kot poleti. Pozimi ga vidimo pod večjim zornim kotom kot poleti, zato pozimi zahaja nekoliko dalj kot poleti.

LITERATURA

[1] B. I. Fesenko, *Opredelenije geografičeskoj široty po prodolžitel'nosti zahoda Solnca,* Fizika v škole, 6 (1989) 105.
[2] M. Prosén, *Raziskovalne vaje iz astronomije,* I. del, Publ. 6, ADJ, Ljubljana 1981.
[3] F. Avsec in M. Prosén, *Astronomija,* DMFAS, Ljubljana 1989.

NOVE KNJIGE

GOLLI B., Kvarkovski modeli hadronov, DMFAS, Ljubljana 1991, 68 str. (Zbirka Izbrana poglavja iz fizike ; 24) Cena 200.00 din

V delu *Kvarkovski modeli hadronov* je avtor obdelal in pedagoško razčlenil obsežno literaturo o tem področju. Pri tem se je omejil predvsem na statične lastnosti hadronov, ki jih danes že precej dobro razumemo, vendar nam odpirajo še vrsto ugank. V marsikaterih poglavjih se čuti, da avtor tudi sam aktivno raziskuje hadrone in ima o interpretaciji takih rezultatov svoje osebno mnenje.

Delo je primerno strukturirano. Pri večini poglavij so uvodna podpoglavja pisana dovolj pregledno in poljudno za dodiplomske študente fizike in za dodiplomske ter podiplomske študente pedagoške fizike. Nadaljnja podpoglavja so namenjena podiplomcem raziskovalcem, toda tudi drugi spretni bralci jih bodo lahko brali "po diagonali" za okvirno informacijo, kaj se dogaja na eni od front fizike.

Avtor najprej predstavi sprejeto modrost, "standardni model" leptonov in kvarkov s standardno elektrošibko in močno interakcijo. Nato razloži zgradbo mezonov in barionov iz kvarkov, pri čemer bralca lepo vpelje v prijeme iz teorije grup (Youngove diagrame). Po prikazu eksperimentov, ki podpirajo našo sliko o kvarkih, opiše efektivno interakcijo med kvarki, modele za opis hadronov in rezultate: velikost hadronov, njihove oblikovne faktorje, magnetne momente itd. Posebno zanimivo je poglavje o kiralni simetriji in iz nje izvirajočih kiralnih modelih, ki bo gotovo vzpodbudilo tudi nadaljnja pedagoška raziskovanja, saj je kiralno simetrijo zelo težko razložiti in ni še nikjer poljudno obdelana; avtor je napravil majhen korak naprej.

Mitja Rosina

MATEMATIČNO IZOBRAŽEVANJE V ZDA

WILLIAM P. THURSTON

Math. Subj. Class.(1991) 96–XX, 97–XX, 98–XX

Predstavljamo malce okrajšan prevod članka W. P Thurstona o matematičnem izobraževanju, objavljenega v reviji Notices of the American Mathematical Society septembra 1990.

MATHEMATICAL EDUCATION IN THE U.S.A.

This is a slightly shortened translation of the article Mathematical Education by W. P. Thurston, published in the Notices of the AMS in September 1990.

William P. Thurston je profesor matematike na Univerzi Princeton. Je dobitnik Fieldsove medalje in mednarodno znan raziskovalec na področju topologije in geometrije. V zadnjih letih pa se je začel zanimati tudi za vprašanja matematičnega izobraževanja.

Matematično izobraževanje je v nesprejemljivem stanju. Čeprav je javnost na to zelo pozorna, so dejanske spremembe počasne.

Ljudje, ki vodijo izobraževalno politiko, pogosto ne razumejo narave matematike ali matematičnega izobraževanja. "Reforme", ki jih vpeljujejo v različne šolske sisteme, gredo pogosto v nasprotne smeri. Ta pojav je znak, da potrebujemo boljše razumevanje problemov in ne samo spoznanje, da obstajajo in da so pomembni.

Simptomi

Problemi v matematičnem izobraževanju se kažejo v mnogih simptomih. Število študentov prve in druge stopnje, ki si za glavni predmet izberejo matematiko, je le polovica tistega pred 15 leti. Število ameriških podiplomcev na matematiki je manj kot polovica tistega pred 15 leti, čeprav so tuji študenti deloma nadomestili ta upad. Uspehi učencev in dijakov na vseh nivojih, merjeni s standardiziranimi testi, so slabši od tistih iz drugih industrializiranih dežel.

Tipična reakcija odraslih Američanov pri srečanju z matematikom je zgroženost. V svojo obrambo navadno prikličejo zadnji matematični predmet, ki so ga poslušali, to pa je navadno tisti, pri katerem niso več dobro sledili.

Mnoga podjetja so spoznala, da je za njihovo delovno silo pomanjkanje matematičnih sposobnosti resen problem. Tehnologija je odstranila potrebo po osnovnih matematičnih sposobnostih v nekaterih poklicih (denimo pri vnašanju naročil za hamburgerje). Izginila so mnoga nekvalificirana dela, kot za tekočim trakom, obenem pa nastala mnoga nova delovna mesta, ki zahtevajo precejšnjo matematično razvitost.

Študenti na prvi in drugi stopnji ne kažejo odziva na matematična predavanja. Strah jih je iskati odgovore in brskati po sebi za idejami. Ko obiskujemo razrede na raznih stopnjah, vidimo dramatičen padec živosti in spontanosti, ki se veča s starostjo. Človek dobi občutek, kot da sta bila naravno zanimanje in radovednost otrok zadušena.

Skoraj povsod je teže pripraviti študente k izdelavi domačih nalog in k študiju zunaj razreda, kot je to bilo pred dvajsetimi leti.

Celo tisti študenti, ki pridejo na kolidž z uspešno zaključenim matematičnim programom srednje šole (vključno z odvodom in integralom), imajo ozko bazo znanja matematike.

Matematika je "visoka" zgradba

Lastnost matematike, ki v izobraževanju zahteva posebno skrb, je njena "višina", to je dejstvo, da nove pojme v veliki meri gradimo na starih. Sklepanje v matematiki je zato lahko zelo jasno in nedvoumno, in ko smo ugotovili načelo, se lahko nanj zanesemo. To pomeni, da lahko zgradimo pojmovne strukture, ki so hkrati zelo "visoke", zelo zanesljive in izredno močne.

Ta struktura ni podobna drevesu, ampak bolj zidarskemu odru z mnogimi medsebojnimi povezavami. Ko enkrat ta oder postavimo, ni težko graditi v višino, vendar je nemogoče postaviti sloj, dokler niso narejene prejšnje plasti.

Težave nastanejo, ker študenti v izbranem tečaju različno obvladajo prejšnja znanja. Zelo neradi povedo, kaj točno znajo in česa ne znajo. Mnogi študenti na kolidžu na primer ne znajo seštevati ulomkov, vsaj v simbolični obliki ne. Tipična napaka je, da je

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \qquad \left(\text{mnogo enostavneje kot} \quad \frac{ad+bc}{bd}\right).$$

Vendar imajo študenti občutek krivde zaradi negotovosti pri seštevanju ulomkov. Neradi to priznajo (celo sami sebi) in vprašajo, kako in kaj je pravilno.

Seštevanje ulomkov je zelo dolgočasno za tiste, ki to že znajo, vendar je bistveno pri algebri, ta pa je spet bistvena za analizo. Ni težko pri posameznem študentu ugotoviti, kateri deli znanja potrebujejo dopolnilo in obnovo, in kako to izvesti. Zelo težko pa je najti nivo pouka, ki je razumljiv in obenem zanimiv za cel razred ljudi z različno predizobrazbo.

Matematika je široko področje

Matematika je tudi zelo široka. Mnogo je snovi, ki je nikoli ne obravnavamo v glavnem toku pouka, ki ima vrh v matematični analizi. V snovi, ki pride na vrsto, je mnogo stranskih vej, ki jih nikoli ne raziščemo.

V generaciji mojih staršev (v štiridesetih letih) je bil prvi matematični predmet na kolidžu algebra. Kmalu potem je to mesto prevzel infinitezimalni

račun. V zgodnjih šestdesetih letih sta odvod in integral postala standard za najboljše dijake srednjih šol. Dandanašnji se je infinitezimalni račun v veliki meri preselil v gimnazije v uglednejših šolskih okrožjih, tako da je večina boljših študentov matematike in naravoslovja na naših najboljših univerzah že imela stik z odvodom in integralom. Na Princetonu, na primer, je dve tretjini brucev lani preskočilo vsaj en semester analize.

Pospešitev poučevanja ima svojo ceno: spremljajoča težnja je bila odrezati stranske teme. Ko sem še sam hodil v gimnazijo, je bilo normalno, da smo poleg ravninske geometrije študirali še prostorsko in sferično geometrijo. Vse to so že davno opustili. Oblika matematične izobrazbe tipičnega študenta je "visoka in zelo ozka". Doseže določeno višino, nad katero njena osnova ne vzdrži nadaljnje rasti, in tam se vse ustavi ali pa odpove.

Ti dve težnji (daljšanje in zoževanje šolske matematike) je še pospešila zmeraj večja odvisnost od standardiziranih testov. Standardizirani testi naj bi pokrivali le najbolj standardni del programa. Če le polovica študentov posluša kako poglavje, ni pošteno, da bi taka snov prišla v standardizirane teste. To ni posebno slabo, dokler teste uporabljamo le sem ter tja kot eno od *sredstev merjenja.* Toda uspeh pri testih je pogosto *cilj.* Zakonodajalci, časniki in starši izvajajo pritisk na inšpektorje in šolsko upravo, uprava pritiska na ravnatelje, ravnatelji pritiskajo na učitelje in učitelji silijo študente, naj izboljšajo uspeh pri testih. Žalosten rezultat je, da so mnogi matematični tečaji zasnovani z namenom, da izboljšajo uspeh na standardiziranih testih.

Pljučnice ne ugotovimo le s termometrom in ne poskušamo je zdraviti z ledom. Podobno razgledan odnos bi morali imeti do testiranja v sklopu matematične izobrazbe.

Dolgoročnim ciljem matematične izobrazbe bi bolj ustrezalo, če bi dajali manj poudarka "višini" in bi se oddaljili od standardnega zaporedja z bolj raznolikim programom, z več poglavji, ki bi se začela bliže tlom. Je nekaj teženj v tej smeri, denimo tečaji iz končne matematike in verjetnostnega računa, vendar je možnosti še mnogo več.

Matematika je intuitivna in stvarna

Dijaki navadno izgubijo stik z realnostjo in intuitivno naravo matematike. Od vrtca do vključno srednje šole imajo pogosto učitelje, ki jim je nelagodno ob vsem, kar ni na že uhojeni poti. Otroci večkrat rešujejo matematična vprašanja na zelo iznajdljive načine, toda učitelji jim jemljejo pogum za neobičajne postopke – deloma, ker ni lahko razumeti, kaj otrok misli ali hoče povedati in se učitelji ne znajdejo, deloma zato, ker učitelji mislijo, da ni prav uporabljati alternativne metode ali razlage.

Ko študenti pridejo do kolidža, so že tako zavrti, da ne premišljujejo samostojno in si ne upajo glasno priznati svojih misli. Namesto tega poskušajo uganiti, kakšni so rutinski postopki, ki naj bi se jih naučili. Če se pri predavanju kakorkoli odmaknemo od učnega načrta ali učne knjige, gotovo kdo vpraša, ali bo to prišlo v poštev pri izpitu.

Če matematika ne bo ustvarila resnične povezave z ljudmi, je malo verjetno, da bodo po zaključku predavanj sploh kdaj premišljevali o njej ali jo uporabljali.

Prehitevanje in tekmovanja

Hkrati s poudarkom na testih je prišlo do preskakovanja in prehitevanja v matematiki. Za bistrega dijaka je sorazmerno lahko iti skozi učni načrt za matematiko mnogo hitreje, kot je sicer običajno.

Táko prehitevanje je povezano z več problemi. Ljudje, ki preskakujejo stopnje v učnem programu, imajo pogosto vrzeli v izobrazbi; te se pokažejo šele kasneje. Ko pride do tega, je lahko prizadetemu preveč nerodno, da bi tako vrzel priznal, zato poskuša ustvariti videz, da razume. To redno vodi k poraznim izidom.

Naslednji problem je, da taki prehitevajoči dijaki dobijo vtis, da je zadoščenje v tem, da si "pred" drugimi v isti starostni skupini — namesto v kakovosti učenja in razmišljanja. To je kratkovidno obnašanje, saj se je treba učiti vse življenje. Ko so stari 25 ali 30 let, jih sodimo ne po tem, koliko so prehiteli druge, ampak po kakovosti njihovega dela. Večkrat je težak udarec za takega študenta, ko ga drugi, ki so nadarjeni, a so šli po normalni poti, dohitijo, tako da postane eden od mnogih. Problem še otežujejo starši v "boljših" šolskih okrožjih, ki pogosto silijo svoje otroke, da napredujejo skozi učni program tako hitro, kolikor se da, še preden so za to resnično zreli.

Tretji problem v zvezi s prehitevanjem je socializacija. Mlajši dijaki so pogosto zmožni obvladati matematični program razreda intelektualno, niso pa zmožni vključiti se v družbo starejših dijakov.

Tu so še državna, zvezna in mednarodna tekmovanja. Ta tekmovanja so zabavna, zanimiva in spodbudna za tiste, ki so na njih uspešni. Obstaja še druga plat. Tekmovanja krepijo vtis, da bodisi imaš "dobre matematične gene" ali pa jih nimaš. Poudarek dajejo hitrosti na škodo globine in premisleka. Poudarjajo vprašanja, ki so uganka s kakim skritim trikom, namesto stvarnejših problemov, pri katerih je pomemben sistematičen in vztrajen način reševanja. To jemlje pogum mnogim ljudem, ki niso tako hitri ali izvežbani, a bi morda uspešno reševali problem, če bi imeli dovolj časa. Nekateri najboljši tekmovalci resnično postanejo dobri matematiki, vendar je mnogo vrhunskih matematikov, ki se na tekmovanjih niso tako dobro odrezali. Hitrost v matematiki pomaga, vendar je to le ena od koristnih lastnosti. Za tiste, ki ne bodo postali matematiki, pa so tekmovalne sposobnosti verjetno še manj pomembne.

Mislim, da je odgovor na te probleme izgradnja sistema, ki bo izkoristil širino matematike in omogočil hitrejšim študentom da snov bolj globinsko predelajo in se odpravijo na sorodna področja, preden začnejo dirjati pred sovrstniki.

Skrivnost in obvladanje

Matematika je izredno "stisljiva" veda. Človek se lahko dolgo prebija korak za korakom skozi kak proces ali idejo iz več različnih smeri. Ko pa enkrat stvar res razume in jo z duševne perspektive lahko pogleda kot celoto, pride pogosto do izredne duševne strnitve. Lahko si ta strnjeni koncept spravi v spomin, ga spet prikliče hitro in popolno, kadarkoli ga potrebuje, in ga uporabi kot le en korak v drugih duševnih procesih. Duševna razsvetlitev, ki spremlja to strnitev, je eden od resničnih užitkov v matematiki.

Ko pa enkrat obvladamo matematične koncepte, pa čeprav po hudem trudu, se je zelo težko spet postaviti v duševno stanje koga, ki so mu ti koncepti skrivnostni.

Spomnim se, da sem kot otrok, v petem razredu, prišel do (zame) presenetljivega odkritja, da je odgovor na "134 deljeno z 29" enak 134/29 (in tako dalje), Kako čudovito sredstvo, káko olajšanje! Zame je "134 deljeno z 29" pomenilo določeno količino zoprnega dela, ulomek 134/29 pa je bil objekt brez dela, skritega v njem. Navdušen sem šel k očetu, da bi mu razložil to veliko odkritje. Povedal mi je seveda, da je zmeraj tako: a/b in a deljeno z b sta ena in ista stvar. Zanj je bila to le majhna variacija v zapisu.

Eden mojih študentov je opisal, kako je obiskal osnovno šolo, kjer so ga prosili, naj inštruira otroka odštevanje ulomkov. Bil je presenečen in streznjen, ko je videl, kaj vse je vpleteno v prvo učenje te spretnosti, spretnosti, ki se mu je v duhu strnila v trivialnost.

Matematika je polna podobnih stvari na vseh nivojih. Temu nikoli ni konca.

Težko pridobljena in močna orodja, ki so skoraj podzavestno na voljo matematikom, ne pa njihovim učencem, otežujejo matematiku povratno zvezo z dijaki. Tako nastane psihološka ovira, ki preprečuje, da bi matematik prisluhnil učencem. Važno je, da se pri poučevanju matematike trudimo, da premagamo to oviro in se dovolj prilagodimo, tako da imajo učenci možnost, da si stvari sami razjasnijo.

Sposobnost in ustrahovanje

Podobno dijaki in študenti višjih letnikov vedo mnogo stvari, ki so mlajšim neznane. Zelo strah vzbujajoče je poslušati druge, ko mimogrede navržejo besede in fraze, kot da bi jih vsak izobraženec moral vedeti, obenem pa ne imeti niti najbolj meglene ideje, o čem govorijo. Začetniki se težko dokopljejo do spoznanja, da se bodo (ali da bi se lahko) naučili ustrezne teorije in z njo povezanega besedišča, ko bo prišel pravi čas, in da ju bodo lahko pozneje neovirano in naravno uporabljali. Spomnim se mnogih priložnosti, ko sem bil preplašen od matematičnih besed in pojmov, preden sem jih razumel: negativen, decimalen, neskončnost, algebra, spremenljivka, enačba, infinitezimalni račun, integracija, diferenciranje, mnogoterost, vektor, tenzor, snop, spekter itd. Dolgo je trajalo, da sem prepoznal ta vzorec in postal zanj vsaj deloma imun.

Tudi učitelje je pogosto strah pred matematiko. Srednješolski učitelji si pogosto ne upajo obrniti na univerzitetne profesorje in predavatelje. Sprašujejo se tudi, deloma upravičeno, ali imajo ljudje z univerze stik s problemi s srednje šole. Le malo je splošnega kontakta med tistimi, ki učijo matematiko na srednjih, višjih in visokih šolah, tako da le nekateri univerzitetni profesorji vedo dovolj o izobraževalnih problemih v srednjih in osnovnih šolah. Posebno osnovnošolski učitelji so negotovi glede svojega razumevanja matematike in se bojijo obrniti na kogarkoli.

Cilji in standardizirani testi

Čemu služi matematično izobraževanje?

Matematika v življenju

Najprej, matematika je osnovno orodje v vsakdanjem življenju. Če je kava pakirana v različno težkih zavitkih, ali lahko izkoristite to informacijo hkrati s cenami in reklamnimi napisi kot "vsebuje 23% več", da se odločite za najugodnejšo možnost? Če kupujete nov avto z raznimi posebnimi ponudbami za kreditiranje, popusti, posebno opremo, ali razumete, za kaj gre? Če bi večina ljudi razumela, bi te "posebne ponudbe" večkrat odpadle.

Matematično razmišljanje je tudi pomembna sposobnost obveščenega državljana. Ali lahko razumete logiko študij o zdravstvenih rizikih in ali lahko ocenite, kako pomembni so? Če poslušate politike, ali lahko in ali logično razmišljate, da bi ugotovili, kako važna je kakšna statistika in kaj pomeni? Ali lahko merite in računate dovolj dobro za enostavno šivanje in tesarjenje? Ali lahko načrtujete svoj domači proračun? Ko vidite grafe v časnikih in revijah, ali razumete, kaj pomenijo, in ali se zavedate sredstev, ki jih pogosto uporabljajo, da bi dramatizirali ali zakrili določene namene?

Tretjič, matematika je orodje, potrebno v mnogih poklicih v infrastrukturi naše vse bolj zapletene in tehnološke družbe. Uporaba je zelo razširjena, načini pa različni. Zobni tehnik, popravljalec telefaksov, upravnik restavracije, posrednik za nepremičnine, računalniški konzultant, knjigarnar, bankir, bolniška sestra in odvetnik — vsi po vrsti potrebujejo določeno znanje matematike v svojih poklicih.

Četrtič, matematiko intenzivno uporabljamo (in včasih zlorabljamo) v večini znanstvenih vej. Mnogo teoretične znanosti je v resnici matematika. Statistika je ena najbolj običajnih uporab matematike. Mnogi znanstveniki uporabljajo zelo razširjene računalniške statistične pakete, ki olajšujejo izračune. Toda ljudje, ki uporabljajo statistične pakete, so pogostokrat negotovi pri razumevanju spremljajočih osnovnih načel in večkrat neustrezno uporabljajo statistične teste in grafične prikaze.

Matematika je živa

Zame so ti uporabni cilji važni, vendar drugotnega pomena. Matematika ima posebno lepoto, moč in skladnost, večjo, kot bi to lahko sploh pričakovali. Zmeraj se spreminja, ko prihajamo okrog novih vogalov in odkrivamo nove lepote ter nepričakovane povezave z že znano pokrajino. Spremembe so hitre zaradi trdnosti načina razmišljanja v matematiki.

Matematika je kot domišljijski let, ki pa se sprevrže v resničnost; pravzaprav se izkaže, da je bil ves čas resničen. Ustvarjanje matematike se zdi kot fantazijska iznajdba, v resnici pa je proces, v katerem si izostrimo dojemanje, tako da odkrivamo vzorce, ki so povsod okrog nas. V svoji slavni obrambi je G. H. Hardy hvalil teorijo števil zaradi njene čistosti, abstrakcije in očitne neuporabnosti. Zdaj pa prav to področje zelo široko uporabljamo, posebno pri šifriranju in dešifriranju.

Izkušnje v vlogi matematika so me prepričale, da so estetski in uporabni cilji matematike konec koncev zelo blizu. Naš estetski čut nas vleče v matematiko določene globine in povezanosti. Prav zaradi te globine in lepote vzorcev pa se zelo verjetno taka teorija pojavi — na nepričakovane načine — v drugih delih matematike, znanosti in sveta okrog nas.

Deliti z drugimi veselje in intelektualno doživetje matematike — leteti, kjer smo prej hodili — to je cilj pouka matematike.

Testiranje in eksterno preverjanje

Žal so cilji šolske matematike postali neverjetno ozki, še bolj ozki, kot je prva točka na gornjem seznamu uporabnosti matematike, da ne govorimo o drugih točkah. Zadnje čase so postale priljubljene tako med politiki kot v javnosti zahteve po "eksternem preverjanju" šolskih sistemov. To bi bilo krasno, če ne bi tako preverjanje bilo navadno zasnovano na ozko osredotočenih testih, kjer učenec izbira pravilni odgovor.

To je, kot če bi menili, da študenti obvladajo Shakespeara, če uspešno opravijo kratek test iz besednjaka elizabetinske angleščine, ali pa, da znajo pisati, če znajo pravilno izbrati slovnično obliko stavka iz štirih možnosti.

Državni in regionalni izobraževalni sveti dandanes izdajajo špecerijske sezname (= kataloge) znanj, ki naj bi jih učenci obvladali v določeni starosti — namesto učnih načrtov: vodoravno seštevanje – navpično seštevanje, seštevanje dvoštevilčnih števil z dvoštevilčnim rezultatom – seštevanje dvoštevilčnega števila z dvoštevilčnim številom in trištevilčnim rezultatom itd.

(V nadaljevanju avtor opisuje, kako v konkretni šoli pol časa porabijo za pripravo na teste, kar se mu zdi hudo vprašljivo — op. prev.)

Razmišljanje in rutina

Ozki cilji poneumljajo.

Ljudje so mnogo bolj bistri, če lahko uporabljajo svoj celotni intelekt in če lahko stvari, ki se jih učijo, povežejo s položaji in pojavi, ki so zanje stvarni.

Če ima kdo probleme z razumevanjem razlage, je naravna reakcija, da skušamo razlago razbiti na manjše kose in razložiti vsakega posebej. Ponavadi to ni uspešno, zato se vrnemo še bolj nazaj in skušamo zapolniti še več podrobnosti.

Toda človekov um ne deluje kot računalnik; teže, ne laže je razumeti vse razbito na točna mala pravila kot zajeti vse v celoti. Zelo težko je človeku brati računalniški program v zbirniku in ugotoviti, za kaj gre. Računalnik

pa to prebere in opravi v hipu. Toda najmočnejši računalnik na svetu ni dovolj bister, da bi varno vozil avto ali obvladal sprehod vzdolž pločnika ali pa prišel do zanimivega matematičnega odkritja.

Če študiramo matematiko tako, da predelamo pravilo za pravilom, je, kot da bi se učili jezika tako, da bi si najprej zapomnili slovar in podrobna slovnična pravila, potem sestavljali fraze in stavke in se šele nato naučili branja, pisanja in konverzacije. Domači govorci jezika se ne zavedajo jezikovnih pravil: jezik osvojijo tako, da se osredotočijo na višji nivo in podzavestno absorbirajo pravila in vzorce. Ljudem se je mnogo teže eksplicitno naučiti pravil in vzorcev kot samega jezika. Dejansko kažejo izredni in do zdaj neuspešni poskusi, da bi naučili računalnike jezikov, da nihče še ne more zadovoljivo opisati jezika z nedvoumnimi pravili.

Bolje je, da sploh ne učimo predmeta kot pa, da bi poskušali učiti po majhnih koščkih in pravilih.

Odgovori in vprašanja

Ljudje cenijo in sprejemajo matematično teorijo mnogo bolje, če so se že prej ukvarjali z vprašanji, na katera naj bi teorija odgovorila.

Obstaja naravna težnja, da bi pri pouku matematike uporabljali logični red in razložili vse tehnike in odgovore, preden bi navedli primere in vprašanja. Vse to zaradi predpostavke, da bodo študenti oboroženi z vsemi potrebnimi tehnikami za odgovore, ko bodo ti potrebni.

Bolje je, da so ves čas v zraku zanimiva vprašanja brez odgovora in nerazloženi zgledi, pa če so učenci, učitelji ali kdorkoli drug pripravljeni na odgovor ali ne. Najboljši psihološki vrstni red za matematično poglavje je pogosto povsem različen od najbolj učinkovitega logičnega vrstnega reda.

Kot matematiki vemo, da nikoli ne bo konca neodgovorjenim vprašanjem. V nasprotju s tem pa študenti pogosto dobijo občutek, da je matematika že zdavnaj dokončno obdelana — le sami še niso prišli dovolj daleč, da bi jo lahko prebavili.

Našim študentom bi matematiko lahko predstavili na način, ki je obenem bolj zanimiv in bliže stvarnim okoliščinam, v katerih jo bodo srečali v življenju — brez zagotovljenih odgovorov.

Kaj lahko storimo

To je odvisno od našega položaja.

V našem razslojenem sistemu je izbrani organizaciji ali posamezniku težko narediti kaj takega, kar bi vplivalo na sistem kot celoto. Če pa se odzovemo na lokalne okoliščine, posredno vplivamo na globalno stanje. Na vprašanje bom pogledal s stališča višješolskega in visokošolskega profesorja.

Najprej: višješolski in visokošolski matematični oddelki morajo ponuditi tečaje, ki bodo študentom omogočili nov start v matematiki. Repetitoriji srednješolske snovi so zelo razširjeni, toda njihov uspeh je omejen: ponavljanje istega materiala je zoprno in dolgočasno, pa če si ga prvič razumel ali ne. Avtomatično se zmanjšata navdušenje in spontantost.

Namesto tega bi moralo biti več predmetov, dostopnih brucem in študentom drugih področij, ki dajejo nekaj matematične širine, obenem pa začnejo na nizkem nivoju, brez velikega ponavljanja že znanih stvari. Temu kriteriju bi recimo ustrezali: osnove topologije, teorija števil, simetrija in teorija grup, verjetnost, diskretna matematika, algebraična geometrija, dinamični sistemi (kaos), računalniška grafika in linearna algebra, projektivna geometrija in perspektivno risanje, hiperbolična geometrija, matematična logika.

Drugo: ustvariti bi morali boljše povezave med posameznimi deli izobraževalnega sistema. Treba je najti načine, kako v stroki objaviti izobraževalne dosežke profesorjev, ne samo v razredu ali oddelku. Treba je najti način za izmenjavo zanimivih idej med različnimi oddelki: denimo obiske vodij študijskih komisij in predstojnikov. Morali bi medsebojno obiskovati predavanja. Potrebujemo več predavanj in več časa, posvečenega izobraževanju na poklicnih srečanjih, kakor tudi več nagrad za izobraževalne dosežke.

Še važneje in teže je ustvariti povezave med izobraževalnimi nivoji. Za višje in visoke šole je najvažnejša komunikacija med srednješolskimi, višje- in visokošolskimi matematičnimi oddelki. Tok informacij mora biti obojestranski: tudi univerzitetni profesorji se lahko o poučevanju mnogo naučijo od srednješolskih.

Univerzitetni profesorji pogosto sumničijo svoje kolege, ki se zanimajo za izobraževanje. Večinoma predpostavljajo, da je raziskovanje edino res pomembno področje dela in da je obrat k izobraževanju znak neuspeha v raziskovanju. Profesorji mlajšim sodelavcem pogosto eksplicitno svetujejo, naj ne izgubljajo preveč časa s poučevanjem, saj sicer ne bodo nikdar napredovali.

Spoznati moramo, da je mnogo različnih načinov, s katerimi lahko pomembno prispevamo k razvoju naše družbe in ustanov. Neumno je meriti matematike le z lestvico raziskovanja. Izobraževanje je pomemben izziv in v njem se mnogi ljudje znajdejo po svoji izbiri, ne iz nuje. Soditi jih moramo po dosežkih, ne pa po tem, kar bi lahko dosegli, če bi svoj čas in energijo uporabili drugje.

Nujno je treba spremeniti sistem poklicnega nagrajevanja. Potrebujemo nekaj boljšega, kot je sedanji položaj na univerzitetnih matematičnih oddelkih; tam obstaja verbalna podpora važnosti poučevanja, ko pa pride do odločitev o elekcijah in reelekcijah, poučevanje in službovanje šteje le v mejnih primerih, ko kandidatov ni mogoče ločiti po kvaliteti raziskovanja.

Ljudje so družbeno motivirani. Če razpravljamo o izobraževanju, temu posvečamo več energije in tako postane izobraževanje za nas važnejše. Akademska kultura se *lahko* spremeni in se je spremenila. Spremembe so za zdaj neformalne (več se o tem pogovarjamo med kosilom), brez organizacijskih sklepov. Ko pa bo čas dozorel, in mislim, da zdaj že je, bo malce pritiska s strani organizacij lahko pripeljala do velikih sprememb.

Potrebne reforme bodo nastale z medsebojnim sodelovanjem. Dobre matematične ideje se zelo hitro razširijo po neformalnih kanalih v matematični

družbi. Ko več pozornosti posvečamo pouku, se tudi dobre izobraževalne ideje hitreje širijo.

Prevedel in prir. *Peter Legiša*

LITERATURA

[1] W. P. Thurston, *Mathematical Education,* Notices of the American Mathematical Society **37** (7) (1990) September, 844–850.

Zahvaljujemo se Ameriškemu matematičnemu društvu, da nam je ljubeznivo dovolilo prevod in objavo članka v naši reviji.

Uredništvo

NOVE KNJIGE

LOKAR M., MOHAR B., dBASE III Plus, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1991, 128 str. (Učbeniki in priročniki) Cena 250 din.

V zbirki Učbeniki in priročniki je izšel priročnik za uporabo programskega paketa dBase III Plus avtorjev M. Lokarja in B. Moharja. Knjiga prinaša kratek pregled možnosti, ki jih programski paket nudi za delo z zbirkami podatkov, obenem pa nam daje tudi nekaj idej o tem, kakšne zbirke podatkov si pri vsakdanjem delu sploh lahko omislimo.

V prvem delu priročnika avtorja povesta splošna pravila za delo s programskim paketom dBASE III Plus, pa tudi, kako ga namestimo v računalnik, če ga dobimo na disketah. Sledijo poglavja z bolj natančnim opisom dela, zelo pregledno urejena glede na to, kaj želimo z zbirkami delati. Začnemo s sestavljanjem opisa zbirke podatkov in vnosa podatkov, gremo preko različnih načinov izpisovanja zbirk, spreminjanja in popravljanja ter brisanja podatkov do računanja z njimi.

Seveda od vseh teh opravil z zbirkami ne bi imeli dosti koristi, če ne bi mogli rezultatov našega dela izpisati. Sestavljanju in izpisovanju sporočil je namenjeno posebno pogalvje, v njem je omenjena tudi možnost pošiljanja pošte.

Čeprav je poglavje, v katerem avtorja spregovorita o programiranju, razmeroma kratko, nam nudi kar dobro osnovo za začetek programiranja v dBASE III Plus. Kdor ima le količkaj posluha za programiranje in bo prebral to poglavje, ne bi smel imeti problemov pri pisanju enostavnejših programov v dBASE III Plus. Zelo pregleden je tudi seznam funkcij v dodatku.

Po priročniku bodo radi segli vsi, ki želijo izvedeti, kako naj svoje podatke spravijo v pregledno obliko in jih potem na enostaven način uporabljajo, urejajo ali izpisujejo.

Jana Vrabec

VESTI

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1990*

Pedagoška fakulteta — Maribor

Matematika-fizika

422. Jenuš, Jelka
423. Kostanjevec, Irena
424. Šmon, Franja

Fizika — tehnična vzgoja

311. Cenčič, Anton
312. Krajnc, Vili
313. Krošel, Branko
314. Primužič, Andrej
315. Slavinec, Drago

Pedagoška akademija — Ljubljana

Matematika-fizika

862.	Martinc, Sonja	Primeri notranje diferenciacije in individualizacije pri pouku matematike v 6. razredu OŠ
863.	Ules, Vanja	Dodatni pouk matematike za 7. razred OŠ
864.	Dužič, Renata	Obravnava štirikotnikov v OŠ
865.	Ivanič, Ana	Uvod v sferično in hiperbolično geometrijo
866.	Vraničar, Jože	Konstrukcija pravilnih večkotnikov s prepogibanjem papirja
867.	Bizjak, Mojca	Gaussova ukrivljenost ploskve
868.	Pajnič-Kirn, Mojca	Krčenje Boolovih veččlenikov
869.	Pangeršič, Jožica	O idealih v kolobarju algebraičnih celih števil
870.	Zevnik, Marjeta	Primerjava obravnave algebrskih vsebin pri pouku matematike v Sloveniji in Hrvatski
871.	Cimerman, Helena	Primeri nivojske diferenciacije pri pouku matematike v 6. razredu OŠ
872.	Čibej, Vanja	Uporaba Pitagorovega izreka v OŠ
873.	Petrica, Marjeta	Primerjava med ustnim, pisnim in praktičnim preverjanjem znanja fizike v OŠ
874.	Valenčič, Marko	Delo z nadarjenimi pri pouku matematike za 7. razred OŠ
875.	Pirjevec, Mirjam	Pouk matematike na celodnevni OŠ
876.	Kuhar, Marjan	O pouku matematike v 8. razredu OŠ in šole za slušno in govorno prizadete
877.	Borc, Andreja	Obravnava seštevanja naravnih, celih in racionalnih števil v OŠ
878.	Harej, Vesna	Linearna lomljena transformacija
879.	Čerin, Barbara	Evolute ravninskih krivulj
880.	Trček, Simona	Osnove teorije grafov

Matematika — tehnična vzgoja

79.	Pahor, Jordana	Hladno preoblikovanje jekla
80.	Mertelj, Metka	Vloga in pomen tehnične vzgoje v razvoju osnovnošolskega otroka (od 11. do 15. leta starosti)

* Seznam diplomantov iz leta 1989 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **37** (1990) 59–63.

81.	Ušeničnik, Darja	Uporaba linearne algebre
82.	Strnad, Magdalena	Izbrane teme iz računalniške grafike
83.	Mahnič, Bernarda	Digitalna elektronika v luči teorije množic v OŠ
84.	Novak, Marija	Merjenje dolžin v OŠ in merilni pripomočki
85.	Žavbi, Tatjana	O načrtovalnih nalogah v OŠ
86.	Škopelja, Ljiljana	Metodična obravnava enačb v OŠ
87.	Nagode, Stanislav	Delo z nadarjenimi učenci pri pouku matematike v OŠ
88.	Špacapan, Karmen	Jessenov izrek — Potrebni in zadostni pogoj za razcepitev poliedrov
89.	Hrastovec, Blanka	Kvadratne forme in cela števila
90.	Pavlič, Alenka	Uporaba Möbiusovih formul za funkcije naravnoštevilske spremenljivke
91.	Vesel, Jolanda	Ukrivljenost in zvitost prostorskih krivulj
92.	Jernejčič-Ziernfeld, Andreja	Dopolnilni pouk matematike v 6. razredu OŠ
93.	Bauman, Majda	Obravnava likov pri pouku matematike v OŠ Oblikovanje učne enote
94.	Turk, Janez	Sklopke
95.	Jamnik, Andreja	Naloge z besedilom — geometrijska vsebina
96.	Tekavc, Nuša	Uvajanje števil pri pouku matematike v OŠ
97.	Kos, Mitja	O pouku matematike v 8. razredu OŠ in šole za slušno in govorno prizadete
98.	Velak, Rebeka	Ekvivalenčne relacije
99.	Breskvar, Barbara	Diferenčne enačbe
100.	Golob, Katarina	Vloga in pomen tehnične vzgoje v razvoju otroka (od 6.–10. leta starosti)

Fizika — tehnična vzgoja

742.	Romih-Šmid, Aleksandra	Didaktični pripomoček za zbirko lesnoobdelovalnega orodja
743.	Špes, Valentin	Opremljenost učilnic za tehnično vzgojo na primeru občine Ljubljana Moste-Polje
744.	Verderber, Anton	Les kot gradivo
745.	Možina, Mojca	Izdelava tiskanih vezij v OŠ — izdelava krmilnih napravic
746.	Novak, Jože	Plinski zakoni
747.	Ostrelič-Glavan, Miro	Čutilniki
748.	Saje, Mojca	Pridobivanje pojmov — hitrosti in pospeškov
749.	Uršič, Alenka	Preizkušanje lastnosti usnja

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika — uporabna smer

228.	Mutić, Snežana	Algebraično refleksivne transformacije
229.	Kirn, Ljubica	Geometrični problem spajanja cevi
230.	Bevk, Andreja	Indukcija na zvezno realno spremenljivko
231.	Zaletel, Mojca	Newtonova in Laguerrova metoda za reševanje algebraičnih enačb
232.	Žaren, Tatjana	Invariantni podprostori za transformacije med različnimi prostori
233.	Debeljak, Branka	Kovariantni in semiinvariantni podporstori
234.	Turk, Mateja	Gaussove kvadraturne formule
235.	Dakskobler, Branko	—
236.	Nemec, Laura	—

Fizika*

173. Legat, Andraž
174. Vidmar, Gorazd
175. Fabijan, Bojan
176. Fakin, Jasna
177. Šinkovec, Jan
178. Djukonovič, Božo
179. Cotič, Marko
180. Rek, Zlatko
181. Ukmar, Mitja
182. Rek, Zlatko
183. Zlof, Branko
184. Novak, Egon
185. Kovačevič, Simona
186. Lorenčič, Nejka
187. Godina, Magda
188. Remškar, Maja
189. Belina, Ruben
190. Lebez, Maja
191. Kogej, Peter
192. Krejan, Alenka
193. Gregorčič, Branko
194. Mekinda, Tajda
195. Röthel, Metka
196. Piraček, Bogomil
197. Lotrič, Kristina
198. Brdar, Uroš
199. Kralj, Marjeta
200. Žibert, Marko
201. Gulič-Cvajnar, Tatjana
202. Pečar, Miroslav
203. Longer, Nataša
204. Perkavec, Suzana
205. Čampa, Franci
206. Mohorič, Janja
207. Parzer, Iztok
208. Adam, Stanko
209. Medoš, Dario
210. Medoš, Nevio
211. Franko, Jurij
212. Sipej, Andrej
213. Toporiš, Zdravko
214. Leskovšek, Jan
215. Jovanovič, Peter
216. Karič, Erik
217. Rozman, Marko
218. Kidrič, Franc
219. Gomilšek, Kazimir
220. Mozetič, Miran
221. Štravs, Rok
222. Kidrič, Franc
223. Jazbec, David
224. Medvešek, Ludvik
225. Mandrino, Djordje
226. Pavlin, Rolando
227. Železnik, Nadja
228. Bajt, Saša
229. Horvat, Darja
230. Kutnjak, Zdravko
231. Lukman, Dragan
232. Mermal, Lenion
233. Marinček, Marko
234. Planinšič, Gorazd
235. Pleško, Majna
236. Poberaj, Igor
237. Rokavec, Aleš
238. Ambrožič, Milan
239. Boltin, Uroš
240. Žigon, Borut
241. Ferle, Maja
242. Križnič, Ervin
243. Omladič, Sergej
244. Lazar, Samo
245. Turk, Liljana
246. Gregorčič, Branko
247. Mekinda, Tajda
248. Velkavrh, Andrej
249. Vranac, Duško
250. Pevec, Irena
251. Uršič, Marko
252. Ašič, Loti
253. Pahor, David
254. Vidic, Breda
255. Kopač, Samo
256. Jamnik, Andrej
257. Avsec, Sašo
258. Škoda, Boris
259. Vrankar, Alojzij
260. Ahtik, Uroš
261. Trobec, Franc
262. Rokavec, Aleš
263. Mermal, Simon
264. Mitrović, Goran
265. Kukman, Jože
266. Sušnik, Peter
267. Kovačević, Željko
268. Borštnik, Aleš
269. Markočič, Lucijan
270. Tomažič, Majda
271. Gyergyek, Tomaž
272. Pristovšek, Primož
273. Kozole, Alojz
274. Olenik, Mauricio
275. Sepe, Ana
276. Vranac, Duško
277. Potočnik, Marjan
278. Salej, Andrej
279. Pristov, Neža
280. Vrankar, Alojzij
281. Bregar, Janez
282. Pučnik, Albin
283. Lebar, Andrej
284. Fegeš, Miha
285. Pavlin, Rolando
286. Bobič, Martin
287. Smole, Dušan
288. Slokar, Marko
289. Apollonio, Tomislav
290. Gerjevič, Marjeta
291. Koporc, Andrej
292. Povšin, Jože

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

458. Rozman, Franci	Posplošeni kot in skalarni produkt v normiranih linearnih prostorih
459. Hrovatič, Tatjana	Kritične točke in sigmoidnost pozitivnih racionalnih funkcij

* V tej skupini objavljamo imena tistih študentov fizike, ki so izpolnili pogoje in tudi zaprosili za podelitev diplome od leta 1986 dalje. Imena še niso bila objavljena.

Matematika — uporabna smer

397.	Hočevar, Mirjam	Teorija dimenzij separabilnih metričnih prostorov
398.	Keržič, Damijana	Različnosti med nizi
399.	Kaufman, Matjaž	Hénonov atraktor
400.	Peternel, Miha	Vrtenje asimetrične gredi
401.	Rihtaršič-Gnamuš, Sonja	Cliffordova algebra
402.	Ude, Aleš	Reševanje nedoločenih sistemov nelinearnih enačb
403.	Zwittnig, Benjamin	Norme na končno dimenzionalnih vektorskih prostorih
404.	Debenjak, Primož	Gnezda in zgornje-trikotne predstavitve kompaktnih operatorjev
405.	Gojkovič, Pavel	Metode Runge-Kutta
406.	Japelj, Barbara	Grafovski postopki razmeščanja prostorov
407.	Dolničar, Danica	Risanje grafov
408.	Zgrablič, Boris	Spekter Rosenblumevega operatorja
409.	Medved, Darko	Sprotni algoritmi barvanja grafov
410.	Repar, Miroslav	Koherentne konfiguracije in enostavno primitivne grupe
411.	Aleš, Janez	Hamiltonovi cikli v kubičnih grafih
412.	Korošec, Valentina	Povsod neničelni pretoki

Matematika — teoretična smer

23.	Škarabot, Jure	Moduli integralskih operatorjev
24.	Mrčun, Janez	Seskvilinearne forme in operatorji na Hilbertovem prostoru
25.	Drnovšek, Roman	Operatorske neenakosti
26.	Bernik, Janez	Meje perturbacij normalnih matrik

Mehanika

1.	Malečič, Vlado	Modeli poglabljanja termokline (1989)
2.	Lipej, Andrej	Osnosimetrični turbulentni tok v turbinskih strojih

Fizika — pedagoška smer

117.	Tomažič, Majda	Simulacija evolucije nekonservativnih dinamičnih sistemov
118.	Kokol, Miran	Optimalna samoorganizacija adaptivnih sistemov
119.	Zidar, Peter	—
120.	Merljak, Mirijam	Piezoelektričnost pri šolskih poskusih
121.	Bezjak, Janez	Fizikalne osnove tiristorskega regulatorja in mikrovalovne pečice
122.	Ul, Jasna	Sipanje svetlobe na majhnih delcih
123.	Gabrovec, Peter	Prikaz zakonov magnetnega polja pri pouku fizike

Fizika — tehniška smer

503.	Kukman, Jože	Erbijev stekleni laser
504.	Cvetko, Dean	Hiper Rayleighovo sipanje
505.	Resman, Aleksander	Študij $Rb(H_{1-x}D_x)_2PO_4$ z dvojno resonanco ^1H–^{17}O
506.	Pučnik, Albin	Električne lastnosti NiCr in NiCr-SiO tankih plasti v odvisnosti od toplotne obdelave
507.	Korpar, Samo	Detekcija fotonov sevanja Čerenkova s proporcionalnim plinskim števcem
508.	Švab, Alenka	Dvoosna ureditev v tanki plasti tekočega kristala
509.	Lebar, Andrej	Razvoj enorodovnega optičnega vlakna z ničlo disperzije pri $\lambda = 1550$ nm

510. Arnšek, Aleš	Cavendisheva tehtnica — meja občutljivosti
511. Podobnik, Tomaž	Kotne porazdelitve pri reakciji $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^-$
512. Vodenik, Branko	Določitev parametrov potovalne komore
513. Žitnik, Matjaž	Primerjava nekaterih modelskih in eksperimentalnih atomskih parametrov
514. Kovač, Matej	Napake magnetnega odklonskega sistema pri katodni elektronki
515. Jagličič, Zvonko	Gradiometer za meritve magnetoencefalografskih signalov
516. Drobnič, Matija	Merjenje toka atomarnega vodika
517. Kovač, Janez	Merjenje kvadrupolnih spin-mrežnih relaksacijskih časov ^{14}N z dvojno resonanco

Meteorologija

51. Poredoš, Aleš	Objektivna analiza polja temperature s pomočjo optimalne interpolacije

3. stopnja

Matematika

51. Zalar, Borut	H^*-algebre
52. Simonič, Aleksander	Grupe operatorjev s pozitivnim spektrom
53. Sever, Vital	Wardropova ravnotežja v transportnih sistemih

Fizika — tehniška smer

97. Bratina, Gvido	Karakterizacija polprevodnikov z metodo inducirane prevodnosti v rastrskem elektronskem mikroskopu
98. Čepič, Mojca	Mikroskopski model faznega prehoda iz smektične A v smektično C fazo pri polimernih tekočih kristalih
99. Ovsenik-Jeglič, Tadeja	Rayleighovo sipanje na orientacijskih fluktuacijah v nematskih liotropnih tekočih kristalih
100. Jazbinšek, Vojko	Modeliranje tokovnih izvorov v biomagnetizmu
101. Križnič, Ervin	Prototip števca za merjenje časa preleta pri ARGUSu
102. Iglič, Aleš	Študij električnih lastnosti membrane eritrocita s fluorescenčnim označevalcem 1-anilino-8-naftalen sulfonatom
103. Muševič, Igor	Fazni diagram feroelektričnega tekočega kristala DOBAMBC v zunanjem magnetnem polju
104. Planinšič, Gorazd	Venčni resonator kot sprejemna tuljava signala v poizkusih z magnetno resonanco
105. Kutnjak-Urbanc, Brigita	Spontana polarizacija v feroelektričnih tekočih kristalih
106. Remškar, Maja	Elektronsko-mikroskopske raziskave tankih plasti Ag-Sn
107. Mandrino, Djordje	Rast tankih plasti Au, Ag in In na SnTe in PbTe
108. Poberaj, Igor	Meritev difuzije kisika v $YBa_2Cu_3O_{7-y}$ s pomočjo časovno razločene ramanske spekroskopije

Meteorologija

4. Šegula-Ilič, Andrej	Model ozelenitve nekaterih drevesnih vrst v Sloveniji glede na parametre okolja

Doktorske disertacije

Matematika

37.	Klavžar, Sandi	Grafovski retrakti
38.	Bogataj, Ludvik	Teorija senzitivnosti linearnih kvadratičnih sistemov v stanju in z zakasnjenim upravljanjem
39.	Dobovišek, Mirko	Operatorska Riccatijeva enačba
40.	Brešar, Matej	Odvajanja, homomorfizmi in sorodne preslikave na kolobarjih in Banachovih algebrah

Fizika

117.	Šušteršič, Luka	Transportna enačba za valovne pojave
118.	Bonča, Janez	Točna diagonalizacija sistema močno koreliranih elektronov
119.	Boštjančič, Bojan	Produkcija štirih pionov v dvofotonskih reakcijah
120.	Ramšak, Anton	Dinamika vrzeli v oksidnih superprevodnikih

---

L'ELABORATORE NELLA DIDATTICA DELLA FISICA, 170 str., cena 10 000 lir.*

La Fisica nella Scuola (Fizika v šoli) je trimesečnik Italijanskega združenja za poučevanje fizike (A.I.F.). Posebna številka 23. letnika revije (april-junij 1990), posvečena *Računalniku v poučevanju fizike*, utegne zanimati tudi bralce Obzornika.

V njej so članki razdeljeni na razdelke: didaktična raziskovanja, simulacija, modeliranje, pomagalo pri poskusih, ocenjevanje programske opreme, državni načrt za informatiko, zgledi za uporabo v šoli, obstoječa programska oprema, podatki iz drugih držav. V zadnjem razdelku so mišljene Nizozemska, Nemčija in Francija. Večino člankov so napisali italijanski avtorji, a nekatere so nalašč za to številko prispevali tuji strokovnjaki: George Marx (Madžarska) in Jon Ogborn (Anglija) o modeliranju, Joseph Depireux (Belgija) o računalniku kot o merilniku v laboratoriju in R. K. Thornton (ZDA) o laboratorijskih vajah z računalnikom (MBL). Vse članke uvaja angleški povzetek.

Državni načrt za informatiko je pripravilo italijansko ministrstvo za izobraževanje z namenom, da bi uvedli računalništvo v srednje šole. Začeli so ga izvajati na koncu leta 1985. Doslej je več kot štiri petine učiteljev ustreznih predmetov sodelovalo na tečajih, na katerih so si pridobili osnovno znanje za uvajanje te dejavnosti.

Številka naj bi učiteljem dala ne samo splošen pregled obstoječih možnosti, ampak tudi zamisli in konkretne napotke, kako naj izkoristijo računalnik na najboljši mogoči način. Obdelani zgledi so skoraj vedno povezani z delom v laboratoriju, ne samo pri neposrednem zajemanju podatkov (on-line), tudi pri uporabi računalnika pri simulacijah in modeliranju fizikalnih pojavov. Taka je nasploh didaktična strategija A.I.F.

Silvia Pugliese Jona

---

* To in druge izdaje A.I.F. je mogoče naročiti na naslovu: Dr. Marisa Michelini, Dipartamento di Fisica, via Campi 213/A, 41100 Modena, Italija. Zapis je prevedel in priredil Janez Strnad.

VUJNOVIĆ V., Astronomija 1, Osnove astronomije i planetski sustav, Školska knjiga, Zagreb 1989, 262 str.

Dr. Vladis Vujnović je hrvatski astronom, ki mu je astronomija ne samo poklic, ampak tudi konjiček. Je sodelavec observatorija na Hvaru in predava astronomijo in astrofiziko v Zagrebu in v Splitu. Že več let se ukvarja z vprašanji poučevanja astronomije in to svoje delo je strnil v učbenikih *Astronomija* 1 in 2. Knjiga je po svojem sestavu in nivoju pojasnjevanja namenjena resnemu ljubitelju astronomije s solidno srednješolsko izobrazbo podobno, kot je bila Kuščerjeva in Moljkova Fizika namenjena ljubiteljem fizike, preden je postala srednješolski učbenik. Tudi Vujnovićeva *Astronomija* upravičeno ne skriva podobnih ambicij.

Prvi del Osnove astronomije i planetski sustav obsega osem poglavij z naslovi: Astrognozija — spoznavanje objektov na nebu, Razvoj spoznanj o položaju Zemlje v vesolju, Gibanje Zemlje in pojavi na nebesni krogli, Fizika gravitacije in nebesna mehanika, Mesec, Zemljina skupina planetov, Mala telesa v Osončju, Jupitrova skupina planetov in planetna kozmogonija.

V prvem poglavju se seznanimo z orientacijo na nebu z navideznim gibanjem Sonca in planetov, z osnovnimi karakteristikami astronomskih daljnogledov, nato pa nas avtor popelje med zvezde in nas opozori na za oko zanimive objekte, tako da se lahko orientiramo po nebu. Na koncu pa se seznanimo še z načini opazovanja planetov.

Drugo poglavje Razvoj spoznanj o položaju Zemlje v vesolju daje kratek zgodovinski pregled idej o gibanju Zemlje in planetov, o njihovih oblikah in velikostih, o gibanju Sonca med zvezdami, o velikosti zvezd — vse do dinamike Galaksije.

Dragocenost tega poglavja je v tem, da se avtor ne omeji zgolj na navajanje zgodovinskih podatkov, ampak nas postavi v tedanje obdobje in izpelje argumente od začetka do konca vključno z numeričnimi podatki, ki jih primerja z današnjimi vrednostmi.

V poglavju Gibanje Zemlje in pojavi na nebesni krogli se seznanimo s sfernimi koordinatnimi sistemi in sistemi časa, ki se uporabljajo tako v astronomiji kot v vsakdanjem življenju. Tudi to poglavje je opremljeno s konkretnimi podatki in skrbno izdelanimi slikami.

Četrto poglavje seveda začne s Keplerjevimi zakoni in jih na koncu utemelji z Newtonovim gravitacijskim zakonom. Newtonov gravitacijski zakon potem uporabi za računanje orbit umetnih satelitov. S pomočjo gravitacijskega zakona se avtor loti računanja raznih ubežnih hitrosti in obravnava gibanje umetnih satelitov. Pri tem si pomaga s pojmom potencialne energije, ki pa ni izpeljan direktno iz gravitacijskega zakona. Pojem vrtilne količine dvojnega sistema je vsaj v začetnih poglavjih izpuščen, zato se bo zahtevnejši bralec zaman spraševal, na kakšen način je treba pospeševati umetni satelit, da doseže zaželeno orbito in zakaj so nekatere orbite bolj sploščene od drugih.

V podpoglavju Dinamika dvojnega sistema se avtor odpove aproksimaciji velikega razmerja mas v sistemu in vpelje gibanje okrog težišča. Dotakne se tudi problema treh teles, za katerega sicer ne poznamo splošne rešitve,

opiše pa nekatere posebne primere gibanja okrog Lagrangeovih točk in pojasni pojem Rocheove ploskve. V naslednjem poglavju je ob teh razmišljanjih pokazano, kako je mogoče iz opazovanj dvojnega sistema določiti masi zvezd tega sistema. Metoda je ilustrirana z nekaj konkretnimi primeri. Poglavje o gravitaciji je zaključeno z izbranimi problemi fizike gravitacije. Izpeljana je krajevna odvisnost sile v notranjosti masne porazdelitve. Rezultat avtor uporabi za računanje poteka tlaka v notranjosti zvezde. Govor je tudi o plimski sili in Rocheovi limiti, opisan je mehanizem precesije in izpeljane so posledice plimskega trenja pri spreminjanju orbite Zemlja-Luna.

Naslednje poglavje je posvečeno Luni. Najprej je govor o njenih fazah, nato so podani njeni osnovni fizikalni podatki in opisane ekspedicije s človeško posadko in avtomatske sonde, ki so raziskovale Luno. V naslednjem razdelku je lepo podan Mesečev relief, vzroki za njegove razpoznavne strukture in starost teh struktur. Poglavje Gibanje Meseca in mrki se ukvarja z mnogimi detajli Lunine orbite in nas pouči o tem, kako pride do Luninih in Sončevih mrkov.

Šesto poglavje govori o notranjih planetih, med katere spadajo Merkur, Venera, Zemlja in Mars. Začne s kinematiko, ki jo moramo poznati, ko opazujemo planete, nato govori o merjenju oddaljenosti planetov, kar je najpomembnejši korak za določanje astronomske enote. Nato pa se dotakne fizikalnih lastnosti atmosfer. Po splošnem uvodu avtor spregovori o vsakem planetu posebej; sledijo si osnovni podatki, zgodovina raziskovanja, lastnosti gibanja in fizikalne lastnosti.

Sedmo poglavje je posvečeno malim telesom Osončja. Spoznamo načine opazovanja in odkritelje asteroidov (planetoidov), pravilnosti v njihovih legah (resonance z Jupitrom), posebej je govor o Trojancih v Lagrangeovi točki Sonca in Jupitra, ki imajo zato enako orbitalno periodo kot Jupiter. Sledijo osnovni podatki o meteoritih, njihova klasifikacija, načini določanja starosti itd. Govor je tudi o kometih, njihovem sestavu, repu.

Naslednji razdelek, ki se ukvarja z meteorji in meteorskimi roji, bo posebej zanimiv za amaterje, ki poleti radi opazujejo utrinke. Izvemo pa tudi, kako hitri so meteorji, zakaj so tako hitri in iz česa so sestavljeni.

Osmo in zadnje poglavje tega dela je posvečeno zunanjim planetom in teorijam o nastanku Osončja. Razprava o Jupitru in Saturnu že vsebuje zadnje podatke, ki so jih dobili s pomočjo sond Voyager, ki sta se tema planetoma približali. Seveda je precej govora o zanimivih lunah teh planetov pa o znanem Saturnovem in na novo odkritem Jupitrovem obroču. O Uranu in Neptunu takrat, ko je bila pisana ta knjiga, še ni bilo podrobnejših podatkov z Voyagerja, zato avtor o njima govori razmeroma kratko. Kozmogoniji je posvečen zadnji razdelek tega poglavja. Za zdaj še nimamo dobre predstave, kako naj bi nastali planeti, zato je tu govora predvsem o dejstvih, ki bi jih mogla taka teorija pojasniti, in o poskusih, da bi tako teorijo zgradili.

Vujnovićeva *Astronomija* je vsekakor skrbno pisano delo, ki povede bralca v način razmišljanja astronomov. Ta se nekoliko razlikuje od fizikalnega zato, ker astronom nima možnosti spreminjati okoliščin poskusa, ampak mora potrpežljivo čakati, da bo opazil tisto, kar mu narava kaže. Posebej dragocene so dobro postavljene naloge, posejane med tekstom. Z velikim

zanimanjem pričakujemo drugi del avtorjeve knjige, ki se po napovedih ukvarja z zvezdami in galaksijami. Vujnovićeva *Astronomija* je uvod v astronomijo, ki ga bodo amaterji gotovo z veseljem prebirali, upati pa je, da bo prepričala tudi šolnike, da je to predmet, ki po svoji globini in zanimivosti spada vsaj v naravoslovne srednje šole.

Andrej Čadež

VIDAV I., Eliptične krivulje in eliptične funkcije, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1991, 176 str. (Matematika–Fizika ; 32)

Pričujoče delo je znanstvena monografija s področja teorije algebraičnih in eliptičnih krivulj ter eliptičnih funkcij. To je klasično področje matematike na stičišču algebraične geometrije, teorije Riemannovih ploskev, kompleksne analize in teorije števil. Kljub svoji klasičnosti je teorija eliptičnih krivulj aktualno in raziskovalno živahno področje, predvsem zaradi nekaterih nerešenih problemov in zaradi zanimivih povezav s teorijo števil in s teorijo kodiranja.

Avtor nas v knjigi na zelo dostopen in prijeten način seznani z najpomembnejšimi rezultati teorije eliptičnih krivulj, tako s klasičnimi kot tudi z nekaterimi novejšimi. Branje knjige je odličen uvod v bolj poglobljen študij tega področja.

Preglejmo na kratko vsebino knjige.

V prvem poglavju nas avtor seznani z osnovnimi pojmi o splošnih algebraičnih krivuljah v dvodimenzionalnem prostoru. To so krivulje, definirane z enačbo $P(x,y) = 0$, kjer je P polinom dveh spremenljivk. Enačbo lahko študiramo v različnih številskih obsegih, najlepše in najbolj popolne rezultate pa dobimo takrat, ko sta x in y kompleksni spremenljivki, enačbo pa obravnavamo v dvodimenzionalnem kompleksnem projektivnem prostoru. Spoznamo pojem tangente na krivuljo, pojem regularne in singularne točke, racionalne točke, rod krivulje, racionalne transformacije krivulj idr. Omenjena je tudi slovita Mordellova domneva o številu racionalnih točk na krivuljah roda $g \geq 2$, ki jo je l. 1983 dokazal nemški matematik G. Faltings.

Drugo poglavje je posvečeno eliptičnim krivuljam, to so algebraične krivulje roda ena. Topološko so vse take krivulje izomorfne torusu. Vsaka eliptična krivulja je racionalno ekvivalentna eni od kubičnih krivulj z enačbo $y^2 = x^3 - Ax - B$ (Weierstrassova normalna enačba), tip krivulje pa določa njena invarianta

$$J = \frac{4A^3}{4A^3 - 27B^2}$$

Na eliptični krivulji lahko vpeljemo strukturo Abelove grupe. Če ima krivulja vsaj eno racionalno točko, je ekvivalentna krivulji s celima parametroma A in B. Brez dokaza avtor obravnava Mordellov izrek o končni generiranosti grupe racionalnih točk na krivulji. V drugem delu poglavja pa govori o primerih uporabe teorije eliptičnih krivulj v teoriji števil.

Tretje poglavje vsebuje nekatere osnove teorije holomorfnih (analitičnih) funkcij: eksponentno funkcijo, konformne upodobitve, integrale kompleksnih

funkcij, Cauchyevo formulo, meromorfne funkcije, residuum funkcije, eliptične integrale. Snov tega poglavja je precej standardna in jo lahko najdemo v mnogih učbenikih. Kljub temu je vključitev te snovi zelo smiselna, saj je knjiga na ta način bolj zaključena celota.

Četrto poglavje obravnava eliptične funkcije. Vsako eliptično krivuljo lahko predstavimo s torusom, ki ga dobimo kot kvocientni prostor kompleksne ravnine glede na periodno mrežo točk. Vsaka meromorfna funkcija v kompleksni ravnini, ki je dvojno-periodična glede na dano periodno mrežo, predstavlja funkcijo na torusu, torej na eliptični krivulji. Take funkcije imenujemo eliptične funkcije. Lahko jih pojmujemo tudi kot holomorfne preslikave dane eliptične krivulje v Riemannovo sfero. Najpreprostejša eliptična funkcija je Weierstrassova funkcija p, ki jo avtor eksplicitno konstruira v obliki Laurentove vrste. Ta funkcija zadošča določeni diferencialni enačbi oblike

$$p'(z)^2 = 4p(z)^3 - g_2 p(z) - g_3\,,$$

kjer sta kompleksni števili g_2 in g_3 invarianti funkcije $p(z)$. Obratno lahko priredimo Weierstrassovi funkciji p eliptično krivuljo. V zadnjem razdelku je razložena povezava med eliptičnimi funkcijami in eliptičnimi integrali. Osnovni eliptični integral je ravno inverz Weierstrassove funkcije p.

V petem poglavju nam avtor najprej predstavi rešitev obratne naloge: Za vsak par kompleksnih števi A in B je treba poiskati Weierstrassovo funkcijo $p(z)$ z danima invariantama $g_2 = A$ in $g_3 = B$. Pri rešitvi te naloge se seznanimo z lastnostmi modulskih funkcij, predvsem z absolutno invarianto $J(\tau)$ eliptične krivulje. Z uporabo modulskih transformacij avtor poišče tako imenovano osnovno območje v kompleksni ravnini z lastnostjo, da je vsaka eliptična krivulja do izomorfizma natančno določena s točko s tega območja. V nadaljevanju poglavja avtor obravnava povezavo med modulskimi funkcijami in med Poincaréjevim modelom neevklidske ravninske geometrije. Na koncu knjige najdemo dodatek o Eulerjevem polinomu.

Knjiga je napisana zelo razumljivo in je dostopna širokemu krogu bralcev z osnovno matematično izobrazbo. Potrebno je poznavanje osnov algebre in diferencialnega računa, druga sredstva iz kompleksne analize pa avtor vpelje v knjigi, zahtevnejša med njimi sicer brez dokazov. Novi pojmi so vpeljani zelo naravno in so motivirani s prejšnjim razvojem teorije.

Tako kot prejšnja dela profesorja Vidava se knjiga odlikuje z jasnostjo in intuitivnostjo podajanja snovi, da je branje pravi užitek. Teorijo spremljajo številni konkretni in nazorni primeri, ki odlično ilustrirajo vpeljane pojme in dobljene rezultate. Nekateri težji rezultati so navedeni brez dokazov, predvsem kadar bi le-ta presegal elementarno raven; te dokaze lahko bralec najde v citirani literaturi.

V slovenski matematični literaturi je to prvo delo s področja teorije algebraičnih in eliptičnih krivulj. Knjiga bo zelo dobrodošla kot dopolnitev obstoječe literature za dodiplomski in podiplomski študij matematike, za seminarje na dodiplomskem študiju in za individualni študij.

Franc Forstnerič