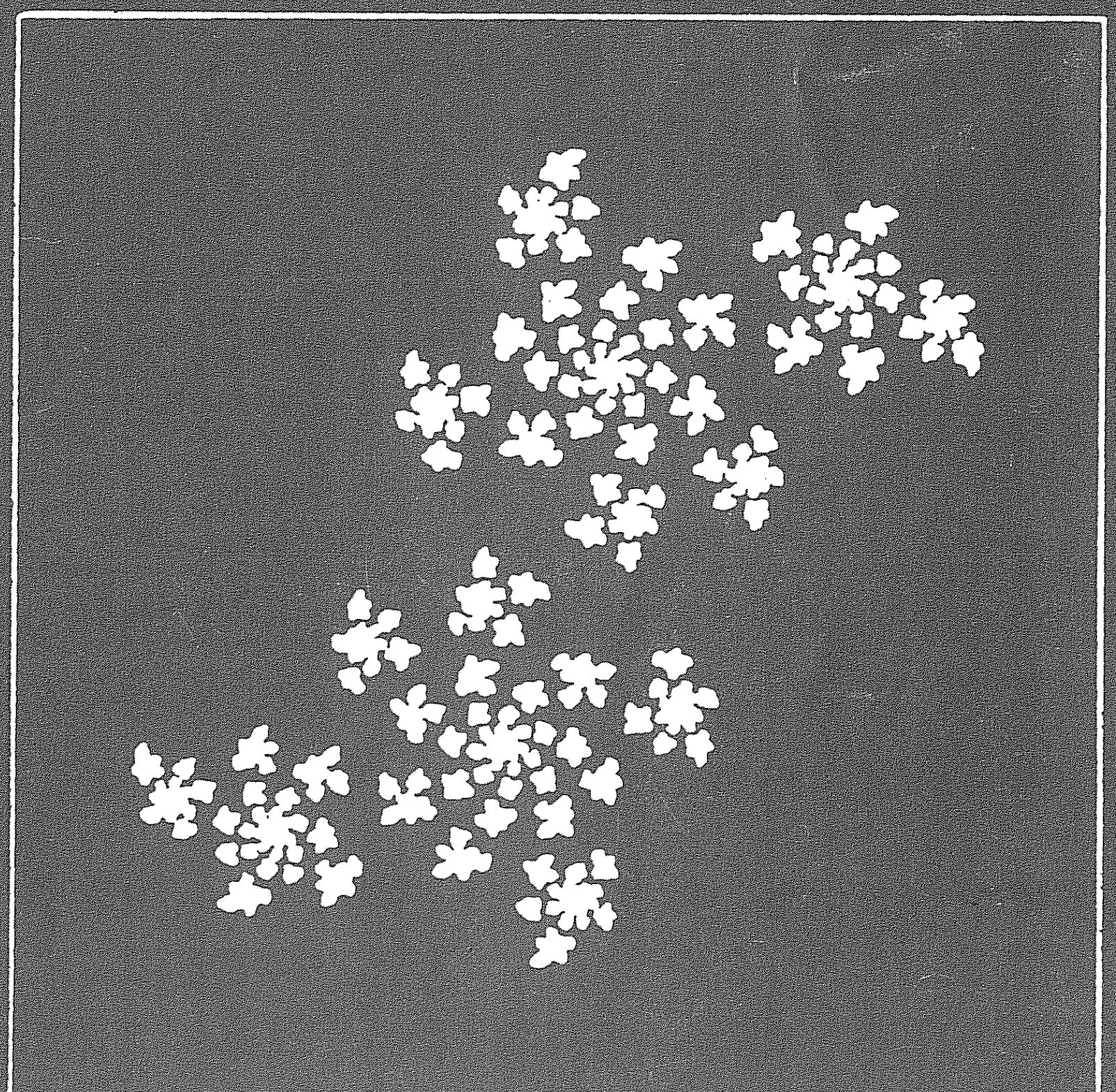
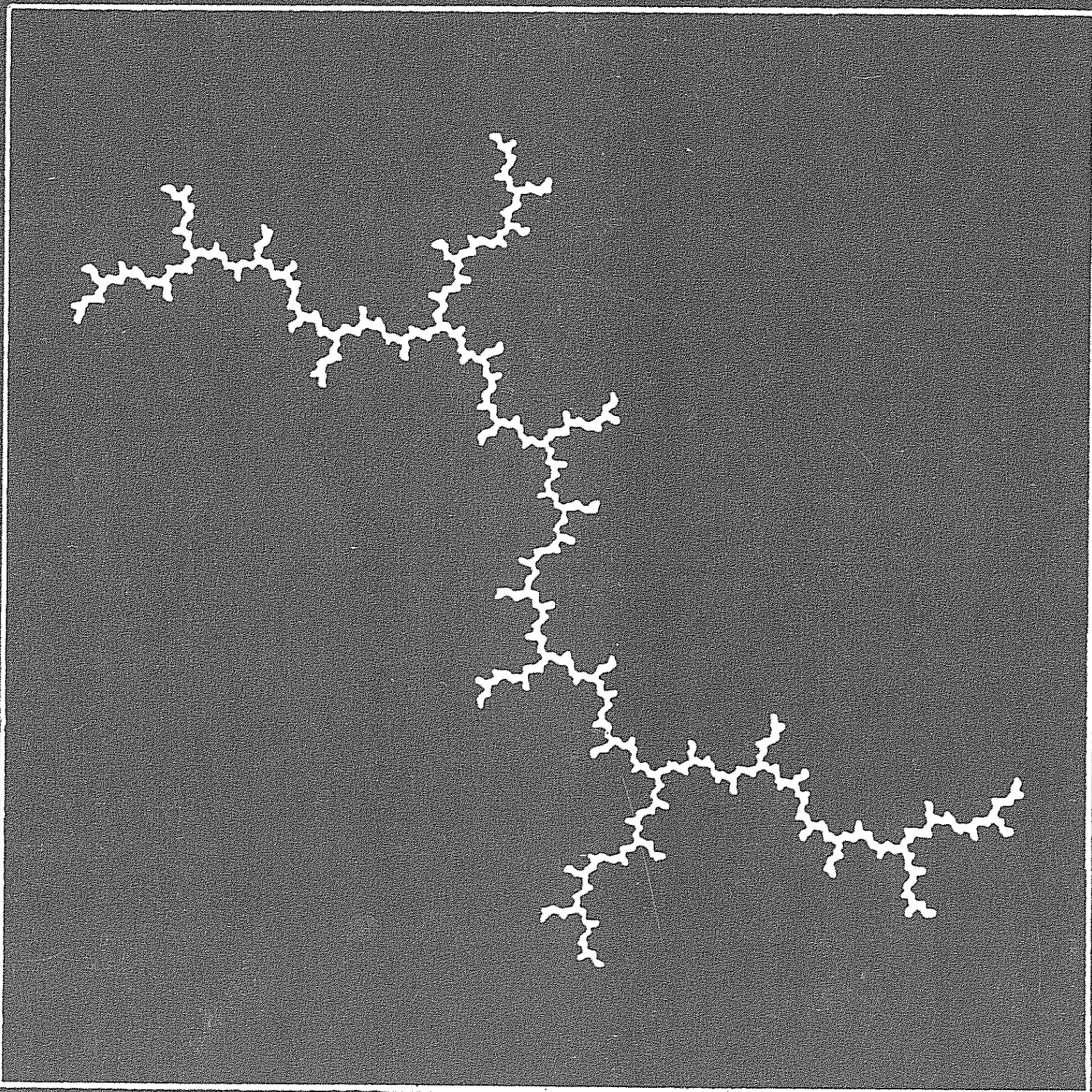


1991

Letnik 38

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1991

letnik 38, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško stavil Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 200.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 300.– din, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 40.– din, dvojna številka 80.– din, stare številke 20.– din.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški komite za raziskovalno dejavnost in tehnologijo ter Republiški komite za vzgojo, izobraževanje in telesno kulturo.

© 1991 DMFA Slovenije – 1066

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

- Iteracija kvadratne funkcije v kompleksnem — Iteration of complex quadratic function (Peter Petek in Andrej Vitek) 65–70
- Kvantni Zenonov pojav — Quantum Zeno's effect (Janez Strnad) 71–79

Vesti — News

- Raziskovalne naloge Oddelka za matematiko IMFM v letu 1990 (Milan Hladnik) 80–84
- Obvestilo članom društva 84
23. mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM 90 (Miran Černe) 85–89
- Umrla je profesorica Helena Velikonja (Darjo Felda) 89
- Poskusni zaključni izpit na naravoslovnih šolah (Zvonko Perat) 90–93
- Prešernove nagrade študentom matematike in fizike za leto 1990 (Zbral Ciril Velkovrh) 94
- Novi člani društva v letu 1990 (Zbral Ciril Velkovrh) 94
- Nove knjige — New books (Janez Strnad, Matija Lokar, Slobodan Žumer, Milan Hladnik, Dušan Repovš) 79, 95, 96, III, IV

Na ovitku: Še dve sliki Juliajevih množic (glej članek na str. 65): Nepovezana Juliajeva množica za vrednost parametra izven Mandelbrotove množice (levo) in Juliajeva množica v obliki dendrita za vrednost parametra $c = i$.

ITERACIJA KVADRATNE FUNKCIJE V KOMPLEKSNEM

PETER PETEK IN ANDREJ VITEK (slike)

Math. Subj. Class. (1991) 58F08, 58F13

Članek je nadaljevanje članka *Iteracija kvadratnih funkcij* [1]. Iteracijo kvadratne funkcije v kompleksnem lahko klasificiramo z enim kompleksnim parametrom. Obnašanje ustreznega zaporedja je odvisno od lege tega parametra glede na Mandelbrotovo množico.

ITERATION OF COMPLEX QUADRATIC FUNCTIONS

The paper is a continuation of the article *Iteration of quadratic functions* [1]. The iteration of a complex quadratic function can be classified with one complex parameter. The behaviour of the discrete dynamical system depends on the position of this parameter relative to the Mandelbrot set.

Za začetek si zastavimo zelo enostavno vprašanje. Opazujmo rekurzivno dano zaporedje

$$z_{n+1} = z_n^2 - 0.56, \quad (1)$$

ki je seveda še odvisno od začetnega člena z_0 . Pri kakšni izbiri začetnega člena zaporedje konvergira? Če je začetni člen realen, so realni vsi nadaljnji členi, in ni težko ugotoviti, da nastopijo tri možnosti:

- (1) če je $|z_0| > 1.4$, zaporedje hitro narašča proti ∞ ;
- (2) če je $|z_0| < 1.4$, konvergira zaporedje k limiti $a = -0.4$;
- (3) če je $z_0 = \pm 1.4$, so vsi nadaljnji členi enaki 1.4.

Pričakujemo seveda, da dobimo podobno pregleden rezultat tudi v primeru poljubnega kompleksnega začetnega člena. Vendar ni tako. Da se dokazati naslednje: če leži začetni člen znotraj temnega območja na sliki 2.d, konvergira zaporedje proti -0.4 .

Poglejmo, kaj lahko povemo o iteraciji kvadratne funkcije v kompleksnem.

Naj bo $f(z) = az^2 + bz + c$, kjer so a, b, c kompleksna števila, $a \neq 0$; torej poljubna kvadratna funkcija v kompleksnem. Ustrezno zaporedje ima rekurzivni predpis

$$z_{n+1} = f(z_n) = az_n^2 + bz_n + c.$$

Število parametrov lahko z linearno substitucijo $z_n = \alpha u_n + \beta$ zreduciramo tako, da linearni člen odpade, vodilni koeficient pa je enak 1. Na ta način pridemo do Mandelbrotove parametrizacije [2]

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \quad (2)$$

Dinamični sistem (2) ima dve negibni točki

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

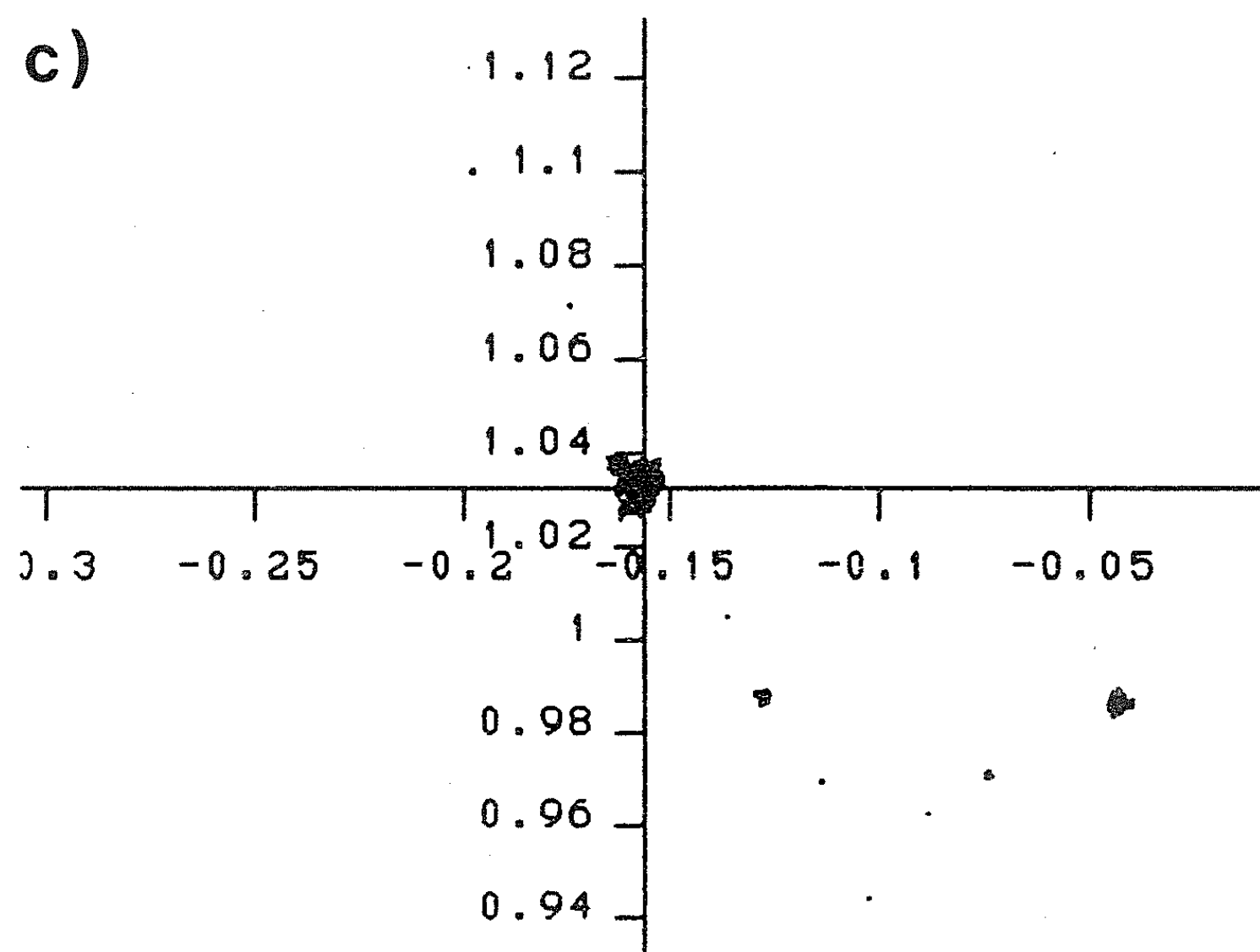
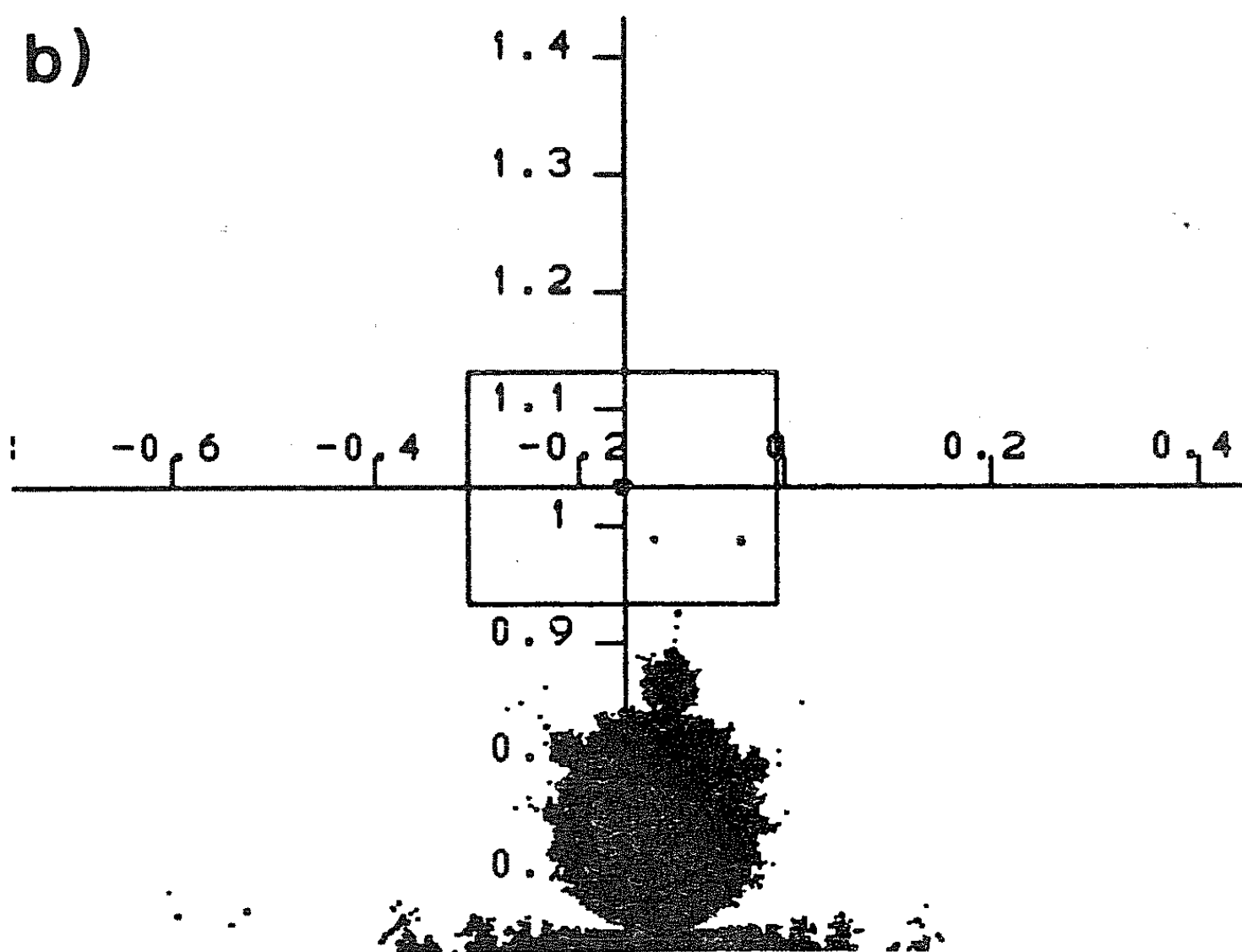
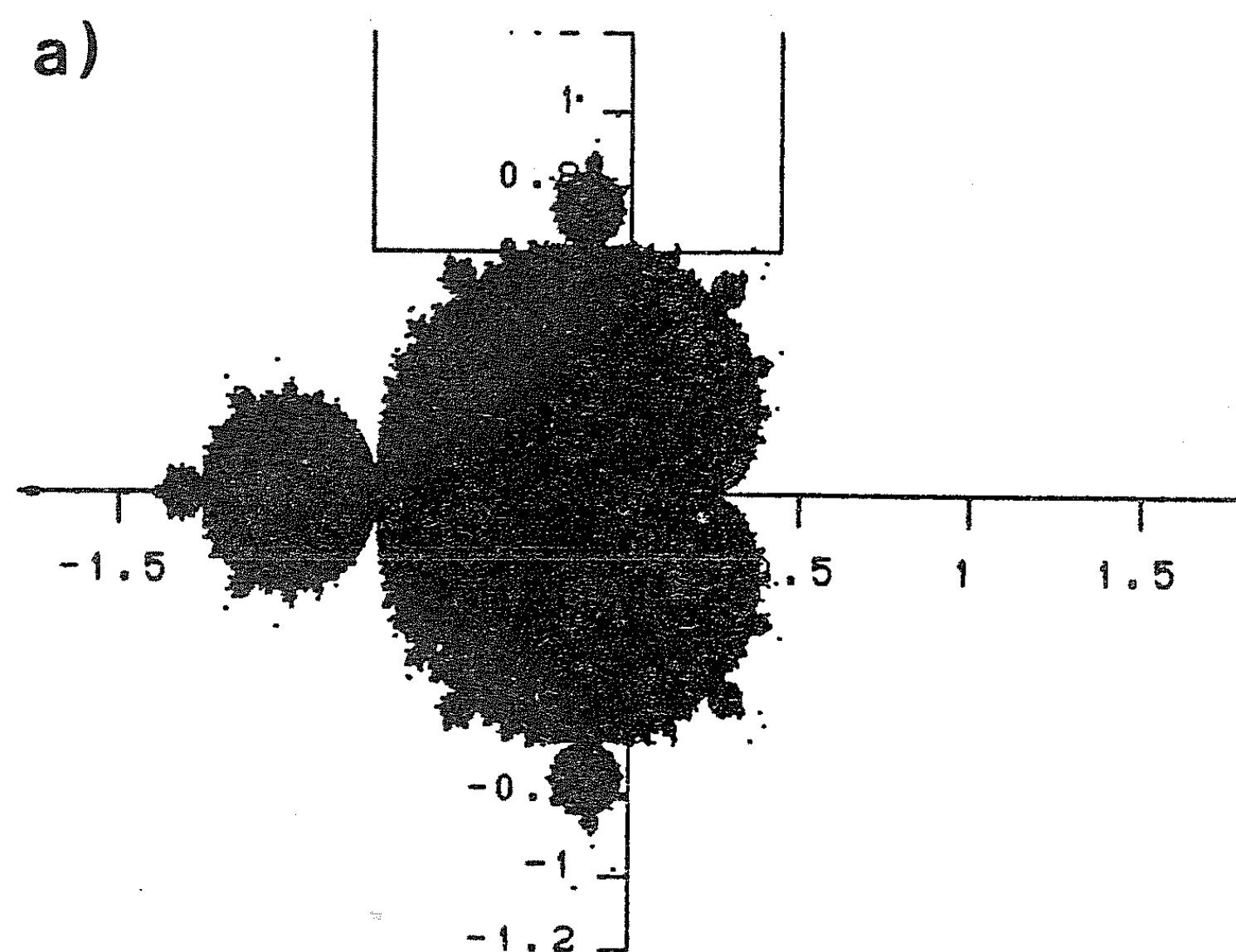
Kdaj dobimo privlačno negibno točko? Negibna točka je privlačna, če je odvod funkcije f v tej točki absolutno pod 1. Ker je $f'(z) = 2z$, je po zgornji formuli vsota odvodov v obeh negibnih točkah enaka 2; zato je po trikotniški neenakosti kvečjemu eden od njiju absolutno pod 1. Torej privlačnih točk ni ali pa je ena sama. Privlačno točko imamo, če je parameter c oblike

$$c = \frac{\lambda(2 - \lambda)}{4}, \quad |\lambda| < 1. \quad (3)$$

Množica točk, ki ustrezajo temu pogoju, leži v notranjosti kardioide na sliki 1.a.

Pa recimo, da je c iz te množice. Lokalni pogoj za konvergenco poznamo: če je z_0 v dovolj majhni okolici privlačne negibne točke, zaporedje konvergira k njej.

Slika 1 a, b, c. Mandelbrotova množica in dve povečavi detajlov.



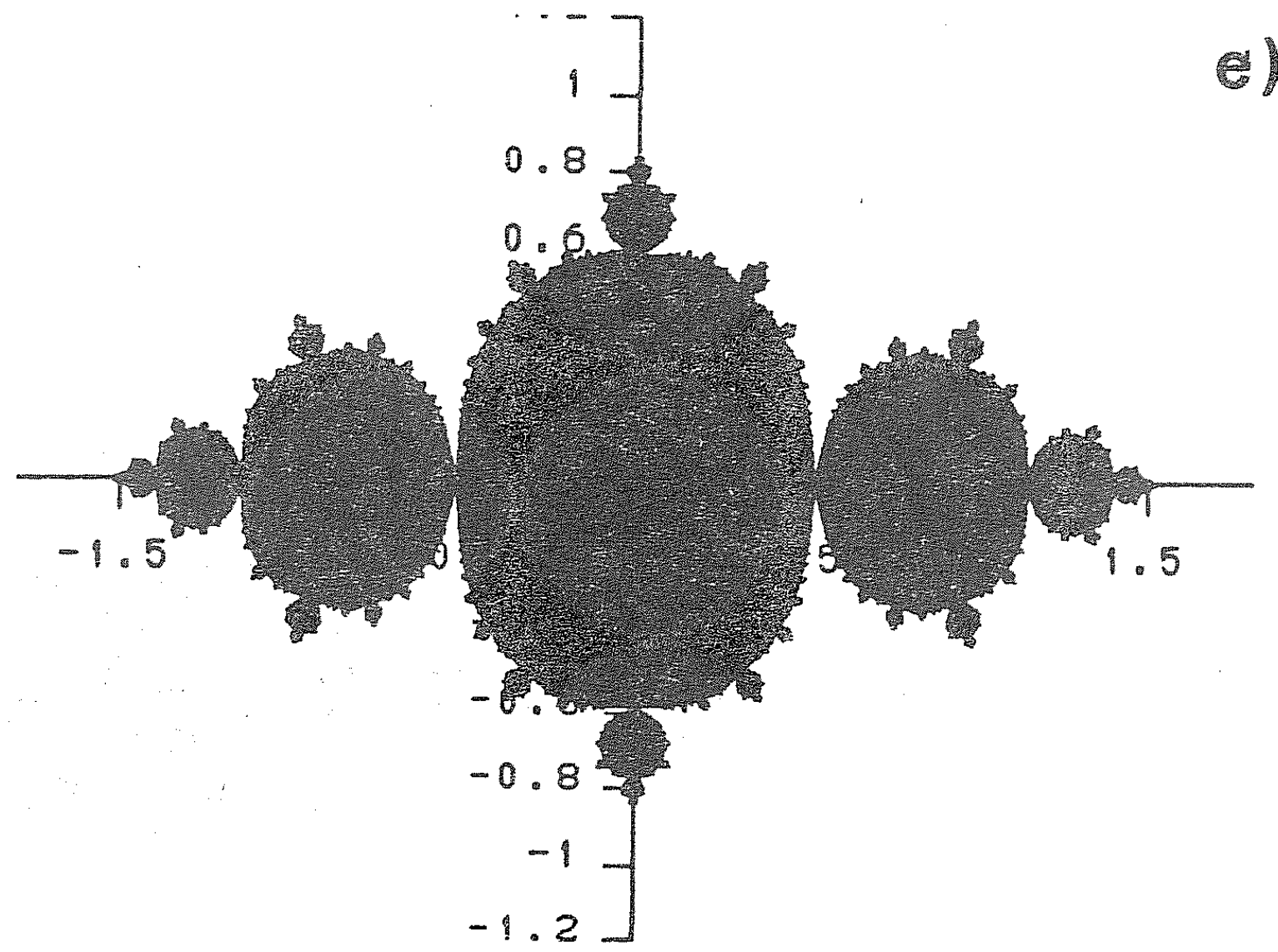
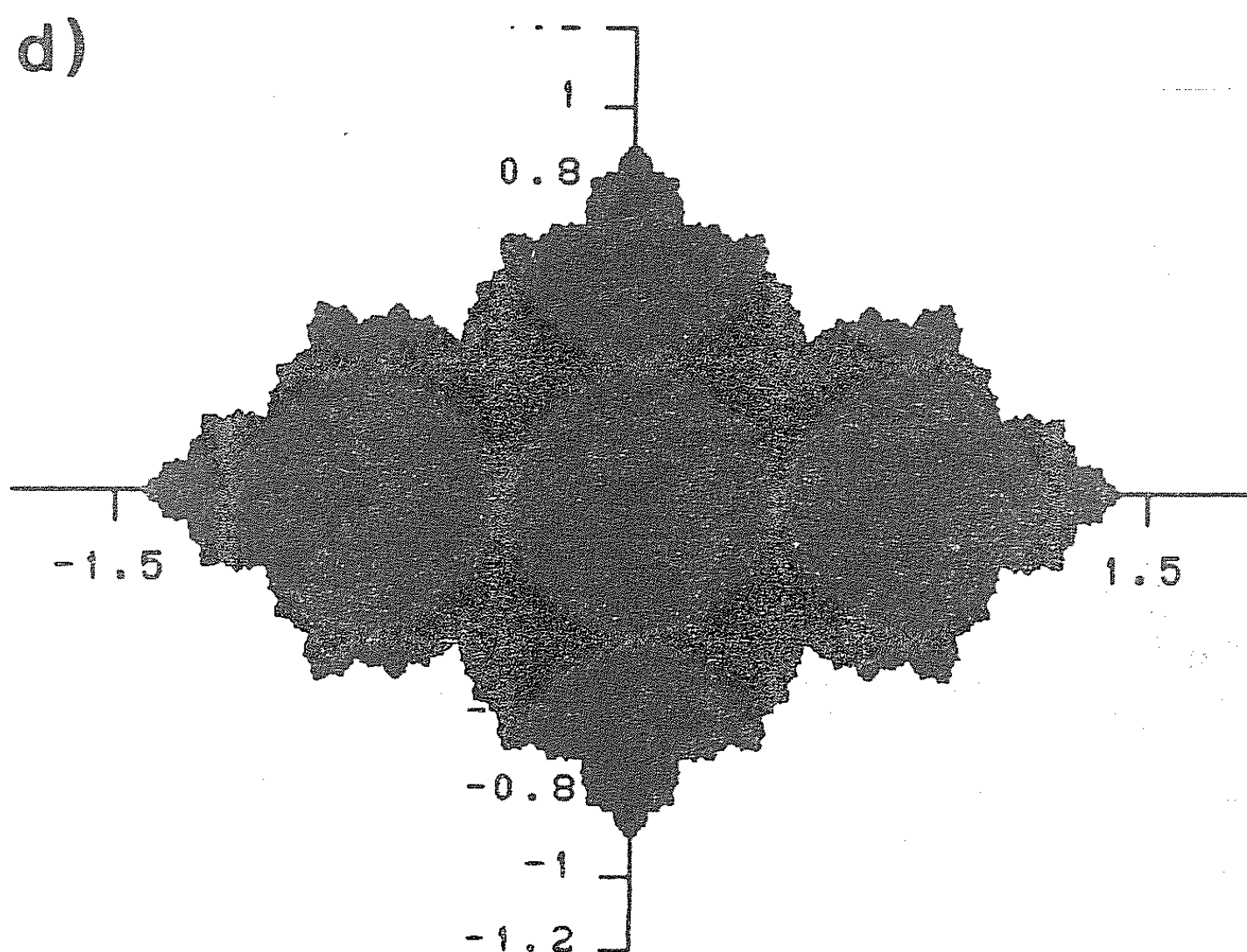
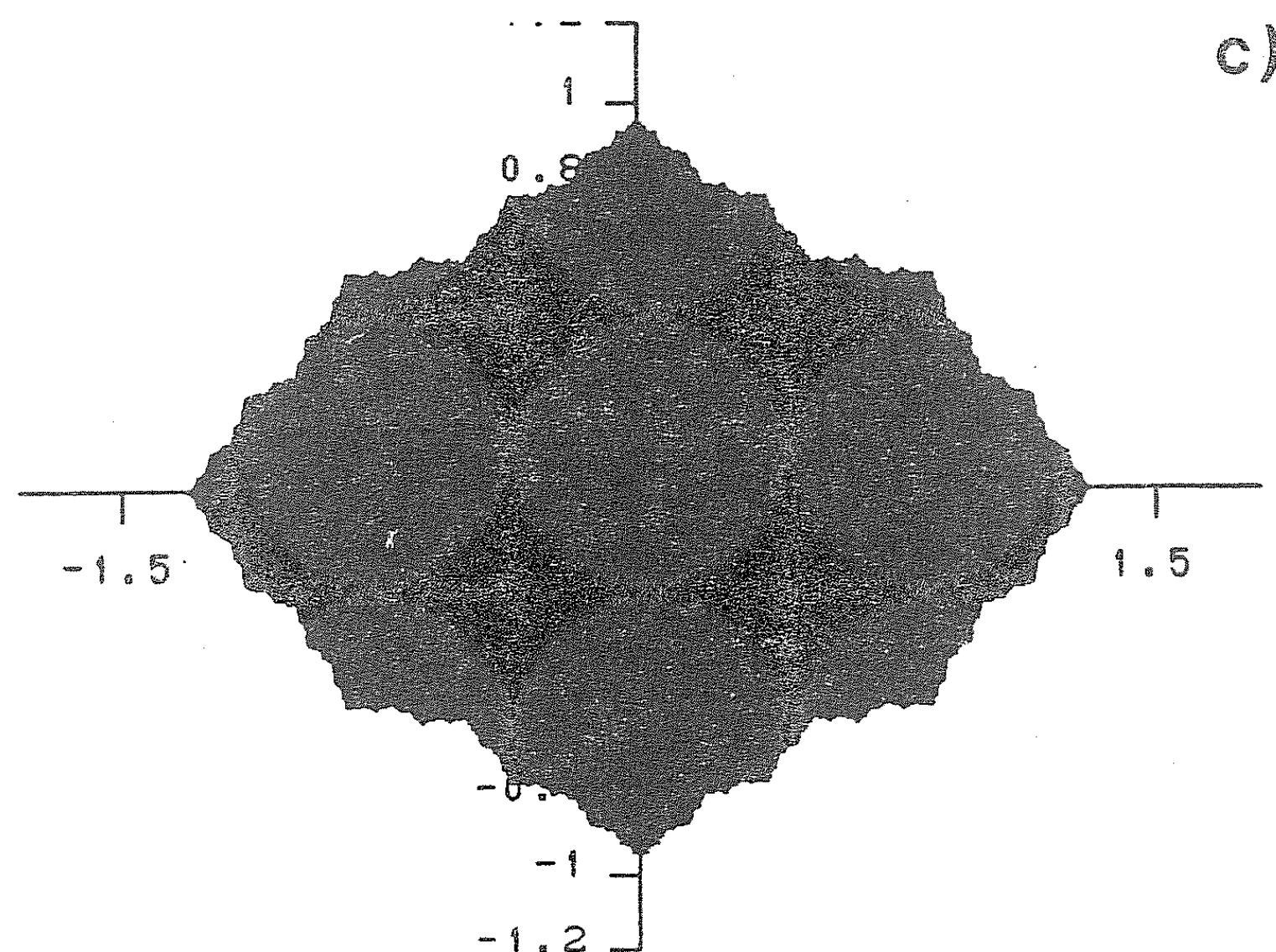
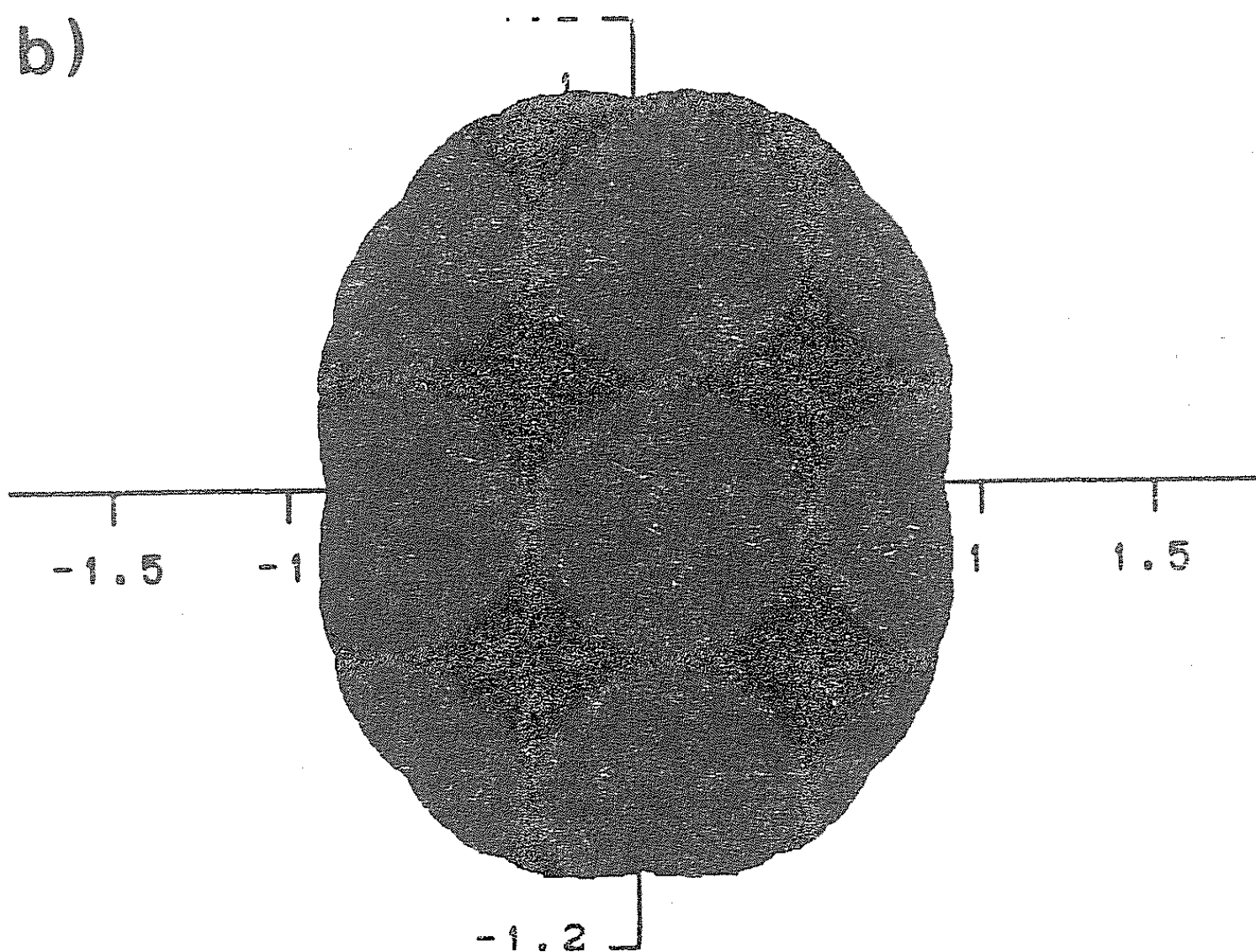
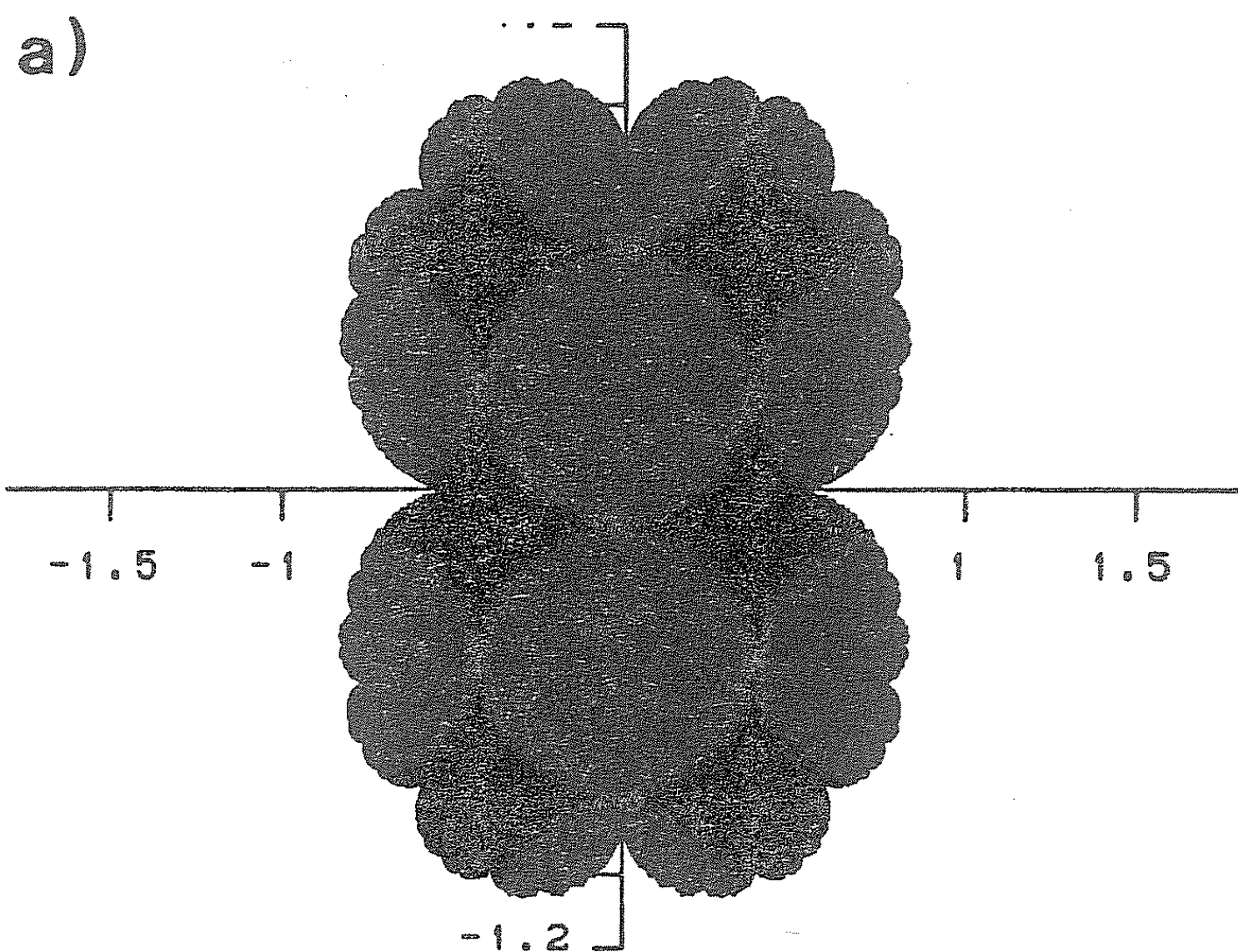
Definicija. Območje privlaka negibne točke a je množica tistih začetnih točk, ki zagotavljajo konvergenco k točki a .

V primeru $c = 0$ je lahko najti območje privlaka. Privlačna točka je $a = 0$ in zaporedje (2) konvergira k njej, če je $|z_0| < 1$. Če pa je z_0 zunaj enotskega kroga, členi zaporedja hitro naraščajo, bežijo v neskončnost. In nazadnje, če je z_0 na enotski krožnici, ostanejo vsi členi na njej. Enotska krožnica je rob območja privlaka.

Izrek. Na enotski krožnici je funkcija $f(z) = z^2$ kaotična.

Slika 2. Juliajeve množice za realne vrednosti parametra znotraj kardioide.

- a) $c = 0.25$,
- b) $c = 0.1$,
- c) $c = -0.4$,
- d) $c = -0.56$,
- e) $c = -0.7$



Res. Začetni člen lahko zapišemo $z_0 = e^{i\varphi}$. Nadaljni členi so potem $z_n = e^{2^n i\varphi}$ in ni težko spoznati vseh treh značilnosti kaosa: občutljivosti, gostega tira in gostih periodičnih točk.

Izberimo $\varepsilon > 0$ in nato tako naravno število n , da je $2^{-n}\pi < \varepsilon$. Kot $\varphi + 2^{-n}\pi$ je v ε -okolici kota φ . Po n korakih iteracije sta istoležna člena zaporedij za zgornja kota na diametralnih točkah krožnice. Torej je funkcija občutljiva za začetno vrednost. Gosti tir konstruiramo tako, kot smo to že napravili v [1]; izberemo tako število s v binarnem zapisu

$$s = 0.s_1s_2s_3\ldots,$$

da se vsako končno zaporedje ničel in enojk pojavi neskončnokrat. Začetna vrednost

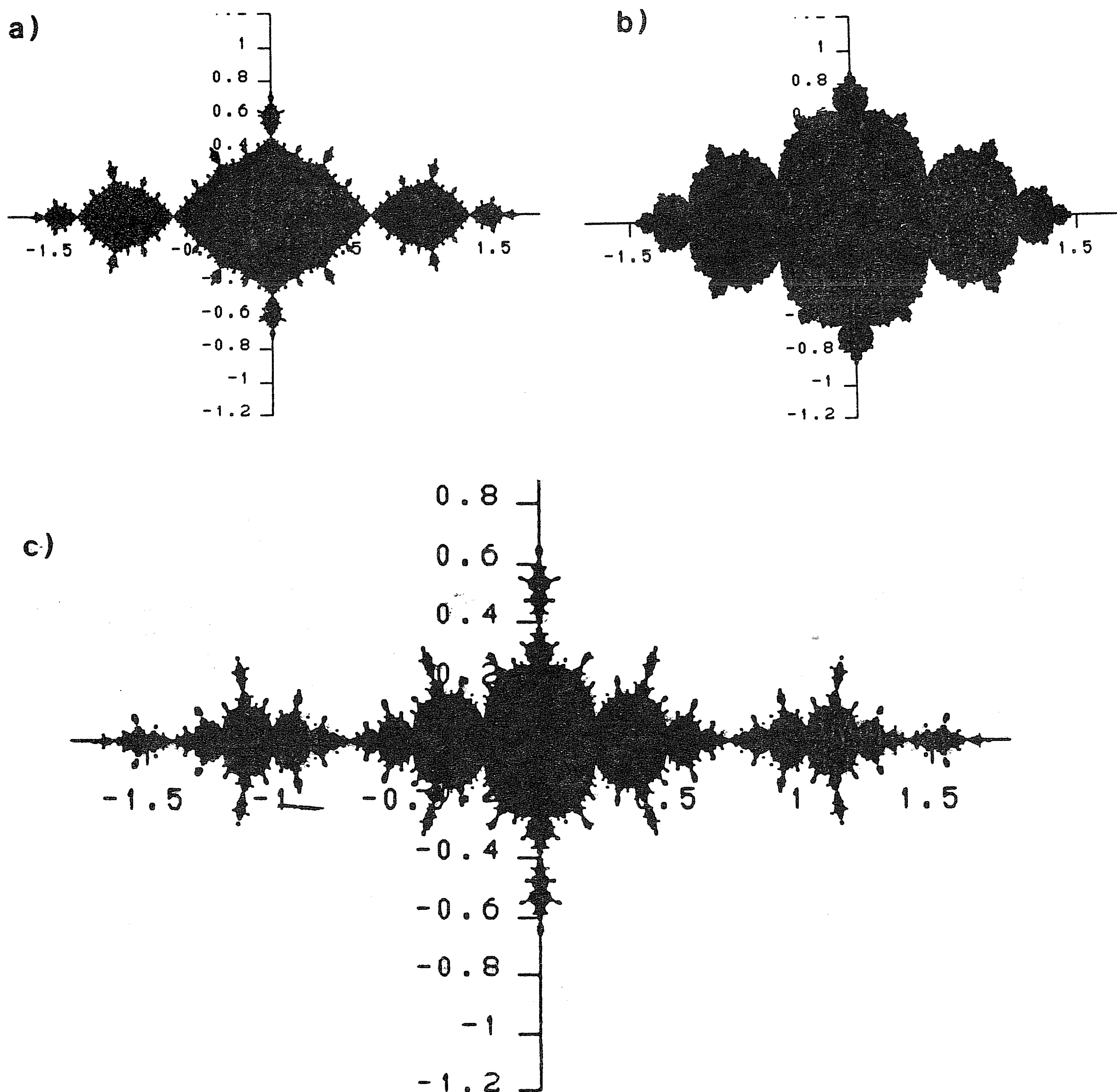
$$z_0 = e^{2\pi i s}$$

nam da gosti tir. Tudi periodične točke je lahko identificirati, začetna točka

$$z_0 = \exp\left(\frac{2k\pi i}{2^n - 1}\right)$$

dá cikel periode n , če je le naravno število k tuje proti $2^n - 1$. Množica vseh takih točk je gosta na krožnici.

Ta zadnja lastnost je značilna za Juliajevo množico.

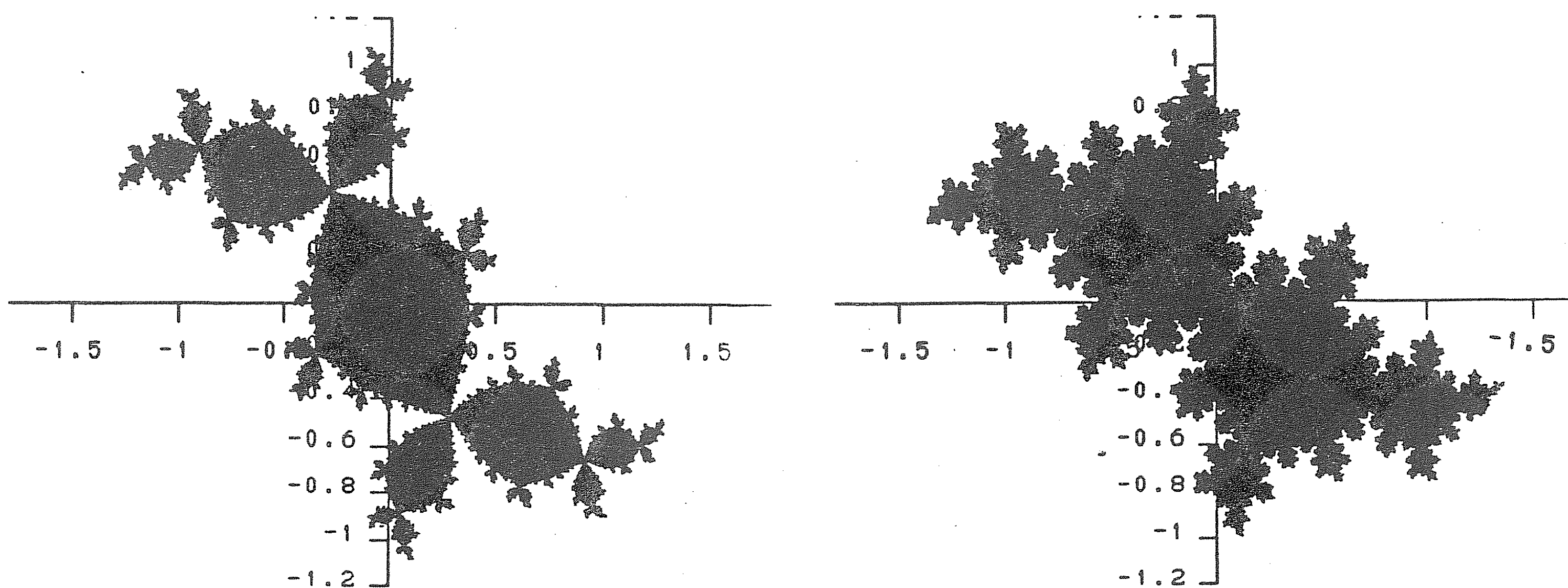


Slika 3. Juliajeve množice za vrednosti parametra $-2 < c < -0.75$.

- a) $c = -0.8$,
- b) $c = -1.1$,
- c) $c = -1.25$

Definicija. Naj bo $f : C \rightarrow C$ funkcija, ki je regularna na vsej kompleksni ravnini. Juliajeva množica $J(f)$ funkcije f je zaprtje množice vseh odbojnih periodičnih točk.

V primeru $c = 0$ je očitno, da je enotska krožnica Juliajeva množica. Pri $c \neq 0$ analiza ni tako preprosta, četudi leži parameter znotraj kardioide (3). Na sliki 2 vidimo nekaj območij konvergence za različne realne c . Meje teh območij so ustrezne Juliajeve množice. Te niso gladke, temveč *fraktalne*. Še vedno so homeomorfne krožnici. Zato so območja privlaka *diski*, znotraj katerih leži privlačna točka. Juliajeva množica $J(f)$ je invariantna za funkcijo f . Funkcija f je na njej kaotična. Zunanost je območje privlaka neskončnosti.



Slika 4. Juliajevi množici pri dveh vrednostih parametra z roba Mandelbrotove množice. a) cikel periode 3 pri $c = -0.12 + 0.74i$, b) Siegelov disk pri $c = -0.39054 + 0.58679i$

Izraz *fraktal* je skoval B. Mandelbrot in pomeni množico v evklidskem prostoru, katere Hausdorffova dimenzija ni celo število [4]. Hausdorffovo dimenzijo definiramo za omejeno množico v evklidskem prostoru na naslednji način. Množico pokrijemo s čim manjšim številom $N(\epsilon)$ krogel polmera ϵ . Ko gre ϵ proti nič, narašča število $N(\epsilon)$ asimptotično kot ϵ^{-D} . Število D je Hausdorffova dimenzija množice. Zgoraj omenjene fraktalne krožnice imajo dimenzijo med 1 in 2.

V realnem [1] smo videli, da s povečevanjem parametra preidemo od ene privlačne točke na privlačni 2-cikel. Pri prevedbi na Mandelbrotovo parametrizacijo je $c = \frac{1-r^2}{4}$. Zato lahko vidimo, da pri realnem c nastopi privlačni 2-cikel za $-\frac{3}{4} > c > -\frac{5}{4}$. Analogen račun kot v realnem primeru odkrije, da mora za privlačni 2-cikel parameter c ležati znotraj krožnice

$$c = \frac{\lambda - 4}{4}, \quad |\lambda| < 1. \quad (4)$$

Tudi to krožnico vidimo na sliki 1.a. Dotika se glavne kardioide v levem krajišču na realni osi. Na slikah 3.a,b,c so primeri Juliajevih množic s parametri iz tega kroga. Slika 4 pa kaže Juliajevi množici za dve različni vrednosti parametra zunaj realne osi.

Z J_c označimo Juliajevo množico kvadratne funkcije $f(z) = z^2 + c$. Juliajeva množica je lahko povezana ali pa ne.

Definicija. Mandelbrotova množica M vsebuje natanko tista kompleksna števila c , za katera je Juliajeva množica J_c povezana.

Mandelbrotova množica je narisana na sliki 1.a, na slikah 1.b in 1.c sta dve povečavi. Omenili smo že glavno kardiodo, ki vsebuje vrednosti parametra, ki dajo privlačno negibno točko, in krog, ki se te kardioide dotika v levem krajišču in zajame tiste parametre, ki pomenijo privlačni 2-cikel. Na sliki 1.a vidimo, da se tega kroga na levi dotika še manjši "krog", ki ni več čisto okrogel. Predstavlja pa množico parametrov za privlačni 4-cikel. Naslednji, še manjši "krog" ustreza 8-ciklu itd. Prerez te slike po realni osi že poznamo od analize Verhulstovega procesa [1]. Če gremo še naprej po realni osi levo od limitne točke, vidimo, da interval do $r = -2$ pripada Mandelbrotovi množici. Hkrati pa opazimo še dve manjši "piki" in eno večjo "piko". Ta ustreza privlačnemu ciklu periode 3 — na realni osi je to "okno" v kaosu. Parametri, ki dajo privlačni 3-cikel, pa ležijo še drugje. Najdemo jih tudi znotraj največjih "krogov", ki se od spodaj in zgoraj dotikajo glavne kardioide. Iz spodnjega teh "krogov" je vrednost parametra, ki nam da sliko 4.a. Poleg tega vidimo še precej "pik", ki so v resnici povezane med sabo. Matematikom je namreč že uspelo dokazati, da je Mandelbrotova množica povezana. Slika 1.b kaže povečavo detajla, zgornjega kroga, ki vsebuje parametre za privlačni 3-cikel. Pokaže se nam še mnogo novih "pik", največjo smo še povečali na sliki 1.c. In "pika" se pokaže kot nov izvod osnovne Mandelbrotove množice. Že na tej povečavi opazimo nove male "mandelbrotke"; v resnici jih je nešteto, števno mnogo. V temle, ki je na sliki 1.c v križišču, imamo v kardiodi vrednosti parametra, ki določajo privlačni cikel periode 9. Nalepljeni krog daje cikel periode 18 itd. Struktura Mandelbrotove množice je dokaj komplicirana.

Na sliki 4.b imamo primer Juliajeve množice za parameter z roba Mandelbrotove množice. To je t. i. Siegelov disk, Juliajeva množica je rob tega diska. Podobno sliko dobimo za skoraj vse parametre z roba velike kardioide, kjer se ne dotikajo manjši "krogi". In kaj se zgodi, če preselimo parameter ven iz Mandelbrotove množice? Juliajeva množica ni več povezana, postane Cantorjeva, totalno nepovezana in perfektna. Primer take množice je na ovitku Obzornika.

LITERATURA

- [1] P. Petek, *Iteracija kvadratnih funkcij*, Obzornik za matematiko in fiziko **37** (1990) 6, 161-166.
- [2] H. O. Peitgen, P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1986.
- [3] G. Julia, *Sur l'itération des fonctions rationnelles*, J. Math. Pure Appl. **8** (1918) 47-245.
- [4] B. Mandelbrot, *Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ for complex λ, z* , Ann. NY Acad Sci. **357** (1980) 249-259.
- [5] C. L. Siegel, *Iteration of Analytic functions*, Ann. Math. **43** (1942) 607-612.

KVANTNI ZENONOV POJAV

JANEZ STRNAD

PACS 03.65.-w

Na začetku kvantnega prehoda, ko je verjetnost za prehod sorazmerna s kvadratom časa, s pogostim opazovanjem zaviramo prehod. Pri spontanah prehodih tega ne moremo opazovati, ker velja kvadratna odvisnost prekratek čas. Pri stimuliranih prehodih pa so teoretično napoved podprli z merjenjem. Pojav je zanimiv tudi zaradi vprašanj o merjenju v kvantni mehaniki.

QUANTUM ZENO'S EFFECT

At the beginning of a quantum transition, while the transition probability depends quadratically on time, the transition is inhibited by frequent observation. For spontaneous transitions this cannot be observed since the dependence is quadratic for a very short time only. However, for stimulated transitions the theoretical prediction was supported by measurement. The effect is interesting also with regard to questions concerning the measuring process in quantum mechanics.

Uvod

Zenon iz Elee si je v 5. stoletju pred našim štetjem v dvomu o spremembah nasploh in o gibanju posebej zamislil nekaj "paradoksov". V najbolj razvpitem hitri Ahil ne prehití počasne želve. Vsakokrat mora šele doseči točko, ki jo je želva že zapustila, tako da naj bi ostal vedno vsaj za malenkost za želvo.

Na Zenonove "paradokse" so se spomnili fiziki, ko so se pred dobri mi desetimi leti zavedeli možnosti, da s pogostim opazovanjem kvantnomehničnega sistema v neobstojnem stanju zaviramo njegov prehod [1]. Zelo splošni teoretični razlogi, ki jih navajamo v dodatku, zahtevajo, da neposredno po začetku prehoda verjetnost za prehod narašča sorazmerno s kvadratom časa [1]–[4]. Vendar za zdaj ni upanja, da bi zavrli razpad neobstojnih delcev ali radioaktivnih jeder. Za pion je na primer verjetnost za prehod sorazmerna s kvadratom časa samo prvi 10^{-14} -ti del razpadnega časa [1]. Doslej pri razpadih še ni uspelo z merjenji ugotoviti odmika od eksponentnega zakona. Predlagali so, da bi namesto tega poskusili pojav zaslediti pri stimuliranem prehodu [5]. Predlog so pred kratkim uresničili [6].

Članek je posvečen pojavu, ki je zbudil precej pozornosti. V drugem odstavku opiše zamisel preprostega klasičnega poskusa s polarizirano svetlobo, ki pomaga v osnovi bolje razumeti Zenonov pojav. V tretjem odstavku obravnava prehod atoma iz enega stanja v drugo pod vplivom elektromagnetnega valovanja in navede odločilno enačbo. Četrty odstavek opiše poskus z množico berilijevih ionov, s katerim so podprli teoretično napoved. Peti odstavek se z nekoliko zahtevnejšim računom, ki se dotakne merjenja v kvantni mehaniki, dokoplje do odločilne enačbe. Nazadnje dodatek še na splošno utemelji, da je pri vseh prehodih na začetku verjetnost za prehod sorazmerna s kvadratom časa.

Poskus s polarizirano svetlobo

Curek linearno polarizirane svetlobe z jakostjo električnega polja v vodoravni smeri naj pade na plast optično aktivne snovi [4]. Na izhodu iz plasti je analizator, ki prepušča svetlobo z jakostjo električnega polja v navpični smeri. Analizator prepusti svetlobni tok z gostoto $j_0 \sin^2 \varphi$, če vstopi v plast svetlobni tok z gostoto j_0 in plast zasuje jakost električnega polja za φ .

Vrnilimo na polovici debeline plasti, kjer je jakost električnega polja zasukana za kot $\frac{1}{2}\varphi$, zelo tanek analizator v enaki legi kot analizator na izhodu iz plasti. Ta analizator prepusti svetlobni tok z gostoto $j_0 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$, analizator na izhodu iz plasti pa svetlobni tok z gostoto $(j_0 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi) \sin^2 \frac{1}{2}\varphi = j_0 \sin^4 \frac{1}{2}\varphi$.

Kaj se primeri, če razdelimo plast z zelo tankimi analizatorji na n enako debelih delov? Po izkušnjah s prejšnjim primerom ni težko zapisati izraza za gostoto svetlobnega toka, ki ga prepusti analizator na izhodu iz plasti: $j_0 \sin^{2n} \frac{\varphi}{n}$. Vzemimo tolikšno debelino plasti, da se v plasti jakost električnega polja zasuje za 90° , torej $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, ko v njej ni analizatorjev. V tem primeru prepusti zadnji od n analizatorjev na izstopu iz plasti svetlobni tok z gostoto $j_0 \sin^{2n} \frac{\pi}{2n}$. Za $n = 1$, ko ne vrnilimo nobenega dodatnega analizatorja, je razmerje prepuščenega in vpadnega toka 1, za $n = 2$ je razmerje 0,25, za $n = 4$ pa le še 0,000 46. Večkratno opazovanje ima enak učinek, kakor da bi v optično aktivni snovi preprečili sukanje jakosti električnega polja. Poskus opozori na možnost, da s pogostim opazovanjem v kvantni mehaniki zavremo razpad neobstojnega stanja.

Poskus v kvantni mehaniki

Mislamo si atom, na katerega lahko naletimo le v enem od dveh lastnih stanj z energijama W'_1 in W'_2 . Vzemimo, da je atom spočetka, pri $t = 0$, v stanju z lastno energijo W'_1 in da ga obsevamo z elektromagnetnim valovanjem s krožno frekvenco $\mu E_0/\hbar$, ki ustreza prehodu med navedenima stanjema. Pri tem je μ matrični element električnega dipolnega momenta atoma za prehod med stanjema in E_0 amplituda jakosti električnega polja v elektromagnetnem valovanju. Verjetnost za prehod P_2 , s katero naletimo po času t na atom v stanju z lastno energijo W'_2 :

$$P_2(t) = \sin^2 \frac{\mu E_0 t}{\hbar} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\mu E_0 t}{\hbar} \right), \quad (1)$$

poznamo [7]. Verjetnost, s katero naletimo na atom v začetnem stanju z lastno energijo W'_1 , je $P_1 = 1 - P_2$.

Kaj se primeri, če atom, ki ga ves čas obsevamo z elektromagnetnim valovanjem, opazujemo najprej v trenutku $t = \frac{1}{2}T$ in nato še enkrat v trenutku $t = T$? Z enačbo (1) zlahka izračunamo verjetnost P_2 po prvem merjenju: $P_2(\frac{1}{2}T) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\mu E_0 T}{2\hbar} \right)$. Verjetnosti po drugem merjenju

$$P_2^{(2)}(t = T) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\mu E_0 T}{2\hbar} \cos \frac{2\mu E_0 T}{2\hbar} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{2\mu E_0 T}{2\hbar} \right)$$

pa ne da enačba (1). Ta korak je drugačen kot pri poskusu s polarizirano svetlobo in ga bomo pojasnili pozneje. Potem ko ga naredimo, pa ni težko zapisati izraza za verjetnost $P_2^{(n)}$ po n -kratnem opazovanju po času $t = T$:

$$P_2^{(n)}(t = T) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos^n \frac{2\mu E_0 T}{n\hbar} \right). \quad (2)$$

Izberimo tolikšen čas T , da je atom po tem času zagotovo v stanju z lastno energijo W_2' , če ga dotlej ne opazujemo. Iz enačbe (1) sledi $T = \pi\hbar/2\mu E_0$ in enačba (2) preide v tem primeru v

$$P_2^{(n)}(t = T) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos^n \frac{\pi}{n} \right). \quad (3)$$

Brez te enačbe ne bi razumeli poskusa.

Poskus z berilijevimi ioni

Poskus so naredili W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger in D. J. Wineland z Državnega inštituta za standarde in tehnologijo iz Boul- dra v ameriški zvezni državi Colorado [6]. Merili so z okoli 5000 berilijevimi ioni $^9\text{Be}^+$ v valjasti Penningovi pasti pri tlaku 10^{-10} milibara. Kot stanje 1 so izbrali osnovno stanje iona $^2\text{S}_{1/2}$ $m_I = \frac{3}{2}$, $m_J = \frac{1}{2}$. Magnetno kvantno število m_I zadeva spin jedra in magnetno kvantno število m_J polno vrtilno količino elektronov v ionu, se pravi edinega zunanjega elektrona. Za stanje 2 so izbrali stanje $^2\text{S}_{1/2}$ $m_I = \frac{1}{2}$, $m_J = \frac{1}{2}$, ki je zaradi sodelovanja med magnetnima momentoma zunanjega elektrona in jedra malo nad osnovnim stanjem. V magnetnem polju z gostoto 0,819 4 T, ki so ga uporabili, so zbu- jali prehod iz stanja 1 v stanje 2 s kratkimi radijskimi valovi s frekvenco 320,7 MHz ali valovno dolžino 94 cm.

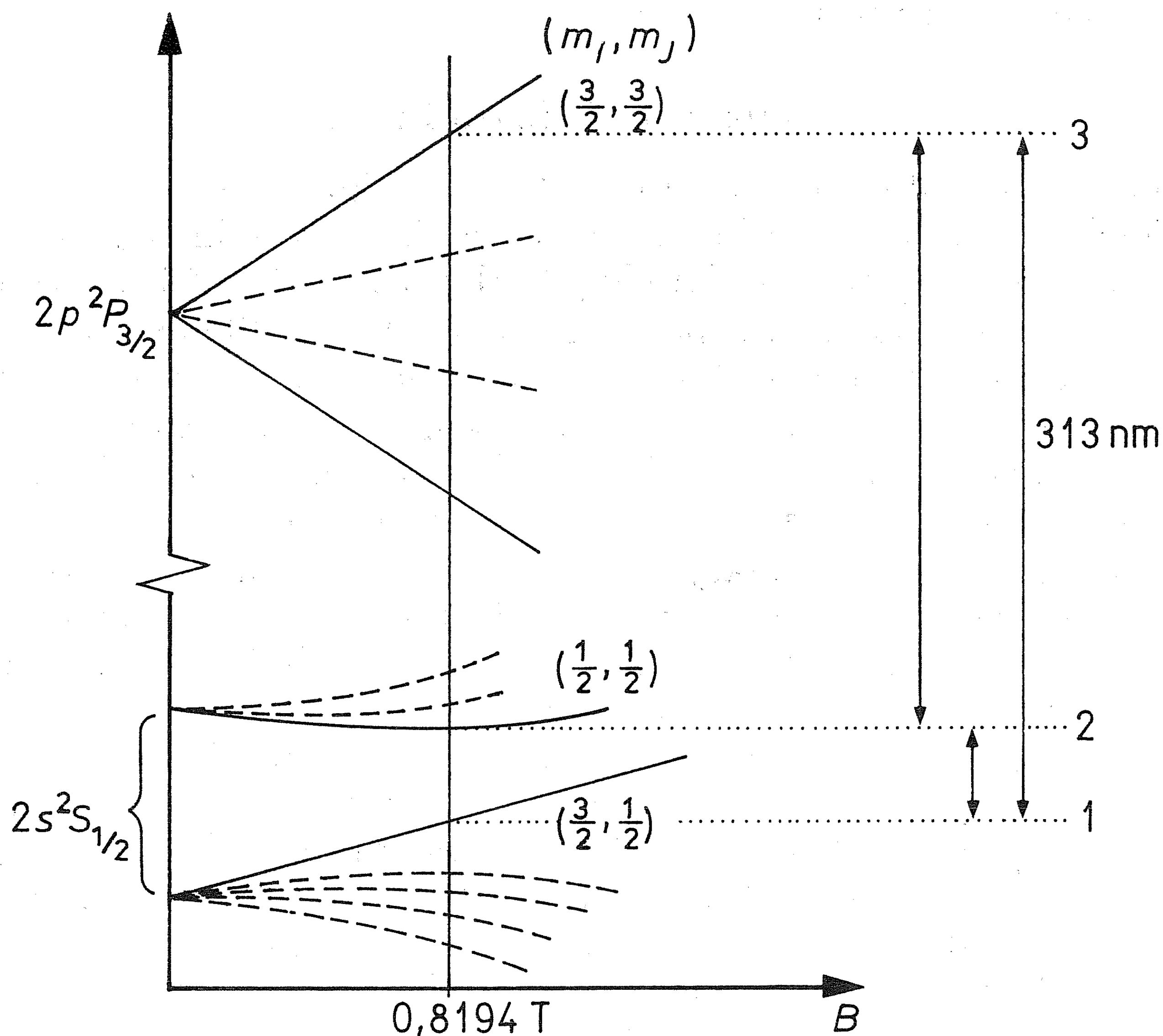
Pri merjenjih so si pomagali še s stanjem 3. Uporabili so eno izmed hiperfinih stanj, na katera je bilo razcepljeno prvo elektronsko vzbujeno stanje iona $^2\text{P}_{3/2}$ $m_I = \frac{3}{2}$, $m_J = \frac{3}{2}$ (Sl. 1). Energijski razliki stanj 3 in 1 je ustrezala vidna svetloba z valovno dolžino 313 nm. Prehod med stanjema 2 in 3 je prepovedan. Sevanje z valovno dolžino 313 nm so dobili tako, da so podvojili frekvenco laserja na barvilo. Laserski curek je bil linearno polariziran pravokotno na smer magnetnega polja.

S tem sevanjem so tudi *lasersko hladili* ione. Pri tem obsevajo ione s sevanjem, ki ima malo manjšo frekvenco od frekvence prehoda. Tako absorbirajo fotone le ioni, ki se gibljejo v nasprotni smeri laserskega curka in z Dopplerjevim pojavom krijejo razliko frekvenc. Na račun gibalne količine absorbiranega fotona se zmanjša gibalna količina iona v nasprotni smeri curka. Ion seva v vseh mogočih smereh, tako da se zaradi absorpcije in fluorescenčnega sevanja zmanjša gibalna količina ionov v navedeni smeri, ob trkih z njim pa se drugim ionom zmanjša gibalna količina v drugih smereh. Množica ionov se "ohladi".

Opisano lasersko hlajenje ni zadostovalo, ker curek z valovno dolžino 313 nm ni bil vedno priključen. Berilijevim ionom so dodali še kakih sto tisoč

ionov magnezija $^{26}\text{Mg}^+$, ki so jih neprekinjeno hladili z laserskim curkom z valovno dolžino 280 nm. Trki med ioni ene in druge vrste so poskrbeli, da je merila efektivna temperatura množice ionov manj kot $\frac{1}{4}$ kelvina.

Pri poskusu so najprej za 5 sekund vključili laserski curek z valovno dolžino 313 nm. Vsi ioni so hitro prešli v stanje 1, ko so curek izključili. Nato so usmerili na ione v pasti $T = 256$ ms trajajoč sunek radijskih valov s frekvenco 320,7 MHz. Frekvenco in amplitudo električnega polja so izbrali tako, da so bili na koncu sunka vsi ioni v stanju 2, če jih medtem niso opazovali. Med radijskim sunkom so osvetlili ione še z n 2,4 milisekunde trajajočimi bliski laserske svetlobe z valovno dolžino 313 nm v enakih časovnih razmikih T/n . Ob vsakem blisku so ioni iz stanja 1 prešli v stanje 3. Ionov v stanju 2 bliski niso prizadeli.

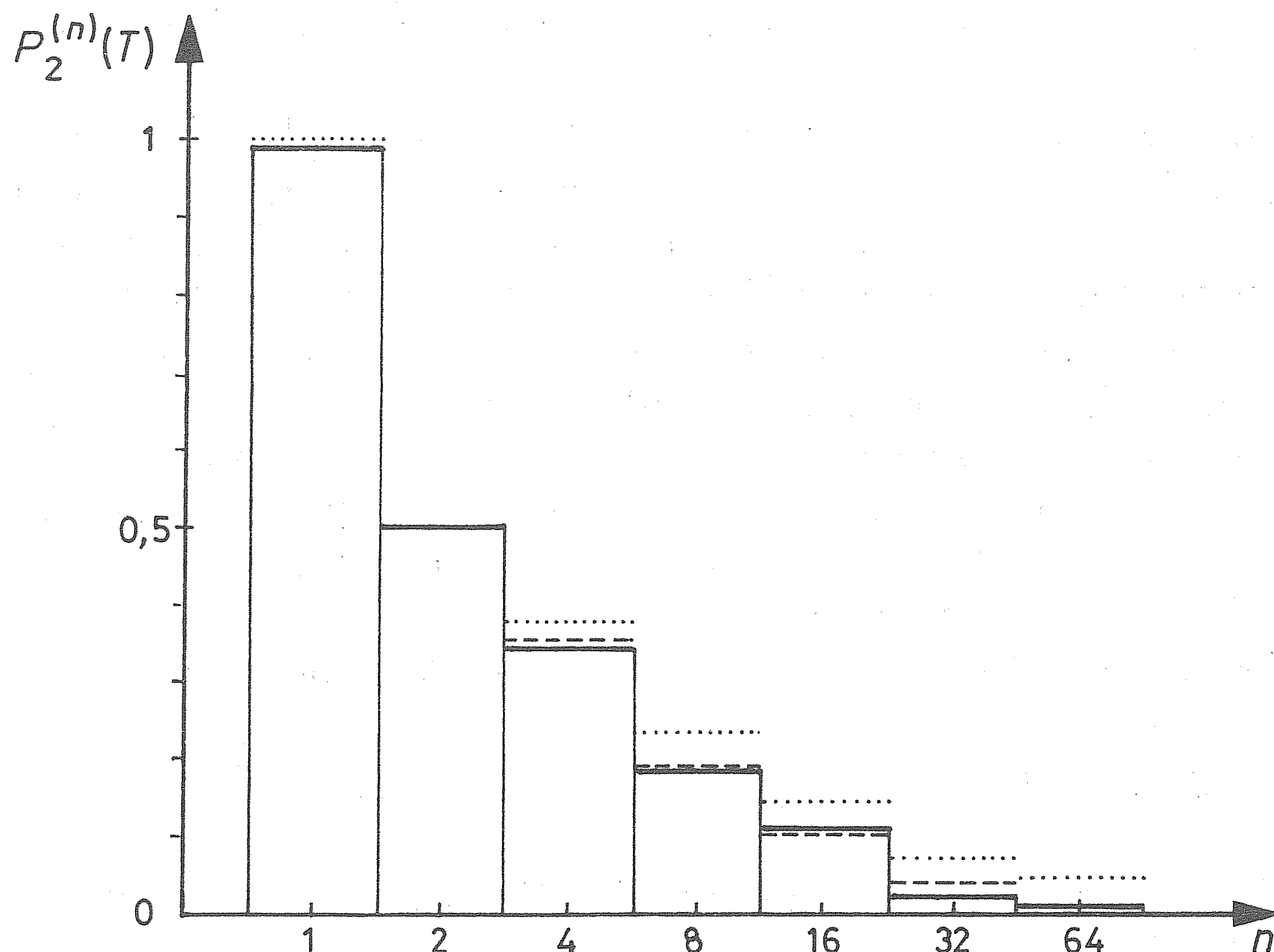


Slika 1. Stanja 1, 2 in 3 za berilijeve ione pri merjenju Itana in sodelavcev [8].

Po koncu radijskega sunka, ko so že zopet vključili laserski curek, so 100 milisekund s slikovnim fotonskim merilnikom, ki je zaznal vsak 20-tisoči foton, merili fluorescenčno sevanje z valovno dolžino 313 nm. Podatek, ki so ga dobili, je bil sorazmeren s številom ionov v stanju 1 po prenehanju radijskega sunka. Tako so posredno ugotovili verjetnost $P_2^{(n)}(T)$, čeprav niso naravnost zmotili ionov v stanju 2, saj ti pri fluorescenci niso sodelovali.

Med 2,4 milisekunde trajajočim laserskim bliskom, ko so bili spočetka vsi ioni v stanju 1, so zaznali okoli 30 tisoč fluorescenčnih fotonov. Iz

tega izhaja, da je v 2,4 milisekunde vsak ion, ki je bil spočetka v stanju 1, v povprečju 72-krat absorbiral in izseval foton. Blisk je torej učinkovito prevedel vse ione iz stanja 1 v stanje 3. Poskus je uspel celo s krajšimi bliski po 1,4 ms. Laserski curek so vključili ali izključili z elektromehanično zaklopko z značilnim časom 0,2 ms, radijske valove pa s polprevodniško diodo z značilnim časom 0,15 mikrosekunde.



Slika 2. Izidi merjenj verjetnosti $P_2^{(n)}(T)$ pri poskusu z berilijevimi ioni [8]. Na navpično os je nanescna ta verjetnost: s sklenjenimi črtami izmerjena, s pikčastimi napoved (3) in s črticami natančnejša napoved.

Poskus so večkrat ponovili, in to z različnim številom laserskih bliskov: $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ ali 64. Izmerjeni izidi so se dobro prilegali napovedi (3). Ujemanje med natančnejšo teoretično napovedjo, v kateri so upoštevali spontano sevanje in druge podrobnosti, je bilo še boljše (Sl. 2). Skrbno so preverili vse korake in nazadnje izvedli poskus še za prehod iz stanja 2 v stanje 1.

Vrteči se koordinatni sistem

Od časa neodvisni lastni valovni funkciji atoma u_1 in u_2 ustrezata lastnima energijama W'_1 in W'_2 . Zanju velja stacionarna Schrödingerjeva enačba $\hat{H}_0 u_k = W'_k u_k$, $k = 1, 2$. S sestavljeno valovno funkcijo¹

$$\psi = c_1(t)u_1 + c_2(t)u_2$$

¹ Pozornemu bralcu je treba pojasniti to obliko valovne funkcije v *interakcijski sliki*. Ta slika spominja po eni strani na Schrödingerjevo, v kateri tiči odvisnost od časa v valovnih funkcijah, po drugi pa na Heisenbergovo, v kateri tiči odvisnost od časa v operatorjih. V interakcijski sliki so od časa odvisni valovne funkcije in operatorji, to-

opišemo prehode med stanjema, ki jih povzroča dodatek $\hat{H}$ k prvotnemu energijskemu operatorju $\hat{H}_0$. Normiramo jo z zahtevo $c_1^*c_1 + c_2^*c_2 = 1$. Enačbo gibanja $i\hbar\dot{\psi} = (\hat{H}_0 + \hat{H})\psi$ pomnožimo najprej z $u_1^*d^3r$ in nato z $u_2^*d^3r$. Integriramo po definicijskem območju lastnih valovnih funkcij in zaradi njune ortogonalnosti preostaneta enačbi

$$i\hbar\dot{c}_1 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0c_1 + H_{12}c_2, \quad i\hbar\dot{c}_2 = H_{21}c_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0c_2. \quad (4)$$

Pri tem smo za lastni energiji W'_1 in W'_2 vstavili $-\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ in $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, tako da je njuna razlika $W'_2 - W'_1 = \hbar\omega_0$. Diagonalna elementa motilnega dela energijskega operatorja H_{11} in H_{22} sta enaka nič ali zelo majhna v primeri z elementoma zunaj diagonale H_{12} in H_{21} in smo ju kar spustili.

V sistemu enačb nastopata dve kompleksni funkciji $c_1(t)$ in $c_2(t)$, ki ju v splošnem podajajo štiri realne funkcije časa. Verjetnost za prehod pri enkratnem merjenju izračunamo kot $c_2^*c_2 = P_2$ in ne potrebujemo drugih funkcij. Četrte funkcije tudi ne potrebujemo, ker je globalna faza valovne funkcije ψ nepomembna. V splošnem in tudi pri večkratnem merjenju preostanejo tako tri funkcije časa.

Pri računanju si pomagamo s konjugirano kompleksnima enačbama (4)

$$i\hbar\dot{c}_1^* = \frac{1}{2}\hbar\omega_0c_1^* - H_{21}c_2^*, \quad i\hbar\dot{c}_2^* = -H_{12}c_1^* - \frac{1}{2}\hbar\omega_0c_2^*. \quad (4')$$

Energijski operator je hermitski in velja $H_{12}^* = H_{21}$. Z enačbama (4) in (4') pridemo do zvez

$$i\hbar(c_1^*c_1)' = i\hbar\dot{c}_1^*c_1 + \hbar c_1^*\dot{c}_1 = H_{12}c_1^*c_2 - H_{21}c_2^*c_1,$$

$$i\hbar(c_1^*c_2)' = i\hbar\dot{c}_1^*c_2 + \hbar c_1^*\dot{c}_2 = \hbar\omega_0c_1^*c_2 - H_{21}(c_2^*c_2 - c_1^*c_1).$$

Iz njiju in iz zvez, ki ju dobimo, ko v njiju zamenjamo indeksa 1 in 2 in spremenimo znak členov z ω_0 , sledi

$$i\hbar(c_1^*c_2 + c_2^*c_1)' = \hbar\omega_0(c_1^*c_2 - c_2^*c_1) - (H_{21} - H_{12})(c_2^*c_2 - c_1^*c_1),$$

$$i\hbar(c_1^*c_2 - c_2^*c_1)' = \hbar\omega_0(c_1^*c_2 + c_2^*c_1) - (H_{21} + H_{12})(c_2^*c_2 - c_1^*c_1), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} i\hbar(c_2^*c_2 - c_1^*c_1)' &= 2H_{21}c_2^*c_1 - 2H_{12}c_1^*c_2 = \\ &= (H_{21} - H_{12})(c_1^*c_2 + c_2^*c_1) - (H_{21} + H_{12})(c_1^*c_2 - c_2^*c_1). \end{aligned}$$

da njihovo časovno odvisnost urejajo različni deli energijskega operatorja. Časovno odvisnost operatorjev ureja nemoteni del energijskega operatorja $\hat{H}_0$, časovno odvisnost valovne funkcije pa njegov del $\hat{H}$, ki povzroča prehode. V našem primeru lahko nazorno opišemo pot do zapisane valovne funkcije. Nihajoče električno ali magnetno polje razstavimo v dve vrteči se polji, ki se vrtita v nasprotnih smereh. Eno izmed njih odmislimo in opisujemo pojave v opazovalnem sistemu, ki se vrti skupaj z drugim poljem.

V njih nastopajo trije izrazi s koeficientoma c_1 in c_2 in njunima kompleksno konjugiranimi vrednostma. To so tri funkcije, ki jih potrebujemo. Iz njih sestavimo trirazsežni vektor $\mathbf{r}$ v abstraktnem prostoru

$$\mathbf{r} = (c_1^*c_2 + c_2^*c_1, i(c_1^*c_2 - c_2^*c_1), c_2^*c_2 - c_1^*c_1)$$

s kvadratom velikosti $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = c_1^*c_1 + c_2^*c_2 = 1$. Z drugim vektorjem v istem prostoru

$$\hbar\boldsymbol{\omega} = (H_{21} + H_{12}, i(H_{21} - H_{12}), \hbar\omega_0)$$

zapišemo enačbe (5) preprosto kot

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6)$$

To spominja na enačbo $\dot{\mathbf{\Gamma}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Gamma}$ za precesijo vrtavke z lastno vrtilno količino $\mathbf{\Gamma}$ in precesijsko kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$. Enačba izhaja iz izreka o vrtilni količini $\mathbf{M} = \mathbf{\Gamma}$ za navor $\mathbf{M}$ glede na osišče v težišču. Enačba (6), ki jo pogosto imenujejo *enačbo gibanja v vrtečem se sistemu*, je zelo uporabna [8]. Omenimo samo jedrsko magnetno resonanco, pri kateri se prelevi abstraktni prostor v navadnega.

Pri električnih dipolnih prehodih, pri katerih se magnetno obhodno kvantno število m_l ne spremeni, velja $H_{21} = -\mu E_0$ z amplitudo jakosti zunanega električnega polja E_0 in matričnim elementom električnega dipolnega momenta μ . Z izbiro faz lahko dosežemo, da je ta matrični element realen in postane komponenta ω_2 enaka nič. Tedaj je $\boldsymbol{\omega} = (-\Omega, 0, \omega_0)$ z *Rabijevo krožno frekvenco* $\Omega = 2\mu E_0/\hbar$. Do podobnega sklepa pridemo tudi pri magnetnih dipolnih prehodih te vrste, če namesto μ upoštevamo matrični element magnetnega dipolnega momenta in namesto jakosti električnega polja E_0 gostoto magnetnega polja B_0 .

Ne ozirajmo se na tretjo komponento $\hbar\omega_0$, ki zadeva spontane prehode. Preostane enačba (6) z vektorjem $\boldsymbol{\omega} = (-\Omega, 0, 0)$, ki opisuje precesijo vektorja $\mathbf{r}$ v ravnini r_2, r_3 abstraktnega prostora. Iz zveze $r_3 = c_2^*c_2 - c_1^*c_1 = P_2 - P_1 = P_2 - (1 - P_2) = 2P_2 - 1$ izhaja $P_2 = \frac{1}{2}(r_3 + 1)$. Zaradi $P_2(t=0) = 0$ moramo zahtevati $r_2(t=0) = 0$ in $r_3(t=0) = -1$. S tem začetnim pogojem sledi $\mathbf{r} = (0, \sin \Omega t, -\cos \Omega t)$. Od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = T$ atoma ne zmotimo, v tem trenutku pa ga opazujemo. Tik po opazovanju opišemo sistem z vektorjem $\mathbf{r}'(T) = (0, 0, -\cos \Omega T)$. Merjenje prisili atom v eno od lastnih stanj in med lastnima stanjema poruši vsako fazno povezavo, ki jo vsebujeta mešana člena v komponenti $r_2 = i(c_1^*c_2 - c_2^*c_1)$. Tik po merjenju je sistem v stanju, v katerem je ta komponenta enaka nič.²

² Projekcijski operator $\hat{p} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ima na diagonalni elementi $\rho_{11} = c_1^*c_1$ in $\rho_{22} = c_2^*c_2$ in zunaj nje matrični elementi $\rho_{12} = c_2^*c_1$ in $\rho_{21} = c_1^*c_2$. Z matričnimi elementi tega operatorja zapišemo vektor $\mathbf{r} = (\rho_{21} + \rho_{12}, i(\rho_{21} - \rho_{12}), \rho_{22} - \rho_{11})$. Z merjenjem vedno dosežemo, da postanejo matrični elementi tega operatorja zunaj glavne diagonale enaki nič. Merjenje dá verjetnost $\rho_{11} = c_1^*c_1$ ali $\rho_{22} = c_2^*c_2$, da je atom v stanju 1 ali v stanju 2.

Razdelimo čas T na n enakih delov in opazujemo atom po vsakem razmiku T/n . Vsako opazovanje povzroči, da postane komponenta r_2 enaka nič in zmanjša velikost vektorja $\mathbf{r}$ za faktor $\cos(\Omega T/n)$. V tem primeru opišemo atom po zadnjem opazovanju v trenutku T z vektorjem $\mathbf{r}'^{(n)} = (0, 0, -\cos^n(\Omega T/n))$. Zdaj razumemo ozadje enačbe (3), ki jo dobimo, če izberemo čas $T = \pi/\Omega = \pi\hbar/2\mu E_0$.

Z računom za večkratno merjenje smo posegli v teorijo merjenja v kvantni mehaniki, ki se ji navadno poskušamo izogniti. Nekateri mislijo, da je mogoče tudi večkratno merjenje obravnavati brez nje; toda razmišljanje je zelo zahtevno [9]. Na drugi strani je mogoče v tej zvezi nedvoumno vpeljati *kvantne skoke* pri pogostem merjenju in ugotoviti, da sta kvantni skok in Rabijev prehod po enačbi (1) komplementarna pojma [5]. Nekdaj je Bohrova uvedba kvantnih skokov povzročila veliko težav. E. Schrödingerju je bilo zaradi njih žal, da se je spustil v kvantno fiziko. Kaže, da bodo podrobna merjenja, ki jih dopuščajo današnje naprave, razjasnila tudi katero od starih kvantnomehaničnih ugank.

Dodatek: Kvadratna časovna odvisnost

Najprej ugotovimo, da verjetnost za prehod pri zelo kratkih časih ne more biti sorazmerna s časom, kakor je pri daljših, ko velja eksponentni zakon [3]. Za hermitska operatorja $\hat{A}$ in $\hat{B}$, ki nista eksplicitno odvisna od časa in ne komutirata, velja posplošena Heisenbergova neenačba [10]

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|.$$

Pri tem smo vpeljali nedoločenost: $(\delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ in podobno za operator $\hat{B}$. Vstavimo za $\hat{B}$ energijski operator $\hat{H} = i\hbar\partial/\partial t$ in upoštevajmo zvezo $\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle = i\hbar d\langle A \rangle/dt$, pa sledi [10]

$$\delta A \geq \frac{\hbar}{2\delta W} \left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|.$$

Za $\hat{A}$ vstavimo projekcijski operator $|\psi\rangle\langle\psi|$, za katerega velja $\langle A \rangle = \langle A^2 \rangle = P_1(t) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$. Pri tem je $|\phi\rangle = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)|\psi\rangle$ stanje, v katero po času t preide začetno stanje $|\psi\rangle$. Z $(\delta A)^2 = P_1 - P_1^2$ sledi naposled

$$P_1(1 - P_1) \geq \left(\frac{\hbar}{2\delta W} \right)^2 \left(\frac{dP_1}{dt} \right)^2.$$

Na začetku, ob $t = 0$, je $P_1 = 1$ in mora biti po neenačbi odvod dP_1/dt enak nič. Verjetnost, da naletimo na začetno stanje, zares ne pojema linearno s časom. Zapisano enačbo integriramo po času

$$\int_1^{P_1} \frac{dP_1}{\sqrt{P_1(1 - P_1)}} \geq \frac{2\delta W t}{\hbar}$$

in izid $\arcsin(2P_1 - 1) \geq \frac{1}{2}\pi - 2\delta Wt/\hbar$ preuredimo v $P_1 \geq 1 - \sin^2(\delta Wt/\hbar)$.

LITERATURA

- [1] B. Misra, E. C. G. Sudarshan, *The Zeno's paradox in quantum theory*, J. Math. Phys. 18 (1977) 756; C. B. Chiu, E. C. G. Sudarshan, B. Misra, *Time evolution of unstable quantum states and resolution of Zeno's paradox*, Phys. Rev. D 16 (1977) 520.
- [2] E. Joos, *Continuous measurement: Watchdog effect versus golden rule*, Phys. Rev. D 29 (1984) 1626.
- [3] D. Home, M. A. B. Whitaker, *Reflections on the quantum Zeno paradox*, J. Phys. A: Math. Gen. 19 (1986) 1847.
- [4] A. Peres, *Zeno paradox in quantum theory*, Am. J. Phys. 48 (1980) 931.
- [5] R. J. Cook, *What are quantum jumps?* Phys. Scr. T21 (1988) 49.
- [6] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, *Quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A 41 (1990) 2295.
- [7] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics. Quantum Mechanics* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1965, 9-11.
- [8] R. P. Feynman, F. L. Vernon, jr., R. W. Hellwarth, *Geometrical representation of the Schrödinger equation for solving maser problems*, J. Appl. Phys. 28 (1957) 49.
- [9] T. Petrosky, S. Tasaki, I. Prigogine, *Quantum Zeno effect*, Phys. Lett. A 151 (1990) 109.
- [10] J. Strnad, *Fizika*, 3. del, DZS, Ljubljana 1988, str. 174, 175.

NOVE KNJIGE

Oznake, jedinice, nazivi i fundamentalne konstante u fizici, Naučna knjiga, Beograd 1990, 82 str.

Za zbirko *Sveske fizičkih nauka*, ki jo izdaja Institut za teorijsku fiziku v Beogradu, sta profesorja Milan Kurepa in Djordje Bek-Uzarov prevedla *Document IUPAP-25* z naslovom *Symbols, Units, Nomenclature, and Fundamental Constants in Physics*. Zapis je izdala Komisija za simbole, enote, poimenovanje, atomske mase in osnovne konstante (SUNAMCO) Mednarodnega združenja za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). Potrdila so ga tri njegova generalna zasedanja (1948, 1984 in 1987). Vsebuje splošna priporočila, znamenja za elemente, delce, stanja in prehode, definicije enot in sisteme enot, priporočena znamenja za fizikalne količine, priporočena matematična znamenja in osnovne konstante ter v dodatku količine zunaj SI. Celo fizikom, ki ne mislijo, da je mednarodni sistem enot razodetje in ki po svoje zaznamujejo količine, lahko knjižica koristi, ker vsebuje večinoma poleg srbskih tudi angleška in francoska imena. Prav tako ne gre zanikati, da bi bilo za poučevanje poenotenje znamenj precejšnja prednost, če bi ga bilo mogoče doseči. Mimogrede povejmo, da pade v oči napačna definicija navora $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ (namesto $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$), ker jo zasledimo med besedilom in še med popravki.

Knjižico je mogoče naročiti na Institutu za teorijsko fiziko v Beogradu ali kupiti pri Naučni knjigi.

Janez Strnad

RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V LETU 1990¹

V letu 1990 je bilo na Oddelku za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani v okviru usmerjenega programa Matematika izdelanih 23 raziskovalnih nalog. Objavljamo njihove kratke izvlečke.

Zbral in uredil *Milan Hladnik*

245. Operatorska Riccatijeva enačba. Nosilec Mirko Dobovišek, sodelavca Gorazd Lešnjak in Edvard Kramar.

Naloga obravnava strukturo sebi-adjungiranih rešitev algebraične Riccatijeve enačbe $-XCC^*X + B^*X + XB + A = 0$ v operatorskih algebrah. Z algeber matrik so na C^* -algebre posplošeni izreki Ljapunova ter J. C. Willemsa in W. A. Coppela.

246. Regularnost Cauchy-Riemannovih homeomorfizmov. Nosilec Franc Forstnerič, sodelavec Mitja Lakner, mladi raziskovalci Miran Černe, Darja Govekar in Jure Škarabot.

Z metodo zrcaljenja in ocenjevanja rasti odvodov holomorfne preslikave je raziskana regularnost lokalnih Cauchy-Riemannovih homeomorfizmov med strogo psevdokonveksnimi Cauchy-Riemannovimi mnogoterostmi v $\mathbb{C}^n$. Pri dodatnem geometrijskem pogoju na obe mnogoterosti se vsak lokalni CR homeomorfizem razširi do gladke preslikave v okolici dane točke (če sta mnogoterosti realno-analitični, celo do biholomorfne preslikave).

247. Relativne vložitve diskov v konveksna območja. Nosilec Josip Globevnik.

Podmnožica S območja $D \subset \mathbb{C}^N$ je diskretna v D , če nobena točka iz D ni limitna točka množice S . Za konveksna območja D so dokazani trije izreki o tem, kdaj je vsaka diskretna podmnožica v D vsebovana v holomorfno vložnem disku v D . Pri dodatnih pogojih na D dobimo lepše vložitve omenjenega diska.

¹ Izvlečki raziskovalnih nalog iz leta 1989 so bili objavljeni v Obzorniku mat. fiz. 37 (1990) 94-IV.

248. O relativni refleksivnosti končno generiranih operatorskih modulov. Nosilec Bojan Magajna, sodelavca Milan Hladnik in Boris Lavrič.

Naj bo $\mathcal{R}$ von Neumannova algebra na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ s komutantom $\mathcal{R}'$ in centrom $\mathcal{C}$. Za podprostore $\mathcal{S}$ v $\mathcal{R}$ je vpeljan pojem $\mathcal{R}$ -refleksivnosti. Če je podprostor $\mathcal{S}$ enorazsežen ali pa končnorazsežen in algebra $\mathcal{R}$ ne vsebuje centralnih delov tipa I_n za $n > 1$, je prostor $\overline{\mathcal{C}\mathcal{S}}$ (zaprtje v ultrašibki operatorski topologiji) $\mathcal{R}$ -refleksiven in prostor $\overline{\mathcal{R}'\mathcal{S}}$ refleksiven v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

249. Aproksimacija in strukturni operatorji za enačbe z infinitezimalnim generatorjem v retardiranem delu enačbe. Nosilec Miklavž Mastinšek.

Za funkcionalno diferencialno enačbo $\dot{x}(t) = Ax(t) + L(x_t)$, kjer je A infinitezimalni generator krepko zvezne polgrupe Hilbertovega prostora, je uvedena Yosidova aproksimacija A_λ operatorja A . Dokazana je konvergenca zaporedja solucijskih polgrup $T_\lambda(t)$ in karakterizirane so adjungirane polgrupe $T^*(t)$.

250. Aditivne preslikave na operatorskih algebrah. Sonosilca Matjaž Omladič in Peter Šemrl, sodelavca Heydar Radjavi in Luzius Grünenfelder, mladi raziskovalci Tomaž Košir, Igor Kukavica, Aleksander Simonič, Damjan Kobal in Jurij Kovič.

Obravnavane so aditivne preslikave na operatorskih algebrah, ki ohranjajo določene lastnosti. Aditivne surjekcije, ki ohranjajo spekter, so notranji avtomorfizmi ali notranji antiavtomorfizmi in zato avtomatično linearne. V realnem primeru velja isto za aditivne bijekcije, ki ohranjajo operatorje (projektorje) ranga 1.

251. Odvajanja in sorodne preslikave. Nosilec Joso Vukman, mladi raziskovalec Matej Brešar.

Opisana je struktura nekaterih jordanskih preslikav na prakolobarjih in polprakolobarjih. Obravnavane so komutirajoče preslikave na prakolobarjih in prikazana uporaba v teoriji Banachovih algeber.

252. Hardyjevi prostori skoraj periodičnih funkcij. Nosilec Aleš Založnik.

Posplošena je klasična teorija Hardyjevih prostorov na enotskem krogu v kompleksni ravnini. Namesto kroga vzamemo t.i. veliki disk, namesto celih števil katerokoli diskretno podgrupo urejene grupe realnih števil, namesto periodičnih funkcij pa igrajo glavno vlogo skoraj periodične funkcije.

253. Topologija, I. — 1.del. Sonosilca Dušan Repovš in Nežka Mramor-Kosta, sodelavci Dončo Dimovski, Rae Mitchell, Jože Malešič, Petar Pavešić, Janez Rakovec, Pavle Saksida, Evgenij Ščepin in Jože Vrabec, mladi raziskovalec Matija Cencelj.

Dana je karakterizacija stabilnosti presekov parov zveznih preslikav kompaktnih metričnih prostorov komplementarnih dimenzij v evklidske prostore in kot posledica kriterij za aproksimacijo zveznih preslikav kompaktnih metričnih prostorov v evklidske z vložitvami. Obravnavana so še druga vprašanja (ocena za velikost dveh značilnih podmnožic v domeni preslikave med mnogoterostmi, poliedrska struktura v kvocientnem prostoru).

254. Računalniško orientirane matematične metode — XV. Nosilec Janez Grad, sodelavec Janez Barle.

Glavni namen raziskave je opis in analiza novih metod za predstavitev in ažuriranje bazne matrike linearnega programa. Za redukcijo te matrike v bločno spodnjo trikotno obliko je razvit nov algoritem kot kombinacija klasičnih in alternativnih postopkov. Novi postopki, ki temeljijo na uporabi Schurovega komplementa matrike, so sprogramirani in delno testirani.

255. Včrtana in očrtana sfera omejene konveksne množice. Nosilec Stane Indihar.

Problem, kako dani kompaktni konveksni podmnožici $C \subset \mathbb{R}^n$ poiskati največjo včrtano in najmanjšo očrtano sfero, je preveden na enak problem za včrtane in očrtane politope, s katerimi dobro aproksimiramo dano množico C .

256. Aproksimacija z geometrijsko gladkimi krivuljami. Nosilec Jernej Kozak, sodelavca Matija Lokar in Yu Yu Feng, mladi raziskovalec Julijana Lapuh-Bele.

Računalniško podprto geometrijsko načrtovanje uporablja pojem geometrijske zveznosti za krivulje in ploskve. Definirane so geometrijsko zvezne Bézierjeve krivulje in uporabljene v aproksimacijski nalogi. Pokazana je zveza med konveksnostjo funkcije in monotonostjo zaporedja VD zlepkov.

257. Rešitve Schroederjeve enačbe. Nosilec Peter Petek, sodelavca Zvonimir Bohte in V. V. Bobkov.

Naloga obravnava iteracijo eksponentne funkcije z rešitvami Schroederjeve enačbe, iteracijo cele funkcije, ki nastane pri Todovi kletki, iteracijo kvadratne funkcije v obsegu kvaternionov in nekaj osnovnih dejstev o fraktalih (za družboslovce).

258. Reševanje problemov elektromagnetnega sevanja z integralnimi enačbami. Nosilec Gabrijel Tomšič, sodelavec Tomaž Slivnik.

Robni problemi za Helmholtzovo enačbo so prevedeni na reševanje integralnih enačb. Opisani sta dve metodi za njihovo reševanje, ki sta uspešni pri enačbah v zvezi z Dirichletovim problemom.

259. Kompletnostni izreki kot ekspertni sistemi — drugi del. Nosilec Izidor Hafner.

Podani so postopki in v prologu sestavljeni programi za generiranje dokazov v ekvivalenčnem računu in računu enakosti, ki za osnovo uporabljajo popolnostne izreke. Izdelan je postopek za transformacijo dokaza v sistemu s substitucijo v sistem z aksiomskimi shemami (skupaj s programi).

260. Kohomološke grupe cartanovskih algeber in njihovih modulov. Nosilec Dušan Pagon.

Študij cartanovskih algeber je zanimiv v zvezi s Kostrikin-Šafarevičevo hipotezo o klasifikaciji enostavnih modularnih Liejevih algeber nad obsegom s končno karakteristiko $p > 5$. Naloga je posvečena proučevanju kohomoloških grup navedenih algeber in nekaterih modulov nad modularnimi algebrami, ki v celoti karakterizirajo njihovo strukturo.

261. Teorija intenzionalnega Lambekovega računa. Nosilec Andreja Prijatelj.

V eksistenčnih izrekih sta podani konstrukciji za končne in neskončne modele dinamične intenzionalne logike. V tem razredu modelov sta definirani lastnosti minimalnosti, parcialna relacija med njima glede na hierarhijo v razredu in druge metalastnosti.

262. Zanimivi matematični problemi in slovenska srednješolska matematika. Nosilec Marija Vencelj.

Nekateri zanimivi geometrijski problemi, večinoma iz Doerriejeve knjige *Triumph der Mathematik*, so metodično obdelani in dokazani v čim večji splošnosti z algebrainimi sredstvi, ki jih uvaja matematika za naravoslovne srednje šole v Sloveniji.

263. Kombinatorična optimizacija III. Nosilec Vladimir Batagelj.

Naloga je nadaljevanje raziskav o teoretičnih in algoritmičnih problemih mer podobnosti med strukturiranimi objekti. Razdelane so različnosti, ki temeljijo na fragmentaciji objektov, razdalje na končnih grupah in predstavljeni različni pristopi k večkriterijskim problemom razvrščanja v skupine (skupaj z algoritmi).

264. Grafni retrakti in poti v grafih. Nosilec Sandi Klavžar, sodelavec Marko Petkovšek.

Delo, sestavljeno iz šestih člankov in povzetka doktorske disertacije, obravnava različne probleme teorije grafov, kombinatorike in računalniške aritmetike: grafne retrakte, Youngove tabele, teorijo zaokrožitvenih napak, konstruktivni dokaz Scott Suppesovega izreka in grafe intervalov.

265. Permutacijske grupe in simetrične strukture. Nosilec Dragan Marušič.

Preko pripadajočih orbitalnih grafov so karakterizirane neprimitivne reprezentacije linearnih grup $SL(2, 2^k)$. Sledi karakterizacija po točkah tranzitivnih pq -grafov z neprimitivnimi podgrupami avtomorfizmov, pri čemer sta p in q praštevili, in dokaz hamiltonskosti takih grafov.

266. Topološka teorija grafov in invariante grafov — 8. del. Sonosilca Bojan Mohar in Tomaž Pisanski, sodelavci Marko Razpet, John Shawe-Taylor in Rok Sosič, mladi raziskovalci Martin Juvan, Aleksandar Jurišić, Matjaž Kaufman in Janez Žerovnik.

Delo je sestavljeno iz večjega števila člankov in tehničnih poročil, povzetka magistrskega in povzetka doktorskega dela. Obravnava različne probleme kombinatorne, topološke in spektralne teorije grafov, kombinatorike in uporabe računalništva pri grafih.

267. Slučajne mere subordinatorskega tipa. Nosilec Mihael Perman, sodelavca Janko Gravner in Bojan Orel.

Subordinator je slučajni proces z neodvisnimi, stacionarnimi in neneativnimi prirastki, ki narašča le v skokih. Namen naloge je bil poiskati porazdelitev n največjih atomov v slučajni meri subordinatorskega tipa. Problem karakterizacije takih mer še ni popolnoma rešen, ugotovljeno pa je bilo nekaj novih potrebnih pogojev.

OBVESTILO

BRALCEM OBZORNIKA

Člane Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije prosimo, da članarino za leto 1991 nakažejo čimprej. Tudi v letošnjem letu bodo štiri številke izšle že pred počitnicami. Položnico z vpisano članarino v višini 200.– din smo priložili v prvi številki. Še enkrat vas prosimo, da na položnico ne pozabite vpisati svojega polnega naslova.

Obenem vas obveščamo, da bomo zaradi devalvacije ob izidu četrte številke višino članarine povečali na 250.– din. Tedaj bomo poslali vsem, ki nam sedanjega zneska še ne bodo nakazali, novo položnico s prošnjo, da nam novo članarino z opominom čimprej nakažejo.

Milan Hladnik, Janez Strnad, Ciril Velkourh

23. MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE ISTAM 90

Že vrsto let naši študentje uspešno sodelujejo na ISTAM-u, mednarodnem tekmovanju študentov v matematiki, ki ga vsako pomlad organizirajo navdušeni kolegi z beograjske matematične fakultete. Lani smo se v Beograd v zgodnjih jutranjih urah odpravili Bojan Kuzma, Matjaž Željko in Roman Drnovšek kot tekmovalci ter Miran Černe kot vodja ekipe. Tekmovanje, ki je potekalo od 27.4. do 29.4.1990, je bilo v prostorih matematične fakultete, tekmovalci pa so bili nastanjeni v nekakšnem planinskem domu pod Avalo.

Naši študentje so se odrezali odlično in so tudi tokrat posegli po najvišjih mestih. Matjaž Željko je v skupni razvrstitvi naših in tujih tekmovalcev dosegel tretje mesto, bil pa je prvi med jugoslovanskimi študenti. Prav tako odličen je bil Roman Drnovšek, ki je bil peti v skupni razvrstitvi in drugi med našimi. Solidno se je odrezal tudi naš tretji predstavnik, ki je zasedel 10. mesto.

Za konec tega kratkega poročila z matematičnega tekmovanja v Beogradu si oglejmo še naloge, ki so jih tekmovalci reševali.

1. in 2. letnik

1. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Dokažite, da obstaja taka točka η na odprtem intervalu $(0, 6)$, za katero obstaja limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(2f(3) + 3f''(\eta) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{6i}{n}\right) \right).$$

To limito tudi izračunajte.

2. Dokažite naslednjo trditev:

Če je $\{a_n\}$ tako realno zaporedje, da obstaja limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

in je zaporedje $\{na_n\}$ nepadajoče, potem je prvotno zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno.

3. Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, za katero je množica $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ omejena. Za vsak x iz odprtega poltraka $(0, \infty)$ definirajmo še funkcijo

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Dokažite, da velja ocena

$$\int_0^\infty F^2(x) dx \leq 4 \int_0^\infty f^2(x) dx,$$

kjer je enakost izpolnjena natanko tedaj, ko je $f \equiv 0$.

4. Z $\det(A)$ označimo determinanto kvadratne matrike A . Če sta A in B dve kvadratni, simetrični, pozitivni $n \times n$ matriki, dokažite, da velja neenakost

$$\det(A + B) > \det(A) + \det(B).$$

Realna analiza

1. Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija, ki je monotonno naraščajoča na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$ in monotonno padajoča na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ ter velja $f(0) = f(1) = 0$. Naj bo funkcija $F : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a > 0$) definirana s predpisom

$$F(0) = 0, \quad F(x) = x^{\frac{4}{3}} f\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right), \quad x > 0.$$

Če je f absolutno zvezna, ali je F tudi absolutno zvezna?

2. Ali obstaja zaporedje $\{A_n\}$ disjunktih množic realnih števil, za katere velja

$$m(A_n \cap (a, b)) > 0$$

za vsako naravno število n in za vsak interval (a, b) , $a < b$? Z m smo označili Lebesguovo mero na realni osi.

Funkcionalna analiza

1. Naj bo par (X, μ) merljiv prostor, za katerega velja $\mu(X) < \infty$ in V zaprt neskončno razsežen podprostor prostora $L^1(X, \mu)$. Dokažite, da V ne more biti vsebovan v $L^\infty(X, \mu)$.

2. Naj bo $\frac{1}{2} < a < 1$. Dokažite, da za singularne vrednosti s_n operatorja

$$(I^a f)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt,$$

definiranega na prostoru $L^2(0, 1)$, velja $s_n \asymp \frac{1}{n^a}$ ($n \rightarrow \infty$).

Višja algebra

1. Kvazigrupa K je popolnoma ciklična, če jo vsak njen element generira. Dokažite, da za vsako naravno število $n > 2$ obstaja popolnoma ciklična kvazigrupa reda n !

2. Ali je mogoče le z ravnilom in šestilom konstruirati trikotnik, za katerega imamo podani dve stranici a, b in polmer r včrtanega kroga? Pri tem predpostavimo, da trikotnik z danimi podatki zares obstaja.

Topologija

1. Poiščite triangulaciji torusa in realne projektivne ravnine z najmanjšim mogočim številom oglišč, robov in trikotnikov. Odgovor utemeljite.
2. Dokažite ali ovrzite tole trditev:
Topološki prostor je kompakten natanko tedaj, ko ima vsako njegovo odprto pokritje ireducibilno podpokritje.
(Pokritje je ireducibilno, če nima pravega podpokritja.)

Kompleksna analiza

1. Naj bo $A = \{z; 1 < |z| < r\}$ in $B = \{z; 1 < |z| < s\}$ in naj bo f biholomorfna preslikava med A in B .
 - a) Dokažite, da velja $|f(z)| = |z|^a$ ali pa $|f(z)| |z|^a = s$, kjer je

$$a = \frac{\log(s)}{\log(r)}.$$

- b) Dokažite še, da velja $r = s$.
2. Naj bo K kompaktna podmnožica kompleksne ravnine in naj bo

$$G(w) = \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{dx dy}{z - w} \quad (w \in \mathbb{C}).$$

- a) Dokažite, da je funkcija G zvezna v vsej kompleksni ravnini in analitična zunaj množice K .
- b) Dokažite naslednjo neenakost

$$|G(w)| \leq \left[\frac{\text{Area}(K)}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

za vsako kompleksno število w .

- c) Če je $K = \{z; |z| \leq r\}$, kjer je r neko pozitivno realno število, izračunajte funkcijo $G(w)$.

Geometrija

1. Denimo, da ravnine Π_i sekajo sfero S vzdolž krožnic k_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Pri tem se krožnici k_1 in k_2 sekata v točkah A_1 in B_1 , krožnici k_2 in k_3 v točkah A_2 in B_2 , krožnici k_3 in k_4 v točkah A_3 in B_4 in krožnici k_4 in k_1 v točkah A_4 in B_4 . Dokažite trditev: Če leže točke A_1, A_2, A_3 in A_4 v isti ravnini, potem leže tudi točke B_1, B_2, B_3 in B_4 v isti ravnini.
2. Naj bodo trikotniki XYZ, XX_1X_2, YY_1Y_2 in ZZ_1Z_2 enakostranični z isto orientacijo v neki evklidski ravnini. Dokažite, da so središča stranic X_2Y_1, Y_2Z_1 in Z_2X_1 oglišča enakostraničnega trikotnika.

Verjetnost

1. Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdeljene enakomerno na intervalu $(0, 1)$. Definirajmo slučajno spremenljivko Y kot tisti element množice $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, ki je najbližji vrednosti $\frac{1}{2}$. Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke Y in izračunajte njeno matematično upanje.
2. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, definirani na istem verjetnostnem prostoru. Dokažite, da velja naslednja neenakost

$$E(XY) \geq 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Programiranje

1. Pri danih naravnih številih $a_1, a_2, \dots, a_n$ poiščite podmnožico $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$, za katero je naslednji izraz minimalen:

$$\max\left\{\sum_{i \in S} a_i, \sum_{i \notin S} a_i\right\}.$$

2. Dan je seznam elementov $A_1, A_2, \dots, A_I$, pobranih iz dane realne matrike M dimenzije $m \times n$. Podmnožico $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ ($k \geq 1$) tega seznama elementov imenujemo cikel, če števili P_0 in P_1 ležita v isti vrstici, P_1 in P_2 v istem stolpcu, ... P_k in P_0 v isti vrstici matrike M . Napišite program, ki poišče cikel z najmanjšim številom elementov in vsebuje neko vnaprej dano število P_0 .

Numerična analiza

1. Naj bo funkcija u na kvadratu R s stranico h trikrat zvezno odvedljiva. Naj bo P interpolacijski polinom stopnje 2, za katerega je

$$P(x_i, y_i) = u(x_i, y_i), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Tu so (x_i, y_i) oglišča kvadrata, središča njegovih stranic in središče kvadrata. Dokažite, da se napaka $u - P$ lahko oceni z

$$|u(x, y) - P(x, y)| \leq \frac{h^3}{64\sqrt{3}} \left(\max_R \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| + \max_R \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \right).$$

2. Naj bo H simetrična pozitivno definitna matrika razsežnosti $m \times m$. S $p^0, \dots, p^{m-1}$ označimo konjugirane smeri glede na matriko H , t.j.

$$(p^i)^T H p^j = 0,$$

za različna indeksa i in j . Definirajmo zaporedje x^n s predpisom

$$x^{n+1} = x^n - a_n p^n, \quad a_n = \frac{(Hx^n - b)^T p^n}{(Hp^n)^T p^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Začetni x^0 je poljuben. Dokažite, da obstaja $k \leq m$, za katerega velja $x^k = H^{-1}b$.

Miran Černe

UMRLA JE PROFESORICA HELENA VELIKONJA



Helena Velikonja je bila rojena 26. januarja 1936 v Ljubljani kot dvanajsti otrok. Osnovno šolo in gimnazijo je obiskovala v Ljubljani. V višji gimnaziji je bila ob zaključku šolskega leta vedno pohvaljena kot najboljša učenka, nagrade pa ni nikoli dobila, ker "njeno vedenje ni bilo primerno". Bila je živahno dekle. Po maturi leta 1954 je želela študirati slavistiko, vendar so ji zaradi političnih razlogov to vsi odsvetovali. Od Železarne Ravne je dobila štipendijo za študij tehnične fizike, zato se je za to smer tudi odločila. Fakulteto je končala leta 1963. Kot

inženir fizike se je zaposlila v tovarni polprevodnikov. Leta 1965 pa je začela poučevati fiziko in matematiko na Srednji gradbeni šoli, kjer je pedagoško delo opravljala vse do decembra 1990. Poučevanja se je sprva lotila z negotovostjo, čeprav ji delo z otroki ni delalo težav. Ob številnih nečakih, katerim je bila čudovita teta in inštruktorica, je bila vajena otrok in poznavalka njihovih problemov. Sčasoma je ugotavljala, da je v delu z mladimi našla svoj pravi poklic. Učencev ni le učila fizike in matematike, ampak jih je pripravljala za življenje. V razredu je znala ustvariti sproščeno ozračje in kot v igri s poskusi pritegniti mlade ljudi k sodelovanju. Bistre učence je z dodatnimi nalogami in namigi usmerjala v poglobljanje znanja, jih spodbujala ob spodrseljajih in jih pripravljala na tekmovanja. Leta 1990 je veliko truda vložila v organizacijo republiškega tekmovanja iz fizike za srednješolce, ki je bilo na Srednji gradbeni šoli.

V Upravnem odboru DMFA jo pogrešamo, saj je pet let vestno opravljala blagajniška dela, obenem pa s svojevrstnim humorjem popestrila marsikatero našo sejo. Ob njej človek res ni mogel biti slabe volje. Enako jo pogrešajo njeni sodelavci v zbornici, ki ji je dajala ritem, barvo in utrip.

Vsem, ki smo jo poznali, bo profesorica Helena ostala v prijetnem spominu. Pogrešali bomo njeno preprostost in vedrino ter njeno toplino, s katero je znala navezovati in ohranjati stike z ljudmi.

Darjo Felda

POSKUSNI ZAKLJUČNI IZPIT NA NARAVOSLOVNIH ŠOLAH

Da bi odgovorili na vprašanje, ali je smiselno vpeljati enotne (eksterne) naloge že pri zaključnem izpitu v šolskem letu 1990/91, so se aktivni učiteljev matematike na slovenskih naravoslovnih šolah odločili za poskusno pisanje takega izpita konec šolskega leta 1988/89.

Štiri srednje šole so prevzele nase skrb, da neodvisno pripravijo enotne naloge in enoten ocenjevalni instrumentarij (točkovno lestvico). Nalogo so izpolnile le tri šole, preizkus pa je pisalo deset od dvaindvajsetih naravoslovnih šol, ki so imele to šolsko leto zaključne letnike. To so šole, ki imajo v štirih letih srednjega izobraževanja največji fond učnih ur matematike (več ima samo še vojaška gimnazija).

Udeležba šol je bila nekoliko okrnjena tudi zaradi sovpadanja s še enim podobnim testom. Istočasno z akcijo šolskih aktivov učiteljev matematike je namreč tudi pedagoški inštitut testiral naravoslovce s testi druge mednarodne študije kvalitete znanj in pouka matematike (na kratko SIMS — Second International Mathematics Study). V ta test so bili vključeni vsi učenci šol naravoslovno-matematične dejavnosti (NMD), to je, nekaj manj kot 1300 učencev, kar je približno 13% vseh četrtošolcev v tem šolskem letu. Za primerjavo je akcija aktivov učiteljev matematike na naravoslovnih šolah zajela 401 učenca, kar je le slabih 31% vseh naravoslovcev. Primerjajmo še uspeh pri obeh preizkusih znanja. Na mednarodnem testu je bilo doseženih 52.10% možnih točk. Pri poskusnem pisanju zaključnega izpita pa so se učenci odrezali mnogo slabše, dosegli so v povprečju le 36.67% možnih točk.

Čeprav so se šolski aktivni potrudili pri sestavi nalog in čeprav se za naravoslovno smer odločajo najboljši učenci, bi pri zaključnem izpitu glede na dosežene rezultate padlo kar 69.15% testirane generacije. Toliko učencev je namreč zbralo manj kot 45% vseh možnih točk.

Ta ugotovitev daje tudi odgovor na začetno vprašanje o enotnih nalogah po šolah. Kot kažejo rezultati preizkusa, si pri današnji generaciji učencev ne moremo dovoliti enotnega pisnega preizkusa znanja. Zato bodo predvidoma letos, se pravi ob koncu šolskega leta 1990/91, šole same sestavile in ocenjevale naloge za zaključni izpit iz matematike.

Na naravoslovnih šolah učimo sicer po enotnem učnem načrtu in to je tudi vse. Poglobljanje snovi je neenotno, različno od šole do šole. Tudi pristopi in učbeniška gradiva, ki jih učenci in učitelji uporabljajo, niso enotna. Vsak učitelj se po svoji vesti prebija skozi gradivo, končni cilj pa ni enolično določen in ni dogovorjen. Če so take razlike že na naravoslovnih šolah, lahko pričakujemo, da je stanje še slabše na drugih strokovnih in splošnih šolah. Nehote se mi zastavlja vprašanje, ali je le znanje matematike tako razpršeno, da ne moremo uvesti enotnega izpita, ali pa je podobno tudi pri drugih predmetih.

Za konec si pogledjmo še naloge in rezultate po posameznih kompletih nalog. Vsak razred je reševal tri skupine nalog (A, B, C), ki so bile učencem razdeljene slučajno. Naloge smo razposlali šolam v originalni obliki, tako kot

smo jih dobili od sestavljalcev. Priloženo je bilo tudi navodilo za reševanje in točkovanje. Nekaj očitnih napak so učitelji po šolah popravili, toda to ni bistveno vplivalo na rezultate. Čas pisanja je bil omejen na 2 šolski uri.

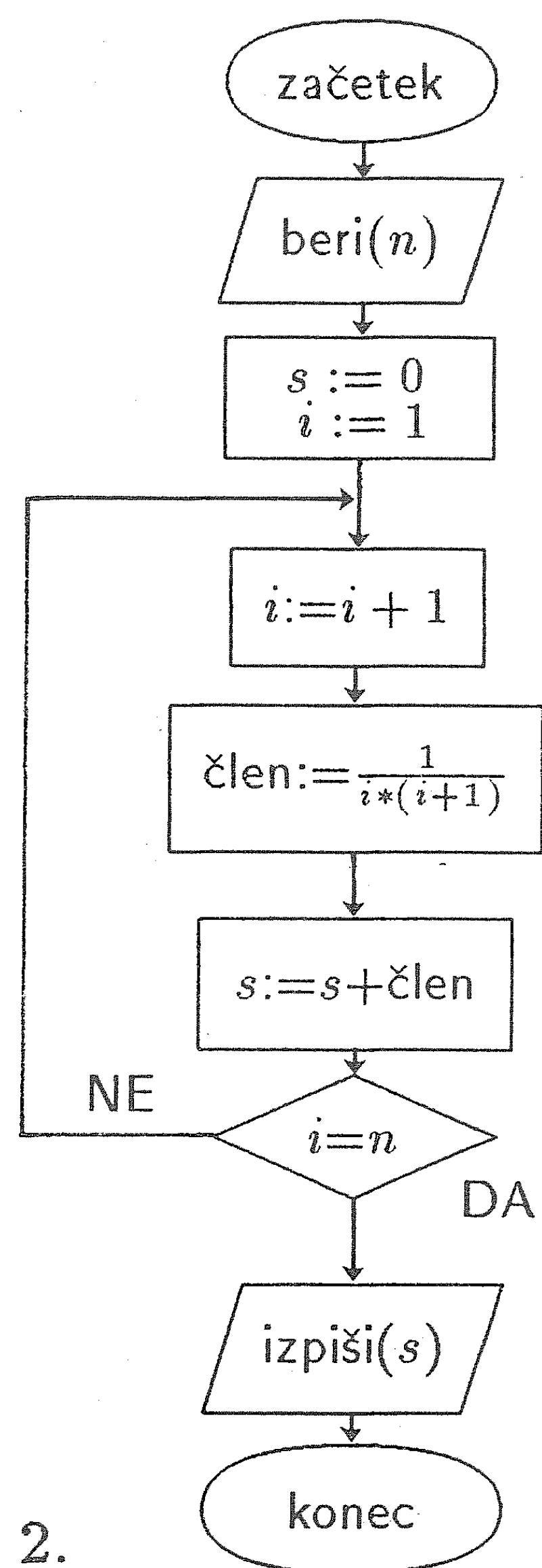
NALOGE (originalna formulacija)

Skupina A

1. Premica $2x - y = 0$ seka abscisno os v točki A , premica $x + 2y - 10 = 0$ v točki B , obe pa se sekata v točki C .
 - a) Izračunaj koordinate točk A , B in C .
 - b) V trikotniku ABC izračunaj notranji kot pri B (na minute natančno) in dolžino stranice BC .
 - c) Izračunaj ploščino trikotnika ABC .
 - č) Zapiši enačbo trikotniku ABC očrtanega kroga.
 - d) Nosilka višine na stranico AV seka krožnico očrtanega kroga v točkah C in D . Dokaži, da je trikotnik CDB enakokrak.
 - e) Na krožnici očrtanega kroga poišči tako točko E , da bo ploščina trikotnika BCD maksimalna.

2.

- a) Dokaži, da je $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$
- b) Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepajo abscisna os, krivulja $x^2y + xy - 1 = 0$ ter premici $x = 1$ in $x = 2$! (Absolutna napaka rezultata naj bo kvečjemu 0,0001). (Pomagaj si s točko a).)
- c) Preslikava $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; n \rightarrow s(n)$, kjer je $s(n)$ končna vrednost spremenljivke s v algoritmu, podanem z diagramom poteka (gl. desno).
 - i) Zapiši in izračunaj $s(4)$. (Ali: kolikšna je končna vrednost spremenljivke s , če je podatek $n = 4$?)
 - ii) Dokaži, da je $s(n) = \frac{n-1}{2(n+1)}$.
 - iii) Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n)$.
- č) Naj bo $f(z) = \frac{z-1}{2(z+1)}$, $z \in \mathbb{C}$ ter a_1 ničla funkcije $f(z)$, a_2 njen pol, $a_3 = 2f(i)$ ter $a_4 = 2f(-i)$ (i je imaginarna enota). Pokaži, da je množica $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ multiplikativna grupa. Sestavi tablico množenja.



3. Dana je funkcija $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 5 \log_2(x - 1) - 2$.

- a) Določi definicijsko območje (D_f), zalogo vrednosti (Z_f), ničlo, zapiši premik in razteg v smeri x in v smeri y ter funkcijo nariši.
- b) Poišči inverzno funkcijo $h^{-1}(x)$ ($h : D_f \rightarrow Z_f$).

- c) Reši enačbo $|h(x)| = 3$ grafično in računsko na dve decimalki natančno.
 č) Določi verjetnost, da bo pri naključno izbranem številu x_0 iz množice $S = \{2, 3, 4, 5\}$ naklonski kot tangente na krivuljo $y = h(x)$ v točki x_0 med 0 in $\frac{3\pi}{7}$.

Skupina B

1. Trikotnik s ploščino 8 ima dvoje izmed svojih oglišč v točkah $A(1, -2)$ in $B(2, 3)$.
 - a) Določi tretje oglišče C , če veš, da leži v drugem kvadrantu in na premici $2x + y - 2 = 0$.
 - b) Določi koordinate težišča tako dobljenega trikotnika ABC .
 - c) Na že omenjeni premici $2x + y - 2 = 0$ določi točko D tako, da bo vsota kvadratov razdalj $d(A, D)$ in $d(B, D)$ kar najmanjša.
2. Dana je družina polinomov $p_a(x) = x^4 + ax^2 + 1$, ($a \in \mathbb{R}$).
 - a) Dokaži, da ničle polinoma $p(x)$ za $a = -\frac{10}{3}$ sestavljajo aritmetično zaporedje. Zapiši splošni člen tega zaporedja in izračunaj še S_{20} , če so koreni prvi štirje členi.
 - b) V družini $p_a(x)$ izberi tistega, ki ima lokalni ekstrem pri $x = -1$, in nariši njegov graf.
3. Množica točk v ravnini, ki zadošča enačbi $y^4 + (x^2 - 6x - 16)y^2 - 6x^3 + 96x = 0$, določa dve stožnici. Izračunaj ploščino manjšega od obeh likov, ki ga določata loka krivulj med presečiščema.
4. Dane so matrike

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

- a) Dokaži, da tvorijo grupo za množenje.
 - b) V tej grupi reši enačbo $X \cdot B = C$.
 - c) V kaj linearna transformacija, ki jo določa matrika B , preslika premico $y = 2x$?
5. Dani so vektorji

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} 2k \\ 1 \\ 1 - k \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{c} = \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{vmatrix}$$

v ortonormirani bazi.

- a) Določi k tako, da bo $\vec{a}$ oklepala enaka kota z $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
 - b) Napiši normalno enačbo ravnine, ki jo določata $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
 - c) Določi k tako, da bo $\vec{a}$ pravokoten na premici $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.
6. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulja $y = (2x - x^2)e^x$ in os x na intervalu med ničloma $f(x)$, in nariši graf krivulje (ekstremi, prevoji).
7. Dana je enačba $\frac{2}{\sin x} - \sin x = a \cdot \operatorname{ctg} x$.

- a) Pri katerih a je rešljiva?
b) Za $a = \frac{5}{2}$ reši enačbo.

Skupina C

- Dana je funkcija $y^2 = (x^2 - x - 12)/(x - 2)$.
 - Funkcijo nariši (določi ničle, pole, asimptoto).
 - Določi intervale, kjer je funkcija konveksna.
 - Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije, os x in premica $x = -1$.
- Določi x v izrazu $\left(\sqrt{x}^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, če je četrti člen razvitega binoma 200.
- Trikotnik, v katerem je $c = 8$, kota α in β pa sta enaka rešitvama enačbe $3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 14 \cos^2 x = 2$, se zavrti okoli stranice c . Izračunaj površino nastale vrtenine.
- Točke A, B, D in A_1 so sosednja oglišča paralelepipeda.
 - Zapiši enačbo ravnine $\sum ABD$.
 - Izračunaj ploščino lika $ABCD$.
 - Izračunaj kot $\sphericalangle BAD$.
 - Izračunaj prostornino paralelepipeda.

REZULTATI NALOG

Skupina A

Max. štev. točk	2	3	3	3	4	5	1	5	2	4	2	6	6	3	6	5	Skupaj
Naloga	1a	1b	1c	1č	1d	1e	2a	2b	2ci	2cii	2ciii	2č	3a	3b	3c	3č	točk
	1. naloga (20 točk) v %						2. naloga (20 točk) v %						3. naloga (20 točk)				v %
	93.8	69.76	82.44	51.43	35.43	15.35	83.71	64.12	45.72	23.23	56.96	21.30	45.47	39.02	34.22	15.20	36.96

Skupina B

Max. štev. točk	5	6	5	6	5	5	4	Skupaj
Naloga	1	2	3	4	5	6	7	točk
	Vse naloge 36 točk							v %
	35.16	42.40	18.52	23.50	19.44	36.40	28.92	27.72

Skupina C

Max. štev. točk	4	2	3	5	5	2	1	2	1	2	Skupaj
Naloga	1a	1b	1c	2	3	4a	4b	4c	4d	4e	točk
	1. naloga(9 točk)			2.nal.(5)	3.nal.(5)	4. naloga (8 točk)				v %	
	70.44	31.23	30.90	41.25	41.33	51.04	23.96	21.30	16.65	4.69	36.38

Zvonko Perat

PREŠERNOVE NAGRADE ŠTUDENTOM MATEMATIKE IN FIZIKE ZA LETO 1990*

Na Univerzi v Ljubljani je bilo letos podeljenih 12 Prešernovih nagrad. Med nagrajenci je bil tudi študent matematike

15. Drnovšek, Roman Operatorske neenakosti

Prav tako so tudi na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo podelili 6 Prešernovih nagrad. Dobila sta jih tudi dva študenta matematike in trije študenti fizike:

Matematika

- | | |
|------------------|--|
| 6. Bernik, Janez | Meje perturbacij normalnih matrik |
| 7. Mrčun, Janez | Seskvilinerane forme in operatorji na Hilbertovem prostoru |

Fizika

- | | |
|---------------------|--|
| 18. Kokol, Miran | Optimalna samoorganizacija adaptivnih sistemov |
| 19. Korpar, Samo | Detekcija fotonov sevanja Čerenkova s proporcionalnim plin-skim števcem |
| 20. Podobnik, Tomaž | Kotne porazdelitve pri reakciji $\gamma\gamma \rightarrow a_2 \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^-$ |

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1990

Leta 1990 smo povabili v društvo vse študente matematike in fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, Pedagoški akademiji v Ljubljani ter Pedagoški fakulteti v Mariboru. Zato smo imeli lani precej novih članov (45); abecedni seznam objavljamo v nadaljevanju. V seznamu pa smo morali črtati 105 članov: 14 jih je revijo odpovedalo, 91 pa jih kljub trem opominom do konca leta ni plačalo članarine. Med slednjimi je 18 takih, ki so pozabili na položnici napisati svoj priimek.

Ciril Velkourh

- | | | |
|-------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1529. Abramič, Darja | 1544. Jeraj, Robert | 1559. Novak, Jelka |
| 1530. Alhadi, Mohsen | 1545. Juntez, Matjaž | 1560. Oštir-Sedej, Krištof |
| 1531. Arčon, Denis | 1546. Kaufman, Matjaž | 1561. Peterlin, Franc |
| 1532. Bajc, Jure | 1547. Klabjan, Diego | 1562. Plestenjak, Bor |
| 1533. Bizjak, Matej | 1548. Kotar, Andrej | 1563. Pogač, Vlado |
| 1534. Bohinc, Klemen | 1549. Kovačič, Gorazd | 1564. Potočnik, Marjan |
| 1535. Česen, Irena | 1550. Koželj, Metod | 1565. Savnik, Sebastjan |
| 1536. Čok, Alenka | 1551. Leskovec, Mateja | 1566. Studen, Mojca |
| 1537. Drinovec, Barbara | 1552. Lisac, Blaž | 1567. Širca, Simon |
| 1538. Duh, Andrej | 1553. Malešič, Matjaž | 1568. Škrk, Damjan |
| 1539. Fricelj, Alenka | 1554. Marinko, Nataša | 1569. Štrukelj, Mitja |
| 1540. Gabrovšek, Franci | 1555. Mlakar, Mateja | 1570. Zalaznik, Irena |
| 1541. Grabec, Daša | 1556. Mlinar, Ivan | 1571. Zdešar, Urban |
| 1542. Gregorčič, Romana | 1557. Mrčun, Janez | 1572. Zidar, Peter |
| 1543. Jagličič, Zvonko | 1558. Mrdžen, Tomo | 1573. Ženko, Ernest |

* Seznam Prešernovih nagrajencev za leto 1989 je bil objavljen v Obzorniko mat. fiz. 37 (1990) 58.

RAZPET M., Sedi in piši z L^AT_EXom, Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavod Republike Slovenije za šolstvo 1991, 60 str., Račkova knjižnica 3.

Programski paket emT_EX 3.0, Primož Gabrijelčič in dr., Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1991.

Časi, ko je bil izpis na računalniškem tiskalniku sinonim za grde, oglate črke, so že davno mimo. Vedno bolj izpopolnjeni tiskalniki in ustrezna programska oprema nam omogočajo, da so računalniški izpisi povsem primerljivi s knjigotiskom. Eno od najbolj izpopolnjenih orodij za oblikovanje in izpis besedila je program T_EX. Zasnoval ga je znani matematik in računalnikar Donald E. Knuth. Omogoča nam res kvalitetno pripravo besedila za tisk in že na cenениh 9-igličnih tiskalnikih omogoča kakovosten izpis. Res je, da je potrebno na začetku vložiti v učenje nekoliko več truda, vendar se nam trud bogato poplača.

Da pa bo učenje še lažje, nam bo pomagala knjiga Marka Razpeta, *Sedi in piši z L^AT_EXom*. Kot pravi sam avtor, se je L^AT_EX-a mogoče naučiti vsaj v 15 urah. Ob pomoči knjižice bo to šlo še lažje in hitreje. Gradivo je podano sistematično in pregledno. Opremljeno je s številnimi zgledi, ki niso sami sebi namen, ampak so zelo uporabni. Tako v knjigi najdemo primer kemijske formule, kontrolne naloge iz nemškega jezika, primerek vabila, pesem, številne zapletene matematične formule, razpredelnice, ... Avtor se je uspešno izognil temu, da bi skušal povedati vse, kar zmore L^AT_EX. Prikaže dovolj ustreznih orodij, ki nam pridejo pogosto prav, težje stvari pa prepusti drugi literaturi.

Sama knjiga nam ne bo kaj dosti pomagala, če ne bomo imeli na voljo ustreznih programov. Žal so bile doslej različne izpeljave T_EX-a za PC združljive računalnike dokaj draga zadeva. Zato so med nami krožile predvsem črne kopije in nam (vsaj nekaterim) povzročale slabo vest. No, sedaj si lahko oddahnemo. S pomočjo skupine navdušenih uporabnikov tega programskega okolja, je v naše kraje prijadral emT_EX, izvedba nove inačice T_EX-a 3.0. Avtor, Eberhard Mattes z univerze v Stuttgartu, je program namenil prostemu razširjanju. Zato ga lahko dobimo zastonj. V originalni obliki je dokaj neroden za uporabo, vsaj za večino uporabnikov. Zahvaljujoč stikom z avtorjem je omenjena skupina pripravila več paketov s programi, ki so namenjeni za posameznike ter znanstvene in prosvetne ustanove po dostopni ceni.

Programski paket je razdeljen na 7 paketov, med katerimi nekateri nastopajo v več inačicah. Običajni uporabnik, bo za delo potreboval le paketa 1 in 2, ki sta na treh disketah 5,25" ali dveh 3,5", tako da so stroški nabave res minimalni: 350 din (280 din). Vsebine posameznih paketov ne bomo naštevali, povejmo le, da je v paketih razporejenih cel kup uporabnih programov, 'debelejša' izvedba T_EX-a, številni nabori znakov, programi za izpis na matrične in laserske tiskalnike, kot tudi program za izpis na zaslon.

Poleg disket dobimo še knjižico s kratkimi navodili za uporabo tega

programskega paketa. Opisano je nameščanje, vsebina paketov, način kli-
ca programov, namen posameznih pomožnih programov. Priložen je tudi
dodatek z navodili za začetnike in seznam naborov znakov. Marsikdo bo
pogrešal podrobnejših navodil, vendar bodo za prvo silo zadostovala tudi ta.

Če torej želite izboljšati izgled svojih natisnjenih izdelkov, ne pomišljajte
in kupite programski paket emTeX in se skupaj z Razpetovo knjigo lotite
učenja. Večina knjig, ki jih je v zadnjem času izdalo Društvo matematikov,
fizikov in astronomov Slovenije, je oblikovanih prav s TeX -om. Prav tako
sta s TeX -om stavljena tudi Obzornik za matematiko in fiziko ter Presek, pa
tudi številni učitelji ga že uporabljajo za pripravo kontrolnih nalog, sporočil
in okrožnic.

Matija Lokar

**McCOURT F. R. W., Beenakker J. J. M., Koehler W. E., and
Kuščer I., Nonequilibrium phenomena in polyatomic gases: Vol.1,
Dilute gases, Clarendon Press, Oxford 1990, 562 str.**

Čeprav je minilo že stoletje, odkar sta Boltzmann in Maxwell postavila
osnove kinetične teorije plinov, se fiziki resneje ukvarjajo z večatomnimi plini
še le zadnjih 30 let. Zakasnitev so povzročile teorijske težave na eni strani in
razmeroma neobčutljive eksperimentalne metode na drugi.

Monografija bo v dveh delih zajela vsa najpomembnejša novejša do-
gnanja neravnovesne fizike razredčenih večatomnih plinov. Napisali so jo
strokovniki, ki so aktivno sodelovali pri raziskovanju na tem področju. V
prvem delu, ki je že izšel in mu je namenjen tale zapis, podajajo pregled ne-
ravnovesnih pojavov v razredčenih večatomnih plinih, ki so zaprti v dovolj
velikem prostoru, da je vpliv površin zanemarljiv. V prvih dveh poglavjih
opisujejo Boltzmannovo enačbo in njene rešitve za razredčene enoatomne
pline. V nadaljevanju najprej sledi uvod v lastnosti večatomnih plinov in
nato posplošitve Boltzmannove enačbe, ki upošteva električne in magnetne
lastnosti molekul. Obdelajo tudi ustrezne rešitve tako dopolnjene enačbe. V
preostalih poglavjih teorijska dognanja uporabljajo za razlago vrste eksperi-
mentalnih rezultatov. Podrobno pojasnijo vpliv magnetnega in električnega
polja na transportne pojave. Opišejo sipanje svetlobe, nuklearno magnetno
resonanco in absorpcijo mikrovalov, pojave, ki so temelji eksperimentalnih
metod za študij fluktuacij tudi v večatomnih plinih.

Ta odlična knjiga je sicer namenjena predvsem specialistom, vendar
je zelo jasno napisana, tako da bi jo lahko vsaj delno uporabljali tudi
podiplomski študenti. Še posebej velja poudariti, da knjiga ni zanimiva le za
fizike, pač pa tudi za tehnike, ki se ukvarjajo npr. z vesoljskimi poleti. Za nas
je knjiga pomembna še zato, ker je eden od avtorjev, Ivan Kuščer, profesor
na Oddelku za fiziko Univerze v Ljubljani. Profesor Kuščer je že dolga leta
eden od vodilnih strokovnjakov za statistično fiziko plinov. V zadnjem času
je vneto sodeloval pri razvoju kinetične teorije večatomnih plinov in tako
postal soavtor knjige.

Slobodan Žumer

SZEKELY G. J., Paradoxa. Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik. Akadémiai Kiadó, Budapest 1990. 239 str.

Ta zanimiva knjiga o paradoksih v verjetnosti in statistiki je izšla v angleščini pri isti založbi že leta 1986. Obzornik za matematiko in fiziko je objavil zapis o njej leta 1988 v 35. letniku na strani 96-III.

SCHIPP F., Wade W. R., Simon P., Walsh series, An introduction to dyadic harmonic analysis, Akadémiai Kiadó, Budapest 1990, 560 str.

Naj bo r funkcija, ki je enaka 1 na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ in -1 na intervalu $[\frac{1}{2}, 1)$ ter razširjena na vso realno os s periodo 1. Rademacherjev sistem funkcij je definiran s predpisom $r_n(x) = r(2^n x)$ za $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$, Walshev sistem pa s predpisom $w_n = \prod_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}$, kjer je n_k k -ti koeficient v binarnem razvoju števila n po potencah števila 2, to je $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k$ ($n_k = 0$ ali 1 za $k \in \mathbb{N}$, za vsak n je le končno mnogo koeficientov različnih od 0). Walshev sistem vsebuje vse Rademacherjeve funkcije ($w_{2^n} = r_n$). Opisane funkcije so periodične s periodo 1 in zavzamejo lahko samo vrednosti 1 in -1 .

Walshev sistem je morda najpreprostejši neskončen ortonormiran sistem funkcij na intervalu $[0, 1)$ (z integralom kot skalarnim produktom). Ker ga je zelo lahko generirati s hitrimi računalniki in zavzame zelo malo prostora, ga je možno uspešno uporabiti v številnih praktičnih problemih (analizi signalov, prenosu podatkov, kompaktnem shranjevanju slik in vzorcev itd.) Zaradi prihranka pri teži so ga uporabili npr. v vesoljski sondi Mariner pri raziskovanju Marsa. Ker ima s klasičnim trigonometričnim sistemom skupne mnoge lastnosti, predstavlja netrivialen model za harmonično analizo (na diadični grupi) in ima razumljivo tudi teoretični pomen. Z Walshevim sistemom lahko npr. konstruiramo separabilen Banachov prostor brez baze (eksistenca takega prostora je bil dolgo odprt problem; rešil ga je Enflo leta 1973). Drug tak primer je iz teorije verjetnosti: osnovni izrek za martingale je prvi dokazal Paley prav za Walshev sistem.

O vsem tem in še o mnogočem drugem v zvezi s teorijo Walshevih funkcij se lahko izčrpno poučimo iz obravnavane knjige. V njej je snov razložena sistematično, nekako po zgledu klasične teorije Fourierovih vrst. Predstavljene so osnovne lastnosti Walsh-Fourierovih koeficientov, diadični martingali in Hardyjevi prostori, konvergenca po normi, konvergenca skoraj povsod in sumabilnost Walsh-Fourierovih vrst, zveza z drugimi sistemi (kot sta Haarov, Franklinov) in problem eksistence Schauderjeve baze, problem enoličnosti, Walsheve vrste z monotonimi koeficienti in Walsh-Fourierova transformacija. Na koncu poglavij so naloge, na koncu knjige razni dodatki, bogat seznam literature in stvarno kazalo. Zelo so koristne tudi podrobne zgodovinske opombe. Knjiga je seveda primerna in zanimiva predvsem za tiste, ki že poznajo probleme in metode klasične Fourierove analize, za specialiste iz (diadične) harmonične analize pa bo v bodoče nepogrešljivo referenčno delo.

Milan Hladnik

KRIŽANIČ F., Temelji realne matematične analiza, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1990, 637 str.

Profesor Križanič že vrsto let predava analizo študentom fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. V tem času je postopoma nastajal pričujoči učbenik, ki seveda zajema mnogo več od tistega, kar lahko v enem študijskem letu povemo v predavalnici. Pri izbiranju snovi se je avtor odločil, da bo na enem mestu združil vso analizo — klasično, funkcionalno ter globalno hkrati, kar utemeljuje s tem, da fiziki poslušajo tečaj le enkrat in zato nimajo prilike spoznavati analize po kosih, tako kot študentje matematike.

Učbenik pričinja s poglavjem, posvečenim osnovnim pojmom o množicah in preslikavah med njimi, vpelje pa tudi pojma algebrske zgradbe in kategorije. Sledi obširno poglavje o metričnih prostorih in zveznih preslikavah, v katerem se avtor izdatno posveti tudi elementarnim realnim funkcijam ene realne spremenljivke. V tretjem poglavju je obdelan odvod tako preslikav $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kot tudi $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ter nedoločeni integral. Četrto poglavje je posvečeno določenemu integralu, tako v realnem kot tudi v kompleksnem obsegu. Vrste v Banachovem prostoru so obdelane v petem poglavju, večina snovi na tem mestu pa se seveda nanaša na vrste v $\mathbb{R}$ oziroma $\mathbb{R}^+$. Zadnje, šesto poglavje je uvod v teorijo gladkih mnogoterosti ter prinaša osnove diferencialne topologije in teorije katastrof. Če je tematika prvih petih poglavij že v precejšni meri obdelana v slovenski matematični literaturi, pa je snov zadnjega poglavja zagotovo nov prispevek avtorja v zakladnico znanja, zapisanega v našem jeziku.

Profesor Križanič s to knjigo počasi zaokrožuje svojo znano serijo učbenikov iz višje matematike, ki jo je skozi desetletja predaval matematikom in fizikom na ljubljanski univerzi. Sam jih postavlja v naslednje logično zaporedje: *Temelji realne matematične analize*, *Linearna algebra in linearna analiza* (1969), *Vektorska in tenzorska analiza* (1966), *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun* (1974), *Linearna analiza na grupah* (1982). Kot vsa njegova dosedanja dela — tako članke kot knjige — odlikuje tudi pričujočo knjigo karakteristični stil. Tako je med drugim tudi to delo pisano v izbrušenem in barvitom jeziku, polno duhovitih opomb in pojasnil, ki skušajo bralca prepeljati čez težja mesta. Prav tako se avtor zopet ni ustrašil nestandardnega presajanja nekaterih tujk na naša tla.

Priznati je treba, da je knjiga zahteven učbenik in verjetno bo po njej lahko samostojno študiral le najboljši študent. Poleg tega ne vsebuje tudi nobenih vaj, vendar vsaj za dobršen del obdelane snovi že imamo nekaj zbirk (rešenih) nalog, ki so jih napisali drugi avtorji in bi bile lahko študentu v pomoč. Zato bo verjetno novi učbenik kot dopolnitev k zapiskom s predavanj lahko uporaben tudi za povprečnega študenta. Vsekakor bo knjiga tudi zelo koristen vir za podiplomske študente fizike (in do neke mere tudi matematike). In končno, zanimiva utegne biti tudi matematikom, ki želijo v svojo strokovno knjižnico dodati nov, kvaliteten slovenski učbenik višje matematike.

Dušan Repovš