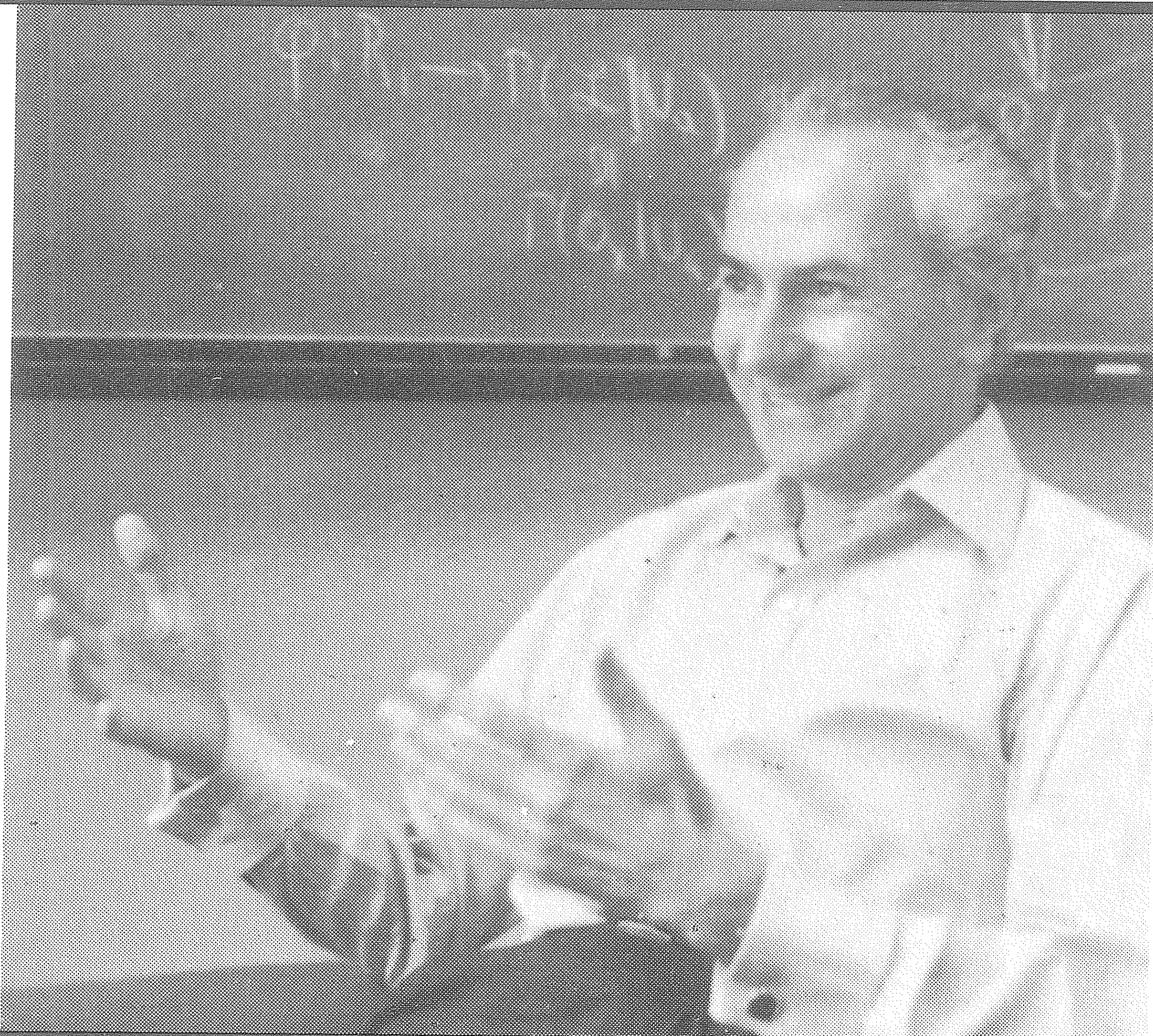


1991

Letnik 38

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1991

letnik 38, številka 2, strani 33–64

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Petkovšek (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko), Ciril Velkovich (urednik).

Jezikovno pregledala Marija Janežič, slike narisal Miha Štalec, računalniško stavil Martin Zemljčič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 200.– din. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 300.– din, za tujino 40 DEM. Posamezna številka 40.– din, dvojna številka 80.– din, stare številke 20.– din.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški komite za raziskovalno dejavnost in tehnologijo in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo.

© 1991 DMFA Slovenije – 1047

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Nenegativne nilpotentne matrike — Nonnegative nilpotent matrices (Boris Lavrič) 33–38

Fermatova enačba za polinome — Fermat equations for polynomials (Bojan Magajna) 39–44

Izboljšano urejanje s kopicami — Bottom-up heapsort (Sandi Klavžar, Jože Marinček) 45–52

Pogovor o pouku matematike — On teaching mathematics (Serge Lang, prev. Janko Moder) 52–III

Nove knjige — New books (Jože Grasselli, Vladimir Batagelj, Janez Grad, Janez Rakovec) 44, 52, IV

Vprašanja — Questions

121. Rothova naloga (Marija Vencelj) 38

Na ovitku: Serge Lang

NENEGATIVNE NILPOTENTNE MATRIKE

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1985) 15 A 48

V sestavku predstavimo preprost postopek za ugotavljanje nilpotentnosti nenegativne kvadratne matrike in ga nato izpopolnimo, tako da pokaže tudi indeks nilpotentnosti.

NONNEGATIVE NILPOTENT MATRICES

A test of nilpotence for nonnegative matrices is given and improved to yield also the index of nilpotence.

Za uvod utrdimo nekaj osnovnih pojmov in oznak.

Evklidski prostor $\mathbb{R}^n$ delno uredimo z relacijo $\geq$, tako da za $x, y \in \mathbb{R}^n$ predpišemo

$$x \geq y, \text{ če je } x_k \geq y_k \text{ za } k = 1, \dots, n,$$

kjer so x_k, y_k $k = 1, 2, \dots, n$ komponente vektorjev x, y . Očitno je $x \geq y$ natanko takrat, kadar velja $x - y \geq 0$.

Naj bo A realna n -vrstna kvadratna matrika. Potem rečemo, da je A *nenegativna*, kadar so vsi njeni člani večji ali enaki nič. Če je A nenegativna, velja naslednji sklep

$$x \geq y, x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Ax \geq Ay.$$

Res, iz predpostavke $x \geq y$ sledi $z = x - y \geq 0$, od tod pa zaradi nenegativnosti matrike dobimo $Ax - Ay = Az \geq 0$, torej $Ax \geq Ay$.

Matrika A je *nilpotentna*, če obstaja tak $r \in \mathbb{N}$, da je $A^r = 0$. Najmanjši r , pri katerem velja $A^r = 0$, imenujemo *indeks nilpotentnosti* matrike A .

Najpogostejši primer nilpotentne matrike je zgornja (ali spodnja) trikotna matrika z ničlami na glavni diagonali. Vsaka realna nilpotentna matrika A je podobna takšni matriki, torej obstaja obrnljiva matrika P , pri kateri je $P^{-1}AP$ trikotna in ima na diagonali le ničle. Pri tem je za P možno izbrati (po znanem Schurovem izreku) realno ortogonalno matriko. Če je nilpotentna matrika A nenegativna, lahko za P izberemo celó permutacijsko matriko (to je matrika, katere stolpci tvorijo standardno bazo prostora $\mathbb{R}^n$), torej zgolj z ustrezno premestitvijo vrstic in stolpcev matrike A dobimo trikotno matriko z ničlami na diagonali. Preden dokažemo ta rezultat, se dogovorimo za naslednjo oznako.

Naj bo M neprazna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Potem z $\text{Lin}(M)$ zaznamujemo linearno ogrinjačo množice M v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Trditev 1. *Za nenegativno n -vrstno kvadratno matriko A so ekvivalentni naslednji pogoji:*

(1) *A je nilpotentna.*

(2) Elemente standardne baze S prostora $\mathbb{R}^n$ lahko razvrstimo v zaporedje $f_1, f_2, \dots, f_n$, ki zadošča zahtevam

$$Af_k \in V_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

kjer je $V_0 = \{0\}$ in $V_k = \text{Lin}(\{f_1, \dots, f_k\})$, $k = 1, \dots, n$.

(3) Obstaja taka permutacijska matrika P , da je $P^{-1}AP$ zgornja trikotna z ničlami na glavni diagonalni.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Naj bo A nilpotentna. Zaporedje vektorjev $f_1, \dots, f_n$, ki izpolnjuje pogoj (2), bomo našli po istem vrstnem redu, kot je indeksirano. Denimo, da se je pri taki izbiri zataknilo pri iskanju vektorja f_k . Potem za poljuben $e \in S \setminus \{f_i : i < k\}$ velja $Ae \geq 0$ in $Ae \notin V_{k-1}$.

Naj bo $0 \leq x \notin V_{k-1}$. Potem obstajata tak $g \in S \setminus \{f_i : i < k\}$ in tak realen $t > 0$, da je $g \leq tx$ in zato $0 \leq Ag \leq tAx$. Če $Ax \in V_{k-1}$, potem $Ag \in V_{k-1}$, kar po prejšnjem ni mogoče. Torej velja sklep

$$x \geq 0, \quad x \notin V_{k-1} \implies Ax \geq 0, \quad Ax \notin V_{k-1}.$$

Od tod dobimo $A^m e \notin V_{k-1}$ za vsak $e \in S \setminus \{f_i : i < k\}$ in vsak naraven m , kar pa nasprotuje nilpotentnosti A . Dobljeno protislovje pove, da teče izbira iskanega zaporedja $f_1, \dots, f_n$ gladko od začetka do konca.

(2) $\Rightarrow$ (3). Običajno razvrščene vektorje standardne baze označimo z $e_1, \dots, e_n$, stolpce $f_1, \dots, f_n$ iz (2) pa združimo v istem vrstnem redu v permutacijsko matriko P . Zaradi (2) velja

$$P^{-1}APe_k = P^{-1}Af_k \in P^{-1}(V_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n,$$

ker pa je poleg tega $P^{-1}(V_0) = \{0\}$ in $P^{-1}(V_k) = \text{Lin}(\{e_1, \dots, e_k\})$, $k = 1, \dots, n$, je $P^{-1}AP$ (zgornja) trikotna z ničlami na diagonalni.

(3) $\Rightarrow$ (1). Dobro poznana resnica. ■

Iz pogoja (3) lahko razberemo, da je nilpotentnost nenegativne matrike odvisna le od lege njenih pozitivnih členov, ne pa od njihovih velikosti.

S pomočjo pogoja (2) lahko preverimo nilpotentnost nenegativne matrike A na naslednji način. Če je A nilpotentna, ima vsaj en stolpec iz samih ničel. Prečrtajmo tak stolpec in z njim vred tudi vrstico, ki ga seče na glavni diagonalni matrike A . Preostalo kvadratno matriko lahko okrnemo na enak način kot A in postopek nadaljujemo, dokler ne prečrtamo vseh členov prvotne matrike.

Če pa A ni nilpotentna, na enem od korakov opisanega postopka naletimo na (neprečrtano) matriko, ki ima vse stolpce neničelne. Glej sliko 1.

Na podoben način lahko poiščemo tudi indeks nilpotentnosti nenegativne nilpotentne matrike A . Stolpce in vrstice takšne matrike prečrtavamo na enak način kot pri preverjanju nilpotentnosti, le pri vrstnem redu smo bolj izbirčni. Za k -to prečrtavanje izbiramo med stolpci, ki imajo v neprečrtanem delu le ničle, določimo pa takega, pri katerem smo v dotodanjem postopku *najprej* prečrtali vse neničelne člene. Tako izbrani stolpec

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & 0 & a_7 & 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & a_6 & a_7 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 1. Številka ob vrstici in ob stolpcu matrike A pove, v katerem koraku smo ju prečrtali. S pomočjo te numeracije najdemo tudi permutacijsko matriko P in trikotno matriko $P^{-1}AP$.

Af_k in ustrezno vrstico prečrtamo in oba ob robu oštevilčimo s k . Zaradi prejšnje tovrstne numeracije (stolpcev in vrstic) lahko iskani stolpec Af_k hitro opazimo.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 3 & & 2 & & 1 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{ccccc} 0 & \boxed{\times} & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 & \boxed{\times} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{ccccc} 0 & \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{ccccc} 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Slika 2. Na zgornji levi sliki izbiramo za četrto prečrtavanje ($k = 4$) med drugim in šestim stolpcem prvotne matrike in po algoritmu izberemo slednjega. Na ostalih dveh slikah smo označili tudi drugi del postopka: zgoraj na prvotni matriki, desno pa na njej (permutacijsko) podobni.

Recimo, da smo na opisani način prečrtali že vse člene matrike A . Predpostavimo še, da je A neničelna in n -vrstna. V stolpcu Af_n poiščemo neničelni element, ki leži v vrstici z največjo številko $\alpha(1)$ na robu. Nato enako storimo v stolpcu $Af_{\alpha(1)}$ in ustrezno največjo številko označimo z $\alpha(2)$. To nadaljujemo, dokler ne naletimo v r -tem koraku na ničelni stolpec $Af_{\alpha(r-1)}$. Glej sliko 2.

Trditev 2. *Naj bo A nenegativna n -vrstna nilpotentna kvadratna matrika. Potem je število r iz prej opisanega postopka indeks nilpotentnosti matrike A .*

Dokaz. Sposodimo si oznake iz pogoja (2) trditve 1, postavimo $f_0 = 0$ in za vsak $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ predpišimo

$$\varphi(k) = \min\{m \geq 0 : Af_k \in V_m\}$$

Potem je očitno

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ in } \varphi(k) < k \text{ za } k = 1, \dots, n \quad (*)$$

Dokažimo, da je $\varphi(1) \leq \varphi(2) \leq \dots \leq \varphi(n)$.

V ta namen vzemimo poljuben $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Pri $\varphi(k+1) = k$ z uporabo (*) takoj dobimo $\varphi(k) \leq \varphi(k+1)$, pri $\varphi(k+1) < k$ pa velja $Af_{k+1} \in V_{k-1}$ in zaradi ustrezne izbire stolpca Af_k v opisanem postopku tudi $\varphi(k) \leq \varphi(k+1)$. Funkcija φ je torej res nepadajoča.

Iz postopka za določanje števil $\alpha(1), \dots, \alpha(r-1)$ je jasno, da velja

$$\varphi^m(n) = \overbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}^m(n) = \alpha(m) > 0 \text{ za } m = 1, \dots, r-1$$

in $\varphi^r(n) = 0$.

Dokažimo zdaj, da je r indeks nilpotentnosti matrike A .

Stolpce $Af_1, \dots, Af_n$ smo izbrali tako, da je

$$Af_k \in V_{\varphi(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ker je poleg tega funkcija φ nepadajoča, za vsak k velja $A(V_k) \subset V_{\varphi(k)}$, torej tudi

$$A^r(\mathbb{R}^n) = A^r(V_n) \supset A^{r-1}(V_{\varphi(n)}) \subset \dots \subset V_{\varphi^r(n)} = \{0\},$$

in zato $A^r = 0$.

Vsak stolpec Af_k pri dovolj majhnem realnem $\varepsilon_k > 0$ zadošča neenakosti

$$Af_k \geq \varepsilon_k f_{\varphi(k)}$$

in ker je A nenegativna, od tod sledi (če neenakost pri $k = n$ množimo zaporedoma z A), da je za dovolj majhen realen $\varepsilon > 0$

$$A^{r-1}f_n \geq \varepsilon f_{\varphi^{r-1}(n)} > 0$$

torej $A^{r-1} \neq 0$. ■

Sklenimo prispevek z grafovskim opisom obravnavane snovi.

Najprej zabeležimo nekaj pojmov iz teorije grafov.

Enostavni usmerjeni graf G določata neprazna množica točk (vozlišč) $V(G)$ in množica usmerjenih povezav $E(G) \subset V(G) \times V(G)$. Par $(x, y) \in E(G)$ imenujemo *usmerjena povezava* med x in y . *Usmerjeni sprehod* dolžine m od x do y iz $V(G)$ je zaporedje točk $v_0, v_1, \dots, v_m$, za katero velja

$$v_0 = x, v_m = y \text{ in } (v_{i-1}, v_i) \in E(G), i = 1, \dots, m.$$

Pri tem je x *začetek*, y pa *konec* usmerjenega sprehoda. *Usmerjeni obhod* je tak usmerjeni sprehod s končno dolžino, ki se začne in konča v isti točki. Usmejenemu obhodu z dolžino 1 rečemo *zanka*.

Vsaki n -vrstni realni kvadratni matriki $A = (a_{ij})$ priredimo usmerjeni graf $\Gamma(A)$, določen z množico vozlišč

$$V_A = V(\Gamma(A)) = \{1, \dots, n\}$$

in z množico usmerjenih povezav

$$E_A = E(\Gamma(A)) = \{(i, j) \in V_A \times V_A : a_{ij} \neq 0\}$$

Ključ do obetanega opisa je tale znani rezultat.

Lema. *Bodi A nenegativna n -vrstna kvadratna matrika in $m \in \mathbb{N}$. Potem je člen $a_{ij}^{(m)}$ v i -ti vrstici in j -tem stolpcu matrike A^m pozitiven tedaj in le tedaj, kadar v grafu $\Gamma(A)$ obstaja usmerjeni sprehod dolžine m z začetkom i in koncem j .*

Dokaz. Uporabimo matematično indukcijo. Pri $m = 1$ lema očitno drži. Predpostavimo, da velja pri $m = p$. Vsi členi v formuli

$$a_{ij}^{(p+1)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(p)} a_{kj}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

so zaradi nenegativnosti matrik A in A^p večji ali enaki nič. Zato je $a_{ij}^{(p+1)} > 0$ natanko takrat, kadar vsaj za en $k \in \{1, \dots, n\}$ velja $a_{ik}^{(p)} > 0$ in $a_{kj} > 0$, torej takrat, kadar vsaj za en $k \in \{1, \dots, n\}$ obstaja usmerjeni sprehod dolžine p od i do k in je poleg tega $(k, j) \in E_A$. To je enakovredno obstoju usmerjenega sprehoda dolžine $p + 1$ od i do j , torej lema velja tudi pri $m = p + 1$, dokaz pa je s tem končan. ■

Trditev 3. *Naj bo A nenegativna kvadratna matrika. Potem je A nilpotentna natanko takrat, kadar v grafu $\Gamma(A)$ ni nobenega usmerjenega obhoda. Indeks nilpotentnosti matrike A je enak dolžini najdaljšega usmerjenega sprehoda v grafu $\Gamma(A)$.*

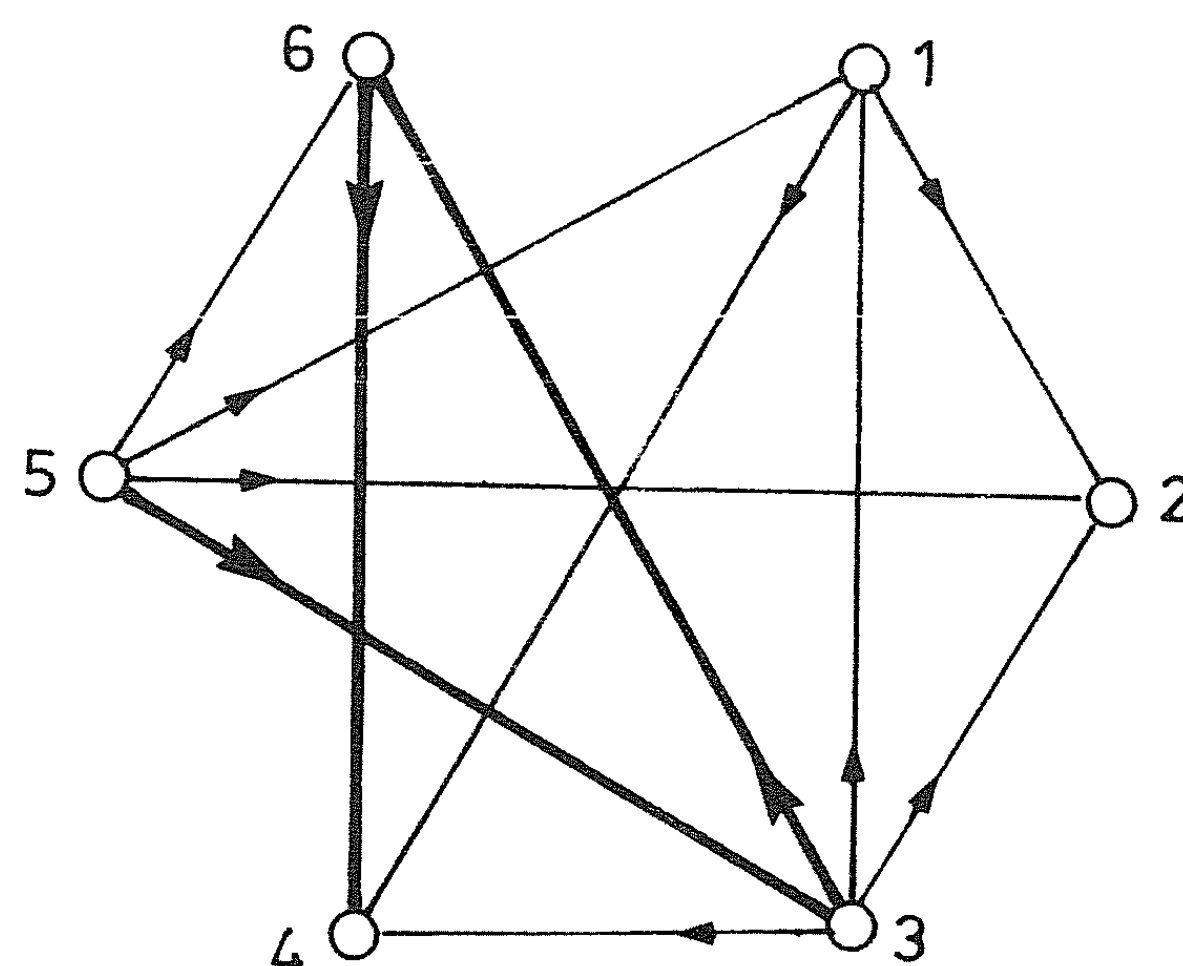
Dokaz. Brž ko obstaja v $\Gamma(A)$ usmerjeni obhod dolžine m , ima $\Gamma(A)$ usmerjeni sprehod poljubne dolžine $p \geq m$. Po lemi je tedaj matrika A^p , $p \geq m$, neničelna, zato A ni nilpotentna.

Denimo zdaj, da je A n -vrstna in ni nilpotentna. Potem ima matrika A^n vsaj en člen $a_{ij}^{(n)}$ pozitiven, zato obstaja v grafu $\Gamma(A)$ usmerjeni sprehod dolžine n od i do j . V verigi usmerjenih povezav, ki vežejo i z j , je $n + 1$ vozlišč, torej vsaj eno nastopa dvakrat. Del verige z začetkom in koncem v tem vozlišču je usmerjeni obhod grafa $\Gamma(A)$.

Drugi del trditve sledi neposredno iz leme. ■

Nenegativna nilpotentna matrika po pravkar dokazani trditvi nima ne zanke ne usmerjenega obhoda dolžine 2, zato je vsaj eden od njenih členov a_{ij}, a_{ji} ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) enak nič.

Kriterij nilpotentnosti in algoritem za določanje indeksa nilpotentnosti, ki smo ju predstavili v prvem delu članka, lahko prevedemo v grafovski jezik. S prvim smo preverjali, če ima graf $\Gamma(A)$ kakšen usmerjen obhod, z drugimi pa poiskali najdaljši usmerjeni sprehod grafa $\Gamma(A)$ brez obhodov.



Slika 3. Usmerjeni graf matrike s slike na str. 36. Posebej je označen najdaljši sprehod, ki ustreza opisanemu algoritmu.

VPRAŠANJA

121. ROTHOVA NALOGA

V nemški matematični reviji Alpha sem pred časom naletela na priložnostni zapis ob stoletnici rojstva nemškega matematika Helmutha Rotha. Med drugim sem prebrala, da je prof. Roth leta 1965 zastavil študentom tole zanimivo nalogo:

Dane so tri kolinearne točke U, V, W . Konstruirati je treba trikotnik, katerega nosilke stranic potekajo skozi točke U, V, W (skozi vsako natanko ena) in s težiščem na premici skozi te točke.

Naloga se mi zdi zanimiva tudi za Obzornikove bralce, ki jih vabimo k reševanju. Posebno bomo veseli, če nam bo kdo poslal čisto geometrijsko rešitev naloge.

Marija Vencelj

FERMATOVA ENAČBA ZA POLINOME

BOJAN MAGAJNA

Math. Subj. Class. (1985): 11D41, 12D99

Razložena je Masonova neenačba za polinome in z njeno uporabo je dokazana analogija Fermatove domneve za polinome.

FERMAT EQUATION FOR POLYNOMIALS

Mason's inequality for polynomials is explained and then applied to prove the analogy of Fermat's hypothesis for polynomials.

0. Uvod

Eden od najdlje odprtih matematičnih problemov je dokazati *Fermatovo domnevo*, da enačba

$$x^n + y^n = z^n \quad (0.1)$$

nima rešitve v pozitivnih celih številih x, y, z , če je $n \geq 3$. Za $n = 2$ je enačba rešljiva, njene rešitve so znane pitagorejske trojke [6]. Fermat je sicer že pred več kot tristo leti trdil, da je našel čudovit dokaz, vendar ga zaradi pomanjkanja prostora, žal, ne more zapisati. Ker od takrat problema ni mogel rešiti nihče (razen za posebne primere števila n , glejte [6]), bomo raje govorili o Fermatovi domnevi in ne izreku. V preteklem desetletju je Faltings dokazal Mordelovo domnevo, iz katere takoj sledi, da ima enačba (0.1) za $n \geq 3$ kvečjemu končno mnogo paroma tujih rešitev (glejte npr. [2]). Vse to nam sicer utrjuje vero v pravilnost Fermatove trditve, toda pravi dokaz ostaja neznan. Tukaj si bomo ogledali, kako je z rešljivostjo enačbe (0.1) v primeru, ko neznanke x, y, z niso cela števila, temveč polinomi ene spremenljivke s kompleksnimi koeficienti. Med polinomi in celimi števili je znanih več podobnosti: tako polinomi kot cela števila dopuščajo iste računske operacije (seštevanje, odštevanje in množenje, ne pa deljenja brez ostanka ali pa korenjenja), nadalje največji skupni delitelj dveh polinomov iščemo podobno kot pri celih številih (natančneje rečeno, tako cela števila kot polinomi sestavljajo evklidski kolobar). Glede na to analogijo bi morda pričakovali, da bo vprašanje rešljivosti splošne enačbe (0.1) v polinomih prav tako težak problem kot Fermatov. Videli pa bomo, da je analogija Fermatove hipoteze za polinome pravilna in dokaz bo presenetljivo enostaven. Obstaja celo več dokazov, tukaj si bomo ogledali enega, ki temelji na v novjšem času odkriti Masonovi neenakosti za polinome.

1. Kvadratna enačba

Preden se lotimo obravnave enačbe (0.1) za splošen n , si oglejmo na kratko primer $n = 2$. Opazili bomo, da ima enačba

$$p^2 + q^2 = r^2 \quad (1.1)$$

v polinomih neskončno mnogo rešitev, ki se izražajo na podoben način kot znane pitagorejske trojke celih števil. Če enačbo (1.1) delimo z r^2 in označimo $x = p/r$, $y = q/r$, dobimo

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1.2)$$

kjer sta neznanki x in y racionalni funkciji ene spremenljivke, ki jo bomo označili s t . Enačba (1.2) je samo poseben primer splošnejše enačbe

$$f(x, y) = 0, \quad (1.3)$$

kjer je f kvadratni polinom dveh komutirajočih spremenljivk. Za reševanje takih enačb obstaja preprost postopek, ki je v bistvu enak postopku iskanja racionalnih točk na stožernicah, podrobno opisanem v [1]. Po tem postopku najprej poiščemo konstanti x_0, y_0 , ki zadoščata enačbi (1.3), torej

$$f(x_0, y_0) = 0. \quad (1.4)$$

(Ker dopuščamo kompleksne rešitve, z eksistenco ni težav.) Nato položimo skozi točko (x_0, y_0) premico s splošnim smernim koeficientom s , torej

$$y = y_0 + s(x - x_0). \quad (1.5)$$

Končno pogledamo, kje ta premica še seka krivuljo (1.3); v ta namen vstavimo za y v (1.3) izraz iz (1.5), s čimer dobimo za x kvadratno enačbo

$$f(x, y_0 + s(x - x_0)) = 0. \quad (1.6)$$

Ko to enačbo uredimo in delimo s koeficientom pred x^2 , dobimo

$$x^2 + A(s)x + B(s) = 0, \quad (1.7)$$

kjer sta A in B racionalni funkciji spremenljivke s . Zaradi (1.4) je ena rešitev enačbe (1.7) kar konstanta x_0 . Po Vietovi formuli zadošča druga rešitev x zvezi $x + x_0 = -A(s)$, torej $x = -x_0 - A(s)$. S tem smo x izrazili kot racionalno funkcijo parametra s in po (1.5) se da nato tudi y izraziti kot racionalna funkcija spremenljivke s . S tem smo dobili racionalni funkciji x in y v spremenljivki s , ki zadoščata enačbi (1.3). Ni se težko prepričati, da nam opisani postopek prinese vse rešitve, pri čemer pa je s racionalna funkcija prvotne spremenljivke t (po (1.5)).

Za enačbo (1.2) je ena rešitev očitno $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Nastavek (1.5) se tukaj glasi $y = 1 + sx$; ko ga vstavimo v enačbo (1.2) in uredimo, dobimo

$$x = -\frac{2s}{1 + s^2}, \quad y = \frac{1 - s^2}{1 + s^2}.$$

Od tod je potem lahko dobiti polinomske rešitve enačbe (1.1), kar pa prepuščamo bralcu.

2. Masonova neenakost

V tem razdelku bomo dokazali naslednji

Izrek. *Za vsako naravno število $n \geq 3$ je enačba*

$$p^n + q^n = r^n, \quad (2.1)$$

kjer so p, q, r kompleksni polinomi, ki niso konstantni večkratniki istega polinoma, nerešljiva.

Izrek bo hitro sledil iz Masonove neenačbe. Splošna Masonova neenačba govori sicer o elementih splošnih funkcijskih algeber [4], vendar se bomo tukaj omejili na običajne polinome kot v [3]. Za vsak polinom f naj pomeni $n_0(f)$ število njegovih različnih ničel. Če je f identično enak 0, definiramo $n_0(f) = \infty$.

Lema (Masonova neenačba). *Naj bodo a, b, c paroma tuji kompleksni polinomi, vsaj eden od njih nekonstanten, ki zadoščajo zvezi*

$$a + b = c. \quad (2.2)$$

Potem je

$$\max \text{st}\{a, b, c\} \leq n_0(abc) - 1, \quad (2.3)$$

kjer pomeni leva stran maksimalno stopnjo polinomov a, b, c .

Dokaz. Ker so polinomi a, b, c paroma tuji, nobeden med njimi ni identično enak 0. Ker niso vsi trije polinomi konstantni, je zaradi (2.2) lahko konstanten kvečjemu eden. Privzemimo, da a ni konstanten (če b ni konstanten, je dokaz enak). Ko delimo enakost (2.2) s c in označimo $f = \frac{a}{c}$, $g = \frac{b}{c}$, dobimo $f + g = 1$ in $\frac{a}{b} = \frac{f}{g}$. Z odvajanjem dobimo $g' = -f'$ in nato

$$\frac{a}{b} = -\frac{g'/g}{f'/f}. \quad (2.4)$$

Izraz na desni je smiseln, ker nobena od funkcij f, g ni identično enaka 0 (saj nobeden od polinomov a, b ni identično 0) in tudi f' ni identično 0 (saj bi bila sicer funkcija f konstantna in potem polinoma a, c ne bi bila tuja). Če napišemo polinome a, b, c v razstavljeni obliki

$$a(t) = A(t - \alpha_1)^{l_1} \cdots (t - \alpha_i)^{l_i}, \quad b(t) = B(t - \beta_1)^{m_1} \cdots (t - \beta_j)^{m_j}, \\ c(t) = C(t - \gamma_1)^{n_1} \cdots (t - \gamma_k)^{n_k},$$

imamo

$$f(t) = \frac{A}{C}(t - \alpha_1)^{l_1} \cdots (t - \alpha_i)^{l_i} (t - \gamma_1)^{-n_1} \cdots (t - \gamma_k)^{-n_k}$$

in podobno se izraža tudi $g(t)$. Od tod sledi

$$\frac{f'(t)}{f(t)} (= (\log f(t))') = \frac{l_1}{t - \alpha_1} + \dots + \frac{l_i}{t - \alpha_i} - \frac{n_1}{t - \gamma_1} - \dots - \frac{n_k}{t - \gamma_k} \quad (2.5)$$

in podobno

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{m_1}{t - \beta_1} + \dots + \frac{m_j}{t - \beta_j} - \frac{n_1}{t - \gamma_1} - \dots - \frac{n_k}{t - \gamma_k}. \quad (2.6)$$

Označimo

$$N_0(t) = (t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_i)(t - \beta_1) \cdots (t - \beta_j)(t - \gamma_1) \cdots (t - \gamma_k); \quad (2.7)$$

torej je $n_0(abc)$ ravno število ničel in obenem stopnja polinoma N_0 . Enakost (2.4) lahko sedaj napišemo v obliki

$$\frac{a}{b} = -\frac{(g'/g)N_0}{(f'/f)N_0} = -\frac{g_1}{f_1}, \quad (2.8)$$

pri čemer sta $f_1 = \frac{f'}{f}N_0$ in $g_1 = \frac{g'}{g}N_0$ polinoma stopnje kvečjemu $n_0(abc) - 1$, kar sledi iz (2.5), (2.6) in (2.7). Iz (2.8) dobimo $af_1 = -bg_1$; ker sta polinoma a, b tuja, sledi od tod, da a deli g_1 in b deli f_1 . Toda potem je $\text{st}(a) \leq \text{st}(g_1)$ in $\text{st}(b) \leq \text{st}(f_1)$, torej sta stopnji polinomov a, b kvečjemu $n_0(abc) - 1$. Iz relacije (2.2) sledi potem isto tudi za stopnjo polinoma c . S tem je lema dokazana. ■

Dokaz izreka. Privzemimo, da obstajajo polinomi p, q, r , ki rešijo enačbo (2.1) in niso vsi trije konstantni večkratniki istega polinoma. Privzeti smemo, da so ti polinomi paroma tuji. (Vsak skupen linearen faktor dveh izmed polinomov a, b, c bi moral namreč zaradi zveze (2.1) nujno deliti tudi tretjega in ta skupni faktor bi lahko potem pokrajšali.) Polinomi $a = p^n$, $b = q^n$, $c = r^n$ tedaj zadoščajo pogojem leme in ker je očitno $n_0(abc) = n_0(pqr) \leq \text{st}(pqr)$, sledi po lemi

$$n \text{st}(p) (= \text{st}(p^n)) \leq \text{st}(pqr) - 1$$

in podobni neenakosti veljata za q, r . Ko vse te tri neenakosti seštejemo, dobimo (z upoštevanjem očitne relacije $\text{st}(p) + \text{st}(q) + \text{st}(r) = \text{st}(pqr)$)

$$n \text{st}(pqr) \leq 3 \text{st}(pqr) - 3.$$

Toda za $n \geq 3$ je zadnja enakost očitno protislovna. S tem je izrek dokazan. ■

Naj omenimo še, da je izrek mogoče dokazati tudi brez uporabe leme [5].

3. Asimptotična Fermatova hipoteza

V prejšnjem razdelku smo videli, kako enostavno je bilo mogoče dokazati analogijo Fermatove domneve za polinome z uporabo Masonove neenakosti. Zato je sedaj umestno vprašanje, ali obstaja kaka analogija Masonove neenakosti za števila. Pri kompleksnem polinomu pomeni število ničel hkrati tudi število različnih nerazcepnih deliteljev. Uporabna analogija količine $n_0(f)$, ki smo jo vpeljali za polinome, pa pri celih številih ne bo število vseh različnih prafaktorjev danega celega števila a , temveč izraz

$$R(a) = \prod_{p|a} p,$$

kjer je na desni produkt vseh *različnih* praštevil, ki delijo a . (Količino $R(a)$ imenujemo *radikal* števila a .) Ker je analogen pojem za stopnjo polinoma pri celih številih absolutna vrednost, bi na podlagi leme iz prejšnjega razdelka lahko domnevali naslednje: če so a, b, c neničelna tuja cela števila, ki zadoščajo pogoju $a + b = c$, potem je $\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq R(abc)$. Vendar pa ta domneva ni resnična: obstajajo namreč taka zaporedja celih števil a_n, b_n, c_n , da so pri vsakem fiksnem n števila a_n, b_n in c_n tuja in zadoščajo zvezi $a_n + b_n = c_n$, a kljub temu izraz

$$\frac{|c_n|}{R(a_n b_n c_n)}$$

narašča proti neskončnosti, ko gre n proti neskončnosti. (Če bi bila domneva resnična, bi moral biti izraz omejen z 1.) Za primer takih zaporedij vzemimo $a_n = 3^{2^n}$, $b_n = -1$, $c_n = 3^{2^n} - 1$. Tukaj je

$$R(a_n b_n c_n) = 3R(c_n). \quad (3.1)$$

Z indukcijo vidimo, da 2^n deli c_n za vsak n . (Velja namreč $c_{n+1} = 3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1 = c_n(3^{2^n} + 1)$, pri čemer je prvi faktor deljiv z 2^n po indukcijski predpostavki, drugi faktor pa je očitno deljiv z 2, saj je 3^{2^n} liho število.) Napišemo torej lahko

$$c_n = d_n \cdot 2^n, \quad (3.2)$$

kjer je d_n naravno število. Od tod sledi $R(c_n) \leq 2d_n$ in iz (3.1) dobimo potem $R(a_n b_n c_n) \leq 6d_n$. Od tod in iz (3.2) končno sledi

$$\frac{c_n}{R(a_n b_n c_n)} \geq \frac{c_n}{6d_n} = \frac{2^n}{6} \longrightarrow \infty.$$

Masser in Oesterle domnevata (gl. [3]), da bi utegnili veljati za cela števila naslednja, nekoliko bolj zapletena oblika Masonove neenakosti, ki jo bomo imenovali *abc domneva*:

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $C(\varepsilon)$, da za poljubna tuja cela števila a, b, c , ki zadoščajo pogoju $a + b = c$, velja

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon)R(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Ena od zanimivih posledic te domneve je tudi naslednja asimptotična inačica Fermatove domneve:

Obstaja tako naravno število n_0 , da ima za vse $n \geq n_0$ enačba $x^n + y^n = z^n$ le trivialne rešitve v celih številih (to je, vsaj eno od števil x, y, z mora biti 0).

Za dokaz vzemimo nasprotno, da tuja cela števila x, y, z zadoščajo enačbi $x^n + y^n = z^n$. Po abc domnevi potem sledi

$$|x|^n \leq C(\varepsilon)R(x^n y^n z^n)^{1+\varepsilon} = C(\varepsilon)R(xyz)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)|xyz|^{1+\varepsilon}.$$

Ko napišemo še ustrezni dve taki neenačbi za y in z ter nato vse tri neenačbe zmnožimo, dobimo

$$|xyz|^n \leq C(\varepsilon)^3 |xyz|^{3+3\varepsilon}. \quad (3.3)$$

Ker trojka $x = 1, y = 1, z = 1$ očitno ni rešitev Fermatove enačbe za $n > 1$, je $|xyz| > 1$ in za vsak dovolj velik n , je zato leva stran neenakosti (3.3) večja od desne, kar je protislovje.

LITERATURA

- [1] J. Grasselli, *Osnove teorije števil*, Knjižnica Sigma 14a, DZS, Ljubljana 1975.
- [2] J. Grasselli, *Mordelova domneva dokazana*, Obzornik mat. fiz. 32 (1985) 33–37.
- [3] S. Lang, *Old and new conjectured diophantine inequalities*, Bull. A. M. S. 23 (1990) 37–75.
- [4] R. C. Mason, *Equations over function fields*, Springer Lecture Notes 1068 (1984) 149–157.
- [5] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York 1977.
- [6] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma 1a, MK, Ljubljana 1972.

NOVE KNJIGE

DOBOVIŠEK M., Kobal D., Magajna B., *Naloge iz algebre I (razširjena izdaja)*, Ljubljana DMFA Slovenije 1990, str. 148 (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 20)

Za četrto izdajo so avtorji *Naloge iz algebre I* močno razširili. Od prejšnjih 572 je tako število nalog naraslo na 810. Ponekod so avtorji snov preuredili, na novo so dodali ves razdelek z nalogami o polinomih. Zato se je število razdelkov povečalo za tri. K nalogam so podane rešitve, pri težjih nalogah je opisan tudi način reševanja.

Naloge bodo — kot že v dosedanjih izdajah — koristen učni pripomoček študentom.

Jože Grasselli

IZBOLJŠANO UREJANJE S KOPICAMI

SANDI KLAVŽAR in JOŽE MARINČEK

Math. Subj. Class. (1985) 68 P 10, 68 P 05, 68 Q 25

V članku opišemo izboljšano urejanje s kopicami, ki ga predlagata Wegener [1] in Carlsson [2]. Podana je tudi izvedba algoritma v turbo pascalu.

BOTTOM-UP HEAPSORT

We describe the Bottom-up heapsort due to Wegener [1] and Carlsson [2]. We also give an implementation of the algorithm in turbo pascal.

Urejanje je eden osnovnih problemov teoretičnega in praktičnega računalništva. V članku se bomo omejili na najpomembnejši razred metod za urejanje, ki temeljijo na primerjanju podatkov. Privzeli bomo tudi, da je primerjanje indeksov časovno zanemarljivo nasproti primerjanju elementov. Pri analizi določene metode torej ne bomo šteli primerjanj indeksov.

Dobro je znano, da poljuben algoritem za urejanje potrebuje v najslabšem primeru vsaj

$$\lceil \log_2(n!) \rceil \approx n \log_2 n - 1.4427n$$

primerjanj in v povprečju vsaj

$$\lceil \log_2(n!) \rceil - \frac{1}{n!} 2^{\lceil \log_2(n!) \rceil} + 1 \geq \lceil \log_2(n!) \rceil - 1$$

primerjanj. Zato je optimalen tisti algoritem, ki v povprečju in tudi najslabšem primeru potrebuje $O(n \log_2 n)$ primerjanj. Pri tem je $f(x) = O(g(x))$, če obstajata konstanti $c > 0$ in $X > 0$, tako da za vsak $x > X$ velja $|f(x)| \leq c|g(x)|$. Podobno je $f(x) = o(g(x))$, če velja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Končno, funkcija $\Theta(x)$ pravi, da se funkcija asimptotično vede kot $O(x)$, ne pa tudi kot $o(x)$.

Najpomembnejša algoritma med urejanji, ki temeljijo na primerjanju podatkov in ne potrebujejo zunanjega pomnilnika, sta *hitro urejanje* ([3, Hoare, 1962]) in *urejanje s kopicami* ([4, Floyd, 1964]). Urejanje s kopicami tudi v najslabšem primeru potrebuje le $O(n \log_2 n)$ primerjanj, torej je v tem smislu optimalno. Po drugi strani hitro urejanje potrebuje v najslabšem primeru $O(n^2)$ primerjanj, vendar je v povprečju (in torej v praksi) znano kot najhitrejše urejanje. Povprečno število primerjanj hitrega urejanja je namreč enako

$$1.386n \log_2 n - 2.846n + 1.386 \log_2 n + 1.154$$

V 1. razdelku opišemo osnovno urejanje s kopicami, v naslednjem razdelku pa izboljšano urejanje s kopicami. Razdelek 3 vsebuje rezultate primerjanj obeh urejanj s kopicami in hitrega urejanja. Na koncu članka je podana tudi izvedba izboljšanega urejanja s kopicami v turbo pascalu.

1. Urejanje s kopicami

Čeprav bomo videli, da je izboljšano urejanje s kopicami bistveno hitrejšo od klasičnega urejanja s kopicami, je razlika med samima algoritma relativno majhna. Zato najprej opišimo osnovno urejanje s kopicami. Obzornik je sicer o kopici že pisal ([5, Kozak, 1984]), vendar zaradi samozadostnosti članka ponovimo nekatere stvari.

Kopica je levo poravnano dvojiško drevo, v katerem vrednosti razporedimo tako, da vrednost, ki jo hranimo v vozlišču očeta, ni manjša od vrednosti, ki ju hranimo pri sinovih. Levo poravnano dvojiško drevo lahko preprosto predstavimo s poljem elementov, kjer sta sinova očeta $a[i]$ elementa $a[2i]$ in $a[2i + 1]$. Polje elementov je torej kopica, če za vse i , kjer sta pogoja smiselna, velja: $a[i] \geq a[2i]$ in $a[i] \geq a[2i + 1]$.

Pomembna lastnost kopice je, da je v njenem korenu največja vrednost. To uporabimo za urejanje. Najprej sestavimo kopico. Nato vzamemo koren in preuredimo druge elemente v novo kopico. To ponavljamo, dokler ne poberemo vseh elementov.

Kopico bomo v tem razdelku, in do konca naslednjega, shranjevali v tabeli a . Tabelo a in tudi njeno velikost n bomo uporabljali kot globalni spremenljivki.

Kopico zgradimo tako, da vanjo zaporedoma pogrezamo vse elemente:

procedure ZGRADI KOPICO

za $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, 1$ **naredi** POGREZNI (n, i)

kjer je POGREZNI

procedure POGREZNI (m, i)

 { $m \dots$ indeks zadnjega elementa tabele }

 { $i \dots$ indeks elementa, ki ga pogrezamo }

 če i ni list in njegov sin vsebuje večji element, **potem**
 naredi

k naj bo i -jev sin z največjim elementom

 zamenjaj $a[i]$ in $a[k]$

 POGREZNI (m, k)

do sem

Razen opisanega načina lahko kopico zgradimo tudi tako, da podatke dvigamo proti korenu. Oba načina sta dobro znana, zato so naši algoritmi povsem simbolični. Natančnejši zapis izgradnje kopice na oba načina najdemo npr. v knjigi [6]. Zapišimo še urejanje s kopicami

procedure UREDI S KOPICAMI

 ZGRADI KOPICO

za $m = n, n - 1, \dots, 2$

naredi

 zamenjaj $a[1]$ in $a[m]$

 POGREZNI ($m - 1, 1$)

do sem

Urejanje s kopicami potrebuje v najslabšem primeru (in tudi v povprečju)

$$2n \log_2 n + \Theta(n)$$

primerjanj. Faktor 2 vodilnega člena zahtevnosti je dejansko vzrok, zakaj je urejanje s kopicami v povprečju slabše od hitrega urejanja. Kot smo že omenili, je vodilni koeficient za povprečno število primerjanj hitrega urejanja enak 1.386. Faktor 2 pa dobimo, ker pri spuščanju elementa v globino (v podprogramu POGREZNI) na vsakem koraku med tremi elementi iščemo največjega. Z manj kot dvema primerjanjema to seveda ne gre. Se da kaj storiti proti temu?

2. Izboljšano urejanje s kopicami

Celih dvajset let je kazalo, kot da je urejanje s kopicami razvito do konca. Vendar je neko dejstvo tako očitno, da ga je spregledalo stotine tistih, ki so razmišljali o urejanju s kopicami. Lahko bi celo rekli, da je bilo preveč očitno! Ključno opažanje za popravljeno urejanje s kopicami je

Večina elementov kopice (oz. poljubnega dovolj polnega drevesa) je blizu listov! (Približno polovica je kar listov, približno $\frac{3}{4}$ je od lista oddaljenih kvečjemu za ena, ...).

Zato se je leta 1987 Carlsson [2] domislil, da velja najprej poiskati mesto, kamor pogreznemo element iz korena, in šele nato narediti zamenjave. Najprej se spustimo do določenega lista kopice, imenujmo ga *posebni list*, tako da na vsakem koraku napravimo le eno primerjanje.

procedure POIŠČI LIST (m, i, j)

 { m ... indeks zadnjega elementa tabele }

 { i ... indeks elementa, od koder se spustimo v globino }

 { j ... indeks posebnega lista }

$j := i$

 dokler je $2j < m$ naredi

 če je $a[2j] > a[2j + 1]$ potem $j := 2j$

 sicer $j := 2j + 1$

 do sem

 če je $2j = m$ potem $j := m$

Ali smo s tem kaj pridobili? Še vedno namreč nismo našli ustreznega mesta. Vendar smo že zelo blizu! Verjetnost, da je mesto, kamor moramo pogrezniti element iz korena, za več kot dva oddaljeno od lista, je manjša od 0.05, eksperimentalna verjetnost, da zadostuje že eno samo primerjanje, pa je znotraj intervala [0.8461, 0.8497]. Navadno moramo torej narediti le še eno ali dve primerjanji in že imamo pravo mesto. To naredimo z naslednjim podprogramom.

procedure POIŠČI PRAVO MESTO (i, j)

{ j je indeks posebnega lista, dobljenega s podprogramom POIŠČI LIST}
dokler je $a[i] < a[j]$ naredi $j := \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$

Slednji podprogram je tudi prava novost algoritma, ki ga je razvil Wegener [1]. Carlsson je namreč opazil, da so elementi na poti med korenem in posebnim listom linearno urejeni. Zato je, namesto da bi najbolj preprosto naredil še korak ali dva, pravo mesto za podatek v korenu poiskal z dvojiškim vstavljanjem (in s tem precej pokvaril lastnosti algoritma).

Do sedaj smo poiskali pravo mesto, kamor moramo spustiti element iz korena, narediti moramo le še zamenjave elementov. Prva možnost je, da elemente potiskamo po kopici navzgor. Tedaj je računanje indeksov enostavno (oče ima polovični sinov indeks), vendar bi morali na vsakem koraku napraviti tri premike, saj bi med seboj zamenjali dva elementa. Zato gremo rajši od vrha kopice navzdol. Pri tem v spremenljivko l naračunamo globino elementa z indeksom j relativno glede na element z indeksom i .

procedure ZAMENJAJ PO POTI (i, j)

{ j je indeks elementa, dobljenega s POIŠČI PRAVO MESTO}
 $l := \lfloor \log_2(\frac{j}{i}) \rfloor$
 $x := a[i]$
za $k = l - 1, \dots, 0$ naredi $a[\lfloor \frac{j}{2^{k+1}} \rfloor] := a[\lfloor \frac{j}{2^k} \rfloor]$
 $a[j] := x$

Popravljeno urejanje s kopicami dobimo, če podprogram POGREZNI nadomestimo z naslednjim podprogramom

procedure BOLJŠI POGREZNI (m, i)

POIŠČI LIST (m, i, j)
POIŠČI PRAVO MESTO (i, j)
ZAMENJAJ PO POTI (i, j)

Analiza povprečnega vedenja urejanja s kopicami je težka, zato le omenimo naslednji teoretični rezultat iz [1].

Izrek 1. *Izboljšano urejanje s kopicami ne potrebuje več kot $1.5n \log_2 n + O(n)$ primerjanj.*

Še eno lepo lastnost ima izboljšano urejanje s kopicami. Pri fiksnem številu podatkov je število potrebnih primerjanj zelo stalno. Odstopanje od srednje vrednosti števila primerjanj je precej manjše od enega procenta, pri hitrem urejanju pa je odstopanje kar okrog deset procentov.

Tako je na primer v primerjavi s hitrim urejanjem metoda stabilnejša za nekaj desetkrat.

In še domneva.

Domneva. ([1, Wegener, 1989]) Naj bo $f(n)$ definiran tako, da je povprečno število primerjanj popravljenega urejanja s kopicami enako $n \log_2 n + f(n)n$. Tedaj za $n \geq 200$ velja: $f(n) \in [0.34, 0.39]$.

3. Rezultati

Za prikaz učinkovitosti smo urejanje s kopicami in izboljšano urejanje s kopicami izpeljali na AT računalniku v jeziku turbo pascal. Najprej smo napisali tudi svoje hitro urejanje, vendar smo bili nad rezultati tako presenečeni, da nismo verjeli, da smo ga dobro napisali. Zato smo rajši posegli po hitrem urejanju TSort znane programske hiše Borland, vendar smo tudi tu dobili zelo podobne rezultate (glej tabelo 1). Rezultati so povprečje dvajsetih meritev, pri čemer so vsi trije algoritmi urejali identične tabele. Šteli smo vsako primerjanje in vsako premikanje podatkov.

Velikost polja	Urejanje s kopicami		Izboljšano ur. s kop.		Hitro urejanje	
	Primerjanj	Premikov	Primerjanj	Premikov	Primerjanj	Premikov
1000	16 865.70	14 079.00	10 430.00	11 580.45	13 281.00	7 934.05
2000	37 713.30	30 160.30	22 853.20	25 162.80	29 633.20	17 123.40
3000	60 232.60	47 066.50	36 126.10	39 567.65	46 710.75	26 941.40
4000	83 415.00	64 318.00	49 714.90	54 315.80	64 091.05	37 149.25
5000	107 686.90	82 093.95	63 856.40	69 595.90	83 404.55	47 507.85
6000	132 478.20	100 141.05	78 264.00	85 142.80	101 655.30	58 291.95
7000	157 602.30	118 369.30	92 788.00	100 866.10	120 368.60	69 122.45
8000	182 850.10	136 648.45	107 426.25	116 640.60	141 081.45	79 994.50
9000	208 870.80	155 298.85	122 497.30	132 798.90	158 349.70	91 604.55
10000	235 387.40	174 205.75	137 714.90	149 193.55	177 253.30	102 832.95

Število primerjanj in premikov

Rezultati s tabele 1 jasno kažejo, da se oba algoritma, ki urejata s kopicami, le malenkostno razlikujeta v številu potrebnih premikov, zato pa izboljšana različica praktično razpolovi število potrebnih primerjanj. Seveda sam postopek zahteva nekaj več režijskega dela. Ravno tako vidimo, da izboljšano urejanje s kopicami potrebuje precej manj primerjanj kot hitro urejanje, po drugi strani pa precej več premikov elementov. Uporaba izboljšane variante je torej več kot upravičena, če je primerjanje podatkov zahtevno v primerjavi s celoštevilčnimi operacijami, in to je že pri urejanju realnih števil.

4. Izvedba izboljšanega urejanja s kopicami

Program je napisan v turbo pascalu 5.5, ki se kar precej razlikuje od standardnega pascala. Zato ne bo odveč pripomniti, da smo pri programiranju uporabili naslednje nestandardne elemente

- Podatkovni tip *word* je ekvivalenten tipu *CARDINAL* iz *Module-2* in predstavlja nepredznačeno 16-bitno število. Namenjen je predvsem dvojiškim operacijam nad celimi števili, s katerimi je razširjen turbo pascal. Zaloga vrednosti tega tipa je 0...65535. Dvojiške operacije lahko opravljamo tudi nad količinami tipa *integer*, ki pa je namenjen predvsem predznačenim količinam.
- Operatorja *shl* in *shr* sta namenjena dvojiškim operacijam nad podatki tipa *word* in *integer*. Tako $x \text{ shl } n$ vrne x za n bitov pomaknjen v levo, $x \text{ shr } n$ pa vrne x za n bitov pomaknjen v desno. Učinek je enak, kot

pri množenju ali deljenju s potencami števila 2

$$x \text{ shl } n \equiv x * 2^n, \quad x \text{ shr } n \equiv x * 2^{-n}$$

- Logična operatorja *and* in *or* sta razširjena, tako da delujeta tudi nad podatki tipa *word* in *integer*. Ustrezni operaciji opravita nad istoležnimi biti argumentov. Tudi ti dve operaciji lahko prepišemo v množenja in deljenja.
- *Inc* in *Dec* sta vgrajena podprograma, ki argument ordinalnega tipa (*word*, *integer*, ...) povečata ali zmanjšata za 1. Stavek *Inc(Top)* je povsem enakovreden stavku *Top:=Top+1*, stavek *Dec(Top)* pa je enakovreden stavku *Top:=Top-1*.

Naštete posebnosti smo uporabili, ker so dvojiške operacije zelo hitre. Iste rezultate bi dosegli z uporabo običajne celoštevilske aritmetike standardnega pascala in izgubili nekaj hitrosti, ne pa tudi (dobrih) lastnosti algoritma.

{ Splošne deklaracije }

```
const MaxItems = { največja dolžina tabele };
type item = record
    { ... }
    key: integer
end ;
index = 1..MaxItems * 2;
items = array [1..MaxItems] of item;
```

{elementi, ki jih urejamo, so tipično}
{bolj ali manj zapletene strukture}
{podatkov...}

{Na koncu zaradi enostavnejšega pogoja}
{dopuščamo, da pademo iz kopice, zato}
{potrebujemo nekaj zaloge pri dopustnem}
{območju za indekse.}

```
procedure HeapSort (var a : Items; n : index);
{Uredi tabelo 'a' dolžine 'n' z izboljšanim urejanjem s kopicami.}
var
    Top,Bottom: index;
    Data
        : item;

    procedure Sift (Top,Bottom : index; Data : Item);
    {Vstavi element 'Data' na ustrezno mesto v kopici med 'Top' in 'Bottom' }
    var
        Path,      {Indeks elementa, do katerega pridemo, če se}
                    {v vsakem vozlišču spustimo na večjega od obeh sinov. Če se}
                    {spustimo n nivojev globoko, nam zadnjih n bitov tudi pove,}
                    {v katero smer smo jo ubrali (0-levo, 1-desno).}
        Source, {Source in Dest prideta prav, ko element Data od spodaj}
        Dest : index;
        Mask : word;
```



```

{ Path and Mask = tisti bit, ki za dano vozlišče na
{ poti do elementa a [Path] pove, ali smo se naprej
{ spustili na levega ali desnega sina.

```

begin

```

{ Spustimo se na dno kopice: POIŠČI LIST.
{ Po koncu te zanke bo spremenljivka Mask taka, da bo Path and Mask
{ povedal, kam smo se spustili od elementa a [Top]. Ko pa bomo
{ potrebovali ta odgovor na nižjih nivojih, bomo Mask premikali desno.

```

```

    Mask := 1;
    Path := 2 * Top;           { Spustimo se na nižji nivo.
while Path < Bottom do begin
    if a [Succ(Path)].key < a [Path].key then { izberimo vejo }
        Path := Succ(Path); { z večjim od obeh sinov. }
        Path := 2 * Path; { Spustimo se na nižji nivo... }
        Mask := Mask shl 1 { ... in premaknimo masko v levo }
end ;

```

```

{ Če smo padli iz kopice, se vrnimo nanjo. }

```

```

    if Path > Bottom then begin
        Path := Path div 2;
        Mask := Mask shr 1
    end ;

```

```

{ Povzpne se na ustrezno mesto: POIŠČI PRAVO MESTO. }

```

```

    while a [Path].key < Data.key do begin

```

```

{ Še se moramo vzpenjati... }

```

```

        Path := Path div 2; { Formula za očeta danega vozlišča. }
        Mask := Mask shr 1 { Iskani bit v Path se je premaknil levo... }
end ;

```

```

{ Sedaj dvignemo elemente na poti od Top do Path in v tako dobljeno
{ luknjo vstavimo Data. Gremo od vrha kopice, ker tam že imamo
{ za premike potrebno luknjo (a [Top] = Data). Prav nam
{ pride, da je v zadnjih bitih Path zapisano, v katero smer smo se spustili. }

```

```

    Dest := Top;
    while Mask > 0 do begin
        if Path and Mask = 0 then { od tu smo se spustili
            Source := 2 * Dest { na LEVEGA sina.
        else { sicer smo se spustili na DESNEGA sina.
            Source := Succ(2 * Dest);
            a [Dest] := a [Source]; { Porini element gor oz. luknjo dol.
            Dest := Source;
            Mask := Mask shr 1 { Pripravi za testiranje za naslednji nivo... }
        end ;

```

```

        a [Dest] := Data { Luknja v kopici je sedaj na željenem mestu. }
    end ; { Sift }

```

```

begin
  Top := Succ(n div 2);      {Med Top in Bottom imamo kopico,      }
  Bottom := n;               {ker ti elti nimajo sinov.          }
{ Ustvari kopico, to je premakni Top na 1. }
  while Top > 1 do begin
    dec (Top);
    Data := a [Top];
    Sift (Top, Bottom, Data)
  end ;
{ Uredi kopico tako, da elemente iz dna ponovno pogrezaš čeznjo. }
  while Bottom > 1 do begin
    Data := a [Bottom];
    a [Bottom] := a [1];
    dec (Bottom);
    Sift (Top, Bottom, Data)
  end
end ; { HeapSort }

```

LITERATURA

- [1] I. Wegener, *Bottom-up-heapsort, a new variant of heapsort beating on average quicksort (if n is not very small)*, Forschungsbericht Nr. 313, Universität Dortmund, Avgust 1989.
- [2] S. Carlsson, *A variant of HEAPSORT with almost optimal number of comparisons*, Information Processing Letters 24 (1987) 247–250.
- [3] C. A. R. Hoare, *Quicksort*, Computer Journal 5 (1962) 10–15.
- [4] R. W. Floyd, *Algorithm 245, treesort 3*, Communications of the ACM 7 (1964) 701.
- [4] J. Kozak, *O algoritmu in podatkovni strukturi*, Obzornik mat. fiz. 31 (1984) 2, 49–60.
- [5] J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, DMFA R Slovenije, Ljubljana 1986.

NOVE KNJIGE

FORGÓ F., *Nonconvex programming*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1988, 188 str.

V knjigi so obravnavani optimizacijski problemi $(\Phi, f, \min)$, kjer je

$$\Phi = \{X \in \mathbb{R}^n : g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

množica dopustnih rešitev, določena z omejitvenimi funkcijami $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, in je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kriterijska (namenska) funkcija. Iščemo dopustne rešitve z najmanjšo vrednostjo kriterijske funkcije.

Konveksni optimizacijski problemi (množica dopustnih rešitev in kriterijska funkcija sta konveksni) sodijo v "klasiko" — teoretično in algoritmično so podrobno razdelani.

Za nekonveksne probleme pa še ni splošnih odgovorov. Obstaja le vrsta pristopov, ki so se obnesli pri reševanju posameznih vrst problemov. Prav predstavitvi teh pristopov je posvečena Forgójeva knjiga.

V prvem poglavju je narejen kratek pregled osnovnih pojmov in rezultatov o optimizacijskih problemih. Tako je načeloma za branje knjige potrebno le visokošolsko znanje analize in linearne algebre; je pa najbrž za bralca, ki ni domač na področju optimizacije, to razmeroma zahtevno branje.

Podobno vsebino ima tudi knjiga: Pardalos P. M., Rosen J. B., *Constrained global optimization: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin 1987 (MaK 6415/268).

Vladimir Batagelj

POGOVOR O POUKU MATEMATIKE

SERGE LANG

Math. Subj. Class. (1985) 97 B 99

Iz knjige S. Langa *Math! Encounters with high school students*, ki je v slovenskem prevodu Janka Modra z naslovom *Matka! Pogovori z učenci* izšla v Presekovi knjižnici, objavljamo sklepni pogovor o splošnih vprašanjih poučevanja matematike. Ta pogovor v slovenskem prevodu knjige ni natisnjen.

ON TEACHING MATHEMATICS

This is the final dialogue from S. Lang's Book *Math! Encounters with high school students* which was translated into slovenian language under the title *Matka! Pogovori z učenci* by Janko Moder and published in Presekova knjižnica. The dialogue is not included in the Slovene version of the book.

Serge Lang je eden najbolj znanih sodobnih francoskih matematikov, sicer profesor na ameriški univerzi Yale. Napisal je številne visokošolske učbenike za splošno algebro, analizo in geometrijo ter več monografij iz raznih specialnih področij matematike. Znan je tudi po svojih popularnih predavanjih za srednješolce in širšo javnost.

V pogovoru sodelujejo Patricia Chwat, učiteljica na eni od pariških srednjih šol, Jean Brette, direktor matematičnega oddelka v Palači odkritij (Palais de la Découverte), glavnem znanstvenem muzeju v Parizu, Stephan Brette, njegov štirinajstletni sin, in seveda Serge Lang.

JEAN BRETTE. Ravno kar smo bili priča tečaju matematike, ki ste ga imeli v devetem letniku ene od pariških srednjih šol. Mogoče bi lahko najprej ponovili, kako se je vse skupaj začelo.

SERGE LANG. Kje, v Palači? [1]

JEAN BRETTE. Ne, v razredu. Ja, seveda, vse skupaj se je začelo v Palači. Pred dvema letoma ste imeli tam predavanje in potem sem rekel prijatelju, ali ne bi mogli imeti nekaj matematike z učenci v katerem od srednješolskih razredov. Lani ste znova prišli predavat, spet v Palačo, in tam se je sprožila debata o pouku v srednji šoli, v Franciji in drugod po svetu, o tem, kaj sodite o zadevi, in pri tem ste obnovili nekaj izkušenj, ki jih imate s predavanjem na eni od kanadskih šol.

SERGE LANG. Ja, tako je bilo.

JEAN BRETTE. In po tej debati vas je gospodična Chwat prosila, naj bi ...

PATRICIA CHWAT. Prav naivno sem vprašala, ali bi gospod Lang lahko prišel k nam v šolo predavat mojim učencem, pa je bil za to. Prišel je že lani in moralo mu je biti všeč, ker se je letos vrnil.

SERGE LANG. Tako je, lani ste imeli resnično dober razred, enajste stopnje, in vsi od kraja so bili zelo bistri. Tako imenitno sem se počutil, da sem sklenil letos priti znova, in letos sem dobil osmi in deveti razred. Tudi to pot je šlo zelo dobro.

JEAN BRETTE. Vendar je bila snov, ki ste jo izbrali, precej težka. Po navadi na tej stopnji ne delamo veliko dokazov.

PATRICIA CHWAT. Ampak jih lahko, jih lahko.

SERGE LANG. Jih lahko?

PATRICIA CHWAT. Mogoče res ne ravno v osmem razredu, ampak v devetem in desetem je iz aritmetike že marsikaj mogoče dokazati. Po mojem je ravno tu najplodnejše okolje za dokazovanje. V geometriji "vidijo" stvari, zato ne čutijo tako potrebe po dokazovanju; pa tudi zato, ker so že prej delali poskuse, konstrukcije, tako da se jim dozdeva vse od kraja jasno. Ko pa zagledajo večkratnike, delitelje, je to zanje nekaj novega in ker gre za neskončne množice števil, imajo občutek, da je potreben dokaz, da gre za pravilne rezultate, pri poljubnem številu, in to jim pomaga tudi pri razumevanju.

SERGE LANG. Tudi vi delate dokaze? So del učne snovi?

PATRICIA CHWAT. Ne vem, ali so uradno del programa, vendar jih sama delam. Izreki so bolj ali manj na programu, jaz jih pa še dokažem.

SERGE LANG. Res je, izreki so na programu. Videl sem knjige, ki se ravna po učnem načrtu, in v njih so pravila, vendar brez preverjanj, in sicer v algebri in geometriji. Za ploščino kroga ali za prostornino krogle ali piramide so na primer v njih formule, ni pa dokazov. Temu se reče "v skladu z učnim načrtom".

PATRICIA CHWAT. Naj bo že na ne vem kateri stopnji, še celo na univerzi, je treba to in ono sprejeti brez dokazov, čeprav celo nekaj takih stvari, ki jih gladko sprejmeš, kdaj pozneje dokažeš. Kratko in malo se človek mora s čim ukvarjati.

SERGE LANG. Seveda. Sam sem proti temu, da bi nekatere stvari gladko sprejemali brez preverjanja, nekaj dokazov je tudi v resnici mogoče napraviti šele pozneje, vendar gre za tole: "Kaj je bistveno in katere dokaze je treba napraviti in kdaj?"

PATRICIA CHWAT. Tako je, ampak če lahko napravite dokaz formule za prostornino krogle v osmem razredu, vas vabim.

SERGE LANG. Dobro, pridem.

PATRICIA CHWAT. V osmi razred? Takrat namreč prvič dobijo formulo pred oči.

SERGE LANG. Čakajte, ne. Dobro, se strinjam, v osmem razredu jim lahko daste formulo brez dokaza in jo dokažete šele v devetem ali desetem. Vendar takrat že ni več del učnega načrta.

PATRICIA CHWAT. Precej razumno, prostorska geometrija je del učnega načrta v osmem razredu v fiziki, v devetem pa v matematiki. Matematiki mislijo, da otroci niso zadosti zreli, da bi že v osmem razredu to doumeli. Ljudje, ki so odgovorni za sestavljanje učnega programa za fiziko,

odločajo drugače. Potem prostorska geometrija izgine, dokler niso otroci stari šestnajst let. Se pravi, da sploh ne doživijo dokazov formul.

SERGE LANG. Saj jih tudi v fiziki ne dočakajo.

PATRICIA CHWAT. Imate prav. Jaz sama sem jih doživela šele na univerzi.

SERGE LANG. Sramota! Dokazi so zelo lepi, to je prava matematika. Šele potem jo moreš zares ceniti, ko vidiš, zakaj je kakšna stvar, kakršna pač je, in uporabiš dokaze, ki so popolnoma razumljivi. Jaz to delam z učenci devetega, desetega in enajstega razreda in razumejo in zelo uživajo pri tem. Vendar ni uradno na programu, zato tega po navadi sploh ne delajo.

PATRICIA CHWAT. Ne mislim sistematično braniti programov, vendar je vse polno podatkov, ki jih morate povrh tega učiti. To, kar delate vi, ni predpisano, to je nekakšna folklor, zelo izjemno.

SERGE LANG. Izjemno je zato, ker ni v učnem načrtu, bilo bi pa naravno, če bi bilo na programu. Treba vam je samo spremeniti program tako, da bodo taka preverjanja nekaj naravnega.

JEAN BRETTE. Bi ga želeli spremeniti?

SERGE LANG. Ne, ne mislim delati učnih načrtov, napisal pa sem geometrijo [2]. Vem, kaj mora priti v učni načrt. Če ni v njem, ni tako po naravnem zakonu, temveč zato, ker so se ljudje, ki delajo učne načrte, drugače odločili.

PATRICIA CHWAT. Seveda, seveda. Ena od težav je v tem, da tisti, ki sestavljajo učne načrte, pravzaprav ne učijo v razredu. Dokler bomo imeli "nadzornike"[3], ki ne poučujejo, ne bo usklajenih programov.

SERGE LANG (se zasmije). Potem se boste morali spoprijeti z birokracijo, morali se boste spopasti s sistemom, naj bo že tukaj ali v Združenih državah Amerike. Vendar človek mora izzivati, mora poskušati napraviti kaj drugega.

JEAN BRETTE. Kolikor je vam znano, je stanje povsod isto?

SERGE LANG. Tako je, povsod je isto.

JEAN BRETTE. Če se ne motim, ste omenili eno samo morebitno izjemo? Kjer je mogoče za silo malo bolje?

SERGE LANG. Ne vem natančno, kaj se dogaja v Sovjetski zvezi. Videl sem nekaj knjig, učnih knjig za osnovne šole, ki so se mi zdele boljše od tukajšnjih.

JEAN BRETTE. Kaj mislite z "osnovno" šolo? Osmi razred? Deveti?

SERGE LANG. Ja, in deseti. Zdele so se mi boljše, vendar jih nisem dovolj pregledal, da bi mogel soditi zadosti argumentirano.

PATRICIA CHWAT. Sicer se pa ravno zdaj menjajo knjige o matematiki. Nekaj jih je zastarelih in spominjajo na knjige, ki so jih imeli moji učitelji, ko so sami hodili v šolo, iz drugih pa odseva nov duh in silijo učenca, da več misli, da postavlja vprašanja. Vendar če ste zmožni, vas nič ne ovira, da ne bi počeli stvari, ki uradno niso na programu. Ne bi rekla, da pri svojih učnih urah delam ne vem koliko reči, ki niso na programu, in vendar delam

stvari, ki so ravno na meji, in preizkušam posebno gradivo, ko jih poskušam učiti stvari, ki jih imajo uradno na programu.

SERGE LANG. Pa niso na programu ... Ampak saj lahko delate vse, kar je na programu, v primernem okviru. To je bil moj ugovor, to me je lani vrglo iz tira, ravno pred posvetovanjem v Palači; zagledal sem namreč besedilo za enajsto stopnjo, ki je bilo od začetka do konca neusklajeno, s celo grmado vaj brez pomena. Na primer v geometriji naj bi na deveti stopnji poskušali ugotoviti dolžino krožnice, začnši pri ploščini kroga. Potrebujete formulo, ki da $(r + h)^2$, čemur pravijo identiteta. Dobro, potrebna vam je in morate delati z njo, pa naj je uradno na programu ali ne. Morate vedeti, da je $(r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2$.

JEAN BRETTE. To je v učnem načrtu za deseto stopnjo.

SERGE LANG. Vendar lahko vzamete že prej, kaj pa je to takega, vzamete pač tisto, kar potrebujete. Navsezadnje vzamete vse, kar je v učnem načrtu, vendar med seboj povezano, tako da se ravnate po usklajenem stavku, kakor v glasbi, kjer je vse ubrano. Namesto da bi drugo za drugo jemali drobtine, med katerimi ni nobene notranje ali zunanje povezave. Ravno proti temu ugovarjam, sem proti kopičenju drobtin, ki jih ni mogoče vključiti v širši okvir, zaradi katerega bi si jih bilo lažje zapomniti. (Se obrne k Stephanu, ki mu je štirinajst let.) Kaj pa ti misliš?

STEPHANE. V celoti se strinjam, ker nam dajejo domače naloge s števili, ki nič ne pomenijo. Dajejo nam števila in jih moramo seštevati, odštevati, to pa je tudi vse.

SERGE LANG. Po tvojem je torej vse to umetno?

STEPHANE. Tako je. Poleg tega že dve leti ne počnemo skoraj nič drugega, razen nekaj geometrije. Samo preverjamo, ali znamo šteti.

PATRICIA CHWAT. Vendar moraš predelati temeljne vaje, da se seznaniš z matematičnimi pojmi.

SERGE LANG. Nikoli nisem rekel, da je treba izločiti temeljne vaje. Zanimanje skrajnosti ni nasprotna skrajnost! Nikar ne recite, da jaz ne delam vaj. Ne želim izločiti vseh sistematičnih vaj. Tudi te so potrebne, vendar so učni načrti izločili usklajeno gradivo, lepe glasbene fraze v matematiki.

PATRICIA CHWAT. Še zmeraj jih lahko denete nazaj.

SERGE LANG. To je ravno tisto, "ne utegnem se ukvarjati s temi stvarmi". Vendar je to popolnoma napačno, lahko jih napravijo povrh tistega, kar je na programu.

JEAN BRETTE (Patriciji Chwat). In ne drži, saj zmorete oboje.

PATRICIA CHWAT. Tako je, ker mora človek ustvariti nekakšno kontinuiteto, mene pa moti, ker učenci še niso vzeli nekaterih stvari. In tudi oni potrebujejo nekakšno kontinuiteto v tem, kar se učijo, tako da gredo od stopnje do stopnje in da imajo sproti pridobljeno temeljno znanje, ki je potrebno, če naj preidejo od osme do devete stopnje.

SERGE LANG. To temeljno znanje seveda lahko pridobimo v skladni povezavi. Sodim, da temeljno gradivo ni nezdružljivo z usklajenim programom, kjer je v uradnih učnih načrtih rečeno, da kakšna stvar ne sodi

vanje. To ne drži. To me spominja na Stephanov zvezek, ki ste mi ga prej pokazali. Kaj je napisal tvoj učitelj?

STEPHANE. "Ni v učnem načrtu." Ni dovoljeno uporabiti kvadratnega korena, ker še ni bil uradno obdelan v razredu.

SERGE LANG. In ti si zato dobil slabo oceno?

STEPHANE. Tako je.

SERGE LANG. No, smešno, to rečem.

PATRICIA CHWAT. Stephane ni na moji šoli. (Smeš.)

JEAN BRETTE. Hodi na drugo šolo v istem okrožju, pa iz obzirnosti ne bomo povedali, na katero.

SERGE LANG. Pa je sramota! Dati slabo oceno fantu, ki napravi kaj zelo skladnega, zelo bistrega, kar dokazuje, da razume, za kaj gre, vendar je narobe samo to, da to ni v učnem načrtu. Po mojem je tako ocenjevanje noro, vendar se tudi take stvari dogajajo. In ravno to učencem jemlje veselje do matematike.

JEAN BRETTE. V tem primeru je več krivde na učitelju kakor na učnem načrtu.

SERGE LANG. Oba sta kriva. Nista vzajemno izključljiva. Če je prvi slab, zato drugi še ni dober. Pa bi bil lahko dober, če bi hotel, vendar se med seboj podpirata. Seveda, nekateri učitelji ne vedo, kaj delajo, in tudi ne morejo bolje delati, kakor delajo. In takih je veliko. Imamo pa tudi dobre, zelo dobre.

PATRICIA CHWAT. Zdaj ste se dotaknili splošnejšega vprašanja o izobraževanju učiteljev matematike v Franciji.

SERGE LANG. Ne samo v Franciji. Tudi v Združenih državah Amerike; tam mi je stanje še bolj znano. Na učiteljskih šolah, zlasti za matematiko, je stanje katastrofalno.

PATRICIA CHWAT. V Franciji imamo IREM.

SERGE LANG. In to je?

JEAN BRETTE. Raziskovalni inštituti za pouk matematike so razširjeni po vsej državi, vendar zdaj hirajo, ker niso več zadosti gmotno podprti. Ni zadosti podpore, da bi se mogli učitelji udeleževati posebnih tečajev in da bi mogli imeti manj učnih ur, tako da bi se lahko seznanjali z novimi stvarmi.

PATRICIA CHWAT. Ustanovljeni so bili, ko je nastala velika reforma v srednješolskem pouku in ko se je začela "nova matematika". Zdaj pa je mišljeno, kakor da so že vsi učitelji obdelani.

JEAN BRETTE. ... in tako je vlada prepričana, da ni IREM za nobeno rabo več.

SERGE LANG. Še ena od neumnosti, tale "nova matematika", tako imenovana "moderna" matematika, ali "stara" matematika. Teh kategorij ni. Poznamo dobro in zanič matematiko, ta pa ni zanimiva. No, v tistem, s čimer so se ukvarjali pred "novo matematiko", je bilo tudi precej nepovezanega, drobtin, ki so bile brez pomena. Vendar so zastarele nepotrebne drobne podatke nadomestili z novotarskimi drobnimi podatki, ki so še ravno tako brez medsebojne povezave. Kaj se je torej izboljšalo?

JEAN BRETTE. "Moderna matematika" ni tako nova, kakor mislite. Tu imam knjigo, staro knjigo, izšla je leta 1746, in v nji govorijo o Moderni Matematiki z velikima začetnicama. [4] Mislim, da se polemike o pedagogiki niso kaj prida spremenile.

SERGE LANG. Vendar ni treba takih besednih vojsk. To ne more prinese nič konstruktivnega. Ne moremo primerjati sodobne matematike s prastaro. To ni pravi prijem. Med tema dvema ni navzkrižja. Nasprotje je med skladno, lepo, poučno in koristno matematiko in matematiko, ki ni za nobeno rabo ali pa je koristna samo za metanje učencev. Tu je nasprotje. Že samo uporaba besed moderna matematika ali stara matematika spelje debato v napačno smer. Jaz nisem za Evklida ali proti njemu. Vzemimo iz Evklida, kar je še zmeraj koristno, in pozabimo na cel kup stvari, ki niso več za rabo. Evklid seveda polni sto in sto strani, vendar danes lahko pomembne stvari spravimo na trideset ali štirideset strani, to je tisto. Potem lahko preidemo k stvarem, ki so bile v zgodovini matematike odkrite pozneje. Imamo drugačne perspektive. Kaj praviš ti, Stephane?

STEPHANE. Se strinjam. Mogoče je nova matematika koristna, ampak kaj ti pomaga, če se ukvarjaš z njo kakšno leto ali kakšno poldrugo leto?

SERGE LANG. Kaj misliš z "novo matematiko"?

STEPHANE. No, unije, preseki in tako naprej. Kar obkrožamo.

SERGE LANG. No, vendar malo uspeha! Tako naj ne bi delali. Potreben je le lahek jezik, ki se razvija po potrebi. Nima smisla vzdigovati preveč prahu pri tem.

PATRICIA CHWAT. Danes je čutiti gibanje, da bi skrčili izrazje, ki ga morajo učenci požreti.

SERGE LANG. Ponavljam: Izrazje je mogoče razvijati po potrebi. Če porabite tedne ali mesece za izdelavo besedja, ki ni takoj uporabljeno, temveč samo sebi namen, gre spet za drobiž. Gre sicer za nekaj "novega", pa vendar spet za drobiž, razkosan na tanke rezine, brez lepih "fraz", brez lepote. Vse skupaj je spet samo grmada drobtin. In ravno to bi morali izločiti. Ker ni združljivo z učenjem temeljnih pojmov in prakse. Vaš učitelj tule, v tej knjigi iz leta 1700 in toliko, je to dobro povedal. Kako je že zapisal?

JEAN BRETTE. Ja, tu ima na primer opombo, v kateri je rečeno: "Na splošno ne smemo učencem nikoli dati definicije, ne da bi jim prej pokazali stvar, ki jo je treba opredeliti. Ime more priti šele za idejo, saj nam ime samo priklič v zavest idejo."

SERGE LANG. Tako je.

JEAN BRETTE. Ja, in v tej knjigi je še vse polno drugih poučnih pripomb. Avtor je želel sodobnike prepričati, da je mogoče učiti matematiko zelo majhne otroke, in veliko miselnega napora porabil za to, kako naj bi se to delalo.

SERGE LANG. Kako se piše ta človek?

JEAN BRETTE. De La Chapelle. O njem ne vem veliko, samo zdi se mi, da je bil d'Alembertov prijatelj in njegova knjiga ima uradno odobritev

Akademije znanosti. Zdaj je ne utegnemo prebirati, vendar bi se kdaj splačalo objaviti nekatere odlomke iz nje v sodobni francoščini.

SERGE LANG. Vrnimo se h konkretnemu vprašanju, saj se mora pogovor, če naj bo koristen, opirati na konkretne zadeve. Ne predlagam nove ideologije. Če kaj etiketiramo, s tem že vnaprej pokvarimo debato. Vrnimo se h konkretnemu $(r + h)^2$. Formula za to še ni znana vsem učencem in podobno se dogaja z marsičim v matematiki. Po eni strani bi moral človek teoretično razumeti, kaj se dogaja, tako da mora imeti napravljen dokaz. Po drugi strani pa mora formulo znati uporabiti tudi avtomatično, kadar je treba. Temu se ne moremo izogniti, zato učence prosimo, naj po desetkrat ponavljajo formulo:

$$(r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2$$

JEAN BRETTE. Vsi skupaj?

SERGE LANG. Pa ja, vsi skupaj, v zboru. Pri meni že. Pa pri vas?

PATRICIA CHWAT. Včasih jim rečem, naj kaj takegale na glas ponavljajo, vendar redko. Ne želim tega spremeniti v navado.

SERGE LANG. Ko sem sam hodil v šolo, sem se tako naučil $(a + b)^2$ in nisem nikoli pozabil. Tako me je naučil moj učitelj in tako je treba to napraviti. Ni druge možnosti. Preiti nam mora v ušesa kakor napev. Ni treba kar naprej spraševati, zakaj formula drži! Moraš jo znati uporabiti, kadar je treba. In edina možnost — ali bolje rečeno: še nikoli nisem slišal o nobeni drugi možnosti — je, da po desetkrat ponovimo formulo in še po desetkrat, preden gremo v posteljo. Rečem jim: ponavljajte formulo. V začetku tega ne jemljejo resno, vendar jo ponavljajo z menoj, v zboru, in to se jim zdi kratkočasno. Stephane, tako sva delala tudi midva. Kaj sem ti rekel, da moraš ponavljati?

STEPHANE. Prostornino krogle.

SERGE LANG. Tako je, morali smo preveriti formulo, pa se je v začetku niti nisi spomnil. In kaj sem ti potem rekel?

STEPHANE. No, naj ponavljam $4\pi r^3/3$.

SERGE LANG. Tako je. Pred štirinajstimi dnevi. In zdaj se je boš spominjal, dokler naju smrt ne loči?

STEPHANE. Ja, mislim.

SERGE LANG. Kajpada, formulo se moraš naučiti na pamet tako, da jo po desetkrat ponoviš, moraš pa tudi videti dokaz. Poznamo namreč dve vrsti umskega dela, vendar sta lepo združljivi, ker se med seboj dopolnjujeta. Poznati moramo obe. In ravno tako je tudi na Yalu, kjer so študenti stari po sedemnajst, osemnajst let. Nekateri med njimi, kar preveč je takih, ne znajo avtomatično ponoviti formule, ko pridejo iz srednje šole, zato jim jo vbijam v glavo. Mogoče tretjini ali polovici razreda. Sramota!

JEAN BRETTE. Nič slabše kakor pri nas.

SERGE LANG. Ni dvoma, da je povsod enako. In čeprav so že starejši, pri sedemnajstih, osemnajstih, morajo po desetkrat ponavljati formule. (Smeh.) Najprej mislijo, da jih zafrkavam, po nekaj dneh pa se jim posveti, da imam prav; samo tako se človek učinkovito nauči stvari, ki jih potrebuje

ob nekaterih priložnostih. Morajo pa videti tudi dokaz in vedeti, kako prideš do njega. Oboje jim je potrebno. Pozneje zbijajo šale na ta račun, da so morali po desetkrat na glas lajnati isto stvar.

JEAN BRETTE. Seznani ste se že z vsemi mogočimi izkušnjami srednješolskega pouka, naj bo v okolici Pariza ali pa v Torontu v Kanadi. Kaj pravite o reakciji učencev na to, kar delate in kar po navadi ni po njihovem rednem programu ali kakor po navadi delajo?

SERGE LANG. Sami ste videli, kako reagirajo.

JEAN BRETTE. Ja, videli smo nekaj primerov, ampak vi, kako vi gledate na to?

SERGE LANG. Mene zabava! Odpirajo se, reagirajo pozitivno, neposredno jih stvar zanima in začnejo si zapisovati. Potem jih seveda sprašujete ...

PATRICIA CHWAT. Seveda. Vsakih štirinajst dni imajo posebno domačo nalogo, prihodnji dan pa mi morajo potem napisati, kaj so delali z obsegom kroga.

SERGE LANG. Videl sem njihove domače naloge, ki ste jih danes prinesli nazaj, in številni od njih so znali vse ponoviti. Jim niste nič pomagali?

PATRICIA CHWAT. Ne. Vsi se seveda ne spomnijo vsega, vseh podrobnosti, vendar si skoraj vsi zapomnijo glavno zamisel dokaza.

SERGE LANG. Videl sem, kako so si zapisovali. Bilo je čudovito. Lično usklajeno, res imenitno.

PATRICIA CHWAT. V resnici so bili pridni.

SERGE LANG. Ne samo pridni, tudi razumni. Poznajo pravila, razlage, dobro premišljene členitve. Naučili so se nekaj formul, naučili pa so se tudi nekaj algebre; naučili so se napraviti dokaz in naučili so se uporabiti jezik za izražanje matematičnih misli. Nazadnje moramo priti tako daleč. Pri uri matematike najprej začnem kakšno misel, pa jim rečem, naj jo dopolnijo z eno ali dvema besedama ali končajo stavek, ki sem ga sam začel. Potem jim rečem, naj sami oblikujejo misli in razlagajo svojo matematiko. In potem, ob določenem trenutku, obrnem postopek in jim rečem, naj povedo, kaj mislijo, in naj sami izluščijo svoje matematične domisleke. S tem naj bi študent začel misliti s svojo glavo. Videli ste pri Yaelle, ko sem ji nazadnje rekel, naj ponovi izpeljavo formule za obseg kroga, $o = 2\pi r$. In natančno to je tudi storila. Sama, s svojimi rokami, s svojimi očmi, s svojimi možgani.

JEAN BRETTE. Skoraj slišali smo, kako je mislila.

SERGE LANG. Videli smo, kako je mislila. Po izrazu na obrazu, po zbranosti ...

PATRICIA CHWAT. Res je, navajala sem jih h govorjenju. Do zdaj tega še nismo omenili, vendar so učenci v mojih razredih vajeni govoriti, dopolnjevati stavke in oblikovati svoje misli. V vašem primeru ni bila pred njimi ista oseba, metoda pa ni bila bistveno drugačna od tiste, kakršni so pogosto priča v razredu.

SERGE LANG. Poznam študente na univerzi, ki ne morejo tega napraviti v matematiki. V povprečnem razredu jih mogoče pol ne zmore. Seveda je nekaj častnih izjem, bleščečih razredov, vendar v povprečnem razredu v Združenih državah ... zahtevajo od njih samo izpolnjevanje kvadratkov. Dobijo nalogo z odgovorom v številki in njihova dolžnost je samo, da to številko denejo v eno od rubrik. In to po navadi kar dobro opravijo. Ampak da bi oblikovali svoje misli, sami razlagali, kaj se dogaja, si zapisali dokaz, tega ne zmorejo. Sramota! In tu v Franciji je veliko razredov — ne mislim vaših, ker bolje delate (Smeh.) — kako pa je v tvojem razredu, Stephane?

STEPHANE. Isto. Po navadi samo sprašujejo po rezultatu. No ja, včasih nam pa v resnici rečejo, naj si kaj zapišemo, vendar ne preveč pogosto.

JEAN BRETTE. Ne smemo se čuditi, da si učenci ne znajo zapisovati, če pa učitelji ne zahtevajo od njih, naj se naučijo delati dokaze.

SERGE LANG. Tako je; vendar marsikaj laže razčistimo, če si stvar zapišemo; pa tudi predmet postane bolj zanimiv za učenca, če zahtevamo od njega, da si privošči ta napor, ki pa tako ali tako ni ne vem kolikšen. S tem dobi veselje. Poslušajte, ko je Yaelle v eni sapi ponovila ves dokaz, ste sami videli, kaj se je zgodilo, ves razred ji je spontano zaploskal. (Glej na strani 83 knjige *Matka!* v poglavju o obsegu kroga.)

PATRICIA CHWAT. Vendar ste imeli srečo, da ste našli ravno Yaelle; ne bi šlo tako gladko pri vsakem v razredu. Bilo je jasno, s kakšnim užitkom je to naredila. Drugim ne bi šlo tako gladko od rok.

JEAN BRETTE. Kaj mislite s tem "našli"?

PATRICIA CHWAT. No ja, da je ponovila ves dokaz.

JEAN BRETTE. Ampak podobno je bilo tudi z Rachel v Torontu.

SERGE LANG. Tisto je bilo nekaj drugega. V Torontu ni bilo učenca, ki bi mogel storiti kaj takega, kar je napravila Yaelle, ponoviti ves dokaz, tam sem moral voditi od koraka do koraka. Res je, matematični talenti so različni in ni vsak učenec zmožen napraviti vsega že takoj prvič, ampak če bi se prihodnji teden spet oglasil pri njih, bi bil že marsikdo tega zmožen.

PATRICIA CHWAT. Gre tudi za čas; če bi bilo zadosti časa, bi tako rekoč vsakega lahko pripravili do tega, razen kakšnih patoloških primerov. Vendar imamo po petindvajset učencev v razredu, včasih še več; nekateri so že hudo zaostali in na nesrečo jih moramo pustiti, kjer so. To je dramatično, vendar ...

JEAN BRETTE. Se strinjam, po drugi strani pa je bila izvedba z Yaelle koristna za ves razred, ker je šlo za nekakšen psihološki pritisk, bilo je napeto, saj so tudi drugi čakali, ali se ji posreči obnoviti vse skupaj, zato so jo tudi sami spremljali skoraj z isto hitrostjo. Tako je bilo vsem v korist.

PATRICIA CHWAT. Vendar so bili nekateri prav srečni, da niso bili oni poklicani, in tako so najbrž premišljevali kaj popolnoma drugega, toliko moramo biti že pošteni.

JEAN BRETTE. Mogoče, ne rečem, da so vsi sledili, vendar nastop s tolikšno napetostjo, s tolikšno zbranostjo ...

PATRICIA CHWAT. Drži, ves razred je podpiral Yaelle, vsi so jo spodbujali, vendar so bili nekateri drugi srečni, da jim ni treba nič drugega.

SERGE LANG. Če bi šlo za kakšnega drugega učenca, bi se mu bil prilagodil; pripravljen sem prilagoditi se zmožnosti učenca, če kdaj izberem drugačnega. Ne ravnam z vsakim učencem enako. Če opazim, da je kdo manj zmožen kakor Yaelle za ponovitev dokaza, potem peljem pogovor drugače, mogoče podobno, kakor sem napravil pri Rachel v Torontu: najprej sem jo moral voditi korak za korakom, da je ponovila dokaz, vendar je nazadnje povedala več, kakor je vedela v začetku. Učence izbiram na slepo. Ne sprašujem tistih, ki vzdigujejo roko, rajši izberem takega, ki je ne vzdigne.

PATRICIA CHWAT. Ja, ravno prav. Ena od mojih učenk je bila zelo razočarana, saj se je z veliko težavo odločila, da je vzdignila roko, ker je precej boječa, ko pa se je le premagala, je niste vprašali.

JEAN BRETTE. Je sedela v prvi klopi?

PATRICIA CHWAT. Zraven Yaelle. Ni posebno nadarjena za matematiko, vendar je to pot želela pokazati, da le kaj zmore, vi pa je ravno zato niste vprašali. (Smeh.)

SERGE LANG. Ja, vem, zmeraj so tveganja. Ne poznam učencev in vidim jih samo enkrat ... Izogniti sem se želel temu, da bi spraševal samo tiste, ki po navadi vedo, za kaj gre. V to past se človek kaj lahko ujame. Vse mogoče se lahko primeri. Poznamo take, ki ne morejo sami od sebe ponoviti dokaza, pa tudi take, ki morejo, pa čeprav mislijo, da ne morejo. Vse je mogoče. Treba jih je le vse pripraviti h kar največjemu razumevanju.

PATRICIA CHWAT. In za to je treba nekaj časa.

SERGE LANG. Ja, potreben je čas, vendar gre za dolgoročne naložbe. Brž ko se učenci naučijo postopka v enem primeru, ga veliko lažje opravijo v prihodnjem. Tako čas ni izgubljen.

JEAN BRETTE. To se povezuje s tistim, kar ste prejle rekli. Če izločimo iz učnih načrtov tisto, kar ni potrebno, dobimo več časa za koristne reči.

SERGE LANG. Natančno tako. Če iz programov otrebimo sušje in če jih skladno uredimo, bo ostalo dosti časa za lepo matematiko, ki bo koristna, z vsemi potrebnimi dokazi in z vsemi formulami, ki jih moramo znati avtomatično kakor na primer tole.

JEAN BRETTE. Stephane, ti si sedel v razredu v zadnji klopi, kot gost. Kako se ti je zdelo?

STEPHANE. Bilo je lepo, ampak če bi bilo pri vsaki uri tako, bi se človek najbrž utrudil; učenci nismo ves čas tako pazljivi.

SERGE LANG. Oh, veš kaj, na univerzi, še pri sedemnajstih letih, jih znam dobro predramiti. Treba mi je samo tole napraviti (Pokaže s prstom.), pa sem ti porok, da se vsi prebudijo. Sicer pa nikoli ne vedo, kdaj jih zadene. (Smeh.) To pa res ni nič težkega ohranjati jih budne. Poleg tega pa jim budim pozornost s tem, da jim razkazujem prave matematične probleme.

PATRICIA CHWAT. Ampak v osmem in devetem razredu so še premladi. Učenci na tej stopnji nimajo skoraj še niti pojma o matematiki.

SERGE LANG. To že, vendar gre še zmeraj za nekatera vprašanja ... kdaj jemljete praštevila, v katerem razredu?

PATRICIA CHWAT. V osmem.

SERGE LANG. Potem so v devetem razredu že malo zrelejši.

PATRICIA CHWAT. To že, vendar pozneje nikoli več ne govorimo o njih.

SERGE LANG. Nikoli več? No, pa smo spet pri vprašanju, o katerem smo že govorili. V osmem razredu nekaj dosežete, pa konec, potem ne zidate več na tem.

PATRICIA CHWAT. Praštevila potrebujemo samo za zapisovanje racionalnih števil v devetem razredu. Poznati moramo navadne ulomke, v bistvu pa ni nobenega napredka. Uporabljamo pojme, ki smo jih uvedli v osmem razredu.

SERGE LANG. Že razumem, vendar vam povem, da snov o praštevilih lahko predebatirate v osmem razredu, kar takrat, ko opredelite praštevila. Najprej lahko vprašate, ali jih je neskončno mnogo, in jim potem to dokažete. Ob tej priložnosti jim lahko rečete: oglejte si praštevila dvojčke, 3, 5; 5, 7; 11, 13; in kateri sta prihodnji, Stephane?

STEPHANE. 17, 19.

SERGE LANG. Prav. In lahko postavite vprašanje praštevil dvojčkov, ali jih je neskončno mnogo. Pa boste videli, kako bodo reagirali. Mogoče jih bo zabavalo in jih bodo našli še precej, morebiti do sto. Tako se bodo zaposlili s celimi števili, s seštevanjem, odštevanjem, deljenjem. Vendar bodo to počeli v tehtni povezavi, v odgovor na vprašanje. Ko bodo tako vse preračunali do sto, bodo opazili, da se seznam praštevil dvojčkov najbrž nadaljuje, zato pa jih vprašajte: "Jih je neskončno mnogo?" Boste videli, kaj vam bodo odgovorili. Nekateri bodo rekli ja, drugi ne; in potem jih vprašajte, zakaj, iz kakšnega razloga, kaj jim pravi občutek, in čez nekaj časa, mogoče še isti dan, jim dajte za nalogo, naj doma še več premišljujejo o tem in pridejo do bolj pretehtanega sklepa. In po kakšnem tednu, ko nekaj časa traja negotovost — namreč negotovost: Je ali ni praštevil dvojčkov neskončno mnogo — jim rečete: "Nihče ne ve odgovora! In če se vam posreči dognati, pridete v zgodovino matematike."

PATRICIA CHWAT. Že že, ampak za postavitev takega vprašanja, mora biti vsaj en pogoj izpolnjen: človek ga mora poznati. Potrebna je primerna matematična kultura.

SERGE LANG. Za božjo voljo, kakšna pa je potem korist učiteljišč, ki naj bi vzgajala učitelje?

PATRICIA CHWAT. Saj jih sploh ni!

SERGE LANG. Potem je pa naloga družbe, da jim oskrbi tako izobrazbo. Namesto da jim tlači v knjige vse mogoče neumnosti, bi morali dobiti take reči. Tako bi učence navajali k delu in razmišljanju. Ravno tako se bodo naučili deliti, ravno tako se bodo izurili v temeljnih operacijah, če pa bodo začeli z vprašanji, ki imajo kaj pomena in so med seboj povezana in

tako lepa, bodo zelo pozitivno reagirali. Isto velja tudi za nekatere enačbe. Če vzamemo x in y , se lahko ukvarjamo tudi z vprašanji, s kakršnimi sem se jaz pri svojem predavanju v Palači odkritij [5] ali v Torontu.

PATRICIA CHWAT. Da ne pozabim, eden mojih učencev ima odtis predavanja, ki ste ga imeli lani, in na prvi strani je z velikimi črkami natisnjena enačba $y^2 = x^3 + 1$. Med mojo prihodnjo uro v razredu me je Yaelle vprašala, kaj se pravi enačba. Tega še nismo jemali (pravzaprav jih še zdaj nismo vzeli v razredu), vendar sem ji razložila ta matematični pojem, se pravi bistvo enačbe; in Yaelle mi je rekla: "O, to je torej enačba, se pravi nekaj zelo lahkega, jaz sem pa mislila, da je kaj hudo zapletenega." In Nathalie, tista, ki je niste hoteli vprašati, jo je poskusila rešiti in rekla: "No, vzemimo, da je $y = 3$ in $x = 2$."

SERGE LANG. Lepa reč, nimam kaj dodati. (Smeh.)

JEAN BRETTE. In potem, je prebrala vse predavanje?

PATRICIA CHWAT. Ne vem, je nisem vprašala, vendar sta bili obe zelo razočarani, ker za domačo nalogo ni bilo nobene enačbe. Rekla sem jima, da ne gre samo za računanje rešitev, temveč tudi za dokazovanje, da ni drugih.

JEAN BRETTE. Ampak za začetek moraš najti vsaj eno; tu sta dva problema.

PATRICIA CHWAT. Po mojem je bilo zanju to igra.

SERGE LANG. Ni dvoma. Čudovita reakcija; če namreč otrok reagira tako, ga problem že pritegne in potem ga lahko v njem razvijete in ga naučite celo tistega, kar je uradno na programu, vendar v povezavi s problemom.

PATRICIA CHWAT. Ja, vendar mora človek najti navezavo, ki je zadosti bogata, da jih moreš z njo obkoliti ...

SERGE LANG. Zmeraj se kaj najde, naj bo že algebra, naj bo geometrija, naj bodo koordinate, vse mogoče. In tako vas pritegne večja zamisel, glasbena fraza, matematična fraza, ki je lepa fraza ...

JEAN BRETTE. Vidim, da imate glasbo res radi!

SERGE LANG. Prav gotovo, rad jo imam. Seveda, ker moram toliko povedati in če rečem "glasba", s tem človeka spodbudim. Učenci niso vajeni premišljevati z istimi pojmi o glasbi in matematiki. Pa ne gre za plehke zadeve, ne za štetje sekund ali za število tresljajev. Če pravim glasbena fraza, ne mislim na take reči, temveč na njeno matematično analogijo, po kakršni je mogoče razviti kakšno matematično temo. Matematika niso samo "števila", kakor tudi glasba niso samo note. Glasba se ti razodene šele, če jo uživaš, če zaradi nje doživiš kaj lepega. Ravno tako doživiš kaj lepega tudi pri matematiki. Ravno kar ste sami rekli, da je bila Nathalie zelo srečna, ko je našla rešitev enačbe.

PATRICIA CHWAT. Pa jaz tudi, seveda.

JEAN BRETTE. Vidim; in prijetno je, da človek lahko prebere dobro polovico predavanja, preden pride do misli, ki je ne razume in mu povzroči nekaj težav.

PATRICIA CHWAT. Lani sem uporabila odtis vašega predavanja o praštevilih [5]; pregledovali smo ga v zadnjem razredu, za povrh, in smo se zelo poglobili vanj. Imeli smo kajpak nekaj težav z logaritmi, saj veste, da je to za osmi razred malo težje.

SERGE LANG. Pa ja, seveda.

PATRICIA CHWAT. Prav gotovo tistega predavanja niste imeli za učence osmega razreda.

JEAN BRETTE. Pravzaprav ni bilo namenjeno nikomur posebej. Namenjeno je bilo pač tistemu, ki je zraven, in če je kdo ob kakšni priložnosti sprevidel, da ne more več slediti, je bil že daleč in povrh tega je vsak vedel, da s tem stvar še ni končana. Resnično, v osnovnih razredih le redko kateri od učiteljev reče učencem, da je matematika nekaj takega, kar ni končano, kar ni bilo dokončno iznajdeno pred dva tisoč leti ali pred dvema stoletjema ali pred petdesetimi leti. Človeku dobro dene, če zve, da tudi veliki matematiki niso vedeli nekaterih stvari in da na nekatera vprašanja še zmeraj ne zna nihče odgovoriti.

PATRICIA CHWAT. To je dobro za moralo drugih!

SERGE LANG. V enem pogledu že, v drugem sem pa v enem od razredov, ko sem jim o tem pripovedoval, izrecno rekel, da je moral vsa ta pravila kdo odkriti, naj bo že pred tisoč leti ali pred dvema stoletjema; in potem je eden od učencev rekel: "Aha, se pravi, tisto, kar boste danes vi odkrili, se bomo učili v šoli čez kakšnih dvesto let." Se spominjate? Tako gledajo na človeško plat te zadeve, saj me je ena od učenek vprašala, s čim se jaz ukvarjam v življenju; in tako sem odgovoril, da raziskujem, odkrivam probleme. In je rekla: "In kaj bo, ko ne boste mogli odkriti nobenega problema več?" In eden od učencev za njo je zaklical: "Cvek, cvek!" (Smeh.) Gotovo so ujeli misel in jo doumeli, tako da je matematika postala zanje živa.

PATRICIA CHWAT. Pripovedujem jim, da matematika obstaja, da je živa in ne stereotipna, stara in plesniva, vendar pri tako majhnih otrocih včasih ne gre lahko.

SERGE LANG. Imate prav. Vsak učitelj mora delati po svoje, po svojem občutku. Vsak mora ubirati svoje poti, da razgiblje učence. Potrebno je vse in ne smemo nobene stvari opustiti.

JEAN BRETTE. Tole bi bil imeniten sklep: Potrebno nam je vse in ne smemo nobene reči opustiti.

[1] Serge Lang je imel tu zapovrstjo v treh letih od 1981 do 1983 tri predavanja. Prvič so bila objavljena v listu *Journal de Palais*, potem pa zbrana v knjigi, ki jo je leta 1984 izdal v Franciji Belin.

[2] *Geometry, a High School Course*, v sodelovanju z Genom Murrowom (Springer-Verlag 1983).

[3] Francoski izobraževalni sistem je zelo centraliziran in deloma sloni na "nadzornikih", ki sestavljajo učne programe in pazijo na to, da se v šoli ravna po njih.

[4] De La Chapelle, *Institutions de Geometrie*, prvi zvezek (1746).

[5] *The Beauty of Doing Mathematics* (Springer-Verlag 1985).

NOVE KNJIGE

DUMITRAȘCU L., Ioachim A., Generating fortran programs for decision tables, Editura Academiei Române, București 1990, 312 str.

Knjiga podaja temeljna načela za oblikovanje odločitvenih tabel kot pomembnega pripomočka sistemov za podporo odločanja. Odločitvene tabele predstavljajo grafični prikaz selektivnih pogojev in od njih odvisnih aktivnosti; ta je konsistenten in preglednejši od običajnih logičnih diagramov poteka programa. Omogočijo strukturirano zgradbo računalniških programov, nastalih na temelju pravil v njih, ki poudarjajo vse možne alternative glede realizacije omejenega števila programov aktivnosti. Uporaba odločitvenih tabel je mnogotera. Avtorja jih uporabita v okviru programskega sistema za avtomatičen razvoj računalniških programov v jeziku fortran. Knjiga je zelo zanimiva za strokovnjake in študente informatike.

Janez Grad

LANG S., Matka! Pogovori z učenci. Prevedel Janko Moder. (Presekova knjižnica ; 34) Ljubljana 1991, 116 str.

Pred seboj imamo zapise avtorjevih pogovorov s srednješolci v Parizu in Torontu o nekaterih vprašanjih elementarne matematike. V prvem poglavju *Kaj je pi?* sta elegantno izpeljani formuli za ploščino in obseg kroga, v poglavju *Prostornine v višji dimenziji* pa formule za prostornine piramid in stožcev. Razgovor *Prostornina krogle* nas pripelje do te prostornine po Arhimedovi poti, s pomočjo včrtanih valjev. V razgovoru *Dolžina krožnice* dobimo obseg kroga v bistvu kot odvod njegove ploščine po polmeru; analogno je izpeljana *Površina krogle*. V poglavju *Pitagorejske trojice* so le-te podane v celoti, na podlagi parametrične izražave vseh racionalnih točk na enotski krožnici. V poglavju *Neskončnosti* ugotovimo, da je racionalnih števil števno mnogo, realnih števil pa neštevno mnogo.

Naj navedem še nekaj značilnosti Langovih izvajanj. Določanje ploščin in prostornin avtor lepo poenostavi, tako da upošteva, kako se le-te spreminijo pri raztegih likov in teles. Ob raznih zgledih pokaže, kako je elementarna algebra v pomoč geometriji, marsikdaj pa tudi obratno. S sugestivno izpeljanimi dokazi pomaga učencem razumeti, za kaj gre in kakšne so zveze med posameznimi trditvami; pomaga jim dojeti lepoto matematične zgradbe. Vsa obravnava poteka seveda kot pogovor z učenci, ki je nadvse živahen in duhovit tudi v prevodu. Avtor doseže, da povprečni učenci sami izvedejo posamezne majhne korake v dokazu in tako uvidijo, da matematike le ni tako nemogoče razumeti.

Ta izredna knjiga bo zares koristila učencem višjih razredov osnovne šole pa tudi starejšim. Nas, učitelje matematike, bodo poleg izvirnega pristopa zanimali tudi številni metodični napotki. Le-te najdemo v pripombah k poglavjem in v sklepnem razgovoru v ožjem krogu, o pouku matematike in njegovem izboljšanju, ki je objavljen v tej številki Obzornika.

Janez Rakovec