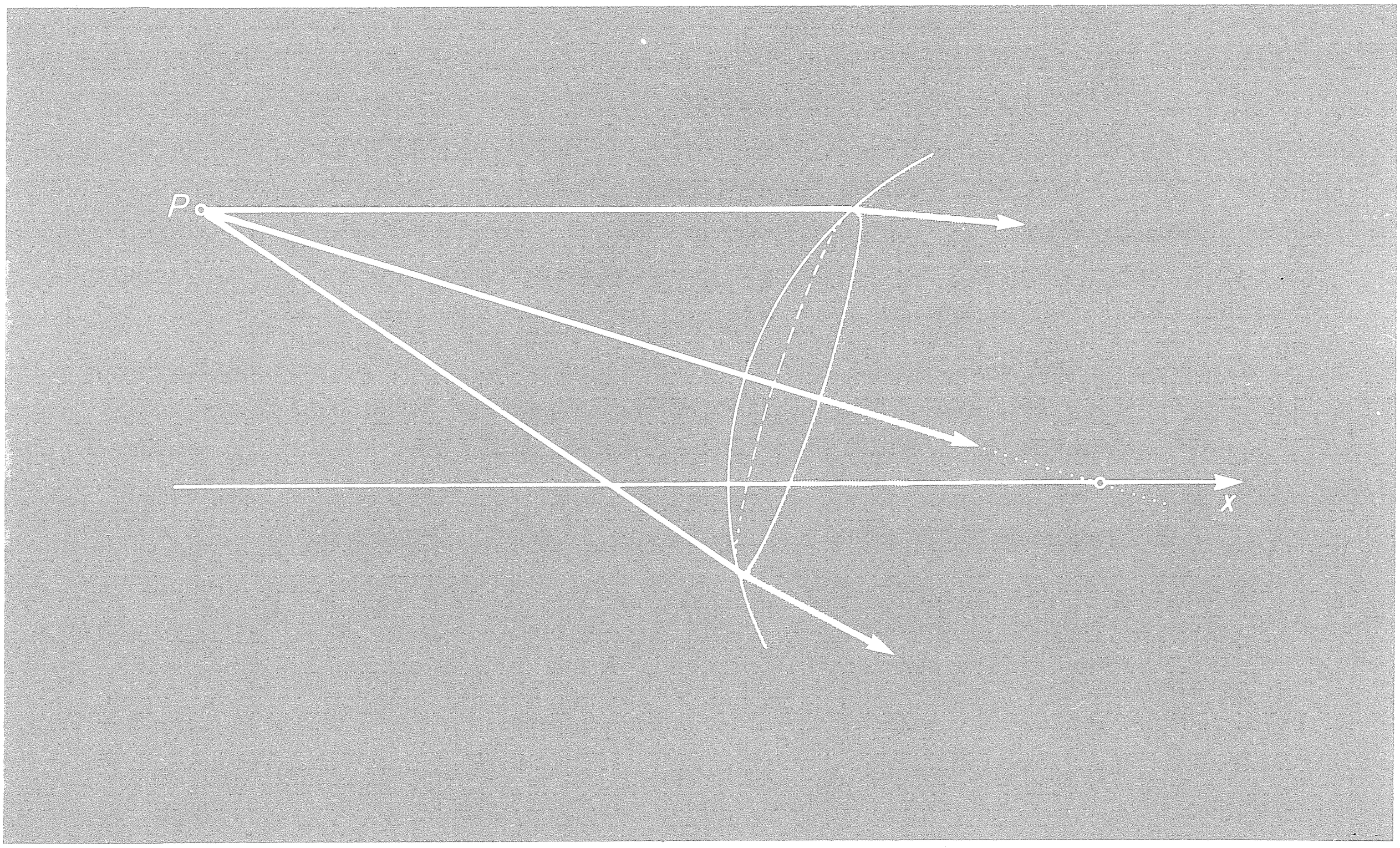
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7446

1990
Letnik 37
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 1990
letnik 37, številka 2, strani 33–64

Glasilo društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, telefonska št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki 50101-620-107-257300-5694/4.

Uredniški odbor: Milan Hladnik (urednik za matematiko), Bojan Mohar (glavni urednik), Janez Strnad (urednik za fiziko in odgovorni urednik), Ciril Velkovrh (urednik).

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec, računalniško stavil Martin Zemljič.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 100.– din. Naročnine v knjigarnah in za ustanove 300.– din. Posamezna številka 20.– din, dvojna številka 40.– din, stare številke 10.– din, za tujino 25 $.

Tisk: Tiskarna Kurir. Naklada 1600 izvodov. Izdajo revije sofinancirata Republiški komite za izobraževalno dejavnost in tehnologijo in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo.

© 1990 DMFA R Slovenije – 1010 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Kaj imata skupnega zaporedje zasukov kartezičnega sistema v ravnini in zaporedje leč na optični klopi? II — What do have in common a sequence of Cartesian plane coordinate system rotations and a sequence of lens on optical bench? II (Sergej Pahor) 33–44

Scott-Suppesov izrek — The Scott-Suppes theorem (Sandi Klavžar) 45–50

Nevronske mreže — Neural networks (Aleksander Zidanšek) 51–57

Vesti — News

Prešernove nagrade študentom matematike in fizike za leto 1989 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 58

Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1989 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 59–63

Nove knjige — New books (Ivan Pucelj, Janez Rakovec, Bojan Mohar, Jože Andrej Čibej, Bojan Magajna, Sandi Klavžar) . . . . 57, 63, 64, III–IV

Na ovitku: Slika 3 k članku na str. 33. Žarki iz točke P padajo na krogelno kapico.

KAJ IMATA SKUPNEGA ZAPOREDJE ZASUKOV KARTEZIČNEGA SISTEMA V RAVNINI IN ZAPOREDJE LEČ NA OPTIČNI KLOPI? II

SERGEJ PAHOR

PACS a2110+a a4278He

To je nadaljevanje članka, ki je izšel v prejšnji številki Obzornika.

WHAT DO HAVE IN COMMON A SEQUENCE OF CARTESIAN PLANE COORDINATE SYSTEM ROTATIONS AND A SEQUENCE OF LENS ON OPTICAL BENCH? II

This is the continuation of the article from the previous number of Obzornik.

2. Zaporedje leč ali lečje

Zakaj sploh govorimo o lečah? V mnogih učbenikih moderne optike so leče, če se sploh obravnavajo, potisnjene na stran. Lep primer je znani učbenik na 304 straneh [1]. Vse o lečah je na treh straneh.

Staromodna pot do enačb lečja je računanje loma žarka na krogelnih ploskvah leč, in sicer korak za korakom od prve do zadnje leče. Ta pot je res dolgočasna in kar je še hujše, rezultat je nepregleden.

Spoznali pa bomo, da lahko tudi lečja obravnavamo na novo in zanimivo [2,3]. Z novim matematičnim orodjem, bralec je najbrž že uganil, da so to matrike in vektorji, prehodimo to pot na hitro in pregledno. To novo orodje je dovolj preprosto tudi za srednješolca. Tako močno je, da je prav vseeno, ali so leče tanke ali debele. In resnične leče so ponavadi kar debele. Tako prinesemo "nekaj svežega zraka v sicer že kar zatohlo poglavje o lečah" [4].

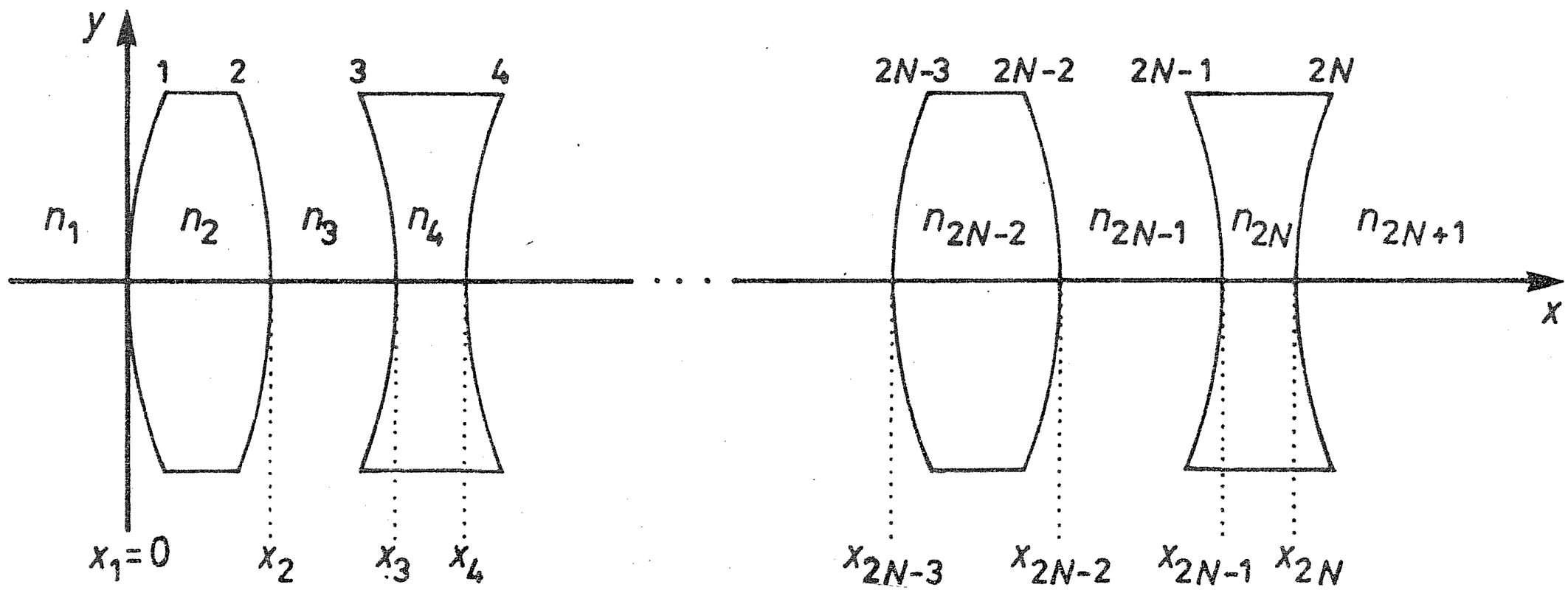
Še pomembnejše je tole. Uvideli bomo, da v paraksialnem približku v polnosti opišemo poljubno lečje preprosto z eno samo matriko 2×2. Matrike torej niso zgolj računski pripomoček za fizika. To je lep primer, da fizikalnih sistemov ne opisujemo le s skalarji in vektorji, ampak tudi z matrikami.

Na koncu se nam bo iz matričnega ali algebrajskega opisa lečja rodil nov in nazoren geometrijski opis. Ta opis za tanko lečo bralci najbrž že poznajo. Videli bomo, da je tudi geometrijski opis lečja podobno preprost. Lepa pot do njega vodi preko algebrajskega opisa.

Slika 2 kaže zaporedje leč ali lečje s skupno optično osjo. Ta pravokotno prebada temena leč. Na lečje pada svetlobni žarek. Kakšen je žarek, ki izhaja iz lečja?

Najprej se dogovorimo, kako bomo zapisovali stvari, o katerih bomo govorili in z njimi računali. Potrebovali bomo koordinatni sistem. Izberimo ga tako, da se os x pokriva z optično osjo in kaže iz smeri vpadnega žarka. Izhodišče postavimo v levo teme prve leče. Lečje sestavlja N leč. Mejne ploskve leč so krogelne kapice in so konkavne, konveksne ali ravne. Koordinato temena s-te mejne ploskve označimo z x_s, $s = 1, 2, \ldots, 2N$. Razmik med mejnima ploskvama s in $s+1$ je $h_{s+1} = x_{s+1} - x_s \geq 0$. Z n_{s+1}

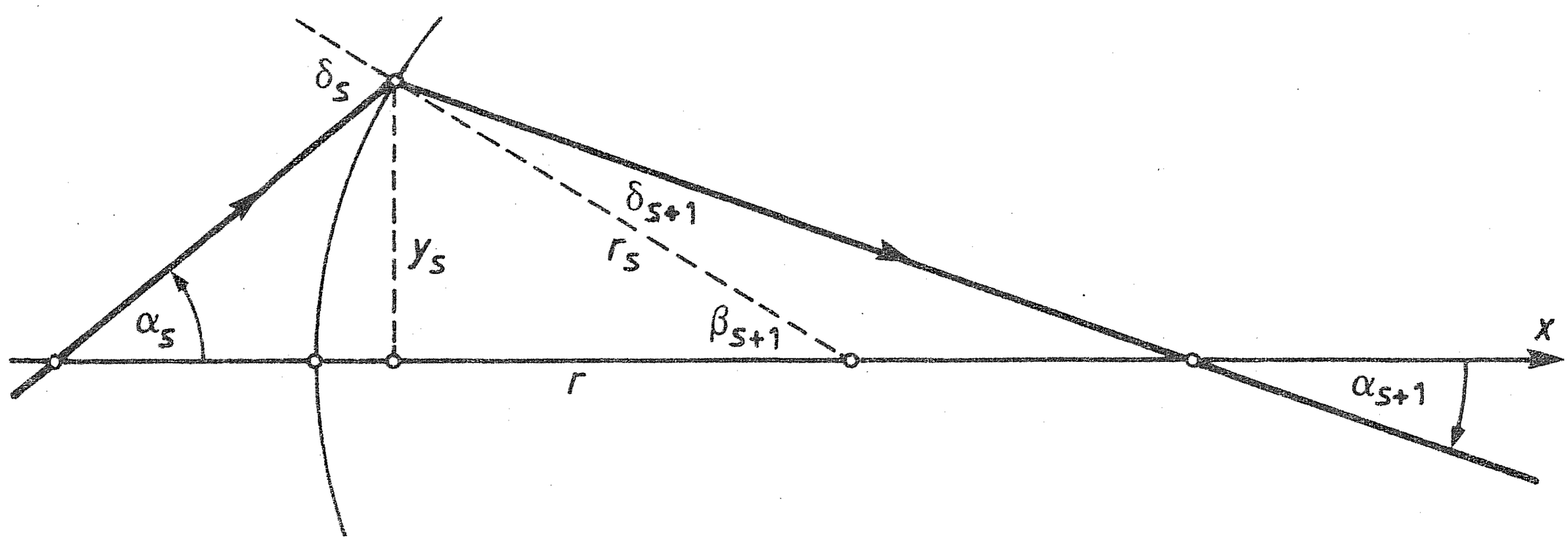
označimo lomni kvocient sredstva med tema mejnima ploskvama. Lomni kvocient sredstva na levi strani lečja je n_1 in n_{2N+1} na desni strani.



Slika 2 Lečje s skupno optično osjo

Oglejmo si žarke, ki izhajajo iz točke P in padajo na mejno ploskev leče. Koordinatni sistem zavrtimo okrog osi x, da pade ta točka v koordinatno ravnino (x, y). Žarek, ki leži v tej ravnini in pada pravokotno na mejno ploskev, se ne lomi. Imenujemo ga centralni žarek izbrane točke. Mejna ploskev je krogelna kapica. Zato je dovolj, da narišemo ali izračunamo, kako se lomijo žarki, ki ležijo v koordinatni ravnini (x, y). Poti drugih žarkov dobimo tako, da vrtimo ravnino (x, y) okrog centralnega žarka. Zato se v nadaljnjem omejimo na žarke v koordinatni ravnini (x, y). (Glej sl. 3, ki je na *prvi strani ovitka.*)

Izberimo s-to mejno ploskev. Naj bo, na primer, konveksna, če jo gledamo v pozitivni smeri osi x. Žarek, ki pada na to ploskev, določimo s točko, skozi katero gre, in s smerjo razširjanja. Vpadni in lomljeni žarek imata skupno točko y_s na s-ti mejni ploskvi. Smer razširjanja določimo s smernim kotom, ki naj bo po absolutni vrednosti manjši od π. To je kot, s katerim zavrtimo pozitivno smer osi x v smer žarka. Štejemo ga pozitivno, če zavrtimo os x proti pozitivni smeri osi y in negativno v nasprotni smeri.



Slika 4 Lom žarka na konveksni mejni ploskvi

Naj bo na primer kot vpadnega žarka $\alpha_s > 0$ in kot lomljenega žarka $\alpha_{s+1} < 0$ (Sl. 4). Zapišimo lomni zakon

$$n_s \sin \delta_s = n_{s+1} \sin \delta_{s+1}$$

Kota δ_s in δ_{s+1} štejemo pozitivno v skladu s tradicionalnim zapisom lomnega zakona.

S slike 4 razberemo, da lahko izrazimo kota δ_s in δ_{s+1} s smernima kotoma $\alpha_s > 0$ in $\alpha_{s+1} < 0$, z višino y_s in s krivinskim radijem r_s mejne ploskve

$$\delta_s = \alpha_s + \beta_{s+1}, \quad \beta_{s+1} > 0$$

$$\beta_{s+1} = \delta_{s+1} - \alpha_{s+1}, \quad y_s/r_s = \sin \beta_{s+1}$$

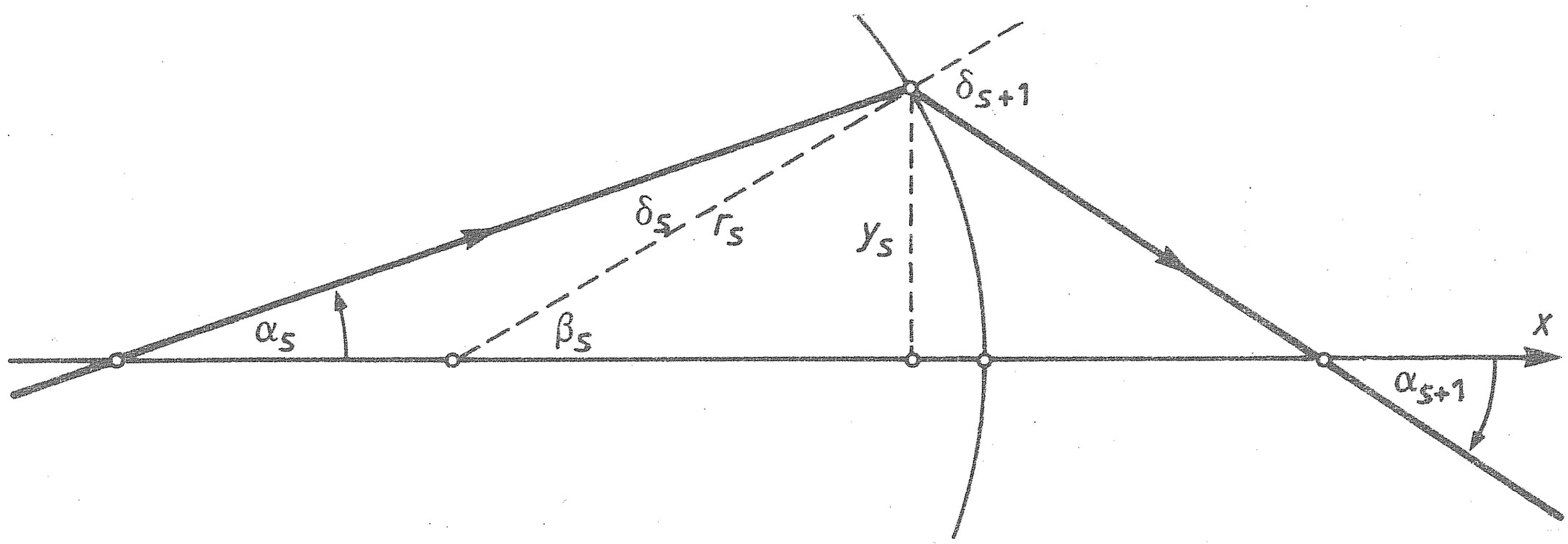
Omejimo se na paraksialne žarke, ko velja

$$|\alpha_s| \ll 1, \quad |\alpha_{s+1}| \ll 1, \quad |\beta_{s+1}| \ll 1$$

Ustrezno aproksimirajmo lomni zakon

$$n_s(y_s/r_s + \alpha_s) = n_{s+1}(y_s/r_s + \alpha_{s+1})$$

Lahko se prepričamo, da velja tako zapisani lomni zakon za vse smerne kote α_s in α_{s+1}, pozitivne in negativne, če je mejna ploskev konveksna.



Slika 5 Loma žarka na konkavni mejni ploskvi

Kaj pa, če je mejna ploskev konkavna (Sl. 5)? Naj bo na primer spet $\alpha_s > 0$ in $\alpha_{s+1} < 0$.

Sedaj velja

$$\beta_s = \alpha_s + \delta_s$$

$$\beta_{s+1} = \beta_s - \alpha_{s+1}, \; y_s/r_s = \sin \beta_s, \; \beta_s > 0$$

in

$$n_s(y_s/r_s - \alpha_s) = n_{s+1}(y_s/r_s - \alpha_{s+1})$$

Podobno kot prej se lahko prepričamo, da to velja za vse smerne kote, pozitivne in negativne.

Zapisa lomnega zakona za konkavno in konveksno mejno ploskev se ne ujemata po predznaku členov. Zato se dogovorimo, da štejemo krivinski radij konkavne mejne ploskve negativno. Tako dobimo enoten zapis lomnega zakona

$$n_s(y_s/r_s + \alpha_s) = n_{s+1}(y_s/r_s + \alpha_{s+1})$$

Do sem nič novega. Zdaj se spomnimo na računanje zasukov koordinatnega sistema s stolpci in matrikami. Žarek je določen s točko, skozi katero gre, in s smernim kotom. Ta podatka združimo v stolpec

$$\begin{bmatrix} \alpha_s \\ y_s \end{bmatrix}$$

Vpadni in lomljeni žarek imata skupno točko y_s. To in lomni zakon združimo v en zapis

$$\begin{bmatrix} \alpha_{s+1} \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_s/n_{s+1}, & (n_s/n_{s+1} - 1)/r_s \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_s \\ y_s \end{bmatrix}$$

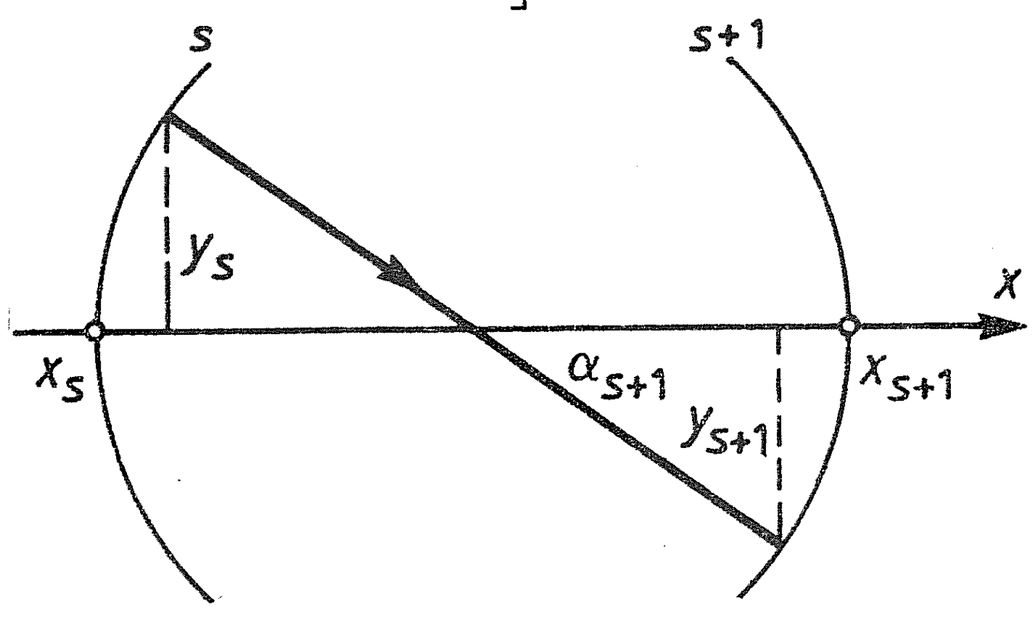
S tem smo povedali vse o lomu na s-ti mejni ploskvi. Matriko

$$L_s = \begin{bmatrix} n_s/n_{s+1}, & (n_s/n_{s+1} - 1)/r_s \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$$

imenujemo *lomna matrika* s-te mejne ploskve.

Lomljeni žarek potuje po premici do naslednje mejne ploskve $s+1$ (Sl. 6).

Izračunajmo y_{s+1}. Ne bodimo po nepotrebnem natančni. Hitro uvidimo, da za paraksialne žarke prav dobro velja aproksimacija



Slika 6 Pot žarka od ene do druge mejne ploskve

$$(y_s - y_{s+1})/h_{s+1} = -\alpha_{s+1}, \; h_{s+1} = x_{s+1} - x_s$$

Tudi te zapišimo v novi obliki

$$\begin{bmatrix} \alpha_{s+1} \\ y_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ h_{s+1}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{s+1} \\ y_s \end{bmatrix}$$

Matriko

$$T_{s+1} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ h_{s+1}, & 1 \end{bmatrix}$$

imenujemo *prenosna matrika* mejnih ploskev s in $s+1$.

Naših priprav je konec. Zdaj zapišimo, kako preslika zaporedje N leč vpadni žarek v izhodnega. Najprej se vpadni žarek lomi na prvi mejni

ploskvi. To opišemo z matriko L_1. Lomljeni žarek potuje po premici do druge mejne ploskve. To opišemo z matriko T_2. Tako zapisujemo korak za korakom in dobimo

$$L_{2N} T_{2N} L_{2N-1} T_{2N_1} \ldots L_2 T_2 L_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{2N+1} \\ y_{2N} \end{bmatrix}$$

Tu se pokaže smiselnost računanja z matrikami. Če se površine leč ne stikajo, napravimo $4N - 1$ korakov. Vse te korake zamenjamo z enim samim, ko matrike zmnožimo. Dobljeno matriko označimo z

$$A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$$

in jo imenujemo *matriko lečja*. Vse o lečju je v tej matriki 2×2.

Ko izračunamo matriko A, ni odveč malo kontrole. Determinanta produktov matrik je enaka produktu determinant. Ker je $\det L_s = n_s / n_{s+1}$ in $\det T_s = 1$, velja

$$\det A = ad - bc = (n_{2N} / n_{2N+1})(n_{2N-1} / n_{2N}) \ldots (n_1 / n_2) = n_1 / n_{2N+1} = \varepsilon$$

Kako preslika lečje z desne na levo? Kakšna je matrika te preslikave? Premaknimo izhodišče koordinatnega sistema v desno teme lečja in zavrtimo koordinatno os x. Označimo z A' matriko, z (α'_1, y'_1) vhodni in z $(\alpha'_{2N+1}, y'_{2N})$ izhodni žarek preslikave z desne na levo. Velja

$$A' \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_{2N+1} \\ y'_{2N} \end{bmatrix}$$

Vemo, kako matriko A' izračunamo v novem KS. Vendar nam ni treba ponoviti vseh računov. Takole sklepamo: žarek potuje v obe smeri po isti poti. To pove lomni zakon. Zato spremenimo smer izhodnega žarka pri preslikavi z leve na desno in ga obravnavajmo kot vhodni žarek pri preslikavi z desne na levo. Višina žarka se pri tem ne spremeni, $y'_1 = y_{2N}$. Paziti pa moramo na predznak novega smernega kota α'_1. Če je bil na primer izhodni smerni kot α_{2N+1} v starem KS negativen, je novi smerni kot α'_1 v novem KS pozitiven: $\alpha'_1 = -\alpha_{2N+1}$. To sledi iz dogovora o štetju smernih kotov v izbranem KS. Torej velja

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{2N+1} \\ y_{2N} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha'_{2N+1} \\ y'_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Upoštevajmo, da je

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{2N+1} \\ y_{2N} \end{bmatrix}$$

Torej

$$\begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{2N+1} \\ y_{2N} \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_{2N+1} \\ y'_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$$

Od tod dobimo

$$A' = \begin{bmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Zveza med obema matrikama je dovolj preprosta. Vendar ne pozabimo, da z matriko A računamo v enem in z matriko A' v drugem KS. Mejne ploskve, ki so v enem sistemu konkavne, so v drugem konveksne in obratno.

Za zgled in kontrolo izračunajmo vse to za debelo lečo. Najprej izračunajmo matriko A s krivinskima radijema r_1 in r_2, z lomnimi kvocienti n_1, n_2 in n_3 ter z debelino $h_2 = h$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{n_2}{n_3}, & \frac{1}{r_2}\left(\frac{n_2}{n_3} - 1\right) \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ h, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_2}, & \frac{1}{r_1}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \\ 0, & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_3} + \frac{h}{r_2}\left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{n_1}{n_2}\right), & \frac{1}{r_1}\left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{n_2}{n_3}\right) + \frac{1}{r_2}\left(\frac{n_2}{n_3} - 1\right) + \frac{h}{r_1 r_2}\left(\frac{n_2}{n_3} - 1\right)\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \\ h\frac{n_1}{n_2}, & 1 + \frac{h}{v_1}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \end{bmatrix}$$

Elementa matrike a in d sta neimenovani števili, element b ima dimenzijo recipročne dolžine in element c dimenzijo dolžine. To velja tudi za matrike poljubnega lečja. Hitro uvidimo, da imajo to lastnost matrike $L_s T_s$ in njihovi produkti. Množenje z L_1 tega ne spremeni. Da nas to ne bo motilo pri računanju, se dogovorimo, da bomo merili vse dolžine na primer v centimetrih. Matriko lečja računamo z neimenovanimi števili in na koncu pomnožimo dobljeni b z $1\,\mathrm{cm}^{-1}$ in c z $1\,\mathrm{cm}$.

V tem preprostem primeru lahko izračunamo matriko A' nazorno iz matrike A tako, da v njej zamenjamo r_1 z $-r_2$, r_2 z $-r_1$ in n_1 z n_3

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{n_2}{n_1}, & -\frac{1}{r_1}\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ h, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_3}{n_2}, & -\frac{1}{r_2}\left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right) \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Kot sledi iz izpeljave, v tem zapisu r_1 in r_2 določa preslikava z leve na desno. Isto dobimo tudi po prej zapisanem splošnem receptu. Najprej izračunajmo A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n_2}{n_1}, & \frac{1}{r_1}\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -h, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_3}{n_2}, & \frac{1}{r_2}\left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right) \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Upoštevajmo, da je

$$\begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = I, \quad \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -h, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ h, & 1 \end{bmatrix}$$

pa hitro dobimo že zapisani A'.

3. Preslikave predmetov

Kako lečje preslika predmet? Začnimo s točkastim svetilom. Zdaj, ko matriko lečja poznamo, se zaradi kroničnega pomanjkanja črk in indeksov in zaradi preglednejših zapisov dogovorimo na novo. Lečje postavimo na optično klop, kot nam ustreza. Levo mejno ploskev lečja oštevilčimo z 1. Koordinata levega mejnega temena je $x_1 = 0$. Desno mejno ploskev lečja oštevilčimo z 2. Koordinata desnega mejnega temena je $x_2 > 0$. Točkasto svetilo postavimo z leve pred lečjem na mestu $x_P = -l_1 < 0$ v višini y_1. Razdalja leve mejne ploskve od svetila je $l_1 = x_1 - x_P > 0$. Svetilo sveti na vse strani. Izberimo žarek s smernim kotom α_1. Preslikani žarek ima na mestu $x_S = l_2 + l_2$, kjer je l_2 razdalja slike do desne mejne ploskve, višino y_2 in smerni kot α_2

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ l_2, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ l_1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a + bl_1, & b \\ l_2(a + l_1 b) + c + l_1 d, & l_2 b + d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Ostro upodobitev ali sliko točkastega izvira dobimo na mestu, kjer gredo preslikani žarki za vse vpadne kote α_1 skozi isto točko. To bo res le za

$$l_2 = -\frac{c + l_1 d}{a + l_1 b}$$

ko je

$$y_2 = (l_2 b + d) y_1$$

To sta enačbi za preslikavo lečja v paraksialnem približku. Naj bo predmet daljica, ki stoji pravokotno na optični osi z vrhom y_1. Ker imajo vse točke te daljice isti l_1, se ta preslika v daljico, ki tudi stoji pravokotno na optični osi. Preslikava p je

$$p = y_2 / y_1 = l_2 b + d$$

in je enaka za vse točke daljice.

4. Geometrijska predstavitev lečja

Za samo računanje preslikav je izpeljana algebrajska predstavitev ali opis lečja dovolj. Vendar ne živimo samo od računanja, ampak tudi od

novih predstav. Pomagajmo si s tanko lečo v zraku, ko velja

$$|h/r_1| \ll 1,\ |h/r_2| \ll 1,\ |h/l_2| \ll 1,\ n_1 = n_3 = 1,\ n_2 = n$$

Tedaj smemo matriko A poenostaviti

$$A = \begin{bmatrix} 1, & -(n-1)(1/r_1 - 1/r_2) \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Hitro izračunamo, da je za tanko lečo v zraku $a = a'$. Tanka leča v zraku preslika v obe smeri enako

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = (n-1)(r_1 - 1/r_2) = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{l_1'} + \frac{1}{l_2'} = (n-1)(1/r_1 - 1/r_2) = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f}$$

V tem zapisu sta r_1 in r_2 določena s preslikavo z leve na desno.

Matrika tanke leče v zraku je določena z elemntom b. Ta ima nazoren geometrijski pomen. Iz zelo oddaljenega točkastega svetila na optični osi ($x_P = -l_1 \to -\infty$, $y_1 = 0$) pada na lečo šop žarkov, ki je vzporeden z optično osjo. Sliko tega šopa imenujemo *desno gorišče* F_2. Razdalja tega gorišča do tanke leče je goriščna razdalje f_2. Podobno izračunamo ali izmerimo levo gorišče F_1 z $f_1 = f_2$. Smemo si predstavljati, da sta gorišči F_1 in F_2 z optično osjo vred fiksno vezani na lečo. Tako si ustvarimo preprosto in nazorno geometrijsko predstavitev ali opis tanke leče. V tem opisu ne potrebujemo več koordinatnega sistema. Kako s to predstavo lahko preslikavo tudi narišemo in zakaj je leča s pozitivno goriščno razdaljo zbiralna in z negativno goriščno razdaljo razpršilna, naj bralec sam razmisli, če tega že od prej ne ve. Ne pozabimo pa na dogovor o merjenju dolžin. Razdalja slike je razdalja od slike do leče in razdalja predmeta je razdalja od leče do predmeta. Če je pri preslikavi z leve na desno razdalja slike pozitivna, je slika na desni strani leče, in na levi, če je ta razdalja negativna. Obrnjeno velja pri obrnjeni preslikavi z desne na levo.

Kaj pa, če tanka leča plava na vodi? Kako tedaj preslika predmet v vodi ali v zraku? Ali je vseeno, s katere strani položimo lečo na vodo? Ali postanemo kratkovidni ali daljnovidni, ko gledamo pod vodo? Kakšne leče imamo na potapljaški maski, če nosimo očala? Bralec naj to premisli in izračuna.

Vprašajmo: Kakšen je geometrijski opis poljubnega lečja? Kako ga izračunamo in kako ga izmerimo? Ker leče uporabljamo ponavadi v zraku, se poslej omejimo na $\varepsilon = 1$. Sedaj velja

$$A' = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d, & b \\ c, & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{bmatrix}$$

Temu ustrezno zapišemo enačbi za preslikave

$$l_2 = -(c + l_1 d)/(d + l_1' b),\ p' = l_2 b + a,\ ad - bc = 1$$

oziroma

$$l_2' = -(c + l_1' a)/(d l_1' b),\ p' = l_2' b + a$$

Tu smo, kot že prej, s črtico označili ustrezne količine za preslikavo z desne na levo.

Poskusimo zapisati te enačbe v preprostejši in geometrijsko nazornejši obliki. S starima dolžinama l_1 in l_2 to ne gre. Zato štejemo razdaljo slike in predmeta na novo od gorišč F_2 in F_1. Ti izmerimo pri lečju enako kot pri tanki leči. Lahko pa ju tudi izračunamo – v enem ali drugem koordinatnem sistemu. Točka na optični osi s koordinato x v starem KS ima v novem KS koordinato x'

$$x' = x_2 - x$$

z

$$x_1' = x_2 - x_2 = 0,\ x_2' = x_2 - x_1 = x_2$$

Označimo z x_{F_1} in x_{F_2} koordinati gorišč v starem KS in z x'_{F_1} in x'_{F_2} koordinati gorišč v novem KS. Potem iz zapisanih relacij sledi

$$x_{F_2} = x_2 + l_{F_2} = x_2 - d/b,\ x'_{F_1} = x_2' + l'_{F_1} = x_2' - a/b$$

z

$$x_{F_1} = x_2 - x'_{F_1} = a/b,\ x'_{F_2} = x_2 - x_{F_2} = d/b$$

Razdalja od slike do gorišča F_2 je

$$s_2 = x_S - x_{F_2} = x_2 + l_2 - x_2 + d/b = l_2 + d/b$$

Razdaljo predmeta pa merimo od gorišča F_1

$$s_1 = x_{F_1} - x_P = l_1 + a/b$$

Zapišimo enačbi preslikave z leve na desno z novimi razdaljami s_1 in s_2. Po krajšem računu dobimo

$$s_1 s_2 = 1/b^2,\ p = b s_2 = 1/b s_1$$

Po obliki enaki enačbi dobimo za preslikavo z desne na levo, ko obravnavamo sliko kot predmet in predmet kot sliko. Geometrijska slika kaže, da je $s_1' = s_2$ in $s_2' = s_1$. Preverimo

$$\begin{aligned} s_2' &= x_S' - x'_{F_1} = x_2 - x_P - x_2 + a/b = l_1 + a/b = s_1 \\ s_1' &= x'_{F_2} - x_P' = d/b - x_2 + x_S = l_2 + d/b = s_2 \end{aligned}$$

Torej

$$s_1' s_2' = 1/b^2,\ p' = b s_2'$$

Produkt povečav pp' je seveda 1.

Za tanke leče je $-1/b$ goriščna razdalja. Ali je to res tudi za lečje? Če je, od kod naj merimo goriščni razdalji? Od leve in desne mejne ploskve najbrž ne, če naj bo $f_1 = f_2$. Saj ne smemo razmika med mejnima ploskvama zanemariti, kot smo storili pri tanki leči. To potrdi na primer poskus, ko izmerimo gorišči F_1 in F_2. Če taki točki na optični osi obstajata, sta gotovo nekaj posebnega, podobno kot obe gorišči. Pri tanki leči se ti točki pokrijeta s koordinato $x = 0$.

Začnimo z dvojico točk, ki sta povezani s povečavo -1

$$bs_1 = -1$$

To ne bo dobro, saj sta pri tanki leči ti točki narazen za $4f$. Zato poskusimo z dvojico točk, ki sta povezani s povečavo 1, karkoli že to pomeni

$$bs_1 = bs_2 = 1$$

ali

$$x_P = x_{F_1} - s_1 = (a-1)/b$$
$$x_S = x_{F_2} + s_2 = x_2 - (d-1)/b$$

Za tanko lečo je $x_P = x_S = 0$. Kot bomo videli, sta to iskano točki. Imenujemo jih *glavni točki* H_1 in H_2, na optično os pravokotni ravnini skozi ti točki pa *glavni ravnini* $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$. Njuni koordinati sta

$$x_{H_2} = x_2 - (d-1)/b$$
$$x_{H_1} = (a-1)/b$$

Razdaljo od slike do glavne točke H_2 označimo z z_2 in razdaljo od glavne točke H_1 do predmeta z z_1

$$z_2 = x_S - x_{H_2} = l_2 + (d-1)/b$$
$$z_1 = x_{H_1} - x_P = l_1 + (a-1)/b$$

Vstavimo to v prvotni zapis enačb za preslikavo in dobimo nov preprostejši zapis

$$1/z_1 + 1/z_2 = -b = 1/f,\ p = -z_2/z_1$$

Po obliki enaki enačbi dobimo za preslikave z leve na desno

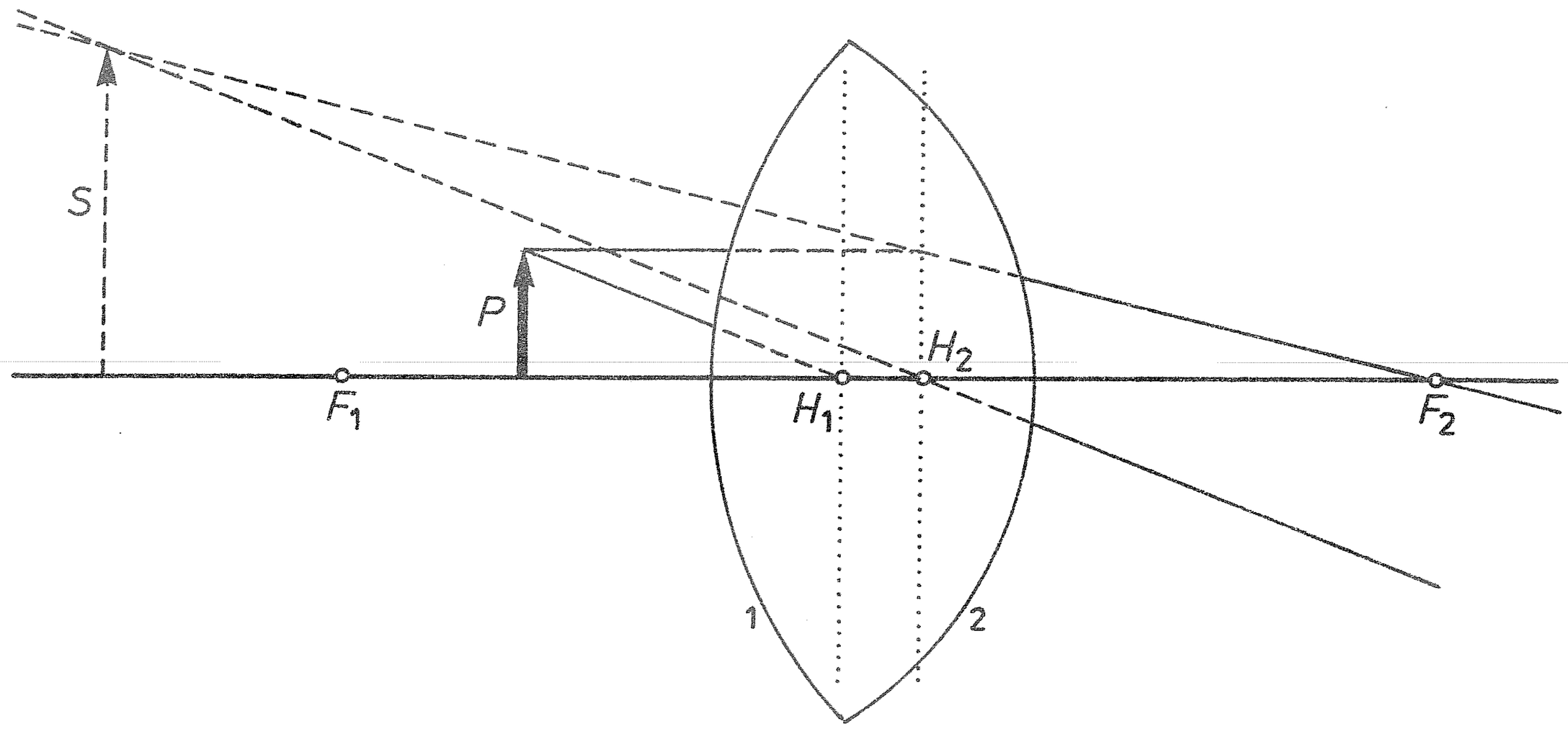
$$1/z_1' + 1/z_2' = -b = -1/f,\ p' = -z_1'/z_2'$$

Zdaj je čas, da tudi kaj izračunamo in narišemo. Oglejmo si debelo lečo. Računajmo v koordinatnem sistemu za preslikavo z leve na desno. Podatki so: $r_1 = 6\,\mathrm{cm}$, $r_1 = -5\,\mathrm{cm}$, $n = 1.5$ in $h = 4\,\mathrm{cm}$. Matrika A je

$$A = \begin{bmatrix} 0.7333, & -0.1611\,\mathrm{cm}^{-1} \\ 2.6667\,\mathrm{cm}, & 0.7778 \end{bmatrix}$$

z $f = 6.2\,\mathrm{cm}$, $x_{H_2} = 2.62\,\mathrm{cm}$ in $x_{H_1} = 1.66\,\mathrm{cm}$ (Sl. 7).

Na tem preprostem primeru vidimo, da je preslikava leče ali lečja v paraksialnem približku določena s štirimi odlikovanimi točkami na optični osi. Vsaki mejni ploskvi pripadata ustrezna glavna točka in gorišče. Smemo si predstavljati, da so te odlikovane točke z optično osjo vred vezane na lečje. Tako ustvarimo nov, geometrijski opis lečja, v katerem je koordinatni sistem odveč. Seveda moramo odlikovane točke prej izračunati iz podatkov. To res ne gre brez koordinatnega sistema, v katerem izračunamo matriko lečja. Ko z njo določimo odlikovane točke, pa lahko nanj pozabimo. Glavne točke lahko posredno ali neposredno tudi izmerimo. Kako določimo gorišči F_1 in F_2, že vemo. Glavni točki H_1 in H_2 določimo na primer tako, da poiščemo, kje je razdalja slike do gorišča F_2 enaka razdalji gorišča F_1 do predmeta. Kot sledi iz enačbe za preslikavo, je ta razdalja goriščna razdalja. Ker sta goriščni razdalji za lečje v zraku enaki, sta s tem določeni tudi glavni točki.



Slika 7 Debela leča z goriščema F_1 in F_2 ter z glavnima točkama H_1 in H_2 in ravninama $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$. Slika predmeta je narisana.

Nazorni geometrijski opis lečja ni v pomoč samo pri računanju preslikav. Z njim lahko preslikave tudi rišemo (Sl. 4.1). Za zdaj si še pomagajmo z algebrajskim opisom. Zvezo med vpadnim in izhodnim žarkom zapišemo na novo

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{f} \begin{bmatrix} s_1, & 1 \\ 0, & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad s_1 s_2 = f^2$$

Izberimo vhodni žarek, ki izhaja iz vrha predmeta in je vzporeden z optično osjo: $(0, y_1)$. Izhodni žarek gre, direktno ali v podaljšku, skozi gorišče F_2 pod kotom α_2

$$\alpha_2 = -y_1/f = y_2/s_2$$

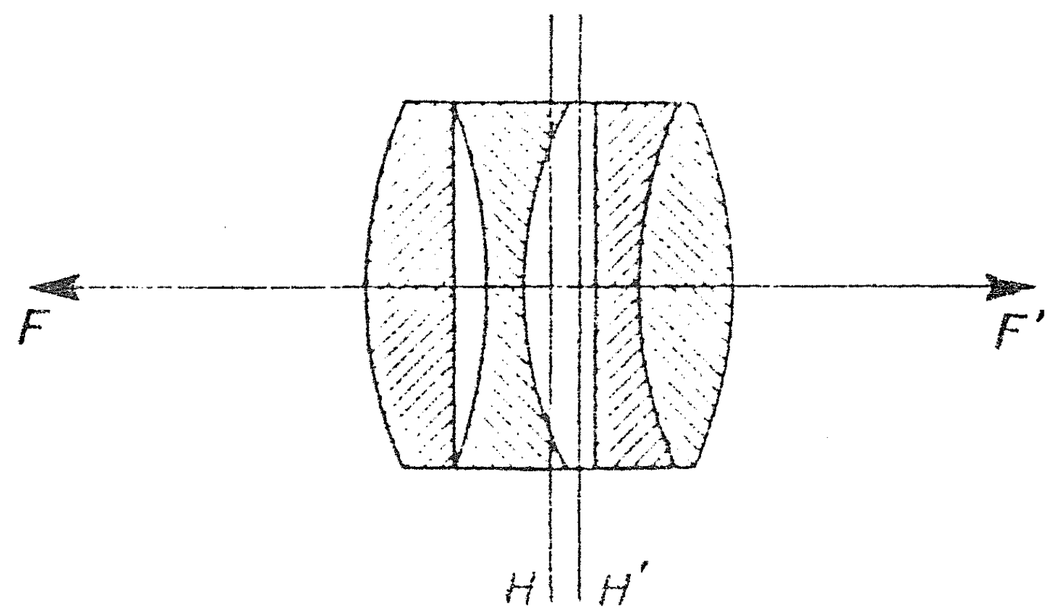
Ker je razdalja gorišča F_2 do glavne ravnine $\mathcal{H}_2$ ravno goriščna razdalja f, sledi od tod, da seče izhodni žarek, direktno ali v podaljšku, glavno ravnino $\mathcal{H}_2$ v višini y_1. Zato ta žarek narišemo tako, da podaljšamo vpadni žarek do glavne ravnine $\mathcal{H}_2$ in ga od tu potegnemo skozi gorišče F_2.

Za sliko vrha potrebujemo še en žarek. Izkoristimo na primer vpadni žarek, ki gre, direktno ali v podaljšku, skozi glavno točko H_1: $(-y_1/z_1, y_1)$. Po krajšem računu dobimo

$$\alpha_2 = \alpha_1, \ -y_2/z_2 = y_1/z_1$$

To pomeni, da vpadni žarek potegnemo z risanjem po optični osi od H_1 do H_2 in od tod naprej pod izhodnim kotom α_1. Presečišče tako narisanih žarkov da, direktno ali v podaljšku, sliko vrha predmeta. Tako smo dobili zaključen geometrijski opis lečja. Kot pri računanju se moramo tudi pri risanju držati dogovora o merjenju razdalj. Če je goriščna razdalja lečja naprimer negativna, je na sliki gorišče F_2 levo od glavne točke H_2 in F_1 desno od H_1.

Bralec naj preizkusi algebrajski in geometrijski opis leče ali lečja na lastnih zgledih. Lep primer je znani *Tessarjev objektiv*, ki je sestavljen iz štirih leč (Sl. 8, Tabela 1).



Slika 8 Tessarjev objektiv

	1	2	3	4	5	6	7	8
n	1.	1.6116	1.	1.6053	1.	1.5123	1.6116	1
r[cm]	1.628	−27.57	−3.457	1.582	∞	1.920	−2.400	
h[cm]		0.357	0.189	0.081	0.325	0.217	0.936	

Tessarjev objektiv je seveda narejen za preslikave tudi pod večjimi koti, ko te niso več linearne. Kako take preslikave računamo z matrikami in kako jih z lečji optimiziramo, da so napake čim manjše, bralec zve na primer v delu [2].

Kako pa Tessarjev objektiv preslika iz vode v zrak? To vprašanje je namenjeno bralcu, ki še ni obupal in je pripravljen sam naprej premišljevati in računati. S tem zaključimo ta zapis, ki je odgovor na nenavadno vprašanje: "Kaj imata skupnega zaporedje zasukov kartezičnega koordinatnega sistema in zaporedje leč na optični klopi?"

LITERATURA

[1] G. R. Fowles, *Introduction to modern Optics,* Holt, Reinhart and Winston, New Yorl 1968.
[2] W. Brouver, *Matrix Methods in Optical Instrument Design,* Benjamin, New York 1964.
[3] A. N. Matvejev, *Optika,* Vysšaja škola, Moskva 1985.
[4] P. Gosar, *Upodobitve z lečami,* Obzornik mat. fiz. **20** (1973) 20–29.

SCOTT-SUPPESOV IZREK

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (1985) 06 A 10, 05 C 75

V članku vpeljemo relacijo zaželenosti, relacijo vseenosti in relacijo polurejenosti ter podamo konstruktiven dokaz Scott-Suppesovega izreka. Izrek uporabimo v teoriji grafov.

THE SCOTT-SUPPES THEOREM

We introduce the preference relation, the indifference relation and the semiorder relation and give a constructive proof of the Scott-Suppes theorem. We apply the theorem to prove a result in graph theory.

1. Relacija zaželenosti in relacija vseenosti

Naj bo X dana množica objektov. Predpostavimo, da imamo kriterij, po katerem za nekatere pare objektov lahko odločimo, katerega izmed njiju imamo rajši. Tedaj relacijo

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \text{ imamo rajši kot } y\}$$

imenujemo relacija *zaželenosti*. Podobno vpeljemo tudi relacijo *vseenosti* s predpisom

$$I = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{vseeno nam je, ali izberemo } x \text{ ali } y\}$$

Vpeljani relaciji imata pomembno vlogo v teoriji odločanja, teoriji merjenja in tudi nekaterih drugih znanostih (npr. psihologiji). Ker hočemo zaželenost meriti, poskušamo dobiti funkcijo $f : X \to \mathbb{R}$, ki za vse $x, y \in X$ zadošča pogoju

$$xRy \iff f(x) > f(y) \tag{1}$$

Kadar poznamo relacijo zaželenosti R, je smiselno definirati relacijo vseenosti I s predpisom

$$xIy \iff \neg xRy \wedge \neg yRx \tag{2}$$

Med elementoma se ne moremo odločiti, če nimamo nobenega rajši od drugega. Za tako definirano vseenost pri merjenju s predpisom (1) velja

$$xIy \iff f(x) = f(y) \tag{3}$$

Relacija vseenosti (2) je tranzitivna. (Relacija R je *tranzitivna* na množici X, če za vse $x, y, z \in X$ velja: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.) Vendar nas tranzitivnost moti v mnogih praktičnih primerih. Navedimo klasičen (banalen) primer. Gotovo nam je vseeno, ali damo v kavo $\frac{1}{100}$ grama več ali manj sladkorja. Iz tranzitivnosti relacije vseenosti bi sledilo, da nam je vseeno tudi med enim in stotimi grami. Zato je Luce [3] predlagal, naj bi v takih primerih zaželenost

R merili s tako funkcijo $f : X \to \mathbb{R}$, ki zadošča pogoju

$$xRy \iff f(x) > f(y) + \delta \tag{4}$$

kjer je δ neka pozitivna konstanta neodvisna od x in y. Z besedami: neki objekt bomo imeli rajši od drugega le, če je zadosti večji. Na vprašanje, katere relacije dopuščajo merjenje s predpisom (4), bomo odgovorili s Scott-Suppesovim izrekom.

2. Polurejenost in intervalna urejenost

Relacija R je *polurejenost* na množici X, če za vse $x, y, z, w \in X$ zadošča naslednjim aksiomom:

Aksiom 1: $\neg xRx$

Aksiom 2: $xRy \wedge zRw \Rightarrow xRw \vee zRy$

Aksiom 3: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRw \vee wRz$

Najprej opazimo, da je polurejenost tranzitivna. Res, v aksiomu 3 za w izberemo x in upoštevamo aksiom 1.

Relacija, ki poleg *irefleksivnosti* (aksiom 1) zadošča še aksiomu 2, je *intervalna urejenost*, tisto pa, ki zadošča aksiomoma 1 in 3, imenujemo *delna polurejenost*. Definiciji delne polurejenosti in intervalne urejenosti sta neodvisni. Relacija $\{(x,y), (z,w)\}$ je delna polurejenost in ni intervalna urejenost, relacija $\{(x,y), (y,z), (x,z)\}$ na množici $\{x,y,z,w\}$ pa je intervalna urejenost in ni delna polurejenost.

Intervalna urejenost je pomembna struktura urejenosti, med drugim ji je posvečena knjiga [1]. Če sta J in J' dva intervala na realni osi, naj bo $J \succ J'$ natanko tedaj, ko leži interval J strogo desno od intervala J'. Ime intervalne urejenosti je pojasnjeno z naslednjim izrekom, ki ga navajamo brez dokaza.

Izrek 1 Relacija R na končni množici X je intervalna urejenost natanko tedaj, ko lahko vsakemu elementu $x \in X$ priredimo interval $J(x)$, tako da za vse $x, y \in X$ velja: $xRy \iff J(x) \succ J(y)$.

3. Izrek in posledica

Odgovorimo sedaj na ključno vprašanje: Katere relacije dopuščajo merjenje s predpisom (4)?

Izrek 2 Naj bo δ poljubna pozitivna konstanta. Relacija R na končni množici X je polurejenost natanko tedaj, ko obstaja funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, ki za vse $x, y \in X$ zadošča pogoju

$$xRy \iff f(x) > f(y) + \delta$$

Konstanto δ v izreku 2 lahko nadomestimo s poljubno pozitivno konstanto. Če definiramo funkcijo f' s predpisom $f'(x) = \frac{\delta'}{\delta} f(x)$, smo v izreku

δ nadomestili z δ'. Zato brez izgube za splošnost odslej postavimo $\delta = 1$.

Izrek 2 sta najprej dokazala Scott in Suppes [7], kasneje pa je bil dokazan še na nekaj drugih načinov, glej npr. [1], [4]. V zadnjem razdelku podajamo elementarni konstruktivni dokaz, še prej pa si oglejmo uporabo tega izreka v teoriji grafov.

Za graf G naj $V(G)$ označuje množico njegovih točk in $E(G)$ množico njegovih povezav. *Komplement grafa* G je graf $\overline{G}$, za katerega velja $V(\overline{G}) = V(G)$ in $[u, v] \in E(\overline{G})$ natanko tedaj, ko $[u, v] \notin E(G)$.

Naj bo $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ poljubna družina množic. Naj bo G graf, ki ima točke v bijektivni korespondenci z množicami družine $\mathcal{F}$, poljubni različni točki pa povežemo s povezavo natanko tedaj, ko imata ustrezni množici neprazen presek. G imenujemo *presečni graf* družine $\mathcal{F}$. V posebnem primeru, ko za elemente družine dopuščamo le enotske intervale na realni osi, presečni graf imenujemo *graf enotskih intervalov.* Za graf enotskih intervalov G bomo interval, ki ustreza točki $v \in V(G)$, označevali z I_v.

Posledica 1 Graf G je graf enotskih intervalov natanko tedaj, ko obstaja orientacija povezav grafa $\overline{G}$, ki je polurejenost na množici $V(G)$.

Dokaz. Naj bo G graf enotskih intervalov. Na množici $V(G)$ definirajmo urejenost R z naslednjim predpisom

$$uRv \iff I_u \text{ leži strogo desno od } I_v$$

R je orientacija povezav grafa $\overline{G}$ in lahko je videti, da je R polurejenost na $V(G)$.

Obratno, naj bo R orientacija povezav $\overline{G}$, ki je polurejenost na $V(G)$. Po Scott-Suppesovem izreku obstaja funkcija f, ki zadošča pogoju: $uRv \iff f(u) > f(v) + 1$. Če vsaki točki $v \in V(G)$ priredimo enotski interval s središčem v $f(v)$, vidimo, da je G graf enotskih intervalov.

4. Dokaz Scott-Suppesovega izreka

Če imamo funkcijo f, ki zadošča pogoju izreka, potem ni težko preveriti, da je R polurejenost. Ta del dokaza prepuščamo bralcu. Težji del dokaza je za vsako polurejenost konstruirati ustrezno realno funkcijo. Zaradi preglednosti ne bomo dokazovali vseh podrobnosti.

Relacija R je *antisimetrična* na množici X, če za vse $x, y \in X$ velja: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$. Relacija R je *strogo sovisna* na množici X, če za vse $x, y \in X$ velja: $xRy \vee yRx$. Relacija R *linearno ureja* množico X, če je R tranzitivna, antisimetrična in strogo sovisna na X. Relacija "$\geq$" na množici realnih števil je linearna urejenost. Naj bosta R in S relaciji na množici X in I relacija vseenosti, ki jo določa relacija R s predpisom (2). Relacija S je *usklajena razširitev* relacije R, če za vse $x, y, z \in X$ velja

$$xRy \Rightarrow xSy$$

in

$$xSy \wedge ySz \wedge xIz \Rightarrow xIy \wedge yIz$$

Lema 1 Naj bo R polurejenost na množici X. Tedaj obstaja linearna urejenost W na X, ki je usklajena razširitev R.

Naj bo R polurejenost na množici X in I relacija vseenosti, definirana z (2). Vpeljimo relaciji

$$xEy \iff \forall z : (xIz \iff yIz)$$

in

$$xSy \iff \forall z : [(yRz \Rightarrow xRz) \wedge (zRx \Rightarrow zRy)]$$

Lahko je videti, da je E ekvivalenčna relacija in S tranzitivna in strogo sovisna razširitev R. Naj bo $X^* = X/E$ množica ekvivalenčnih razredov po relaciji E. Definirajmo S^* na X^* s predpisom

$$x^* S^* y^* \iff xSy$$

Ni težko preveriti, da je relacija S^* dobro definirana in da linearno ureja X^*. Iskano relacijo W dobimo iz S^* tako, da elemente vsakega ekvivalenčnega razreda A^* linearno uredimo. S tem je lema dokazana.

Naj bo W linearna urejenost, ki jo po lemi 4 dobimo iz R. Z indukcijo na število elementov množice X bomo dokazali, da obstaja $f : X \to \mathbb{R}$, ki za vse $x, y \in X$ zadošča naslednjim pogojem:

$$xRy \iff f(x) > f(y) + 1 \tag{5}$$

$$xWy \iff f(x) \geq f(y) \tag{6}$$

$$|f(x) - f(y)| \neq 1 \tag{7}$$

Za $|X| = 1$ je trditev trivialna. Predpostavimo, da je trditev pravilna za polurejenosti v množici z $n-1$ elementi. Ker je W linearna ureditev, lahko predpostavimo, da elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ množice X zadoščajo pogoju: $x_i W x_j \iff i \geq j$. Tedaj ni težko videti, da velja

$$x_i R x_j \iff i > j \wedge \neg x_i I x_j \tag{8}$$

Naj bo $X' = X - \{x_n\}$ in naj bosta R' in W' ustrezni zožitvi relacij R in W na množico X'. Ker je R' polurejenost in W' njena linearna razširitev, po indukcijski predpostavki obstaja funkcija $f : X' \to \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem (5), (6) in (7). Sedaj imamo vse pripravljeno za razširitev funkcije f na X.

Primer 1: $x_n R x_{n-1}$.

Ker je W razširitev R, za vse $i < n$ velja $x_n R x_i$. Zato v tem primeru enostavno definiramo $f(x_n) = f(x_{n-1}) + 2$.

Primer 2: $\neg x_n R x_1$.

V tem primeru iz (8) in lastnosti usklajene razširitve za vse $i < n$ sledi $x_n I x_i$. Naj bo $\lambda = f(x_{n-1}) - f(x_1)$ in postavimo

$$f(x_n) = f(x_1) + \frac{\lambda + 1}{2}$$

Ni težko preveriti, da so izpolnjeni pogoji (5), (6) in (7).

Primer 3: $x_n R x_1 \wedge \neg x_n R x_{n-1}$.

Ker je W usklajena razširitev R in velja (8), obstaja indeks i, ki zadošča pogojema

$$x_n R x_j, \ j \leq i$$

in

$$\neg x_n R x_j, \ j \geq i + 1$$

V tem primeru moramo za $f(x_n)$ izbrati število, ki je večje od $f(x_i) + 1$ (zaradi zahteve (5)), večje od $f(x_{n-1})$ (zaradi zahtev (5) in (7)), toda manjše od $f(x_{i+1}) + 1$ (zaradi zahteve (6)). Naj bo

$$\lambda' = \max\{f(x_{n-1}), f(x_i) + 1\}$$

in definiramo

$$f(x_n) = \frac{f(x_{i+1}) + 1 + \lambda'}{2}$$

Ker velja $\neg x_n R x_{i+1}$ in ker je $i + 1 \leq n - 1 < n$, sledi $x_{i+1} I x_{n-1}$, torej zaradi (5) in (7) velja $f(x_{n-1}) < f(x_{i+1}) + 1$. Odtod zopet ni težko preveriti, da so izpolnjeni pogoji (5), (6) in (7). S tem smo za vse primere definirali $f(x_n)$ in dokaz je končan.

Za konec si oglejmo še dva preprosta primera, ki naj ilustrirata dokaz. Za krajši zapis naj I_X označuje identično relacijo na množici X. Naj bo $X = \{x, y, z, w\}$ in polurejenost definirana z $R = \{(x, y), (x, w), (z, w)\}$. Tedaj je

$$I = I_X \cup \{(x, z), (z, x), (y, z), (z, y), (y, w), (w, y)\}$$
$$E = I_X$$
$$S = I_X \cup \{(x, y), (x, z), (x, w), (y, w), (z, y), (z, w)\}$$

Ker je E identična relacija, je $X^* = X$ in $S^* = S$, zato je $W = S$ linearna razširitev R. Ustrezna linearna urejenost je $xW zW yW w$ oziroma usklajeno z dokazom: $w = x_1, y = x_2, z = x_3$ in $x = x_4$.

Določimo funkcijo f. Vrednost $f(w)$ izberemo poljubno, recimo $f(w) = 0$. Za določitev $f(y)$ moramo uporabiti *Primer 2* dokaza, torej je $\lambda = 0$ in $f(y) = \frac{1}{2}$. Za $f(z)$ uporabimo *Primer 1*, torej je $f(z) = \frac{5}{2}$. Končno, za $f(x)$ dobimo *Primer 3*. Tedaj je $i = 2$ in $\lambda' = \max\{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\} = \frac{5}{2}$. Zato je $f(x) = \frac{5/2+1+5/2}{2} = 3$. Povzemimo: $f(w) = 0, f(y) = \frac{1}{2}, f(z) = \frac{5}{2}$ in $f(x) = 3$.

Za drugi primer naj bo $X = \{x, y, z\}$ in polurejenost $R = \{(x, z), (y, z)\}$. Tedaj je

$E = I_X \cup \{(x, y), (y, x)\}$

$S = I_X \cup \{(x, y), (y, x), (x, z), (y, z)\}$

$X^* = \{[x], [z]\}$

$S^* = \{([x], [x]), ([x], [z]), ([z], [z])\}$

V ekvivalenčnem razredu $[x]$ postavimo yWx. Tedaj je

$W = I_X \cup \{(x, z), (y, x), (y, z)\}$

Ustrezna linearna razširitev R je tako $yWxWz$.

Določimo še funkcijo f. Najprej postavimo $f(x) = 0$. Po *Primeru* 1 dokaza je $f(x) = 2$ in po istem primeru je $f(y) = 4$.

LITERATURA

[1] Fishburn, P.C., *Interval Orders and Interval Graphs,* Wiley, New York 1985.

[2] Klavžar S., *Presečni grafi v evklidskih prostorih,* Magistrsko delo, Ljubljana 1988.

[3] Luce R. D., *Semiorders and a theory of utility discrimination,* Econometrica **24** (1956) 178-191.

[4] Rabinovitch I., *The Scott-Suppes theorem on semiorders,* J. Math. Psych. **15** (1977) 209-212.

[5] Rabinovitch I., *The dimension of semiorders,* J. Comb. Theory Ser. A **25** (1977) 50-61.

[6] Roberts F. S., *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences,* Addison–Wesley, Reading 1979.

[7] Scott D. S., Suppes P., *Foundation aspects of theories of measurement,* J. Symbolic Logic **23** (1958) 113-128.

OBVESTILO ČLANOM DRUŠTVA

V prvi številki Obzornika smo vam priložili položnico v želji, da nam nakažete članarino v višini 100.– din. Ob izidu četrte številke društvenega glasila bomo zvišali naročnino za tiste člane in naročnike, ki še ne bodo plačali ustreznega zneska. Tedaj jim bomo poslali opomin oz. novo položnico. Višino nove članarine bomo objavili v četrti številki Obzornika za matematiko in fiziko.

Milan Hladnik, Janez Strnad, Ciril Velkovrh

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO TIPKOPISA

S pisalnim strojem napisan rokopis predložijo avtorji v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62–64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene znake (glejte Pravila za slovenski pravopis, DZS, Ljubljana 1990.)

NEVRONSKE MREŽE

ALEKSANDER ZIDANŠEK

PACS 87.30

Hopfieldov model nevronsko mrežo primerja s spinskimi stekli. Zanimiva je termodinamična utemeljitev modela.

NEURAL NETWORKS

The Hopfield model of neural network is described. The network is compared with the spin glasses through thermodynamics.

Uvod

Možgani se od računalnika razlikujejo predvsem po tem, da so pripravni za reševanje druge vrste problemov. Računalnik hitreje računa z velikimi števili, pri prepoznavanju obrazov pa so možgani uspešnejši. Razlika nastane zato, ker so možgani sestavljeni iz številnih nevronov – vzporednih procesorjev [1], računalnik pa ima običajno le en procesor, ki podatke obdeluje zaporedno. Čeprav je delovanje nevronov počasnejše od delovanja elektronskih procesorjev, lahko z združenimi močmi rešijo težke naloge v razmeroma kratkem času. Podobno, paralelno arhitekturo ima tudi nevronska mreža. To je nov model računalnika, ki deluje povsem drugače kot običajni zaporedni računalniki. Vsak element mreže deluje kot samostojni procesor, podatki pa so shranjeni nelokalno kot različni vzorci v mreži. Zato je nevronska mreža sposobna prepoznati zapletene vzorce v kratkem času in je pri reševanju hevrističnih problemov uspešnejša od tradicionalnih, zaporednih računalnikov. Delovanje nevronske mreže pa omogoča tudi boljše razumevanje delovanja možganov, saj je obema primeroma skupno vzporedno delovanje velikega števila procesorjev. Oglejmo si najprej enostaven primer nevronske mreže.

Hopfieldov model nevronske mreže

Hopfieldov model [2] ponazarja kolektivne lastnosti nevronske mreže. Podobno kot možgani je mreža sestavljena iz n nevronov, od katerih je vsak lahko v enem od dveh različnih stanj. Pri Hopfieldovi mreži so nevroni običajno elektronski elementi, ki so po žicah povezani s svojimi sosedi. Eno stanje ponazarja aktivne nevrone, drugo pa pasivne. Delovanje nevronske mreže lahko simuliramo tudi na zaporednem računalniku. Pri tem pa se zmanjša hitrost, ker imamo le en procesor, in tako nevronom ne moremo spreminjati stanja istočasno. Stanje i-tega nevrona definiramo s spremenljivko s_i, ki je lahko ± 1. Konfiguracijo stanj vseh nevronov, ki se lahko s časom spreminjajo, imenujemo *vzorec* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Povezavi med dvema nevronoma priredimo realno število J_{ji} — *konstanto sinapse*, ki pove, za koliko se spremeni moč signala na poti od i-tega do j-tega nevrona. Za

izhodni signal i-tega nevrona vzamemo kar njegovo stanje s_i, vhodni signal pri j-tem nevronu pa dobimo tako, da seštejemo izhodne signale vseh sosednjih nevronov, pomnožene z ustrezno konstanto sinapse. S spreminjanjem konstant sinaps lahko hranimo različne vzorce. Pri hranjenju vzorcev uporabljamo *učno pravilo*, na primer Hebbovo [3]. Pravilo odseva domnevo, da se okrepijo povezave med nevroni, po katerih potuje mnogo signalov. To simuliramo tako, da povečamo konstante sinaps, ki povezujejo nevrone z enakim stanjem. Pri zapisu p vzorcev s^k Hebbovo pravilo podamo z enačbo

$$J_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} s_i^k s_j^k \tag{1}$$

Če mreža nima vseh povezav, so ustrezne konstante J_{ij} enake 0. Za mrežo si izmislimo funkcijo stanja

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j \tag{2}$$

Vidimo, da Hebbovo pravilo zniža vrednost funkcije H pri hranjenih vzorcih.

Časovno spreminjanje vzorca imenujemo Hopfieldova dinamika. Njeno osnovno pravilo je, da se stanje nevrona i spremeni, če se po predznaku razlikuje od lokalnega polja B_i. To je definirano s prispevki vseh sosednjih nevronov:

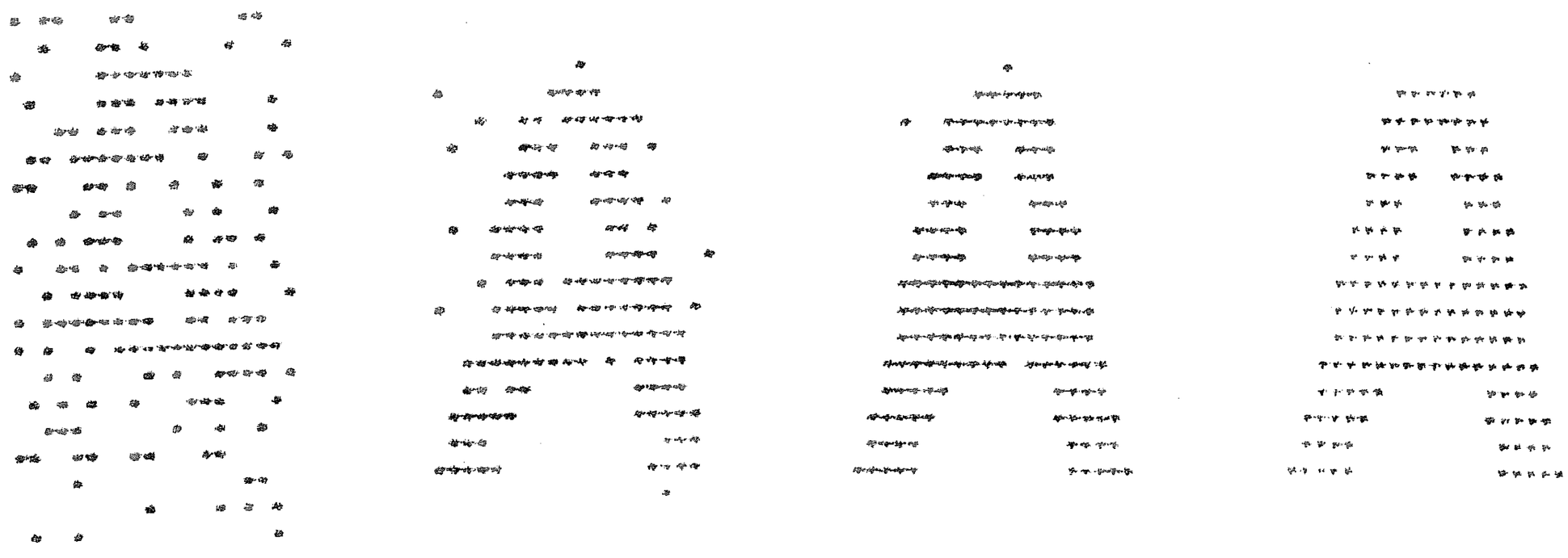
$$B_i = \sum_j J_{ij} s_j \tag{3}$$

Če je lokalno polje od nič različno, se stanje nevrona spremeni v novo stanje, ki ima enak predznak kot lokalno polje. Pri vsaki spremembi se torej vrednost funkcije H iz enačbe (2) zmanjša. Zato pridemo po nekem času do vzorca, ki mu sprememba stanja poljubnega nevrona ne zmanjša vrednosti funkcije H. Tak vzorec imenujemo lokalni minimum funkcije H. Rečemo, da je vzorec shranjen, če Hopfieldova dinamika vanj spremeni podoben vzorec. Podobnost vzorcev s^a in s^b zaznamujemo s *parametrom prekrivanja*

$$q_{ab} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i^a s_i^b \tag{4}$$

Za podobna vzorca je parameter prekrivanja blizu 1, za naključno izbrana vzorca pa blizu 0. Od modela pričakujemo, da lahko mreža shrani različne vzorce.

V mrežo iz 400 nevronov s Hebbovim pravilom zapišimo 25 različnih črk. Če mreži predstavimo vzorec, ki je podoben kakšni zapisani črki, ga s Hopfieldovo dinamiko prevedemo v ustrezno črko (Sl. 1). V enem koraku preverjamo stanja po vrsti od prvega do zadnjega nevrona, korake pa ponavljamo, dokler kakšen nevron še spremeni stanje.



Sl. 1 Prepoznavanje vzorca, ki je zapisan v mrežo s Hebbovim pravilom.

Zanima nas, kdaj so hranjeni vzorci $\mathbf{s}_k$ tudi shranjeni. Zato si oglejmo termodinamiko mreže. Izkoristimo podobnost funkcije H z energijo spinskih stekel in primerjajmo mrežo s spinskimi stekli.

Spinska stekla

Spinsko steklo je termodinamična faza snovi, ki vsebuje naključno porazdeljene magnetne atome [4]. V Isingovem modelu opišemo interakcijo med dvema magnetnima atomoma z njunima spinoma v določeni smeri, tako da se energija zapiše kot vsota po vseh parih atomov

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j \tag{5}$$

J_{ij} so konstante vezi, ki jih izračunamo iz magnetne dipolne interakcije med dvema spinoma. Odvisne so samo od razdalje med atomi, zato so simetrične: $J_{ij} = J_{ji}$.

Različne termodinamične faze zaznamujemo s parametri reda. *Lokalno magnetizacijo* vpeljimo kot brezdimenzijsko količino. Dana naj bo s temle termičnim povprečjem

$$m_i = < s_i > \tag{6}$$

V paramagnetni fazi je lokalna magnetizacija povsod enaka 0, feromagnetna faza pa ima lahko od 0 različno lokalno magnetizacijo. Vsoto lokalnih magnetizacij seštejemo po vseh n spinih v kristalni mreži v makroskopsko *magnetizacijo*, ki je parameter reda za feromagnetno fazo

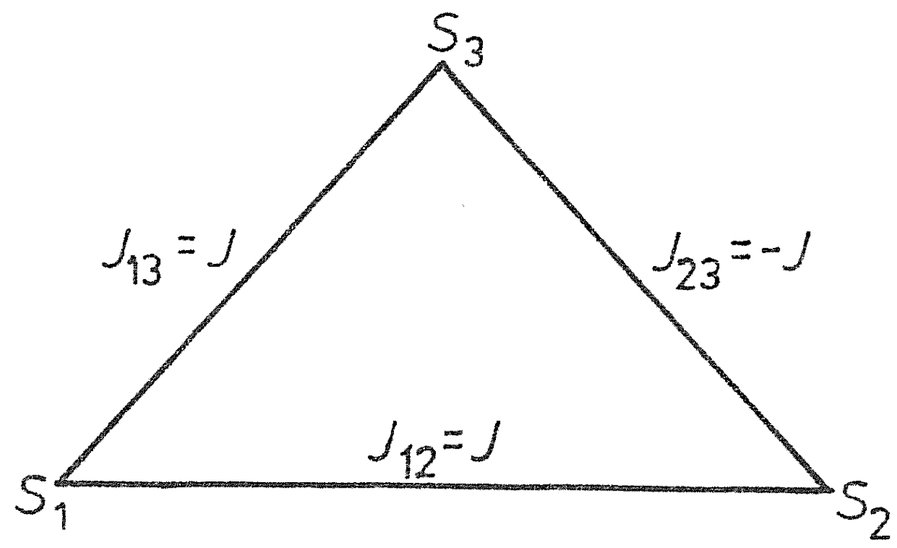
$$M = \frac{1}{n} \sum_i m_i \tag{7}$$

Spinsko steklo ima lokalno magnetizacijo sicer različno od 0, toda makroskopska magnetizacija je enaka 0. Zato vsoto kvadratov lokalnih magnetizacij

uvedemo kot nov parameter reda

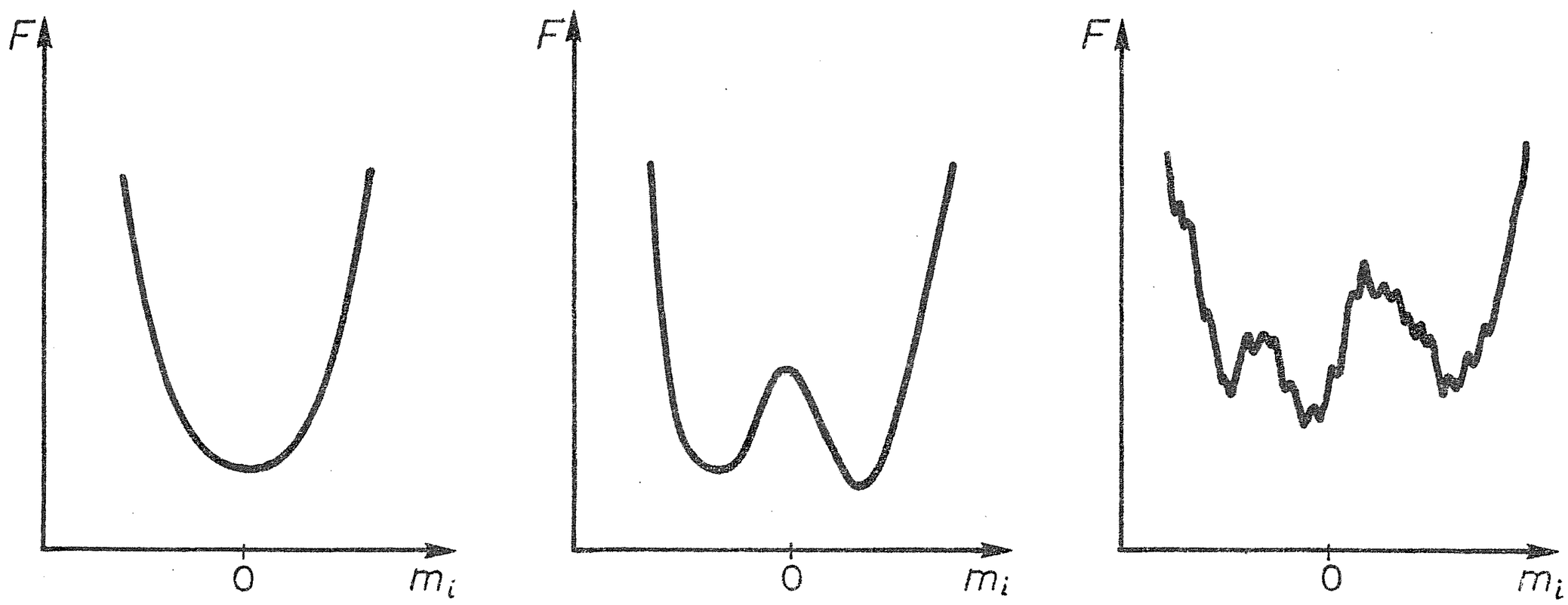
$$q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \tag{8}$$

Fazo, ki ima $M = 0$ in $q > 0$, imenujemo spinsko steklo. Posebnosti spinskega stekla lahko opazujemo na primeru samo treh spinov. Vezi imajo naključno porazdeljene vrednosti $\pm J$ (Sl. 2).



Sl. 2 Model treh spinov

Vse možne vrednosti diskretno porazdeljenih konstant vezi sestavljajo $2^3 = 8$ različnih mrež, ki se razlikujejo po vrednostih konstant J_{ij}. K energiji prispevajo trije členi, ki so vsi lahko negativni le v polovici možnih mrež. V drugi polovici mrež je prispevek vsaj enega člena k energiji pozitiven. Zato rečemo, da je ta vez *zmedena*. Ker mora biti vsaj ena vez zmedena, vezi tekmujejo za *energijsko* ugodno stanje. Želijo spremeniti vrednosti spinov tako, da bo njihov prispevek k energiji negativen. Tekmovanje med interakcijami in zmedenost vezi sta temeljni značilnosti spinskega stekla, ki vodita do počasne relaksacije in histereze.



Sl. 3 Prosta energija za paramagnetno in feromagnetno fazo ter za spinsko steklo. V paramagnetni fazi ima prosta energija en minimum, v feromagnetni ima dva minimuma, spinsko steklo pa ima sebi podobno prosto energijo z neskončno minimumi.

Sherrington in Kirkpatrick (SK) sta si zamislila model neodvisnih naključnih konstant vezi J_{ij}, ki povezujejo vsak par spinov in so porazdeljene tako, da imajo povprečno vrednost enako 0 [5]. Primer je diskretna

porazdelitev konstant J_{ij}, pri kateri sta verjetnosti za vrednosti J in $-J$ enaki. V tem modelu interakcija ni odvisna od razdalje med spini, ker imajo vse konstante vezi J_{ij} isto naključno porazdelitev. Termodinamično stabilna stanja poiščemo tako, da iz energije izračunamo prosto energijo in poiščemo njene minimume. Prosto energijo računamo v dveh korakih. Najprej izračunamo termodinamično povprečje za določene konstante vezi J_{ij}, nato pa povprečimo še po naključni porazdelitvi teh konstant. Enako računamo tudi druge fizikalne količine, na primer tiste v enačbah (5)–(8).

Prosta energija spinskega stekla se razlikuje od proste energije paramagnetne in feromagnetne faze, ki sta gladki funkciji z enim ali dvema ekstremoma. Pri spinskem steklu pa je prosta energija zelo razgibana funkcija, ki ima sebi podobno strukturo. To pomeni, da iz dela krivulje pri povečavi dobimo krivuljo, ki je podobna prvotni.

Primerjava mreže s spinskim steklom

Termodinamični model Hopfieldove nevronske mreže s Hebbovim pravilom so si zamislili Amit, Gutfreund in Sompolinsky (AGS) [6].

Hranjene vzorce s_k nadomestimo z naključnimi spremenljivkami, ki imajo enako verjetnost za vrednosti 1 in -1, za konstante vezi pa izberimo Gaussovo porazdelitev. Formalno je to posplošen model SK spinskega stekla. Vzorci mreže so zaradi šuma porazdeljeni po kanonični porazdelitvi, tako da verjetnost za vzorec s podaja sorazmernost

$$P(\mathrm{s}) = \frac{1}{Z}\exp(-H(\mathrm{s})/T) \tag{9}$$

Spremenljivka T je merilo šuma pri sinapsah in je analogna temperaturi. Statistično vsoto Z dobimo iz pogoja, da je vsota verjetnosti enaka ena. Seštejemo torej po vseh možnih vzorcih

$$Z = \sum_{\mathrm{s}} \exp(-H/T) \tag{10}$$

Iz funkcije H (2) izračunamo analogijo k prosti energiji F v limiti, ko gre $n \to \infty$, razmerje med številom hranjenih vzorcev in številom nevronov $a = p/n$ pa ostane končno

$$F = -T\overline{\ln Z} \tag{11}$$

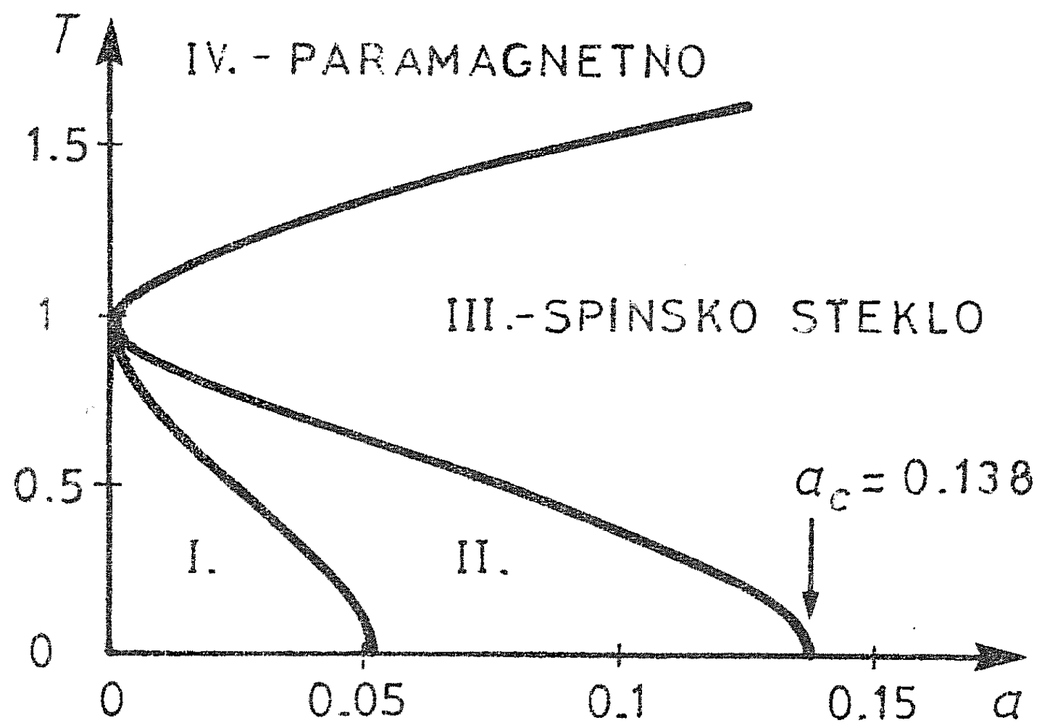
Povprečenje nad logaritmom ponovimo dvakrat; prvič povprečimo pri izbranih konstantah sinaps po porazdelitvi P, drugič pa po porazdelitvi konstant sinaps. Ker je povprečenje logaritma zahtevno, uporabimo metodo replik. To pomeni, da nadomestimo sistem z N enakimi sistemi in povprečje logaritma zamenjamo z naslednjo limito:

$$\ln x = \lim_{N \to 0} \frac{x^N - 1}{N} \tag{12}$$

Potem lahko funkcijo F parametriziramo s parametri prekrivanja s hranjenimi vzorci

$$h_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} s_j^i \xi_j \tag{13}$$

Pri tem je s_j^i komponenta i-tega hranjenega vzorca, ξ_j pa je komponenta trenutnega vzorca mreže. Stabilna stanja so minimumi funkcije F, ki jih dobimo z odvajanjem po parametrih h_i. Sistem enačb za ničle odvoda rešimo numerično in preverimo višje odvode, da ugotovimo, ali je ničla odvoda tudi lokalni minimum funkcije F. Pri različnih vrednostih parametrov T in a dobimo različne rešitve za stabilna stanja, med katerimi prepoznamo 4 različne faze (Sl. 4). Le dve fazi sta primerni za shranjevanje vzorcev.



Sl. 4 Fazni diagram za model AGS. Na področju I. so stabilna stanja določena s parametri reda h_i, tako da ima en parameter h_i od nič različno vrednost. Na področju II. so stabilna stanja, ki imajo z enim hranjenim vzorcem parameter prekrivanja večji od 0.967. Na prvem področju torej sistem vzorce natančno prepozna, na drugem področju pa so napake pri prepoznanih vzorcih majhne. Na področjih III. (spinsko steklo) in IV. (paramagnetna faza) pomnjenje vzorcev ni mogoče. Stabilna stanja namreč na teh področjih niso povezana s posameznimi parametri h_i, zato jih ne moremo prirediti hranjenim vzorcem. Spomin mreže je omejen s številom hranjenih vzorcev.

Zaključek

Opisani model razloži, kako mreža hrani vzorce. Pomemben je zato, ker prinaša v teorijo nevronskih mrež termodinamične pojme, kot so temperatura, energija, fazni diagrami in fazni prehodi. Model je zelo prilagodljiv, saj ga je mogoče razširiti z bolj splošnimi učnimi pravili.

Nevronske mreže so zelo primerne za komercialno uporabo. Več sto podjetij po vsem svetu že izdeluje nevronske osebne računalnike [7], ki se uporabljajo za prepoznavanje vzorcev, kontrolo tehnoloških procesov in industrijskih robotov, medicinsko diagnostiko in prepoznavanje govora. Pri vseh teh in še pri mnogih podobnih opravilih je mreža mnogo uspešnejša od zaporednih računalnikov, saj prepozna vzorce že iz zelo popačenega signala na vhodu, med računanjem pa dovoli tudi kakšno procesorjevo napako, ki bi bila pri običajnem računalniku usodna.

Zato je možna uporaba nevronskih mrež na mnogih področjih, kjer se uporabljajo običajni računalniki. Strokovnjaki napovedujejo [7], da bodo v desetih letih nevronske mreže zasedle polovico računalniškega in robotskega trga. Kljub temu pa bo ostalo dovolj prostora tudi za običajne računalnike,

ki so nenadomestljivi za računanje in delo z velikimi podatkovnimi bazami, kjer so operacije enostavne in zahtevajo kvantitativno točne rezultate.

Nevronske mreže in običajni računalniki se torej v svojem delovanju dopolnjujejo, zato bodo v sodelovanju mogli reševati tudi zelo težke probleme. Pri tem običajni računalniki zmorejo natančno in hitro delo s številnimi podatki, nevronske mreže pa prinesejo elemente hevrističnega mišljenja na povsem naraven način. Zaradi opisanih lastnosti predstavlja Hopfieldov model nevronske mreže tudi dobro osnovo za opis delovanja možganov.

LITERATURA

[1] P. Russell, *Knjiga o možganih,* DZS, Ljubljana 1986.
[2] J. J. Hopfield, *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **79** (1982) 2554.
[3] D. Hebb, *The organization of behaviour,* Wiley, New York 1949.
[4] I. Kondor, *An introduction to the theory of spin glasses,* Sci. Prog. (Oxford) **71** (1987) 145.
[5] D. Sherrington in S. Kirkpatrick, *Solvable model of a spin-glass,* Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1792.
[6] D. J. Amit, H. Gutfreund in H. Sompolinsky, *Statistical mechanics of neural networks near saturation,* Ann. Phys. **173** (1987) 30.
[7] K. K. Obermeier in J. J. Barron, *Time to get fired up,* Byte August (1989) 217.

NOVE KNJIGE

MITRINOVIĆ D. S. , PEČARIĆ J. E., VOLENEC V.: Recent advances in geometric inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1989, xiv+693 str.

V dvajsetih poglavjih so pisci zbrali iz obširnega gradiva — tudi iz malo znanih virov — elementarne geometrijske zveze med raznimi količinami evklidskih prostorov (v tej smeri ima veliko lepih dosežkov predvsem V. Volenec). V večdesetletnem delu so (na novo) odkrili mnogo idej, ki porajajo elementarne geometrijske (ne)enakosti. Zgled: Prostornina V četverca z znanimi pari mimobežnih robov $a, a'; b, b'; c, c'$ ustreza enakost $6RV = \sqrt{s(s-aa')(s-bb')(s-cc')}$, pri čemer je R polmer četvercu očrtane krogle in $2s = aa' + bb' + cc'$. Torej nekaka posplošitev Heronove formule za ploščino trikotnika. Delo je zamišljeno kot stalna (permanentna) enciklopedija, saj se tudi aktivnim matematikom in drugim raziskovalcem širom po svetu javljajo ob delu elementarne (dostikrat pa zelo zapletene) zveze iz geometrije; od metod naj omenimo uporabo (vztrajnostnih, polarnih) momentov. Delo bo zagotovo zanimivo za vse, ki se na raznih stopnjah ukvarjajo z geometrijo. Vabimo bralce Obzornika, da tudi sami prispevajo originalne zglede in metode s tega področja.

Z neelementarnimi metodami (tudi v neevklidičnih prostorih) pa se lahko bralec seznani v knjigi Burage in Zallgalerja iz Springerjeve zbirke Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, zvezek 285.

Ivan Pucelj

PREŠERNOVE NAGRADE ŠTUDENTOM MATEMATIKE IN FIZIKE ZA LETO 1989

Za leto 1989 je bila podeljena ena Prešernova nagrada študentu matematike na Univerzi v Ljubljani in štiri Prešernove nagrade na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo.

Univerza — matematika

14. Škarabot, Jure — Moduli integralskih operatorjev

FNT — matematika

5. Juvan, Martin — Spektralna metoda določanja pasivnosti grafa

FNT — fizika

15. Mertelj, Tomaž — Krajšanje svetlobnih sunkov s pomočjo optičnega vlakna
16. Seljak, Uroš — Študij reakcije $\pi^+ p \to \pi^+ \pi^0 p^-$
17. Žiđanšek, Aleksander — Spin-mrežna relaksacija v sistemih s fraktalno geometrijo

Rektor Univerze v Ljubljani izroča študentu matematike Juretu Škarabotu Prešernovo nagrado.

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1989*

Pedagoška fakulteta — Maribor

Matematika–fizika

403. Primec, Metka
404. Sapač, Slavko
405. Štrekelj, Franci
406. Tišler, Romana
407. Toplak, Stanislav
408. Brbrè, Breda
409. Brilej, Dragica
410. Eder, Irena
411. Ivanuša, Robert
412. Lačen, Liljana
413. Čuješ, Nevenka
414. Srnko, Anica
415. Tement, Jelena
416. Blažič, Marija
417. Godec, Leonida
418. Leskovar, Alojz
419. Letonja, Stanislava
420. Kardoš, Zlatkaz
421. Korošec, Boris

Fizika – tehnična vzgoja

299. Farič, Romana
300. Nemec, Dušan
301. Jug, Dušan
302. Skotnik, Irena
303. Rober, Blanka
304. Žalik, Vladimir
305. Šmigoc, Karmen
306. Karner, Benjamin
307. Štajner, Tanja
308. Kos, Alenka
309. Vukovič, Darko
310. Verdev, Danica

Pedagoška akademija Ljubljana

Matematika – fizika

840. Kovačič, Natalija	Meritve temperaturnih snovnih konstant
841. Starešinič, Matjaž	Električno merjenje telesnih in snovnih lastnosti
842. Vrhovnik, Marija	Merjenje sunka sile in glavne količine
843. Zagorc, Tatjana	Radioaktivnost
844. Ledinšek, Biserka	Zgradba grupe afinih preslikav na ravnini
845. Borc, Metoda	Diferenciacija pouka pri pouku matematike na predmetni stopnji OŠ
846. Nemanič, Irena	Površina in prostornina v večdimenzionalnih prostorih
847. Šturm, Karmen	Algebraična števila
848. Tevž, Mateja	Uporaba učnih sredstev in vpliv uporabe na uspešnost pouka matematike v 7. razredu OŠ
849. Župec, Andreja	Konstrukcija pravilnih večkotnikov s šestilom, ravnilom in tretjinjenjem
850. Grčman, Eva	Preslikave z lečami
851. Gregorič, Romana	Od apocentrične do astronomske orientacije v prostoru in času
852. Bregar, Mojca	Računanje s simetrijami na ravnini
853. Toporš, Danica	Nekaj o diofantskih enačbah, v katerih nastopajo samo kvadrati in kubi neznank
854. Zalaznik, Irena	Eksperimenti iz valovanja
855. Puntar, Antonija 856. Žvokelj, Mojca	Števila in številski sestavi
857. Kajtna, Karmen	Vpliv uporabe učnih sredstev na vzgojo in izobraževanje — uspešnost pouka v 8. razr. OŠ
858. Kosec, Jože	Nekaj poglavij osnovnošolske matematike v povezavi z matematiko srednjega veka
859. Malovrh, Lea	Postavljanje vprašanj

* Seznam diplomantov iz leta 1988 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **36** (1989) 126–IV.

860. Somi, Bela	Teorija grafov in njena uporaba
861. Serušnik, Zdenka	Dodatni pouk iz matematike v 8. razr. OŠ

Matematika — tehnična vzgoja

61. Košak, Aleksandra	Toplotna obdelava delov kolesa z motorjem
62. Kovačič, Mihaela	Sociološki vidiki znanstvenotehnične revolucije
63. Likon, Nataša	Modelarstvo kot interesna dejavnost v osnovni šoli — jadralno modelarstvo
64. Čuk, Suzana	Uporaba sestavljanke Fischer-tehnik pri pouku tehnične vzgoje
65. Blatnik, Melita	Preoblikovanje papirja in kartona v osnovni šoli na predmetni stopnji
66. Cenc, Laura	Geometrijska telesa in prostor v osnovni šoli
67. Vidmar, Nataša	Izbrane vsebine pri dodatnem pouku matematike v 5. razredu osnovne šole
68. Bogovič, Vesna	Strojni elementi za spoje in vezave — lotni spoj, zvarni spoj
69. Krofel, Jolanda	Prometna vzgoja v osnovni šoli — izdelava prometnega poligona za spretnostno vožnjo
70. Dončič, Dobrila	Asimptotična formula za porazdelitev praštevil
71. Sterle, Andreja	Primerjava uspešnosti pri matematiki med učenci, ki ponavljajo razred, in tistimi, ki so napredovali z negativno oceno
72. Volkar, Irena	Odvajanje in integriranje funkcij komplekse spremenljivke
73. Tavčar, Rosana	Model jadrnice za tekmovanje mladih tehnikov
74. Ulaga, Mateja	Izdelava didaktičnega učila za pouk tehnične vzgoje v 7. razredu osnovne šole
75. Klun, Polona	Ročna dvigalka
76. Lovec, Tatjana	Preizkušanje mehanskih lastnosti umetnih snovi
77. Mikeln, Mojca	Naravoslovne dejavnosti v OŠ od 5. do 8. razreda
78. Žvokelj, Majda	Naloge z besedilom — aritmetična vsebina

Fizika — tehnična vzgoja

739. Kasper, Nives	Toplotna obdelava konstrukcijskih in orodnih jekel
740. Jelen, Damjana	Transportne naprave na primeru uporabe v industrijski proizvodnji in prenos v šolo
741. Penič, Marjanca	Lakiranje kovin

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika — pedagoška smer

137. Pahovnik, Jana	Vektorji v geometriji

Matematika — uporabna smer

217. Pavec, Franc	—
218. Hajšen, Drago	Diferenčne enačbe
219. Kobal, Anamarija	Kvaternionske algebre
220. Mitkovič, Milan	—
221. Koren, Jožica	—
222. Kajzelj-Ambrožič, Jožica	—
223. Jevtić, Branko	—

224. Peternelj, Irena	Mreža invariantnih podprostorov linearne transformacije
225. Hari, Alenka	Vzporedna vsota pozitivnih operatorjev
226. Jurančič, Alenka	Reševanje nekaterih izbranih problemov v prologu
227. Leban, Andrej	Eulerjevi grafi

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

450. Brilej, Roman	Polinomi nad končnimi obsegi
451. Mažgon-Hadner, Mojca	Polarnost, politopi, poliedrske množice
452. Brcar, Savina	Kompaktni operatorji
453. Hocevar, Andreja	Enoparametrične grupe matrik
454. Remec, Irena	Preslikave evklidske in inverzne ravnine
455. Trobok, Majda	Zadostni pogoji za eksistenco vezanih ekstremov
456. Purg, Damijan	Binarne kvadratne forme in forme Markova
457. Filipič, Nevenka	Pravilna, polpravilna telesa in satovja
458. Kašman, Jože	Konstrukcija pravilnega večkotnika in trisekcija kota

Matematika — uporabna smer

383. Saksida, Tanja	Analiza Karmarkerjevega algoritma
384. Kropar, Andreja	Implementacija baze podatkov v VAX-pascalu
385. Marc, Tadeja	Operacijski račun Mikusinskega
386. Kavčič, Anton	Favardove neenakosti
387. Perpar, Elizabeta	Aposteriorne ocene za napake približkov za lastne sisteme matrik
388. Jaklič, Jurij	Osnove matematične teorije vodenja
389. Brcar, Savina	Kompaktni operatorji
390. Kogovšek, Simona	Razdeljevanje praznih voz pri ŽG Ljubljana
391. Klavžar, Maja	Analiza zaokrožitvenih napak v premični piki
392. Leskovec, Mateja	Tok v brezlopatičnem območju
393. Hribernik, Martina	Negibne točke preslikav na mrežah
394. Baša, Irena	Stabilnost in vodenje diskretnih procesov
395. Šoba, Nataša	Kriptosistemi in faktorizacija števil
396. Juvan, Martin	Spektralna metoda za določanje pasivnosti grafa
397. Zakrajšek, Helena	Integralska reprezentacija elementov konveksnih množic
398. Trampuž, Mojca	Linearni kodi

Matematika — teoretična smer

21. Zalar, Borut	Rekurzivne množice
22. Turnšek, Aleksej	Baze v Banachovih prostorih

Fizika — pedagoška smer

115. Merhar, Jernej	Analiza reakcij zajetja nukleonov z ekscitonskim modelom
116. Radež, Milena	Merjenje koncentracije radona

Fizika — tehniška smer

475. Božič, Bojan	Magnetni moment relativističnih sistemov
476. Jean, Bojan	Optimizacija delovanja Nd–YAG laserja s Porro resonatorjem
477. Lukman, Dragan	Produkcija mezonov pri neelastičnih trkih solitonov v enodimenzionalnem modelu
478. Marinček, Marko	Sipanje svetlobe v C^* tekočem kristalu
479. Šolmajer, Jurij	Gretje ramanskih nihanj v oksidnih superprevodnikih
480. Homan, Sven	Analiza lastnosti termovizijske kamere

481. Apih, Tomaž	Raziskava amonijeve rošelske soli z jedrsko magnetno resonanco ^{23}Na
482. Svetin, Iztok	Sipanje svetlobe na nematskih kapljicah razpršenih v polimeru
483. Kokošar, Janko	Sipanje svetlobe na nematični kapljici: Rayleigh-Gansova aproksimacija
484. Abramič, Darija	Raziskava protonskega superionskega prevodnika $Rb_3H(SeO_4)_2$ s pomočjo jedrske magnetne resonance
485. Avsec, Sašo	Merilni sistemi s fazno občutljivo demodulacijo
486. Horvat, Darja	Akustični pretvornik v plinu
487. Mühleisen, Artur	Relaksacija neravnovesnih nematičnih struktur v neskončno dolgem cilindru
488. Modic, Marko	Piezoelektrični aktuator
489. Mitrovič, Goran	Študij strukturnih faznih prehodov v NH_4NO_3
490. Janžekovič, Helena	Raziskava feroelektričnega tekočega kristala z jedrsko magnetno resonanco ^{13}C
491. Skvarč, Jure	Razločevanje sledi produktov reakcije $^6Li(n,\alpha)$ s pomočjo mikroračunalniško podprtega sistema za analizo sledi v detektorjih jedrskih sledi
492. Anžel, Vladimir	Izboljšanje magnetnih lastnosti trajnih keramičnih – feritnih magnetov
493. Zidanšek, Aleksander	Spin mrežna relaksacija v sistemih s fraktalno geometrijo
494. Ferle, Maja	Kaotične fluktuacije v populacijskem modelu laserja
495. Mozetič, Dean	Biljard na dvokotu in njegova kvantizacija
496. Gulin, Rafael	Radiofrekvenčni SQUID iz visokotemperaturnega superprevodnika $YBa_2CU_3O_7$
497. Hočevar, Franci	Konstrukcija TEA CO_2 laserja za označevanje
498. Mertelj, Tomaž	Krajšanje svetlobnih sunkov s pomočjo optičnega vlakna
499. Seljak, Uroš	Izbira dogodkov reakcije $\pi + p \rightarrow \pi + \pi^0 + p$ pri 418 MeV/c
500. Filipčič, Andrej	Analiza elastičnega sipanja negativnih pionov na protonih
501. Mićović, Miroslav	Modeliranje P-N stika
502. Slavinec, Mitja	Prehod polarizirane svetlobe skozi nematične strukture: Simulacija interferenčnih črt

Meteorologija

49. Pristov, Neva	Značilnosti začetkov burij v slovenskem primorju
50. Završek, Jasna	Numerični model nestacionarne difuzije v razgibanem reliefu

3. stopnja

Matematika

46. Košir, Tomaž	Operatorski polinomi
47. Kobal, Damjan	Mrežno urejeni kolobarji
48. Černe, Miran	Analitične multifunkcije in polinomsko konveksne ogrinjače
49. Brešar, Matej	Odvajanja in sorodne preslikave
50. Gradolato, Monique Annie	Psevdoploskve

Fizika — tehniška smer

91. Majaron, Boris	Stimulirano Ramanovo sipanje v metanu
92. Glavič-Cindro, Denis	Rentgenski absorpcijski vrhovi za fotoprodukcijo dvojnih vrzeli v lupini L
93. Kos, Miha	Slikanje z magnetno resonanco v zemeljskem magnetnem polju

94. Kralj-Iglič, Veronika — Elektrostatične lastnosti lipidne dvojne plasti v ionski raztopini

95. Verbovšek, Tone — Infrardeče divergence kvantne kromodinamike v limiti velikega števila barv

96. Arčon, Iztok — Podaljšana fina struktura absorpcijskih robov v koherentnem sipanju rentgenske svetlobe na mozaičnih kristalih

Fizika — jedrska tehnika

1. Marn, Jure — Dinamični model in simulacija primarnega kroga tlačnovodne jedrske centrale

2. Cizelj, Leon — Analiza odziva dinamično vzbujanih cevnih sistemov z metodo hkratnih spektrov odziva in uporabo končnih elementov

Fizika — pedagoška smer

12. Kukman, Iztok — Uporaba akustične emisije pri oceni hrapavosti

Doktorske disertacije

Matematika

35. Razpet, Marko — Uporaba umbralnega računa pri kombinatoričnem preštevanju

36. Mramor-Kosta, Neža — Indeksna teorija in posplošitve Borsuk-Ulamovega izreka

Fizika

116. Terzić, Mira — Difrakcione i apsorpcione pojave kod akustičkih talasa generisanih pomoću laserskog zračenja

NOVE KNJIGE

ŠIKIĆ Z., Kako je stvarana novovjekovna matematika, Školska knjiga, Zagreb 1989, 199 str. (Moderna matematika)

Knjiga govori o začetkih in razvoju današnje matematike. Prvo poglavje je posvečeno analizi. Pove, kako sta Newton in Leibniz vsak na svoj način vpeljala infinitezimalni račun, ki ga je pozneje Cauchy eksaktno utemeljil. V drugem poglavju, o teoriji množic, izvemo med drugim, kako je Cantor prišel do dokaza, da je realnih števil več kot števno neskončno. V tretjem poglavju spremljamo matematično logiko od Boolove algebre logike do Gödelove ugotovitve o nepopolnosti formalnih teorij. Četrto poglavje, Razmišljanja o matematiki, podaja različne filozofske poglede na matematiko in njene osnove.

Avtor nas seznani z življenjem in delom že omenjenih in še drugih matematikov, kot so Euler, Lagrange, Dedekind, Frege, Hilbert... Ob dogodkih iz njihovega življenja osvetli tudi njihov značaj. Predvsem pa podrobno

razloži temeljne pojme in ugotovitve obravnavanih področij in razumljivo poda izpeljave, kjer je le mogoče. Z zgodovinskega in filozofskega vidika komentira, kako in zakaj so matematiki prišli do določenih spoznanj.

Tega dela bo vesel vsakdo, ki se zanima za znamenite matematike. Še mnogo več pa bo v njem našel tisti, ki že nekaj ve o matematiki in bi rad poglobil nje razumevanje s poznavanjem njene zgodovine.

Janez Rakovec

RECSKI A., Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics, Akadémiai Kiadó, Budimpešta 1989 in Springer-Verlag, Berlin 1989, 531 str.

Teorija matroidov je po mnenju mnogih matematikov najabstraktnejša, a hkrati najlepša in najglobja veja kombinatorike. Pojem matroida je leta 1935 vpeljal H. Whitney kot skupno posplošitev grafov, linearne algebre in geometrije. Kasneje so na razvoj teorije vplivali predvsem W. T. Tutte, J. Edmonds, L. Lovász in P. Seymour. Védenje o matroidih se je močno razširilo in postali so nepogrešljivo matematično orodje tako v nekaterih področjih teorije grafov, kombinatorične geometrije, teoriji algoritmov itd., kot tudi v raznih aplikacijah. Avtor je v tej obširni monografiji, ki obsega preko 500 strani, izbral zanimiv pristop. V lihih poglavjih so predstavljeni matematični rezultati, poglavja s sodimi zaporednimi številkami pa so namenjena prikazu najrazličnejših aplikacij snovi, obdelane v prejšnjih, teoretičnih poglavjih. K razlagi je avtor dodal skoraj 800 nalog in problemov. Zadnja tretjina knjige vsebuje njihove rešitve s popolnim prikazom poteka reševanja oziroma dokazovanja.

Pred Recskijevo knjigo so bile na trgu le tri monografije o matroidih. Avtor prve, ki je izšla leta 1976, je Dominic Welsh. Istega leta smo dobili tudi Lawlerjevo knjigo o kombinatorični optimizaciji, katere dobršen del je posvečen teoriji matroidov. Če lahko rečemo, da je prva preveč teoretična, je druga omejena predvsem na algoritme. Skozi tretje delo, ki ga je uredil N. White (1986) in napisalo več avtorjev, pa se bo začetnik težje prebil, saj je pristop precej abstrakten. Najnovejše Recskijevo delo sodi po izbrani snovi nekam med prvi dve knjigi. Razumno, z dovolj zgledi in predpriprave so obdelane matematične osnove, dodana pa je dobršna mera snovi o algoritmih na matroidih. Avtor je vključil tudi več novejših rezultatov, ki so bili doslej prikazani le v originalih člankih.

Brez dvoma bo ta izvrstna knjiga približala lepote teorije matroidov širšemu krogu matematikov, v roke pa jo bodo radi vzeli tudi računalnikarji in tisti tehniki, ki jih zanima uporaba matroidov v njihovi stroki.

Bojan Mohar

NOVE KNJIGE

VRANJKOVIĆ P., Zbirka zadataka iz vjerojatnosti i statistike s uputama i rješenjima, Školska knjiga, Zagreb 1990, 150 str.

V zbirki je 456 nalog, razdeljenih na devet področij (definicija in osnovne lastnosti verjetnosti, Bernoullijev obrazec, slučajne spremenljivke, matematično upanje in varianca, limitni izreki, statistična analiza, vzorčenje, ocenjevanje parametrov, preskušanje statističnih hipotez). Ob nalogah je za prvo silo teorije, ne za samostojno učenje, vendar dovolj za osvežitev že naučenega. Vse naloge so rešene, nekatere zahtevnejše so opremljene z navodili za reševanje.

Delo je avtor namenil učencem četrtega letnika matematično-informacijske usmeritve, vendar vsaj za naš prostor mirno trdim, da lahko najde dosti širši krog bralcev (ali bolje, uporabnikov). Prva poglavja se z nekaj izjemami (zvezne slučajne spremenljivke, dvodimenzionalni slučajni vektorji) takorekoč ujemajo z vsebinami verjetnostnega računa in statistike v naših srednješolskih programih; drugi del knjige bo koristen pri pouku statistike v naravoslovno-matematični usmeritvi ali njenih dedičih, vse skupaj pa je dobrodošel pripomoček tudi za študente na fakultetah z manj zahtevno matematiko, na primer ekonomskih. Čeprav morda nekateri naslovi preveč obljubljajo (tako na primer v razdelku Centralni limitni izrek najdemo od cele družine samo — anonimni — Laplaceov integralski izrek), pa na splošno velja, da je v knjigi celovit izbor nalog, primernih za raven znanja, ki ji je zbirka namenjena. S pedagoškega vidika tu in tam pogrešam oznako, da gre za nekoliko zahtevnejšo nalogo, vendar to ne spreminja osnovne ocene: prisrčna in zelo uporabna knjiga.

Jože Andrej Čibej

MATE, L., Hilbert Space Methods in Science and Engineering, Akadémiai Kiadó, Budapest 1989, vii+273 str.

Kot pravi avtor sam v uvodu, je namen te knjige predstaviti bazično teorijo Hilbertovih prostorov kot jezik uporabne matematike na način, primeren za tehnike in naravoslovce.

Prvo, drugo in četrto poglavje razlagajo osnovne pojme o normiranih in Hilbertovih prostorih ter operatorjih na njih. Zajeta je teorija kompaktnih operatorjev na Hilbertovih prostorih ter spektralni izrek za omejene sebiadjungirane operatorje. Pristop je klasičen in elementaren, razumljiv tudi dodiplomskim študentom. Tretje poglavje obravnava funkcijske Hilbertove prostore z reproducirajočim jedrom; omenjena je tudi uporaba teh prostorov

pri kvadraturnih formulah, konformnih preslikavah in Gaussovih procesih. Peto, zadnje poglavje pa obravnava kavzalne operatorje, ki so uporabni v teoriji sistemov.

Po obravnavani snovi in ravni zahtevnosti je knjiga primerna predvsem za uporabniško orientirane bralce, ki se želijo seznaniti z osnovami operatorske teorije in se nimajo namena kasneje aktivno ukvarjati z operatorsko teorijo sámo.

Bojan Magajna

LOKAR, Matija, Turbo pascal, ZŠ in DMFAS, 1990, 100 str. (Račkova knjižnica ; 2)

Turbo pascal je precej različen od standardnega pascala. Konec koncev o tem priča gornja knjiga, ki opisuje le posebnosti turbo pascala in še te ne v vseh podrobnostih. Kdo bi celo rekel, da turbo pascal ni več pascal in da ime zavaja. Resnici na ljubo, skoraj vse, kar je dovoljeno v pascalu, je dovoljeno tudi v turbo pascalu, tisto kar ju loči, je cela množica nestandarnih dodatkov v turbo. Razlika se je med inačico turbo pascala 5.0 in 5.5, slednji je posvečeno le kratko poglavje, še poglobila. Inačica 5.5 namreč premore objektno programiranje, za katero iz Lokarjeve knjige le zaslutimo, za kaj gre. Natančnejša razlaga objektnega programiranja pač zasluži posebno knjigo.

Knjiga je namenjena tistim, ki pascal več ali manj že poznajo in bi radi delali s turbo pascalom. Torej tistim, ki bi svoje znanje pascala radi uporabljali na osebnih računalnikih oziroma natančneje, pod "vodstvom" operacijskega sistema MS DOS. V knjigi ne bomo našli vsega, ampak profesionalci so tako ali tako že posegli po obsežnih originalnih priročnikih.

Najprej se seznanimo z delovnim okoljem, ki nam ga nudi turbo pascal. Kmalu spoznamo, da je okolje prijazno in da nam dovoljuje marsikaj. Med drugim lahko turbo pascal brez zadržkov izrabljamo za urejevalnik besedil. Pomembna lastnost vgrajenega urejevalnika je, da je v veliki meri enak znanemu urejevalniku WordStar. Nato spoznamo posebnosti turbo pascala: dodatne številske tipe, nize, delo z datotekami in grafiko. Nekatere teh posebnosti odpravljajo pomanjkljivosti standardnega pascala, kot na primer delo z nizi, druge pa sledijo zahtevam časa, kot na primer delo z grafiko. Posebno poglavje je posvečeno odkrivanju napak, kjer se med drugim naučimo uporabljati vgrajeni razhroščevalnik.

Med dodatki omenimo program za izpis grafične slike na tiskalnik in seznam napak, ki jih javlja turbo pascal.

Knjiga nas tehtno in ne predolgovezno popelje v svet turbo pascala. To pa smo tudi pričakovali.

Sandi Klavžar