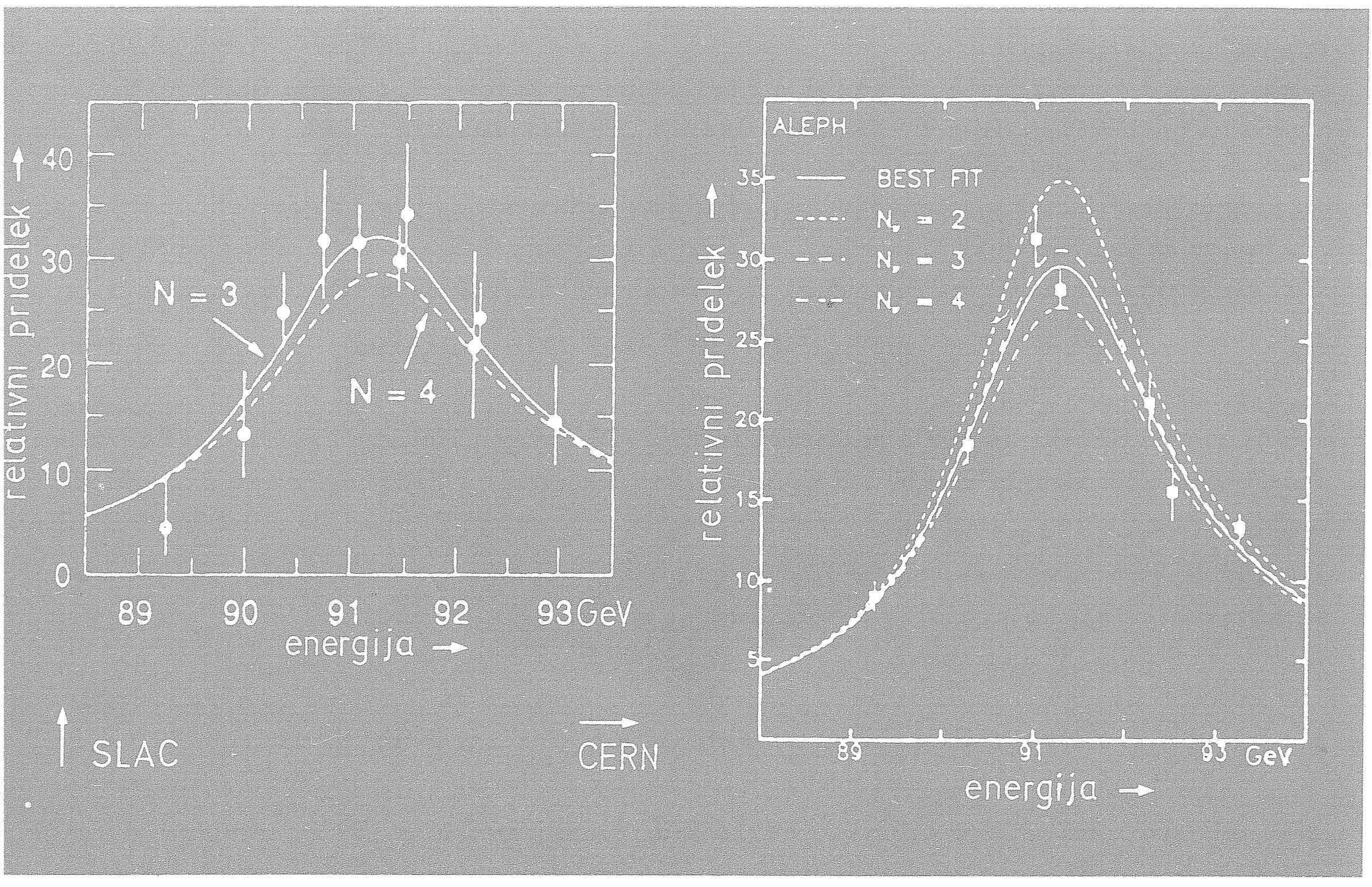
CENTRALNA EKONOMSKA
KNJIŽNICA Ljubljana

MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

1989
Letnik 36
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 36 – ŠTEVILKA 6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1989

Uredniški odbor: Milan Hladnik – urednik za matematiko, Bojan Mohar – glavni urednik, Janez Strnad – urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkovrh – urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič. Slike Miha Štalec. Računalniško stavil Martin Zemljič.

Naročnina, ki bo vplačana pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije po 1. 10. 1989: za posameznike 300.000.– din (za člane društva je že upoštevana članarina), za dijake in študente 150.000.– din, posamezna številka 50.000.– din, dvojna številka 100.000.– din, stare številke 30.000.– din, za ustanove in v knjigarnah 900.000.– din, za tujino 25$.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50200-620-107-257300-5964/4.

Tisk: Tiskarna Kurir v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1989 DMFA SRS – 985 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles Str.–Page

Iskanje minima kvadratne funkcije z gradientno metodo – Minimization of quadratic function by gradient method (Janez Šparovec) 161–170

Novi trkalnik – The new collider (Janez Strnad) 171–172

Rast kristalov iz taline – Crystal growth from melt (Branislav Čabrić, prev. Janez Strnad) 173–180

Naklon Sončevih žarkov – The Sun rays inclinations (Marijan Prosén) .. 181–183

Utrinek – Kako lahko pričaramo tlak 10^{26} bar? (Mitja Rosina) 192

Vesti – News

Poročilo o udeležbi na tekmovanju ISTAM 1989 (Miran Černe) 184–188

Profesor Franc David — višji znanstveni svetnik (Ciril Velkovrh) 188

Nove knjige – New books

Bratko I., Prolog in umetna inteligenca (Jernej Kozak) 189–190

Kramar E., Rešene naloge iz linearne algebre (Aleksander Malnič) 190

Klavžar S., Mali priročnik operacijskega sistema MS DOS (Matija Lokar) 191

Batagelj V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur (Aleksander Malnič) 191

Na ovitku: Relativni pridelek nevtralnih šibkih bozonov Z^0 v odvisnosti od energije elektronov in pozitronov, to je od lastne energije Z^0, ki so ga izmerili ob SLC v Stanfordu (levo) in ob LEP v Ženevi, kaže, da obstajajo tri vrste nevtrinov (glej novico *Novi trkalnik* na str. 171).

ISKANJE MINIMA KVADRATNE FUNKCIJE Z GRADIENTNO METODO

JANEZ ŠPAROVEC

Math. Subj. Class. (1985) 65 K 10

V članku je opisana gradientna metoda za iskanje minima kvadratne funkcije.

MINIMIZATION OF QUADRATIC FUNCTION BY GRADIENT METHOD

In this article the gradient method for finding the minimum of a quadratic function is described.

1. Uvod

V tem sestavku se bomo ukvarjali s kvadratno funkcijo

$$F(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax - h^{\mathrm{T}}x + c$$

ki je definirana na prostoru $\mathbb{R}^n$. Točka x je n-dimenzionalni vektor – stolpec. Transponirani x^{T} vektorja x je torej vektor – vrstica. Koordinate točke bomo označevali z zgornjimi indeksi $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Torej lahko zapišemo vektor x kot

$$x^{\mathrm{T}} = [x^1, x^2, \ldots, x^n]$$

Skalarni produkt dveh vektorjev x in y je izraz

$$x^{\mathrm{T}}y = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

Norma vektorja x je

$$\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{T}}x} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^{1/2}$$

Transponirano matriko k matriki A bomo označevali z A^{T}. Pri simetrični matriki je $A = A^{\mathrm{T}}$. Privzeli bomo, da je matrika A simetrična in pozitivno definitna. To pomeni, da je kvadratna forma $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ za vsak $x \neq 0$. V izrazu nastopata še konstantni vektor h in skalar c.

Funkcija več spremenljivk f doseže v točki x_0 minimum, če je

$$f(x) \geq f(x_0)$$

za vsak x iz neke okolice točke x_0. Pri definiciji minima smo se omejili na zadostno bližino točke, kjer je minimum. Gre nam torej za tako imenovani lokalni minimum. V večji razdalji pa lahko funkcija zavzema manjše ali enake vrednosti kakor pri $x = x_0$. Če ima odvedljiva funkcija pri $x = x_0$

Objavo članka je sofinancirala Sava, Kranj.

minimum, je tam

$$\operatorname{grad} f = 0$$

V tekstu bomo gradient funkcije f označevali z f'. Če obstaja točka x, v kateri je $f'(x) = 0$, matrika drugih odvodov pa pozitivno definitna, nastopa v tej točki minimum. Hitro se lahko prepričamo, da je gradient kvadratne funkcije $F(x)$ enak

$$F'(x) = Ax - h$$

Minimum kvadratne funkcije nam da rešitev enačbe

$$F'(x) = Ax - h = 0 \tag{1}$$

ki je natanko določena, saj je matrika A pozitivno definitna, torej nesingularna. Ta matrika pa je ravno matrika drugih odvodov funkcije F. Torej je minimum funkcije F podan s formulo $x_0 = A^{-1}h$. Vzemimo, da inverzne matrike A^{-1} ne poznamo in je zato pri računanju minima ne bomo uporabljali. V članku si bomo pogledali tako imenovano gradientno metodo za iskanje minima kvadratne funkcije. Ker je minimum kvadratne funkcije rešitev sistema linearnih enačb (1), je gradientna metoda uporabna tudi za reševanje pozitivno definitnega sistema linearnih enačb. Vektor

$$r = -F'(x) = h - Ax = Ax_0 - Ax = A(x_0 - x)$$

se imenuje residuum enačbe $Ax = h$ ali enostavneje residuum funkcije F v točki x. Residuum r je negativni gradient funkcije F v točki x in kaže v smer najhitrejšega padanja te funkcije. Z njim lahko v principu ocenimo napako pri reševanju enačbe (1).

Vzemimo poljuben vektor p in izračunajmo

$$\begin{aligned} F(x+p) &= F(x) + \tfrac{1}{2}p^{\mathrm{T}}Ax + \tfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ap + \tfrac{1}{2}p^{\mathrm{T}}Ap - h^{\mathrm{T}}p = \\ &= F(x) + x^{\mathrm{T}}Ap - h^{\mathrm{T}}p + \tfrac{1}{2}p^{\mathrm{T}}Ap = \\ &= F(x) - (h - Ax)^{\mathrm{T}}p + \tfrac{1}{2}p^{\mathrm{T}}Ap = F(x) - r^{\mathrm{T}}p + \tfrac{1}{2}p^{\mathrm{T}}Ap \end{aligned} \tag{2}$$

Če izberemo $p = x_0 - x = A^{-1}r$, vidimo, da je

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= r^{\mathrm{T}}(x_0 - x) - \tfrac{1}{2}(x_0 - x)^{\mathrm{T}}A(x_0 - x) \\ &= (x_0 - x)^{\mathrm{T}}A(x_0 - x) - \tfrac{1}{2}(x_0 - x)^{\mathrm{T}}A(x_0 - x) \\ &= \tfrac{1}{2}(x - x_0)^{\mathrm{T}}A(x - x_0) \qquad (3) \\ &= \tfrac{1}{2}r^{\mathrm{T}}A^{-1}r \qquad (4) \end{aligned}$$

Ker je A pozitivno definitna matrika, je taka tudi A^{-1} in zato lahko takoj potrdimo, da je x_0 resnično minimum funkcije F.

Od 0 različen vektor x iz $\mathbb{R}^n$ je lastni vektor matrike A, če je pri nekem skalarju λ

$$Ax = \lambda x$$

Skalar λ je lastna vrednost matike A, ki pripada lastnemu vektorju x. Če je

matrika A pozitivno definitna, potem vemo, da so vse njene lastne vrednosti pozitivne. Uredimo jih po velikosti

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$$

ter označimo največjo in najmanjšo z

$$M = \lambda_1 \qquad m = \lambda_n$$

Naj bodo x_i, $i = 1, \ldots n$ pripadajoči ortonormirani lastni vektorji. Razvijmo poljuben vektor p po tej bazi

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

in izračunajmo kvadratno formo

$$p^{\mathrm{T}} A p = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^{\mathrm{T}} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$

Ker je

$$\|p\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

velja neenačba

$$m\|p\|^2 \leq p^{\mathrm{T}} A p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \leq M\|p\|^2 \tag{5}$$

Podobno bi dobili za A^{-1}

$$\frac{\|p\|^2}{M} \leq p^{\mathrm{T}} A^{-1} p \leq \frac{\|p\|^2}{m} \tag{6}$$

saj ima matrika A^{-1} lastne vrednosti $\frac{1}{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots n$. Neenačba (6) prav tako velja za poljuben vektor p. Iz enačb (3) in (4) torej sledita oceni

$$\begin{gathered} \tfrac{m}{2}\|x - x_0\|^2 \leq F(x) - F(x_0) \leq \tfrac{M}{2}\|x - x_0\|^2 \\ \frac{\|r\|^2}{2M} \leq F(x) - F(x_0) \leq \frac{\|r\|^2}{2m} \end{gathered} \tag{7}$$

ki ju bomo uporabili kasneje.

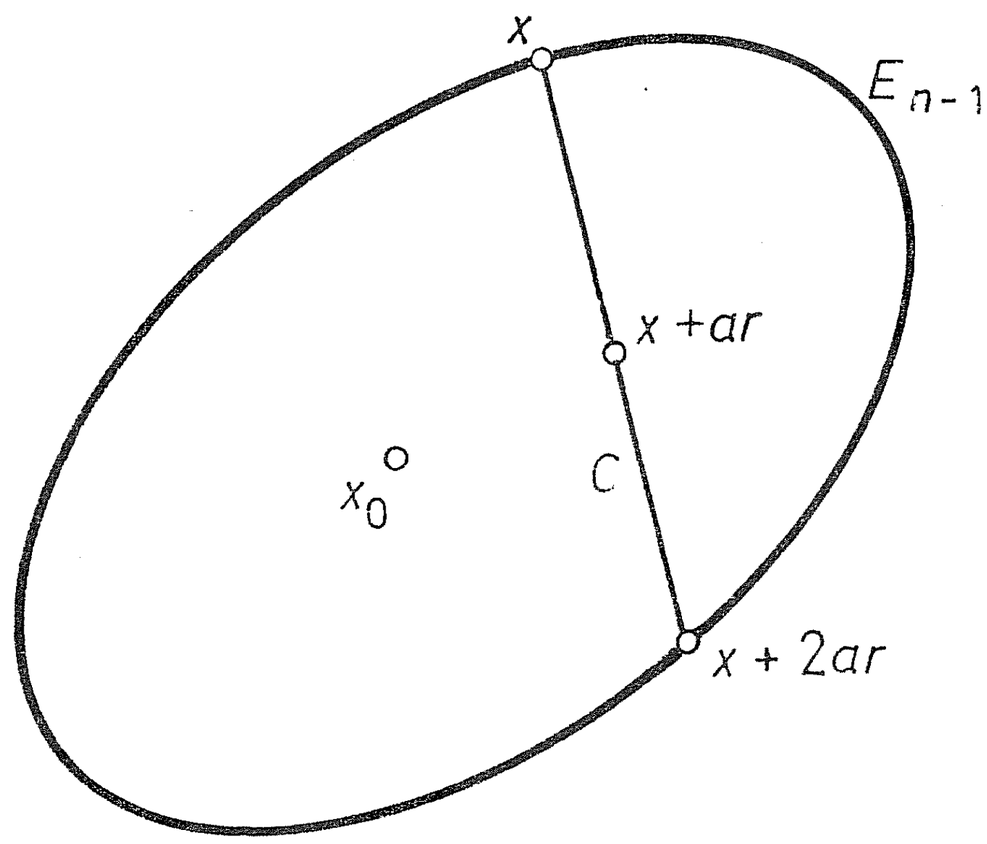
2. Gradientna metoda

Enačba

$$F(x) = e = \text{konst.}$$

v dvodimenzionalnem primeru določa enačbo elipse s središčem v točki x_0. Na njej ležijo vse točke x v ravnini, v katerih ima funkcija F isto vrednost e.

Pravimo ji nivojska elipsa. V trodimenzionalnem primeru določa zgornja enačba nivojski elipsoid. Splošno v n-dimenzionalnem primeru opisuje $(n-1)$-dimenzionalni elipsoid s središčem v točki x_0. Označimo ga z E_{n-1}. Izberimo poljubno točko x z nivojske ploskve E_{n-1}. Vektor $r = -F'(x)$ kaže v smer, v kateri funkcija F najhitreje pada. Pravokoten je na ploskev E_{n-1} in določa notranjo normalo. Pri gradientni metodi se premaknemo v to smer.



Slika 1

Premica nosilka prebada ploskev E_{n-1} še v eni točki. Označimo jo z $x+2ar$. Potegnimo iz točke x do točke $x + 2ar$ tetivo C. Kasneje bomo pokazali, da je srednja točka na katerikoli tetivi C nivojske ploskve E_{n-1} minimum funkcije F vzdolž tetive C. Shematično je situacija prikazana na sliki (1). Preden zapišemo algloritem, si oglejmo dva pomožna izreka.

Lema 1. *Za vsak vektor x z normo 1 in pozitivno definitno matriko A velja*

$$\frac{4Mm}{(M+m)^2} \leq \frac{1}{(x^{\mathrm{T}}Ax)(x^{\mathrm{T}}A^{-1}x)} \leq 1 \tag{8}$$

Dokaz. Označimo z x_i, $i = 1, 2, \ldots n$ ortonormirane lastne vektorje matrike A s pripadajočimi lastnimi vrednostmi λ_i, ki zadoščajo relaciji

$$M = \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n = m > 0$$

Razvijmo poljuben vektor po tej bazi

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

in označimo

$$a_i = \alpha_i^2$$

za $i = 1, 2, \ldots n$. Ker je norma vektorja x enaka 1, je

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Izračunajmo kvadratno formo

$$x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}A\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\mathrm{T}}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

in podobno

$$x^{\mathrm{T}}A^{-1}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}$$

Potem je

$$(x^{\mathrm{T}}Ax)(x^{\mathrm{T}}A^{-1}x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_j}a_i a_j = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_j}a_i a_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}+\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)a_i a_j$$

Zaradi očitne identitete

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_i a_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}a_i a_j$$

je

$$(x^{\mathrm{T}}Ax)(x^{\mathrm{T}}A^{-1}x) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}+\frac{\lambda_j}{\lambda_i}-2\right)a_i a_j =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i\lambda_j}a_i a_j \geq 1$$

in s tem je desna stran relacije (8) dokazana. Dokaz leve strani pa je malce zahtevnejši. Najprej ugotovimo, da je produkt $(x^{\mathrm{T}}Ax)(x^{\mathrm{T}}A^{-1}x)$ pri nekem vektorju x funkcija lastnih vrednosti

$$(x^{\mathrm{T}}Ax)(x^{\mathrm{T}}A^{-1}x) = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

in za neko naravno število k, $1 \leq k \leq n$, lahko zapišemo

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \left(\lambda_k a_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\frac{a_k}{\lambda_k} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right) = b\lambda_k + \frac{c}{\lambda_k} + d$$

kjer so števila

$$b = a_k\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}, \quad c = a_k\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i a_i, \quad d = a_k^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i a_i\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}$$

nenegativna in neodvisna od λ_k. Poglejmo si obnašanje funkcije

$$g(\lambda) = b\lambda + \frac{c}{\lambda} + d$$

za pozitivne argumente λ. Izračunajmo prva dva odvoda

$$g'(\lambda) = b - \frac{c}{\lambda^2}, \qquad g''(\lambda) = \frac{2c}{\lambda^3}$$

Funkcija g ima ekstrem pri $\lambda = \sqrt{\frac{c}{b}}$. Ker je $g''(\sqrt{\frac{c}{b}}) = 2b\sqrt{\frac{b}{c}}$, je v točki $\lambda = \sqrt{\frac{c}{b}}$ minimum, če je le $b \neq 0$. Kadar je $b = 0$, pa je hkrati tudi $c = 0$ in je zato tudi $g(\lambda) = d$. Torej funkcija g na intervalu $[m, M]$ doseže maksimum v krajišču. Velja

$$g(\lambda) \leq \max\{g(m), g(M)\}$$

za vsak λ. Od tod sledi, da zavzame funkcija $f(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$ maksimum na robu kvadra $[m, M] \times [m, M] \times ... \times [m, M] \subset \mathbb{R}^n$. Nekatere od spremenljivk $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ imajo v maksimumu vrednost m (preimenujmo jih v $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$), nekatere pa vrednost M (preimenujmo jih v $\lambda_{k+1}, ...\lambda_n$). Število k je nenegativno. Zato lahko zapišemo

$$f(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \leq (ms + Mt)(\frac{s}{m} + \frac{t}{M}) = s^2 + t^2 + (\frac{m}{M} + \frac{M}{m})st$$

kjer je

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \qquad \text{in} \qquad t = \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

Ker sta $s, t \geq 0$ in $s + t = 1$, je

$$1 = (s+t)^2 = s^2 + 2st + t^2$$
$$s^2 + t^2 = 1 - 2st$$

in zato je

$$f(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \leq 1 + (\frac{m}{M} + \frac{M}{m} - 2)st = 1 + \frac{(M-m)^2}{4mM}st$$

Poglejmo si še produkt $st = s(1-s)$, ki je kvadratna funkcija spremenljivke s. Na intervalu $[0, 1]$ ima maksimalno vrednost $\frac{1}{4}$ pri $s = \frac{1}{2}$. Zato je

$$f(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \leq 1 + \frac{(M-m)^2}{4Mm} = \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

kar smo želeli dokazati.

Geometrijsko interpretacijo (glej sliko (1)) utemeljuje drugi pomožni izrek.

Lema 2. *Naj bo pri* $x \neq x_0$

$$a = \frac{||r||^2}{r^T A r} \tag{9}$$

kjer je

$$r = -F'(x) = h - Ax$$

Potem za $0 < \beta < 2$ *velja relacija*

$$F(x + 2ar) = F(x) > F(x + \beta ar) \geq F(x + ar) \tag{10}$$

Če pa izberemo β *tako, da je*

$$\delta \leq \beta \leq 2 - \delta \tag{11}$$

pri čemer je $0 < \delta \leq 1$, *potem velja*

$$F(x + \beta ar) - F(x_0) = L[F(x) - F(x_0)] \tag{12}$$

kjer je

$$L = 1 - \frac{\delta(2 - \delta)4Mm}{(M + m)^2} \tag{13}$$

Števili m *in* M *sta najmanjša in največja lastna vrednost matrike* A.

Dokaz. Formulo (9) za skalarno vrednost a dobimo z iskanjem minima funkcije F na premici $x + \alpha r$ $(-\infty < \alpha < \infty)$. Funkcija F se po (2) izraža kot

$$\Phi(\alpha) = F(x + \alpha r) = F(x) - \alpha\|r\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} r^{\mathrm{T}} Ar$$

Z odvajanjem funkcije Φ na spremenljivko α dobimo

$$\Phi'(\alpha) = -\|r\|^2 + \alpha r^{\mathrm{T}} Ar$$

Od tod sledi, da ekstrem nastopa v točki

$$a = \frac{\|r\|^2}{r^{\mathrm{T}} Ar}$$

To je minimum, saj je $\Phi''(a) = r^{\mathrm{T}} Ar > 0$. Pri dokazovanju relacij (10) si zopet pomagamo s formulo (2), pri kateri vzamemo $p = \beta ar$. Dobimo

$$F(x + \beta ar) = F(x) - \beta a\|r\|^2 + \frac{\beta}{2} a^2 r^{\mathrm{T}} Ar$$

Upoštevajmo (9) in vidimo, da je

$$F(x) - F(x + \beta ar) = \frac{\beta(2 - \beta)}{2} a\|r\|^2 = \frac{\beta(2 - \beta)\|r\|^4}{2r^{\mathrm{T}} Ar}\,. \tag{14}$$

Če vstavimo $\beta = 2, 0 < \beta < 2$ in $\beta = 1$, takoj sledijo relacije (10). Če v izraz (14) vključimo enačbo (4), dobimo

$$F(x) - F(x + \beta ar) = \beta(2 - \beta)\frac{\|r\|^4}{(r^{\mathrm{T}} Ar)(r^{\mathrm{T}} A^{-1} r)}[F(x) - F(x_0)]$$

Pomnožimo enačbo z -1 in ji na obeh straneh odštejmo $F(x_0)$. Tedaj lahko

zapišemo

$$F(x+\beta ar)-F(x_0)=K[F(x)-F(x_0)]$$

Pri tem je

$$K=1-\beta(2-\beta)\frac{\|r\|^4}{(r^{\mathrm{T}}Ar)(r^{\mathrm{T}}A^{-1}r)}$$

Če β omejimo na interval $\delta\le\beta\le 2-\delta$ pri $0<\delta\le 1$, vidimo, da je

$$\beta(2-\beta)=2\beta-\beta^2\ge 2\delta-(2-\delta)^2=\delta(2-\delta)-4(1-\delta)\ge\delta(2-\delta)$$

in zato

$$K\le 1-\delta(2-\delta)\frac{\|r\|^4}{(r^{\mathrm{T}}Ar)(r^{\mathrm{T}}A^{-1}r)}$$

V zadnji neenačbi upoštevajmo oceno (8), pri kateri vzamemo $x=\frac{r}{\|r\|}$ in dobimo

$$K\le 1-\delta(2-\delta)\frac{4Mm}{(M+m)^2}=L$$

Dokaz izreka je s tem končan.

Če v enačbo (11) vstavimo $\delta=1$, potem je $\beta=1$ in še

$$L=1-\frac{4Mm}{(M+m)^2}=\left[\frac{M-m}{M+m}\right]^2$$

Posledica 1. Za funkcijo F pri $x\ne x_0$ velja

$$F(x+ar)-F(x_0)\le\left[\frac{M-m}{M+m}\right]^2[F(x)-F(x_0)] \tag{15}$$

kjer je a definiran z (9).

Na teh ugotovitvah je osnovana gradientna metoda, pri kateri se z zaporednimi približki približujemo minimumu funkcije F.

Zapišimo sedaj algoritem:

```
izberi (x_1);
r_1 := h - Ax_1;
k := 1;
while (||r_k||^2 ≥ ε) do
  begin        p_k := Ar_k;
    d_k := r_k^T p_k;
    c_k := r_k^T r_k;
    a_k := c_k/d_k;
    x_{k+1} := x_k + a_k r_k;
    r_{k+1} := r_k - a_k p_k;
    k := k + 1
  end;
```

(16)

Zapisan je tako, da je na vsakem koraku k potrebno izračunati minimalno število računskih operacij. Konča se, ko postane $\|r_k\|^2<\varepsilon$, kjer je ε naprej predpisano tako majhno število, da je x_k že dovolj dober približek za minimum x_0. Naslednji približek x_{k+1} je minimum funkcije F vzdolž premice $x_k+\alpha r_k$.

Zanima nas, kakšne konvergenčne lastnosti ima dani algoritem. Iz ocene (15) sledi, da je

$$F(x_{k+1}) - F(x_0) \leq L[F(x_k) - F(x_0)]$$

kjer je

$$L = \left[\frac{M-m}{M+m}\right]^2$$

Metoda je hitrejša, če je razmerje M/m blizu 1. Če pa je razmerje M/m veliko število, je metoda počasnejša. Lahko zapišemo

$$F(x_{k+1}) - F(x_0) \leq L^k[F(x_1) - F(x_0)]$$

Ker je $L < 1$, konvergira $F(x_k) \to F(x_0)$ linearno s konstanto L. Po (7) pa hitro izpeljemo, da konvergira tudi $x_k \to x_0$ linearno, saj je

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \sqrt{L^k \frac{M}{m}}\|x_1 - x_0\|$$

3. Numerični primer

Izračuni so pokazali, da izbira x_{k+1} kot minimum funkcije F vzdolž premice $x = x_k + \alpha r_k$ ni vedno najboljša. Pomagamo si s faktorjem β, kot je prikazano na naslednjem primeru. Naj bo

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}(cx^2 + y^2)$$

kvadratna funkcija dveh spremenljivk, ki ima minimum v koordinatnem izhodišču. Residuum r_k v točki (x_k, y_k) je enak

$$r_k = -F'(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} -cx_k \\ -y_k \end{bmatrix}$$

Izračunajmo

$$\|r_k\|^2 = c^2 x_k^2 + y_k^2$$

in

$$r_k^{\mathrm{T}} A r_k = [-cx_k, -y_k] \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -cx_k \\ -y_k \end{bmatrix} = c^3 x_k^2 + y_k^2$$

ter vstavimo v

$$a_{k_0} = \frac{\|r_k\|^2}{r_k^{\mathrm{T}} A r_k} = \frac{c^2 x_k^2 + y_k^2}{c^3 x_k^2 + y_k^2}$$

Modificirani gradientni algoritem lahko zapišemo v obliki

$$x_{k+1} = (1 - \beta a_{k_0} c) x_k$$
$$y_{k+1} = (1 - \beta a_{k_0}) y_k$$
$$0 < \beta < 2$$

Izberimo β in začetni vrednosti $x_1 = 1$ ter $y_1 = c$. Postopek ponavljamo,

dokler ni zadoščeno pogojema $|x_k| \leq 10^{-6}$ in $|y_k| \leq 10^{-6}$. V tabeli (1) imamo zabeleženo število korakov, ki jih je potrebno izvesti za posamezne vrednosti faktorja β. Spreminjali smo tudi sploščenost ploskve in računali število korakov za različne vrednosti parametra c. Primer kaže, da je koristno omiliti gradientno metodo. Običajno dobimo najboljše rezultate pri $\beta = 0.9$. V splošnem pa se ta vrednost od primera do primera razlikuje.

β	$c = 1$	$c = 10^{-1}$	$c = 10^{-2}$	$c = 10^{-3}$	$c = 10^{-4}$
0.1	132	135	441	**	2307
0.2	62	71	336	6392	1794
0.3	39	69	347	4789	1118
0.4	28	56	239	2522	1043
0.5	20	47	197	2148	562
0.6	16	38	170	1726	680
0.7	12	35	143	1364	322
0.8	9	28	127	802	327
0.9	7	33	94	1928	294
1.0	1	69	691	3542	6908
1.1	6	69	691	**	6908
1.2	9	69	691	**	6908
1.3	12	69	691	**	6908
1.4	16	69	691	**	6908
1.5	20	69	691	**	6908
1.6	28	69	691	**	6908
1.7	39	68	691	**	6908
1.8	62	68	690	**	6907
1.9	132	123	690	**	6907

**-število iteracij presega 10 000

Tabela 1

LITERATURA

[1] M. R. Hestenes, *Conjugate direction methods in optimization* (Applications of mathematics **12**), Springer, New York 1980.

[2] M. R. Hestenes, *Optimization theory: the finite dimensional case*, A. Wiley – Interscience pub., New York 1975.

[3] J. Kowalik, M. R. Osborne, *Methods for unconstrained optimization problems*, Amer. Elsevier Pub., New York 1968.

[4] M. A. Wolfe, *Numerical methods for unconstrained optimization: an introduction*, Van Nostrand Reinhold, New York 1978.

NOVI TRKALNIK

JANEZ STRNAD

PACS a2920–h

Julija je v CERN začel delovati LEP.

THE NEW COLLIDER

In July LEP at CERN began operation.

Pred šestimi leti so začeli v CERN blizu ženeve načrtovati napravo, ki so jo z okoli 1180 milijoni švicarskih frankov sredi julija dokončali in pognali. LEP (Large Electron–Positron Collider, veliki elektronsko-pozitronski trkalnik) ima v 3,8 metrskem predoru 27 km dolgo obročasto cev z osmimi ravnimi in osmimi ukrivljenimi odseki [1] – [3]. Predor globoko pod zemljo sega iz švice v Francijo. Cev je nagnjena za 1,5 m na 100 m, da se izogne apnenčastih skladov, in doseže pod obronki Jure globino 180 m. Obdaja jo 1672 odklonskih magnetov in še precej več kot teh drugih magnetov. Gruče elektronov in pozitronov pripravijo z linearnima pospeševalnikoma in naposled s starima protonskim sinhrotronom in super protonskim sinhrotronom, preden jih v nasprotnih smereh vbrizgajo v cev LEP. V cevi je za zdaj 128 votlinskih resonatorjev, v katerih visoka napetost s frekvenco 352 MHz pospešuje gruče v nasprotnih smereh. Tako bodo elektroni in pozitroni dosegli kinetično energijo 55 GeV in bo za nastanek novih delcev na voljo 110 GeV. V naslednjem koraku po letu 1993 mislijo to energijo povečati na 190 GeV.

ženevski inženirji in fiziki so precej pohiteli, ker je spomladi začel delovati stanfordski linearni trkalnik SLC (SLAC Linear Collider) [1], [4]. V tamkajšnjem središču SLAC so po desetih letih predelali več kot 3 km dolgi linearni pospeševalnik tako, da so mu dodali zakrivljeni cevi v obliki teniškega loparja. Gruče elektronov in pozitronov pospešijo do 50 GeV, tako da je pri čelnih trkih za nastanek novih delcev na voljo 100 GeV. Graditelje so spremljale težave. Gruče namreč uporabijo samo enkrat, medtem ko v krožnih trkalnikih velikokrat preidejo območje trkov. Zato morajo biti čim manjše. šele proti koncu prejšnjega leta so dosegli, da se srečata gruči na območju z razsežnostjo 1 μm. Potem so številni mioni, ki so nastali na začetnem delu pospeševalne cevi, preplavili merilnike. Znebili so se jih tako, da so dodali kose namagnetenega železa. Aprila so nato zaznali prvi nevtralni šibki bozon Z^0.

LEP in SLC dosežeta nižjo energijo kot protonsko-antiprotonska trkalnika v CERN in FNAL blizu Chicaga. Pri slednjem so že krepko presegli 1 TeV, to je 1000 GeV. Vendar so trki elektronov in pozitronov mnogo preglednejši kot trki vezanih kvarkov in antikvarkov v protonih in antiprotonih. še preden bo Obzornik izšel, bo LEP prehitel SLC, saj pričakujejo do konca leta sto tisoč Z^0, v naslednjem letu milijon in leta 1992 deset milijonov Z^0.

Ob LEP bo delalo okoli 1300 raziskovalcev iz dežel, ki so članice CERN, in iz drugih dežel, na primer ZDA, Kanade, Izraela, Japonske, ki so prispevale h gradnji merilnikov. V podzemskih dvoranah štirje merilniki obdajajo

dele vakuumske cevi, na katerih trkajo gruče elektronov z gručami pozitronov. ALEPH ima potovalno komoro (ang. drift chamber) v zelo močnem magnetnem polju z gostoto 1,5 T, tako da je zelo natančno mogoče določiti sledi naelektrenih delcev. Njegov elektromagnetni kalorimeter s svincem in plinom določa energijo elektronov. Merilnik L3 ima manjšo potovalno komoro in z njim ni mogoče tako natančno meriti gibalne količine naelektrenih delcev. Zaradi tega pa je ozadje mionov manjše in je mogoče uporabiti za elektromagnetni kalorimeter kristale bizmutovega germanijevega oksida z izredno energijsko ločljivostjo. DELPHI vsebuje merilnik Čerenkova, ki daje obročasto sliko in omogoča, da natančno določijo celo delce v pljuskih. OPAL se zanaša na preskušene načine za zaznavanje delcev, le da je mnogo večji od vseh dosedanjih merilnikov.

S temi merilniki nameravajo natančno premeriti maso bozona Z^0 in njegovo razpolovno energijo. To utegne razrešiti vprašanje o številu nevtrinskih vrst, ki določa tudi število rodov leptonov in kvarkov. Glavna skrb velja domnevnemu Higgsovemu bozonu z neznano maso. Ta delec in njegovo polje sta povezana z zlomom simetrije, ki prinese šibkim bozonom veliko maso. Stanje, v katerem je to polje različno od nič, ustreza nižja energija kot stanju s poljem nič. Ali ne spominja to na eter s konca prejšnjega stoletja? Če prej ali slej ne bodo odkrili Higgsovih bozonov, bo potrebna popolnoma nova teorija, podobno, kot je bila potrebna posebna teorija relativnosti, ki je shajala brez etra [5]. Zdi se, da v fiziki delcev ta čas nujno potrebujejo podrobnejše podatke o Higgsovih bozonih. Manj dvomov zadeva šesti kvark t, katerega maso cenijo na 60 do 200 GeV/c^2 in ki ga utegnejo merjenja ob LEP tudi pokazati.

Sredi oktobra so ženevski fiziki na osnovi 11 tisoč bozonov Z^0 določili maso 91,10 GeV/c^2 na 0,06 GeV/c^2 natančno. Merjenja relativnega pridelka bozonov Z^0 (najbolje se jim prilega sklenjena krivulja na desnem delu slike z naslovne strani) se skladajo z napovedjo računa s tremi vrstami nevtrinov. Po standardnem modelu osnovnih delcev z dvojico leptonov, od katerih je eden nevtrino, in simetrično dvojico kvarkov v vsakem rodu obstajajo potemtakem le trije rodovi [6]. Enak sklep so objavili le dan prej stanfordski fiziki samo na osnovi 500 bozonov Z^0 (levi del slike z naslovne strani). Zaradi tega so fiziki evropske in ameriške raziskovalne ustanove preko tiska izmenjali nekaj žolčnih izjav.

LITERATURA

[1] D. Jamnik, *Novi pospeševalniki za visoke energije,* Obzornik mat. fiz. **32** (1985) 136.

[2] Ch. Sutton, *The making of a particle machine,* New Scientist **123** (1989) 60 (1672); J. Hassard, *Light at the end of the tunnel,* New Scientist **123** (1989) 65 (1672).

[3] G. Altareli, *LEP's leap forward,* Physics World **2** (1989) 19 (7).

[4] Ch. Sutton, *America goes straight for the Z particle,* New Scientist **122** (1989) 26 (1661).

[5] I. Aitchinson, *The unbearable heaviness of being,* Physics World **2** (1989) 29 (7).

[6] *Is the end of participle poliferation at hand?,* Nature **341** (1989) 555.

RAST KRISTALOV IZ TALINE

BRANISLAV ČABRIĆ*

PACS a8110Ff

Članek navaja kratek pregled načinov za gojenje kristalov iz taline in enega izmed njih nekoliko podrobneje opiše. Obravnava lastnosti snovi, ki jih je mogoče gojiti v obliki kristalov iz taline, naprave, ki jih uporabljajo v ta namen, in stopnjo neoporečnosti dobljenih kristalov.

CRYSTAL GROWTH FROM MELT

A short review of methods for crystal growth from melt is given and one of them is described in some detail. Properties of substances that can be crystalized from melt, the corresponding apparatus, and the degree of perfection of crystal obtained are considered.

Uvod

Pogosto pridobimo monokristale iz *taline*. Način z nadzorovanim ohlajanjem taline je v primeri z drugimi razmeroma preprost in ga na veliko uporabljajo v industriji. Ta način so poleg rasti kristalov iz vodne raztopine najpodrobneje raziskali in tudi tehnično preizkusili. Vendar načina ne moremo uporabiti pri vseh kristalih. Nekatere snovi razpadejo ali sublimirajo, preden se stalijo, nekatere polimorfne oblike niso v ravnovesju s talino, nekatere snovi imajo previsoko tališče in v nekaterih primerih talini ni mogoče dodati želenih primesi. Kristale snovi, ki nima navedenih lastnosti, vsekakor najprej poskusimo vzgojiti iz taline [4].

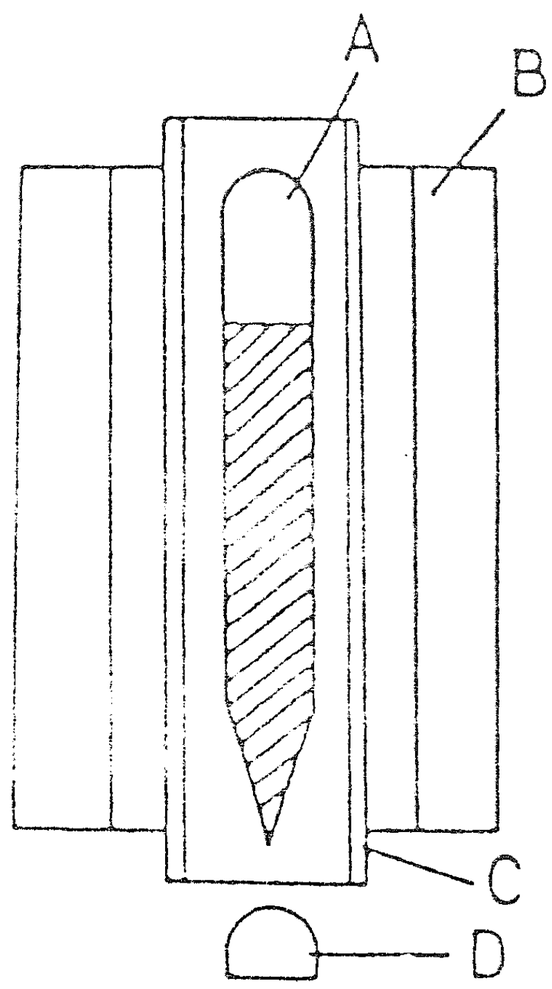
Ločimo rast iz taline z eno sestavino in z več sestavinami. V prvem primeru raste kristal iz taline, ki ima tako malo nečistoč, da difuzija ni pomembna, v drugem pa iz taline z vsaj eno dodatno sestavino. Na splošno ima v drugem primeru snov s tališčem nad sobno temperaturo, ki dobro topi osnovno snov, vlogo topila. Pri rasti iz taline z eno sestavino dosežemo, da kristali najhitreje rastejo in so najčistejši.

Pregled načinov za gojenje kristalov iz taline [1]–[7]

Tammanov način. Talino v dolgi ozki cevki malo podhladimo samo na enem kraju. Tam nastane v talini zelo malo različno orientiranih kristalnih kalí. V večji prostornini taline, ki bi jo močno podhladili, bi nastalo veliko različno orientiranih kalí. Te bi rasle, dokler se ne bi dotikale in se zrasle. V ozki cevki pa rastejo neovirano le kalí v smeri osi in ena izmed njih preraste druge, tako da se na izhodu iz cevi pojavi en sam monokristal. Zadostuje tem krajša cevka, čim ožja je. Eno od krajišč cevke lahko razširimo, da zraste večji monokristal. Odtlej moramo talino hladiti zelo počasi, da se ne rodijo nove kali in ne nastane polikristalna snov. Kot vsi podobni načini ima tudi ta

* Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac. Članek je prevedel urednik za fiziko.

pomanjkljivost, da se lahko kristal poškoduje ob dotiku s segreto posodo in deformira zaradi različnega krčenja kristala in posode ob ohlajanju. Osnovno Tammanovo zamisel so velikokrat izpopolnili.

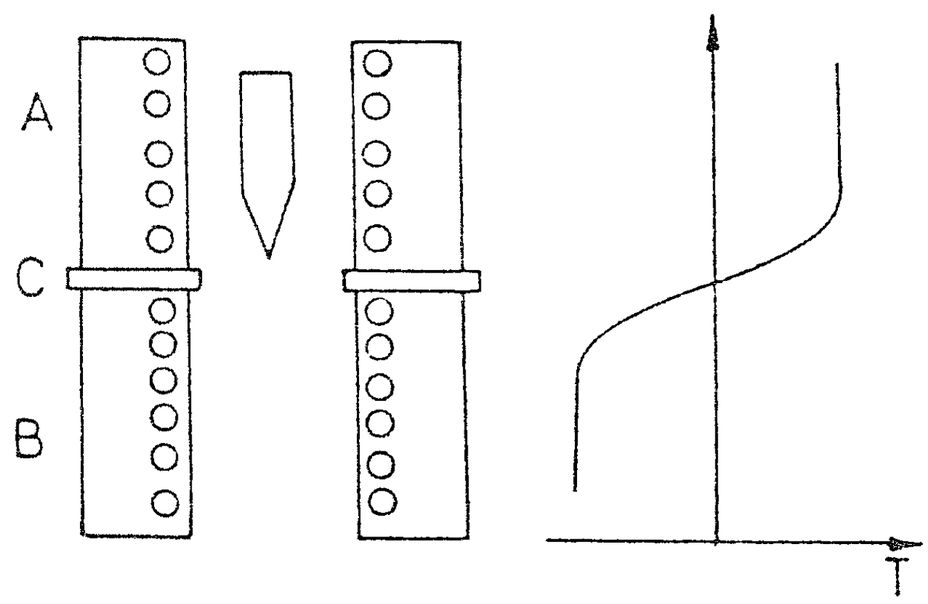


Sl. 1

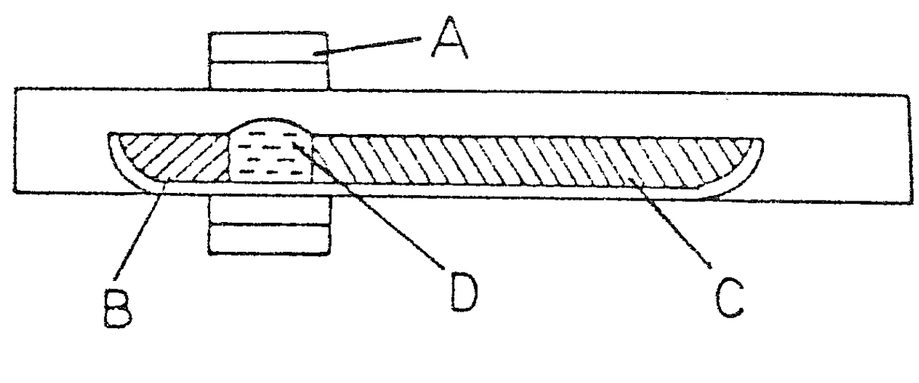
Način Obreimova in Šubnikova. Posoda (Sl. 1), v kateri raste kristal, se spodaj končuje v zoženo cevko (A). Potem ko snov z grelcem (B) in cevko izsesamo z vakuumsko črpalko, zatalimo zgornje krajišče. Bakrena cev (C) izravnava temperaturo v osi. Na začetku ohladimo dno cevke s curkom zraka (D). Ko pogleda kristal iz cevke, počasi znižujemo temperaturo.

Bridgmanov način. Tudi v tem primeru uporabimo kal, ki je nastala v ozki cevki. Toda cevko hladimo tako, da jo počasi spuščamo iz grelca v hladen zrak ali olje. Cevko moramo spuščati počasneje, kot raste kal v smeri osi, sicer bi nastale nove kali. Največkrat meri hitrost 1 do 10 mm/h.

Stockbargerjev način. Grelec je drugačen kot pri prejšnjem načinu. Ima dva dela, ki ju napajamo ločeno (Sl. 2). Prvi del (A) segrejemo za 50 do 80°C nad tališče, drugega pa za 50 do 80°C pod tališče. Obroč (C) ovira prehajanje toplote iz enega dela v drugega in poveča temperaturni gradient. Kal nastane sama od sebe in monokristal, ki zraste na njej, ima poljubno orientacijo. Določeno orientacijo pa dobimo, če spodaj vstavimo kal s to orientacijo in nad njo polikristalno snov. S skrbnim segrevanjem stalimo vso



Sl. 2



Sl. 3

to snov in samo del kali. Pri tem je težko določiti, kdaj je ostalo nestaljene dovolj kali, saj ne vidimo meje med trdnino in kapljevino. Mnogo laže je nadzorovati taljenje v vodoravni posodi z obliko ladjice.

Consko taljenje. Na eno krajišče (Sl. 3) postavimo kal (B), preostali del pa izpolnimo s polikristalno snovjo (C). Grelec (A) ustvari staljeno *cono*

(D), in to s premikanjem grelca premikamo po ladjici. Na začetku moramo staliti del kalí, da nastane tesen stik med talino in kaljo in raste monokristal iz kali. Ta način veliko uporabljajo v industriji.

Dvigovanje monokristala iz taline. Način Czochralskega. Način, ki ga pogosto uporabljajo, so odkrili ob raziskovanju hitrosti rasti kovinskih kristalov iz taline. V talino v posodi (2) potopimo ozko cevko (1) (Sl. 4). Talina se zaradi površinske napetosti dvigne v cevko in začne v njej ob počasnem ohlajanju kristalizirati. V cevki je malo snovi in nastane malo kalí ter se na izhodu pojavi en sam monokristal. Cevko dvigamo s hitrostjo, s katero raste monokristal.

Kyropoulosov način. Cev (A), ki jo hladi zrak, potopimo s kroglastim krajiščem v talino (Sl. 5). V podhlajeni talini zraste več kristalov radialno od površja polkrogle. S skrbnim dvigovanjem cevi lahko dosežemo, da ostane v stiku s talino samo kristal, ki raste navpično navzdol. Nato s počasnim ohlajanjem dosežemo, da kristalizira vsa talina.

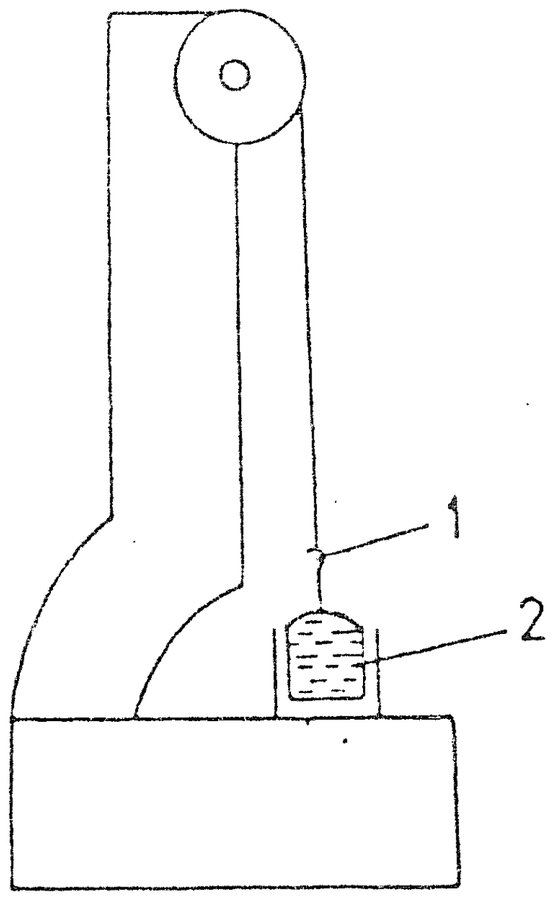
Načine gojenja monokristalov z dviganjem so močno izpopolnili in so v industriji cenjeni. Na začetku dviganja uporabijo kal z določeno orientacijo, tako da je dobljeni monokristal tudi tako orientiran. Poleg tega nosilec kali vrtijo glede na posodo in s tem mešajo talino. Tako zmanjšujejo neenakomernosti temperature, nepravilnosti pri rasti kristalov in nastajanje napak v kristalni mreži. Kristali se pri tem ne dotikajo sten posode in so lahko zelo dobri.

Pridobivanje kristalov brez talilnika. Veliko talin je kemijsko zelo napadalnih, tako da je težko najti snov za posodico, v kateri bi jih stalili, to je za *talilnik.* Druge snovi bi delovale kot topilo in bi onesnažile talino. Tudi tališče snovi, iz katere želimo vzgojiti monokristal, omejuje izbiro snovi za talilnike.

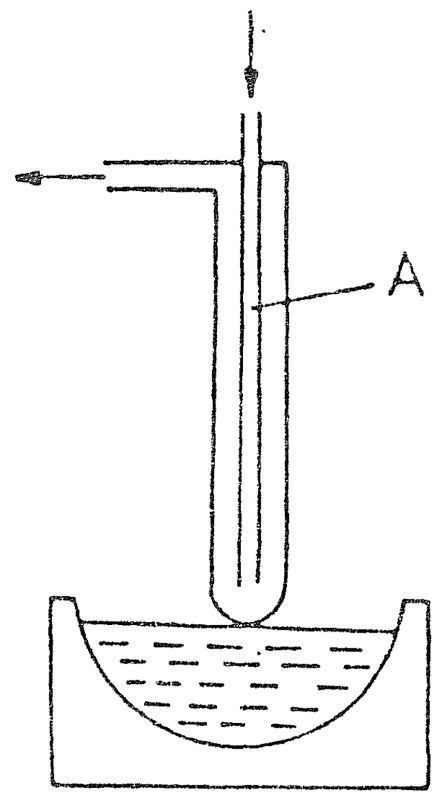
Verneuilov način. Polikristalni prah snovi, iz katere želimo vzgojiti monokristal, iz posode (A) postopno dovajamo v posodo in tam se meša z gorljivim plinom (B) (Sl. 6). V delu (D) se meša ta plin s kisikom in zgori. Plamen naravnamo tako, da talina pada na nosilec (E). Ko kristal raste, nosilec spuščamo in uravnavamo plamen. Talina vztraja na vrhu kristala zaradi površinske napetosti. Pomanjkljivost se skriva v tem, da je težko natančno naravnati plamen in da veliko snovi pri takem taljenju oksidira.

Način "lebdeče cone". Način uporabljamo pri snoveh, za katere ni mogoče najti pripravnega talilnika. Je razmeroma preprost in je pri njem lahko nadzirati temperaturo in hitrost kristalizacije. Kal (A) in polikristalno snov (C) z enakim premerom držita držali (Sl. 7). Spočetka grelec, navadno indukcijsko tuljavo, postavimo tako, da se stali tudi del kalí. Staljeno cono (B) potem premikamo tako, da premikamo grelec, dokler se ne spremeni v monokristal vsa polikristalna snov. Staljeno cono drži med trdnima deloma površinska napetost, ki poleg gostote kapljevine omejuje višino cone.

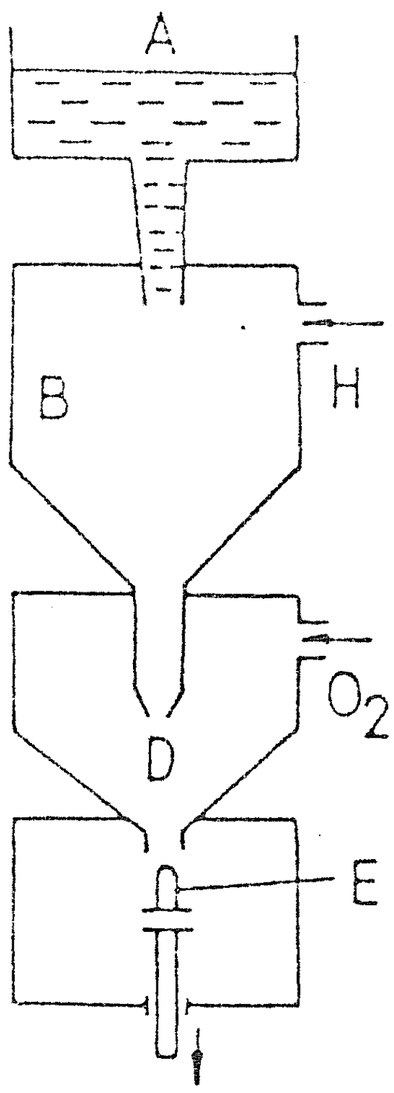
Način z "nosilcem iz taline". Namesto posodice uporabljamo paličko (A) iz snovi, katere monokristal želimo pridobiti (Sl. 8). Z grelcem stalimo vrhnji del paličke, tako da površinska napetost obdrži talino na njenem vrhu. Nato – kot pri načinu Czochralskega – kal (B) z določeno orientacijo potopimo v talino, da se malo stali in jo nato dvigamo. Ob tem počasi



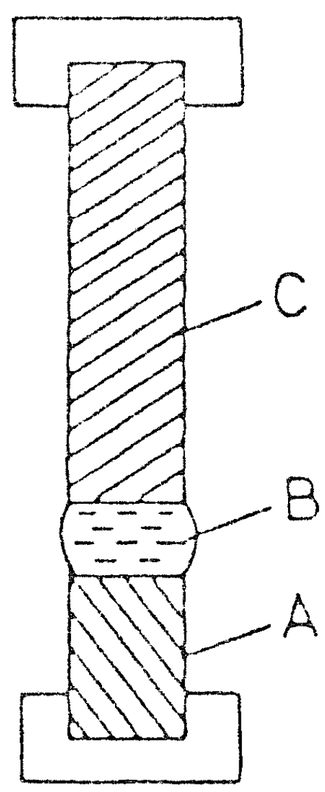
Sl. 4



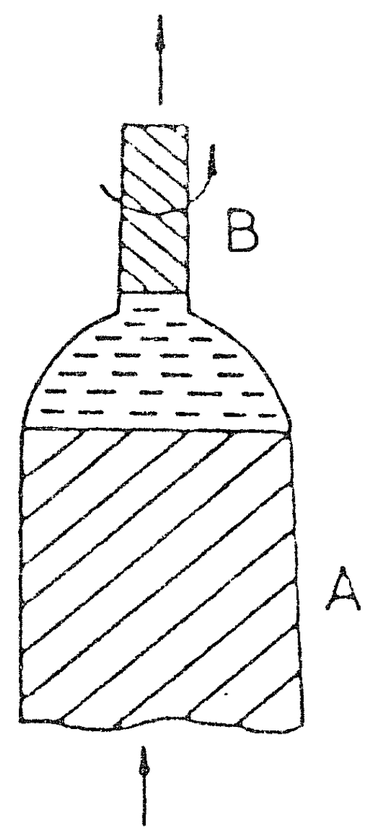
Sl. 5



Sl. 6



Sl. 7



Sl. 8

dvigamo tudi paličko, tako da se je nekaj dodatno stali in se del taline ne zmanjša.

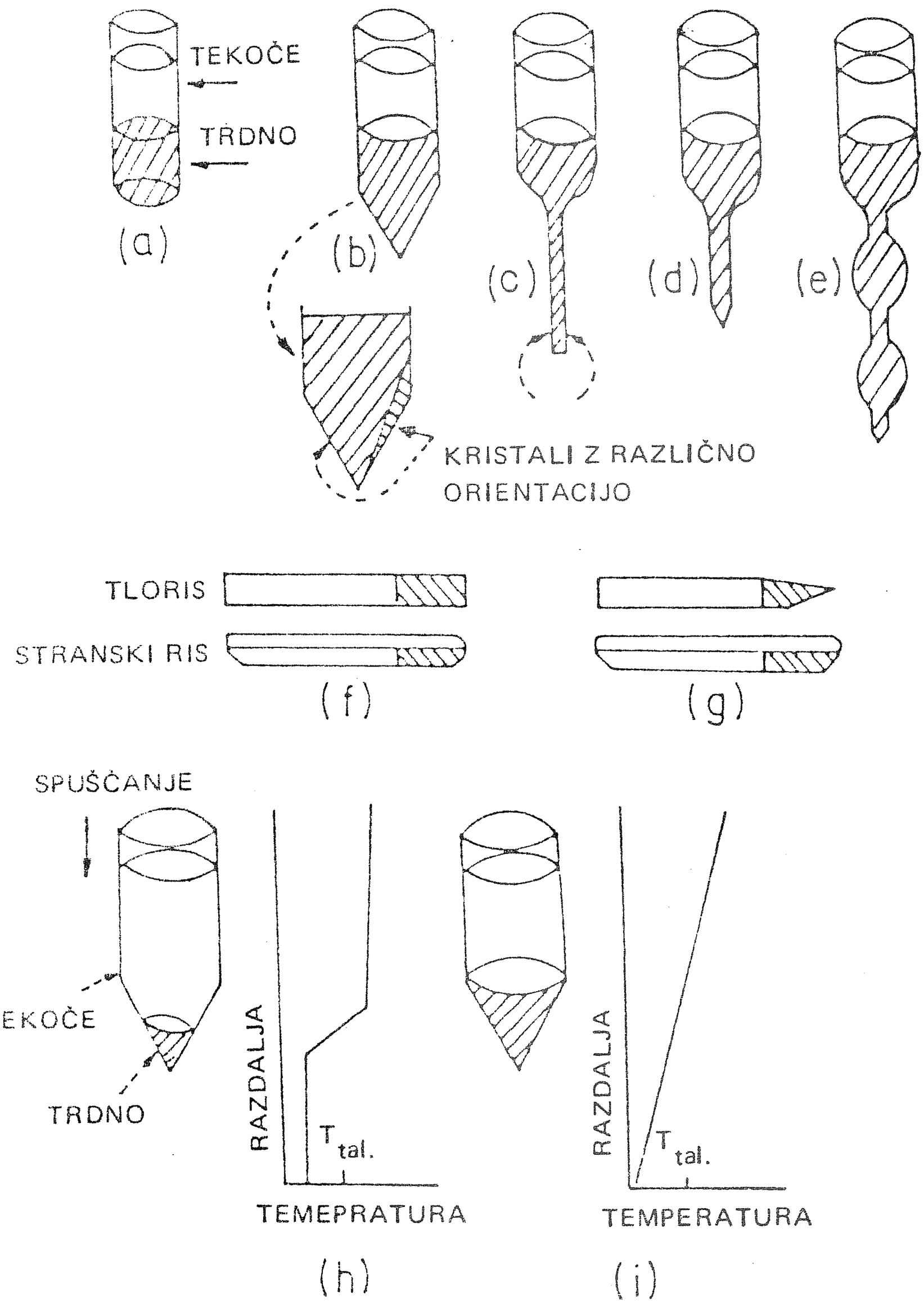
Bridgman-Stockbargerjev način

Tammanov način, način Obreimova in Šubnikova ter Bridgmanov in Stockbargerjev način smo omenili. Zdaj nekoliko podrobneje opišimo način, ki združuje značilne poteze vseh prejšnjih in ki ga dandanes imenujemo po Bridgmanu in Stockbargerju.

Za ta način je značilna cev (a), ki jo izpolnjuje snov za kristalizacijo, in grelec z ustreznim temperaturnim gradientom (Sl. 9). Ali spuščamo cev skozi mirujoči grelec ali dvigamo grelec ob mirujoči cevi (h) ali miruje talilnik v

grelcu z linearno temperaturno porazdelitvijo in se temperatura počasi niža (i). Predel s temperaturo tališča moramo premikati dovolj počasi, da ga lahko spremlja meja med kristalom in talino. Najprej stalimo v talilniku vso snov in na začetku nastane nekaj kali. Da prevlada ena izmed njih, dosežemo na več načinov.

- Dno talilnika je stožčasto (b), tako da na začetku podhladimo samo majhno prostornino taline in nastane le ena kal. Če jih nastane več, poskrbimo, da ena od njih s pravo orientacijo na meji kristala in taline prevlada nad drugimi.



Sl. 9

- Talilnik ima dno v obliki ozke cevke (c) in zato na začetku podhladimo zelo majhno prostornino taline. Če nastane več kali, ena od njih prevlada pri prehodu skozi odprtino cevke in zavzame vso mejo kristala in taline.
- Stožčasto krajišče talilnika je povezano z ozko cevko s stožčastim vrhom (d). Ta način združuje prednosti obeh prejšnjih.
- Na krajišču stožčastega talilnika je nameščena ozka cevka z eno ali več nabreklinami (e). V stožčastem vrhu cevke nastane le malo kali in ena od njih prevlada nad drugimi.

Izvedbe (a) do (e) (Sl. 9) je mogoče uporabiti tudi pri gojenju kristalov v odprtih vodoravnih talilnikih – ladjicah. Način, pri katerem uporabimo tudi vodoravne grelce, imenujemo po Chalmersu (f in g).

Kako je orientiran monokristal, je odvisno od orientacije začetne kali. Pri Bridgman-Stockbargerjevem načinu je lahko ta kal na dnu talilnika. Temperaturo je treba izbrati tako, da se stali le del kali, in potem začeti s kristalizacijo. To pa je težko narediti, če temperature v grelcu ni mogoče natančno uravnavati in neposredno videti kali. Običajna težava je še v tem, da je treba na vsak način doseči dovolj velik temperaturni gradient. Če je temperaturni gradient premajhen, se lahko primeri, da se podhladi vsa kapljevina, preden nastane prva kal. V takšnih okoliščinah kali hitro rastejo in dajo slabe kristale.

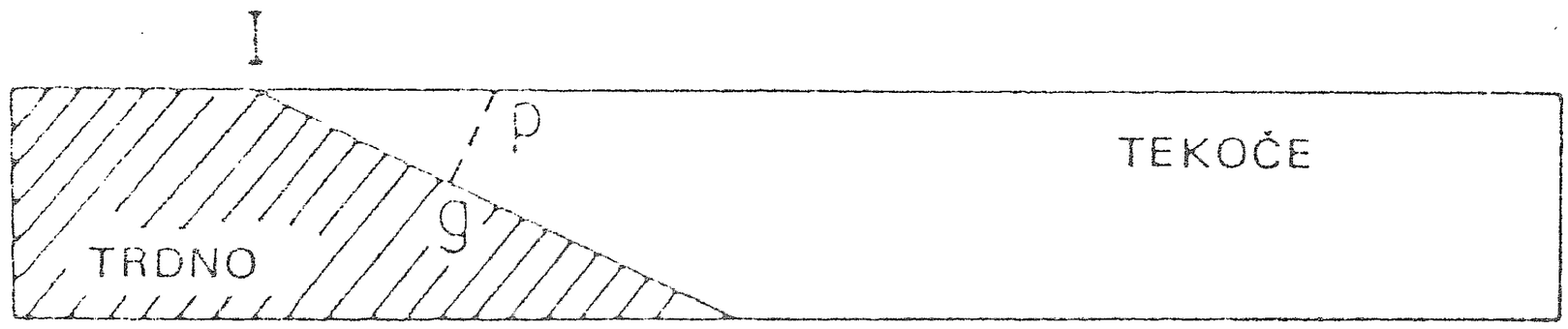
Za gojenje kristalov po tem načinu potrebujemo talilnik iz snovi, ki ne reagira s talino in plinsko okolico pri zahtevani temperaturi, dovolj velik temperaturni gradient ter merilnike in naprave za merjenje in uravnavanje temperature in spuščanje talilnika. Poleg tega se kristali ne smejo lepiti na talilnik, ker bi se deformirali ali poškodovali, ko bi jih jemali iz njega. Prednost talilnikov (a) do (e) (Sl. 9) je v tem, da jih je mogoče brez težav zapreti in v njih gojiti kristale pri višjem parnem tlaku in uravnavati plinsko okolico brez dodatnih zapletenih naprav. V odprtih ladjicah pa je težko uravnavati izparevanje snovi in sestavo plinske okolice. Njihova prednost pa je v tem, da je mogoče videti mejo kristala in taline. Če se kristal lepi na talilnik, uporabljamo talilnike, ki jih je mogoče deformirati, na primer iz zelo tanke platinske pločevine.

Pri premikanju predela s temperaturo tališča po talilniku z ohlajanjem grelnika mora biti temperaturna porazdelitev (i) drugačna kot pri spuščanju talilnika ali dviganju grelca (h) (Sl. 9). V drugem primeru navadno nastaneta območji s konstantnima temperaturama, med katerima je skok. Tedaj mora imeti talilnik majhno toplotno prevodnost. Pri vodoravnih izvedbah ostanejo v veljavi enake zahteve kot pri navpičnih.

Včasih je umestno hladiti stožčasto dno ali cevko na krajišču talilnika. Tedaj temu delu približamo paličko iz snovi z veliko toplotno prevodnostjo, ki sega v hladnejši del grelca ali v zunanjost. Enako dosežemo s curkom hladnega zraka.

Navadno spuščamo talilnik, ki visi na žici, preko urnega mehanizma. V ta namen je mogoče prilagoditi napravo za dviganje kristala pri načinu Czochralskega ali za premikanje cone pri conskem taljenju. Da kristal raste s konstantno hitrostjo, morata biti konstantni hitrost spuščanja talilnika in temperatura grelca.

Gostoto linearnih napak v kristalu iz ladjic lahko zmanjšamo, če nagnemo mejo kristala in taline glede na os ladjice [4]. Dislokacije so namreč najpogostejše v smeri pravokotno na to mejo. Dislokacija doseže površje kristala v točki p, namesto da bi rasla po dolžini kristala (Sl. 10). Potrebni nagib meje nastane, če namestimo grelec ob strani ladjice ali nad njo.



Sl. 10

Hitrost rasti kristala $\partial l/\partial t$ se da pri načinu z ohlajanjem grelca povezati s temperaturnim gradientom $\partial T/\partial l$ in hitrostjo spreminjanja temperature $\partial T/\partial t$ takole: $\partial T/\partial t = (\partial T/\partial l)(\partial l/\partial t)$. Majhna hitrost kristalizacije zahteva torej velik temperaturni gradient in majhno hitrost ohlajanja.

Mogoče je tudi oceniti, kako se hitrost kristalizacije spremeni, če spremenimo hitrost ohlajanja. Naprave, v katerih ohlajamo grelec, so najpreprostejše, a z njimi dosežemo zelo majhno hitrost kristalizacije, celo do 10^{-4} mm/min. Toda ta način ima tri osnovne pomanjkljivosti. Skoraj nemogoče je doseči konstantno hitrost kristalizacije. Temperaturni gradient se spreminja s časom. Zaradi velikega gradienta mora biti temperatura na enem krajišču talilnika zelo visoka. To vodi tudi do poostrene zahteve glede snovi talilnika. Z opisnaim načinom najpogosteje gojimo kristale treh vrst snovi: kovin, polprevodnikov in alkalijskih in zemljoalkalijskih halogenidov. V preglednici je zbranih nekaj značilnih podatkov [4].

Snov	tališče	talilnik	gradient	hitrost spuščanja talilnika	plinska okolica
Ar	−189.4° C	steklo	5° C/mm	1mm/min	Ar
Au	960.5	grafit	5° C/cm	majhna	N_2
Cu	1083	grafit	12° C/cm	5 do 20 cm/h	vakuum
Ni	1455	prekristaliziran Al_2O_3		0,1 do 0,2 mm/h	
Li	179	jeklo, nerjaveče jeklo		(2 do 30° C/h)	Ar
AgBr	434	pireks, kremen	10° C/cm	1 do 5 mm/h	Cl_2 (izpiranje s HCl ali HBr)
CaF_2	1392	Ta, Fe ali Ni C		velik 1 mm/h	
LiF	870	Pt			zrak, vakuum

Potrebni pogoji za gojenje kristalov iz talin

Na osnovi teorijskih razglabljanj in praktičnih izkušenj je zelo težko spoznati splošne pogoje za uspešno gojenje kristalov, ker se spreminjajo od snovi do snovi. Vseeno kaže za omenjene načine povzeti nekaj značilnosti uspešnih naprav za gojenje kristalov iz taline [5].

Za dober kristal velja tak, ki je makroskopsko in mikroskopsko neoporečen. Makroskopsko neoporečen kristal ne sme imeti dvojnih mejnih ploskev in sploh ne ploskev pod nepravimi koti ter črt. Mikroskopsko neoporečen kristal mora imeti najmanjšo mogočo gostoto napak, na primer nezasedenih mest, vrinjenih atomov ali atomov nečistoč ter dislokacij.

Makroskopske napake lahko nastanejo zaradi mehaničnih napetosti na meji kristala in taline ali v njeni bližini. Zato si moramo prizadevati, da ima ta meja najugodnejšo obliko. Da ne bi nastale dodatne kali, taline ne smemo preveč podhladiti in moramo preprečiti, da bi padle vanjo smeti. Snov, iz katere raste kristal, mora biti čista, temperaturni gradient izrazit in hitrost rasti majhna. Poleg tega je potrebna inertna plinska atmosfera in snov talilnika mora biti primerno izbrana.

Kristalni dvojčki nastanejo zaradi tresljajev ali temperaturnih sprememb. Plastoviti zgradbi se izognemo, če je meja kristala in taline nagnjena proti smeri rasti kristala vsaj za kritični kot, ki je odvisen od hitrosti rasti in od orientacije kristala [5].

Mikroskopsko neoporečen kristal mora zrasti iz čiste snovi. Atomi nečistoč izvirajo iz plina ali od raztopljenih tujih snovi. Plin izženemo iz taline tako, da jo pri visoki temperaturi neprekinjeno prečrpavamo in pustimo rasti kristal v visokem vakuumu. Majhne spremembe v koncentraciji primesi od kraja do kraja povzročijo spremembo mrežnih razdalj. Zaradi tega nastanejo v kristalu mehanične napetosti in zaradi njih nizi dislokacij. Kristali, vzgojeni v talilnikih, ki se dajo deformirati, so mnogo boljši kot tisti iz togih talilnikov [5].

Dislokacij je manj, če zraste kristal iz kakovostne kali, kot če raste brez kali. Tresljaji in temperaturne spremembe povečujejo gostoto dislokacij. Tak učinek imata tudi difuzija nezasedenih mest in plastična deformacija kristala pri povišani temperaturi. Izogniti se moramo torej temperaturnim spremembam in poskrbeti, da so izoterme ravne in je temperaturni gradient v kristalu majhen.

Naprava za gojenje kristalov mora zagotoviti, da ni tresljajev. Enako mora zagotoviti konstantno hitrost rasti kristalov, ki jo moremo uravnavati na dokaj širokem intervalu. Zaradi tega zahtevamo konstantno hitrost premikanja in konstantno moč grelca. Kristale naj bi bilo mogoče gojiti v vakuumu ali inertni plinski atmosferi. Mogoče naj bi bilo naravnati mejo med kristalom in talino. Naprava mora zagotoviti potrebni temperaturni gradient in uporabljati talilnik iz take snovi, ki se ne omehča, ne reagira s talino in ima dovolj veliko toplotno prevodnost. Med gojenjem kristalov mora ostati snov kolikor mogoče čista.

LITERATURA

[1] Brice, J. C., *The growth of Crystals from melt,* NHPC, Amsterdam 1965.

[2] Buckley, H. E., *Crystal Growth,* Wiley, New York 1951.

[3] Gilman, J. J., v knjigi: *The Art and Science of Growing Crystals,* Wiley, New York 1963.

[4] Laudise, R. A., *The Growth of Single Crystals,* Prentice–Hall, Engelwood Cliffs 1970.

[5] Lawson, W. D., Nielsen, S., v knjigi: *Preparation of Single Crystals,* Butterworth, London 1958.

[6] Smakula, A., *Einkristalle,* Springer, Berlin 1962.

[7] Vilke, K.–T., *Viraščivanie kristallov,* Nedra, Leningrad 1977.—

NAKLON SONČEVIH ŽARKOV

MARIJAN PROSÉN

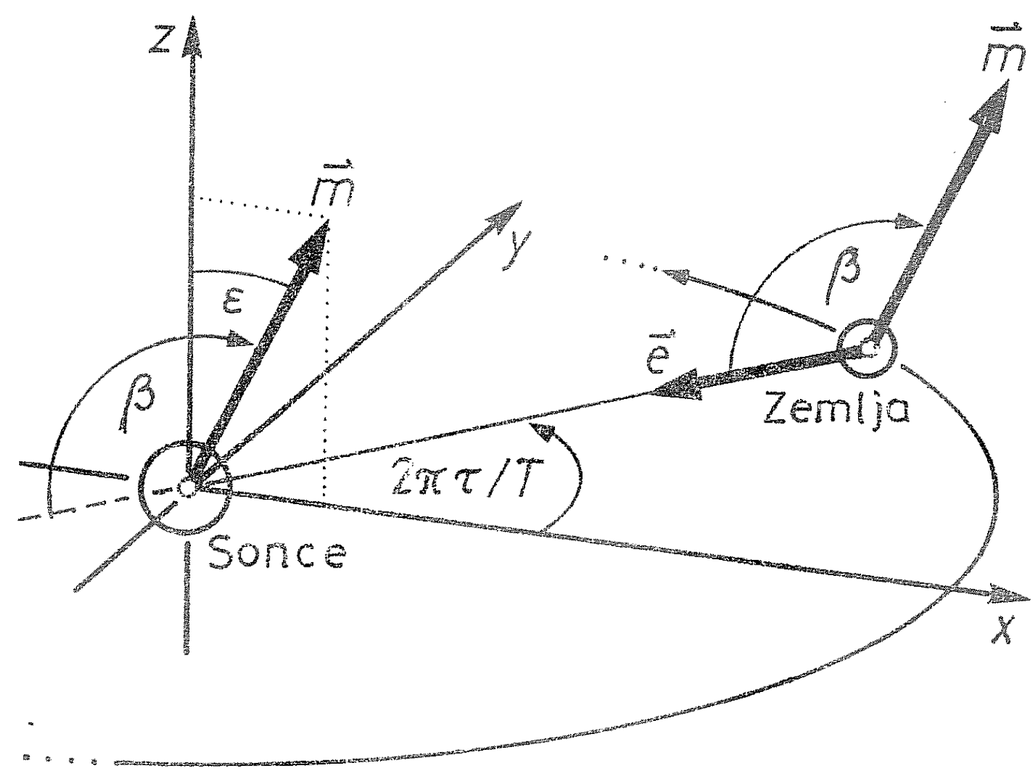
PACSa9510Cl

Podana je časovna odvisnost kota med smerjo proti Soncu in navpičnico za kraj z znano zemljepisno širino.

THE SUN RAYS INCLINATION

The angle between the direction to the Sun and the vertical for a place with known geographycal latitude is presented as a function of time.

Kot med smerjo proti Soncu in navpičnico kakega kraja na Zemlji se neprestano spreminja: med dnevom in iz dneva v dan med letom. Kako se spreminja, je pomembno za tiste, ki bi radi izkoriščali energijo Sonca. Vzemimo najpreprostejši primer, da je Zemlja krogla, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo $\omega = 2\pi/t_0$ ($t_0 = 1\,\text{dan} = 86400\,\text{s}$) in enakomerno kroži okrog Sonca po krožnici s kotno hitrostjo $2\pi/T$ ($T = 1\,\text{leto} = 365{,}25\,\text{dni}$), in da padajo Sončevi žarki na Zemljo vzporedno.



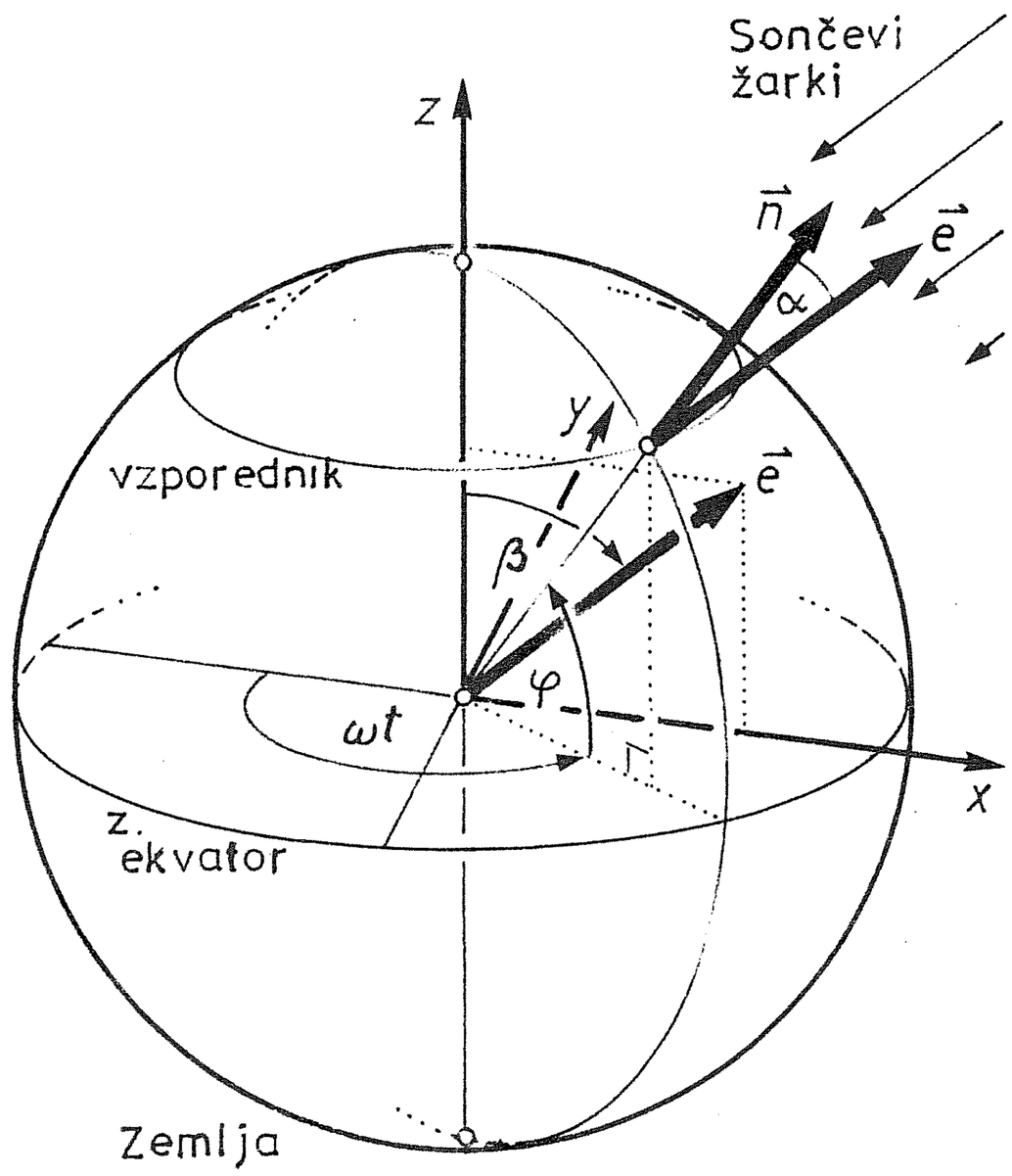
Sl. 1 K izpeljavi enačbe za kot β med smerjo proti Soncu in smerjo zemeljske vrtilne osi. Najprikladneje je, da čas τ štejemo od zimskega solsticija. Kot, ki ga popiše zveznica Sonce–Zemlja v času τ, je $2\pi\tau/T$ ($T = 1$ leto).

Najprej poglejmo, kako se spreminja kot β med smerjo proti Soncu in smerjo zemeljske vrtilne osi (Sl. 1). V izbranem koordinatnem sistemu na sliki ima enotski vektor, ki kaže od Zemlje proti Soncu, komponente $\mathbf{e} = (-\cos(2\pi\tau/T), -\sin(2\pi\tau/T), 0)$. Ker zemeljska vrtilna os oklepa z osjo Z kot $\varepsilon = 23{,}5°$, ima enotski vektor smeri te osi komponente $\mathbf{m} = (\sin\varepsilon, 0, \cos\varepsilon)$. Kosinus kota β med enotskima vektorjema je

$$\cos\beta = \mathbf{e}\cdot\mathbf{m} = -\sin\varepsilon\cos(2\pi\tau/T) \tag{1}$$

Enačba (1) podaja spreminjanje kota β med letom. Če je $\tau = 0$ (zimski solsticij), je $\cos\beta = -\sin\varepsilon$. Sledi, da je $\beta = \varepsilon + 90° = 113{,}5°$. Pozimi zemeljska vrtilna os oklepa topi kot s smerjo proti Soncu. Za $\tau = T/4$ ali $3T/4$ (spomladansko ali jesensko enakonočje) je $\cos\beta = 0$. Zemeljska os je pravokotna na Sončeve žarke. Za $\tau = T/2$ (poletni solsticij) je $\cos\beta = \sin\varepsilon$. Kot β doseže najmanjšo vrednost $66{,}5°$.

Sl. 2 K izpeljavi enačbe za kot α med smerjo proti Soncu in navpičnico za kraj z zemljepisno širino φ. Najprimerneje je, da čas t merimo od trenutka, ko je Sonce na krajevnem meridianu opolnoči ($t = 0$). V času t se Zemlja zavrti za kot ωt glede na svojo lego opolnoči.



Sedaj pa poglejmo, kako se med dnevom spreminja kot α med smerjo proti Soncu in navpičnico v kraju z zemljepisno širino φ (Sl. 2). V novem koordinatnem sistemu ima enotski vektor $\mathbf{e}$ komponente $\mathbf{e} = (\sin\beta, 0, \cos\beta)$, enotski vektor $\mathbf{n}$ smeri navpičnice za kraj z zemljepisno širino φ pa ima v času t komponente $\mathbf{n} = (-\cos\varphi\cos\omega t, -\cos\varphi\sin\omega t, \sin\varphi)$. Sledi

$$\cos\alpha = \mathbf{e}\,\mathbf{n} = \cos\beta\sin\varphi - \sin\beta\cos\varphi\cos\omega t \tag{2}$$

Enačba (2) posreduje odvisnost kota α od datuma τ, dnevnega časa t in zemljepisne širine φ.

Poglejmo nekaj zanimivih primerov, ki sledijo iz (2).

1. Za $t = 0$ (polnoč) je $\cos\alpha = -\sin(\beta - \varphi)$. Torej je za večino zemljepisnih širin $\cos\alpha < 0$. To pomeni, da opolnoči tisti del zemeljskega površja ni osvetljen (za $90° < \alpha < 270°$ je namreč noč). Za nekatere širine pa je tudi opolnoči možen $\cos\alpha > 0$. Tam je polarni dan. Mejo polarnega dne dobimo, če upoštevamo $\alpha = 90°$. Mejno širino φ_1, na kateri nastopi polarni dan, izpeljemo iz enačbe $\sin(\varphi_1 - \beta) = 0$, ki ima rešitvi $\varphi_1 = \beta$ in $\varphi_1 = -180° + \beta$. Prva rešitev je možna poleti na severni zemeljski poluti, druga pa na južni, ko je pri nas zima.

2. Če je $\omega t = 180°$ (poldne), je $\cos\alpha = \sin(\beta + \varphi)$. Rešitev te enačbe je $\alpha = \beta + \varphi - 90°$. Za $\cos\alpha < 0$ (noč) gre za polarno noč. Mejno širino φ_2 določimo iz $\sin(\beta + \varphi_2) = 0$, ki ima rešitvi $\varphi_2 = -\beta$ in $\varphi_2 = 180° - \beta$. Prva rešitev je možna na južni zemeljski polkrogli, ko je pri nas poletje, druga pa pozimi na severni.

---

* Ker ima Sonce, ki ga gledamo z Zemlje, končno navidezno velikost (okroglo ploščico) in zaradi loma v ozračju (ob obzorju dvigne Sonce za 35′, kar je več, kot meri zorni kót Sonca), je tudi pri popolnoma ravnem obzorju ob enakonočju dan daljši od noči za okoli deset minut. Zato so iz (2) dobljeni rezultati približni.

3. Za $\beta = 90$ (enakonočje) je $\cos\alpha = -\cos\varphi\cos\omega t$. Iz enačbe sledi, da Sonce vzide ob 6^h (krajevnega Sončevega časa), zaide pa ob 18^h. Dolžina dneva je 12^h za vse zemljepisne širine. Dan je enak noči.*

4. Za $\varphi = 0$ (ekvator) je $\cos\alpha = -\sin\beta\cos\omega t$. Dolžina dneva na ekvatorju je 12^h neodvisno od letnega časa. Opoldne ob enakonočjih padajo Sončevi žarki pravokotno na ekvator.

Kaj sledi iz (2) za druge primere (solsticije, zemljepisne širine krajev na povratnikih, tečajnikih itn.), lahko ugotavlja bralec sam.

LITERATURA

[1] A. V. Bjalko, *Naša planeta - Zemlja,* Nauka, Moskva 1983.
[2] F. Avsec-M. Prosén, *Astronomija,* DZS, Ljubljana 1975.

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS prireja s sodelovanjem Oddelka za matematiko in mehaniko, Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ter Zavoda SRS za šolstvo 13. seminar iz matematike za člane društva, učitelje na srednjih in osnovnih šolah

IZBRANE TEME IZ TEORIJE GRAFOV

Predavanja bodo v petek 9. in soboto 10. februarja v veliki predavalnici na Jadranski 26.

petek, 9. februar

9.00 V. Batagelj, *Ovojnica vrednosti matrike grafov*
11.00 B. Mohar, *Ravninski grafi*
16.00 S. Malnič, *Vložitve grafov*
18.30 Večerja z družabnim večerom v Maximu

sobota, 10. februar

9.00 S. Klavžar, *Grafi intervalov*
11.00 D. Marušič, *Grafi in algebra*

V začetku januarja bomo razposlali vabila še po šolah.

Udeležence seminarja prosimo, da kotizacijo 2 000 000 dinarjev nakažejo na žiro račun DMFA SRS, št. 50101-678-49168 ali jo plačajo ob začetku seminarja.

Vladimir Batagelj in *Milena Strnad*

VESTI

POROČILO O UDELEŽBI NA TEKMOVANJU ISTAM 1989

Tudi letos so se študentje ljubljanjske univerze udeležili ISTAM-a, mednarodnega tekmovanja študentov v matematiki, ki ga vsako leto prireja prirodoslovno-matematična fakulteta v Beogradu. Na pot so odšli trije študentje: Jože Fabčič (drugi letnik), Damjana Kokol (tretji letnik), Miloš Žefran (tretji letnik), in vodja ekipe Miran Černe.

Tekmovanje je trajalo štiri dni, od 31. marca do 3. aprila 1989, in je bilo za nas dokaj uspešno. Damjana Kokol je v kategoriji študentov tretjih in četrtih letnikov osvojila drugo mesto, ekipno pa smo bili sedmi.

Omeniti še velja, da so na tekmovanju sodelovali študentje iz vseh naših glavnih univerzitetnih centrov razen Prištine in Skopja ter z univerz v Moskvi, Leningradu, Pragi, Bratislavi in Budimpešti. Beograjski organizatorji so nas vse zelo lepo sprejeli.

Predstavimo še naloge, ki so jih dobre štiri ure reševali tekmovalci.

1. in 2. letnik

1. Naj bo A poljubna realna matrika reda $m \times n$ in b realna matrika reda $m \times 1$. Dokažite, da je sistem $A^T Ax = A^T b$ rešljiv.

2. Naj bo (a_n) zaporedje, definirano s predpisom

$$0 < a_0 < \pi, \quad a_{n+1} = \sin(a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Poiščite vse realne x, da bo vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergentna.

3. Konstruirajte omejeno strogo naraščajočo odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) \neq 0 \text{ in } \lim_{x \to +\infty} f'(x) \neq 0$$

4. Naj bo $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ nepadajoča realna funkcija in $\mathcal{F}$ družina nenegativnih, na $[0,1]$ konkavnih funkcij $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

Poiščite $\min\{\int_0^1 f(x)h(x)\, dx \; ; \; f \in \mathcal{F}\}$.

Realna analiza

1. Naj bo A podmnožica intervala $[a,b]$ z ničelno Lebesguovo mero. Dokažite, da obstaja taka absolutno zvezna nepadajoča funkcija f na $[a,b]$, da je $f'(x) = +\infty$ za vse x iz A.

2. Dokažite, da za $|x| < 1$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n(1+xt)^n}{\prod_{k=1}^n (1+t/k)^k}\, dt = \frac{1}{1-x}$$

Funkcionalna analiza

1. Naj bo (M,d) metrični prostor. Dokažite, da obstaja tak normiran vektorski prostor $(X, \|\,.\,\|)$ in preslikava $h : M \to X$, da velja

a) $\|h(x) - h(y)\| = d(x,y)$ za vse x in y iz M

b) $h(M)$ je linearno neodvisna množica v X

2. Naj bosta X in Y Banachova prostora, ki sta zvezno vložena v normiran vektorski prostor V. Na preseku $X \cap Y$ definirajmo normo s predpisom

$$\|z\|_{X\cap Y} = \|z\|_X + \|z\|_Y$$

in predpostavimo, da je $X \cap Y$ gost v X in v Y. Če definiramo normo na $X^* + Y^*$ (zvezdica označuje dual normiranega prostora) s predpisom

$$\|f\|_{X^*+Y^*} = \inf\{\max(\|g\|_{X^*}, \|h\|_{Y^*}),\ g+h=f,\ g\in X^*,\ h\in Y^*\}$$

dokažite, da velja naslednje

a) $X^* + Y^* = (X\cap Y)^*$

b) $\|f\|_{X^*+Y^*} = \|f\|_{(X\cap Y)^*}$ za vse f iz $(X\cap Y)^*$

Analiza

1. Če je $F(x,y) = 0$ enačba krivulje C v $\mathbb{R}^2$, se točka z racionalnima koordinatama a in b, za katero velja $F(a,b) = 0$, imenuje racionalna točka krivulje C. Dokažite ali ovržite naslednjo trditev.

Vsaka elipsa $px^2 + qy^2 = 1$ z racionalnima p in q ima vsaj eno racionalno točko.

2. Naj bo V vektorski prostor nad poljem K. Naj bo R dvojno tranzitiven podkolobar v $\mathrm{End}_K(V,V)$, t.j., za vsaka dva linearno neodvisna vektorja u_1 in u_2 iz V in vsaka dva vektorja v_1 in v_2 iz V obstaja tak a iz R, da je $a(u_1) = v_1$ in $a(u_2) = v_2$. Dokažite, da je kolobar

$$C = \{b \in \mathrm{End}_K(V,V)\ ;\ ab = ba \text{ za vsak } a \text{ iz } R\}$$

izomorfen polju K.

Programiranje

1. (Usmerjena) mreža $M = (G, p)$ sestoji iz usmerjenega grafa $G = (V, E)$ (V je množica točk, $E \subseteq V^2$ pa množica povezav) in propustnosti povezav $p : E \to \mathbb{R}_0^+$. Za dani točki a in b se funkcija $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ imenuje (a, b)- pretok, če zadošča naslednjim pogojem

a) $0 \leq f(u, v) \leq p(u, v)$ za vse (u, v) iz E

b) $\sum_{e \in \mathrm{in}(v)} f(e) = \sum_{e \in \mathrm{out}(v)} f(e)$ za vse v iz V, različne od a in b, kjer je $\mathrm{in}(v)$ ($\mathrm{out}(v)$) množica povezav, ki se končajo (začno) v točki v, in

c) $\sum_{e \in \mathrm{in}(a)} f(e) \leq \sum_{e \in \mathrm{out}(a)} f(e)$

Če je $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ (a, b)-pretok, potem se

$$\mathrm{val}_f(a) = \sum_{e \in \mathrm{out}(a)} f(e) - \sum_{e \in \mathrm{in}(a)} f(e)$$

imenuje velikost pretoka f.

Napišite algoritem za določanje pretoka maksimalne možne velikosti. Algoritem razložite in dokažite, da je pravilen. Napišite tudi program v programskem jeziku pascal (fortran, C ...).

2. Napišite program (v kateremkoli programskem jeziku) za izpis zaporedja vseh besed $r_0, \ldots, r_{2^n-1}$ dolžine n nad abecedo $\{0, 1\}$ tako, da r_i dobimo iz r_{i-1} s spremembo enega samega simbola ($i = 1, \ldots, 2^n - 1$).

Diferencialne enačbe

1. Poiščite vse rešitve enačbe

$$y' = (xy' - y)(yy' + x)$$

2. Rešite enačbo

$$(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Kompleksna analiza

1. Naj bo $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ holomorfna funkcija na enotnem disku $D = \{z, |z| < 1\}$. Dokažite

a) Če je $\sup_{N \geq 1} \sum_{k=N}^{k=2N-1} |a_k| < \infty$, tedaj je $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)|f'(z)|$ končno število, in obratna implikacija drži, če je $a_k \geq 0$ za $k \geq 1$.

b) Če je $\sup_{z \in D}(1 - |z|\ )|f\ (z)| < \infty$, tedaj je

$$\sup_{N \geq 1} \left(\sum_{k=N}^{k=2N-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \infty$$

2. Naj bo $a > 1/p - 1 > 0$. Dokažite, da za trigonometrične polinome T_n^a, $n \in \mathbb{N}$, definirane s predpisom

$$T_n^a(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{B(a, n+1)^2}{B(a, n+1-k)B(a, n+1+k)} e^{ikt}$$

velja

$$\sup_{n \geq 1} n^{1-p} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n^a(t)|^p \, dt < \infty$$

Topologija

1. Dokažite, da je vsak lokalno kompakten povezan metrični prostor separabilen.

2. Noben povezan kompakten Hausdorffov prostor se ne da zapisati kot unija števno mnogo nepraznih disjunktnih zaprtih množic. Dokažite.

Verjetnost

1. Naj bo (X_n) zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk z naslednjo porazdelitvijo

$$P\{X_n = j\} = \frac{1}{10}, \ j \in S = \{0, 1, 2, ..., 9\}, \ n \in \mathbb{N}$$

Poiščite porazdelitev za

$$\min\{n; \text{ za vsak } j \text{ iz } S \text{ obstaja } k \leq n, \text{ da je } X_k = j\}$$

2. Naj bo (X_n) zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk s porazdelitvami

$$P\{X_n = k\} = (1-p)^{1-k} p^k, \ k \in \{0, 1\}; \ n \in \mathbb{N}, \ (0 < p < 1)$$

Naj bo Y_n slučajna spremenljivka definirana s predpisom: $Y_n = k$, če in

samo če je $X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+k-1} = 1$, $X_{n+k} = 0$. Dokažite

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{\log_{1/p} n} = 1\right\} = 1$$

Geometrija

1. Naj bodo ABC, AA_1A_2, BB_1B_2 in CC_1C_2 enakostranični trikotniki v isti ravnini in iste orientacije in A_3, B_3 in C_3 središča daljic B_2C_1, C_2A_1 in A_2B_1. Dokažite, da je trikotnik $A_3B_3C_3$ enakostraničen.

2. Krožnici p in k_0 naj se dotikata od zunaj, poleg tega naj se dotikata krožnice k od znotraj. Središča vseh treh naj leže na isti premici ℓ. Nadalje naj se krožnica k_1 dotika krožnic k, p in k_0, krožnica k_2 krožnic k, p in k_1, ... , krožnica k_n pa krožnic k, p in k_{n-1}. Označimo z d_n razdaljo središča krožnice k_n od premice ℓ, in z r_n njen polmer. Dokažite, da tedaj velja $d_n = 2nr_n$.

Miran Černe

PROFESOR FRANC DAVID – višji študijski svetnik

Rojaku prof. Francu Davidu so že pred dvema letoma podelili poklicni naziv višji študijski svetnik. S tem mu je bilo izkazano priznanje za njegovo vestno in vsestransko delo na Slovenski gimnaziji v Celovcu.

Franc David se je rodil 27. 3. 1934 v podjunski vasici Rinkole. Po ljudski šoli v Vogrčah je vstopil v gimnazijo na Plešivcu blizu Celovca in opravil tam leta 1955 zrelostni izpit. Kljub težkim gmotnim razmeram med študijem je v kratkem času diplomiral iz fizike in matematike na dunajski univerzi.

Službovati je pričel na celovški realki, istočasno pa je poučeval tudi na Slovenski gimnaziji. V nadaljnjih letih je učil tu fiziko in matematiko, bil varuh zbirke za fiziko, sodeloval pri mnogih šolskih prireditvah in pomagal pri administraciji. Ko so pred nekaj leti vse avstrijske šole dobile v pisarne tudi računalnike, se je z veliko vnemo lotil šolanja z novimi pripomočki.

V imenu slovenskih matematikov, fizikov in astronomov rojaku Francu Davidu za zasluženo napredovanje iskreno čestitamo.

Ciril Velkovrh

Podatke smo povzeli po sestavku dr. R. Vospernika iz Letnega poročila Zvezne gimnazije za Slovence v Celovcu za šolsko leto 1986/87.

NOVE KNJIGE

BRATKO I., Prolog in umetna inteligenca, DMFA SRS in ZOTKS, Ljubljana 1989, 412 str. (Matematika-Fizika ; 30) Prevedla Tanja Urbančič in Ivan Bratko.

Knjiga je z naslovom PROLOG, Programming for Artificial Intelligence prvotno izšla v angleščini pri založbi Addison-Wesley, prevedena pa je tudi v nemščino. V tujini je bila zelo dobro sprejeta. V prevodu avtorja in sodelavke smo jo sedaj dobili tudi v slovenskem jeziku.

Knjigo sestavljata dva dela. V prvem nas avtor na razumljiv in dostopen način seznani s programskim jezikom prolog, v drugem pa pokaže uporabo tega programskega jezika v izbranih problemih umetne inteligence.

Prolog je nastal v osemdesetih letih. Namenjen je predvsem nenumeričnim obdelavam. V računalništvo je prinesel pomembno novost: nepostopkovno programiranje. Problem, ki ga rešujemo, moramo v prologu le natančno opisati, za postopek pri njegovem reševanju pa poskrbi prevajalnik ali tolmač sam. Prolog štejejo za osnovni jezik pete generacije računalnikov. Izid kvalitetnega slovenskega učbenika je zato toliko pomembnejši.

V prvem delu knjige nas avtor najprej seznani z osnovnimi pojmi prologa. Spoznamo podatkovne objekte: atome, števila, strukture. Srečamo se s spremenljivkami in prilagajanjem. Sledi opis operatorjev in podrobna razlaga pomembne podatkovne strukture, seznama. Osnovne elemente jezika zaključujejo zgledi problemov in programskih rešitev: simulacija nedeterminističnega avtomata, načrtovanje potovanja, problem osmih kraljic. Poglavja o zahtevnejših elementih jezika uvajajo sestopanje in rezi kot orodje za preprečevanje vračanja. Sledi delo z datotekami, branje in izpisovanje izrazov. Nato srečamo vrsto pomembnih vgrajenih predikatov. Prvi del knjige zaključi razmislek o pisanju dobrih programov, iskanju in odpravljanju napak.

V drugem delu nam avtor najprej pokaže uporabo prologa pri predstavitvi pomembnih podatkovnih struktur in reševanju izbranih problemov: urejanje seznamov, predstavitev množic z dvojiškimi drevesi, dvojiški slovar in operacije nad njim, predstavitev grafov, iskanje poti v grafu, iskanje vpetega drevesa, 2-3 drevo, AVL-drevo, iskanje v globino in širino. Nato se zvrstijo metode in problemi, ki sodijo v področje umetne inteligence: hevristično iskanje po načelu najprej najboljši, usmerjano iskanje. Sledi uporaba usmerjanega iskanja v igri osmih ploščic in v razporejanju nalog, AND/OR grafi in problemi, ki se nanje navezujejo. V poglavju o ekspertnih sistemih se seznanimo s funkcijo ekspertnega sistema, njegovo zgradbo in pravili za predstavitev znanja. Tudi igranju iger je posvečeno posebno poglavje. Spoznamo igre med dvema nasprotnikoma s popolno informacijo, načelo minimaksa in algoritem alfa-beta. Teorijo iger avtor zaokroži s problemi igranja šahovskih končnic. Knjigo sklene poglavje o vzorčno vodenih sistemih.

Knjiga je pisana pregledno in razumljivo. Prvi del ne zahteva mnogo predznanja, poznavanje postopkovno usmerjenih programskih jezikov pravzaprav bolj moti kot koristi. Drugemu pa lažje sledimo, če poznamo osnovo

o podatkovnih strukturah in algoritmih. Avtor je besedilo obilno podkrepil z zgledi programov, dodal je naloge, ki so v večini tudi rešene. Knjiga je tako odličen učbenik, ki bo nepogrešljiv študentom računalništva in sorodnih smeri. Toplo jo priporočam tudi vsem, ki bi se rad seznanil s prihajajočim načinom razmišljanja v programiranju.

Jernej Kozak

KRAMAR E., Rešene naloge iz linearne algebre, DMFA SRS, Ljubljana 1989, 152 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 24)

Nova, dopolnjena in razširjena izdaja prinaša v prvem delu pester izbor več kot 400 nalog. Kar precej je originalnih, zaman jih bomo iskali drugod. V drugem delu so zbrane rešitve, pri večini tudi napotki za reševanje. Zbirka je zrasla ob vajah, kolokvijih in izpitih pri predmetu Linearna algebra, kakor se zadnja leta predava študentom drugega letnika računalništva na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani.

Zato je razumljivo, da bralec tu ne bo našel preveč "teoretičnih" nalog ali morda z vsemi žavbami namazanih trikov po vzoru ruskih zbirk, pač pa kopico zanimivih "konkretnih" nalog. In prav to je tisto: ob primerno zastavljenih "konkretnih" problemih, ki pa niso zgolj "mehanična" uporaba formul, postopkov in izrekov, je osvajanje novih, abstraktnih konceptov najmanj boleče. Da ti koncepti zlezejo pod kožo, da se vidi, kako teorija deluje "v praksi". Razpored in tematika nalog zvesto sledita učnemu načrtu, ki je klasičen in se bistveno ne razlikuje od programa za študente matematike (vsaj po naslovih, ne pa tudi po globini in organizaciji snovi; izpuščeno je naprimer poglavje okrog minimalnega polinoma, pa Jordanova kanonična forma itd.). Kaj od metod linearne algebre torej računalnikar – in njemu je knjižica predvsem namenjena – mora brezpogojno obvladati? Ob pomisli na računalniško grafiko je odgovor nedvoumen: reševanje in diskusija linearnih sistemov, vektorji in analitična geometrija, linearne transformacije v različnih bazah in diagonalizacija, pa projekcije, ortogonalne transformacije, morda še kvadratične forme in ploskve drugega reda. Res je težišče nalog te zbirke prav na omenjenih temah. Edino, kar bi morda še pogrešali, so zgledi, ki vključujejo vektorske prostore nad kakšnim končnim obsegom, ne le nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Glede na to, da se študenti računalništva z vsemi osnovnimi algebrajskimi strukturami srečajo že v prven letniku (pri predmetu Diskretne strukture), je upati, da bi to vendarle ne bilo pretežko, koristno pa prav gotovo.

Da je za študente računalništva na Fakulteti za elektrotehniko ta zbirka tako rekoč obvezno študijsko gradivo, smo že povedali. Prav pa bo prišla vsem študentom tehniških smeri, ki imajo ta predmet v programu. Ne nazadnje bi jo priporočal – kot dopolnilo – tudi študentom prvega letnika matematike.

Aleksander Malnič

KLAVŽAR S., Mali priročnik operacijskega sistema MS DOS, DMFA SRS, Ljubljana 1989, 48 str.

Avtor v knjigi obravnava operacijski sistem MS DOS. Tekst je namenjen začetnemu spoznavanju z operacijskim sistemom. Zato celoviteje obravnava le najvažnejše ukaze, drugi so le omenjeni ali izpuščeni. Dodano je precej zgledov, čeprav začetniku ne bi škodil še kakšen. Avtor se je uspešno izognil pomanjkljivosti večine podobnih tekstov – preobširnosti. Tako običajno srečamo več sto strani debele knjige, v katerih pa zaradi 'preveč dreves ne vidimo gozda'. Kljub skromnemu obsegu je v knjigi razloženo vse tisto najpomembnejše, kar pri običajnem delu potrebujemo. Poklicni programerji in računalniški navdušenci pa bodo tako ali tako posegli po kaki drugi, tuji literaturi, ki je res ne manjka. Tisti, ki se z operacijskim sistemom MS DOS srečujejo prvič, in vsi, ki računalnik potrebujejo le vsake toliko časa, bodo v knjigi našli vse tisto, kar bodo običajno potrebovali. To pa je bil tudi namen te knjige.

Matija Lokar

BATAGELJ V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur, DMFA SRS, Ljubljana 1989, 100 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 25)

V zbirki srečamo naloge, s katerimi so se študentje prvega letnika računalništva na Fakulteti za elektrotehniko zadnja leta spopadali pri vajah, kolokvijih in izpitih v prvem semestru pri predmetu Diskretne strukture.

Razpored in tematika je pisana na kožo učnemu načrtu: induktivni razredi, izjavni in predikatni račun, poglavje o teorijah (vključno s semantiko programskih jezikov), množice, relacije in strukture urejenosti, funkcije. Naloge so primerne in so često računalniško obarvane: najdemo vse od preprostih – za utrjevanje pojmov – pa do takih, ki zahtevajo nekaj več bistrca in dobro razumevanje osnovnih konceptov. Veliko teh nalog je originalnih. Prijetna zbirka skratka in vsaj za študente računalništva obvezno branje. Tudi zato, ker se ti študenti zelo težko dokopljejo do zanje najprimernejših nalog: ker nikakor ne znajo brskati (zlasti ne bruci!) po množici tujih knjig, v katerih so tovrstne naloge na široko raztresene. Če pa se že dokopljejo, obupajo nad drugačnim formalizmom, kot ga slišijo na predavanjih, ali pa zato, ker zgledi zahtevajo preveč matematičnega predznanja itd.

Zbirka pomembno zapolnjuje prazen prostor v slovenski literaturi s tega področja. Določena poglavja (zlasti tista najobsežnejša, na primer o množicah ter o relacijah in strukturah urejenosti) bi priporočil tudi študentom prvega letnika matematike. Da pa bi zbirka postala popolnoma vsebinsko zanimiva tudi zanje, bi jo v prihodnje kazalo dopolniti še z nekaterimi temami, kot naprimer aksiom izbire in Zornova lema, kardinalna in ordinalna števila, transfinitna indukcija itd.

Aleksander Malnič

Kemični potencial idealnega plina je $\mu = \mu_o + kT \ln p/p_o$. Nekateri radi zapišejo tudi kemični potencial gostega plina ali raztopine v podobni obliki $\mu = \mu_o + kT \ln f(p,T)/f(p_o,T)$, v kateri ima količina f vlogo nekakega "efektivnega tlaka". Kemiki imenujejo to količino *fugativnost* ("ubežnost") plina ali *aktivnost* ("učinkovitost") topljenca. V resnici nismo s tem pri gostem plinu ali tekočini funkcijske odvisnosti $\mu(p,T)$ nič poenostavili, le težavo smo prestavili iz $\mu(p,T)$ v $f(p,T)$. Poudarili pa smo analogijo z idealnim plinom.

Kam lahko tak način gledanja vodi, pokaže naslednji zgled. V prvem članku o poskusih s hladnim zlivanjem devteronov pri elektrolizi težke vode [1] se da razumeti argumente M.Fleischmanna in S. Ponsa nekako takole: Z električnim potencialom na elektrodi dvignemo kemični potencial vsakega devterona za 0.8 eV in dveh skupaj za 1.6 eV. Temu ustreza efektivni tlak, večji od 10^{26} bar, ki zagotovo devterone dovolj stisne, da se zlijejo.

Govoriti o tlaku 10^{26} bar je seveda nesmiselno. Take tlake srečamo v notranjosti atomskih jeder in v sredici nevtronskih zvezd, ne pa v navadnih kovinah. Za zlivanje tudi zadošča dosti manjši tlak. Zdi se, da sta prišla do tako velikega efektivnega tlaka z zapisano enačbo. Preprost račun da

$$f/f_o = \exp(\Delta\mu/kT) = \exp(1.6\,\mathrm{eV}/8.6\cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVK}^{-1}\cdot 300\,\mathrm{K}) = \exp 62 = 10^{26}$$

Z f_o sta najbrž mislila zunanji tlak 1 bar. Tlak 10^{26} bar so za njima ponavljali še razni časopisi.

Kot vidimo, formalno vztrajanje pri izrazu za idealni plin in poudarjanje analogije med količino f in tlakom nista vzgojna in lahko vodita do neupravičenih sklepov. Bralce vabim, da sami najdejo kak zgled za zmotne sklepe, do kakršnih bi utegnila pripeljati pri kakem drugem pojavu podobna razvada. Pri relativistični dinamiki nekateri radi vztrajajo pri formalnem zapisu Newtonovega zakona $F = d(m(v)v)/dt$, kot da bi šlo za vsakdanje, nerelativistično gibanje in bi za vse relativistične pojave poskrbela *"relativistična masa"* $m(v)$, ki se s hitrostjo zredi.

Mitja Rosina

LITERATURA

[1] M. Fleischmann, S. Pons, *Electrochemically induced nuclear fusion of deuterium*, J. Electroanal. Chem. **261** (1989) 301.

VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 36 (1989) št. 1–6, str. 1–192

Članki – matematika

Stokesov in Gaussov izrek I (Jože Vrabec) 1–12
Stokesov in Gaussov izrek II (Jože Vrabec) 33–43
Ravninska geometrija nekoliko drugače (Peter Legiša) 45–51
Monotone in naraščajoče funkcije v $\mathbb{R}^n$ (Boris Lavrič) 53–56
Razmišljanja o matematiki (Ivan Vidav) 65–69
Tabeliranje implicitnih funkcij (France Avsec) 71–74
Newtonova tangentna metoda v kompleksnem (France Avsec) 97–100

Kongruence z Bellovimi polinomi (Marko Razpet) 101–107
Uvod v računalniške mreže, 1. del (Janez Žitnik) 108–114
Varianta dokaza kvadratnega recipročnostnega zakona (Tatjana Peklar, prir. Milan Hladnik) 129–133
Uvod v računalniške mreže, 2. del (Janez Žitnik) 135–139
Iskanje minima kvadratne funkcije z gradientno metodo (Janez Šparovec) 161–170

Članki – fizika

Zakaj je laserski curek ozek in enobarven? (Martin Čopič) 13–23
Odkritje oscilacij pri nevtralnih mezonih B^0 in $\overline{B^0}$ (Henning Schröder, prev. Mark Pleško) 25–28
Harmonični oscilator v kvantni in klasični mehaniki (Janez Strnad) 57–61
Izmerimo influenčno konstanto (Zlatko Bradač) 75–78
Demonstracijski poskusi iz fizike polprevodnikov (Peter Gosar in Lidija Babič) 79–90
Pot do zveze mase z energijo (Janez Strnad) 115–121
Preskus teorije relativnosti z urami (Janez Strnad) 141–149
Parametri eklipsne spremenljivke (Marijan Prosén) 151–153
Novi trkalnik (Janez Strnad) 171–172
Rast kristalov iz taline (Branislav Čabrić, prev. Janez Strnad) 173–180
Naklon Sončevih žarkov (Marijan Prosén) 181–183
Odgovor — 110 (Marko Razpet) 154–155
Utrinka — Upor – vzgon (Marjan Hribar) IV
Kako lahko pričaramo tlak 10^{26} bar (Mitja Rosina) 192

Vesti

Profesor doktor Ivan Vidav — častni član društva (Niko Prijatelj) 29–30
40. jubilejni občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije (Martina Koman) 31–III
Micromath (Matija Lokar) 52
Znanje brucov matematike (Mirko Dobovišek) 64–III
Novi člani društva v letu 1988 (Ciril Velkovrh) 69
Prešernove nagrade študentom na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo za leto 1988 (Ciril Velkovrh) 91
Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v l. 1988) (Zbral in uredil Milan Hladnik) 91–95
Mednarodno tekmovanje študentov matematike (Aleksandar Jurišić) ... 122–125
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1988 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 126–IV
Nagrade sklada Borisa Kidriča v letu 1988 (Zbral in ur. Ciril Velkovrh). . 156–157
Prof. dr. Josip Globevnik – redni član SAZU (Ivan Vidav) 157
Delo Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1988 (Ciril Velkovrh) 158–159
Profesorici Bogomili Kolenko (Eda Okretič-Salmič) 160
Poročilo o udeležbi na tekmovanju ISTAM 1989 (Miran Černe) 184–188
Profesor Franc David — višji znanstveni svetnik (Ciril Velkovrh) 188

Nove knjige

Group representations, ergodic theory, operator algebras and mathematical physics. Proc. Ed. C. C. Moore (Bojan Magajna) 12
Marek I., Žitny K., Matrix analysis for applied sciences, Vol. 1. and 2. (Milan Hladnik) 24
Kozak J., Lokar M., Naloge iz računalništva (Sandi Klavžar) IV
Murota K., System analysis by graphs and matroids (Bojan Mohar) 43
Kertesz A., Lectures on Artinian rings (Bojan Magajna) 44
Engeler E., Methamathematik der Elementarmathematik (J. Rakovec) 44
Analysis and thermodinamics. A collection of papers dedicated to W. Noll (Slobodan Žumer) 56
Kladnik R., Šolinc H., Zbirka fizikalnih nalog z rešitvemi 1 (Bojan Golli) 62
Küenle H.-U., Stochastische Spiele und Entscheidungsmodelle (Milan Hladnik) 62
Albeverio S. et al., Solvable models in quantum mechanics (Peter Gosar) 63
Day W. A., A commentary on thermodinamics (Slobodan Žumer) 63
Griepentrog E., März R., Differential-algebraic equations and their numerical treatment (Milan Hladnik) 64
Publikacije komisije za tisk DMFA SRS v letu 1988 (Ciril Velkovrh) VIII
Hofmann B., Regularization for applied inverse and illposed problems (Anton Suhadolc) 69–70
Sieber N., Sebastian H.-J., Spezielle Funktionen (Anton Suhadolc) 90
Arnold V. I., Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations (Peter Šemrl) 96
Budinich P., Trautman A., The spinorial chessboard (Janez Strnad) 96–XI
Fundament al astronomy with 399 illustrations including 36 color plates, ed. H. Karttunen (Bojan Ditinjana) XI
Numerical simulation in oil recovery, ed. M. F. Wheeler (Andro Miklić. prev. Georg Mejak) XII
Dubinskij A., Sobolev spaces of infinite order and differetial equations (Georg Mejak) XII
Klinc T., Zapiski predavanj iz matematike (drugi letnik fakultete za strojništvo) (Boris Lavrič) 107
Pahor S., Uvod v analitično mehaniko (Janez Strnad) 114
Terras A., Harmonic analysis on symetric spaces and applications, I. and II. (Neža Mramor-Kosta) 134
Zrimšek D., A, B, (C?) micro-prolog (Matija Lokar) 140
Wallisch W., Hermann M., Numerische Behandlung von Fortsetzungs- und Bifurkationsproblemen bei Randwertaufgaben (Bojan Mohar) 140
Lukeš F. in Dub P., Optical properties of GeS, GeSe, SnS and SnSe (Janez Strnad) 149
Tutschke W., Solutions of initial value problems in classes of generalized analytic functions (Franc Forstnerič) 150
Friedman A., Mathematics in industrial problems (Peter Petek) 160
Bratko I., Prolog in umetna inteligenca (Jernej Kozak) 189–190
Kramar E., Rešene naloge iz linearne algebre (Aleksander Malnič) 190
Batagelj V., Klavžar S., Zbirka rešenih nalog iz diskretnih struktur (Aleksander Malnič) 191
Klavžar S., Mali priročnik operacijskega sistema MS DOS (M. Lokar) 191