

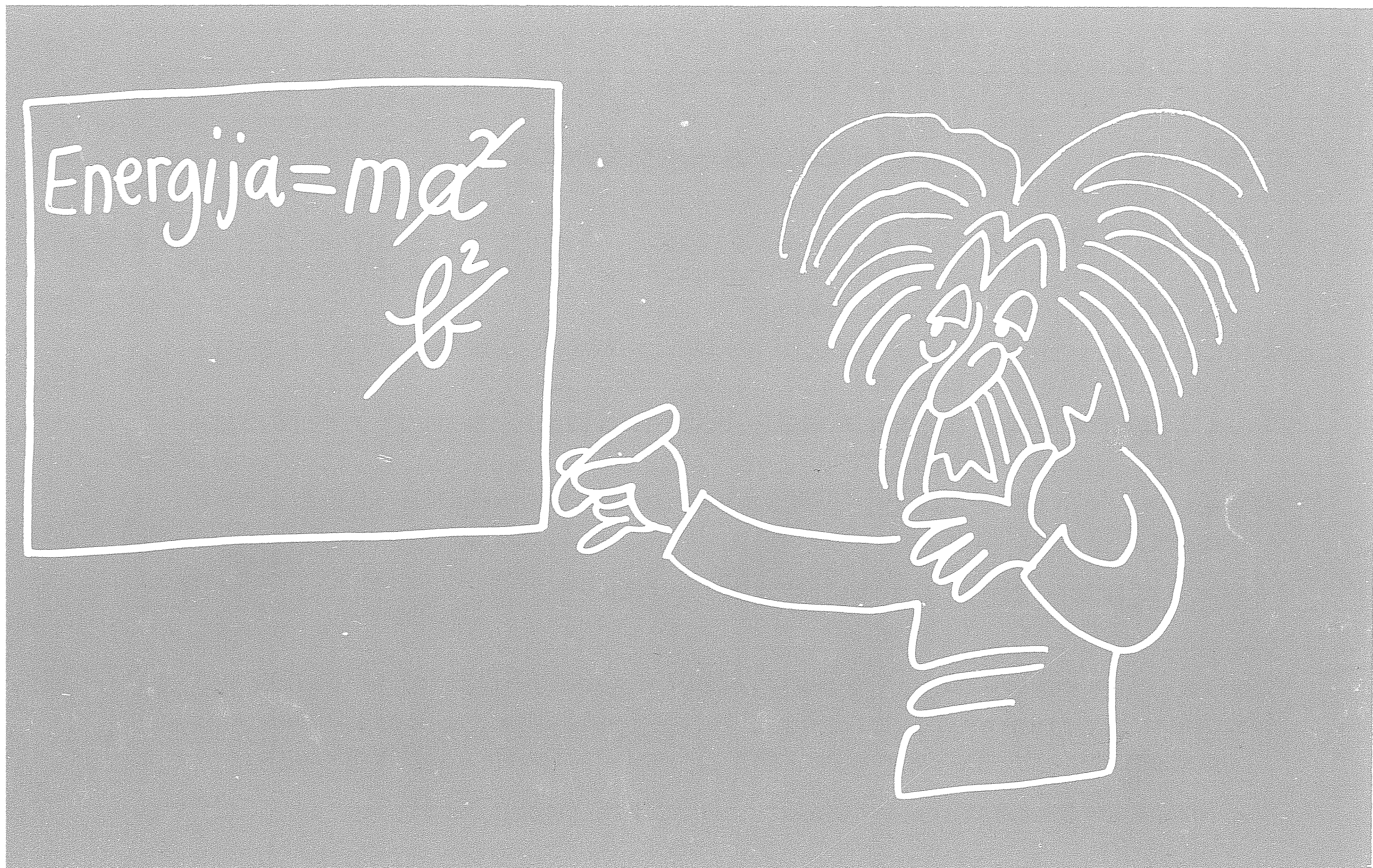
ODV 1 7
JANA

1989

Letnik 36

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 36 – ŠTEVILKA 4
OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 1989

Uredniški odbor: Milan Hladnik – urednik za matematiko, Bojan Mohar – glavni urednik, Janez Strnad – urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkoverh – urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič. Slike Miha Štalec. Računalniško stavil Martin Zemljič.

Naročnina, ki bo vplačana pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije po 1. 7. 1989: za posameznike 70.000.– din (za člane društva je že upoštevana članarina), za dijake in študente 35.000.– din, posamezna številka 10.000.– din, dvojna številka 20.000.– din, stare številke 5.000.– din, za ustanove in v knjigarnah 200.000.– din, za tujino 25 \$.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50200-620-107-257300-5964/4.

Tisk: Tiskarna Kurir v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov.
Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1989 DMFA SRS – 957

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles	Str.–Page
Newtonova tangentna metoda v kompleksnem – Newton tangent method in complex case (France Avsec)	97 – 100
Kongruence z Bellovimi polinomi – Congruences involving Bell's polynomials (Marko Razpet)	101 – 107
Uvod v računalniške mreže, 1. del – Introduction to computer networks. Part 1. (Janez Žitnik)	108 – 114
Pot do zveze mase z energijo – The way to the connection of mass with energy (Janez Strnad)	115 – 121
Nove knjige – New books (Boris Lavrič)	107
Vesti – News	
Mednarodno tekmovanje študentov matematike (Aleksandar Jurišić)	122 – 125
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1988 (Zbral in uredil Ciril Velkoverh) .	126 – IV
Na ovitku: Karikatura k članku na str. 115 (Božo Kos)	

NEWTONOVA TANGENTNA METODA V KOMPLEKSNEM

FRANCE AVSEC

Math. Subj. Class. (1985) 65H05

Tako kot v realnem primeru lahko tudi kompleksno funkcijo $z = z(\lambda)$, implicitno podano z enačbo $f(\lambda, z) = 0$, tabeliramo po Newtonovi tangentni metodi po vsaki poti v kompleksni ravnini, kjer je $f'_z \neq 0$. Uporabnost metode preizkusimo pri reševanju algebraične in transcendentne enačbe.

NEWTON TANGENT METHOD IN THE COMPLEX CASE

As in the real case, a complex function $z = z(\lambda)$, implicitly defined by the equation $f(\lambda, z) = 0$, can be tabulated by Newton tangent method along any path in the complex plane where $f'_z \neq 0$. The method is used in solving an algebraic and a transcendental equation.

0. Uvod

Naj bosta λ in z kompleksni spremenljivki, med katerima obstaja analitična zveza $f(\lambda, z) = 0$, se pravi, da je f analitična funkcija dveh spremenljivk na nekem območju v kompleksni ravnini. Ta enačba implicitno določa funkcijo $z = z(\lambda)$. Vzemimo, da poznamo par kompleksnih števil (λ_0, z_0) , za katerega velja $f(\lambda_0, z_0) = 0$. Funkcija $z = z(\lambda)$ je tedaj regularno analitična v okolici točke λ_0 , če je le $f'_z(\lambda_0, z_0) \neq 0$ (Glej [5]). V primerih, ko se $z(\lambda)$ ne da eksplicitno izraziti, dobimo njene vrednosti po Newtonovi metodi, ki smo jo uporabljali pri tabeliranju realnih funkcij (Glej [1], [2], [3])

$$z_{k+1} = z_k - f(\lambda, z_k) / f'_z(\lambda, z_k)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ Pri absolutno dovolj majhnem koraku tabeliranja v katerikoli smeri kompleksne ravnine je namreč postopek konvergenten pri zelo majhnih omejitvah za funkcijo $f(\lambda, z)$ (Glej [4]).

1. Primer algebraične enačbe

Med mnogimi zanimivimi problemi, kjer bi tabelirali po tej metodi implicitno dano analitično funkcijo, si oglejmo tole nadvse pomembno nalogo.

Poiščimo vse ničle polinoma n -te stopnje

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

kjer so a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, kompleksna števila in $a_n \neq 0$. Da bi rešili ta problem, tvorimo naslednjo funkcijo dveh kompleksnih spremenljivk λ in z

$$f(\lambda, z) = z^n + \lambda a_1 z^{n-1} + \dots + \lambda a_{n-1} z + a_n$$

Očitno pri $\lambda = 1$ velja $f(1, z) = p(z)$, pri $\lambda = 0$ pa dobimo $f(0, z) = z^n + a_n$.

$$f(\lambda, z) = 0 \quad (1)$$

določa implicitno funkcijo $z = z(\lambda)$, ki je pri $\lambda = 0$ rešitev binomske enačbe $z^n + a_n = 0$. Ta ima n različnih rešitev $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, ki jih z lahkoto določimo po de Moivrovi formuli. Naj bo ζ_k ena od teh rešitev. Tedaj je $f(0, \zeta_k) = 0$. Za vsak ζ_k pa je $f'_z(0, \zeta_k) = n\zeta_k^{n-1} \neq 0$, torej eksistira za vsak ζ_k v okolici točke $\lambda = 0$ regularno analitična funkcija $z_k(\lambda)$, ki zadošča enačbi (1). Funkcija $z_k(\lambda)$ je v resnici definirana na celi kompleksni ravnini (λ) razen v končno mnogo točkah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, kjer je $f'_z(\lambda_i, z) = 0$ in $f(\lambda_i, z) = 0$. Nobena od točk λ_i ni enaka nič, saj ima začetna binomska enačba same različne korene. Vzemimo, da so tudi vsi $\lambda_i \neq 1$. Tedaj lahko funkcijo $z_k(\lambda)$ tabeliramo po poljubni poti v kompleksni ravnini, začnši v točki $\lambda = 0$ pa vse do točke $\lambda = 1$. Pri tem moramo paziti, da se izognemo točkam λ_i . Končna vrednost $z_k = z_k(1)$ je eden od iskanih korenov, t.j. ničel polinoma $p(z)$. Pri predpostavki, da za vsak i velja $\lambda_i \neq 1$, se da prepričati, da različni koreni binomske enačbe vodijo do različnih korenov polinoma $p(z)$: ker je v tem primeru $f'_z(1, z_k) \neq 0$, moremo tabelirati implicitno funkcijo $z(\lambda)$, začnši v $\lambda = 1$ z začetno vrednostjo $z(1) = z_k$ po poti, ki se konča pri $\lambda = 0$. Če bi bila dva korena z_k enaka, bi vodila nazaj do enakih ζ_k , to pa ni mogoče.

Tabela 1

λ	$z_1(\lambda)$	$z_2(\lambda)$	$z_3(\lambda)$	$z_4(\lambda)$
0.0	.93060+.93060 i	-.93060+.93060 i	-.93060-.93060 i	.93060-.93060 i
0.1	.87583+.93886 i	-.87583+1.0260 i	-.87583-1.0260 i	.87583-.93886 i
0.2	.81906+.94219 i	-.81906+1.1198 i	-.81906-1.1198 i	.81906-.94219 i
0.3	.76063+.93955 i	-.76063+1.2142 i	-.76063-1.2142 i	.76063-.93955 i
0.4	.70145+.92971 i	-.70145+1.3114 i	-.70145-1.3114 i	.70145-.92971 i
0.5	.64325+.91147 i	-.64325+1.4131 i	-.64325-1.4131 i	.64325-.91147 i
0.6	.58873+.88445 i	-.58873+1.5202 i	-.58873-1.5202 i	.58873-.88445 i
0.7	.54101+.84987 i	-.54101+1.6319 i	-.54101-1.6319 i	.54101-.84987 i
0.8	.50212+.81067 i	-.50212+1.7456 i	-.50212-1.7456 i	.50212-.81067 i
0.9	.47215+.77026 i	-.47215+1.8581 i	-.47215-1.8581 i	.47215-.77026 i
1.0	.44970+.73107 i	-.44970+1.9672 i	-.44970-1.9672 i	.44970-.73107 i

Težava nastopi, če za neki i velja $\lambda_i = 1$. Tedaj je $f'_z(1, z_k) = 0$ in $f(1, z_k) = 0$, kar pomeni, da je z_k večkratna ničla polinoma $p(z)$. V takem primeru moramo zmanjševati korak tabeliranja oziroma računati z večjo natančnostjo. Drug način pa je postopek, ki smo ga za realne funkcije opisali v [3]: Raje rešimo sistem $f(\lambda, z) = 0$, $f'_z(\lambda, z) = 0$, če je le $\partial(f, f'_z)/\partial(\lambda, z) \equiv f'_\lambda f''_{zz} \neq 0$ v točki $(1, z_k)$, saj poznamo dober približek za rešitev sistema, namreč zadnji izračunani par vrednosti v tabeli funkcije $z_k(\lambda)$ (npr. par 0.9, $z_k(0.9)$, če je bil korak tabeliranja 0.1 kot v naslednjem primeru). Primer, ko je $\partial(f, f'_z)/\partial(\lambda, z) = 0$ v točki $(1, z_k)$, moramo obravnavati posebej.

Oglejmo si vse to na posebnem zgledu. Vzemimo polinom

$$p(z) = z^4 + 4z^2 - 3z + 3$$

Rešitve ustrezne binomske enačbe $z^4 + 3 = 0$ so $\zeta_1 = 0.93 + 0.93i$, $\zeta_2 = -0.93 + 0.93i$, $\zeta_3 = -0.93 - 0.93i$, $\zeta_4 = 0.93 - 0.93i$, polinomu $p(z)$ prirejena funkcija pa

$$f(\lambda, z) = z^4 + 4\lambda z^2 - 3\lambda z + 3$$

S tabeliranjem funkcij $z_k(\lambda)$, ki jih določa enačba $f(\lambda, z) = 0$ in začetne točke tabeliranja $(0, \zeta_1)$, $(0, \zeta_2)$, $(0, \zeta_3)$, $(0, \zeta_4)$, dobimo naslednje vrednosti za funkcije $z_k(\lambda)$: (Glej tabelo 1) V zadnji vrsti tabele 1 lahko preberemo vse ničle $z_k = z_k(1)$, $k = 1, 2, 3, 4$, polinoma $p(z)$.

2. Varianta osnovne metode

Možna je še ena različica opisane metode: *implicitno funkcijo $z(\lambda)$, določeno z enačbo $f(\lambda, z) = 0$ in točko (λ_0, z_0) , za katero je $f(\lambda_0, z_0) = 0$, lahko s tangentno metodo zasledujemo po vsej Riemannovi ploskvi, ki ji pripada.*

Oglejmo si to na primeru transcendentne enačbe

$$e^z - 0.2z + 1 = 0 \quad (2)$$

Očitno enačba v realnem nima nobene rešitve, pač pa ima kompleksne korene in to neskončno mnogo, kar bomo kmalu spoznali. V ta namen tvorimo funkcijo

$$f(\lambda, z) = \lambda e^z + 1 - 0.2z \quad (3)$$

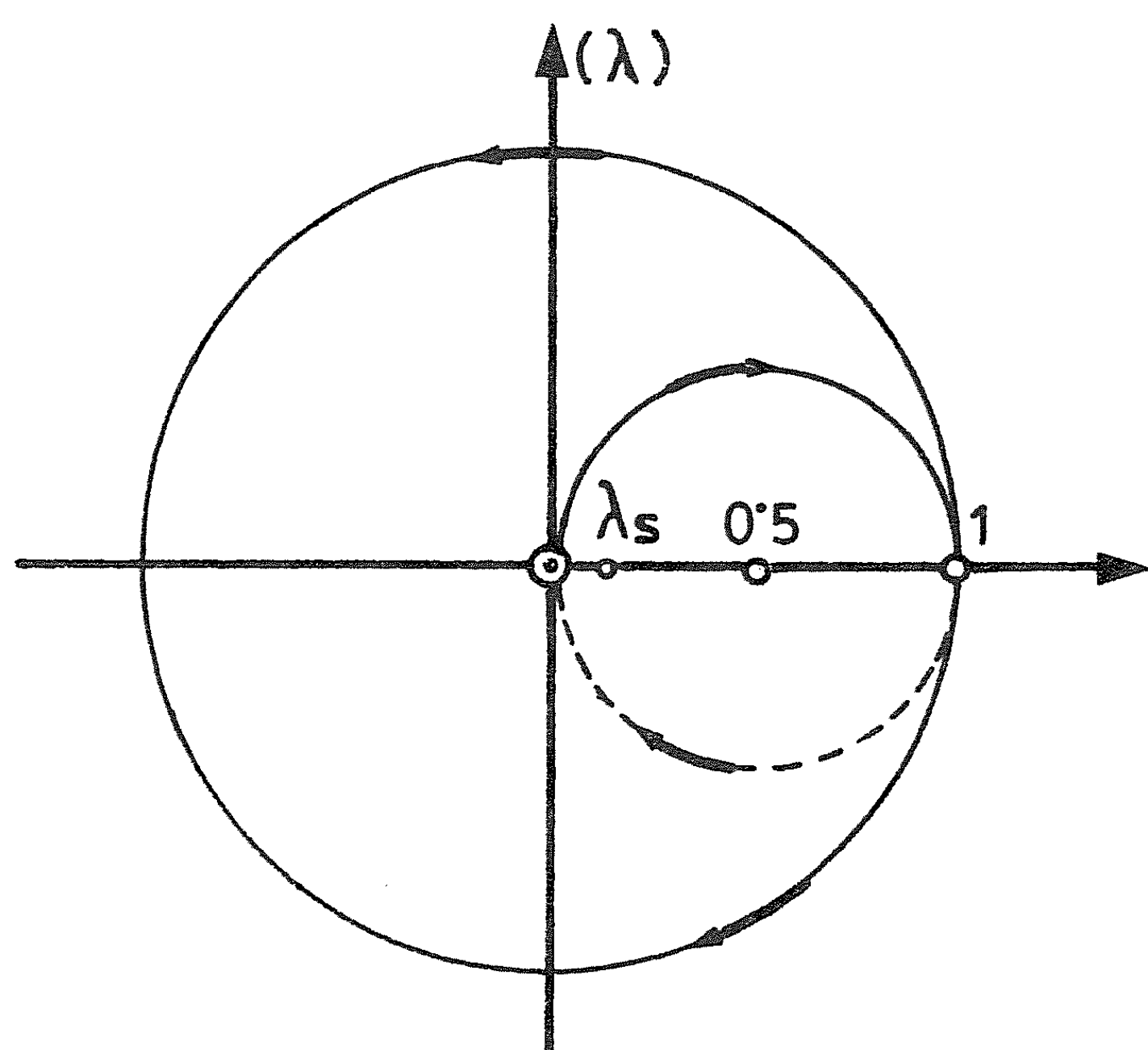
Enačbi $f(\lambda, z) = 0$ zadošča par $\lambda_0 = 0$, $z_0 = 5$. V točki $(0, 5)$ pa je odvod $f'_z = -0.2$. Torej eksistira v okolici točke $(0, 5)$ implicitna funkcija $z(\lambda)$, ki zadošča enačbi $f(\lambda, z) = 0$. Sistem enačb $f(\lambda, z) = 0$, $f'_z(\lambda, z) = 0$ pa določa točko $\lambda_s = 0.0004597 \dots$. To je edina rešitev tega sistema in možno razvejišče funkcije $z(\lambda)$. Če funkcija $z(\lambda)$ pri $\lambda = 1$ obstaja, je $z(1)$ rešitev enačbe (2). Rešitev $z(1)$ potem najdemo tako, da tabeliramo funkcijo $z(\lambda)$, začeniši pri $\lambda = 0$ in s končno postajo pri $\lambda = 1$. Tabelirati pa ne moremo po realni osi, saj pri $\lambda = \lambda_s$ velja $f'_z = 0$. Točki λ_s se namreč moramo pri tabeliranju izogniti. To dosežemo, če funkcijo $z(\lambda)$ tabeliramo npr. po krogu $|\lambda - 0.5| = 0.5$ od $\lambda = 0$ do $\lambda = 1$ (Glej sliko 1). Pa pogledjmo, ali ima enačba (2) še kakšen koren. Če funkcijo $z(\lambda)$ zasledujemo s tangentno metodo v ravnini (λ) , je vrednost $z(1)$, ki jo funkcija $z(\lambda)$ zavzame po vrnitvi v točko $\lambda = 1$, spet koren enačbe (2). Funkcija $z(\lambda)$ namreč na vsej poti identično zadošča enačbi $f(\lambda, z(\lambda)) \equiv 0$. Drugo vrednost za $z(1)$ lahko dobimo le, če tabeliramo funkcijo $z(\lambda)$ po krivulji, ki ograja točko $\lambda = \lambda_s$. Taka krivulja je npr. omenjeni krog $|\lambda - 0.5| = 0.5$. Po tem krogu pa s tabeliranjem ne moremo nadaljevati. Funkcija $z(\lambda)$ je namreč po vrnitvi v $\lambda = 0$ singularna, kar je razumljivo, saj je $z = 5$ edina vrednost, ki zadošča enačbi $f(0, z) = 0$. Pa tabelirajmo $z(\lambda)$ od $\lambda = 1$ naprej po krogu $|\lambda| = 1$ (Glej sliko 1). Ko se pri tabeliranju vrnemo v točko $\lambda = 1$, zavzame funkcija $z(\lambda)$ drugo vrednost $z(1)$, se pravi drugo rešitev enačbe (2). Tabelirajmo funkcijo $z(\lambda)$ po krogu $|\lambda| = 1$ v pozitivni ali negativni smeri; vsakič dobimo ob vrnitvi v točko

$\lambda = 1$ nov koren $z(1)$.

$z(1)$	$z(1)$
$0.1066749 \pm 2.645904 i$	$1.6875143 \pm 26.826394 i$
$0.6324788 \pm 8.336565 i$	$1.8938903 \pm 33.080344 i$
$1.00934304 \pm 14.402044 i$	$2.0656879 \pm 39.344351 i$
$1.4302695 \pm 20.592002 i$	$2.2126431 \pm 45.614125 i$

.....

Tabela 2



Slika 1

Da bo slika popolnejša, si ogledimo še drugo pot do rešitev enačbe (2). Slednje lahko dobimo tudi s tabeliranjem implicitnih funkcij $\zeta_k(\lambda)$, definiranih z enačbo $g(\lambda, z) \equiv -0.2\lambda z + e^z + 1 = 0$ in začetnimi točkami $\lambda_0 = 0$, $z_0 = (2k + 1)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, saj je $g'_z(\lambda_0, z_0) = -1 \neq 0$. Edina realna singularna točka je večja od 1, zato lahko tabeliramo $\zeta_k(\lambda)$ od 0 do 1 kar po realni osi. Nobenih drugih rešitev enačbe (2), razen teh s tabele 2, ne dobimo. To pa je tudi razumljivo, saj so rešitve, dobljene po prejšnji poti, ki pelje preko vseh listov Riemannove ploskve funkcije $z(\lambda)$, tudi vse možne rešitve enačbe (2).

Podobno kot smo rešili enačbo (2), bi lahko poiskali tudi ničle poljubnega polinoma, npr. polinoma, ki smo ga obravnavali prej. Shajali bi lahko že z eno samo rešitvijo pripadajoče binomske enačbe in tabelirali implicitno funkcijo $z(\lambda)$, ki je z njo določena, po različnih poteh, ki ograjajo njena razvejišča. Vsakič, ko bi se vrnili v točko $\lambda = 1$, bi dobili za $z(1)$ ničlo polinoma. S tabeliranjem po vseh možnih poteh bi dobili vse ničle polinoma. V splošnem seveda ta metoda ni tako enostavna kot tista, ki smo jo omenili, saj je razvejišč in s tem vseh možnih poti preveč.

LITERATURA

- [1] F. Avsec, *Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije*, Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 101–105.
- [2] F. Avsec, *Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije*, Obzornik mat. fiz. **33** (1986) 137–144.
- [3] F. Avsec, *Tabeliranje implicitnih funkcij*, Obzornik mat. fiz. **36** (1989)
- [4] A. Ostrowski, *Sbornik rabot pamjati D. A. Grave*, 1940, str. 213
- [5] J. Plemelj, *Teorija analitičnih funkcij*, SAZU, Ljubljana 1953, str. 383

Po avtorjevem rokopisu je članek priredil Milan Hladnik

KONGRUENCE Z BELLOVIMI POLINOMI

MARKO RAZPET

Math. Subj. Class. (1980) 10 A 40

V članku so izpeljane nekatere kongruence, v katerih nastopajo Bellovi polinomi.

CONGRUENCES INVOLVING BELL POLYNOMIALS

In this paper some congruences involving the single variable Bell polynomials are derived.

1. Uvod

Stirlingova števila druge vrste $S_n^{(m)}$ in Bellova števila T_n je avtor v Obzorniku že predstavil ([1]). Tokrat si bomo ogledali nekatere kongruence s števili T_n . Bežno ponovimo osnovne lastnosti števil $S_n^{(m)}$, kjer sta indeksa m in n nenegativni celi števili

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & S_n^{(n)} = 1 \text{ za } n \geq 0 \\ \text{ii)} \quad & S_n^{(m)} = 0, \text{ če je } m > n \text{ in } S_n^{(0)} = 0 \text{ za } n \geq 1 \\ \text{iii)} \quad & S_{n+1}^{(m)} = m S_n^{(m)} + S_n^{(m-1)} \text{ za } n \geq m \geq 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Očitno so števila $S_n^{(m)}$ cela in nenegativna. Števila T_n so definirana kot vsote

$$T_n = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)}, \quad n \geq 0 \quad (1.2)$$

Če vzamemo, da je $0^0 = 1$, potem veljata formuli

$$m! S_n^{(m)} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n \quad (1.3)$$

$$T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad (1.4)$$

Za izračun števil T_n zadnja formula nima posebnega pomena; kasneje si bomo ogledali hitrejšo metodo.

Definirajmo še Bellove polinome $b_n(x)$

$$b_n(x) = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} x^m, \quad n \geq 0 \quad (1.5)$$

Rekurzivna formula iii) v 1.1 takoj prinese osnovno zvezo med Bellovimi polinomi, to je

$$b_{n+1}(x) = x b_n(x) + x b'_n(x), \quad n \geq 0 \quad (1.6)$$

Zaporedje Bellovih polinomov se začne takole

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = x, \quad b_2(x) = x + x^2, \quad b_3(x) = x + 3x^2 + x^3.$$

Očitno je stopnja polinoma $b_n(x)$ enaka n in $T_n = b_n(1)$. Zaporedje števil T_n raste hitreje kot zaporedje naravnih števil. Splošnejši Bellovi polinomi so definirani v [2] in [3].

2. Stirlingov trikotnik druge vrste

Lastnosti (1.1) omogočajo sestaviti številski trikotnik, v katerem so razvrščena Stirlingova števila druge vrste $S_n^{(m)}$. Ta trikotnik se imenuje Stirlingov trikotnik druge vrste, njegov začetek pa je tak

$\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	T_n
0	1									1
1	0	1								1
2	0	1	1							2
3	0	1	3	1						5
4	0	1	7	6	1					15
5	0	1	15	25	10	1				52
6	0	1	31	90	65	15	1			203
7	0	1	63	301	350	140	21	1		877
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	4140

Tabela 1

Vsota elementov v n -ti vrstici je Bellovo število T_n .

3. Kongruence z Bellovimi polinomi

Nekatere lastnosti števil $S_n^{(m)}$ in T_n ter polinomov $b_n(x)$ smo spoznali že v [1], sedaj bomo dodali nekaj novih. Posledica trditve 1 je bila tudi že dokazana, tukaj bomo nakazali nov način izpeljave. Najprej pa nekaj o motivu za študij kongruenc z Bellovimi števili.

Kot je razvidno iz tabele 1, so števila $S_7^{(m)}$ za $m = 2, 3, 4, 5, 6$ vsa deljiva s 7, torej s spodnjim indeksom 7, ki je praštevilo. Dokazali bomo, da so števila $S_p^{(m)}$ za $2 \leq m \leq p - 1$ deljiva s p , če je p liho praštevilo. V ta namen sledi nekaj priprave.

Za vsako realno število x in nenegativno število m definiramo faktorsko potenco takole

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_m = (x)(x-1) \cdots (x-m+1) \quad \text{za } m \geq 1 \quad (3.1)$$

Operator odvajanja funkcije ene spremenljivke označimo z $\mathbf{D}$. Za odvedljivo funkcijo f je torej $(\mathbf{D}f)(x) = f'(x)$. Potence $\mathbf{D}^n$ definiramo na običajni

način: $\mathbf{D}^{n+1} = \mathbf{D}\mathbf{D}^n$; posebej je treba vzeti $\mathbf{D}^0 = \mathbf{I}$, kjer je $\mathbf{I}$ identični operator, to se pravi $(\mathbf{I}f)(x) = f(x)$. Kompozitum dveh funkcij označimo na običajni način s $\circ$, recimo $f \circ g$, $f \circ \exp$.

Trditev 1. Funkcija f naj bo vsaj n -krat zvezno odvedljiva na množici pozitivnih realnih števil. Tedaj velja razvoj

$$(\mathbf{D}^n(f \circ \exp))(x) = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} \exp(mx) ((\mathbf{D}^m f) \circ \exp)(x) \quad (3.2)$$

za $n = 0, 1, 2, \dots$

Dokaz: Uporabimo metodo popolne indukcije in formulo (1.1).

Posledica. Za vsako nenegativno celo število velja razvoj

$$x^n = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)}(x)_m \quad (3.3)$$

Dokaz: V prejšnji trditvi uporabimo funkcijo $f(u) = u^y$, kjer je $u > 0$ in y realen parameter. Tedaj je $(f \circ \exp)(x) = \exp(xy)$ in s tem $(\mathbf{D}^n(f \circ \exp))(x) = y^n \exp(xy)$. Po drugi strani je $(\mathbf{D}^m f)(u) = (y)_m u^{y-m}$ in zato $((\mathbf{D}^m f) \circ \exp)(x) = (y)_m \exp((y-m)x)$. To vstavimo v formulo (3.2), izračunamo levo in desno stran pri $x = 0$ in dobimo

$$y^n = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)}(y)_m$$

Če pišemo namesto y raje x , dobimo formulo (3.3).

Izrek 2. Naj bo p liho praštevilo. Tedaj so Stirlingova števila druge vrste $S_p^{(m)}$ za $m = 2, 3, \dots, p-1$ deljiva s p .

Dokaz: Naj bo p liho praštevilo. Formula (3.3) se v tem primeru glasi

$$x^p = \sum_{m=0}^p S_p^{(m)}(x)_m \quad (3.4)$$

Po Fermatovem izreku je $x^p \equiv x \pmod{p}$ za vsako celo število x (glej na primer [4]). Po formuli (3.4) dobimo za $x = 1, 2, \dots, p-1$ kongruence

$$1^p = 1 = S_p^{(1)}$$

$$2^p = 2S_p^{(1)} + 2 \cdot 1S_p^{(2)} \equiv 2 \pmod{p}$$

$$3^p = 3S_p^{(1)} + 3 \cdot 2S_p^{(2)} + 3 \cdot 2 \cdot 1S_p^{(3)} \equiv 3 \pmod{p}$$

.....

$$(p-1)^p = (p-1)S_p^{(1)} + (p-1)(p-2)S_p^{(2)} + \dots + p!S_p^{(p)} \equiv p-1 \pmod{p}$$

Iz teh relacij dobimo po vrsti $S_p^{(2)} \equiv 0 \pmod{p}$, $S_p^{(3)} \equiv 0 \pmod{p}$, $\dots$, $S_p^{(p-1)} \equiv 0 \pmod{p}$.

Posledica. Za vsako praštevilo p velja kongruenca

$$T_p \equiv 2 \pmod{p} \quad (3.5)$$

Dokaz: Za $p = 2$ je $T_2 = 2$ in kongruenca (3.5) velja. Če pa je p liho praštevilo, dobimo (3.5) iz razvoja

$$T_p = S_p^{(1)} + \sum_{m=2}^{p-1} S_p^{(m)} + S_p^{(p)} = 2 + \sum_{m=2}^{p-1} S_p^{(m)} \equiv 2 \pmod{p}$$

Formulo (3.5) lahko še nekoliko posplošimo. Upoštevajmo, da imajo Bellovi polinomi $b_n(x)$ in njihovi odvodi $b'_n(x)$ cele koeficiente. Za polinoma $p(x)$ in $q(x)$ s celimi koeficienti definirajmo kongruenco po modulu m takole

$$p(x) \equiv q(x) \pmod{m} \iff p(x) - q(x) = m r(x) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}$$

kjer je $r(x)$ polinom s celimi koeficienti.

Izrek 3. Za vsako praštevilo p in vsako nenegativno število n velja kongruenca

$$b_{p+n}(x) \equiv b_{n+1}(x) + x^p b_n(x) \pmod{p} \quad (3.6)$$

Dokaz: Kongruenca (3.6) velja za $n = 0$. Za $p = 2$ dobimo tedaj kar enakost

$$b_2(x) - b_1(x) - x^2 b_0(x) = 0$$

za ostala praštevila pa je po formuli (1.5) in po izreku 2

$$b_p(x) \equiv x + x^p \equiv b_1(x) + x^p b_0(x) \pmod{p}$$

Predpostavimo, da velja kongruenca (3.6) za $n \geq 0$ in praštevilo p ; po formuli (1.6) dobimo

$$\begin{aligned} b_{p+n+1}(x) &= x b_{p+n}(x) + x b'_{p+n}(x) \equiv \\ &\equiv x b_{n+1}(x) + x^{p+1} b_n(x) x b'_{n+1}(x) + p x^p b_n(x) + x^{p+1} b'_n(x) \equiv \\ &\equiv x b_{n+1}(x) + x b'_{n+1}(x) + x^p (x b_n(x) + x b'_n(x)) \equiv \\ &\equiv b_{n+2}(x) + x^p b_{n+1}(x) \pmod{p} \end{aligned}$$

Po principu popolne indukcije velja kongruenca (3.6) za vsako praštevilo p in vsako nenegativno celo število n .

Posledica. Za vsako praštevilo p in vsako nenegativno celo število n velja kongruenca

$$T_{p+n} \equiv T_{n+1} + T_n \pmod{p} \quad (3.7)$$

Dokaz: Kongruenco (3.7) dobimo iz (3.6) za $x = 1$, če upoštevamo, da je $T_n = b_n(1)$ za vsak indeks n .

Izrek 4. Za vsako nenegativno celo število n velja identiteta

$$b_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k(x) \quad (3.8)$$

Dokaz: Identiteto dokažemo z metodo popolne indukcije, pri čemer uporabimo formulo (1.6).

Posledica. Za vsako nenegativno celo število n velja enakost

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k \quad (3.9)$$

Ta formula omogoča izračunati števila T_n brez uporabe Stirlingovega trikotnika druge vrste. Tvorimo trikotnik števil

T_0	1				
T_1	1	1			
T_2	2	3	5		
T_3	5	7	10	15	
T_4	15	20	27	37	52
T_5	52				

Elemente tvorimo po principu: vsota dveh sosednjih števil v stolpcu je število v naslednjem stolpcu, ko pridemo do hipotenuze v številske trikotniku, ustrezeni element prepišemo v prvi stolpec. Na ta način dobimo še $T_9 = 21147$, $T_{10} = 115975$, $T_{11} = 678570$, $T_{12} = 4213597$, $T_{13} = 27644437$.

Izrek 5. Za vsako nenegativno celo število n in vsako praštevilo p velja kongruenca

$$b_{np}(x) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}(x) x^{kp} \pmod{p} \quad (3.10)$$

Dokaz: Za $n = 0$ dobimo namesto kongruence kar enakost, za $n = 1$ pa po izreku 3

$$b_p(x) \equiv b_1(x) + x^p b_0(x) \pmod{p}$$

Torej v teh dveh primerih (3.10) velja. Predpostavimo, da je kongruenca (3.10) pravilna za $n \geq 1$. Po izreku 3 je

$$\begin{aligned} b_{(n+1)p}(x) &= b_{p+np}(x) \equiv b_{np+1}(x) + x^p b_{np}(x) \equiv \\ &\equiv x b_{np}(x) + x b'_{np}(x) + x^p b_{np}(x) \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}(x) x^{kp} + x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k}(x) kp x^{kp-1} + \\
&\quad + x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b'_{n-k}(x) x^{kp} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}(x) x^{(k+1)p} \equiv \\
&\equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n+1-k}(x) x^{kp} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} b_{n+1-k}(x) x^{kp} \equiv \\
&\equiv \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k}(x) x^{kp} \pmod{p}
\end{aligned}$$

S tem smo opravili indukcijski korak, kongruenca (3.10) velja za vsako nene-
gativno celo število n .

Posledica. Za vsako nenegativno celo število n in vsako praštevilo p velja
kongruenca

$$T_{np} \equiv T_{n+1} \pmod{p} \quad (3.11)$$

Izrek 5 lahko še posplošimo. Z metodo popolne indukcije pokažemo

Izrek 6. Za vsako praštevilo p in poljubni celi nenegativni števili n in r velja
kongruenca

$$b_{np+r}(x) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n+r-k}(x) x^{kp} \pmod{p} \quad (3.12)$$

Posledica. Naj bo p praštevilo, n in r pa nenegativni celi števili. Tedaj velja
kongruenca

$$T_{np+r} \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_{r+k} \pmod{p} \quad (3.13)$$

Dokaz: Če vstavimo v (3.12) $x = 1$, dobimo

$$T_{np+r} \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_{n+r-k} \pmod{p}$$

Če sumacijski indeks k nadomestimo z $n - k$ in upoštevamo identiteto $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, dobimo (3.13).

Kongruenci (3.6) in (3.7) najdemo v [2] in [3], tukaj smo ju le nekoliko
posplošili.

Stirlingova in Bellova števila se pojavljajo v kombinatoriki in analizi.
Spadajo v *umbralni račun*. Včasih je bila to spretnost v izpeljevanju raznih
identitet, v novejšem času pa so bili položeni temelji modernega umbralnega
računa. Ta se precej naslanja na funkcionalno analizo.

LITERATURA

- [1] M. Razpet, *Strilingova števila druge vrste*, Obzornik mat. fiz. **35** (1988) 161–171.
- [2] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York 1958.
- [3] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, Wiley, New York 1968.
- [4] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

NOVE KNJIGE

KLINC T., *Zapiski predavanj iz matematike (drugi letnik)*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1988, 385 strani

Naslov obravnavane knjige nam pove precej, a nas utegne zavesti. Pisec je res zbral v njej gradivo, ki ga predava večinoma v drugem letniku na Fakulteti za strojništvo, vendar tako po obsegu kot v podrobnostih sega precej iz okvira predavanj.

Učbenik nadaljuje in se naslanja na delo *Zapiski predavanj iz matematike (prvi letnik)*, o katerem smo poročali v Obzornik Mat. Fiz. **34** (1987) 3. Tudi tu avtor skuša ohraniti matematični slog in navedene trditve podrobno dokazuje; tega pa si na predavanjih že zaradi omejenega obsega ni mogoče privoščiti.

Za merilo in vzor je imel pisec učbenik *Analyse 1,2* avtorjev R. Coutyja in J. Ezre, izdan leta 1981 v Parizu. Oglejmo si nekoliko поблиže vsebino dela in opozorimo na nekatere posebnosti.

V poglavju o vektorskih funkcijah avtor obravnava predvsem zveznost in diferenciabilitynost funkcij med evklidskimi prostori (posebej se loti linearnih operatorjev), poleg tega pa obdela osnove diferencialne geometrije v $\mathbb{R}^3$. Riemannov dvojni in trojni integral definira na Jordanovo merljivih množicah, standardni teoriji pa pridruži še kratek oris nepravih integralov in integralov s parametrom. Tradicionalno obravnavano teorijo krivuljnega in ploskovnega integrala pisec zaključí z elementi klasične vektorske analize. Kar se tiče popolnosti (v tem poglavju), ostaja na nivoju dosedanjih naših učbenikov in zato veljajo opombe, navedene v članku J. Vrabca, *Stokesov in Gaussov izrek I*, **36** (1989) 1. Obsežno, preko sto strani dolgo poglavje iz kompleksne analize je povzeto po Ahlforsovem učbeniku *Complex Analysis* in vključuje teorijo funkcijskih vrst, klasifikacijo izoliranih singularnih točk ter Cauchyjev izrek o ostankih in njegovo uporabo. Krajšemu poglavju o Fourierjevih vrstah sledi uvod v navadne diferencialne enačbe, ki zaključujejo učbenik. Tu avtor poleg klasičnega pregleda preprostih diferencialnih enačb obravnava tudi linearne diferencialne enačbe n -tega reda in izpelje Liouvillovo formulo, izogne pa se eksistenčnim izrekom. Tudi ta razdelek sklene nekaj podrobno obdelanih primerov.

Knjiga, ki je najbrž namenjena študentom na fakulteti za strojništvo, bo dobrodošla širšemu krogu bralcev, predvsem študentom tehničnih in naravoslovnih fakultet.

Boris Lavrič

UVOD V RAČUNALNIŠKE MREŽE 1. del

JANEZ ŽITNIK

Math. Subj. Class.(1985) : 68 M 10

V prvem delu prispevka opišemo računalniške mreže, topologije mrež in postopke za prenos podatkov. V drugem delu nadaljujemo opis postopkov za prenos podatkov. Pojasnimo tudi vlogo protokola za prenos podatkov.

INTRODUCTION TO COMPUTER NETWORKS part 1

In the first part of the article the computer networks, their topologies and the methods of data transmission are described. The second part continues with the explanation of data transmission and the description of the protocol.

Uvod

Računalniška mreža je skupina računalnikov, ki so med seboj povezani s komunikacijskimi linijami. Nekateri računalniki delujejo kot uporabniški sistemi, drugi pa kot komunikacijski računalniki. Prvo skupino sestavljajo glavni ali centralni računalniki (host computers) in oddaljeni uporabniški računalniki (remote computers). Na glavnih računalnikih potekajo obsežnejši procesi (izvajanje skupnih obdelav, vzdrževanje skupnih baz podatkov, del nadzora nad procesi v mreži in še kaj). Na teh računalnikih so tudi programi in podatki, ki so zanimivi za veliko uporabnikov. Oddaljeni računalniki so nameščeni pri posameznih uporabnikih in so s komunikacijskimi linijami povezani med seboj in tudi z enim ali več glavnimi računalniki. Izvajajo procese, ki bi jih sicer moral izvajati za posamezne uporabnike eden od glavnih računalnikov. To so na primer zajem podatkov na več mestih, del obdelave podatkov in še kaj. Glavni računalnik in oddaljeni računalniki lahko delujejo vsak v svojem lokalnem načinu pod lastnim operacijskim sistemom in hkrati sodelujejo v procesih v mreži. Seveda potrebujejo zato ustrezno programsko opremo, ki podpira delovanje mreže. Komunikacijski računalniki nadzorujejo komunikacijske linije, prenos podatkov in sporočil ter zbiranje podatkov. Danes imajo kot komunikacijski in uporabniški računalniki že pomembno vlogo mini in mikror računalniki.

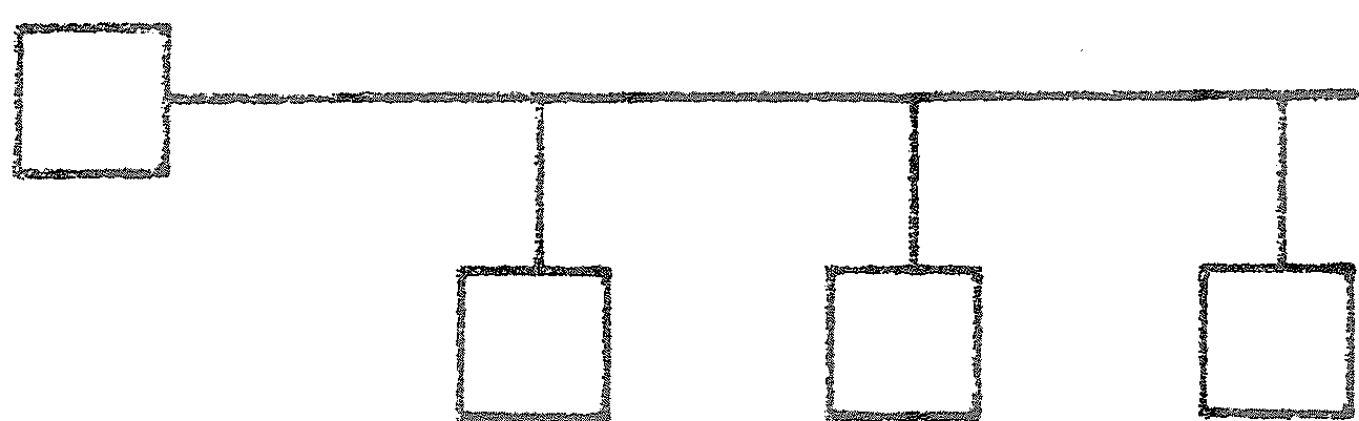
Računalniška mreža ima več prednosti pred popolnoma centraliziranim sistemom. Z ustrezno delitvijo dela lahko mreža manjših računalnikov mnogo hitreje izvede izbran posel, kot bi ga sicer obdelal centralni večuporabniški in večopravilni sistem. Če postanejo zmogljivosti mreže za obstoječe zahteve premajhne, se da mreža navadno razširiti, ne da bi bile pri tem potrebne obsežnejše spremembe strojne in programske opreme. Topologijo mreže navadno določa razporeditev posameznih poslov. Oddaljeni miniračunalniki so nameščeni tam, kjer je posel in kjer nastajajo podatki. Eden izmed vedno močnejših razlogov, zaradi katerih računalnike povezujejo v mreže, je centralizacija množice podatkov in programske opreme. Tako lahko vsak član mreže uporablja oddaljene baze podatkov, programe in celo naprave, ki so v mreži.

1. Topologije računalniških mrež

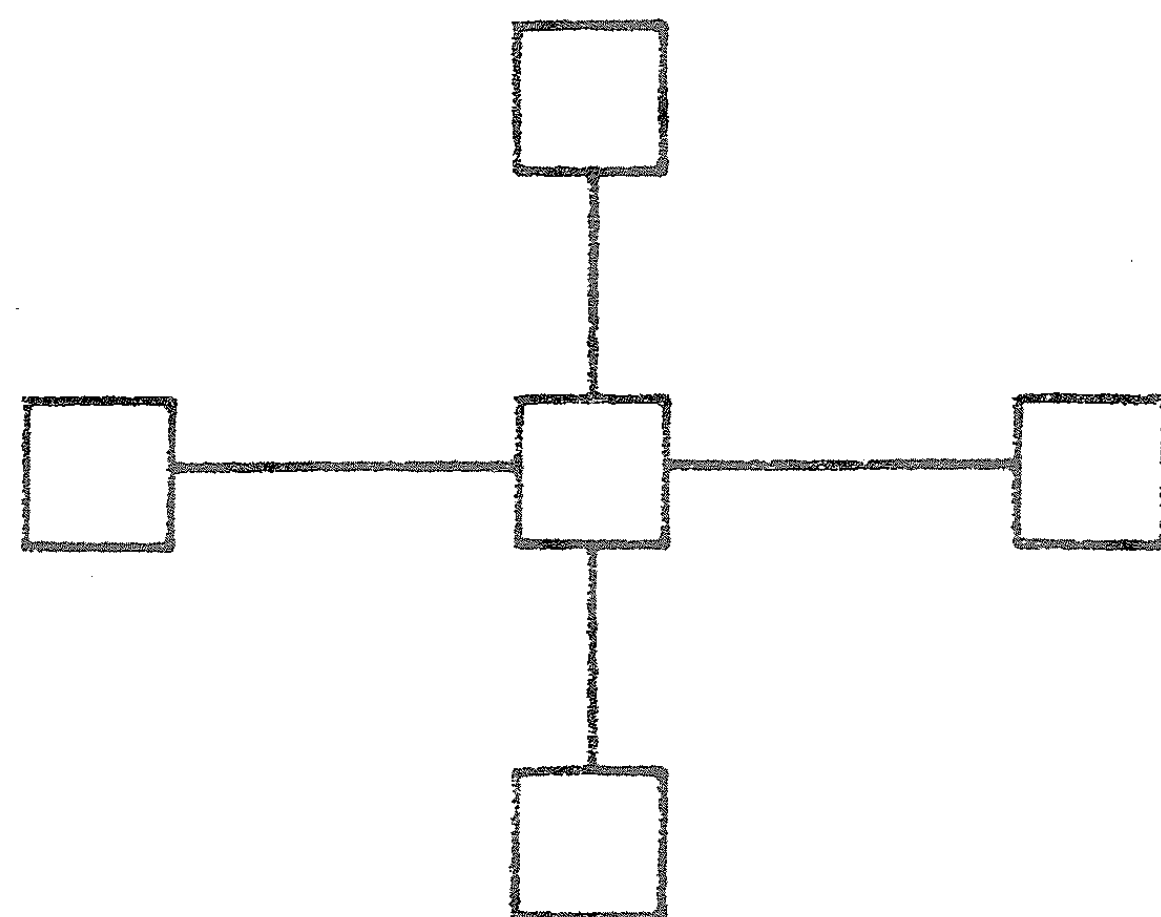
Topologija mreže opisuje prostorsko razporeditev uporabnikov - vozlišč v mreži in povezav med njimi. Povezava je komunikacijska linija med dvema vozliščema, po kateri poteka prenos podatkov in sporočil. Včasih jo imenujemo

tudi kar linija ali kanal. Vozlišče predstavlja samostojno, zaključeno mesto na katerikoli veji v mreži ali priključek, ki je skupen dvema ali več vejam. V vozlišču imamo lahko uporabniški računalnik, računalnik, ki opravlja naloge, povezane s komunikacijo v mreži, ali pa terminal. Topologija same računalniške mreže je odvisna od zasnove mreže in procesov, ki bodo potekali v njej. V popolnoma distribuirani mreži vodi od vsakega vozlišča več povezav. V preprostejših mrežah so posamezna vozlišča povezana samo z glavnim računalnikom v mreži, med seboj pa ne. Vsako vozlišče v mreži je lahko uporabnik in posrednik programov in podatkov iz drugih vozlišč. Zato je treba pri načrtovanju topologije mreže vsa ta dejstva upoštevati. Če so v mreži vozlišča večinoma le uporabniki centralno zbranih podatkov, bo mreža največkrat organizirana centralno. Kadar pa so vozlišča uporabniki in posredniki podatkov hkrati, je mreža največkrat distribuirana.

Ena od topologij je mreža s skupnim vodilom, v kateri je na eno linijo priključenih več podrejenih računalnikov in samostojnih terminalov. Linijo nadzoruje glavni računalnik, na katerem potekajo tudi nekateri procesi, pomembni za druge uporabnike. Na glavnem računalniku so tudi skupne baze podatkov. Struktura take mreže je prikazana na sliki 1.



Slika 1 Mreža s skupnim vodilom



Slika 2 Zvezdasta mreža

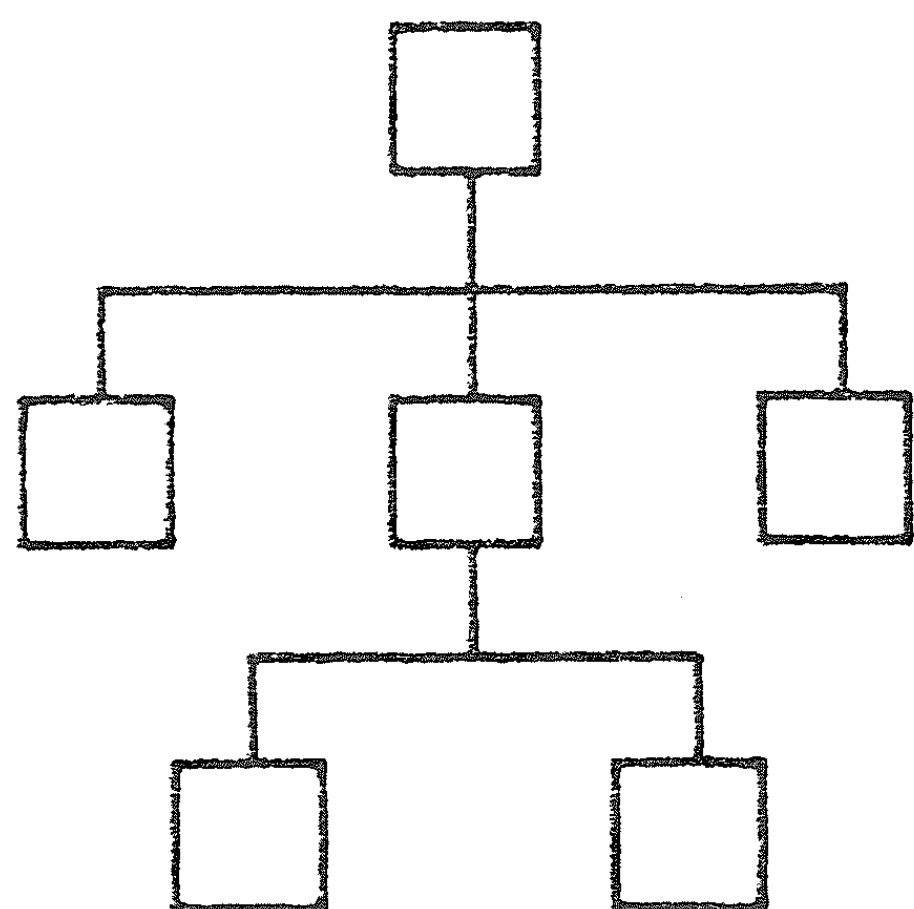
Posamezni uporabniki s svojo opremo pošiljajo in sprejemajo informacije s posredovanjem glavnega računalnika ali posebnega nadzornega računalnika, ki upravlja pretok informacij po komunikacijski liniji. Posamezni uporabniki navadno med seboj ne morejo komunicirati.

Centralizirana mreža zvezdastega tipa, ki jo pojasnjuje slika 2, je organizirana okrog glavnega vozlišča. Nanj so vsak s svojim kanalom priključeni podrejeni uporabniki. Računalnik v centralnem vozlišču nadzoruje pretok informacij v mreži in deluje kot posrednik pri prenosu podatkov med dvema uporabniškima računalnikoma, ki sta v posameznih vozliščih mreže. Zaradi relativno preproste strukture lahko centralno organizirano mrežo dovolj učinkovito nadzorujejo.

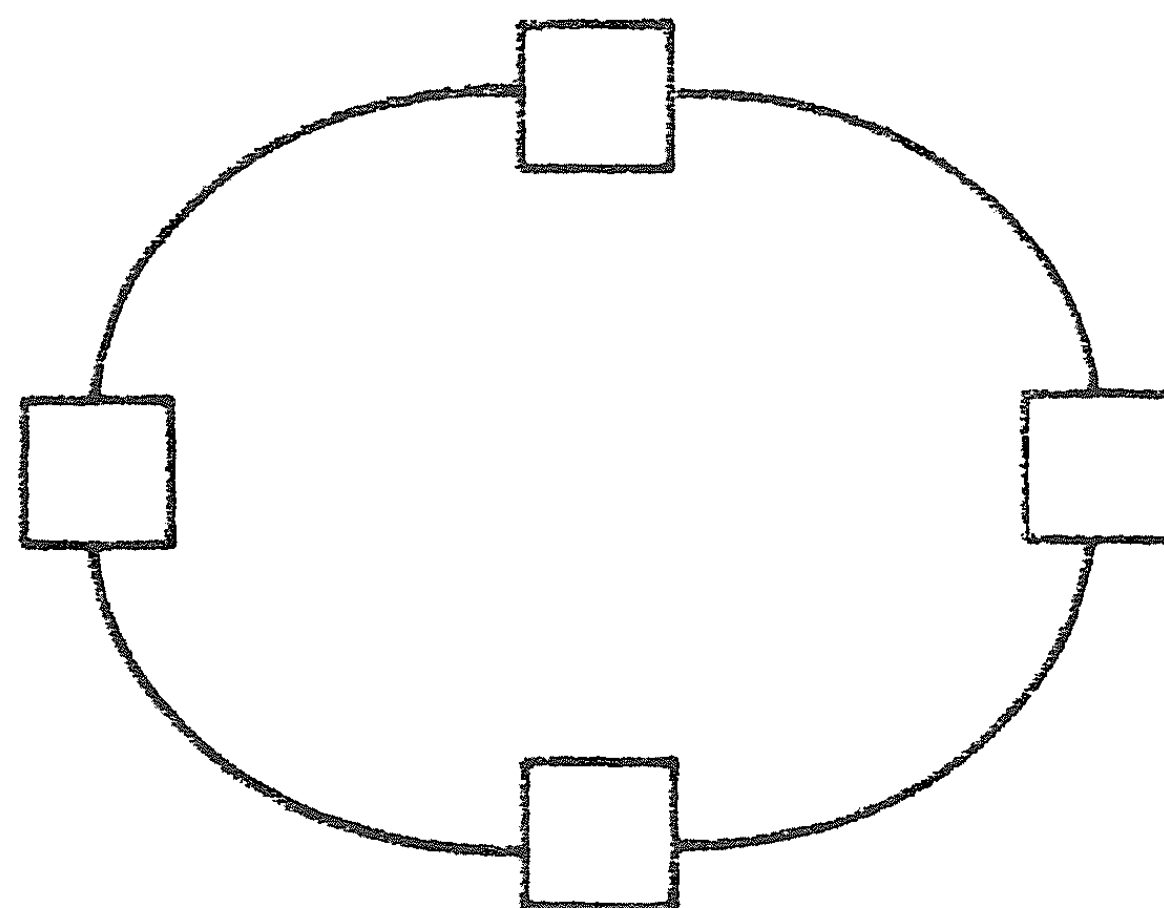
Hierarhična ali drevesno strukturirana mreža je tista, pri kateri imajo posamezna vozlišča različno hierarhijo. Zgradbo mreže vidimo na sliki 3.

Na najvišjem nivoju je računalnik, kjer potekajo najzahtevnejši in najboljsežnejši procesi. Na nižjih nivojih so v vozliščih računalniki, ki povezujejo višji nivo z nižjimi nivoji, registrirajo procese, ki tam potekajo in

zbirajo tam nastale podatke. Te pošiljajo v računalnik na višjem nivoju, ki jih obdela. Take mreže pogosto uporabljajo za nadzor in krmiljenje proizvodnih procesov. Tedaj so na najnižjem nivoju nameščeni procesno orientirani mini ali mikroračunalniki, ki neprestano nadzorujejo in krmilijo posamezne faze proizvodnega procesa.



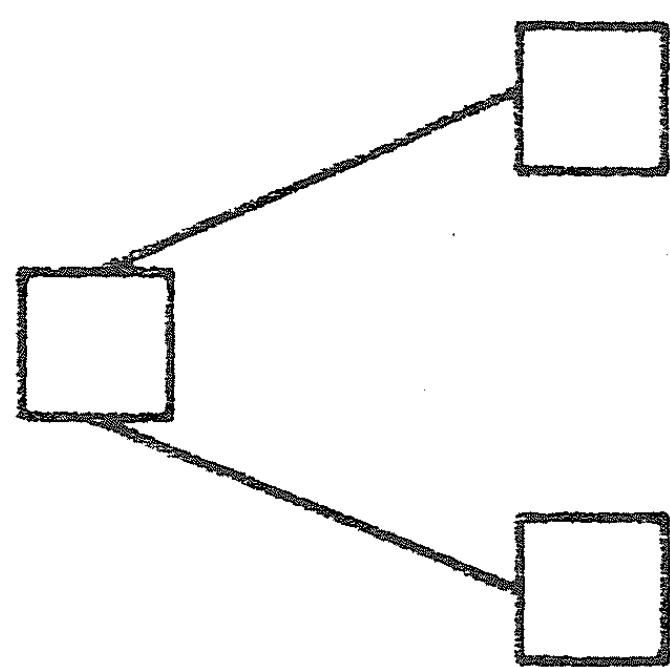
Sl. 3 Hierarhično organizirana mreža



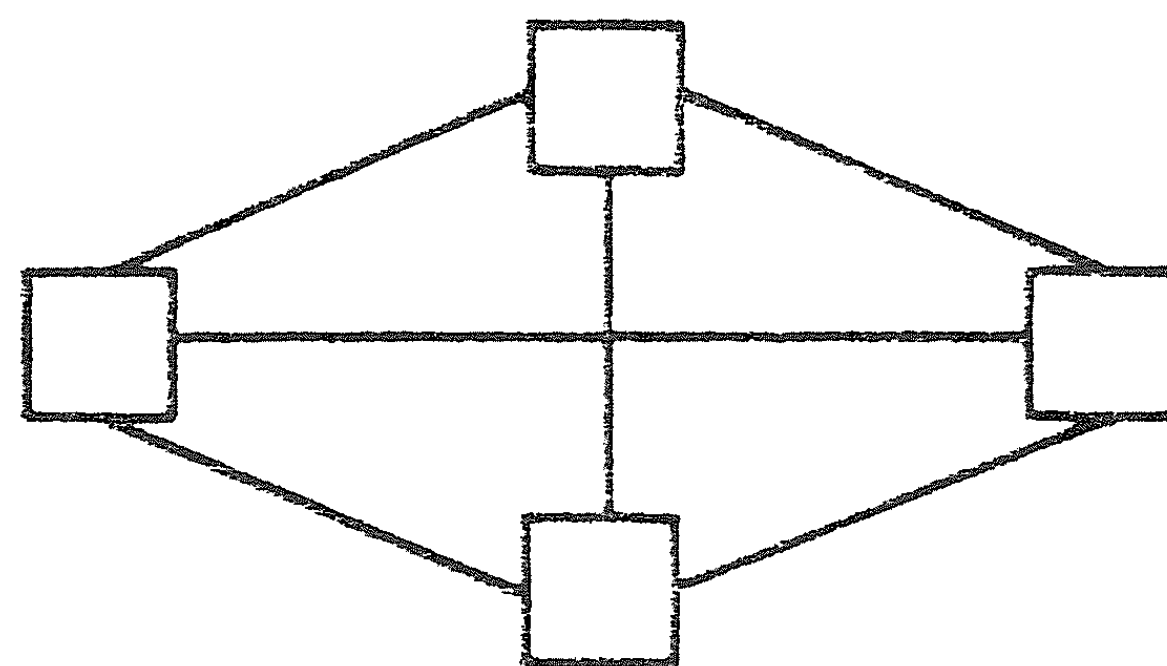
Sl. 4 Zanka

Ena izmed topologij računalniške mreže je tudi zanka (sl.4). Podatki v zanki potujejo od računalnika do računalnika. Tako organizirana mreža je uporabna takrat, ko so posamezni uporabniški računalniki drug blizu drugega. Mrež takega tipa največkrat ne moremo prav učinkovito nadzorovati. Izpad enega vozlišča navadno prekine povezave v mreži.

Distribuirana mreža ali večkratna zvezda je mreža, v kateri imamo več distribucijskih vozlišč. V vsako vozlišče so priključeni različni terminali, ki lahko komunicirajo z drugimi takimi vozlišči. Vsako distribucijsko vozlišče je tam, kjer je večina terminalov. Obliko distribuirane mreže prikazuje slika 5.



Sl. 5 Distribuirana mreža



Sl. 6 Popolnoma distribuirana mreža

Pravilno zgrajena distribuirana mreža deluje zanesljivo. Ob izpadu enega vozlišča drugi uporabniki še vedno delujejo nemoteno.

Izboljšana izvedba distribuirane mreže je popolnoma distribuirana mreža (Sl. 6), v kateri je vsako vozlišče povezano z več sosednjimi vozlišči. Dodatne komunikacijske linije povečajo zmogljivost in tudi zanesljivost delovanja mreže. Slaba stran popolnoma distribuirane mreže je v tem, da je upravljanje z njo zelo zahteven postopek; zanj je potrebna draga in obsežna programska oprema.

2. Pošiljanje sporočil in prenos podatkov

2.1. Načini pošiljanja sporočil

Za pošiljanje sporočil v izbrano vozlišče uporabljajo tri glavne načine. To so:

- komutiranje linij, pri katerem se vzpostavi linija med dvema vozliščema. Fizične lastnosti linije se ne spreminjajo, dokler traja prenos informacij. Pri komutirani liniji je zveza vzpostavljena določen čas, hitrost prenosa informacij pa je odvisna od lastnosti kanala. Tipičen primer je PTT mreža. Lastnosti kanala niso vedno enake, saj pri vsakem izbiranju istega sprejemnega mesta podatki potujejo največkrat po drugi fizični liniji;

- komutiranje sporočil poteka tako, da se na osnovi izbranega algoritma poišče in uporabi tisti kanal, ki povezuje dve točki, po katerem poteka prenos sporočil optimalno. Kriteriji za izbiro kanala so cena za prenos sporočila, število vozlišč, preko katerih potuje sporočilo, in še nekateri drugi. Vsako sporočilo ima pri takem prenosu na začetku naveden naslov sprejemnika;

- komutiranje paketov je zelo podobno komutiranju sporočil, le da je vsako sporočilo razdeljeno na več blokov vnaprej izbrane dolžine. Vsak paket vsebuje podatke o naslovniku. Pri prenosu s komutiranjem paketov nastajajo različne zakasnitve med posameznimi paketi, ki jih sprejme naslovnik. Zakasnitve so odvisne od trenutne situacije v mreži, ki določa tudi izbiro najugodnejše prenosne poti. Vsako vozlišče, ki posreduje sprejeti paket, shrani kopijo sprejete vsebine paketa toliko časa, dokler od naslednjega vozlišča ne dobi potrditve, da je bil paket prenesen brez napake.

Za prenos podatkov uporabljajo poleg fiksnih linij tudi javno telefonsko PTT mrežo. Zaradi vedno večjih potreb so se pojavile posebne mreže za prenos podatkov, v katerih so komunikacijske linije uporabniku na razpolago le med prenosom njegovih podatkov. Prenos po takih linijah je navadno dosti boljši kot prenos po najetih ali javnih PTT linijah. Prenos podatkov je za uporabnika cenejši, saj plača linijo le za čas prenosa podatkov.

2.2. Komunikacijski sistem

Podatke prenašajo po mrežah z različnimi postopki. Pri vsaki vrsti prenosa pošiljamo sporočila kot električne signale primerne oblike od oddajnika na enem krajišču telekomunikacijske linije do sprejemnika na drugem krajišču. Telekomunikacijski sistem v glavnem sestavlja pet elementov, vsak s svojo specifično funkcijo.

- izvor podatkov (računalnik ali terminal), ki kreira sporočila ali skupine podatkov. Informacijo mora sprejeti naslovnik;

- oddajnik informacije (modem) predela (modulira) sporočilo v tako obliko, ki je primerna za prenos po komunikacijskem kanalu. Pri komunikacijah med računalniki predela modem digitalno kodirane signale v primerno modulirane analogne signale;

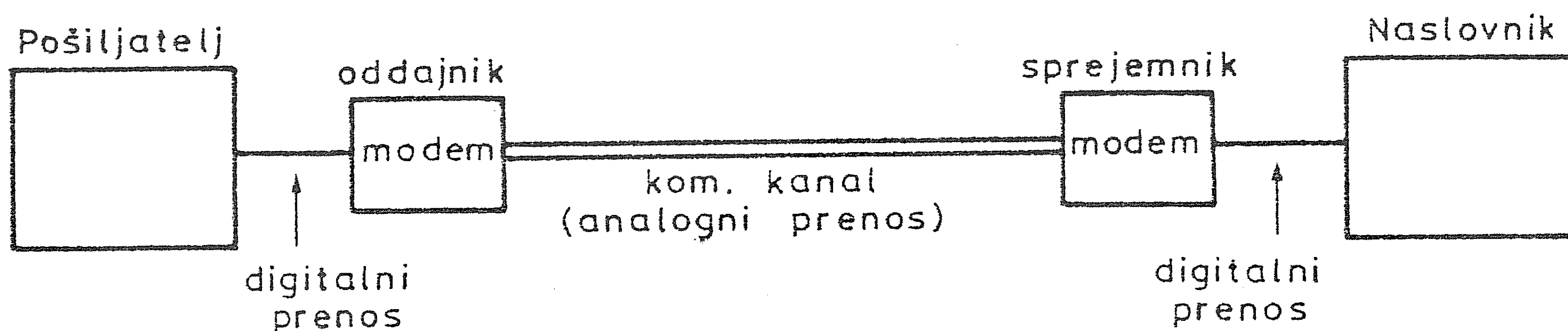
- komunikacijski kanal je fizična linija, po kateri teče prenos podatkov. Največkrat je komunikacijska linija kar telefonska linija;

- sprejemnik informacije (modem) sprejme signal in ga predela

(demodulira) v obliko, ki jo lahko naslovnik obdeluje naprej;

- naslovnik (računalnik, terminal) sprejme sporočila ali podatke in na podlagi sprejetih informacij izvaja različne procese.

Funkcionalno zgradbo sistema za dvosmerno komunikacijo prikazuje slika 7.



Sl. 7 Telekomunikacijski sistem

Modem (modulator/demodulator) deluje lahko kot sprejemnik in oddajnik hkrati. Med izvorom podatkov in oddajnikom ter med sprejemnikom in naslovnikom poteka prenos podatkov v digitalni obliki, podatki, ki se pretakajo po komunikacijskem kanalu, pa so preoblikovani v analogne signale. Glede na smer prenosa uporabljajo tri osnovne načine povezav. Prvi je enosmerni (simpleks) prenos, pri katerem se podatki prenašajo samo v eni smeri. Ena naprava je vedno oddajnik, druga pa vedno sprejemnik. Drugi način je izmenično dvosmerni (half duplex - HD) prenos. Tu se prenašajo informacije sicer v obe smeri, vendar ne istočasno. Nobena izmed naprav ne more hkrati sprejemati in oddajati podatkov. Pri tretjem, popolnoma dvosmernem (full duplex - FD) prenosu poteka prenos informacij v obe smeri. Zato sta potrebna dva, med seboj neodvisna komunikacijska kanala.

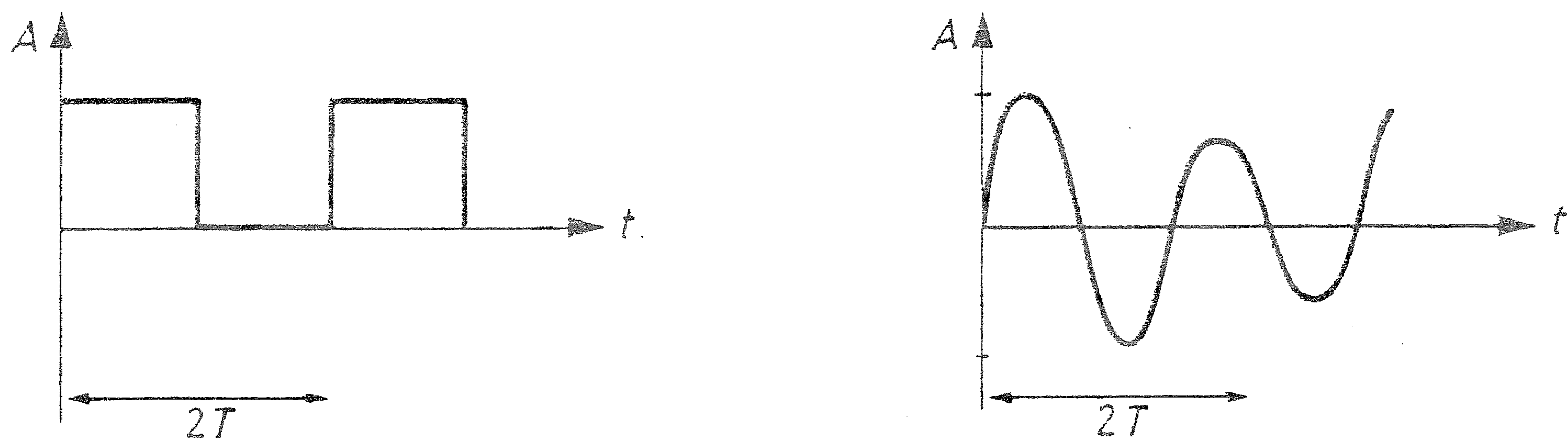
Komunikacijska oprema, ki izmenjuje podatke, je največkrat na različnih mestih. Med mesti, ki so v razdalji do nekaj deset metrov, prenašajo signale v digitalni obliki. Za prenos na večje razdalje skoraj vedno uporabljajo analogne digitalno modulirane signale.

Prenos informacij po liniji lahko poteka v osnovnem pasu (Baseband), kjer je na liniji konstantna napetost. Sprememba napetosti z višje na nižjo vrednost predstavlja sprejem bita 1, obratna sprememba pa sprejem bita 0. Pri prenosu signalov po telefonskih linijah se srečamo z omejitvami zaradi omejenega frekvenčnega pasu, v katerem poteka prenos, in s popačenji, ki nastanejo zaradi zvezno porazdeljenih kapacitivnosti, induktivnosti in ohmske upornosti. Zaradi upornosti je telefonska linija tudi dušena in neprimerna za prenos digitalnih signalov, ker jim zmanjša amplitudo in jih popači. Običajni dvožilni telefonski kabel je zelo občutljiv za električne motnje. Tem se izognejo tako, da ovijejo eno žico okrog druge. Večkrat uporabijo namesto telefonskega kabla koaksialni kabel, ki ima žilo ovito z zaščitnim pletenim oklopom. Ta zmanjša vpliv zunanjih električnih motenj.

Poleg prenosa v osnovnem pasu uporabljajo tudi prenos z moduliranim nosilcem signala (Broadband). Informacije potujejo po liniji kot oscilacije, podobne radijskim ali televizijskim valovom, le da potujejo po površini kabla. Pri

prenosu sporočil z moduliranim nosilcem mora imeti vsaka postaja tudi sklop za modulacijo in demodulacijo signala. Prenos lahko poteka tudi po več frekvenčnih pasovih (logičnih kanalih) naenkrat. Za linije uporabljajo koaksialne kable ali optična vlakna. Svetlobni vodniki dajejo za zdaj najboljše rezultate. Imajo veliko uporabno frekvenčno področje in so neobčutljivi za zunanje električne motnje. Med linijami ni presluha. Zaradi svoje konstrukcije zavzemajo zelo malo prostora, njihovo vzdrževanje je nezahtevno in poceni. Žal so dosti bolj primerni za prenos digitalnih kot analognih signalov. Na vsakih nekaj kilometrov potrebujejo tudi repetitorje za „osvežitev“ signala. Ker so nekateri problemi pri digitalizaciji analognih signalov, kot je govor in audio ter video signali, še nerešeni, svetlobnih vodnikov še ne uporabljajo pogosto.

Hitrost prenosa informacij po kanalu merimo v bitih na sekundo in v baudih. Enota za hitrost prenosa v bitih na sekundo ne potrebuje posebne razlage. Pojasnimo še enoto baud. Pri običajnem analognem prenosu je vsak bit na liniji predstavljen z analognim periodičnim (sinusnim) signalom ustrezne amplitude. Naj bo amplituda analognega periodičnega signala A in perioda T (Sl. 8). Čas T je trajanje enega pulza, obratna vrednost $1/T$ pa pove, kolikokrat se na sekundo spremeni amplituda signala in kakšna je hitrost prenosa izražena v baudih.



Sl. 8 Digitalni in analogni pravokotni signal

Obe enoti se ujemata tedaj, ko vsakemu pulzu ustreza en bit. Včasih pakirajo posamezne bite v pare - dibite. Vsak izmed možnih dibitov (00,01,10,11) generira na liniji signal z drugačno amplitudo. Sedaj se med eno spremembo amplitude signala preneseta dva bita. Zato pri takem načinu prenosa hitrosti npr 1200 bit/s ustreza hitrost 600 baudov.

Pri prenosu informacij na razdaljah do nekaj sto metrov so uporabne hitrosti od 1200 bit/sek do kakih 9600 bit/sek, pri čemer je treba signale primerno ojačiti. Pri razdaljah od nekaj sto metrov do nekaj deset kilometrov lahko še poteka prenos digitalnih signalov po kovinskih vodnikih ob uporabi modemov, ki delujejo v osnovnem frekvenčnem pasu in so z linijo povezani neposredno brez galvanske ločitve (t.j. baseband modemi). Hitrost 1200 bit/sek uporabljajo pri deset kilometrskih razdaljah, na manjših pa tudi prenos s hitrostjo do 19200 bit/sek. Na velike razdalje prenašajo skoraj izključno analogne, digitalno modulirane signale. Največje hitrosti prenosa so tudi nekaj sto tisoč bitov na sekundo.

LITERATURA

- 1 Black U.D., *Data Communications, Networks and Distributed Processing*, Reston Co., Reston 1983.
- 2 Chorafas D.N., *Designing and Implementing Local Area Networks*, McGraw-Hill, New York 1984.
- 3 Martin J., *Computer Networks and Distributed Processing*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs 1981.

NOVE KNJIGE

Pahor S., Uvod v analitično mehaniko (Matematika-fizika ; 30)

Študenti fizike vseh smeri razen pedagoške in meteorološke poslušajo v petem semestru predavanje iz analitične mehanike. Za ta predmet doslej ni bilo domačega učbenika in so si morali študenti pomagati s tujimi. To jim je jemalo precej časa in jih motilo pri sprotnem študiju. Sergej Pahor je z učbenikom *Uvod v analitično mehaniko* izpolnil vrzel. Knjigi s (60) stranmi se pozna, da je nastala po predavanjih, saj se po obsegu ravna po razpoložljivem času. Na prvi pogled se ne razlikuje od standardnih knjig te vrste. Predgovoru sledijo poglavja: 1. Kinematika in dinamika točkastega telesa, 2. Linearne vektorske funkcije, tenzorji in splošno vrtenje kartezičnega koordinatnega sistema, 3. Sistem točkastih teles, 4. Togo telo v Newtonovi formulaciji, 5. Konfiguracijski prostor in Lagrangeova formulacija gibalnih enačb, 6. Majhna nihanja okrog stabilne ravnovesne lege, 7. Vrtavka po Lagrangeu, 8. Hamiltonova formulacija gibalnih enačb, 9. Integralska formulacija gibalnih enačb in kanonske transformacije, 10. Hamilton-Jacobijeva enačba in 11. Poissonovi oklepaji.

Podrobnejši pregled pa pokaže nekatere odlike knjige. Vsako trditev skrbno izpelje, tako da v njej ni ohlapnih ali napačnih trditev. Celo v nekaterih znanih učbenikih najdemo pri Hamiltonovem variacijskem načelu neumestno trditev, da ima časovni integral Lagrangeove funkcije ekstrem ali celo minimum. V resnici je zgolj prva variacija funkcionala enaka nič. Zaradi tega je delež računov v primeri z deležem besedila večji kot v drugih podobnih knjigah. Na oddelku, ki vzgaja tudi industrijske fizike, morda kateremu študentu taka zasnova ne bo pogodu. Vendar se zdi ugodno, če vsi študenti pridejo v stik z analitično mehaniko, kakršno na angleških univerzah štejejo k matematiki. Tistim, ki se bodo usmerili v teorijsko raziskovalno delo, bo to še posebej koristilo. Zadnje poglavje nakaže povezavo med klasično in kvantno mehaniko, kar se zdi na tej ravni koristno in sodobno.

Na nekaterih mestih zagovarja pisec zanimive poglede, ki pa se zdijo povezani z okusom. Newtonov zakon zanj velja v vseh opazovalnih sistemih, inercialnih in neinercialnih, ker je to povezava med fizikalnimi količinami, povezave pa so »lastnost teh količin in ne koordinatnih sistemov«. V inercialnih sistemih so le časovni odvodi baznih vektorjev enaki nič, to pa ne velja v neinercialnih.

Knjiga odraža jasno stališče, ki si ga je pisec pridobil po dolgotrajnem delu s študenti. Pahorjevo knjigo je mogoče priporočiti razmeroma širokemu krogu fizikov in matematikov. Študentom, ki bodo izida najbolj veseli, je ni treba posebej priporočati.

Janez Strnad

POT DO ZVEZE MASE Z ENERGIJO

JANEZ STRNAD

PACS a0330+c

Ena od najznamenitejših enačb fizike $W = mc^2$, ki povezuje maso z energijo, ima več kot stoletno zgodovino, čeprav posebna teorija relativnosti še ni praznovala devetdesetletnice. Njene osnove izvirajo iz elektrodinamičnih razglabljanj. V posebni teoriji relativnosti jo je prvi izpeljal A. Einstein leta 1905. Trditve, da izpeljava ni neoporečna, se zdijo neosnovane. Zvezo je mogoče izpeljati tudi v okviru relativistične mehanike, ne da bi se sklicevali na elektrodinamiko.

THE WAY TO THE CONNECTION OF MASS WITH ENERGY

One of the most famous equations of physics $W = mc^2$, connecting mass with energy, has a history of over a hundred years, though special relativity did not yet celebrate its ninetieth anniversary. The relation originated from electrodynamical considerations. In the framework of special relativity it was derived first by A. Einstein in 1905. Allegations that this derivation is not sound seem to be unjustified. The relation can be derived also within relativistic mechanics without reference to electrodynamics.

Uvod

Večina zgodovinarjev fizike pripisuje Albertu Einsteinu pomembne zasluge pri nastanku posebne teorije relativnosti, a hkrati opozarja na prispevek drugih fizikov, predvsem H. A. Lorentza in H. Poincaréja. V tem pritrjujejo Einsteinu, ki svojega koraka v tej smeri ni imel za prelomno dejanje, ampak le za "naravni razvoj v črti, ki jo lahko zasledujemo stoletja". Od leta 1902 do leta 1905, ko se je rodila posebna teorija relativnosti, je samo revija *Annalen der Physik* prinesla osem člankov o elektrodinamiki gibajočih se teles. Podobno kot za posebno teorijo relativnosti velja za eno od njenih enačb, znamenito enačbo $W = mc^2$, ki povezuje maso z energijo in ki jo imajo nekateri za najznamenitejšo enačbo fizike. Enačba ima precej daljšo zgodovino, kot navadno mislimo. Čeprav jo je A. Einstein leta 1905 izpeljal za splošni primer in ugotovil, da ne velja poseben zakon o ohranitvi mase, ampak samo zakon o ohranitvi energije, so jo v tej ali podobni obliki že prej zapisali drugi fiziki. Zanimajmo se za zgodovino znamenite enačbe in se vprašajmo, kako jo je mogoče najpreprosteje neoporečno izpeljati.

Prvi korak k posebni teoriji relativnosti je naredil H. A. Lorentz, fizikalno vsebino je pokazal A. Einstein, matematična zgradba je najjasnejša pri H. Poincaréju.

F. Hund

Boj okoli prvenstva se je razvnel šele v drugi polovici našega stoletja, tehtnico je nagnil Poincaréju v prid.

F. Križanič

...Einstein [je] objavil delo, ki je razvilo relativnostno teorijo Poincaréja in Lorentza z nekaterimi izboljšavami in ki je vzbudilo veliko pozornost.

E. Whittaker

Elektrodinamična predzgodovina

J. J. Thomson, odkritelj elektrona, je leta 1881 obravnaval gibanje naelektrene votle kroglice. Spomnil se je na podoben pojav v hidrodinamiki. G. B. Stokes je pri gibanju gladke kroglice v neomejeni, nestisljivi in idealni kapljevini že leta 1842 ugotovil, da je mogoče kinetično energijo in gibalno količino kroglice in okolne kapljevine zapisati kot $\frac{1}{2}mv^2$ in mv . Pri tem je *efektivna masa* m sestavljena iz mase kroglice m_0 in hidrodinamične mase m_h , ki je odvisna od radija kroglice in gostote kapljevine: $m = m_0 + m_h$.

Thomson je ugotovil, da je "posledica naelektrenosti enaka, kot bi maso kroglice povečali". S tem je vpeljal elektromagnetno maso, ne da bi jo tako imenoval. Efektivno maso naelektrene kroglice, recimo ji kar elektron, je sestavil iz gole in iz elektromagnetne mase. Za slednjo je leta 1885 navedel $e_0^2/15\pi\epsilon_0 c^2 r_0$. Štiri leta pozneje je račun ponovil O. Heaviside in popravil rezultat na $e_0^2/6\pi\epsilon_0 c^2 r_0$. Na delu njegove poti—nekoliko posodobljene—ga ni težko pospremiti.

Elektron naj se giblje z majhno hitrostjo v v smeri osi z . Jakost električnega polja $E = e_0/4\pi\epsilon_0 r^2$ pomnožimo z gostoto magnetnega polja $B = \mu_0 e_0 v \sin \vartheta / 4\pi r^2$ in delimo z indukcijsko konstanto; dobimo velikost Poyntingovega vektorja ali gostoto energijskega toka $e_0^2 v \sin \vartheta / 16\pi^2 \epsilon_0 r^4$. Delimo jo s c^2 in pomnožimo s $\sin \vartheta$, če je ϑ kot med zveznico od elektrona do točke v polju in osjo z , pa imamo komponento gostote gibalne količine elektromagnetnega polja v smeri osi z . Pomnožimo jo s prostorninskim elementom $d^3 r = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ in integrirajmo po prostornini okoli trenutne lege elektrona

$$G_z = \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 dr d\varphi \sin \vartheta d\vartheta \cdot e_0^2 v \sin^2 \vartheta / 16\pi^2 \epsilon_0 c^2 r^4 = e_0^2 v / 6\pi\epsilon_0 c^2 r_0$$

Pri tem smo vzeli, da je elektron enakomerno naelektrena kroglica z radijem r_0 , da smo dobili končni rezultat. Komponento gibalne količine zapišemo kot $G_z = m_{em} v$ in smo pri Heavisidovi vrednosti $m_{em} = e_0^2 / 6\pi\epsilon_0 c^2 r_0$.

Walter Kaufmann je leta 1901 prvi poskušal z merjenjem ugotoviti odvisnost energije elektronov od hitrosti. V ta namen je z magnetnim in električnim poljem odklanjal curek hitrih elektronov iz radioaktivnega izvira. Max Abraham je uvidel, da sta energija in gibalna količina elektrona pri večji hitrosti bolj zapleteni funkciji hitrosti

$$W = (e_0^2 / 8\pi\epsilon_0 r_0) [(c/v) \ln(c+v)/(c-v) - 1] = e_0^2 / 8\pi\epsilon_0 r_0 + \frac{1}{2} m_{em} v^2 + \dots$$

in

$$G = (e_0^2 / 8\pi\epsilon_0 r_0 c) [(\frac{1}{2}c^2/v^2 + \frac{1}{2}) \ln(c+v)/(c-v) - c/v] = m_{em} v + \dots$$

Leta 1902 sta na nekem znanstvenem srečanju nastopila Kaufmann in Abraham drug za drugim in rekla: "Odvisnost $[W \text{ od } v]$ natančno podaja Abrahamova enačba" in "Zdaj je treba že od vsega začetka osnovati dinamiko elektronov na elektromagnetnih razmišljanjih."

Abraham je predlagal, da ima elektron samo elektromagnetno maso in

nima gole mase. Tedaj bi veljala zveza

$$mc^2 = \frac{4}{3}W$$

z maso elektrona m . Za W vzamemo energijo krogelnega kondenzatorja $W = e_0^2/2C$ z zelo veliko drugo elektrodo in kapaciteto $C = 4\pi\epsilon_0 r_0$. Če ne bi bilo koeficienta $4/3$, bi lahko zaupali misli, da je elektron votla kroglica z radijem r_0 in da ima samo elektromagnetno maso.

Leta 1904 je A. H. Lorentz izpopolnil model kroglice s tem, da je upošteval v vzdolžni smeri Fitzgeraldovo skrčenje v razmerju $1:(1-v^2/c^2)^{1/2}$. Tako je dobil enačbi

$$W = \frac{3}{4}m_{em}c^2(1 + \frac{1}{3}v^2/c^2) = \frac{3}{4}m_{em}c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}m_{em}v^2 + \dots$$

in

$$G = m_{em}v^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = m_{em}v + \dots$$

Lorentzov rezultat se je skoraj enako dobro ujemal s Kaufmannovimi merjenji kot Abrahamov. Lorentzov model sta neodvisno drug od drugega izpopolnila Alfred Bucherer (1904) in Paul Langevin (1905), ki sta privzela, da se prostornina elektrona ne spremeni.

Podrobneje je model obdelal še H. Poincaré. Leta 1905 je ugotovil, da se lahko elektron iz kroglaste oblike v mirovanju spremeni v elipsoidno v gibanju le, če obstaja "posebna sila, ki pojasni skrčenje v smeri gibanja in nespremenljivost obeh drugih osi". Že pet let pred tem je Poincaré z enačbo $\rho = j/c^2$ povezal gostoto energijskega toka j v elektromagnetnem valovanju z efektivno gostoto mase ρ . Enačba presenetljivo spominja na zvezo $m = W/c^2$. Toda Poincaré je mislil na "namišljeno tekočino", ki je ni mogoče primerjati z navadno snovno tekočino. Pozneje so nekateri trdili, da bi lahko Poincaré na osnovi svojih ugotovitev pred letom 1905 izpeljal znamenito zvezo.

Leto 1905 je prineslo Einsteinov članek *O elektrodinamiki gibajočih se teles* z enačbami za gibanje nesestavljenega delca, denimo elektrona, in domala vsemi osnovnimi enačbami posebne teorije relativnosti za ta primer [1]. Še istega leta je v članku *Ali je vztrajnost odvisna od energije, ki jo ima telo?* izpeljal zvezo $W = mc^2$ [2]. O tej izpeljavi nameravamo povedati nekaj več pozneje.

Naslednje leto je Einstein obravnaval votel valj, v katerem se na enem krajišču izseva svetloba z energijo W in absorbira na drugem krajišču. Da se težišče valja kot neodvisnega sistema med obema pojavoma ne premakne, se mora skupaj z energijo W prenesti masa $m = W/c^2$ [3]. Poleg tega je Einstein poudaril, da je ohranitev mase pri kemijskih reakcijah poseben primer zakona za ohranitev polne energije. Leto pozneje je v članku *Vztrajnost energije, kot jo zahteva načelo relativnosti* razširil pojem vztrajnosti in zapisal enačbi $W = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ in $W_0 = mc^2$ za lastno maso m in lastno energijo W_0 delca v opazovalnem sistemu, v katerem miruje [4].

Že na tem mestu poudarimo, da moramo dobro razločevati enačbo $W_0 = mc^2$, ki vpelje lastno energijo nesestavljenega delca z lastno maso

m , od enačbe $W = mc^2$, ki poveže oddano energijo vezanega sistema W z zmanjšanjem mase m tega sistema. Do nesporazuma lahko pride, če ne povemo, katero izmed njiju imamo v mislih. Tu se ukvarjamo z drugo.

Pravzaprav bi morali drugo enačbo zapisati kot $W_z - W_k = (m_z - m_k)c^2$, vendar bi bila v tej obliki "najznamenitejša enačba fizike" za "nefizike" najbrž manj privlačna. (Slika na naslovni strani.)

W. Kaufmann je leta 1906 postregel z novimi merjenji, za katera je menil, da so "nezdružljiva z Lorentz-Einsteinovim privzetkom. Abrahamova in Buchererjeva enačba se enako dobro prilegata merjenjem". M. Planck je ponovno razčlenil Kaufmannova izvajanja, a v njih ni odkril napake. Precej fizikov je tako kot on odlašalo z opredelitvijo. Einsteinu to ni šlo do živega: "Teoriji Abrahama in Buchererja dasta krivulji, ki se znatno bolje ujemata z opazovano krivuljo kot krivulja na osnovi teorije relativnosti. Toda po moje sta ti teoriji malo verjetni, ker njihovih osnovnih privzetkov o gibajočem se elektronu ne podpirajo teorijski sistemi, ki zajemajo večje skupine pojavov." Že naslednje leto, 1908, so merjenja prepričala Buchererja, da je sprejel teorijo relativnosti. Toda zadeva je ostala neodločena, dokler niso v letih 1914–1916 na splošno sprejeli posebne teorije relativnosti [5],[6].

Masa telesa je mera za energijo, ki jo telo vsebuje, če se spremeni energija za W , se spremeni masa za W/c^2 .

A. Einstein [2]

Abrahamova, Lorentzova, Poincaréjeva raziskovanja problema lastne energije elektrona že zdavnaj niso več pomembna. Vse, kar je preostalo iz tistih zgodnjih časov, je to, da še vedno ne razumemo problema...

Posebna teorija relativnosti je razblinila klasične sanje o tem, da bi po zvezi med energijo, gibalno količino in hitrostjo za kak delec ugotovili dinamični izvor njegove mase. V njej so te zveze čisto kinematične. Klasična slika o elektronu kot o drobnem kroglici je tudi šla v nepovrat. Kvantna teorija polja nas je poučila, da imajo delci kljub temu zgradbo, ki izvira od kvantnih fluktuacij. Pred kratkim so nas enotne teorije polja poučile, da masa elektrona zagotovo ni čisto elektromagnetna po naravi. Toda še vedno ne vemo, zaradi česa je elektron težek.

A. Pais [5]

Vztrajnost, odvisna od energije telesa

Poučno je slediti Einsteinovemu izvajanju iz leta 1905 [2]. Mirujoč delec s polno energijo W_z (Einstein govori o energiji, ki jo vsebuje telo—Energieninhalt) izseva v nasprotnih smereh elektromagnetni valovanji s skupno energijo $W_1 + W_2$.

Delec s polno energijo W_k ostane pri miru in zaradi simetrije sta energiji valovanj enaki: $W_1 = W_2$. Energija se ohrani

$$W_z = W_k + W_1 + W_2 = W_k + 2W_1 \quad (1)$$

Opazujmo pojav iz opazovalnega sistema, v katerem se giblje delec s hitrostjo v v smeri enega od obeh valovanj. V tem sistemu ima enačba (1) obliko

$$\begin{aligned} W'_z &= W'_k + W'_1 + W'_2 = \\ &= W'_k + W_1(1 + v/c)^{1/2}/(1 - v/c)^{1/2} + W_1(1 - v/c)^{1/2}/(1 + v/c)^{1/2} \end{aligned} \quad (2)$$

Upoštevali smo enačbo za transformacijo energije v elektromagnetnem valovanju. Spomnimo se na enačbo za Dopplerjev pojav $\nu' = \nu(1 \pm v/c)^{1/2} / (1 \mp v/c)^{1/2}$ in na to, da je $h\nu$ energija fotona. Odštejmo enačbo (1) od enačbe (2), pa dobimo

$$W'_z - W_z = W'_k - W_k + 2W_1 [(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1]$$

Einstein bi lahko v izrazih $W'_z - W_z = W_z(v) - W_z(0)$ in $W'_k - W_k = W_k(v) - W_k(0)$ prepoznal kinetično energijo delca v drugem opazovalnem sistemu pred sevanjem in po njem: $m_z c^2 [(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1]$ in $m_k c^2 [(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1]$ in bi po krajšanju z oglatim oklepajem takoj dobil

$$(m_z - m_k)c^2 = 2W_1 \quad (3)$$

Izraz za kinetično energijo delca je namreč izpeljal v prvem članku [1]. Vendar je raje v približku za majhne hitrosti zapisal $W'_z - W_z = \frac{1}{2}m_z v^2$ in $W'_k - W_k = \frac{1}{2}m_k v^2$. Razvil je izraz v oklepaju $2W_1 [(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1] = 2W_1 \cdot \frac{1}{2}v^2/c^2$ in po deljenju z $\frac{1}{2}v^2$ prišel do enačbe (3). Pribil je: "Če telo odda energijo $2W_1$ v obliki elektromagnetnega sevanja, se mu masa zmanjša za $2W_1/c^2$." Na koncu je omenil možnost, da bi enačbo potrdili "pri telesih, katerih energija se močno spreminja (na primer pri radijevih solih)".

Prvi je Einsteinovo izpeljavo kritiziral H. I. Ives leta 1952, pritegnili pa so mu še drugi. M. Jammer je na primer v knjigi *Concepts of Mass* leta 1961 zapisal: "Zanimiv pripetljaj v zgodovini znanstvene misli je to, da je Einsteinova lastna izpeljava enačbe v osnovi zgrešena. Za laika 'najznamenitejša enačba' je rezultat petitio principii" – izpeljave, ki ji sklep vsilimo kot privzetek.

J. Stachel in R. Torretti sta v zadnjem času zavrnila kritiko [7]. Po mnenju N. L. Fadnerja je sicer njun končni sklep upravičen, pot do njega pa ni neoporečna [6]. Razprave o tem kažejo raznovrstna mnenja fizikov, ko se lotevajo vprašanj v filozofiji. Čeprav niso čisto nekoristne, bi se večjemu delu razprav lahko ognili, če bi razpravljalci podrobno opredelili pojme. Ni se mogoče otresti vtisa, da ne ločijo ostro enačb za sestavljeni sistem, katerega notranje stanje se ne spremeni in ki se ujemajo z enačbami za nestavljen delec, na primer elektron, od enačb za sestavljen sistem, katerega notranje stanje se spremeni. Nekaj zmešnjave pa gre tudi na račun nekdanje navade, da so vpeljali *vzdolžno maso* $m(1 - v^2/c^2)^{-3/2}$ in *prečno maso* $m(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ kot kvocient sile in pospeška, ko sta vzporedna in pravokotna drug na drugega. Ta navada sega še v današnji čas s tako imenovano *relativistično maso* $m(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, ki da, pomnožena s hitrostjo, nadomestilo za gibalno količino Newtonove mehanike. Temu delu zmešnjave se lahko izognemo, če dosledno uporabljamo samo lastno maso. Če že ne moremo shajati brez drugih količin, jih je bolje vpeljati kot ustrezno energijo, deljeno s c^2 .

Pojem lastne energije, to je $W_0 = mc^2$, je bil na mnogo načinov najbolj revolucionaren rezultat povezave mase z energijo.

W. L. Fadner [6]

Lastni energiji W_0 ...navadno tudi pripišejo vrednost mc^2 . V nasprotju s pomembno zvezo, ki ji zadoščajo koeficienti kinetične energije, ima ta druga raba $W_0 = mc^2$ zelo malo vsebine, čeprav jo včasih uvedejo s fanfarami.

M. J. Feigenbaum, N. D. Mermin [8]

$W = mc^2$ v mehaniki

Ozadje znamenite enačbe osvetlimo z izpeljavo, pri kateri obravnavamo razpad sestavljenega delca. Mirujoči delec s polno energijo W_z pri razpadu odda dva enaka delca v nasprotnih smereh z enako veliko hitrostjo s polno energijo W_1 in W_2 . Po razpadu delec s polno energijo W_k še naprej miruje. Ohrani se polna energija

$$W_z = W_k + W_1 + W_2 = W_k + 2W_1 \quad (4)$$

Po obliki se enačba ujema z (1), toda zdaj ne gre za sevanje in polni energiji oddanih delcev izrazimo kot $W_1 = m_1 c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ in $W_2 = m_2 c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Zaradi $m_1 = m_2$ in $v_1 = v_2$ velja $W_1 = W_2$.

Opazujmo razpad iz inercialnega opazovalnega sistema, v katerem se giblje delec pred razpadom (in po njem) s hitrostjo v_0 po osi x . V tem sistemu sta hitrosti oddanih delcev

$$v'_1 = (v_1 - v_0)/(1 - v_1 v_0/c^2) \quad v'_2 = (v_1 + v_0)/(1 + v_1 v_0/c^2)$$

če upoštevamo, da je $v_1 = v_2$. Kratek račun pokaže, da velja

$$1 - v'^2_1/c^2 = 1 - v'^2_2/c^2 = (1 - v^2_1/c^2)(1 - v^2_0/c^2) \quad (5)$$

Tudi v novem sistemu se ohrani polna energija

$$W'_z = W'_k + W'_1 + W'_2 \quad (6)$$

Od enačbe (6) odštejemo (4)

$$W'_z - W_z = W'_k - W_k + W'_1 - W_1 + W'_2 - W_2 \quad (7)$$

in posamične člene izpišemo

$$\begin{aligned} W'_z - W_z &= W_z(v_0) - W_z(0) = m_z c^2 [(1 - v^2_0/c^2)^{-1/2} - 1] \\ W'_k - W_k &= W_k(v_0) - W_k(0) = m_k c^2 [(1 - v^2_0/c^2)^{-1/2} - 1] \\ W'_1 - W_1 &= W_1(v'_1) - W_1(v_1) = m_1 c^2 [(1 - v'^2_1/c^2)^{-1/2} - \\ &\quad - (1 - v^2_1/c^2)^{-1/2}] = m_1 c^2 (1 - v^2_1/c^2)^{-1/2} [(1 - v^2_0/c^2)^{-1/2} - 1] \\ W'_2 - W_2 &= W_2(v'_2) - W_2(v_1) = m_2 c^2 [(1 - v'^2_2/c^2)^{-1/2} - \\ &\quad - (1 - v^2_1/c^2)^{-1/2}] = m_1 c^2 (1 - v^2_1/c^2)^{-1/2} [(1 - v^2_0/c^2)^{-1/2} - 1] \end{aligned}$$

Pri tem upoštevamo, da se notranje stanje delca ne spremeni, ko preidemo iz enega inercialnega opazovalnega sistema v drugega, in se v zadnjih dveh primerih opremo na enačbo (5). Enačbo (7) delimo z oglatim oklepajem in preostane

$$\begin{aligned} (m_z - m_k) c^2 &= 2m_1 c^2 (1 - v^2_1/c^2)^{-1/2} = \\ &= 2m_1 c^2 [(1 - v^2_1/c^2)^{-1/2} - 1] + 2m_1 c^2 > 2m_1 c^2 \end{aligned}$$

Enačba pove, da je razlika začetne in končne lastne energije enaka kinetični energiji in lastni energiji oddanih delcev. Skupna masa se ne ohrani, pri razpadu se zmanjša za maso, ki ustreza kinetični energiji oddanih delcev

$$m_z - (m_k + 2m_1) = 2m_1 [(1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} - 1]$$

Do tega rezultata smo prišli na osnovi izraza za polno in za kinetično energijo nesestavljenega delca ali sestavljenega sistema, katerega notranje stanje se ne spremeni, in ohranitvenega zakona za polno energijo.

Če bi bili pripravljeni nekoliko več računati, bi lahko shajali samo z ohranitvenim zakonom. Morali bi opazovati razpad iz opazovalnega sistema, ki se giblje pod ostrim kotom glede na smer enega od oddanih delcev [8]. Toda tudi naš poenostavljeni račun je smiseln: od splošne enačbe $W = mc^2$ nas je spravil na trdna tla razpadov in reakcij [9]. Pri njih veljajo poleg ohranitvenega zakona za polno energijo še drugi ohranitveni zakoni, med njimi zakon o ohranitvi števila barionov. Če ni antidelcev, se število protonov in nevtronov pri razpadu ali reakciji ne spremeni. Zato lahko pridobimo le toliko energije, za kolikor se zmanjša lastna energija jeder pri prerazporeditvi protonov in nevtronov. Pri razcepu uranovih jeder doseže zmanjšanje komaj 0.08 odstotka, pri zlivanju vodikovih pa 0.7 odstotka. Prvo izkoriščajo jedrski reaktorji, drugo pa razmeroma mlade zvezde. Enačba $W = mc^2$ je sicer znamenita, ker uvaja tesno povezavo mase z energijo in odpravi zakon o ohranitvi mase, vendar nas ne reši zadreg v preskrbi z energijo.

Nazadnje pribijmo še to, da je masa v posebni teoriji relativnosti povezana z energijo zaradi lastnosti prostora in časa, kot pravijo kinematično. Pred sto leti pa so v elektrodinamiki iskali dinamično zvezo mase z energijo—na osnovi gibanja zaradi sile.

LITERATURA

- [1] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. 17 (1905) 639.
- [2] A. Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* Ann. Phys. 18 (1908) 639.
- [3] A. Einstein, *Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie*, Ann. Phys. 20 (1906) 627.
- [4] A. Einstein, *Die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie*, Ann. Phys. 23 (1907) 371.
- [5] A. Pais, *"Subtle is the Lord...". The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford (1982).
- [6] W. L. Fadner, *Did Einstein really discover " $E = mc^2$ "*, Am. J. Phys. 56 (1988) 114.
- [7] J. Stachel, R. Torretti, *Einstein's first derivation of mass-energy equivalence*, Am. J. Phys. 50 (1982) 760.
- [8] M. J. Feigenbaum, N. D. Mermin, *$E = mc^2$* , Am. J. Phys. 56 (1988) 18.
- [9] J. Strnad, *Posebna teorija relativnosti*, DZS, Ljubljana (1979), str. 156.

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Od 1. do 4. aprila 1988 je bilo v Beogradu enaindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM'88. Poleg jugoslovanskih ekip so sodelovale še ekipe iz Krakowa, Prage, Olomouca, Bratislave in Budimpešte. Vseh ekip skupaj je bilo kar enaindvajset.

Kot prejšnje leto je tudi lani Oddelek za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani sodeloval z dvema ekipama:

I.

1. Roman Drnovšek (2. letnik)
2. Martin Juvan (3. letnik)
3. Petar Pavešić (4. letnik)

II.

1. Grega Cigler (1. letnik)
2. Jože Fabčič (1. letnik)
3. Damjana Kokol (2. letnik)

Študentje prvega in drugega letnika so reševali skupne naloge iz analize, osnov algebre in osnov geometrije, študentje tretjega in četrtega letnika pa so si izbirali po eno področje iz skupine realna analiza, funkcionalna analiza, višja algebra in po eno iz skupine računalniško programiranje, numerična analiza, diferencialne enačbe, kompleksna analiza, topologija, teorija verjetnosti, geometrija.

Ekipno je prvo mesto osvojila ekipa iz Prage pred ekipama Budimpešta I in Beograd I. Naši tekmovalci so se tokrat odrezali bolj skromno, saj je celo boljša skupina osvojila le deveto mesto. Izjema je le Martin Juvan, ki je v konkurenci tretjih in četrtih letnikov zasedel solidno osmo mesto.

Bodočim tekmovalcem, študentom in tudi že diplomiranim matematikom predstavljamo naloge s tega tekmovanja in vas vabimo, da nam za objavo pošljete tudi kakšno rešitev.

Naloge za 1. in 2. letnik

1. Naj bo $\{x_n\}$ tako naraščajoče zaporedje pozitivnih števil, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}/x_n = 1$. Dokaži, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n \cdot x_n} = 1$.

2. Naj bo $f \in C[0, \infty)$ in naj za vsako pozitivno število a ter vsako naravno število n velja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a \cdot n) = 0$. Dokaži, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

3. Naj bosta U in V zaporedoma prostora rešitev sistema enačb

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 0 \quad \text{za } j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0 \quad \text{za } i = 1, \dots, m$$

Dokaži, da sta prostora W_1 in W_2 , ki sta definirana s predpisom $U = (U \cap V) \oplus W_1$ in $V = (U \cap V) \oplus W_2$, ortogonalna. Pri tem smo s simbolom $\oplus$ označili ortogonalno vsoto podprostorov.

4. Naj bo f nenegativna monotonno naraščajoča funkcija na intervalu $[a, b]$ ($a, b > 0$). Dokaži, da je

$$\int_a^b x \cdot f^2(x) dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$$

Funkcionalna analiza

1. Naj bo $T : f \rightarrow (x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x-y) f(y) dy)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ linearen operator na prostoru $L^2(\mathbb{R})$, pri čemer je $g \in L^1(\mathbb{R})$ in $\|g\|_1 \neq 0$. Dokaži, da T ni kompakten operator.

2. Dokaži, da za neatomične mere μ velja: $(L^\infty(X, \mu))^* \neq L^1(X, \mu)$.

Realna analiza

1. Naj bo $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ tako zaporedje realnih števil, da je $|\lambda_n - n| \leq \frac{1}{9}$ za vsak $n \geq 1$. Dokaži, da je sistem funkcij $\{\sin \lambda_n x\}_{n=1}^\infty$ baza prostora $L^2(0, \pi)$.

2. $L^\infty[0, 1]$ je Banachova algebra za množenje funkcij po točkah. Naj bo Δ množica vseh kompleksnih homomorfizmov, opremljena s šibko *-topologijo. Dokaži:

(a) $L^\infty[0, 1] \cong C(\Delta)$

(b) Obstaja taka regularna Borelova verjetnostna mera μ na Δ , da je $C(\Delta) \cong L^\infty(\mu)$.

(c) Zaprtje v Δ poljubne odprte množice je odprta množica.

Topologija

1. Naj bo G lokalno kompaktna, totalno nepovezana topološka grupa. Potem odprto-zaprte podgrupe grupe G sestavljajo bazični sistem okolic v točki e .

2. Naj bo L linearno urejena polna množica s skrajnima točkama a in b in z dodatno lastnostjo, da med poljubnima njenima različnima točkama obstaja nova točka iz L . Dokaži:

(a) Prostor L s topologijo urejenosti je kompakten.

(b) Vsaka preslikava prostora $L^2 = L \times L$ vase ima negibno točko.

Višja algebra

1. Dokaži, da je vsak vektorski prostor nad dvoelementnim poljem unija treh svojih pravih podprostorov.

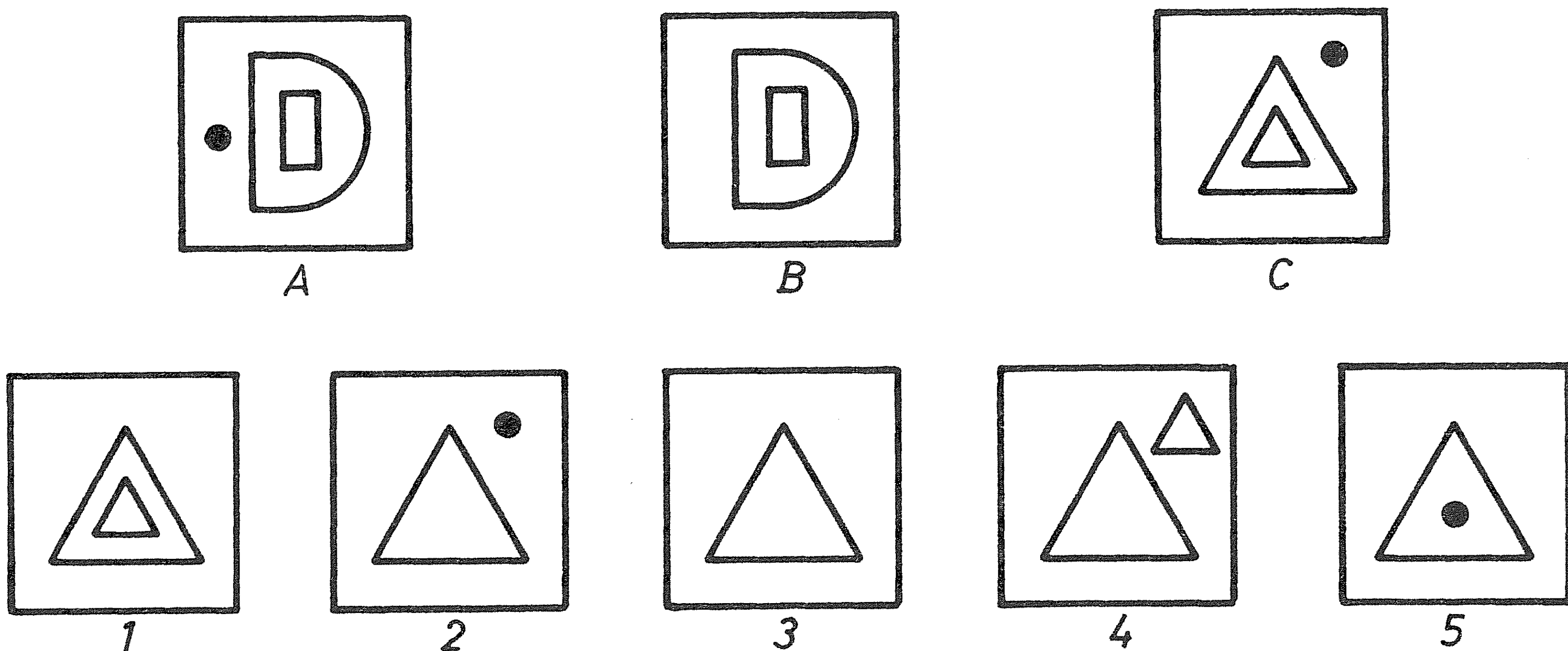
2. Grupa je lokalno končna (po definiciji), če je vsaka njena končno generirana podgrupa končna. Naj bo N podgrupa edinka grupe G . Če sta N in G/N lokalno končni, potem dokaži, da je G lokalno končna.

Računalniško programiranje

1. Dan je usmerjen graf G z množico točk V in sosednostno matriko

$C[i, j]$ nenegativnih cen za povezave grafa. Cena poti od točke i do točke j naj bo maksimalna cena povezave na tej poti. Napiši algoritem, ki najde najcenejše poti od točke 1 do vseh drugih točk grafa, določi njihove cene in si zapomni poti. Oцени časovno in prostorsko zahtevnost dobljenega algoritma.

2. Že 1963. leta so bili napisani programi za iskanje geometrijske analogije figur. Problem sestoji v iskanju take figure X , ki je v isti relaciji z dano figuro C , kot je figura B na sliki v relaciji s figuro A .



Z drugimi besedami, treba je najti pravila, ki opisujejo, kako se na osnovi figure C določi taka figura $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, da se na podlagi istega pravila iz figure A dobi figura B . Nalogo reši za dani primer:

- matematično,
- na računalniku.

Numerična analiza

1. Dana je funkcija $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (neskončnokrat diferenciable funkcija s kompaktnim nosilcem). Na realni osi $\mathbb{R}$ je dana še ekvidistantna mreža: $\dots < x_{-k} < \dots < x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots$, $x_{i+1} - x_i = h$. Dokaži, da za poljubna $n \in \mathbb{N}$ in $h \leq h_0$ velja

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx - h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi(x_i) \right| \leq C(n, \varphi) \cdot h^n$$

kjer konstanta $C(n, \varphi)$ ni odvisna od koraka h .

2. Naj bo A simetrična realna pozitivno definitna matrika in naj bo $A \neq \beta E$ ($\beta \in \mathbb{R}$). Dokaži, da je $\text{cond}_2(A + \alpha E)$ monotonno padajoča funkcija spremenljivke $\alpha > 0$. (Po definiciji je $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ in $\rho(A)$ spektralni radij matrike A , z E pa smo označili identično matriko.)

Geometrija

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane tri mimobežnice a , b in c . Konstruiraj tako točko O , da bosta poljubni dve od treh ravnin Oa , Ob in Oc med seboj

pravokotni.

2. Dokaži, da obstaja tangentni štirikotnik hiperbolične ravnine L^2 , katerega koti se zaporedoma ujemajo z danimi koti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in α_4 , za katere velja $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 2\pi$.

Kompleksna analiza

1. Najdi vsaj eno tako realno harmonično funkcijo $u \not\equiv C$, da je

$$\int_{|z|<1} |u(z)|^p (1 - |z|)^{-1} dx dy < \infty, \quad 0 < p < 1$$

2. Naj bo f taka holomorfná funkcija na enotskem disku $U = \{z; |z| < 1\}$, da je

(i) $\limsup_{r \rightarrow 1-} |f(re^{i\vartheta})| \geq 1, \forall \vartheta \in [0, 2\pi)$

(ii) $\overline{f(U)} \cap U \neq \emptyset$

Dokaži, da je $U \subset \overline{f(U)}$.

Teorija verjetnosti

1. Naj bosta $\xi(t), t \geq 0, \eta(t), t \geq 0$ neodvisna Poissonova procesa s parametroma λ oziroma μ , in $m, n \in \mathbb{N}$. Poišči

$$P\{\xi(t) \neq \eta(t), \quad \forall t \in [0, \infty)\}$$

2. Naj bodo $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ neodvisne simetrične (tj. $P\{Y_k \in B\} = P\{-Y_k \in B\}$ za vsako Borelovo množico B) slučajne spremenljivke in $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Dokaži, da za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

$$P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i > \alpha\right\} \geq 2P\{X_n > 2\alpha\} - 2 \sum_{j=1}^n P\left\{Y_j > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

Diferencialne enačbe

1. Najdi splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 3yy' + y^3 = 0$$

2. Reši enačbo

$$(Bx^2 + Axy + C)y' + (Axy + By^2 + C) = 0$$

kjer je $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Aleksandar Jurišić

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE* TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1988

Pedagoška fakulteta — Maribor

Matematika — fizika

387. Osojnik, Leonida	393. Jaušovec, Miro	398. Nemec, Majda
388. Mesarec, Miran	394. Rihtar, Irena	399. Galun, Irena
389. Pevec, Bojana	395. Kočar, Marjana	400. Marhl, Marko
390. Kovačič, Majda	396. Vozlič, Danica	401. Slana, Romana
391. Letonja, Stanislava	397. Cure, Irena	402. Čede, Janez
392. Tement, Karolina		

Fizika — tehnična smer

292. Fošnarič, Samo	295. Goznik, Anton	297. Bedjanič, Darko
293. Murko, Anica	296. Dundek, Vitomir	298. Flisar, Tatjana
294. Zadravec, Marjan		

Pedagoška akademija — Ljubljana

Matematika — fizika

815. Trpin, Maruša	Delilnik napetosti
816. Kržan, Klavdija	Izbrane teme iz uporabne matematike
817. Vilfan, Vojka	Konveksnost in ekstremi
818. Petretič, Mojca	Reševanje problemov pri pouku matematike v OŠ
819. Razbornik, Antonija	Obravnavanje nekaterih diferencialnih in integralnih enačb s sredstvi funkcionalne analize
820. Črmelj, Darja	Fizikalni eksperimenti iz kinematike
821. Kržišnik, Damjana	Fizikalni eksperimenti iz kroženja in vrtenja
822. Prelovšek, Marjetka	Eksperimenti pri pojavih nihanja
823. Ancelj, Jože	Umetni sateliti
824. Križaj, Renata	Analiza učenčevih napak v preizkusih znanja matematike v 7. razredu OŠ
825. Krmac, Suzana	
826. Oblak, Irma	Jordanova kanonska forma
827. Vidmar, Damjana	O razvijanju geometrijskih predstav pri pouku matematike v OŠ
828. Krašna, Marija	Cela algebrailčna števila obsegov $Q(\sqrt{m})$
829. Čermelj, Marjetka	Reševanje enačb in grupe
830. Markelj, Marjeta	Skalarni produkt v prostoru Q^n
831. Brodnik, Alenka	Vpliv uporabe učnih sredstev na uspešnost pouka matematike v 5. in 6. razredu OŠ
832. Bohinc, Milan	Šolski optični komplet
833. Hubad, Edvard	Merjenje hidromehanskih lastnosti snovi
834. Kogoj, Tanja	Mehanska energija
835. Erčulj, Stanislav	Reševanje enačb v OŠ v Sloveniji in Hrvaški
836. Kogoj, Hermina	Uvod v končne geometrije
837. Nikolič, Tihana	Računamo z ulomki
838. NUSDORFER, Jana	Uvod v teorijo grafov
839. Veternik, Anita	Krog in krožnica v programu matematike v OŠ

* Seznam diplomantov iz leta 1987 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. 35 (1988) 155 – 159

Matematika — tehnična vzgoja

- | | |
|-------------------------|--|
| 51. Marolt, Karmen | Industrijski način pridobivanja furnirja |
| 52. Peršin, Sinja | Tehnologija usnja od surovine kože do končnega izdelka |
| 53. Šilc, Barbara | Gonila za spreminjanje vrst gibanj |
| 54. Valenčak, Marija | Algebra v osnovnošolskem programu matematike |
| 55. Prah, Andrej | Postopek izdelave kozolca z učenci OŠ s prilagojenim programom |
| 56. Bertoncelj, Irma | Oblikovanje lesa v OŠ |
| 57. Miklavčič, Antonija | Preizkušanje lastnosti papirja v OŠ |
| 58. Milost, Mavra | Obdelovalni postopki za kovine |
| 59. Vidmar, Anuša | Motivacija pri pouku matematike |
| 60. Ilovar, Tatjana | Grupe reduciranih ostankov, ki so ciklične |

Fizika — tehnična vzgoja

- | | |
|----------------------|--|
| 723. Ramšak, Peter | Tehnološka navodila za uporabo nove tehnologije pri fizikalnih merjenjih za nefizike |
| 724. Bičanič, Brane | Pogon in regulacija električnih naprav v gospodinjstvu |
| 725. Dolenc, Tone | Binarne spremembe v začetni elektroniki |
| 726. Rozman, Ksenija | Fizikalne naloge za sedmi razred OŠ |
| 727. Rovšek Matej | Izdelava vaj iz elektronike za 8. razred OŠ |
| 728. Jerič, Franci | Eksperimenti iz statike |

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika — pedagoška smer

- | | |
|-----------------------|---|
| 134. Galun, Ljubica | Inverzija na krog in njena uporaba |
| 135. Marušič, Irena | Inverzija in njena uporaba |
| 136. Škerget, Ljubica | Zanimive vrste z binomskimi koeficienti |

Matematika — uporabna smer

- | | |
|------------------------|---|
| 204. Robba, Mirko | Analiza računalniške mreže PLANET |
| 205. Gutnik, Mojca | Reševanje predoločenih sistemov linearnih enačb |
| 206. Terčelj, Jana | Program za izpis na lepopisnem tiskalniku |
| 207. Cokan, Tomaž | Praktična uporaba latinskih kvadratov |
| 208. Blumauer, Polonca | Računalniška obdelava ponudb za graditev objektov v Alžiriji |
| 209. Vučak, Silvija | Analiza lokalne konvergence izboljšane sekantne metode |
| 210. Brilej, Roman | Modula-2 |
| 211. France, Sonja | Tabele simbolov |
| 212. Lipušček, Sergeja | Reševanje sistemov nelinearnih enačb in iskanje minimuma funkcij več spremenljivk |

213. Rosulnik, Bernarda	Nekaj zgledov uporabe računalnika pri pouku matematike
214. Kaluža, Darja	Linearno programiranje
215. Čenčič, Nikolaja	Programski paket za mrežno programiranje
216. Vrečko, Matjaž	Programski paket INKE

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

443. Činč, Roman	Schwarzova funkcija analitičnih krivulj
444. Ačko, Nataša	Podobnostne transformacije in uporaba v evklidski ravnini
445. Bračič, Janko	Catalanova enačba
446. Pertot, Matjaž	Spoj v geometriji
447. Bricelj, Helena	Abelov izrek
448. Peklaj, Vanja	Egipčanski ulomki
449. Poglajen, Vida	Incidenčne ravnine

Matematika — uporabna smer

366. Motnikar, Barbara	Statistična obdelava normalne populacije s programskim paketom SPSS
367. Dosedla, Tadeja	Konveksne množice v vektorskih in lokalno konveksnih prostorih
368. Bregar, Zvonko	Iteracija kvadratnih funkcij
369. Mencin, Alenka	Optimizacijske metode – kazenske funkcije
370. Kovačec, Ksenija	Metoda s preverjenimi rezultati
371. Smolnikar, Karmen	Problem nahrbtnika in razrez pravokotne plošče
372. Bratina, Barbara	Kritični vrtljaji gredi
373. Blagotinšek, Drago	Aquaplaning
374. Peteh, Matko	Ekstremne točke v neskončno dimenzionalnih prostorih
375. Primc, Stanislava	Sestavnica
376. Uršič, Erika	Nekaj hevrističnih algoritmov pri sestavljanju urnika
377. Blaznik, Polonca	Ekstremi kvadratnih funkcij več spremenljivk
378. Čadež, Lidija	Nelinearna viskozna tokočina
379. Govekar, Darja	Operatorske polgrupe in enačbe toplotne prevodnosti
380. Dolenšek, Alenka	Optimiranje resursov pri operativnem mrežnem planiranju
381. Korenjak, Simona	Posplošeni inverzi matrike
382. Zdolšek, Marija	SV razcep

Matematika — teoretična smer

20. Pavešić, Petar	Konstruktiven dokaz Dehnove leme
--------------------	----------------------------------

Fizika — pedagoška smer

- | | |
|---------------------|--|
| 109. Soršak, Anton | |
| 110. Babič, Vito | Mavrična holografija |
| 111. Kodba, Stane | Realizacija faznega detektorja z mikroračunalnikom in uporaba pri pouku fizike |
| 112. Gostinčar, Ana | Fizika bumeranga |
| 113. Ponikvar, Tine | Sončni kolektorji pri pouku fizike |
| 114. Šiftar, Sabina | Fotoelastični pojav |

Fizika — tehniška smer

- | | |
|---------------------------|---|
| 456. Zalar, Boštjan | Raziskava psevdospinskega stekla $\text{Rb}_{1-x}(\text{ND}_4)_x\text{D}_2\text{PO}_4$ s pomočjo jedrske magnetne resonance ^2H in ^{14}N |
| 457. Stariha, Borut | Študij tankoplastne elektroluminiscenčne strukture ZnS:Mn |
| 458. Kopač, Samo | Optično jedkanje merilnih letev |
| 459. Drevenšek, Irena | Meritev optične aktivnosti v dvolomnih kristalih |
| 460. Jamnik, Janko | Obravnavo pasivnega filma litij- SOCl_2 v baterijah z impedančno metodo |
| 461. Kralj, Marko | Hallova sonda z MOSFET strukturo |
| 462. Mozetič, Miran | Merjenje parametrov plazme z enojno električno sondo |
| 463. Lazar, Samo | Anomalna difrakcija svetlobe na nematični kapljici |
| 464. Olenik, Marijan | Barvni modulator |
| 465. Paradiž, Boštjan | Formiranje drobnozrnate ZnS:Mn,Cu elektroluminiscenčne strukture |
| 466. Gyergyek, Tomaž | Merjenje osnovnih parametrov dvojne plasti v šibko magnetizirani plazmi |
| 467. Jamnik, Andrej | Opazovanje interference termične svetlobe s fluktuacijskim interferometrom |
| 468. Ambrožič, Miran | Strukturni fazni prehodi v monoklinskem RbD_2PO_4 |
| 469. Železnik, Nadja | Uporaba gradiometra pri slikanju z magnetno resonanco |
| 470. Boltin, Uroš | Spektralni analizator za rentgensko svetlobo s sferično ukrivljenim kristalom |
| 471. Fajdiga, Andrea Maja | Raziskava strukturnih faznih prehodov v kristalu $(\text{N}(\text{CH}_3)_4)_2\text{ZnI}_4$ s pomočjo jedrske magnetne resonance ^{14}N |
| 472. Bezić, Janez | Defekti v kapljicah smektičnih tekočih kristalov |
| 473. Pribaković, Ana | Modeli za simuliranje plinskih tokov z metodo Monte Carlo |
| 474. Plantan, Uroš | Študij vodikove vezi v $(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{KH}$ in $(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{NaH}$ z dvojno resonanco $^1\text{H} - ^{17}\text{O}$ |

Meteorologija

48. Virant, Damjana Toplotna prevodnost tal v Ljubljani

3. stopnja

Matematika

44. Žerovnik, Janez Verjetnostni algoritem za barvanje točk grafa
45. Kukavica, Igor Semi-Fredholmovi operatorji

Fizika — tehniška smer

88. Sitar, Zlatko Vroči elektroni in fononi v ZnTe
89. Kralj, Samo Proučevanje steklaste faze Isingovega modela v prečnem polju
90. Starič, Marko Razvoj nabojnega signala pri večžičnih proporcionalnih komorah

Meteorologija

4. Cegnar, Tanja Metode objektivne prognoze lokalnega vremena v razgibanem reliefu
5. Vrhovec, Tomaž Mezometeorološka analiza vetrovnih in temperaturnih polj

Doktorske disertacije

Matematika

33. Šemrl, Peter Cauchyjeva funkcijska enačba in kvadratični funkcionalni
34. Lešnjak, Gorazd Posplošene ekstremne točke v normiranih prostorih

Fizika

112. Zavrtanik, Danilo Meritev in analiza kotnih porazdelitev pri reakciji $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$
113. Mikuž, Marko Meritev reakcije $\pi^- p \rightarrow \pi^- p \pi^0$
114. Cindro, Vladimir Preseki za dvojno ionizacijo lupine K s protoni
115. Sevšek, France Študij spojin SrEuFeO_4 in Fe_2TiO_5 z Mössbauerjevo spektroskopijo

OBVESTILO NAROČNIKOM

Zaradi hude inflacije smo ob polletju prisiljeni spremeniti višino celoletne naročnine. Nekajkrat smo vas že prosili, da nam naročnino nakažete čimprej. Vsem tistim pa, ki tega do izida te številke še niste storili, smo poslali te dni novo položnico z vpisano celoletno naročnino v novi višini 70.000.– din. V tem znesku so upoštevani stroški opomina in poslane položnice. Prosimo vas, da nam znesek nakažete čimprej, saj smo njegovo višino določili v upanju, da boste to našo željo tudi upoštevali.

Milan Hladnik, Ciril Velkourh