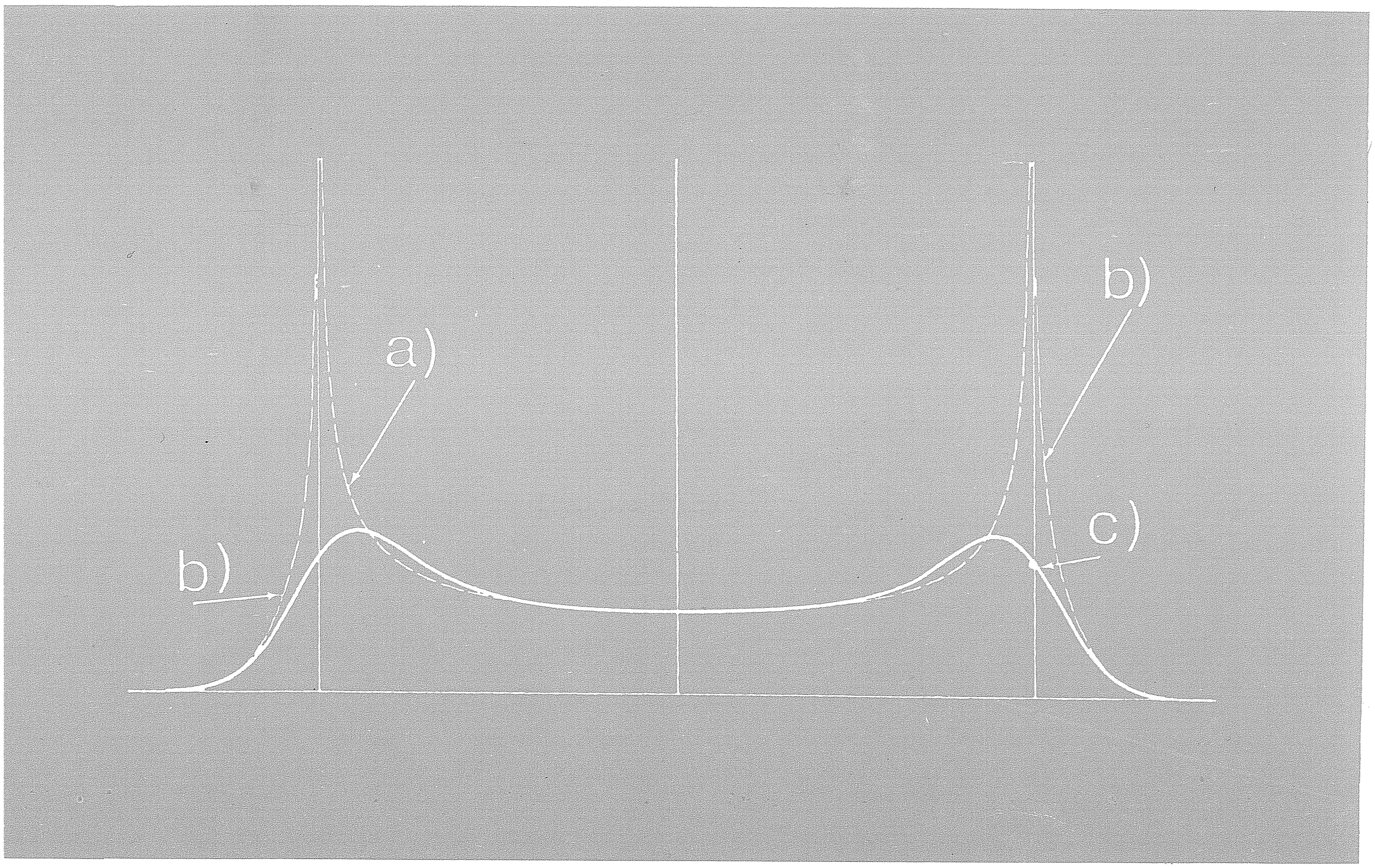
EMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1989
Letnik 36
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 36 – ŠTEVILKA 3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1989

Uredniški odbor: Milan Hladnik – urednik za matematiko, Bojan Mohar – glavni urednik, Janez Strnad – urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkovrh – urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Naročnina, ki bo vplačana do 30. 6. 1989 pri društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS: za posameznike 30.000.– din (za člane društva je že upoštevana članarina), za dijake in študente 15.000.– din, posamezna številka 5.000.– din, dvojna številka 10.000.– din, stare številke 2.500.– din, za ustanove in v knjigarnah 90.000.– din, za tujino 25$.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS – Podružnica Ljubljana – Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50200-620-107-257300-5964/4.

Tisk: KURIR, Ljubljana Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1989 DMFA SRS – 963 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles Str.–Page

Razmišljanja o matematiki – Reflections on mathematics (Ivan Vidav) 65 – 69

Tabeliranje implicitnih funkcij – Tabulation of implicit functions (France Avsec) . . . . . 71 – 74

Izmerimo influenčno konstanto – Measurement of ε_0 (Zlatko Bradač) . 75 – 78

Demonstracijski poskusi iz fizike polprevodnikov – Elementary experiments in semiconductor physics (Peter Gosar in Lidija Babič) . . 79 – 90

Vesti – News

Novi člani društva v letu 1988 (Ciril Velkovrh) 69

Obvestilo naročnikom (Milan Hladnik in Ciril Velkovrh) 90

Prešernove nagrade študentom na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo za leto 1988 (Ciril Velkovrh) 91

Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v l. 1988 (Zbral in uredil Milan Hladnik) . . . . . 91 – 95

Nove knjige – New books (Anton Suhadolc, Peter Šemrl, Janez Strnad, Bojan Ditinjana, Andro Mikelić, Georg Mejak) . . . .69, 90, 96, III, IV

Na ovitku: Slika 2, k članku v 2. letošnji številki na str. 57.

Na ovitku druge številke: Vezje merilnika naboja, slika 1. k članku v tej številki na str. 75

RAZMIŠLJANJA O MATEMATIKI

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (85) : 00 A 05

Članek govori o pomenu in vrednosti matematike v naši kulturi in civilizaciji in o tem, kaj žene nekatere ljudi, da se vse življenje z njo ukvarjajo.

REFLECTIONS ON MATHEMATICS

The following questions are discussed: what is the significance of mathematics, what is its value and its role in our culture and civilization, and what drives some people to devote their entire life to it.

Matematiko poučujejo v osnovnih in srednjih šolah, pa tudi na večini fakultet je obvezen predmet. Danes živi na svetu na tisoče znanstvenikov, ki se ukvarjajo z raziskavami v matematiki. Izhaja več sto mednarodnih matematičnih časopisov, v njih pa vsako leto izidejo tisoči člankov in razprav. Vsak od teh člankov vsebuje nova spoznanja, nove teorije ali vsaj nov dokaz kakšnega sicer že znanega izreka. Čemu vsa ta velika dejavnost? Kakšen pomen ima matematika, v čem je njena vrednost in kakšno vlogo ima v naši kulturi in civilizaciji? Kaj žene nekatere ljudi, da se vse življenje z njo ukvarjajo, ko pa je za večino pusta in suhoparna znanost? Poskušajmo najti nekaj odgovorov na nekatera od teh vprašanj.

1. Matematika je koristna znanost, uporabiti jo je mogoče na številnih področjih – v tehniki, ekonomiji in drugod. Zato je prav gotovo za napredek ugodno, če ima čim večje število ljudi kar se da temeljito matematično izobrazbo. Uporabnost matematike in prepričanje, da študij te znanosti veča intelektualno sposobnost ljudi, je gotovo glavni razlog, zakaj države po vsem svetu plačujejo učitelje matematike na šolah in podpirajo raziskovalno delo v matematiki. Včasih smo mislili, da je tehnični napredek in z njim povezani industrijski razvoj vselej nekaj pozitivnega. Danes smo v tem oziru bolj skeptični, ker smo spoznali, da ima pretirana in nepremišljena industrializacija veliko slabih posledic, od katerih bi nekatere utegnile biti kar usodne za človeštvo. Ker znanost in tehniko tudi pogosto zlorabljajo v uničevalne namene, bomo morali biti odslej neprimerno bolj previdni pri vrednotenju tehniških dosežkov. Toda kljub omenjenim pomislekom nas lahko vsaka uporaba matematike v praksi samo veseli, ob pogoju seveda, da ne gre za zlorabo.

Še pred nedavnim se je zdelo, da so nekateri deli matematike, na primer teorija števil, povsem nekoristni za prakso. Danes tega ne moremo več trditi, saj skoraj ni področja matematike, ki se ne bi dala praktično izkoristiti. Vendar je treba tudi povedati, da se v praksi uporablja le neznaten del

---

Članek je povzetek predavanja, ki ga je imel avtor na jubilejnem 40. občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije v Gozd Martuljku oktobra 1988.

matematičnega znanja, ki nam je danes na voljo.

Matematika se uporablja tudi v naravoslovnih znanostih, zlasti v fiziki in astronomiji. Težko bi si zamislili napredek fizike brez ustreznega napredka matematike. Pa tudi obratno velja, da sta namreč astronomija in fizika dali pobudo za marsikatero matematično teorijo. Spomnnimo se samo, kakšen vpliv je imela mehanika, predvsem nebesna mehanika, na razvoj infinitezimalnega računa, kvantna mehanika na razvoj teorije operatorjev v Hilbertovem prostoru in splošna relativnostna teorija na diferencialno geometrijo. Matematika ima v fiziki globji pomen kakor v tehniki, ni namreč samo pripomoček pri reševanju fizikalnih problemov, temveč je hkrati tudi jezik, v katerem izražajo fiziki zakone narave. Včasih je za potrebe teorijske fizike zadoščala matematična analiza. V novejši dobi pa se je zelo razširila uporaba verjetnostnega računa, statistike in še zlasti teorije grup. Vprašamo se lahko, ali bodo kdaj za fiziko koristna taka področja matematike, kot sta algebraična geometrija in teorija števil.

Matematika pa se uporablja tudi v sami matematiki, namreč eno področje na drugem področju. Najbolj znan primer je gotovo uporaba algebre v geometriji. To uporabo je omogočila predvsem uvedba koordinatnega sistema. Zelo znana je nadalje uporaba matematične analize v teoriji števil. Za primer iz novejšega časa navedimo rešitev problema kongruentnih števil. Kongruentno število je naravno število, ki je ploščina kakšnega pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami. Izkaže se, da niso vsa naravna števila kongruentna. Problem kongruentnih števil je zato v tem, da dobimo kriterij, s katerim je mogoče za dano naravno število ugotoviti, ali je kongruentno ali ne. Leta 1983 je J. Tunnell našel tak kriterij s pomočjo zelo zapletene teorije modulskih form.

2. Za nobeno znanost ne moremo trditi, da je uporabnost njena edina vrednost. Odkritja v naravoslovju nam širijo obzorje in nas tako duhovno bogatijo. Astronomija nam je na primer dala spoznanje, da je Zemlja le eden izmed planetov našega osončja, da je Sonce le eno izmed milijard sonc v Rimski cesti in da je Rimska cesta le ena od milijard galaksij v vesolju.

Tudi odkritja v matematiki nam širijo obzorje. Navedimo dva primera. Prvi je v zvezi z neevklidsko geometrijo. Že Grki v starem veku so spoznali, da se da zgraditi vsa geometrija z logičnim sklepanjem iz majhnega števila aksiomov, ki so jih tedaj imenovali postulati. Evklid je namreč osnoval geometrijo na petih postulatih. Za postulate so takrat mislili, da so resnice, ki so našemu razumu tako razvidne, da jih ni treba dokazovati. Peti postulat, ki je v zvezi z vzporednicami, pa se ni zdel tako očitna resnica kakor drugi štirje. Je pa peti postulat za našo geometrijo nujno potreben, ker se dajo le z njim dokazati nekateri osnovni izreki geometrije, na primer izrek, da je vsota trikotniških kotov enaka 180°. Toda če peti postulat ni očitna resnica, je izrek in ga je treba potemtakem dokazati. Res so bili že v starem veku poskusi, da bi ga dokazali s pomočjo postulatov, ki niso vzbujali dvomov. Ko je v novem veku matematika ponovno vzcvetela, so s takšnimi poskusi nadaljevali. Skoraj dva tisoč let je trajalo, preden so se matematiki dokopali do spoznanja, da so ti poskusi zaman, ker je peti postulat pravi aksiom, to se pravi, ni dokazljiv iz drugih aksiomov evklidske geometrije. Posledica tega je, da obstaja tako imenovana neevklidska geometrija, namreč

geometrija, v kateri veljajo vsi aksiomi evklidske geometrije razen aksioma o vzporednicah. Raziskave v zvezi z aksiomom o vzporednicah so nam dale nova spoznanja o naravi geometrijskih in drugih aksiomov, hkrati pa so nam odkrile geometrije, o katerih se ljudem prej niti sanjalo ni.

Drugi primer je iz matematične logike. Raziskave osnov geometrije so bile ena od pobud za raziskave osnov matematike nasploh in za nastanek matematične logike. Nekatere dosežke v matematični logiki pa lahko uvrstimo med najpomembnejša spoznanja dvajsetega stoletja. Naj omenim samo rezultate, ki jih je dobil K. Gödel v začetku tridesetih let, predvsem njegovo odkritje, da ni mogoče dokazati neprotislovnosti kakšne formalizirane matematične teorije samo z metodami logičnega sklepanja, ki so formalizirane v teoriji.

3. Matematika je lepa in zanimiva znanost. Slovenski matematik J. Plemelj je na primer zapisal, da mu je bila matematika življenjska potreba in umetniški užitek. V tem pogledu ni bil izjema. Lepoto matematike poudarjajo vsi njeni največji ustvarjalci. Angleški matematik G. H. Hardy, ki je imel rad paradokse, je izjavil, da ni nikoli v življenju napravil nič koristnega, da pa je vsekakor ustvarjal nekaj, kar je vredno ustvarjati. Ukvarjal se je namreč s področji matematike, za katera je mislil, da se ne bodo dala praktično uporabiti.

Lepoto matematike lahko primerjamo z lepoto gora, matematike pa s planinci. Pravi planinec uživa ob lepem razgledu, še bolj pa pri plezanju na vrhove in premagovanju strmin. Podobno pravega matematika najbolj veseli ustvarjanje in odkrivanje novega ter reševanje trdih matematičnih orehov. Ne zadovoljuje se samo s študijem in občudovanjem že izdelanih teorij, pa naj bodo te teorije še tako lepe in zanimive.

4. Matematika je prav tako kakor naravoslovje občečloveška. Z njo so se ukvarjali in se ukvarjajo ljudje, ki so pripadniki najrazličnejših ras, narodov in kultur. Zato pomeni matematika vez med narodi. V tem pogledu lahko primerjamo njeno vlogo z vlogo, ki jo je imela v Evropi Cerkev v srednjem veku. Če se je popotnik tedaj odpravil v tujo deželo, je tam naletel na drugo govorico, drugačne šege in običaje. Cerkve pa so bile povsod podobno zidane, obredi enaki in jezik latinski. Če je torej popotnik stopil v cerkev, se je vsaj v njej počutil kakor doma. Nekaj podobnega velja za matematiko v sodobnem svetu. Povsod poučujejo na šolah približno ista poglavja matematike, matematiki pa se ukvarjajo z enakimi problemi. Zato se dva matematika med seboj razumeta ne glede na to, kateremu narodu ali rasi pripadata, če le delata na istem področju. Narodnost pri tem nima vloge. Odprimo matematično knjigo v tujem jeziku, pa bomo našli v njej enake formule kakor v slovenskih knjigah. Zato jezik ni velika ovira pri študiju matematične literature. Matematika je torej vez, ki je pri sporazumevanju med narodi gotovo pomembna.

Prepustimo za trenutek prosto pot domišljiji in predpostavimo, da obstajajo v vesolju planeti, ki so naseljeni z razumnimi bitji. Če bi hotela ta bitja priti v stik z nami ali mi z njimi, bi bil jezik, v katerem bi se skušali sporazumeti, verjetno matematika.

Matematika bi lahko ljudi naučila strpnosti. Razhajanja pri matematič-

nih vprašanjih se namreč dajo razčistiti. Če bi mi kdo rekel, da tiči v kakšnem mojem matematičnem delu napaka ali da kakšen sklep ni pravilen, bi to delo ponovno skrbno prebral in skušal ugotoviti, ali je bil očitek upravičen. Nikakor ne bi pred tem trdil, da imam prav jaz. Žal se povsem drugače vedemo, ko gre za kakšno mnenje, o katerem nismo in niti ne moremo biti gotovi, da je pravilno. Če nam kdo ugovarja, pogosto vztrajamo pri svojem prepričanju s toliko večjo vnemo, kolikor je to prepričanje težje utemeljiti z dokazi.

5. Nekatera področja matematike, predvsem teorija števil, so znana po tem, da obstajajo v njih problemi, ki so razumljivi tudi matematično neizobraženemu človeku, rešitve teh problemov pa so izredno težke ali jih sploh še niso našli. V tem pogledu je najbrž najbolj znan Fermatov problem. Naj navedem neki podoben problem. Gre za enačbo

$$y^2 + y = x^3 - x$$

Treba je poiskati vse njene rešitve, pri katerih sta x in y pozitivni celi števili. Na to enačbo naletimo, če se vprašamo po treh zaporednih naravnih številih, katerih produkt je enak produktu dveh zaporednih naravnih števil. S poskušanjem najdemo kaj kmalu rešitvi $x = 2$, $y = 2$ in $x = 6$, $y = 14$. Naša enačba je na pogled prav preprosta. Toda potrebna je bila bistroumnost velikih matematikov, da so dokazali, da sta navedeni rešitvi edini rešitvi v naravnih številih x in y. Ob tem in podobnih zgledih se človeku vsiljuje tale misel: Če so nekatera preprosta matematična vprašanja tako težka, da so jih zmogli rešiti le veliki matematiki, številnih pa doslej sploh še niso rešili, kaj naj rečemo o resnično težkih življenjskih problemih, katerih rešitev bi bila za človeštvo velikega pomena. Tak problem je na primer, kako organizirati družbo, da bo gospodarstvo v njej uspešno, pri tem pa ne bo prevelikih socialnih razlik in revščine. Pogosto nam ponujajo in tudi vsiljujejo poenostavljene navidezne rešitve za gospodarske in socialne probleme. Zgledi iz matematike učijo, da moramo sprejemati vse ponujene rešitve z veliko pridržki.

Dejstvo, da številnih razmeroma preprostih problemov niso mogli doslej rešiti niti največji matematiki, nam pove, da mora biti človek skromen; to, da so mnoge probleme le rešili in pri tem izdelali čudovite teorije, pa nas lahko navdaja s ponosom. Oboje si velja zapomniti.

6. Ali smo našli zadovoljiv odgovor na vprašanje, v čem je vrednost matematike in kaj je cilj matematičnih raziskav? Res je matematika izredno koristna v praksi in v naravoslovju, njene teorije so lepe in zanimive. To naj bi bila njena vrednost. Cilj raziskav pa naj bi bil dobiti nova spoznanja, ki nas bodo duhovno še bolj obogatila, nas navdušila s svojo lepoto in se dala tudi praktično uporabiti. Za marsikoga pa morda ta odgovor ni povsem zadovoljiv. V srednjem veku so gradili veličastne katedrale, ki jih še danes občudujejo verni in neverni. Toda katedrala pomeni vernim mnogo več kakor samo lep arhitektonski objekt in zato tisti, ki niso verni, ne zidajo katedral. Matematiki so ustvarili lepe teorije, odkrili so čudovit abstraktni svet. Toda kaj je cilj in smisel teh odkritij? Mar samo ta, da se bodo dala morda kdaj v daljni prihodnosti uporabiti, ali pa ta, da jih občudujemo kot lepe in zanimive? Kaj je tisto nekaj v matematiki, o čemer je Hardy rekel, da

je vredno ustvarjati? Sovjetski matematik I. R. Šafarevič misli, da pravi cilj matematike ne more biti uporaba v praksi, temveč v kakšni višji sferi človeške dejavnosti. To višjo sfero vidi v religiji. Ko je matematika v starem veku nastala, pripominja, je bila pri pitagorejcih del njihove religije. Zato upa, da bo zdaj postala model za rešitev osnovnega problema našega časa, ki je po njegovem mnenju tale: Odkriti najvišji religiozni cilj in smisel za kulturno dejavnost človeštva. Žal si je težko zamisliti, kako in v čem naj bi postala matematika ta model. Tudi Šafarevič ni tega natančneje povedal.

Morda je najlažje odgovoriti na vprašanje, zakaj se ljudje ukvarjajo z matematiko. Verjetno je najbližji resnici odgovor, ki se glasi: Problemi so tu in nas izzivajo. Dokler bo živel človeški rod, se bodo najbrž vedno našli ljudje, ki jih bodo skušali rešiti. Za reševanje bodo izdelali nove teorije in v teh teorijah se bodo spet odprli novi problemi.

VESTI

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1988

V minulem koledarskem letu smo prejeli pristopne izjave za članstvo le od 9 kolegov. Med njimi niso samo študenti matematike oz. fizike, ki so pred kratkim diplomirali, pač pa tudi nekaj kolegov, ki so že več let v službi.

1507. **Divjak**, Marjan
1508. **Galun**, Ivan
1509. **Levstek**, Igor
1510. **Majaron**, Boris
1511. **Mihailović**, Dragan
1512. **Prelovšek**, Uroš
1513. **Saksida**, Tanja
1514. **Udir**, Vinko
1515. **Žvab**, Ljubica

V istem obdobju smo morali črtati iz seznama članov društva kar 34 naročnikov, ki so revijo odpovedali (9), so se preselili (4) ali pa so dolžni naročnino za več kot leto dni (21).

Ciril Velkovrh

HOFMANN B., Regularization for applied inverse and illposed problems, Teubner-Verlag, Leipzig 1986, 196 str. (Teubner Texte zur Mathematik; 85).

Oglejmo si preprost primer iz matematične fizike. Homogena kovinska palica dolžine a naj bo na obeh koncih toplotno izolirana. Znana naj bo porazdelitev temperature $u(x, t)$ vzdolž palice v začetnem času $t = 0$: $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq a$. Nalogo *poišči porazdelitev temperature pri času* $T > 0$, $u(x, T) = g(x)$ znamo hitro rešiti, npr. z uporabo razvoja funkcije $u(x, t)$ v Fourierovo vrsto po trigonometričnih funkcijah. Rešitev $g(x)$ je linearna funkcija začetnega pogoja, obstaja torej linearna preslikava A, $g(x) = A f(x)$. Najpreprosteje je, da jo imamo za linearno preslikavo prostora $L^2(0, a)$ vase. Tedaj je A zvezna preslikava, podrobnejši študij pokaže, da je celo kompaktna. Ne glede na gladkost začetnega pogoja se vidi, da je g celo poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva. To pomeni, da je zaloga vrednosti preslikave A majhna množica v prostoru $L^2(0, a)$.

Včasih nas zanima začetna temperatura, če smo izmerili temperaturo palice v času $T > 0$. Jasno je, da za poljubno funkcijo $g \in L^2(0, a)$ naloga ni rešljiva, saj smo ugotovili, da mora biti g najmanj poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva. Če je g dobljena z merjenjem, gotovo ni zelo gladka funkcija.

Po zelo dolgem času T bo temperatura vzdolž palice konstantna, saj smo predpostavili, da je palica toplotno izolirana, toplotna energija se zato ohranja. Dva poljubna začetna pogoja $f_1(x)$ in $f_2(x)$, ki zadoščata pogoju $\int_0^a f_1(x)\,dx = \int_0^a f_2(x)\,dx$, bosta dala palici isto končno temperaturo. To pomeni, da zelo različni začetni pogoji privedejo do skoraj enakih končnih temperatur, če je le T dovolj velik.

Zadnji ugotovitvi kažeta, da je problem *poišči začetno temperaturo iz znane končne temperature* nekorekten. Gotovo ni rešljiv za vsako funkcijo $g \in L^2(0, a)$. Za dve končni temperaturi, ki se malo razlikujeta, se moreta začetni temperaturi močno razlikovati. V jeziku opisanega operatorja A bi mogli ti ugotovitvi formulirati takole: operator A^{-1} ni definiran na vsem prostoru $L^2(0, a)$ in ni zvezen operator.

Opisani problem imenujemo inverzni problem. Pri študiju prevoda toplote po palici moremo reševati še druge probleme. Npr., prevodnost snovi, iz katere je palica, naj bo nepoznana. Poiskati jo želimo npr. iz znane začetne in končne temperature. Ta problem imenujemo problem identifikacije parametra.

Knjiga opisuje numerično reševanje takih in sorodnih problemov. Splošna strategija približnega reševanja je:

1. Nekorektni problem regulariziramo, tj. nadomestimo ga z družino problemov, katerih reševanje je korekten problem.

2. Regularizirane probleme rešujemo tako, da jih aproksimiramo s problemom v končno dimenzionalnem prostoru.

Pri konstrukciji regulariziranih problemov je treba upoštevati vse dodatne informacije, ki jih o problemu imamo. Te so npr.: rešitev je pozitivna funkcija, rešitev je omejena, rešitev je omejena v normi primernega prostora, rešitev je monotona funkcija, rešitev je nekajkrat zvezno odvedljiva funkcija itd.

Avtor knjige ubira drugo pot. Nekorektni problem najprej aproksimira s problemom v končno dimenzionalnem prostoru (npr. diferencialno enačbo nadomesti z diferenčno), dobljeni problem rešuje aproksimativno. Če je prvotni problem nekorekten, je diskretizirani problem slabo pogojen. Pogojenost je tem slabša, čim bolje diskretizirani problem aproksimira prvotnega, tj., ko se veča dimenzija prostora, v katerem živi diskretizirani problem. Stojimo pred dilemo: kako dobro aproksimirati prvotni problem, da pri tem diskretizirani problem ne bo preveč slabo pogojen, tj. občutljiv za numerične napake pri računanju. Temu vprašanju sta posvečeni poglavji 3 in 4, ki sta jedro knjige. Poglavje 6 obravnava nelinearne nekorektne probleme. V petem poglavju je opisan pristop na osnovi teorije verjetnosti. Predpostavka, da so napake podatkov porazdeljene po nekem (navadno Gaussovem) porazdelitvenem zakonu, nam omogoči oceniti porazdelitev napake pri izračunani rešitvi. Statistične metode povedo, kako je treba poiskati približno rešitev.

Knjiga je namenjena predvsem uporabnikom, ki imajo opravka z nekorektnimi problemi. To so fiziki, geologi, metalurgi, kardiologi in drugi. Knjiga z obsežnim seznamom literature (30 + 489 citiranih enot) je primerno vodilo v obsežno teorijo reševanja nekorektnih problemov tako za uporabnike kot za študente.

Anton Suhadolc

TABELIRANJE IMPLICITNIH FUNKCIJ

FRANCE AVSEC

Math. Subj. Class. (1985) 26 B 10, 65 H 05

Z enačbo $f(x,y,z) = 0$ določene implicitne funkcije $z = z(x,y)$ ne moremo tabelirati po Newtonovi metodi na mestih, kjer je $f'_z = 0$, čeprav funkcija $z(x,y)$ tam obstaja. V članku je dan drug postopek za ta primer.

TABULATION OF IMPLICIT FUNCTIONS

The function $z = z(x,y)$, implicitly defined by the equation $f(x,y,z) = 0$, cannot be tabulated by the Newton tangent method in the domain where $f'_z = 0$. Here we present another method for such a case.

1. Problem natančnosti

V članku [1] smo tabelirali implicitno funkcijo $y(x)$, ki je določena z enačbo $f(x,y) = 0$ in začetno točko (x_0, y_0), za katero je $f(x_0, y_0) = 0$, po Newtonovi tangentni metodi

$$y_{k+1} = y_k - f(x, y_k)/f'_y(x, y_k)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. V točkah (x_m, y), kjer je $f'_y(x_m, y) = 0$, ta postopek odpove, čeprav vrednost funkcije $y_m = y(x_m)$ tam obstaja. V bližini take točke x_m moramo uporabiti t.i. dvojno iterativni postopek, se pravi, zmanjševati korak tabeliranja (Glej [1], str 103). Vsaj teoretično lahko na ta način izračunamo vrednost $y(x_m)$ tako natančno, kot le želimo.

Pojavijo pa se računske težave. V točki (x_m, y_m) sta namreč funkciji $f(x,y)$ in $f'_y(x,y)$ obe enaki nič, tako da je y_m večkratna ničla funkcije $f(x_m, y)$. Da dosežemo primerno natančnost za $y_m = y(x_m)$, se moramo dovolj približati mejni vrednosti x_m. V zgledu iz [1] je npr. za izračun štirih decimalk za y_m potrebno izračunati x_m kar na deset decimalk natančno. Če je zahtevana natančnost prevelika, računalnik tega dela ne zmore.

Kasneje bomo videli, da lahko mejni par (x_m, y_m) z lahkoto določimo iz sistema enačb

$$f(x,y) = 0, \quad f'_y(x,y) = 0 \tag{1}$$

Nasploh je pametno pri analizi vedenja implicitne funkcije že prav na začetku poiskati vse rešitve (x_m, y_m) zgornjega sistema, saj so v mnogih primerih te točke pravi mejniki grafa implicitne funkcije $y(x)$.

Če je npr.

$$f(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Po avtorjevem rokopisu je članek priredil *Milan Hladnik.*

dobimo iz zgornjega sistema relacijo

$$b^2(x) - 4a(x)c(x) = 0$$

Leva stran je diskriminanta $D(x)$ algebrske funkcije drugega reda. Kritične (mejne) točke so tiste točke x_m, v katerih je diskriminanta enaka nič, torej $D(x_m) = 0$. Če je $D(x) > 0$ v okolici točke x_m, implicitna funkcija $y(x)$ v okolici točke x_m obstaja. Če $D(x)$ sprevrže predznak v x_m, je x_m robna točka; če pa je $D(x) < 0$ v okolici točke x_m, je x_m le izolirana točka algebrske funkcije $y(x)$.

Na podobne probleme naletimo pri tabeliranju implicitne funkcije $z(x, y)$, ki je podana z enačbo $f(x, y, z) = 0$ in začetno točko (x_0, y_0, z_0), kjer je $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ (Glej [2]). Tudi tu Newtonov postopek odpove v vseh točkah, kjer je $f'_z = 0$. Teh mejnih točk je sedaj neprimerno več kot pri funkciji ene spremenljivke. V zgledu iz [2] npr. proces tabeliranja obstane vzdolž cele krivulje $|xy| = 2$. Zmanjševanje koraka tabeliranja in večanje natančnosti izračunov iz podobnih razlogov kot prej tudi tu ne pomaga. Uspešnejša je metoda reševanja podobnega sistema, kot je sistem (1). Implicitna funkcija $z = z(x, y)$ namreč na mejnem območju zadošča sistemu enačb

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'_z(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

To pa je sistem dveh enačb za dve implicitni funkciji $y(x)$ in $z(x)$.

2. Splošnejši primer

Da bi rešili zgornji sistem, si oglejmo najprej na splošno, kako z računalnikom tabeliramo več implicitnih funkcij hkrati, kadar so opredeljene z več enačbami. Zaradi enostavnosti se omejimo na primer dveh implicitnih funkcij $y(x)$ in $z(x)$ ene same spremenljivke, danih z enačbama

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

in točko (x_0, y_0, z_0), za katero velja $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ in $\psi(x_0, y_0, z_0) = 0$. Vzemimo še, da sta v neki okolici točke (x_0, y_0, z_0) funkciji φ, ψ, kakor tudi njuni parcialni odvodi φ'_y, φ'_z, ψ'_y, ψ'_z, zvezni. Nadalje naj bo v točki (x_0, y_0, z_0), se pravi zaradi zveznosti tudi v neki njeni okolici, funkcijska determinanta

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \varphi'_y, & \varphi'_z \\ \psi'_y, & \psi'_z \end{vmatrix}$$

različna od nič. Potem obstajata natanko dve implicitni funkciji $y(x)$ in $z(x)$, definirani v neki okolici točke x_0, za kateri velja $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ ter $\varphi(x, y(x), z(x)) = 0$ in $\psi(x, y(x), z(x)) = 0$ za vsak x iz te okolice (Glej [5]). Funkciji $y(x)$ in $z(x)$ sta tudi odvedljivi.

Tudi v tem primeru je graf oziroma tabelo implicitnih funkcij $y(x)$ in $z(x)$, ki sta določeni s sistemom (3), mogoče dobiti po numerični poti, če poznamo točko (x_0, y_0, z_0). Izberimo x dovolj blizu točke x_0. Da dobimo približek za funkciji y in z, ki zadoščata enačbama $\varphi(x, y, z) = 0$ in

$\psi(x,y,z)=0$, postavimo

$$\begin{aligned}\varphi(x,y_0,z_0)+(y_1-y_0)\varphi'_y(x,y_0,z_0)+(z_1-z_0)\varphi'_z(x,y_0,z_0)&=0\\ \psi(x,y_0,z_0)+(y_1-y_0)\psi'_y(x,y_0,z_0)+(z_1-z_0)\psi'_z(x,y_0,z_0)&=0\end{aligned}$$

Iz tega sistema določimo y_1 in z_1:

$$\begin{aligned}y_1&=y_0-(\varphi\psi'_z-\psi\varphi'_z)/\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\\ z_1&=z_0-(\psi\varphi'_y-\varphi\psi'_y)/\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\end{aligned}\tag{4}$$

Funkcije in parcialni odvodi so izračunani v točki (x,y_0,z_0). Z uporabo teh obrazcev dobimo zaporedje parov (y_1,z_1), (y_2,z_2), $\cdots$, za katero je mogoče pokazati, da konvergira k paru $(y(x),z(x))$, če je le x dovolj blizu začetne vrednosti x_0 (Glej [3]).

Pri pogoju, da je korak tabeliranja dovolj majhen, lahko na ta način postopno tabeliramo funkciji $y(x)$ in $z(x)$ v sosednjih točkah. Proces je uspešen, dokler je $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}\neq 0$. Mejne točke, kjer je $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}=0$, pa moramo posebej poiskati iz sistema enačb

$$\varphi=0,\quad \psi=0,\quad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}=0$$

Vrnimo se k enačbama (2), ki predstavljata poseben primer sistema (3). Če je torej $\partial(f,f'_z)/\partial(y,z)\neq 0$, lahko implicitni funkciji $y(x)$ in $z(x)$ tabeliramo z iterativnim postopkom po formulah (4). V [2] smo npr. v prvem kvadrantu ravnine xy tabelirali prvo vejo algebraične funkcije $z(x,y)$, implicitno podane z enačbo

$$f(x,y,z)\equiv z^4-2(x+y)z^3+(x^2+y^2+3xy)z^2-xy(x+y)z+1=0$$

Tabeliranje se nam je ustavilo na robu, določenem s krivuljo $xy=2$, kjer je $f'_z=0$. Funkcijska determinanta $\partial(f,f'_z)/\partial(y,z)$ je na robu enaka $f'_y f''_{zz}$ in je tam, kot se lahko hitro prepričamo, povsod različna od nič. Ker poleg tega poznamo robno točko $(\sqrt{2},\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, ki zadošča enačbi $f=0$, lahko po prejšnjem implicitno funkcijo $z(x,y)$ tabeliramo tudi vzdolž roba. Rezultati so prikazani v tabeli 1.

3. Sklepna misel

Nalogo, ki smo si jo zastavili v članku [2], lahko sedaj, ko znamo tabelirati implicitno funkcijo $z(x,y)$ tudi na mestih, kjer je $f'_z=0$, rešimo nekoliko drugače. Najprej tabeliramo funkcijo $z(x,y)$ vzdolž krivulje, določene z $f=0$ in $f'_z=0$, po postopku (4), saj poznamo eno točko roba, in šele potem

tabeliramo v notranjosti območja, ki ga omejuje dobljeni rob po postopku v [2]. Pri preskoku meje lahko zaporedje približkov skonvergira k drugi veji ali celo divergira (kadar onkraj meje $f'_z = 0$ ni nobene veje več, kot je to v primeru iz [2]). Če torej najprej odkrijemo rob definicijskega območja, se takim zablodam pri tabeliranju lahko izognemo.

x	$y(x)$	$z(x)$	x	$y(x)$	$z(x)$
0.41421	4.8284	5.0444	1.6142	1.2390	2.4441
0.51421	3.8894	4.1635	1.7142	1.1667	2.4773
0.61421	3.2562	3.5920	1.8142	1.1024	2.5198
0.71421	2.8003	3.2022	1.9142	1.0448	2.5699
0.81421	2.4564	2.9292	2.0142	0.99294	2.6264
0.91421	2.1877	2.7364	2.1142	0.94598	2.6882
1.0142	1.9720	2.6018	2.2142	0.90326	2.7544
1.1142	1.7950	2.5109	2.3142	0.86422	2.8244
1.2142	1.6472	2.4538	2.4142	0.82843	2.8975
1.3142	1.5218	2.4234	2.5142	0.79548	2.9734
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	2.6142	0.76505	3.0516
1.5142	1.3208	2.4222	2.7142	0.73686	3.1318

Tabela 1

Očitno je mogoče opisani postopek tabeliranja razširiti na tabeliranje več implicitno danih funkcij s poljubno mnogo neodvisnimi spremenljivkami. Seveda morajo biti pri tem izpolnjeni pogoji za njihovo eksistenco (Glej [4]) in pogoji za konvergenco Newtonovega tangentnega postopka (Glej [3]). Na ta način lahko rešimo sistem (1) in s tem poiščemo kritične točke (x_m, y_m). Podobno je mogoče rešiti tudi sistem za kritične točke (x_m, y_m, z_m) v primeru [2]:

$$f = 0, \quad f'_z = 0, \quad \partial(f, f'_z)/\partial(y, z) \equiv f'_y f''_{zz} = 0$$

če le poznamo približek za rešitev in je

$$\partial(f, f'_z, f'_y f''_{zz})/\partial(x, y, z) \neq 0$$

LITERATURA

[1] F. Avsec, *Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitne funkcije,* Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 101-105.

[2] F. Avsec, *Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije,* Obzornik mat. fiz. **33** (1986) 137-144.

[3] L. V. Kantorovič, *O metode Newtona,* Trudy AN SSSR Mat. inst. V. A. Steklova, **28** (1949) 104-144

[4] J. Plemelj, *Diferencialne in integralne enačbe,* SAZU, Ljubljana 1960 str. 6-10.

[5] I. Vidav, *Višja matematika I,* DZS, Ljubljana 1961, str. 292

IZMERIMO INFLUENČNO KONSTANTO

ZLATKO BRADAČ

PACS 65110+c

Z občutljivim merilnikom naboja lahko naredimo v srednji šoli nekatere osnovne poskuse iz elektrostatike z malo napetostjo.

MEASUREMENT OF ε_0

By using a sensitive electric charge meter in high school some basic electrostatic experiments can be performed with low voltage.

Uvod

Večinoma je pri fiziki v srednji šoli električno polje na vrsti pred magnetnim poljem in pred elektromagnetnim valovanjem. Tudi spoznavanje osnovnih konstant pri pouku gre po enakem vrstnem redu: influenčna konstanta ε_0, indukcijska konstanta μ_0 in svetlobna hitrost c. Sicer lahko iz hitrosti svetlobe, ki je določena z dogovorom o metru, in indukcijske konstante, ki je določena z dogovorom o amperu, influenčno konstanto izračunamo. Ta pot je uporabna na univerzi, v srednji šoli pa je bolje, če influenčno konstanto izmerimo. Poskus je demonstracijski, a spretnejši učenci influenčno konstanto pri eksperimentalni vaji lahko sami izmerijo.

Obakrat izmerimo naboj na ploščatem kondenzatorju. Potrebujemo samo ploščati kondenzator, merilnik naboja in izvir napetosti, da z njim naelektrimo kondenzator. Čim manj občutljiv merilnik naboja imamo, tem višjo napetost potrebujemo. Pri poskusih s šolskimi merilniki naboja potrebujemo napetost nekaj sto do nekaj tisoč voltov. Zaradi nevarnosti, ki je povezana z visoko napetostjo, je takšen poskus za učitelja neroden, za učence pa nepriporočljiv. Iz zadrege nas reši merilnik naboja z občutljivostjo 10^{-9} As, tako da potrebujemo le napetost okoli 10 V.

Najprej za sekundo priključimo ploščati kondenzator na izvir z znano napetostjo in nato pretočimo naboj z neozemljene plošče kondenzatorja v merilnik naboja. Iz enačbe:

$$e = \varepsilon_0 S\, U/d$$

izračunamo influenčno konstanto.

Merilnik naboja

Ploščati kondenzator in izvir napetosti najdemo v vsaki fizikalni zbirki učil, merilnik naboja pa lahko izdelamo sami. Osnovna zamisel je preprosta: z operacijskim ojačevalnikom sestavimo integrator (sl. 1 je na prvi strani ovitka). Ko povežemo drugi priključek upornika R_1 z neozemljeno ploščo naelektrenega kondenzatorja, potisne napetost na kondenzatorju naboj skozi upornik R_1 v kondenzator C_1. Operacijski ojačevalnik poskrbi, da se s plošče pretoči ves naboj [1]. Izhodna napetost U_0 je enaka napetosti na kondenzatorju C_1 in je sorazmerna s pretočenim nabojem:

$$e = C_1\, U_0$$

S takšnim merilnikom merimo naboj prek napetosti na kondenzatorju.

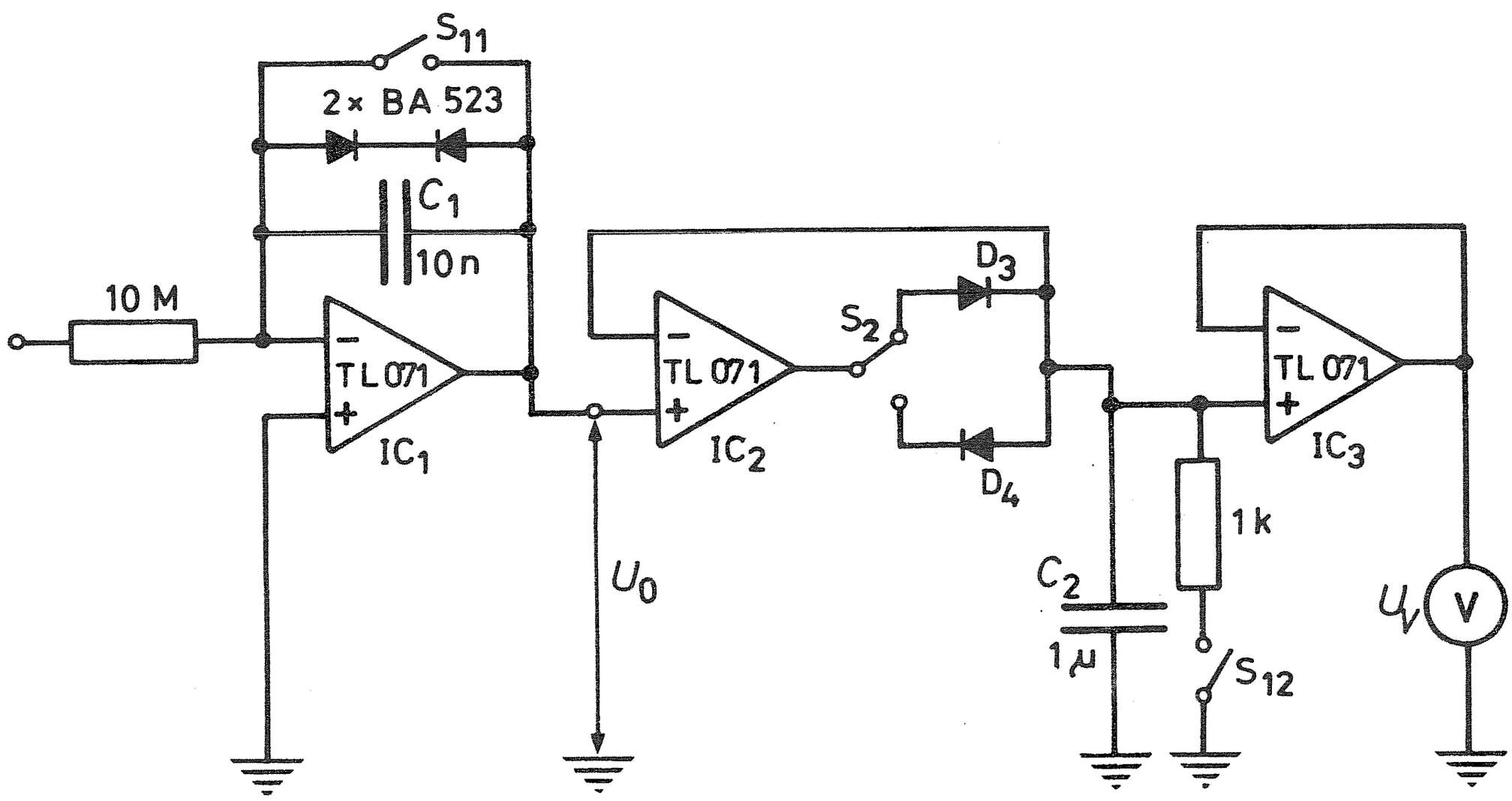
Pri praktični izvedbi vezja sta velikost napetosti U_0 in kapaciteta C_1 vsaka zase navzdol omejeni: prva z občutljivostjo šolskega voltmetra, s katerim še

zanesljivo izmerimo napetost 100 mV, druga z vhodnim tokom operacijskega ojačevalnika. Ta tok poganja prek kondenzatorja C_1 izhodna napetost. Operacijski ojačevalnik poskrbi, da se izhodna napetost s časom linearno spreminja, tako da je vhodni tok stacionaren. Pravimo, da izhodna napetost leze. Pri operacijskem ojačevalniku TL071 je vhodni tok okoli 50 pA. Če traja meritev minuto in v tem času dovolimo, da izhodna napetost zleze za 1 mV, izračunamo spodnjo mejo za kapaciteto:

$$C_1 = I\,t/U = 3\,\mu F$$

S takšno preprosto inačico merilnika naboja lahko merimo naboje, večje od okoli 10^{-7} As.

Bolj občutljiv merilnik naredimo tako, da zmanjšamo kapaciteto C_1 na 10 nF. Če dovolimo enako lezenje izhodne napetosti kot prej, meritev ne sme trajati več kot pol sekunde: približamo se torej balistični meritvi. Vendar lahko izhodna napetost potem, ko se pretoči naboj, leze navzgor ali navzdol, odvisno od nastavitve operacijskega ojačevalnika in od znaka merjenega naboja. To slabost merilnika odpravimo z upornikom, ki ga priključimo vzporedno s kondenzatorjem C_1 [2]. S tem zagotovimo vhodni tok iz izhodnega priključka operacijskega ojačevalnika skozi upornik in mimo kondenzatorja. Če zanemarimo spremembo izhodne napetosti za 10 mV, je pri vhodnem toku 50 pA zgornja meja upora enaka 200 MΩ. Dovolj velik upor dobimo tako, da povežemo dve nasprotno postavljeni silicijevi diodi. Zaradi dodatnega upora se sedaj kondenzator nadzorovano prazni s časovno konstanto nekaj sekund in po meritvi izhodna napetost vselej pade proti nič.



Sl. 2. Vezje merilnika naboja

Z boljšo občutljivostjo smo nekaj izgubili: naboj naj se pretoči v sekundi. Pri daljšem času se kondenzator že med meritvijo zaznavno izprazni in največja izhodna napetost ni več sorazmerna s pretočenim nabojem. Pri poskusih v elektrostatiki so kapacitete merjencev do približno 1 nF in ni bojazni, da bi se naboj prepočasi pretočil. Poleg tega meritev ni več tako udobna, saj moramo v delu sekunde odčitati največji odklon voltmetra. To težavo odpravimo v naslednjem koraku.

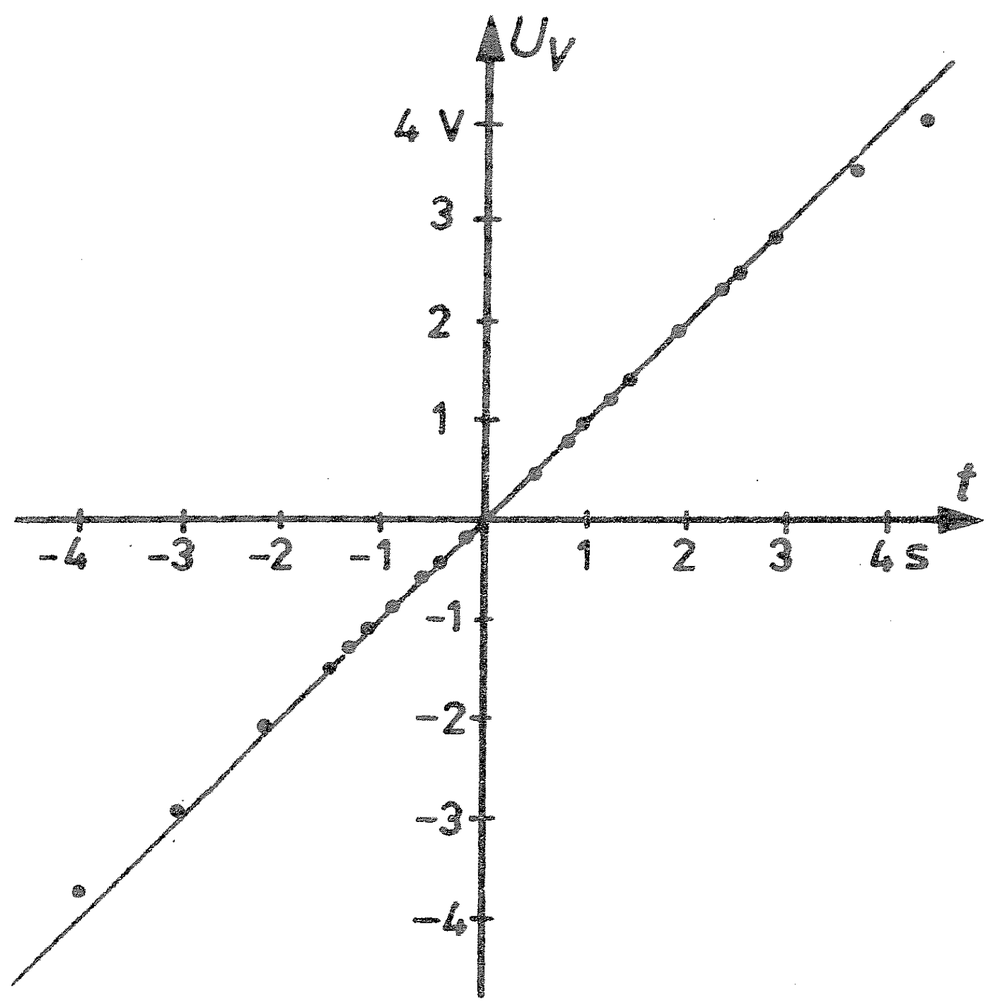
Osnovni inačici merilnika naboja dodamo vezje (sl. 2), ki si zapomni najvišjo napetost. Vezju pravimo sledilnik najvišje napetosti (angl. peak detector). Osnovno funkcijo opravita dioda D_3 ali dioda D_4 in kondenzator C_2. Kondenzator se skozi priključeno diodo polni med naraščanjem izhodne napetosti U_0. Ker meri časovna konstanta pri polnjenju okoli 10^{-4} s, je napetost na kondenzatorju C_2 za napetostjo U_0 zanemarljivo malo zakasnjena. Ko pa začne napetost U_0 padati, se zaradi diode kondenzator ne prazni. Po meritvi ostane na kondenzatorju napetost, ki je enaka najvišji napetosti med meritvijo.

Operacijska ojačevalnika IC2 in IC3 opravljata pomožni nalogi: prvi popravi napetost na kondenzatorju C_2 za padec napetosti na diodi D_3, drugi prepreči prehitro praznjenje kondenzatorja C_2 zaradi priključenega voltmetra.

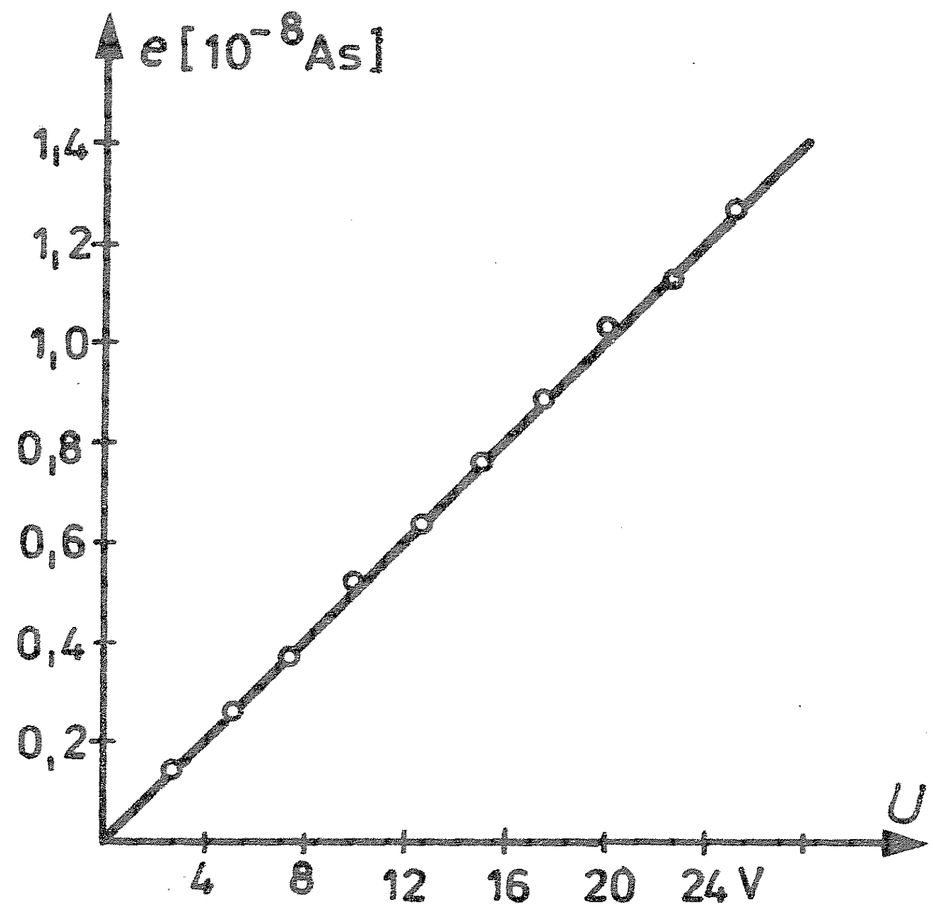
Dve diodi sta potrebni zato, ker je merjeni naboj lahko pozitiven ali negativen in je tudi napetost U_0 negativna ali pozitivna. Če merimo pozitivni naboj in je priključena dioda D_3, je napetost U_v enaka nič. Napetost U_0 je negativna in kondenzator C_2 se ne more napolniti. V tem primeru je potrebno priključiti diodo D_4 in meritev ponoviti. Pred naslednjo meritvijo z dvojnim stikalom S_{11} in S_{12} izpraznimo oba kondenzatorja.

Meritve

Merilnik naboja najprej umerimo. Naboj pretakamo s konstantnim tokom in ga izračunamo z enačbo $e = I\,t$. Uporabimo napetost 1,00 V, deset zaporedno vezanih upornikov po 10 MΩ, dvojno stikalo in uro. S stikalom priključimo napetost in sprožimo uro. Napetost poganja tok $1{,}00 \,.\, 10^{-9}$ A. Ko stikalo izklopimo, se ura ustavi in tok preneha teči (sl. 3).



Sl. 3. Umeritveni diagram merilnika naboja. Premica kaže pričakovano odvisnost $U_v = (I/C)\,t$ pri $I = 1{,}00 \,.\, 10^{-8}$ A in $C_1 = 10{,}0$ nF



Sl. 4. Naboj na plošči kondenzatorja v odvisnosti od napetosti med ploščama pri $S = 0{,}123$ m² in $d = 2{,}00$ mm

Pri daljšem času od 2 sekund pokaže merilnik manj kot pričakujemo glede na linearno odvisnost pretočenega naboja od izhodne napetosti merilnika. Kondenzator C_1 se namreč že opazno izprazni. Skalo voltmetra lahko sedaj preuredimo: 1,00 V ustreza $1{,}00 \,.\, 10^{-9}$ As.

Z naslednjim poskusom izmerimo influenčno konstanto. Poleg merilnika naboja in izvira male napetosti potrebujemo še ploščati kondenzator, pri katerem lahko natančno nastavimo razdaljo med ploščama. Preprost kondenzator sestavimo iz dveh aluminijastih plošč, namenjenih za prometne znake. Prvo ploščo položimo vodoravno na mizico in jo ozemljimo, tako da je mizica lahko prevodna. Na prvo ploščo postavimo enake, nekaj milimetrov debele plastične distančne ploščice. Drugo ploščo položimo na ploščice, pa imamo kondenzator, ki mu lahko izmerimo razsežnosti na nekaj odstotkov natančno.

Ploščati kondenzator naelektrimo, nato naboj pretočimo v merilnik naboja. Poskus večkrat ponovimo z različnimi začetnimi napetostmi na kondenzatorju. Iz strmine premice, ki povezuje meritve v diagramu, izračunamo influenčno konstanto: $\varepsilon_0 = 8{,}8 \,.\, 10^{-12}$ As/Vm (sl. 4). To je za šolski poskus dovolj natančno.

Če je pri pouku več časa, lahko pred računanjem influenčne konstante izmerimo še naboj na plošči kondenzatorja v odvisnosti od obratne vrednosti razmika med ploščama pri konstantni napetosti in nespremenjeni ploščini plošč in preverimo enačbo $e = \varepsilon_0 S\, U/d$. Za poskus potrebujemo zdaj več različnih nizov distančnih ploščic. Merilnik naboja lahko uporabimo še pri nekaterih drugih poskusih, na primer pri merjenju naboja na naelektrenih telesih in pri indukciji.

Didaktični vprašanji

Opisani poskus sodi med temeljne poskuse v elektrostatiki in je zaželen pri fiziki v srednji šoli. Ker uporabljamo malo napetost, poskus ni nevaren. Glede na sposobnosti učencev in razpoložljive naprave naj se učitelj odloči za demonstracijski poskus ali za eksperimentalno vajo učencev. Pri manj sposobnih učencih se težavne vaje ponavadi izrodijo v eksperimentiranje po navodilih.

Drugo vprašanje je povezano z uporabo računalnika pri pouku. Prek merilnega vmesnika računalnik izmeri kapaciteto ploščatega kondenzatorja, nato pa influenčno konstanto izračuna. Meritev in račun sta hitra in udobna, primerna za tistega, ki fizikalno vsebino poskusa že pozna. Učenec pa pri takšnem načinu meritve bolj razmišlja o vodenju računalnika kot o raziskovanju narave. Pri osnovnem pouku fizike, pri tem izvzamemo predmet Fizikalna merjenja, krožke in podobne dejavnosti, naj bo uporaba računalnika podrejena ciljem pouka.

LITERATURA

[1] J. Pahor, *Elektronske enote za obdelavo merskih podatkov* Obzornik mat. fiz. 30 (1983) 133.

[2] J. Pahor, *Gradivo za 16. fizikalno olimpiado* (neobjavljeno).

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake (glejte Slovenski pravopis DZS, Ljubljana 1962.)

DEMONSTRACIJSKI POSKUSI IZ FIZIKE POLPREVODNIKOV

PETER GOSAR in LIDIJA BABIČ

PACS a 7220-v
a 0150-Mn

Članek obravnava nekatere osnovne poskuse iz fizike polprevodnikov za srednjo šolo. V prvem delu podaja potrebno teorijsko ozadje za razumevanje pojavov, v drugem pa podrobneje opiše več poskusov.

ELEMENTARY EXPERIMENTS IN SEMICONDUCTOR PHYSICS

In the paper some elementary experiments in semiconductor physics for secondary school are presented. The first part deals with the necessary theoretical background, whereas in the second part some details of the experimental set-up are given.

Uvod

Pri pouku fizike v srednjih šolah je čutiti izrazito pomanjkanje enostavnih demonstracijskih poskusov iz fizike trdnih snovi. V želji, da bi delno zapolnili to vrzel, opišemo v članku nekaj demonstracijskih poskusov iz fizike polprevodnikov. Cilj, ki smo ga imeli pri izbiri poskusov, je bila preprosta fizikalna razlaga in tudi razmeroma preprosta izvedba poskusov. Zavedamo se, da so nekateri od predlaganih poskusov prezahtevni za širši krog dijakov, bodo pa zagotovo primerni za fizikalne krožke.

Poročilo o trinajstih demonstracijskih poskusih razdelimo na dva dela. Prvi obravnava osnove fizike polprevodnikov, ki je potrebna za kvalitativno razumevanje poskusov, drugi del pa eksperimentalne in tehniške podrobnosti. Poskusi brez ustrezne fizikalne razlage nimajo pravega smisla. Na srednješolski ravni se ne bi smeli zadovoljiti zgolj z opisom pojavov. Z navodili bi radi dosegli, da bodo učitelji fizike lahko sami izvedli poskuse.

Osnove fizike polprevodnikov

V kristalih so atomi tako blizu, da lahko elektroni iz njihovih višjih elektronskih lupin preskakujejo z atoma na atom. Govor je predvsem o valenčnih elektronih. Tipičen primer je baker z enim valenčnim elektronom. Valenčni elektroni se v bakru gibljejo po vsej prostornini kovine. Vzrok za električno prevodnost tiči ravno v gibljivosti valenčnih elektronov. Na gibljivost elektronov in s tem na prevodnost kovine vplivajo pri višjih temperaturah toplotna nihanja atomov. Upor kovin z rastočo temperaturo narašča, ker nihanja atomov ovirajo gibanje elektronov (Poskus 1).

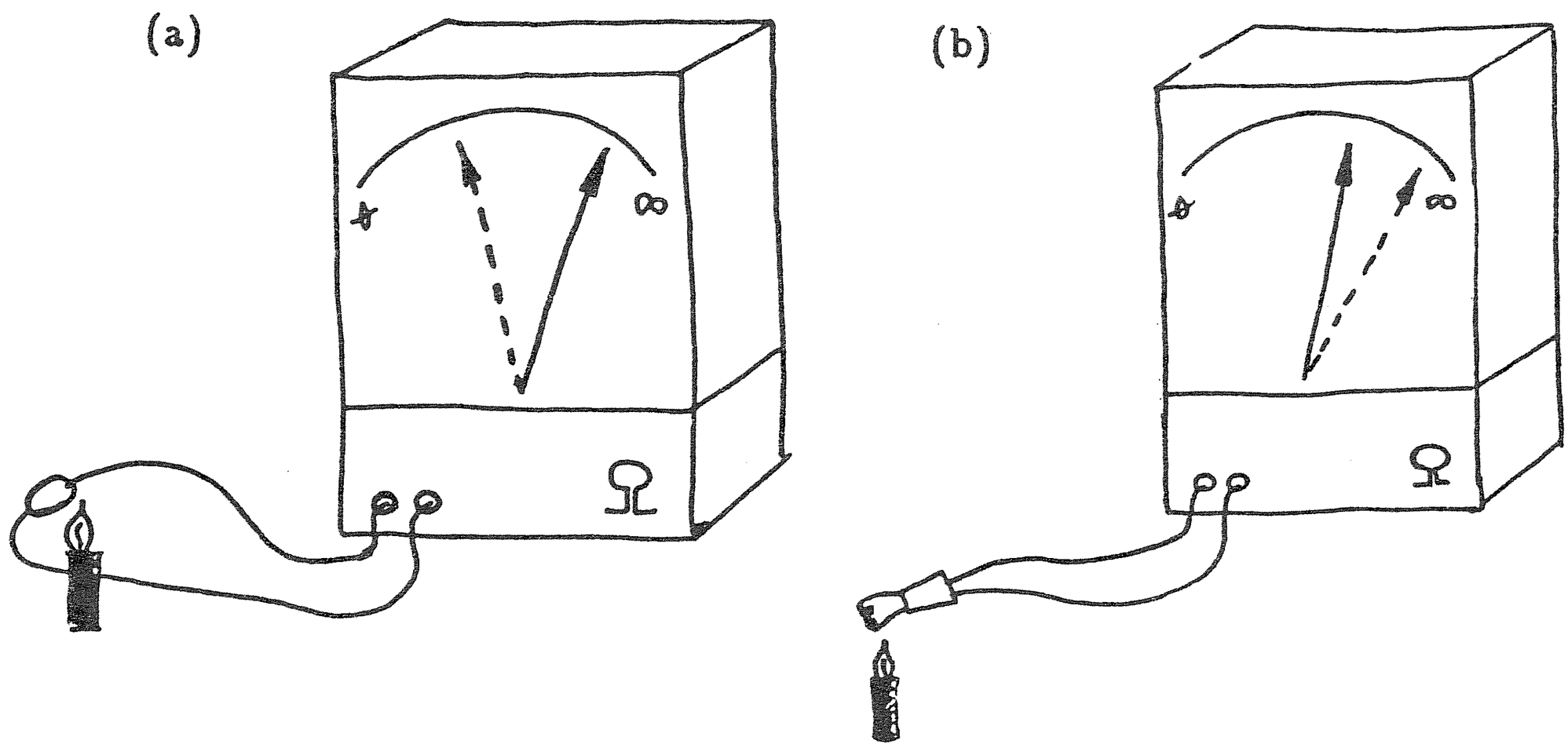
Vsi kristali niso dobri prevodniki. Poznamo tudi izolatorje, ki kljub valenčnim elektronom slabo prevajajo. Včasih elektron ne more preskočiti z atoma na sosednji atom, namreč tedaj, ko je ustrezna elektronska lupina sosednjega atoma že popolnoma zasedena z elektroni. Paulijev princip prepoveduje dvojno zasedbo nivojev. Vidimo, da morajo biti snovi s popolnoma

zasedenimi valenčnimi lupinami izolatorji. Izolatorji so kristali žlahtnih plinov, pa tudi ionski kristali, kot na primer kristal NaCl, v katerem sta pri pozitivnem natrijevem ionu in negativnem klorovem ionu valenčni lupini popolnoma zasedeni. Izolator postane delno prevoden le pri višjih temperaturah. Z rastočo temperaturo pride v atomu do vzbujanja elektronov z valenčnih nivojev na bližnje višje elektronske nivoje. Elektroni na teh nivojih pa se lahko po kristalu prosto gibljejo podobno kot pri kovini.

V zvezi s tako sliko elektronskih procesov v izolatorjih govorimo o valenčnem in prevodnem pasu izolatorja. Valenčni pas zajema energijske nivoje, ki jih zasedajo valenčni elektroni. Ta pas je pri nizkih temperaturah popolnoma zaseden z elektroni in zato ne omogoča prevajanja. Prevodni pas je prvi pas energijskih nivojev nad valenčnim pasom. Pasova loči energijska reža s širino E_g. V kristalih brez napak in primesi v energijski reži ni elektronskih nivojev. Pri izolatorjih je energijska reža široka nekaj eV. Zato šele zelo visoke temperature omogočajo maloštevilnim elektronom prehod iz valenčnega v prevodni pas. Električna prevodnost izolatorjev raste z rastočo temperaturo, ker se s tem število elektronov v prevodnem pasu povečuje.

V nepolno zasedenem valenčnem pasu pa tudi pozitivne vrzeli, to je nezasedena mesta, prispevajo k toku. Temperaturni koeficient prevodnosti je pri izolatorjih pozitiven. Prevodnost izolatorjev je v primerjavi s prevodnostjo kovin vedno majhna. Polprevodniki imajo enako strukturo energijskih pasov kot izolatorji, le da je pri njih energijska reža E_g okoli 1 eV ali še manj. Upor izolatorjev je na ta račun bistveno manjši in z rastočo temperaturo močno pada (Poskus 1).

Izolatorji so pogosto prosojni ali prozorni za vidno svetlobo. Fotoni vidne svetlobe imajo energijo med 1.5 in 3 eV, kar ne zadošča za notranji fotoefekt. Tako imenujemo izbitje elektrona iz valenčnega pasu, po katerem se elektron preseli v prevodni pas. Pri polprevodnikih so razmere drugačne. Polprevodniki so v splošnem neprozorni: silicij in germanij sta na primer siva. Vidna svetloba se v siliciju in germaniju absorbira že v plasti, ki je debela le nekaj mikrometrov. Tu je energijska reža E_g dovolj ozka, da postane



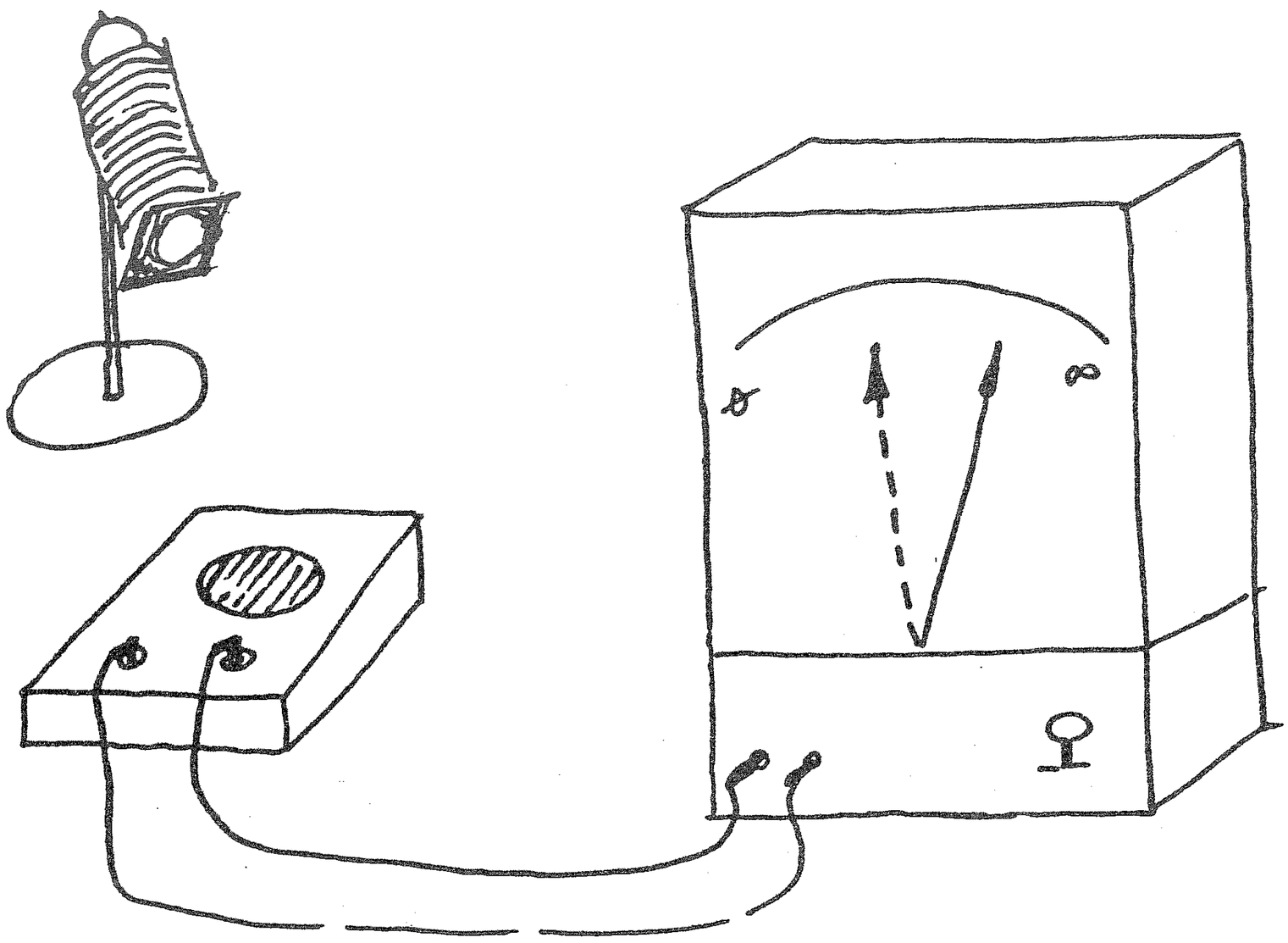
Sl. 1 Upor termistorja (a) in žarilne nitke (b) pred segrevanjem (izvlečeno) in po segrevanju (črtkano).

pri vidni svetlobi notranji fotoefekt možen. Pač pa so polprevodniki prozorni za infrardečo svetlobo. Absorpcija svetlobe v polprevodniku se odraža tudi v povečani prevodnosti osvetljenega vzorca. Fotoni izbijejo elektrone iz valenčnega pasu v prevodni pas. S tem se poveča koncentracija prosto gibljivih elektronov in vrzeli in torej prevodnost osvetljenega vzorca.

Polprevodnik	E_g	λ_m	Polprevodnik	E_g	λ_m
Ge	0.67 eV	1.85 μm	CdTe	1.5	0.83
Si	1.12	1.11	GaAs	1.58	0.78
Se	2	0.62	InAs	0.35	3.54
AlSb	1.6	0.77	InP	1.25	0.99
CdS	2.4	0.52	InSb	0.18	6.89
ZnS	3.6	0.34	PbS	0.37	3.35

Govorimo o fotoprevodnosti. Pri nekaterih polprevodnikih je povečanje prevodnosti pri osvetlitvi prav drastično (Sl. 3). Mejna valovna dolžina loči prepustno in neprepustno področje. Silicij je, na primer, pri valovnih dolžinah nad 1.1μm prozoren (Poskus 2).

Elektroni in vrzeli, ki nastajajo pri notranjem fotoefektu, ostajajo v prevodnem oziroma valenčnem pasu le določen čas. Prej ali slej se ponovno elektron združi z vrzeljo. Elektron preskoči iz prevodnega pasu nazaj v valenčni pas, če tam najde prazno mesto, to je vrzel. Govorimo o rekombinaciji elektrona z vrzeljo in o končnem življenjskem času τ z osvetlitvijo nastalih nosilcev električnega naboja. Prevodnost pri vključitvi osvetlitve najprej linearno narašča, nato pa se zaradi postopne rekombinacije elektronov z vrzelmi ustali. Za to je potreben čas z velikostno stopnjo življenjskega časa nosilcev. Iz istih razlogov tudi pri prekinitvi osvetlitve fotoprevodnost ne pade takoj na nič, ampak šele po določenem času τ (Poskus 4). Iz povedanega lahko sklepamo, da sprememba prevodnosti zaradi stalnega osvetljevanja polprevodnika raste z gostoto svetlobnega toka in z življenjskim časom nosilcev naboja. Dolg življenjski čas je ugoden za velikost fotoelektričnega signala, ne pa za hitrost odziva na spremembo osvetljenosti.



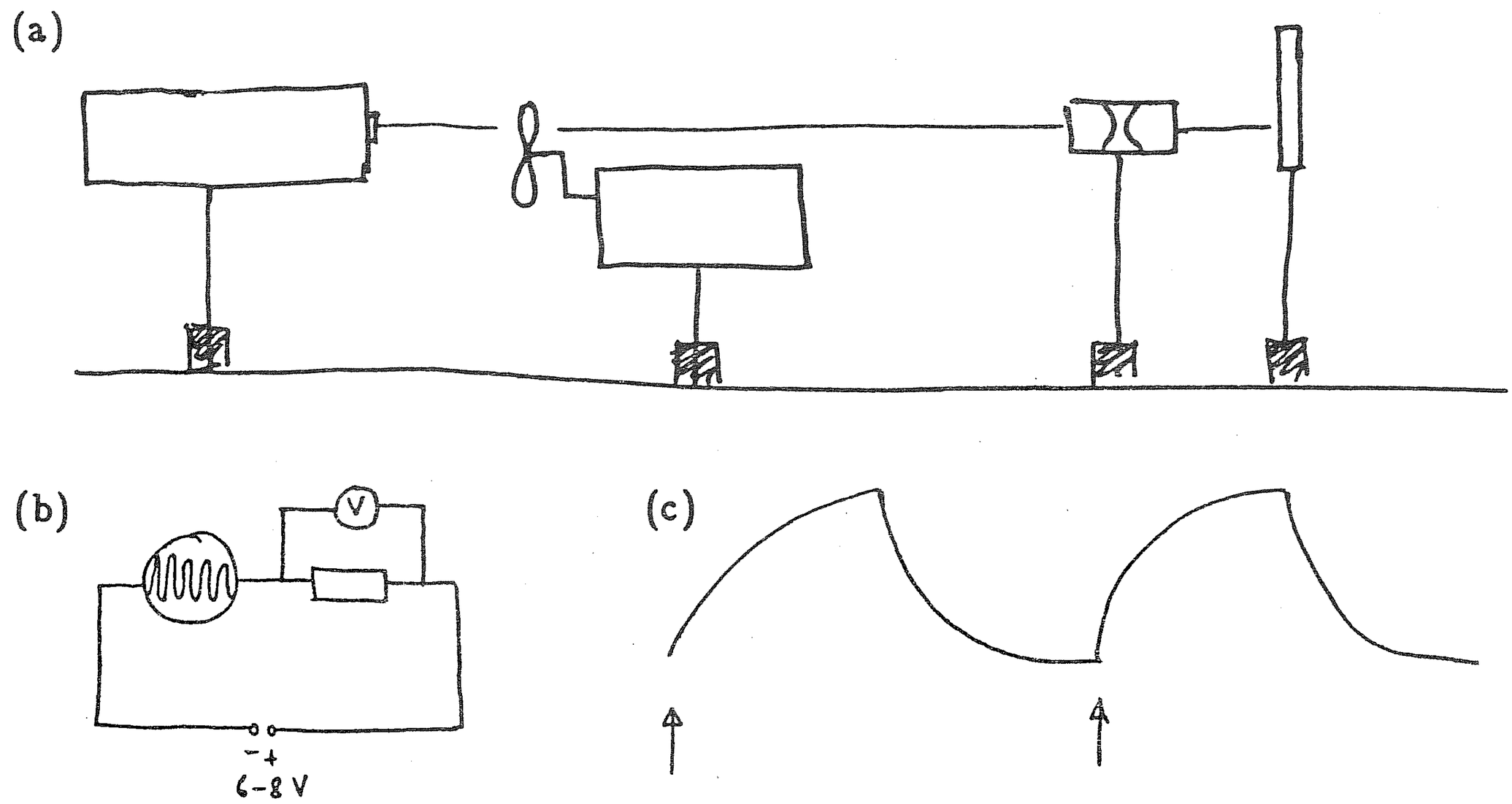
Sl. 3 Upor fotoupornika iz kadmijevega sulfata pred osvetlitvijo (izvlečeno) in po njej (črtkano).

Življenjski čas lahko merimo neposredno tudi, če sledimo na osciloskopu časovnemu poteku prevodnosti v polprevodniški ploščici, ki jo osvetlimo z bliskavko. Blisk naredi v polprevodniku pare elektron-vrzel, ki se postopoma rekombinirajo. Njihovo število pojema približno eksponentno s karakterističnim časom τ. Enako se spreminja prevodnost vzorca, katere časovni potek najlaže opazujemo z osciloskopom (Poskus 5). Življenjski čas lahko meri 1 ms ali pa le 1 ns, odvisno od vrste polprevodnika, primesi v njem in kakovosti kristalov. Življenjski čas v kakovostnih kristalih silicija je okoli 100 μs in več.

V idealno čistih kristalih polprevodnikov je število elektronov v prevodnem pasu enako številu vrzeli v valenčnem pasu, ker vrzeli pač nastajajo s prehodom elektronov iz valenčnega pasu v prevodni pas. Dodatne elektrone v prevodnem pasu pa najdemo v kristalih s primerno izbrano primesjo, na primer fosfora v siliciju. Govorimo o donorskih primeseh ali donorjih. V polprevodniku z donorskimi primesmi je število elektronov v prevodnem pasu večje od števila vrzeli v valenčnem pasu. Tak polprevodnik je tipa N.

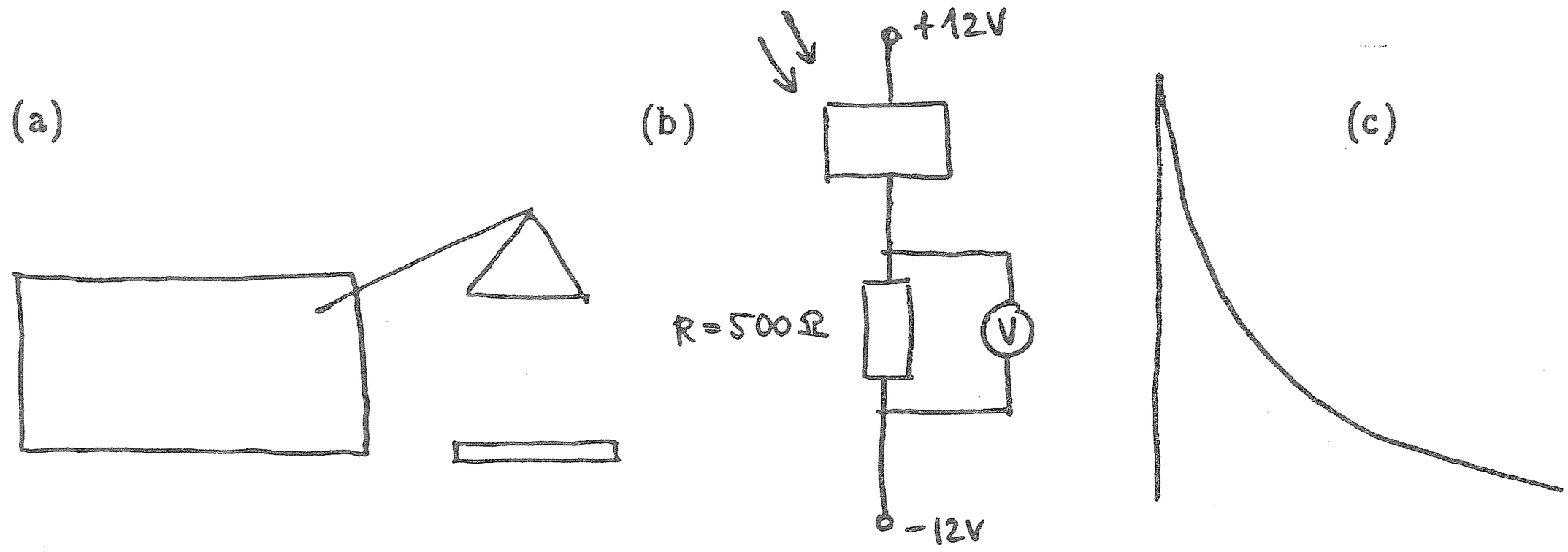
Imamo pa tudi primesi, ki odvzemajo elektrone iz valenčnega pasu. To so akceptorske primesi, na primer bor v siliciju. V polprevodniku z akceptorskimi primesmi prevladujejo vrzeli nad prostimi elektroni – in tak polprevodnik je tipa P. Če v enem področju kristala prevladujejo akceptorske primesi, v drugem pa donorske, je meja med obema področjema stik P-N.

Znano je, da je stik P-N srce polprevodniške diode. Stik P-N je prepusten za tok v smeri od področja P v področje N, v obratni smeri pa ne. Pri toku v obratni smeri bi se morali elektroni in vrzeli gibati proč od stika. To odtekanje bi povzročilo, da v bližini stika P-N ne bi bilo več prostih nosilcev naboja. Trajen tok v tej smeri torej ni možen. V resnici teče pri diodi v zaporni smeri majhen tok, ki ga razlagamo s spontanim nastajanjem parov elektron-vrzel v okolici stika zaradi lokalnih fluktuacij temperature kristala.



Sl. 4. Razporeditev laserja, prekinjevalca curka, leče in plosčice z vezjem (a), vezje na ploščici (b) in slika na osciloskopu (puščica kaže trenutek, v katerem fotoupornik osvetlimo) (c).

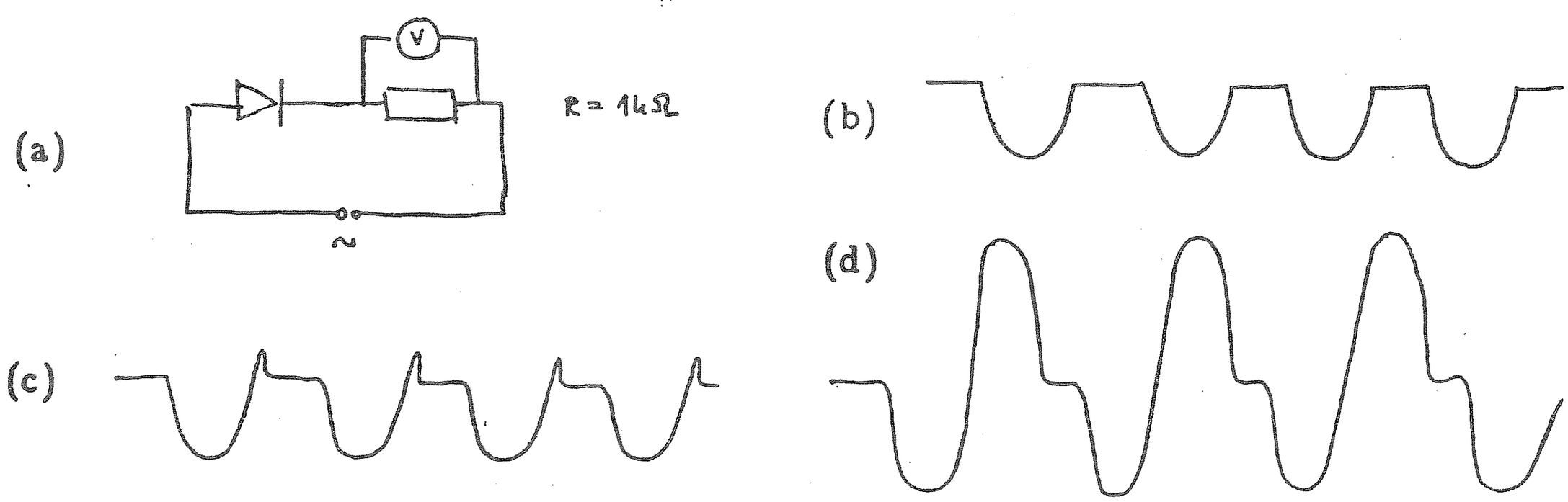
Zanimivo je vedenje stika P-N pri izmenični napetosti. Naj bo najprej na diodi napetost v prevodni smeri. Vrzeli prodirajo čez mejo P-N v področje N in v obratni smeri elektroni v področje P. Število vbrizganih vrzeli v področje N pri konstantnem toku skozi diodo s časom ne raste neomejeno, ampak se v kratkem času ustali. Vbrizgane vrzeli namreč sčasoma zaradi rekombinacije z



Sl. 5 Bliskovka in ploščica z vezjem (a), vezje na germanijevi ploščici (b) in slika na osciloskopu (c).

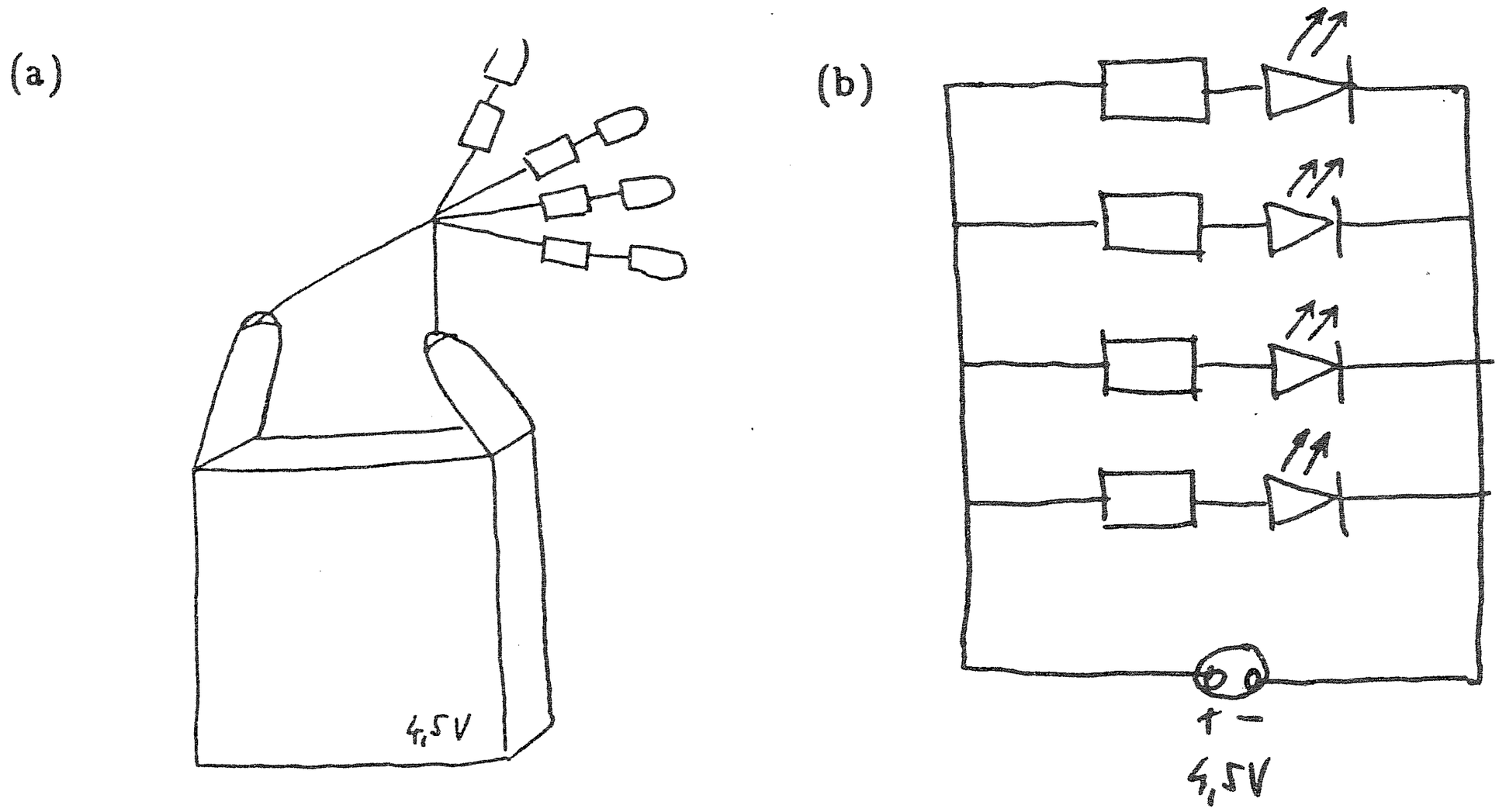
elektroni zginevajo. Zato povečanje koncentracije vrzeli opazimo le v bližini stika P-N. Enako velja za vbrizgane elektrone v področju P. Razmere so podobne kot pri fotoprevodnosti, le da tam elektroni in vrzeli nastajajo pri absorpciji svetlobe, tu pa jih vbrizgavamo. V obeh primerih opazujemo povečano koncentracijo nosilcev naboja, ki je povezana z življenjskim časom. Če sedaj na hitro preklopimo napetost na diodi iz prevodne v zaporno smer, je spočetka tok v zaporni smeri velik. Omogočajo ga nakopičene vrzeli v področju P. Šele ko tok skozi diodo izprazni zalogo nosilcev, ki so se nakopičili pri toku v prevodni smeri, začne dioda normalno delovati in se zapre. Čas praznjenja ima velikosto stopnjo življenjskega časa nosilcev (Poskus 6).

Videli smo, da se pri toku skozi diodo v prevodni smeri rekombinirajo elektroni in vrzeli v bližini stika P-N. Pri rekombinaciji preskoči elektron iz prevodnega pasu na prazno mesto v valenčnem pasu. Pri tem se sprosti energija, ki je vsaj tolikšna kot energijska reža polprevodnika. Pri polprevodnikih, kot sta silicij in germanij, se sproščena energija kaže v ob-



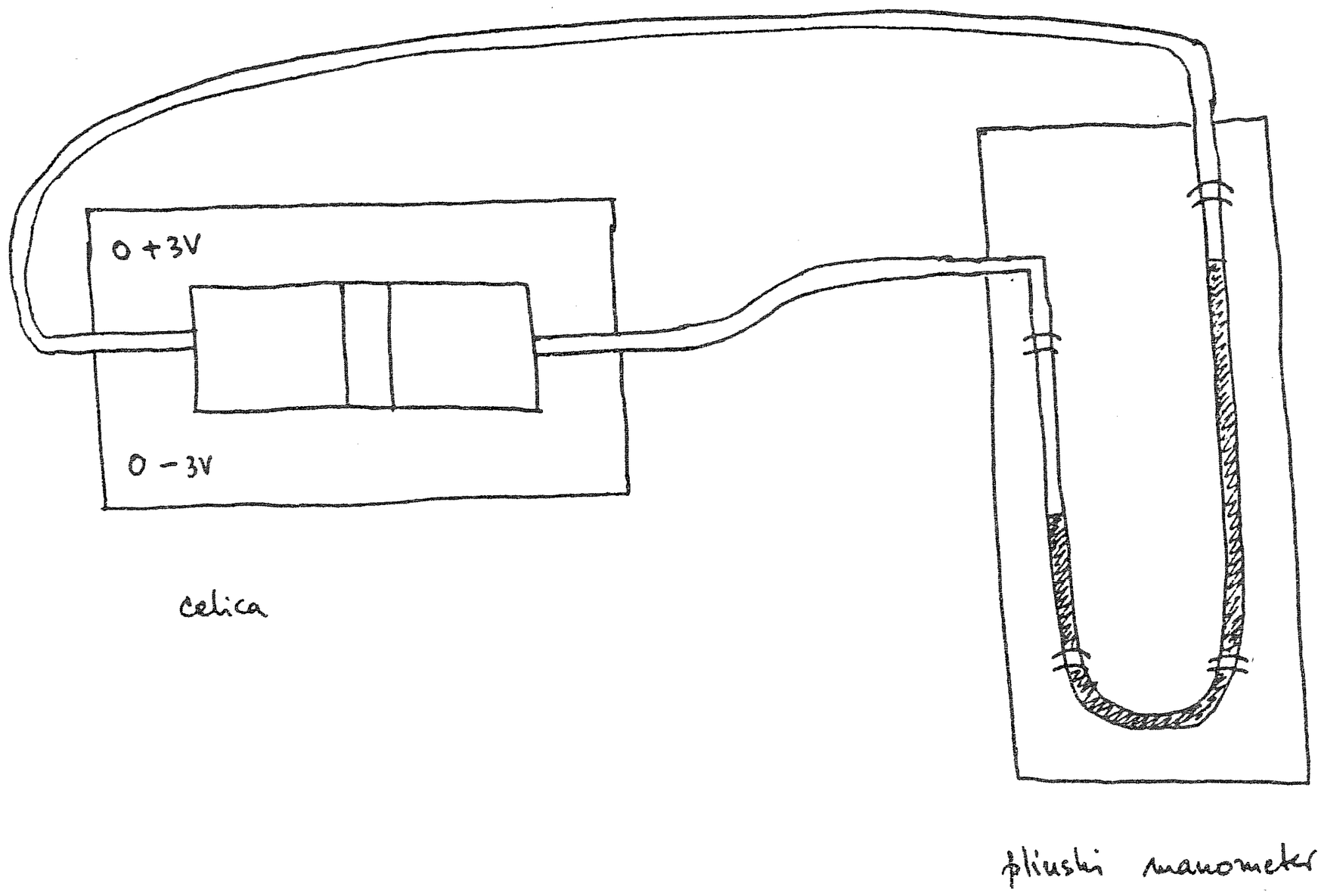
Sl. 6 Vezje z upornikom za 1 kΩ (a) in signal pri frekvencah okoli 10 Hz (b), pri frekvencah okoli 1 kHz (c) in pri zelo visokih frekvencah, ko signal ni več usmerjen (d).

liki toplote. Pri nekaterih polprevodnikih pa pride do izsevanja svetlobnega kvanta. Dioda sveti, če teče skozi njo tok v prevodni smeri. Take so sveteče diode (Poskus 7). Če naj bo svetloba vidna, mora biti energijska reža polprevodnika dovolj široka. Uporabljajo diode iz GaAs in GaP.



Sl. 7 Tako priključimo na baterijo sveteče diode (a) in vezje (b).

Z rekombinacijo elektronov in vrzeli v okolici stika P-N pri toku v prevodni smeri je povezan Peltierov pojav. Stik P-N se pri toku v prevodni smeri greje, če se pri rekombinaciji energija sprošča v obliki toplote. Večina polprevodnikov je takih. Tok v zaporni smeri pa spremlja hlajenje stika P-N. Zaporni tok je namreč možen le zaradi spontanega temperaturno aktiviranega prehajanja elektronov iz valenčnega pasu v prevodni pas. Za to je potrebna energija, ki jo kristal dobi tako, da črpa iz okolice toploto.



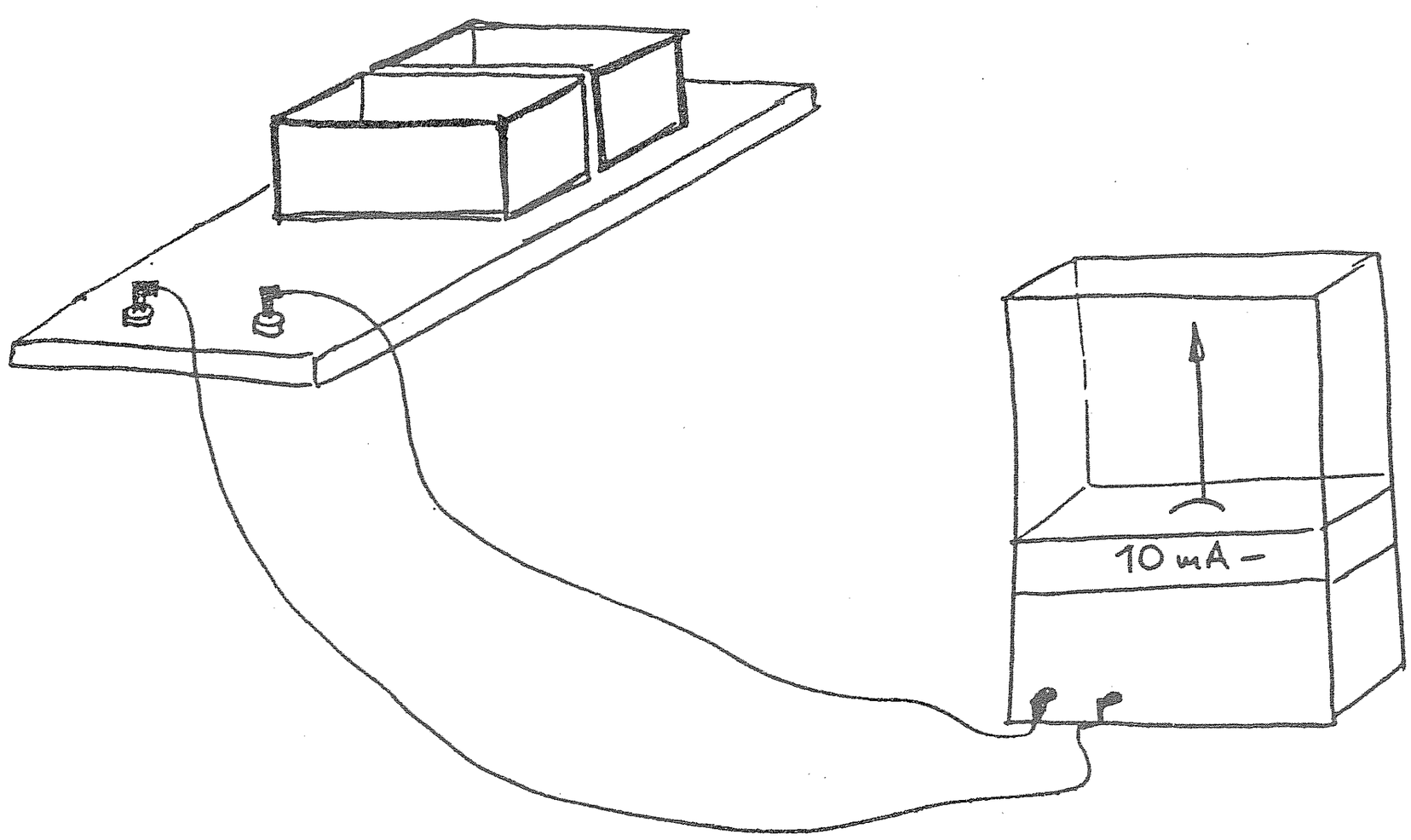
Sl. 8 Peltierov pojav, levo je celica, desno plinski termometer.

Omenili smo že, da je tok v zaporni smeri majhen. To velja za običajne diode iz silicija in germanija. Pri teh materialih je gretje ali hlajenje stika P-N komaj zaznavno. Pač pa je zelo izrazito pri nekaterih materialih, na primer ZnTe in Bi_2Te_3, ki dopuščajo večje tokove tudi v zaporni smeri in so slabi prevodniki za toploto. Če v zaporedno verigo izmenoma vežemo palice iz polrevodniškega materiala tipa N in P, se pri prehodu toka skozi tako verigo vsak drugi stik P-N greje, vmesni stiki pa se hladijo. Taka naprava deluje kot hladilnik. Peltierovega pojava ne opažamo le pri stikih P-N v monokristalih. Polprevodnik je lahko tudi polikristaliničen, To velja pri vseh uporabah pojava. Podoben pojav kot pri stiku P-N opazimo, če s kosom kovine povežemo palico polprevodnika tipa N in palico tipa P (Poskus 8).

Oglejmo si obrnjen poskus. Pri zaporedno vezanih palicah P-N-P iz polprevodniškega materiala grejemo stik P-N, stik N-P pa hladimo. Med začetkom in koncem verige se pojavi napetost, ki linearno narašča s temperaturno razliko med stikoma. To je Seebeckov pojav. Če začetno in končno palico sklenemo, steče tok, ki ima tako smer, da se zaradi Peltierovega pojava hladi vroči stik P-N in greje hladni stik N-P. Ker pa tok požene Seebeckova napetost, je s tem določen tudi znak napetosti pri Seebeckovem pojavu. Seebeckov pojav prenaša toploto z vročega na hladni stik (Poskusa 9 in 10).

Stiki P-N kažejo tudi zanimiv in zelo uporaben fotoelektrični pojav. Govorili bomo o fotodiodah. Posebna zvrst fotodiod so sončne celice. Sončna celica je običajno narejena iz silicija. Tenka silicijeva ploščica s površino več cm^2 ima na eni strani 1 do 2 μm debelo površinsko plast nasprotnega tipa, kot je tip notranjščine ploščice. Opraviti imamo z velikim stikom P-N. Na področjih P in N so narejeni električni priključki na tanko površinsko plast v obliki kovinske mreže ali pahljače. Sončno celico osvetljujemo pravokotno na površinsko plast. Pri kratkostični vezavi priključkov je tok sorazmeren z osvetljenostjo.

Pojav preprosto razložimo. Svetloba se v siliciju absorbira v bližini stika P-N zaradi majhne oddaljenosti stika od površine. Tu nastanejo pari



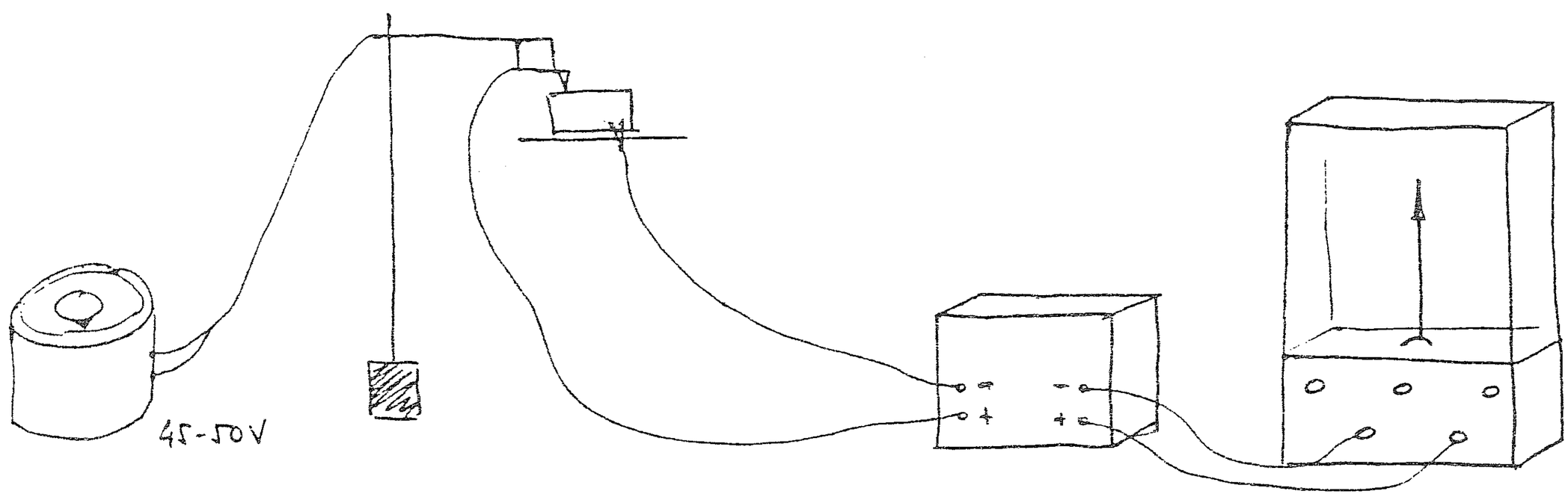
Sl. 9 Seebeckov pojav.

elektron-vrzel. V okolici stika P-N imamo vedno tanko zaporno plast, v kateri skoraj ni prostih nosilcev naboja. Pač pa je tam močno električno polje, ki preprečuje, da bi prodirale vrzeli iz področja P v področje N in elektroni v obratni smeri. Napetost na zaporni plasti je nekaj več kot 0.5 eV. Električno polje požene nastale vrzeli v smeri področja P, elektrone pa v smeri področja N. Zato imamo tok tudi v zunanjem krogu.

Nastanka električnega polja v zaporni plasti ni težko razložiti. Tok elektronov in vrzeli nastane v polprevodniku le v električnem polju ali če se koncentracija elektronov ali vrzeli spreminja s krajem. V drugem primeru govorimo o difuzijskem toku. Ta je vedno usmerjen z mesta z večjo koncentracijo na mesto z manjšo. Pri stiku P-N je gradient koncentracije elektronov in vrzeli v bližini stika P-N zelo velik. Pojavi se difuzijski tok, ki poruši prvotno električno nevtralnost polprevodnika. V področju N ob stiku nastane plast pozitivnega naboja, v področju P pa plast negativnega naboja. Zaradi tega dobimo v obeh delih zaporne plasti električno polje v smeri iz področja N v podrtočje P. To polje je tolikšno, da ustrezni tok elektronov in vrzeli izravna difuzijski tok.

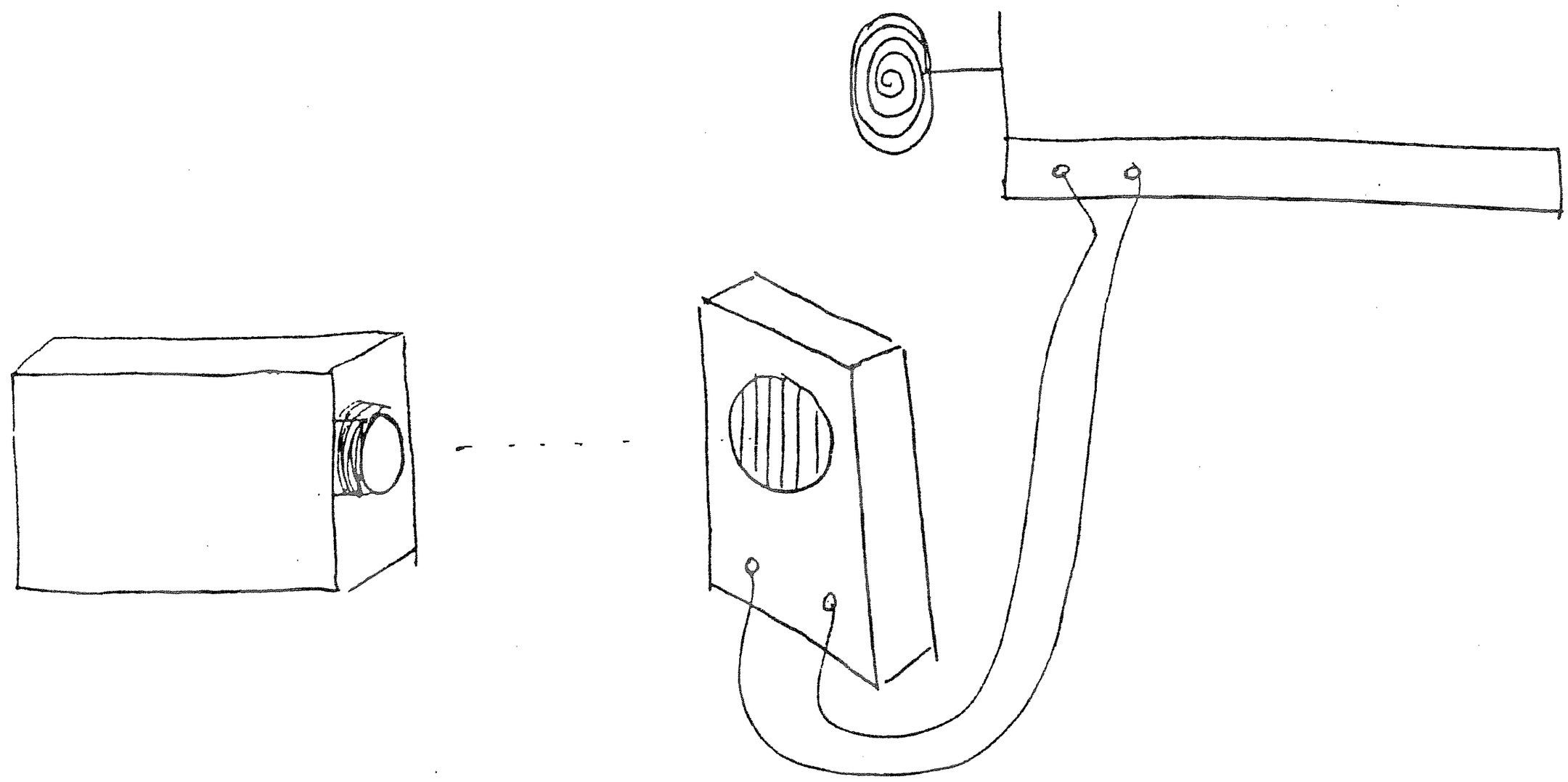
Pojav zaporne napetosti dobro poznamo pri elektrolitih. Polprevodnik tipa P smemo primerjati s kislino, polprevodnik tipa N pa z bazo. Če sta kislina in baza ločeni s polprepustno membrano, ki prepušča ione H^+ in OH^-, ne pa preostalih, nastane v membrani električno polje iz istega razloga kot pri stiku P-N.

Kadar sta pola sončne celice zvezana po delovnem uporniku, se na celici pojavi tudi napetost. Ta je največja pri odprtem krogu. Kratkostični tok je sorazmeren z osvetljenostjo, za napetost pa to ne velja. Pri majhni osvetljenosti napetost sicer raste sorazmerno z osvetljenostjo, pri večji pa napetost narašča počasneje in pride do nasičenja. Največja napetost na sončni celici je okoli 0.5 V. Tudi to zgornjo mejo napetosti lahko pojasnimo. Pri absorpciji fotona nastane par elektron-vrzel z uporabno energijo okoli E_g. Vsa preostala energija, ki jo je par prejel od fotona, se pretvori v toploto. Moč, ki jo daje sončna celica, dobimo, ko zmnožimo napetost in tok. Tok je v najboljšem primeru enak številu parov elektron-vrzel, ki nastanejo v sončni celici v enoti časa, pomnoženem z osnovnim nabojem e_0. Vidimo, da napetost ne more preseči E_g/e_0 (Poskusa 11 in 12). Energijski izkoristek sončnih celic je sorazmerno majhen. Pri silicijevih sončnih celicah ne doseže 20%. Vzroki za to so precej očitni. Le del fotonske energije se pretvori v



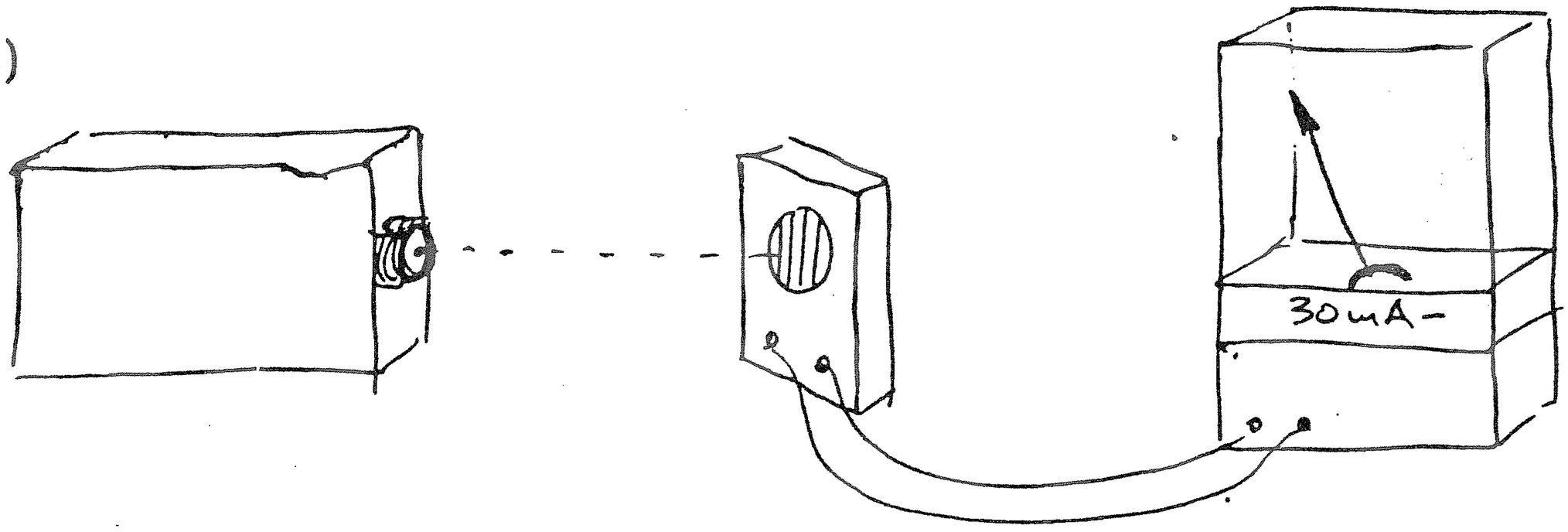
Sl. 10 Določanje tipa polprevodnika s Seebeckovim pojavom.

uporabno. Dolgovalovni fotoni z energijo, manjšo od E_g, se sploh ne absorbirajo v aktivnem delu sončne celice. Nekateri materiali, na primer GaAs s širino špranje 1.58 eV, obetajo večji izkoristek. Še vedno ostane zgornja

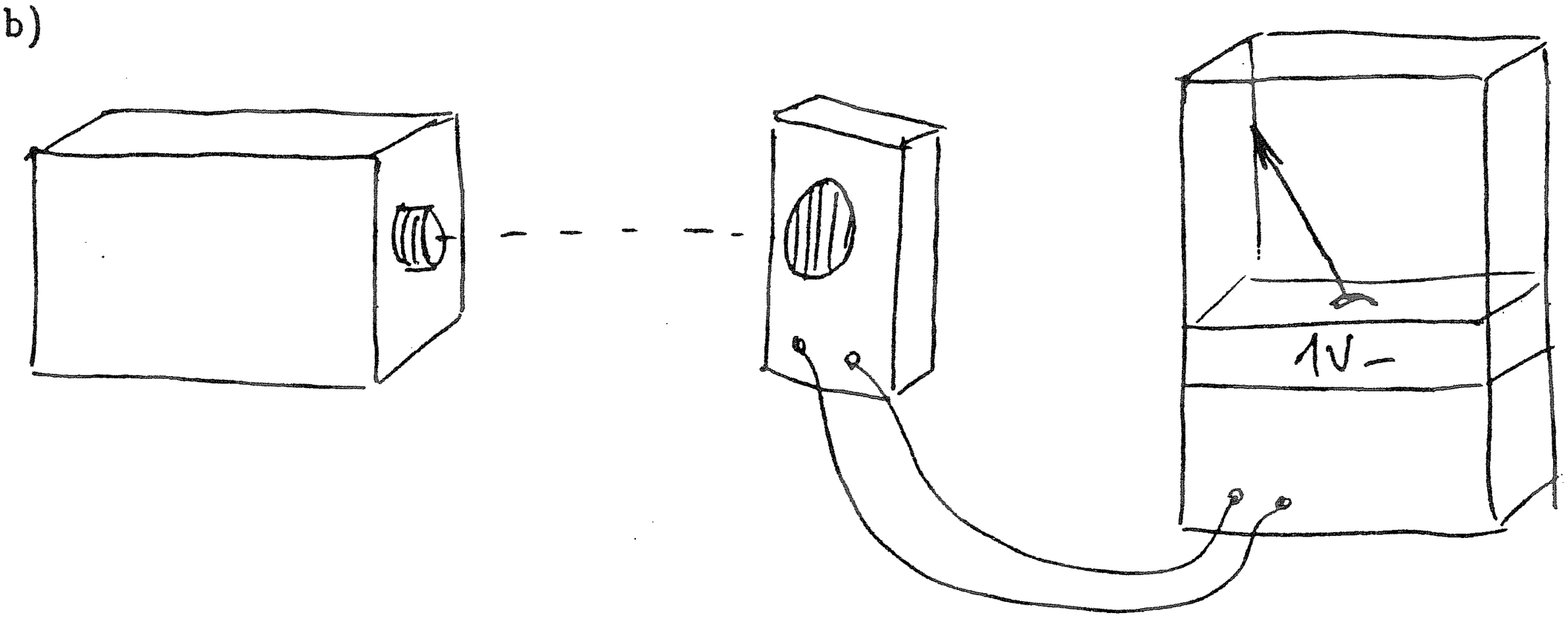


Sl. 11 Pretvarjanje svetlobne energije v električno. S projekcijskim aparatom osvetljena sončna celica poganja motorček.

(a)



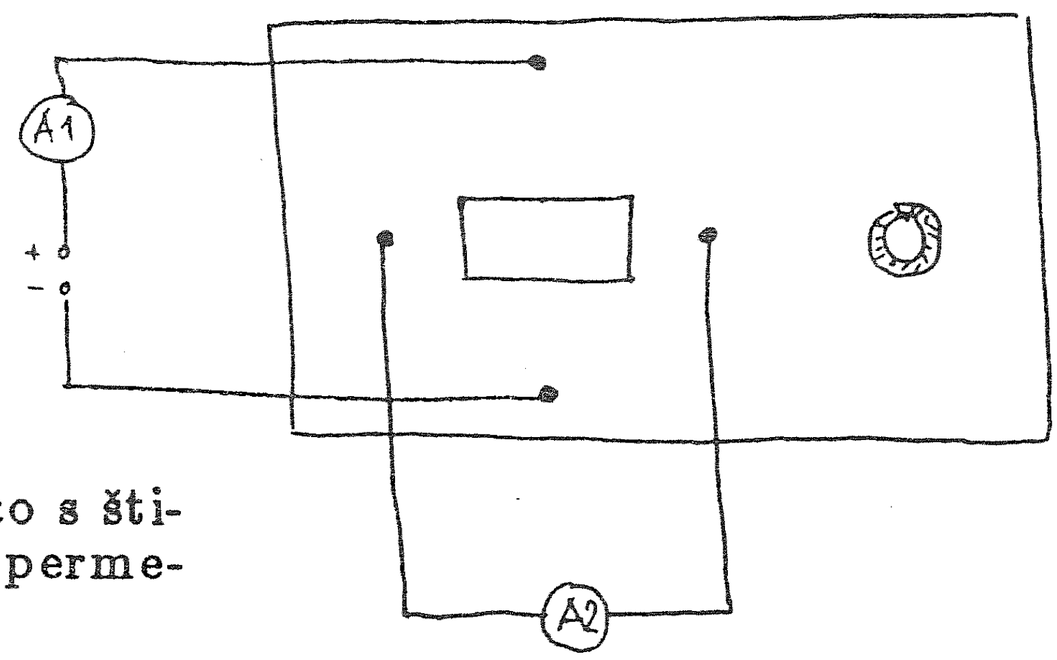
(b)



Sl. 12 Tokovni (a) in napetostni (b) odziv sončne celice.

teorijska meja za izkoristek celic s standardno zgradbo pri 25%.

Hallov pojav pokažemo s podolgovato ploščico polprevodnika s štirimi priključki. Po priključkih na obeh krajiščih pošljemo tok skozi ploščico. Preostala dva "Hallova" priključka vodita na nasprotna robova v prečni smeri približno na polovici ploščice. Ob toku skozi ploščico med Hallovima priključkoma ni napetosti, če sta narejena natančno v prečni smeri na ploščico, to je pravokotno na smer toka. Nato damo ploščico v magnetno polje z gostoto B, ki je pravokotno na ploščico. Med Hallovima priključkoma se zaradi Lorentzove sile $F = ev \times B$ pojavi Hallova napetost. Pri toku skozi ploščico se nosilci, recimo vrzeli, gibljejo v smeri toka vzdolž ploščice s hitrostjo v. Lorentzova sila kaže v pravokotni smeri. Če sta Hallova priključka kratko sklenjena, nastane zaradi Lorentzove sile tok tudi v prečni smeri na ploščico. Pri odprtem krogu pa dobimo med Hallovima priključkoma napetost, ki je tolikšna, da ustrezno električno polje izravna učinek Lorentzove sile. Smer Hallovega toka in znak Hallove napetosti sta odvisna od smeri toka skozi ploščico, smeri magnetnega polja, pa tudi od tega, ali nosijo tok vrzeli ali elektroni (Poskus 13).



Sl. 13. Hallov pojav. Na ploščico s štirimi priljučki sta vezana ampermetra.

Opis demonstracijskih poskusov z navodili

1. Temperaturni koeficient upora. Upor kovin raste, ko jih segrevamo, za polprevodnike pa je to bolj izjema kot pravilo. Na tržišču so se sicer že pojavili posistorji (tovarniško ime za polprevodnike s pozitivnim temperaturnim koeficientom upora), vendar za veliko večino polprevodnikov z naraščajočo temperaturo upor pada.

Trditvi utemeljimo s poskusom. Potrebujemo termistor (z uporom okoli 150Ω) in žarnico. Grlo žarnice previdno stanjšamo s pilo. Bučka zlahka odstopi, tako da žarilna nitka s priključkoma ostane cela. Termistor in žarnico priključimo na ohmmeter (Sl. 1). Če ju segrevamo (zadostuje plamen iz vžigalnika), opazimo, da kazalec kaže vedno večji upor pri žarilni nitki žarnice in vedno manjšega pri termistorju.

2. Prozornost silicija v bližnjem infrardečem območju. Na optično klop postavimo grelec, zaslonko in germanijevo fotodiodo, ki jo zvežemo z zrcalnim galvanometrom. Poskrbimo, da je odklon svetlobnega kazalca zrcalnega galvanometra največji. Če sedaj med grelec in zaslonko potisnemo tanko ploščico iz kovine (npr. alu folijo), ki ne prepušča infrardeče svetlobe, se svetlobno kazalo vrne na ničlo. Obratno pa tanka ploščica iz silicija prepušča infrardečo svetlobo, kar potrdi zrcalni galvanometer.

3. Odvisnost upora od osvetlitve. Za demonstracijski poskus potrebujemo le fotoupornik iz kadmijevega sulfida in ohmmeter. Fotoupornik je sestavni del angleške zbirke za merjenje Planckove konstante, ki jo je mogoče naročiti na oddelku Učila pri DZS. Ko osvetlimo fotoupornik iz kadmijevega sulfida, se upor zmanjša kar za nekaj velikostnih stopenj.

4. Časovni potek fotoprevodnosti pri prekinjanju osvetlitve. Potrebujemo laser, ki ga skozi lečo usmerimo na fotoupornik od prejšnjega poskusa. Laserski curek mehanično prekinjamo s frekvenco približno 40 Hz. Padec napetosti na uporniku vodimo na osciloskop, ki se proži sam. Občutljivost naravnamo na 1 V/razdelek, časovno bazo pa na nekaj milisekund.

5. Življenjski čas nosilcev naboja. Bliskovno luč naravnamo tako, da v sekundi posveti približno 400-krat. Z njo osvetljujemo germanijevo ploščico. Lahko uporabimo ploščico iz zbirke Unilaba za Hallov pojav. Signal kot pri prejšnjem poskusu vodimo na osciloskop. Osciloskop naravnamo na normalno proženje. Občutljivost naj bo 0.1 V/razdelek, časovna baza pa nekaj deset mikrosekund.

6. Kopičenje nosilcev naboja v diodah. S funkcijskega generatorja pripeljemo na diodo po uporniku sinusni signal. Pri nizkih frekvencah dobimo iz izmeničnega signala usmerjen signal. Če preklopimo na visoke frekvence, se signal spremeni. Pri zelo visokih frekvencah pa signal ni več usmerjen. Osciloskop preklopite na samoproženje pri občutljivosti 0.1 V/razdelek. Časovna baza naj bo nekaj milisekund.

7. Sveteča dioda. Eno ali več vzporedno vezanih diod LED z zaščitnimi upori priključimo na 4.5 V baterijo. Diode svetijo, če jih priključimo v prevodni smeri, ne svetijo pa, če jih obrnemo drugače.

8. Peltierov pojav. Celico sestavljata komori z zrakom. Loči ju stena, v kateri so termoelementi. Skozi te pošiljamo tok, da se zrak v eni komori segreva, v drugi pa hladi. Temperaturno razliko opazujemo s plinskim manometrom. Če spremenimo smer toka, se zrak hladi v komori, v kateri se je prej segreval.

9. Seebeckov pojav. Učilo izdeluje tovarna Griffin. V eno posodico nalijemo mrzlo vodo, v drugo pa vročo. V ločilni steni je baterija polprevodniških termoelementov, eno vrsto njihovih stikov grejemo, drugo pa hladimo. Med stiki se pojavi napetost. Odklon kazalca v eno ali drugo stran pa kaže Seebeckov tok. Pred poskusom naravnamo kazalec ampermetra na sredino.

10. Določanje tipa polprevodnika s Seebeckovim pojavom. Silicijev kristal grejemo s kovinsko konico. V ta namen uporabimo keramični upornik za 6 W, na katerega pritrdimo kovinsko konico. Zaradi temperaturne razlike v dveh točkah kristala nastane napetost, ki jo po ojačevalniku vodimo na galvanometer. Pred poskusom naravnamo kazalec galvanometra na sredino. Notranji upor galvanometra naj bo okoli 400Ω. Med segrevanjem kaže galvanometer vse višjo napetost.

Kristal lahko tudi ohlajamo. Vzamemo sušilnik za lase in ga preklopimo na hladni zrak. Preden ga vključimo na omrežje, izklopimo ojačevalnik, da ne pride na galvanometru do napetostnega sunka, in ga naposled ponovno vklopimo. Med ohlajanjem kristala kaže kazalec galvanometra vse nižjo napetost. Smer odklona je odvisna od tipa polprevodnika.

11. Pretvarjanje svetlobne energije v električno. Za poskus potrebujemo svetilo (žarnico, projekcijski aparat, sončno svetlobo, ...), sončno celico (zbirka Unilab) in motorček (zbirka Griffin). Na os motorčka pritrdimo kos papirja. Sončno celico osvetlimo pravokotno na površinsko plast. Oba priključka vežemo s porabnikom, to je z motorčkom. Na celici se pojavi napetost, zaradi katere se motorček zavrti.

12. Tokovni in napetostni odziv sončne celice. Sončno celico osvetlimo s svetlobnim curkom iz projekcijskega aparata. Celico priključimo najprej na ampermeter (območje 30 mA–), nato pa na voltmeter (območje 1 V–). Projekcijski

aparat bližamo sončno celici, vendar se celici ne smemo preveč približati, ker tok raste sorazmerno z osvetljenostjo. Pri podobnem poskusu, pri katerem opazujemo napetostni odziv sončne celice od osvetljenosti, pa te nevarnosti ni. Največja napetost meri približno 0.5 V.

13. Hallov pojav. Skozi Hallovo ploščico (zbirka Unilab) naj teče tok največ 50 mA (največji dovoljeni tok je napisan na ploščici). Najbolje je, če zaporedno vežemo še ampermeter (A1) za sprotno preverjanje. Hallova priključka vežemo na ampermeter (A2) z območjem 100 μA. S potenciometrom (10 kΩ) ob Hallovi ploščici lahko naravnamo ampermeter A2 na ničlo, ki naj bo na sredi.

S paličastim magnetom se previdno, tako da se je ne dotaknemo, približamo od spodaj ali od zgoraj Hallovi ploščici. Ampermeter A2 pokaže Hallov tok. Če približamo z iste strani drugi pol magneta, se kazalec odkloni na drugo stran.

OBVESTILO NAROČNIKOM

Člane Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije ter naročnike Obzornika za matematiko in fiziko, ki s položnico, priloženo v drugi številki, še niso poravnali članarine oz. naročnine za društveno revijo, vljudno prosimo, da to store čimprej. Pri izhajanju društvenega glasila nujno potrebujemo ta sredstva že v prvi polovici leta, ko še nimamo nakazane večine obljubljene subvencije. Še posebej pa vas prosimo, da s plačilom ne odlašate do 30. 6. 1989, ko je zadnji rok za še veljavno ceno 30.000.– din. S tem datumom bomo letno naročnino zvišali na 70.000.– din. V tem znesku je upoštevana inflacija in stroški opomina in velja, če nam boste znesek nakazali kmalu po izidu 4. številke.

Še enkrat vas vljudno vabimo, da ostanete naši člani in da redno plačujete naročnino za Obzornik za matematiko in fiziko.

Milan Hladnik, Ciril Velkovrh

SIEBER N., Sebastian H.-J., Spezielle Funktionen. Teubner, Leipzig 1988, 3. izdaja. 136 str.

Knjižica je 12. zvezek zbirke Matematika za inženirje, naravoslovce, ekonomiste in agronome. Obravnava osnovne pojme teorije specialnih funkcij. V prvem poglavju poda pojem ortogonalnih sistemov funkcij; kot primer izpelje osnovne lastnosti nekaterih klasičnih ortogonalnih polinomov. V drugem poglavju obravnava funkciji gama in beta. Centralni poglavji sta tretje o cilindričnih funkcijah in četrto o krogelnih funkcijah. V zadnjem poglavju so podane osnovne lastnosti hipergeometričnih funkcij.

Avtorja sta imela pri pisanju očitno pred očmi, komu je knjiga namenjena, kot je razvidno iz podnaslova knjige. Zato nekatere trditve in formule niso dokazane (asimptotika Besselovih funkcij), ne obravnavata tudi npr. pojma kompletnosti ortonormiranih sistemov.

Knjižica je pisana pregledno in razumljivo. Dodano ima zbirko nalog in zbirko formul. Nedvomno je koristen študijski pripomoček za študenta fizike in tehnike. Ne zdi pa se mi verjetno, da bi jo pri rednem študiju potrebovali naši študenti ekonomije in agronomije.

Anton Suhadolc

VESTI

PREŠERNOVE NAGRADE ŠTUDENTOM NA FAKULTETI ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO ZA LETO 1988

Tudi letos ni bila podeljena nobena Prešernova nagrada študentom matematike in fizike na Univerzi, pač pa so bile podeljene 4 take nagrade na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo

Matematika

4. Pavešić, Petar	Dokaz Dehnove leme

Fizika

12. Drevenšek, Irena	Meritev optične aktivnosti v dvolomnih kristalih
13. Jamnik, Janko	Obravnava pasivnega filtra v $Li/SOCl_2$
14. Zalar, Boštjan	Raziskava psevdospinskega stekla $Rb_{1-x}(ND_4)_xD_2PO_4$

RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V L. 1988[1]

V letu 1988 je oddelek za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani prijavil pri Raziskovalni skupnosti Slovenije 25 raziskovalnih nalog. Objavljamo kratke izvlečke opravljenih del.

Zbral in uredil *Milan Hladnik*

198. Polinomialno konveksne ogrinjače. Nosilec Franc Forstnerič, sodelavec Mitja Lakner.

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ enotni disk, $T = \partial D$ krožnica in $M \subset T \times \mathbb{C}$ taka kompaktna dvodimenzionalna podmnogoterost razreda C^k, $|k \geq 2|$, da je vsako vlakno $M_z = \{w \in \mathbb{C}\,;\ (z,w) \in M\}$ rob enostavno povezanega območja v $\mathbb{C}$, ki vsebuje izhodišče. Če je projekcija $\pi : M \to T$ submerzija, potem za vsako točko (a,b), $a \in D$, v polinomialni ogrinjači množice M obstaja funkcija f, holomorfna na D in gladka reda C^{k-0} na zaprtju D^-, tako da je $f(a) = b$ in $f(z) = M_z$ za vsak $z \in T$.

199. Spektri elementov neasociativne algebre. Nosilec Anton Cedilnik, sodelavec Bojan Hvala.

Spekter elementa neasociativne algebre je taka množica elementov druge algebre, da velja izrek o preslikavi spektra za polinome (v topoloških algebrah za limite posplošenih zaporedij polinomov). Lastnosti spektrov so obravnavane najprej splošno, nato pa posebej v potenčnoasociativnih in v topoloških algebrah.

---

1 Izvlečki raziskovalnih nalog iz leta 1987 so bili objavljeni v Obzorniku mat. fiz. 35 (1988) 87–90

200. Robne lastnosti analitičnih diskov. Nosilec Josip Globevnik, sodelavci Robert Bakula, Edgar Lee Stout.

Dokazana sta dva izreka: 1. Za vsako zaprto diskretno množico Z v zaprti enotni krogli $B_n \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, obstaja prava holomorfna imerzija f iz odprtega enotnega diska $U \subset \mathbb{C}$ v B_n, da velja $Z \subset f(U)$. 2. Če je L izmerljiva enostavno sklenjena krivulja v $\mathbb{C}^n$ in $f : U \to \mathbb{C}^n \setminus L$ omejena prava holomorfna preslikava, je odvod f' v Hardijevem razredu $H^1(U)$ in f preslika rob bU na L kot krovna preslikava reda enakega mnogokratnosti preslikave f.

201. H-lokalno konveksni prostori in njihov pomen pri prostorih operatorjev na algebrah z involucijo. Nosilec Edvard Kramar, sodelavec Pavle Saksida.

Karakterizirani so H-lokalno konveksni prostori med vsemi lokalno konveksnimi prostori in dobljeni rezultati v zvezi s H-lokalno konveksnimi prostori na operatorskih algebrah, C*-algebrah in lmc*-algebrah.

202. Posplošene ekstremne točke. Nosilec Gorazd Lešnjak, sodelavca Milan Hladnik in Boris Lavrič.

Dokazana je zveza med posplošenimi ekstremnimi točkami in ustreznimi lici konveksnih množic. Posplošene ekstremne točke tenzorskih produktov prostorov so včasih kar tenzorski produkti ustreznih točk. V posameznih primerih je podana karakterizacija posplošenih ekstremnih točk duala prostora vseh kompaktnih operatorjev.

203. Kompresije Fredholmovih elementov Banachovih algeber. Nosilec Bojan Magajna, sodelavec Peter Legiša.

Za vsako polenostavno Banachovo algebro A z neničelnim podstavkom S obstaja Banachova algebra A_s, ki je polna direktna vsota primitivnih algeber, in homomorfizem $\varphi : A \to A_s$, ki preslika S izomorfno na podstavek algebre A_s. Z uporabo tega rezultata so raziskane lastnosti elementov oblike pap, kjer je a Fredholmov element algebre A in $1 - p$ idempotent iz S.

204. Totalno pozitivni operatorji. Nosilec Matjaž Omladič, sodelavca Heydar Radjavi, Anton Suhadolc.

Teorija poševno simetričnih tenzorskih produktov Banachovih mrež omogoča kompleksnejšo obravnavo totalne pozitivnosti, ki sta jo vpeljala Gantmacher in Krein za matrike in integralske operatorje z zveznim jedrom. Teorija ima celo vrsto aplikacij, npr. pri preučevanju lastnosti lastnih vrednosti in lastnih funkcij integralskega operatorja, prirejenega Sturm-Liouvillovemu problemu.

205. Jordanska odvajanja. Nosilec Joso Vukman, sodelavec Matej Brešar.

Podan je kratek dokaz Hersteinovega izreka, ki pravi, da je vsako jordansko odvajanje na prakolobarju s karakteristiko, različno od dve, odva-

janje, in izpeljana posplošitev tega izreka na polprakolobarje. Dokazana je tudi nekomutativna razširitev Singer-Wermerjevega izreka, na obsegih pa so obravnavane jordanskim odvajajem sorodne preslikave.

206. Funkcijski prostori, generirani z bloki, na sferah in kompaktnih Liejevih grupah. Nosilec Aleš Založnik.

Funkcije, generirane z bloki na enodimenzionalnem torusu, tvorijo prostor, ki je "blizu" razredu integrabilnih funkcij (M. Taibleson, G. Weiss). V raziskovalnem delu je teorija posplošena s torusa na enotsko sfero oziroma poljubno kompaktno polenostavno Liejevo grupo. Rezultati o konvergenci veljajo skoraj povsod pri kritičnem indeksu za Cesàrova povprečja na sferi oziroma za Rieszova povprečja na grupi.

207. Indeksna teorija in posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka. Nosilka Neža Mramor-Kosta, Sodelavec Jože Vrabec

V okviru indeksne teorije za G-prostore, kjer je G kompaktna Liejeva grupa, so dokazane osnovne lastnosti indeksne funkcije in indeksni izrek, ki je posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka. Delo dopolnjujeta dva primera: sfera S^{kd-1} s prostim delovanjem grupe $G_{\mathbb{F}}$ in Stiefelova mnogoterost $V_m(\mathbb{F}^{m+n})$ s standardnim delovanjem grupe $G_{\mathbb{F}}(m)$ linearnih transformacij prostora $\mathbb{F}^m$, ki ohranjajo skalarni produkt.

208. Detekcija topoloških 3-mnogoterosti. Nosilec Dušan Repovš, sodelavca Janez Rakovec, Jože Vrabec.

V prvem delu je dokazana posplošitev izreka M. Starbirda o 0-dimenzionalnih celičastih dekompozicijah trirazsežnega prostora na poljubne 3-mnogoterosti in ekvivalenca Starbirdove lastnosti disjunktnih diskov z lastnostjo Dehnove leme in lastnostjo razločevanja preslikav. V drugem delu je dokazan izrek o detekciji (posplošenih) 3-mnogoterosti v razredu Freudenthalovih kompaktifikacij topoloških 3-mnogoterosti s končno krajišči.

209. Aposteriorne ocene za napake približnih lastnih sistemov matrik. Nosilec Zvonimir Bohte, sodelavcec Gabrijel Tomšič.

V prvem poglavju so navedene nekatere znane ocene za napake v približnih lastnih vrednostih splošnih nedegeneriranih matrik, v drugem in tretjem poglavju pa so izpeljane nove izračunljive ocene za napake v približnih lastnih vektorjih. V zadnjih dveh poglavjih je nato obravnavano iterativno izboljšanje približnih lastnih parov.

210. Računalniško orientirane računalniške metode – XIII. Nosilec Janez Grad, sodelavec Janez Barle.

Opisane in sprogramirane so različne inačice metod notranje točke v linearnem programiranju: Karmarkarjev algoritem, metoda afinega balansiranja, Newtonova metoda projiciranih ovir. Metode so uporabljene za določanje začetnega približka in testirane na veliko praktičnih zgledih ter v povezavi s programskim paketom PC-LIP, ki temelji na metodi simpleksov.

211. Posplošitev bilinearnega programiranja. Nosilec Stane Indihar.

Za problem nelinearnega programiranja, kako poiskati $\max\{f(x,y),\ x \in X,\ y \in Y\}$, kjer je f vsota konveksne kvadratne funkcije vektorja y in bilinearne forme, X in Y pa sta omejena poliedra, je prikazana končna metoda, ki omogoča poiskati tudi največjo tetivo omejenega poliedra.

212. B-zlepki v dveh dimenzijah. Nosilec Jernej Kozak, sodelavec Matija Lokar.

Poleg definicije in osnovnih lastnosti večdimenzionalnih B-zlepkov (npr. rekurzivne relacije za izračun B-zlepka, njegovega odvoda in skalarnega produkta) je podrobneje obravnavana konstrukcija B-zlepka, problem računanja njegovih vrednosti, problem konveksnosti k Bezierovi ploskvi nad trikotnikom pridruženih krp in občutljivost Bernsteinovih polinomov nad trikotnikom.

213. Numerične metode za reševanje singularno perturbiranih robnih problemov in za problem iskanja trajektorij. Nosilec Bojan Orel, sodelavca Andrej Kmet, V. V. Bobkov.

V prvem delu je poleg drugih lastnosti podrobneje obdelan problem implementacije implicitnih metod tipa Ruge-Kutta pri reševanju togih začetnih problemov. Drugi del prinaša razširitev že obravnavanih posebnih asimptotičnih metod za reševanje singularno perturbiranega problema in obdelavo eksponentne metode (namenjene eksponentnim problemom).

214. Stoneovi prostori Boolovih algeber v teoriji formalnih jezikov. Nosilec Marko Petkovšek, sodelavec John S. Shawe-Taylor.

Predstavitev Boolovih algeber s Stoneovimi prostori je uporabljena v teoriji formalnih jezikov. S sredstvi teorije domen je izvedena analiza praslik odprtih množic podatkovne domene in podana kratka primerjalna študija obstoječih formalizmov za interpretacijo in posredovanje informacije.

215. Iteracije racionalnih funkcij v kompleksnem. Nosilec Peter Petek, sodelavec Andrej Vitek.

Iteracijo kvadratnih funkcij v kompleksnem klasificira Mandelbrotova množica, ki vsebuje vrednosti parametra, za katere je Juliajeva množica povezana. Ustrezno diferenčno enačbo lahko rešimo elementarno le v dveh primerih, v drugih definiramo nove analitične funkcije in z njimi izrazimo člene zaporedja. Podobno storimo pri Newtonovem zaporedju za kubični koren.

216. Univerzalnost prologa. Nosilec Izidor Hafner.

Za večino rekurzij (primitivno, regresivno, dvojno, hkratno) je prolog naravno okolje. Preko permutacije je uveden pojem rekurzije, posebna primera sta primitivna in regresivna rekurzija. Z uporabo regresivne rekurzije je vpeljana tudi nova hirearhija primitivno rekurzijskih funkcij.

217. Konkatenacija Liejevih algeber. Nosilec Dušan Pagon, sodelavec Uroš Milutinović.

Liejeve algebre so močno orožje za proučevanje Liejevih grup; uporabo le-teh pogosto srečujemo v fiziki. Eno od sredstev preoblikovanja Liejevih algeber nad algebrsko zaprtim obsegom s karakteristiko nič so t.i. konkatenacije algeber, ki porajajo pomembne povezave med klasično in relativistično mehaniko.

218. Navajanje učenca k raziskovalni misli pri pouku matematike, 2. del. Nosilka Marija Vencelj

Matematično in metodično so obdelani nekateri zanimivi problemi elementarne matematike in matematične fizike, ki jih je moč uporabiti pri delu z boljšimi učenci. Dokazi so prirejeni ali pa na novo izvedeni tako, da na posameznem koraku dajejo čimboljše izhodišče za nova vprašanja, hipoteze in odgovore. Opisano je tudi delo z mladimi raziskovalci.

219. Kategorialna gramatika. Nosilec Andreja Prijatelj.

Prestavljena je odločljiva intenzionalna inačica Lambekovega računa s pripadajočo semantiko. Prav tako je podana aplikacija omenjenega sistema na Montaguejevo gramatiko, ki dokazuje, da so razen enega vsi pomenski postulati odpravljivi.

220. Razredi grafov. Nosilec Vladimir Batagelj, sodelavec Sandi Klavžar.

V prvem delu so podane induktivne definicije nekaterih razredov grafov, pregled vseh induktivnih definicij in pripadajoča literatura. Drugi del prinaša karakterizacije grafov s prepovedanimi podgrafi. Na dva načina so karakterizirani grafi, katerih inducirani podgrafi tvorijo mrežo. Izpeljanih je tudi nekaj rezultatov o celoštevilskem uravnoteženju turbin.

221. Različni aspekti simetrije na grafih. Nosilec Dragan Marušič.

V prvem problemskem sklopu je vpeljan pojem posplošenih Cayleyevih grafov in obravnavane so njihove lastnosti v povezavi s krovnimi grafi. V drugem je izpeljanih nekaj zadostnih pogojev za obstoj neorientabilnih sebi dualnih vložitev Cayleyevih grafov komutativnih grup. V tretjem delu so raziskane strukturne lastnosti kubičnih, po točkah tranzitivnih grafov in dan delni odgovor na vprašanje, katera drevesa so njihovi kvocientni grafi.

222. Topološka teorija grafov in invariante grafov, 6. del. Nosilca Bojan Mohar in Tomaž Pisanski, sodelavci John Shawe-Taylor, Aleksandar Jurišić in Rok Sosič.

Delo je sestavljeno iz dvanajstih prispevkov, ki obravnavajo različne probleme teorije grafov: topološko teorijo, spektralne invariante, izoperimetrično število, upodobitev z vektorji, zvezo med grafi in grupami, univerzalne grafe ter grafe, ki so lokalno poti.

NOVE KNJIGE

ARNOLD, V. I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, New York, Springer-Verlag 1988, 351 str. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 250)

Navajeni smo že, da se učbeniki o navadnih diferencialnih enačbah začnejo z dokazi eksistenčnih izrekov ali pa z zbirko receptov, ki nam pove, kako naj se lotimo osnovnih tipov diferencialnih enačb. V pričujoči knjigi se avtor izogne temu konvencionalnemu pristopu. Sicer začne z obravnavo posebnih tipov diferencialnih enačb, a ga bolj kot recepti za reševanje le-teh zanimajo splošne matematične ideje in metode, ki se skrivajo za temi recepti. Tako na primer namesto napotka, kako rešiti homogeno diferencialno enačbo prvega reda, avtor raje obravnava grupe simetrij diferencialnih enačb. Tako bralec dobi splošnejše znanje. In kot po pravilu so ideje uporabljene pri takem pristopu enostavne in intuitivno zelo jasne. V prvem poglavju obdela poleg nekaterih posebnih tipov diferencialnih enačb še Schrödingerjevo enačbo. Nato pa se loti parcialnih diferencialnih enačb prvega reda. Veliko prostora je namenjeno kvalitativnim metodam. Avtorja zanima uporabnost rezultatov, dobljenih pri študiju diferencialnih enačb, v realnem svetu. Za uporabnost modela je med drugim potrebno, da rezultati, dobljeni v tem matematičnem modelu, niso preveč občutljivi na majhne spremembe. Kako take modele izbrati, nam poskuša odgovoriti teorija strukturne stabilnosti, ki ji je v knjigi namenjeno tretje poglavje. V poglavju Teorija perturbacij se srečamo s študijem sprememb v obnašanju rešitev pri majhnih spremembah diferencialnih enačb. Posebej zanimivo je vprašanje o obnašanju rešitve perturbirane diferencialne enačbe na dolgem časovnem intervalu. Tu je potrebno razviti asimptotične metode perturbacijske teorije. V poglavju Normalne forme so podane nekatere osnovne metode, ki nam pomagajo diferencialno enačbo spremeniti v enostavnejšo obliko. Te metode so zasnovane s pomočjo potenčnih vrst. Čeprav so te vrste lahko tudi divergentne, pa nam vseeno prvih nekaj členov teh vrst poda precej informacij o obnašanju rešitev. Knjiga se konča s poglavjem Lokalna bifurkacijska teorija.

Značilnosti te knjige so poudarjanje intuitivnega pristopa v primerjavi s tehničnimi rezultati, veliko ilustracij in premnogi zgledi uporabe v naravoslovnih znanostih. Od bralca zahteva solidno matematično predznanje. Vsa poglavja so napisana kolikor mogoče kot samostojne celote brez mnogo sklicevanja na rezultate prejšnjih poglavij. To omogoča bralcu, da brez večjih težav začne brati pri poglavju, ki ga zanima.

Peter Šemrl

BUDINICH P., Trautman A., The Spinorial Chessboard, Springer-Verlag, Berlin 1988, 128 str. (Trieste Notes in Physics.)

Spinorska šahovnica Paola Budinicha z Mednarodne šole za višje študije iz Trsta in Andrzeja Trautmana z Inštituta za teorijsko fiziko varšavske univerze želi približati spinorje fizikom. Predzgodovina spinorjev v matematiki sega do L. Eulerja, ki je pred koncem 18. stoletja odkril nove reprezentacije zasukov v trirazsežnem prostoru. Zgodovina vodi preko C. F. Gaussa, W. R. Hamiltona, A. Cayleja in W. K. Clifforda do E. Cartana ob zamisli

o kvadratnem korenu kvadratne forme. Cliffordove algebre omogočijo, da enačbo $X^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\, I$ z matriko $X = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix}$, enotsko matriko $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in krajevnim vektorjem (x, y, z) posplošimo na poljubno število razsežnosti. V fiziko so spinorji prišli z odkritjem elektronskega spina in delom W. Paulija (1927) in P. A. M. Diraca (1929). Spočetka so fizike, vajene skalarjev, vektorjev in tenzorjev, spinorji presenetili. Postopno pa so se navadili tudi nanje in pritrdili H. Weylu, ki je leta 1946 zapisal: »Le s spinorji prodremo ... do ravni, na kateri se Evklid sam, z rabo ravnila in šestila, spretno giblje po kraljestvu geometrijskih likov.«

Spinorska teorija je nepogrešljivo pomagalo današnje teorijske fizike, predvsem v konformni teoriji polja in teoriji strun. Knjižica vodi do nje po novi poti, ki izkorišča tesno povezavo spinorjev s Cliffordovimi algebrami. Ne izogiba se podrobnosti in je matematično stroga. Vsebuje poglavja: uvod, oznake in simboli, vektorski prostori in notranji produkt, algebre in njihove reprezentacije, splošne lastnosti Cliffordovih algeber, kompleksne Cliffordove algebre in realne Cliffordove algebre. Po njej bodo radi segali študenti tretje stopnje in raziskovalci.

Janez Strnad

FUNDAMENTAL ASTRONOMY with 399 Illustrations Inclunding 36 Colour Plates, Ed. Hannu Karttunen, Pekka Kroeger, Heikki Oja, Markku Poutanen, Karl Johan Donner, Springer-Verlag, Berlin 1987, 487 strani (ISBN 0-387-17264-5) (45.— USD).

Knjiga, ki je angleški prevod finskega originala, podaja osnove astronomije jasno in dostopno. Prvič je bila natisnjena leta 1984 in se lahko uporablja kot univerzitetni učbenik.

Obsega 20 poglavij, ki pokrivajo vse: od sferične trigonometrije, instrumentov, fotometrije, nebesne mehanike, sončnega sistema, zvezd, galaktične strukture in galaksij do kozmologije, pa tudi več dodatkov (matematika, kvantna mehanika, teorija relativnosti, osnove radioastronomije, tabele in efemeride).

V delu so osnovne ideje jasno razvite in se nanašajo na konkretne probleme, pa tudi rešitve na koncu vsakega poglavja so podrobno in pregledno izdelane. Knjiga je zelo bogata tudi z eksperimentalnimi dejstvi. Zato naj bi bila uporabna za mnoge navdušene astronome-amaterje in znanstvenike, ki želijo razumeti, kaj se dogaja v astronomiji, čeprav zunaj njihovega ožjega področja.

Knjiga vsebuje 399 izredno kvalitetnih črno-belih in barvnih fotografij ter mnogo vzorno izdelanih skic in diagramov. V drobnem tisku so navedene manj pomembne opombe.

Pri branju rahlo motijo razlike med poglavji glede izčrpnosti; npr. poglavji orbitalna mehanika in zvezdna struktura sta jasno in izčrpno obdelani, področje dvojnih zvezdnih sistemov in njihova interpretacija pa bolj površno. Pogrešam večje število nalog na koncu poglavij.

Bojan Dintinjana

Numerical simulation in oil recovery, ed. M. F. Wheeler, Springer-Verlag, New York, 1988, 283 str. (Institute for mathematics and its applications ; 11).

Pričujoča knjiga je zbornik del simpozija *Symposium on Numerical Simulation in Oil Recovery* Minnesotske univerze (1. 12. do 12. 12. 1986). Težišče del je na modeliranju frakturnega poroznega medija, heterogenosti poroznega medija, viskoznosti zemeljskih plasti pri večfaznem toku in difuzno-disperzijskih efektov v toku skozi porozni medij.

V zborniku so na kratko predstavljeni tudi nekateri novi teoretični rezultati s področja nelinearnih hiperboličnih enačb. Tako je na primer v članku M. Shearerja podana Buckley-Leverettova enačba za trofazni tok skozi porozni medij. Posebnost enačbe je, da ni strogo hiperbolična. Predstavljeni so tudi nekateri rezultati toka skozi porozno tekočino, dobljeni s stohastičnim pristopom. Večina člankov, avtorji so priznani matematiki s tega področja (J. Douglas, R. Ewing, M. F. Wheeler), je posvečenih numeričnemu reševanju večfaznega toka skozi frakturirani porozni medij.

Zbornik je namenjen strokovnjakom numerične analize parcialnih diferencialnih enačb, strokovnjakom iz hidrodinamike večfaznih tekočin v poroznem mediju in naftnim strokovnjakom.

Andro Mikelić
prev. *Georg Mejak*

DUBINSKIJ J. A., Sobolev Space of Infinite Order and Differential Eyuations, Leipzig 1986, Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 89.

Pričujoča knjiga je posvečena teoriji prostorov Soboljeva neskončnega reda in njeni uporabi pri študiju robne naloge neomejenega reda. Prostor Soboljeva neskončnega reda $W^\infty(a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha)$, $(a_\alpha \geq 0, p_\alpha \geq 1, r_\alpha \geq 1)$, je množica vseh tistih neskončnokrat odvedljivih funkcij, delujočih na domeni $G \subset \mathbb{R}^n$ s kompleksnimi vrednostmi, za katere je vrsta $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \|D^\alpha u\|_{r_\alpha}^{p_\alpha}$ konvergentna.

Vsebina knjige je razdeljena na šest poglavij. Prvo je posvečeno vprašanju netrivialnosti prostorov W^∞. Odgovor na to vprašanje ni odvisen samo od parametrov $(a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha)$, ampak tudi od domene G. V samem delu tako med drugim spoznamo potreben in zadosten pogoj, ki mu morajo zadoščati $(a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha)$, da dobimo netrivialni prostor W^∞ za torus in za $\mathbb{R}^n$. V drugem poglavju se seznanimo z eliptično nelinearno homogeno Dirichletovo nalogo neomejenega reda, v tretjem pa se po dokazu izreka o sledi za prostor W^∞ spoprimemo tudi z nehomogeno robno nalogo. V drugem poglavju je podano tudi nekaj konkretnih primerov robne naloge neomejenega reda, ki jih dobimo pri reševanju enačb matematične fizike. V četrtem in petem poglavju so dobro znane lastnosti prostorov Soboljeva končnih redov (polnost, separabilnost, Clarksonova neenačba, kompaktnost vložitve) dokazane za prostore $W^\infty(a_\alpha, p, p)$. Omenjene lastnosti so izpeljane na podlagi limitnega prehoda prostorov končnega reda v prostor neskončnega reda. V zadnjem, šestem poglavju sta obravnavani še parabolični in hiperbolični robni nalogi neomejenega reda.

Georg Mejak