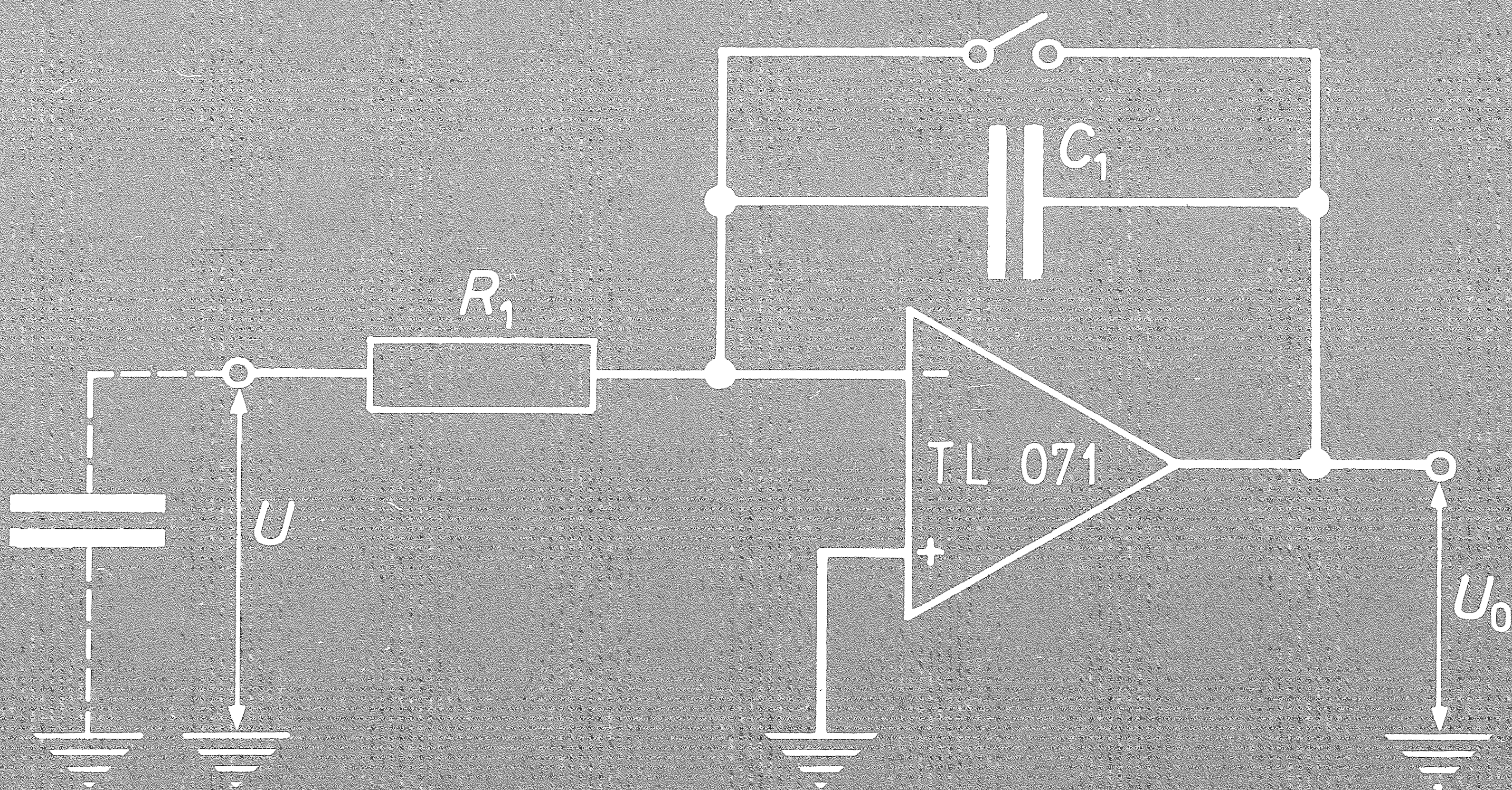


1989
Letnik 36
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, FEBRUAR 1989

Uredniški odbor: Milan Hladnik — urednik za matematiko, Bojan Mohar — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkoverh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina, ki bo vplačana do 30. 6. 1989 pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS: za posameznike 30.000.—din (za člane društva je že upoštevana članarina), za dijake in študente 15.000.—din, posamezna številka 5.000.—din, dvojna številka 10.000.—din, stare številke 2.500.—din, za ustanove in v knjigarnah 90.000.—din, za tujino 25 \$.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1989 DMFA SRS — 946

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles	Str. — Page
Stokesov in Gaussov izrek II — The theorems of Stokes and Gauss II (Jože Vrabec)	33—43
Ravninska geometrija nekoliko drugače — Another approach to plane geometry (Peter Legiša)	45—51
Monotone in naraščajoče funkcije v $\mathbb{R}^n$ — Monotone and increasing functions in $\mathbb{R}^n$ (Boris Lavrič)	53—56
Harmonični oscilator v kvantni in klasični mehaniki — The harmonic oscillator in quantum and classical mechanics (Janez Strnad)	57—61
Vesti — News	
Micromath (Matija Lokar)	52
Obvestilo naročnikom (Janez Strnad, Ciril Velkoverh)	56
Znanje brucov matematike (Mirko Dobovišek)	64—III
Nove knjige — New books	
(Bojan Mohar, Bojan Magajna, Janez Rakovec, Milan Hladnik, Bojan Golli, Peter Gosar, Slobodan Žumer)	43, 44, 56, 62, 63, 64
Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1988 (Ciril Velkoverh)	IV

Na ovitku: Slika 2 k članku na str. 53.

STOKESOV IN GAUSSOV IZREK II

JOŽE VRABEC

Math. Subj. Class. (1985): 26B20

THE THEOREMS OF STOKES AND GAUSS II

To je nadaljevanje članka, ki je izšel v prejšnji številki Obzornika. V drugem delu se bomo večkrat sklicevali na prvi del.

4. Krivuljni in ploskovni integrali

V vsem tem razdelku naj bo Ω poljubna odprta množica v $\mathbb{R}^3$ in $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ naj bo poljubno (zvezno) vektorsko polje.

4.1.1. Definicija. Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ interval (zaprt, odprt ali polodprt), recimo med točkama a in b ($a < b$), in $\gamma: J \rightarrow \Omega$ naj bo zvezno odvedljiva funkcija. Integral polja $\mathbf{F}$ po »poti« γ je

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_J \langle \mathbf{F} \circ \gamma, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

(če J ni zaprt interval, seveda ni rečeno, da ta integral obstaja).

Kot je znano, je *nosilec* (številске ali vektorske) funkcije zaprtje množice vseh tistih točk definicijskega območja, v katerih ima funkcija neničelno vrednost; to je torej množica vseh takih točk, da v nobeni njihovi okolici funkcija ni identično enaka nič.

4.2.1. Lema in definicija. Naj bo K orientirana elementarna gladka krivulja v Ω . Privzemimo, da ima zožitev $\mathbf{F}|_K$ kompakten nosilec. Za vse orientacijo ohranjajoče regularne parametrizacije β krivulje K imajo integrali $\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ isto vrednost. To skupno vrednost vseh teh integralov imenujemo *integral polja $\mathbf{F}$ po krivulji K* in jo označimo z $\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Dokaz. Naj bosta $\beta_i: J_i \rightarrow K$ ($i = 1, 2$) dve orientacijo ohranjajoči regularni parametrizaciji za K in naj bo $h: J_2 \rightarrow J_1$ difeomorfizem iz trditve 3.6.1. Ker je h' pozitivna funkcija, je funkcija h striktno naraščajoča in zato je

$$\int_{J_1} \varphi(t) dt = \int_{J_2} \varphi(h(\tau)) h'(\tau) d\tau$$

za vsako zvezno funkcijo φ na J_1 (za katero obstaja integral na levi). Če vstavimo sem $\varphi(t) := \mathbf{F}(\beta_1(t)) \cdot \beta_1'(t)$ in upoštevamo, da je $\beta_1'(h(\tau)) h'(\tau) = (\beta_1 \circ h)'(\tau) = \beta_2'(\tau)$, dobimo, da sta integrala polja $\mathbf{F}$ po poteh β_1 in β_2 enaka.

V naslednjem koraku definiramo integral polja $\mathbf{F}$ po poljubni povezani orientirani gladki krivulji $K \subset \Omega$ (integral po nepovezani krivulji definiramo potem kot vsoto integralov po komponentah — povezanih kosih — krivulje). Da se pokazati, da je vsaka povezana krivulja, ki ni elementarna, »enostavna sklenjena krivulja« in da zanjo obstaja taka parametrizacija $\beta: [a, b] \rightarrow K$, da je $\beta(a) = \beta(b)$ in da je zožitev β na odprti interval (a, b) regularna parametrizacija za krivuljo $K - \{\beta(a)\}$; v tem primeru bi lahko definirali

$$(4.3) \quad \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt$$

Res tako računamo integrale konkretnih vektorskih polj po konkretnih sklenjenih krivuljah. Za definicijo pa formula (4.3) ni prav primerna, ker bi morali ob taki definiciji dokazati preveč (deloma nelahkih) stvari: najprej trditve, ki smo jih zgoraj navedli s pripombo »da se pokazati«, nato pa še trditev, analogno lemi 4.2.1. Bolje je izbrati drugačno definicijo (ki pa ni kaj prida uporabna za konkretno računanje). Praktično enako razširimo definicijo ploskovnega integrala — o tem bomo spregovorili takoj zdaj — z elementarnih ploskev na poljubne. Da ne bo preveč ponavljanja, bomo tokrat 1-razsežni primer izpustili.

4.1.2. Definicija. Naj bo $E \subset \mathbb{R}^2$ poljubno ravninsko polje in $\gamma: E \rightarrow \Omega$ zvezno diferenciable funkcija. *Integral polja $\mathbf{F}$ po γ* je

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} := \int_E \langle \mathbf{F}(\gamma(x, y)), \gamma_x'(x, y), \gamma_y'(x, y) \rangle dx dy$$

(spet integral ne obstaja nujno, če polje E ni kompaktno).

Pojasnimo oznako za ta integral in njegovo definicijo. Mislimo si, da je γ regularna parametrizacija gladke ploskve N . Simbol $d\mathbf{P}$ pomeni »vektorski ploščinski diferencial«, tj. produkt »skalarne ploskvega diferenciala« dP in »pozitivne enotske normale ν ploskve N ; pogosto res pišemo $\int \mathbf{F} \cdot \nu dP$ namesto $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$. Ker je $\nu = (\gamma_x' \times \gamma_y') / |\gamma_x' \times \gamma_y'|$ in $dP = |\gamma_x' \times \gamma_y'| dx dy$, je naša definicija integrala povsem naravna.

4.2.2. Lema in definicija. Naj bo N orientirana elementarna gladka ploskev (lahko z vogali) v Ω . Privzemimo, da ima zožitev $\mathbf{F}|_N$ kompakten nosilec. Za vse oientacijo ohranjajoče regularne parametrizacije β ploskve N imajo integrali $\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$ isto vrednost. To skupno vrednost vseh teh integralov imenujemo *integral polja $\mathbf{F}$ po ploskvi N* in jo označimo z $\int_N \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$.

Dokaz. Naj bosta $\beta: D \rightarrow N$ in $\gamma: E \rightarrow N$ poljubni orientacijo ohranjajoči regularni parametrizaciji za N in naj bo $\mathbf{h}: E \rightarrow D$ tak difeomorfizem, da je $\gamma = \beta \circ \mathbf{h}$ in $\det \mathcal{J}\mathbf{h} > 0$ (glej 3.6.2.). Po formuli za substitucijo v dvojnem integralu za vsako zvezno funkcijo φ na D velja

$$\int_D \varphi dx dy = \int_E (\varphi \circ \mathbf{h}) |\det \mathcal{J}\mathbf{h}| du dv = \int_E (\varphi \circ \mathbf{h}) (\det \mathcal{J}\mathbf{h}) du dv$$

Če vzamemo $\varphi := \langle \mathbf{F} \circ \beta, \beta_x', \beta_y' \rangle$, dobimo torej

$$\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_E \langle \mathbf{F} \circ \beta \circ \mathbf{h}, \beta_x' \circ \mathbf{h}, \beta_y' \circ \mathbf{h} \rangle (\det \mathcal{J}\mathbf{h}) du dv$$

Izračunajmo še integral polja $\mathbf{F}$ po γ . Če komponenti preslikave $\mathbf{h}$ označimo z f in g (torej $\mathbf{h}$ po klasično predstavimo z enačbama $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$), iz relacije $\gamma = \beta \circ \mathbf{h}$ sledi

$$\gamma_u' = (\beta_x' \circ \mathbf{h}) f_u' + (\beta_y' \circ \mathbf{h}) g_u', \quad \gamma_v' = (\beta_x' \circ \mathbf{h}) f_v' + (\beta_y' \circ \mathbf{h}) g_v'$$

Od tod pa dobimo $\gamma_u' \times \gamma_v' = (\beta_x' \circ \mathbf{h}) \times (\beta_y' \circ \mathbf{h}) \det \mathcal{J}\mathbf{h}$ in tako je

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} &= \int_E \langle \mathbf{F} \circ \gamma, \gamma_u', \gamma_v' \rangle du dv \\ &= \int_E \langle \mathbf{F} \circ \beta \circ \mathbf{h}, \beta_x' \circ \mathbf{h}, \beta_y' \circ \mathbf{h} \rangle (\det \mathcal{J}\mathbf{h}) du dv = \int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} \end{aligned}$$

Dokaz je končan.

Zdaj smo pred nalogo definirati integral po poljubni gladki ploskvi $N \subset \Omega$. Marsikje preberemo navodilo, da je treba N razrezati na elementarne ploskve in integral po N definirati kot vsoto integralov po teh elementarnih podploskvah. Ker je pri tem namen pisca praviloma le površna informacija, se ne postavi niti vprašanje, ali je taka definicija nedvoumna, kaj šele, da bi se obravnaval problem, *kako* poljubno ploskev razrezati na elementarne ploskve; posebno ta drugi problem je dokaj kočljiv. Mi bomo rajši ubrali lažjo pot: namesto integracijskega območja N bomo »razrezali« integrand.

Naj bo $N \subset \Omega$ poljubna gladka ploskev. Dogovorimo se, da bomo vektorsko polje $\mathbf{F}$ imenovali *elementarno* (oziroma *čisto elementarno*) *glede na* N , če je nosilec zožitve $\mathbf{F}|_N$ kompakten in vsebovan v kaki elementarni (oziroma čisto elementarni), v N odprti podploskvi ploskve N . Smiselno je šteti med (čisto) elementarna vektorska polja tudi taka, pri katerih ima $\mathbf{F}|_N$ prazen nosilec, tj. tista, ki so na N identično enaka 0^3 .

4.4.2. Lema in definicija. Če je polje $\mathbf{F}$ elementarno glede na orientirano ploskev $N \subset \Omega$, so integrali tega polja po vseh elementarnih, v N odprtih podploskvah ploskve N , ki vsebujejo nosilec polja $\mathbf{F}|_N$, enaki. Skupno vrednost vseh teh integralov imenujemo *integral polja $\mathbf{F}$ po ploskvi N* , $\int_N \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$.

Dokaz. Označimo nosilec polja $\mathbf{F}|_N$ z X . Naj bosta $N_1, N_2 \subset N$ dve različni, v N odprti elementarni ploskvi, ki vsebujeta X . Presek $N_1 \cap N_2 =: M$ je tudi odprt v N . Ni pa nujno povezan; ima lahko celo neskončno mnogo komponent. Vendar le končno mnogo teh komponent seka X (ker so komponente odprte in disjunktne in ker je X kompakten). Označimo z $M_1, \dots, M_n$ komponente množice M , ki sekajo X , in z M_0 njihovo unijo.

Izberimo orientacijo ohranjajočo regularno parametrizacijo $\beta: E \rightarrow N_1$. Bodi $E_i := \beta^{-1}(M_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Očitno je vsaka množica M_i ($1 \leq i \leq n$) elementarna gladka ploskev in $\beta|_{E_i}$ je njena (orientacijo ohranjajoča) regularna parametrizacija. Če označimo na E definirano funkcijo $\langle \mathbf{F} \circ \beta, \beta'_x, \beta'_y \rangle$ s φ , je njen nosilec vsebovan v E_0 in po 4.2.2 je

$$\int_{N_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_E \varphi \, dx \, dy = \int_{E_0} \varphi \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \varphi \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \int_{M_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

Čisto enako pokažemo, da je

$$\int_{N_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \int_{M_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

S tem je lema 4.4.2 dokazana.

4.5. Definicija. Naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje množice Ω , tj. taka družina odprtih množic v $\mathbb{R}^3$, da je njihova unija enaka Ω . Vzemimo naravno število k . *Končna razčlenitev enote razreda C^k na Ω , podrejena pokritju $\mathcal{U}$* , je končna množica funkcij $\varphi_1, \dots, \varphi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ razreda C^k , ki ustreza pogojem:

- (a) $\varphi_i(\mathbf{r}) \geq 0$ za $i = 1, \dots, n$ in za vsak $\mathbf{r} \in \Omega$
- (b) $\varphi_1(\mathbf{r}) + \dots + \varphi_n(\mathbf{r}) = 1$ za vsak $\mathbf{r} \in \Omega$ in
- (c) nosilec vsake funkcije φ_i je vsebovan v kaki množici iz družine $\mathcal{U}$.

4.6. Lema Naj bo X kompaktna množica v Ω in $\mathcal{U}$ tako odprto pokritje za Ω , da je $\Omega - X \in \mathcal{U}$. Potem za vsako naravno število k obstaja razčlenitev enote razreda C^k na Ω , podrejena pokritju $\mathcal{U}$.

Dokaz. Za vsak $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ in $\varepsilon > 0$ označimo s $K(\mathbf{r}, \varepsilon)$ odprto kroglo v $\mathbf{R}^3$ s središčem $\mathbf{r}$ in polmerom ε . Za vsak $\mathbf{r} \in X$ izberimo tak $\varepsilon(\mathbf{r}) > 0$, da bo krogla $K(\mathbf{r}, 2\varepsilon(\mathbf{r}))$ ležala v neki članici družine $\mathcal{U}$. Ker je množica X kompaktna, vsebuje take točke $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$), da krogle $K(\mathbf{r}_i, \varepsilon(\mathbf{r}_i)/2)$ pokrivajo X . Namesto $\varepsilon(\mathbf{r}_i)$ pišimo na kratko ε_i .

Funkcija $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ki ima pri vsakem $x \leq 0$ vrednost 0, pri vsakem $x > 0$ pa vrednost x^{k+1} , je očitno k -krat zvezno odvedljiva. Ker je funkcija $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, definirana z $\mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}|^2$, poljubno mnogokrat zvezno diferenciable, pripadajo na $\mathbf{R}^3$ definirane nenegativne funkcije

$$\psi_i(\mathbf{r}) := f(\varepsilon_i^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2), \quad \omega_i(\mathbf{r}) := f(4|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2 - \varepsilon_i^2)$$

($i = 1, \dots, n$) razredu C^k . Produkt $\psi_0 := \omega_1 \dots \omega_n$ je identično enak 0 na uniji krogel $K(\mathbf{r}_i, \varepsilon_i/2)$ ($i = 1, \dots, n$; zunaj zaprtja te unije pa je pozitiven), zato njegov nosilec leži v članici $\Omega - X$ družine $\mathcal{U}$. Za vsak $i > 0$ pa je funkcija ψ_i pozitivna na krogli $K(\mathbf{r}_i, \varepsilon_i)$ in enaka 0 zunaj te krogle, torej je tudi njen nosilec vsebovan v neki članici družine $\mathcal{U}$ (tako smo izbrali ε_i). Vsota

$$\psi := \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_n$$

je očitno pozitivna funkcija razreda C^k , zato funkcije $\varphi_i := \psi_i/\psi$ ($i = 0, 1, \dots, n$) sestavljajo razčlenitev enote, kakršno smo iskali.

Pripomnimo, da ni nič težje konstruirati razčlenitve enote razreda C^∞ : samo funkcijo f moramo izbrati malo drugače, npr. takole

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{če } x \leq 0 \\ \exp(-1/x), & \text{če } x > 0 \end{cases}$$

4.7.2. Posledica. Naj bo N gladka ploskev v Ω . Če ima vektorsko polje $\mathbf{F}|N$ kompakten nosilec, je $\mathbf{F}$ (končna) vsota čisto elementarnih vektorskih polj; natančneje, obstaja taka gladka razčlenitev enote $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ na Ω , da so vektorska polja $\varphi_1 \mathbf{F}, \dots, \varphi_n \mathbf{F}$ čisto elementarna (in seveda je $\mathbf{F}$ njihova vsota).

Dokaz. Naj bo X nosilec vektorske funkcije $\mathbf{F}|N$. Sestavimo takole odprto pokritje $\mathcal{U}$ za Ω . Ena članica družine $\mathcal{U}$ naj bo množica $\Omega - X$, druge pa naj bodo vse take omejene odprte množice U , da je $U \cap N$ čisto elementarna ploskev; da take odprte množice pokrivajo N , sledi neposredno iz definicije 2.1.2. Po lemi 4.6 obstaja gladka razčlenitev enote na Ω , podrejena pokritju $\mathcal{U}$. Očitno ta razčlenitev enote ustreza trditvi iz 4.7.2.

Naj bo N orientirana gladka ploskev v Ω , privzemimo, da ima $\mathbf{F}|N$ kompakten nosilec, in naj bo $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ taka gladka razčlenitev enote na Ω , da so vektorska polja $\varphi_1 \mathbf{F}, \dots, \varphi_m \mathbf{F}$ elementarna glede na N . Za vsako od teh polj je že definiran integral po N (glej 4.4.2). Ker je $\mathbf{F}$ vsota teh polj, je smiselno definirati:

$$\mathbf{4.8.2. Definicija.} \quad \int_N \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} := \sum_{i=1}^m \int_N \varphi_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

Da se prepričamo, da je ta definicija nedvoumna, moramo dokazati:

4.9.2. Lema. Naj bo N orientirana gladka ploskev v Ω in privzemimo, da ima $\mathbf{F}|N$ kompakten nosilec. Če sta $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ in $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ taki razčlenitvi

enote na Ω , da so vsa vektorska polja $\varphi_i \mathbf{F}$ in $\psi_j \mathbf{F}$ elementarna glede na N ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), potem je

$$\sum_{i=1}^m \int_N \varphi_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \int_N \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

Dokaz. Izberimo $i \in \{1, \dots, m\}$. Po privzetku ima $\varphi_i \mathbf{F}|_N$ kompakten nosilec, vsebovan v neki elementarni odprti podploskvi $N_i \subset N$. Očitno imajo tudi polja $\varphi_i \psi_j \mathbf{F}|_N$ (kompaktne) nosilce, vsebovane v N_i , in vsota teh polj je $\varphi_i \mathbf{F}$. Zato iz definicije 4.2.2 sledi

$$\int_{N_i} \varphi_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_{N_i} \sum_{j=1}^n \varphi_i \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \int_{N_i} \varphi_i \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

Po definiciji 4.4.2 je torej

$$\int_N \varphi_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \int_N \varphi_i \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

Če seštejemo te enakosti za $i = 1, \dots, m$, dobimo

$$\sum_{i=1}^m \int_N \varphi_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_N \varphi_i \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

Čisto analogno dokažemo, da je

$$\sum_{j=1}^n \int_N \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \int_N \varphi_i \psi_j \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

S tem je lema 4.9.2 dokazana.

Opomba. Zelo podobno definiramo integral vektorskega polja, katerega zožitev na N nima kompaktnega nosilca: v definiciji 4.8.2 namesto končne vsote dopuščamo neskončno, *toda absolutno konvergentno* vrsto, pri čemer je $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ primerna števna, lokalno končna razčlenitev enote na Ω (natančneje tega pojma ne bomo definirali); lemo 4.9.2. zamenjamo z analogno trditvijo za absolutno konvergentne vrste, dokaz te trditve pa je v bistvu isti kot za 4.9.2.

5. Stokesov in Gaussov izrek

Precizna formulacija našega prvega glavnega izreka je takale:

5.1.2. Stokesov izrek. *Naj bo N orientirana gladka ploskev razreda C^2 v $\mathbf{R}^3$ in naj bo $\mathbf{F}$ vektorsko polje razreda C^1 , definirano na kaki odprti okolici ploskve N v $\mathbf{R}^3$. Orientirajmo ∂N koherentno z N . Če ima zožitev $\mathbf{F}|_N$ kompakten nosilec, je*

$$\int_{\partial N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_N (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{P}$$

(pri tem velja dogovor, da je $\int_{\emptyset} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$).

Oglejmo si posebni primer, ko je $N \subset \mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$. Seveda bomo privzeli, da ima ploskev N standardno orientacijo, torej tisto, ki jo določa normalna Gaussova preslikava $\nu: N \rightarrow \{\mathbf{k}\}$. Naj bo recimo $\mathbf{F} = (A, B, C)$. Če parametrizacijo takega elementarnega dela roba ∂N zapišemo po klasično v obliki $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$, je $z(t) \equiv 0$ in zato $dz \equiv 0$, torej $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0)$. Zato

bomo integral $\int_{\partial N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pisali v obliki $\int_{\partial N} (A dx + B dy)$ (tu gre za definicijo, ne za dokazano trditev). Ker je $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} = B_x' - A_y'$, dobi Stokesov izrek obliko:

5.2. Za poljubno ravninsko polje $N \subset \mathbf{R}^2$ s C^2 -gladkim, »pozitivno« orientiranim robom in za poljubni zvezno diferenciableni funkciji A, B s kompaktnim nosilcem na N velja t. i. Greenova formula

$$\int_{\partial N} (A dx + B dy) = \int_N (B_x' - A_y') dx dy$$

Stokesov izrek bomo dokazali v več korakih. Vseskozi naj bo $\mathbf{F} = (A, B, C)$.

5.3.2. Lema. Stokesov izrek (oziroma Greenova formula) velja, ko je N odprta množica v $\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ (torej $\partial N = \emptyset$).

Dokaz. Izberimo pravokotnik $Q = [a_-, a_+] \times [b_-, b_+] \subset \mathbf{R}^2$, ki vsebuje nosilec polja $\mathbf{F}|_N$ v svoji notranjosti. Razširimo $\mathbf{F}$ na vso ravnino $\mathbf{R}^2$ tako, da vzamemo ničelne vrednosti v točkah zunaj N . Potem je $\mathbf{F}|_{\partial Q} \equiv 0$ in zato za vsako število y velja

$$\int_{a_-}^{a_+} B_x'(x, y, 0) dx = B(a_+, y, 0) - B(a_-, y, 0) = 0$$

Sledi

$$\int_N B_x' dx dy = \int_Q B_x' dx dy = \int_{b_-}^{b_+} dy \int_{a_-}^{a_+} B_x' dx = 0$$

Podobno je

$$\int_N A_y' dx dy = 0$$

torej

$$\int_N (B_x' - A_y') dx dy = 0 = \int_{\partial N} (A dx + B dy)$$

5.4.2. Lema. Stokesov izrek (oziroma Greenova formula) velja, ko je N ravninsko polje, odprto v zaprti polravnini $\mathbf{R}_+^2 \equiv \mathbf{R}_+^2 \times \{0\}$ (torej je $\partial N = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cap N$).

Dokaz. Izberimo Q kot v dokazu prejšnje leme in naj bo $Q_+ := Q \cap \mathbf{R}_+^2$. Če funkciji A in B razširimo na vso polravnino $\mathbf{R}_+^2$ (z ničelnimi vrednostmi zunaj N), je kot prej $\int_N B_x' dx dy = 0$ in tako

$$\begin{aligned} \int_N (B_x' - A_y') dx dy &= - \int_N A_y' dx dy = - \int_{a_-}^{a_+} dx \int_0^{b_+} A_y' dy \\ &= \int_{a_-}^{a_+} (A(x, 0, 0) - A(x, b_+, 0)) dx \\ &= \int_{a_-}^{a_+} A(x, 0, 0) dx \\ &= \int_{\partial N} A dx = \int_{\partial N} (A dx + B dy) \end{aligned}$$

5.5.2. Lema. Stokesov izrek velja, če je N čisto elementarna ploskev.

Dokaz. Izberimo orientacijo ohranjajočo regularno parametrizacijo $\beta: E \rightarrow N$ razreda C^2 , pri čemer je polje E odprto v ravnini $\mathbf{R}^2$ ali polravnini $\mathbf{R}_+^2$. Po definiciji regularne parametrizacije lahko β razširimo do C^2 -difeomorfizma $\alpha: W \rightarrow U$ neke odprte okolice W polja E v $\mathbf{R}^3$ na neko odprto okolico U ploskve N . Privzeti smemo, da α ohranja orientacijo (če ne, zamenjamo α z di-

feomorfizmom $(x, y, z) \mapsto \alpha(x, y, -z)$, ki potem ohranja orientacijo in se tako kot α na E ujema z β).

Definirajmo vektorski polji $\mathbf{F}^\#, \mathbf{G}: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ takole: $\mathbf{F}^\# := \mathbf{F} \circ \alpha$, $\mathbf{G} := (\mathbf{F}^\# \cdot \alpha_x', \mathbf{F}^\# \cdot \alpha_y', \mathbf{F}^\# \cdot \alpha_z')$. Naj bo še $(\text{rot } \mathbf{F})^\# := (\text{rot } \mathbf{F}) \circ \alpha$. Trdimo, da je

$$\text{rot } \mathbf{G} = (\langle (\text{rot } \mathbf{F})^\#, \alpha_y', \alpha_z' \rangle, \langle (\text{rot } \mathbf{F})^\#, \alpha_z', \alpha_x' \rangle, \langle (\text{rot } \mathbf{F})^\#, \alpha_x', \alpha_y' \rangle)$$

Seveda je to mogoče dokazati z neposrednim (obupno dolgim) računom in lahko bi tule rekli, da ta račun prepuščamo potrpežljivemu bralcu (in seveda ne bi bilo niti enega tako potrpežljivega bralca). Namesto tega bomo napravili malo elegantnejši dokaz. Pokazali bomo samo, da sta enaki tretji komponenti vektorjev na levi in desni strani zadnje enačbe, kajti v nadaljevanju bomo uporabljali samo tretjo komponento (dokaza za prvi dve komponenti sta seveda čisto podobna.) Tretja komponenta vektorja $\text{rot } \mathbf{G}$ je

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^\# \cdot \alpha_y')_{x'} - (\mathbf{F}^\# \cdot \alpha_x')_{y'} &= \\ &= \langle (\mathcal{J}\mathbf{F} \circ \alpha) \alpha_x', \alpha_y' \rangle + \mathbf{F}^\# \cdot \alpha_{yx}'' - \langle (\mathcal{J}\mathbf{F} \circ \alpha) \alpha_y', \alpha_x' \rangle - \mathbf{F}^\# \cdot \alpha_{xy}'' \\ &= \langle (\mathcal{J}\mathbf{F} \circ \alpha) \alpha_x', \alpha_y' \rangle - \langle \alpha_y' (\mathcal{J}\mathbf{F} \circ \alpha)^\top \alpha_x' \rangle \\ &= \langle ((\mathcal{J}\mathbf{F} \circ \alpha) - (\mathcal{J}\mathbf{F} \circ \alpha)^\top) \alpha_x', \alpha_y' \rangle \\ &= \langle ((\text{rot } \mathbf{F}) \circ \alpha) \times \alpha_x', \alpha_y' \rangle = \langle (\text{rot } \mathbf{F})^\#, \alpha_x', \alpha_y' \rangle \end{aligned}$$

(predzadnji enačaj nam da lema 1.5).

Zdaj je dokaz leme 5.5.2 skoraj končan. Po definiciji 4.1.2 in po pravkar dokazanem je namreč

$$\begin{aligned} \int_N (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{P} &= \int_E \langle (\text{rot } \mathbf{F}) \circ \beta, \beta_x', \beta_y' \rangle dx dy \\ &= \int_E \langle (\text{rot } \mathbf{F})^\#, \alpha_x', \alpha_y' \rangle dx dy \\ &= \int_E (\text{rot } \mathbf{G}) \cdot \mathbf{k} dP \end{aligned}$$

Če je $\partial N = \emptyset$, je tudi $\partial E = \emptyset$ in po lemi 5.3.2 je

$$\int_E (\text{rot } \mathbf{G}) \cdot \mathbf{k} dP = 0 = \int_{\partial N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Če pa je $\partial N \neq \emptyset$, leži ∂E v $\mathbb{R} \times \{0^2\}$ in po lemi 5.4.2 je

$$\int_E (\text{rot } \mathbf{G}) \cdot \mathbf{k} dP = \int_{\partial E} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial E} \mathbf{G} \cdot \mathbf{i} dx = \int_{\partial E} (\mathbf{F} \circ \alpha) \cdot \alpha_x' dx = \int_{\partial N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(zadnji enačaj dobimo iz definicije 4.1.1, kajti $\alpha|_{\partial E}$ je orientacijo ohranjajoča regularna parametrizacija za ∂N , ker tako α kot β ohranjata orientacijo). Lema 5.5.2 je dokazana.

Dokaz Stokesovega izreka je zdaj trivialnost. Iz zadnje leme in definicije 4.4.2 očitno sledi, da izrek velja za čisto elementarna vektorska polja. Ker pa je po 4.7.2 vsako vektorsko polje $\mathbf{F}$, katerega zožitev na N ima kompakten nosilec, končna vsota čisto elementarnih polj (in ker je rotor linearen operator), velja Stokesov izrek v splošnem.

5.1.3. Gaussov izrek. Naj bo $M \subset \mathbb{R}^3$ 3-razsežna mnogoterost z gladkim robom razreda C^2 in naj bo $\mathbf{F}$ vektorsko polje razreda C^1 , definirano na kaki odprti okolici množice M v $\mathbb{R}^3$. Orientirajmo ∂M s poljem enotskih normalnih

silec, je

$$\int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_M (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV$$

(pri tem velja dogovor, da je $\int_{\emptyset} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = 0$).

Ta izrek bomo dokazali po isti shemi kot Stokesov. Spet naj bo $\mathbf{F} = (A, B, C)$.

5.3.3. Lema. *Gaussov izrek velja, ko je M odprta množica v $\mathbf{R}^3$ (torej $\partial M = \emptyset$).*

Dokaz. Izberimo kvader $Q = [a_-, a_+] \times [b_-, b_+] \times [c_-, c_+] \subset \mathbf{R}^3$, ki vsebuje nosilec polja $\mathbf{F}$ v svoji notranjosti. Razširimo $\mathbf{F}$ na ves prostor $\mathbf{R}^3$ (z ničelnimi vrednostmi zunaj M). Dokazati moramo, da je

$$\int_M (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \int_Q (A_x' + B_y' + C_z') dx dy dz = 0$$

Ker je $\mathbf{F}|_{\partial Q} = 0$, je

$$\int_{a_-}^{a_+} A_x'(x, y, z) dx = A(a_+, y, z) - A(a_-, y, z) = 0$$

za poljubni realni števili y in z in zato

$$\int_Q A_x' dx dy dz = \int_{c_-}^{c_+} dz \int_{b_-}^{b_+} dy \int_{a_-}^{a_+} A_x' dx = 0$$

Podobno pokažemo, da je

$$\int_Q B_y' dx dy dz = \int_Q C_z' dx dy dz = 0$$

5.4.3. Lema. *Gaussov izrek velja, ko je množica M odprta v zaprtem polprostoru $\mathbf{R}^3_-$ (torej je $\partial M = (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) \cap M$).*

Dokaz. Privzemimo spet, da je polje $\mathbf{F}$ definirano na vsem $\mathbf{R}^3_-$, izberimo Q kot v dokazu prejšnje leme in naj bo $Q_- := Q \cap \mathbf{R}^3_-$. Zdaj je

$$\int_M (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \int_{Q_-} (A_x' + B_y' + C_z') dx dy dz$$

Kot prej je

$$\int_{Q_-} A_x' dx dy dz = \int_{Q_-} B_y' dx dy dz = 0$$

Izračunajmo še tretji integral. Naj bo $P := [a_-, a_+] \times [b_-, b_+]$. Za vsako točko $(x, y) \in P$ je

$$\int_{c_-}^0 C_z'(x, y, z) dz = C(x, y, 0) - C(x, y, c_-) = C(x, y, 0)$$

Zato je

$$\begin{aligned} \int_M (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV &= \int_{Q_-} C_z' dV = \int_P dx dy \int_{c_-}^{c_+} C_z' dz \\ &= \int_P C(x, y, 0) dx dy = \int_P \mathbf{F}(x, y, 0) \cdot \mathbf{k} dx dy \\ &= \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} \end{aligned}$$

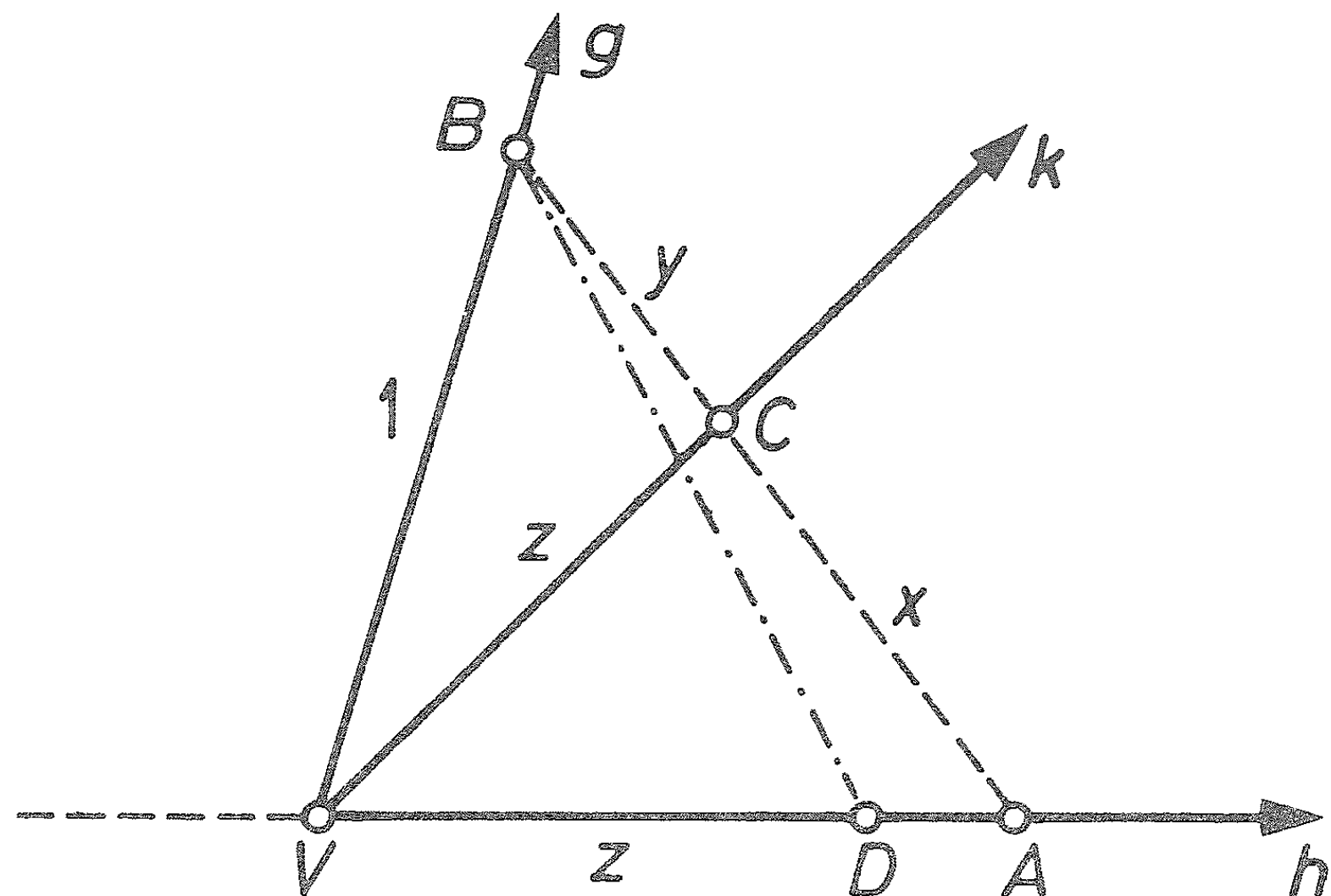
Dokažimo zdaj, da je tak poltrak en sam. Pa denimo, da bi obstajal še poltrak $g \subset H$, ki bi s h omejeval kot, skladen s kotom ϕ . Kota (h, k) in (h, g) sta skladna, saj je skladnost tranzitivna. Obstaja tak togi premik $\mathcal{T}$, ki en kot preslika na drugega. Po izreku 12 $\mathcal{T}$ rob kota (h, k) preslika na rob kota (h, g) . Unijo poltrakov h in k $\mathcal{T}$ preslika na unijo poltrakov h in g . Iz trditve 9 takoj sledi, da $\mathcal{T}$ krak preslika na krak in ohranja skupno izhodišče V vseh poltrakov. Če je $\mathcal{T}(h) = h$ in $\mathcal{T}(k) = g$, po trditvi 9 $\mathcal{T}$ ohranja nosilko poltraka h . Zato $\mathcal{T}$ ohranja ali zamenja polravnini, na kateri meji H . Druga možnost ne pride v poštev, saj je $\mathcal{T}(k) = g$, torej $\mathcal{T}(H) = H$. Tudi identični premik ohranja h in H . Tako je po aksiomu 7 $\mathcal{T} = id$ in $k = g$.

Ostane še možnost $\mathcal{T}(h) = g$, $\mathcal{T}(k) = h$. Če je $g \neq k$, po izreku 8 k leži med h in g ali pa g leži med h in k . Oglejmo si, recimo, prvo možnost. (Drugo prevedemo na prvo, če zamenjamo $\mathcal{T}$ s $\mathcal{T}^{-1}$.)

Naj bo A točka na h za 1 oddaljena od skupnega izhodišča V poltrakov h , k in g (Sl. 8). (Vse slike v tekstu so le ilustracija; dokazi se nikjer ne sklicujejo nanje.) Naj bo še B točka na g za 1 oddaljena od V . Daljica AB po izreku 7 seka k v neki točki C .

Označimo $|AC| = x$, $|CB| = y$, $|VC| = z$.

Ker je $\mathcal{T}(V) = V$ in $\mathcal{T}$ preslika h na g ter ohranja razdalje, je $\mathcal{T}(A) = B$. Ker $\mathcal{T}$ preslika k na h , je $\mathcal{T}(C) = D \in h$ in seveda je $z = |VC| = |VD|$. Daljica AC se preslika na BD (trditev 9), zato je $|BD| = x$. Če je $D = A$, je $|AC| = |AB|$. Ker C leži med A in B , je $C = B$ in od tod $k = g$, to pa ni mogoče. Sicer je $D \neq A$ in so točke A , B in D nekolinearne ($h \neq g$). Trikotniška neenakost za trikotnik ABD nam pove $|AB| = |AC| + |CB| = x + y < |BD| + |AD| = x + |AD|$. Tako je $|AD| > y$. Če je D med A in V , je $1 = |AV| = |AD| + |DV| = |AD| + z$. Tako je $|AD| = 1 - z > y$ ali $1 > z + y$. Točke V , C in B so nekolinearne ($k \neq g$), zato je $1 = |VB| < |VC| + |CB| = z + y$, to pa je v protislovju s prej dobljeno neenakostjo. Enako vidimo, da ne more biti A med V in D . Torej je res $g = k$.



Slika 8

LITERATURA

- [1] G. Choquet, *Nastava geometrije*, Školska knjiga, Zagreb 1974.
- [2] J. Dieudonné, *Linearna algebra i elementarna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb 1977.
- [3] A. N. Kolmogorov, A. F. Semenovič, R. S. Čerkasov, *Geometrija* 6—8, Prosveščenje, Moskva 1982.
- [4] F. Križanič, *Matematika* 1, DZS, Ljubljana 1980.
- [5] P. Legiša, *Matematika* 1. Geometrija v ravnini, DZS, Ljubljana 1987.
- [6] J. Lep, *Geometrija na PA v Mariboru*, Pedagoška fakulteta v Mariboru, Maribor 1986.
- [7] G. E. Martin, *The foundations of geometry and the non-euclidean plane*, UTM, Springer-Verlag, Berlin 1975.
- [8] H. Meschkowski, *Temelji euklidske geometrije*, Školska knjiga, Zagreb 1978.
- [9] R. S. Millman, G. D. Parker, *Geometry. A metric approach with models*, UTM, Springer-Verlag, New York 1981.
- [10] A. V. Pogorelov, *Predavanja iz osnova geometrije*, Zavod za izdavanje udžbenika NR Srbije, Beograd 1963.

Med stalinimi letom se je med kupom revij, ki prihajajo v matematično knjižnico, pojavila še ena. To je revija MICROMATH, glasilo angleškega združenja učiteljev matematike. Letno izidejo tri številke. Ker se mi zdi škoda, da revija sameva na policah v knjižnici, jo bom na kratko predstavil.

O njenem namenu najbolje govori del uvodnika prve lanske številke, ko so to glasilo pričeli dobivati prav vsi člani omenjenega združenja. Pa pogledjmo, kaj pravita urednika John Wood in Derek Ball.

"... Veliko učiteljev trdi, da je nepraktično uporabljati računalnik pri pouku. Med težavami, ki jih navajajo, so pomanjkanje enostavno uporabne opreme, omejitve obstoječih učnih programov, pomanjkanje časa in pomoči pri lastnem računalniškem izobraževanju in pomanjkanje primernih programov in literature.* Upamo, da bo revija pomagala pri reševanju nekatereh od teh problemov. Naš namen je, da bi bila MICROMATH revija, v kateri tako učitelji kot učenci govorijo o svojem delu in kako so računalnik uporabili pri pouku matematike ..."

Članke v reviji lahko razdelimo v dve skupini. Eno sestavljajo članki, ki govorijo o različnih matematičnih temah, pri katerih pridejo v poštev računalniki. Večina obravnava teme, primerne predvsem za osnovno šolo. Zlahka najdemo tudi članke, ki jih uporabimo že v nižjih razredih. Nekaj tem: logo in poligoni, lastnosti števil, preglednice v matematiki, krivulje z želvjo grafiko, slike s simetrijo, ... Kot programski jezik se zelo pogosto pojavlja logo. Verjetno je to res med najprimernejšimi jeziki za ta nivo.

V prispevkih najdemo le malo povsem izdelanih programov. Več je namigov, kaj sprogramirati, kako razširiti obravnavano temo, posameznih delov programov Vzroka sta predvsem dva. Prvi in po moje poglavitni-prepričanje avtorjev, da je tako in tako potrebno programe prirediti lastnim potrebam in razmeram. Zakaj bi torej trčili prostor v reviji. Bistvene so namreč ideje. Drugi razlog pa je ta, da MICROMATH občasno pripravi disketo s programi, ki se vežejo na teme, obravnavane v reviji. Žal bomo morali v Sloveniji te programe razvijati kar sami, saj so pisani za angleški šolski računalnik BBC.

Druga skupina člankov predstavlja recenzije knjig, programov in izkušnje uporabnikov le-teh. Ta del je mogoče za naše razmere manj zanimiv, a če drugega ne, je zanimivo vedeti, kaj se po svetu dogaja.

Tako. Če vas revija zanima, se oglasite v Matematični knjižnici na Jadranski 19 v Ljubljani in jo prelistajte. Mislim, da boste v njej zlahka našli kaj uporabnega. In ko boste že tu, oglejte si še eno publikacijo istega združenja, Mathematical Teaching.

Pa še to. Pogledjte članke in premislite. Mar res ne bi znali napisati kaj takšnega tudi vi in poslati npr. v Presek?

Matija Lokar

* Kaj bi lahko rekli šele pri nas!

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopisi morajo biti natipkani v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kserokopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnimi razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. Naj ne bodo daljši kot ena avtorska pola, tj. 30.000 znakov ali približno 15 strani. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. 21 (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake (glejte Slovenski pravopis DZS, Ljubljana 1962).

MONOTONE IN NARAŠČAJOČE FUNKCIJE V $\mathbb{R}^n$

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1985) 47 B 55, 47 H 07

Članek obravnava dve posplošitvi monotonosti na funkcije v prostoru $\mathbb{R}^n$. Raziskana je odvisnost uvedenih pojmov od izbire baze v $\mathbb{R}^n$, za diferenciable funkcije pa sta obe posplošitvi karakterizirani z odvodom.

MONOTONE AND INCREASING FUNCTIONS IN $\mathbb{R}^n$

A characterization of monotone and of increasing differentiable functions acting in $\mathbb{R}^n$ is given, and independence of monotonicity under a change of basis in $\mathbb{R}^n$ is considered.

Seznani se bomo z dvema posplošitvama dobro znanega pojma monotono naraščajoče realne funkcije realne spremenljivke. Pri obeh se bomo omejili na preslikave v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ in posebej obravnavali diferenciable preslikave te vrste. Videli bomo, da tudi v splošnem primeru lahko monotonost diferenciable funkcije prepoznamo iz njenega odvoda. Še več, pokazali bomo, da je diferenciable preslikava naraščajoča na odprti konveksni množici v $\mathbb{R}^n$ natanko takrat, kadar je njen odvod tam pozitiven. Seveda različni vrsti monotonega naraščanja zahtevata različni pozitivnosti. Poleg tega nas bo v nadaljevanju zanimala še odvisnost uvedenih pojmov od koordinatnega sistema (baze) v $\mathbb{R}^n$.

Razkrijmo zdaj podrobnosti. Da ne bo nesporazumov, najprej ponovimo osnovno definicijo.

Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ z definicijskim območjem $D \subset \mathbb{R}$ je *monotono naraščajoča*, kadar drži naslednji sklep

$$\text{Če sta } x, y \in D \text{ in } x \leq y, \text{ potem velja } f(x) \leq f(y) \quad (1)$$

Ta definicija je smiselna za vse preslikave, katerih domena in kodomena sta z relacijo $\leq$ delno urejeni. Nas zanimajo funkcije v prostoru $\mathbb{R}^n$, ki ga lahko delno uredimo na več smiselnih načinov. Med najbolj naravnimi je gotovo ureditev po komponentah; zanjo bomo ohranili znak $\leq$, ki pri $n = 1$ sovpada z običajnim. Torej za $x, y \in \mathbb{R}^n$ zapišemo

$$x \leq y, \text{ če je } x_k \leq y_k \text{ za vsak } k \in \{1, \dots, n\}$$

Naj bo zdaj $D \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je *urejenostno monotono naraščajoča* (krajše : *naraščajoča*)*, če izpolnjuje pogoj (1).

Drugi način posploševanja monotonosti se bo izognil delni urejenosti. Pogoj (1) za realne funkcije realne spremenljivke lahko preoblikujemo v enakovredno zahtevo

$$(f(y) - f(x)) \cdot (y - x) \geq 0 \text{ za vsak par } x, y \in D \quad (2)$$

Če množenje v (2) razumemo kot skalarni produkt, dobimo novo posplošitev. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$) je *skalarno monotono naraščajoča* (krajše : *monotona*)*, če zadošča pogoju (2), v katerem $\cdot$ pomeni standardno skalarno množenje ($u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$).

Kakšni sta uvedeni definiciji v družini linearnih operatorjev na $\mathbb{R}^n$?

Delna urejenost $\leq$ v $\mathbb{R}^n$ je usklajena s seštevanjem, zato je linearna preslikava $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ naraščajoča natanko takrat, kadar velja $Ax \geq 0$ za vsak $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Operator, ki je linearen in naraščajoč, imenujemo *urejenostno*

pozitiven (krajše : *u-pozitiven*). Brž lahko preverimo, da je A *u-pozitiven* tedaj in le tedaj, kadar so vsi členi matrike, ki pripada A v kanonski bazi, nenegativna realna števila.

Tudi druga posplošitev je med linearnimi preslikavami dobro uveljavljena. Linearen operator $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je monoton tedaj in le tedaj, kadar velja $Ax \cdot x \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$, torej kadar je *pozitiven*.

Že tu opazimo precejšnjo razliko med posplošitvama. Za linearne operatore z diagonalno matriko (v kanonski bazi) se pojma ujemata, sicer pa sta neodvisna. Tako je na primer zrcaljenje preko simetrane lihih kvadrantov v $\mathbb{R}^2$ *u-pozitiven* operator, ki ni pozitiven, vrtež za pravi kot okrog izhodišča pa je pozitiven operator na $\mathbb{R}^2$, ki ni *u-pozitiven*.

Zdaj se bomo lotili napovedane karakterizacije naraščajočih oziroma monotonihih diferenciablelnih funkcij. Privzemimo, da je definicijsko območje $D \subset \mathbb{R}^n$ funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ odprta množica. Odvod funkcije f v točki $x \in D$ je linearen operator na $\mathbb{R}^n$, ki ga označimo z $f'(x)$. V kanonski bazi mu pripada Jacobijeva matrika $(\partial f_i / \partial x_j)$.

IZREK 1. Naj bo množica $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta in konveksna, funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ pa diferenciablelna na D . Potem velja

a) f je naraščajoča natanko takrat, kadar je odvod $f'(x)$ *u-pozitiven* v vsaki točki $x \in D$;

b) f je monotona tedaj in le tedaj, kadar je odvod $f'(x)$ pozitiven v vsaki točki $x \in D$.

Dokaz. Vzemimo poljubna $x \in D$ in $z \in \mathbb{R}^n$. Za $t \in \mathbb{R}$ dovolj blizu 0 je $x + tz \in D$ in velja

$$f'(x)z = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x + tz) - f(x))/t$$

Denimo, da je funkcija f naraščajoča in $z \geq 0$. Limitni prehod ohranja delno urejenost, zato je $f'(x)z \geq 0$. Torej je operator $f'(x)$ *u-pozitiven*.

Če je funkcija f monotona, za vsak $z \in \mathbb{R}^n$ velja

$$(f'(x)z) \cdot z = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x + tz) - f(x)) \cdot ((x + tz) - x)/t^2 \geq 0$$

zato je operator $f'(x)$ pozitiven.

Doslej konveksnosti množice D nismo potrebovali, pri dokazu nasprotnih smeri trditev a in b pa bo ta privzetek koristen. Pri poljubno izbranih $x, y \in D$ in $z \in \mathbb{R}^n$ si oglejmo funkcijo

$$a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(t) = f(x + t(y - x)) \cdot z$$

Očitno je $a(0) = f(x) \cdot z$ in $a(1) = f(y) \cdot z$, poleg tega pa je a odvedljiva in velja

$$a'(t) = (f'(x + t(y - x)) (y - x)) \cdot z$$

Lagrangeov izrek za funkcijo a nam da točko s na intervalu $(0, 1)$, za katero velja

$$(f(y) - f(x)) \cdot z = a(1) - a(0) = a'(s) = (f'(x + s(y - x)) (y - x)) \cdot z \quad (3)$$

Denimo, da je odvod $f'(x)$ *u-pozitiven* za vsak $x \in D$. Če je $x \leq y$ in če za z vstavimo v (3) po vrsti vse vektorje kanonske baze v $\mathbb{R}^n$, dobimo neenakost $f(x) \leq f(y)$. Funkcija f je torej naraščajoča.

Predpostavimo zdaj, da je za vsak $x \in D$ operator $f'(x)$ pozitiven. Vzemimo $z = y - x$ in iz (3) sklenemo, da je za vsak par $x, y \in D$ $(f(y) - f(x)) \cdot (y - x) \geq 0$. Funkcija f je potemtakem monotona, izrek pa s tem dokazan. $\square$

Kaj se zgodi z naraščanjem oziroma monotonostjo funkcije, če v $\mathbb{R}^n$ zamenjamo koordinatni sistem (in s tem skalarni produkt) z drugim? Kdaj se lastnosti ohranita? Bolj natančno: Pri katerih obrnljivih linearnih preslikavah $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je hkrati s funkcijo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ naraščajoča (monotona) tudi funkcija $P^{-1} \circ f \circ P$?

Če sta P in P^{-1} hkrati u -pozitivna operatorja in je f naraščajoča, je takšen tudi kompozitum $P^{-1} \circ f \circ P$. Enako se zgodi tudi tedaj, kadar sta operatorja $(-P)$ in $(-P^{-1})$ u -pozitivna. Dokažimo, da se naraščanje ohrani edino v teh dveh primerih. Če je operator P obrnljiv in hkrati z inverzom P^{-1} u -pozitiven, ga imenujemo *Rieszov izomorfizem*.

IZREK 2. Naj bo $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tak obrnljiv operator, da je $P A P^{-1}$ u -pozitiven za vsak u -pozitiven $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Potem je eden od operatorjev P in $-P$ Rieszov izomorfizem.

Dokaz. Denimo, da P ni u -pozitiven. Potem obstaja tak $x \geq 0$, da je $P x \not\geq 0$. Dokažimo, da je tedaj operator $-P^{-1}$ u -pozitiven.

Če to ni res, obstaja tak $y \geq 0$, da je $-P^{-1} y \not\geq 0$. Torej velja $z = P^{-1} y \not\geq 0$ in $P z \geq 0$. Za vsaj en indeks k je potemtako $z_k > 0$. Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, določen s predpisom $A u = (u_k/z_k) x$, je u -pozitiven, zato velja $(P A P^{-1})(P z) \geq 0$. Toda, po drugi strani je $(P A P^{-1})(P z) = P A z = P x \not\geq 0$. Zašli smo v protislovje, ki pove, da je operator $-P^{-1}$ res u -pozitiven.

Dokazali smo, da je bodisi P u -pozitiven ali pa je $-P^{-1}$ u -pozitiven. S prehodom na adjungirane operatorje (transponirane matrike) se u -pozitivnost ohranja, zato je operator $(P^{-1})^* A P^*$ u -pozitiven za vsak u -pozitiven A . Torej po prejšnjem velja tudi naslednja alternativa. Operator P^{-1} je u -pozitiven ali pa je $-P$ u -pozitiven. Združimo obe ugotovitvi in izrek je dokazan. $\square$

Znano je, da Rieszovim izomorfizmom v kanonski bazi ustrezajo matrike, ki imajo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko en element od nič različen in pozitiven. Torej Rieszov izomorfizem vektorje kanonske baze le med seboj premeša in pomnoži s pozitivnimi skalarji.

Podobno je z ohranjanjem monotonosti. Tu imamo opraviti s skalarnim produktom, zato lahko pričakujemo namesto Rieszovih izomorfizmov ortogonalne preslikave. Če je P ortogonalen linearen operator in funkcija f monotona, potem je tudi funkcija $P^{-1} \circ f \circ P$ monotona. Isto velja tudi za skalarne večkratnike $r P$, $r \neq 0$, ortogonalnih operatorjev P . Spet so to edini primeri, ki ohranijo monotonost.

IZREK 3. Naj bo $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tak obrnljiv operator, da je $P^{-1} A P$ pozitiven za vsak pozitiven $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Potem je P skalarni večkratnik ortogonalnega operatorja.

Dokaz. Najprej pokažimo, da velja naslednja trditev. Če je $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \cdot v \geq 0$ in $A u \cdot v \geq 0$ za vsak pozitiven $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, potem sta u in v linearno odvisna.

Označimo z Y vektorski prostor, ki ga v $\mathbb{R}^n$ generirata u in v , z Z zaznamujmo njegov ortogonalni komplement v $\mathbb{R}^n$, s Q pa pravokotni projektor $\mathbb{R}^n$ na Y . Denimo, da je prostor Y dvorazsežen. Označimo z A_0 vrtež v Y za pravi kot ($Y \subset \mathbb{R}^n$) v pravo smer, tako da bo $A_0 u \cdot v \leq 0$. Naj bo $i : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ vložitev in $A = i A_0 Q$. Operator A je pozitiven, zato po predpostavki velja $A u \cdot v \geq 0$, po prejšnjem pa tudi $A u \cdot v = A_0 u \cdot v \leq 0$. Torej je $A u \cdot v = 0$, odkoder vidimo, da velja $A u \in Z$ (ker je $A u \cdot u = 0$) in tedaj $A_0 u = 0$. Od tod sledi $u = 0$, torej protislovje, ki potrjuje veljavnost trditve.

Preidimo k dokazu izreka. Po predpostavki za vsak pozitiven operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ in vsak $x \in \mathbb{R}^n$ velja neenakost $P^{-1} A P x \cdot x \geq 0$. Zaznamujmo s P^* k P adjungirani operator in postavimo $u = P x$, $v = (P^*)^{-1} x$. Potem velja $u \cdot v \geq 0$ in $A u \cdot v \geq 0$ za vsak pozitiven A . Odtod s pomočjo prejšnje trditve brez težav izpeljemo dokaz do konca. $\square$

Končajmo obravnavano temo z ugotovitvijo, da se tudi s translacijo koordinatnega sistema v $\mathbb{R}^n$ ohranita naraščanje in monotonost funkcij na $\mathbb{R}^n$.

* Tako izbrana okrajšava je (z enakim pomenom) že ustaljena v tuji (*increasing, monotone*) matematični terminologiji. Glej na primer

1. F. E. Browder, P. Hess, *Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces*, J. Funct. Anal., 11(1972) 251-294.

2. M. G. Krein, M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Uspehi Mat. Nauk 3(1948) 3—95; Am. Math. Soc. Transl. 26(1950) § 135.

ANALYSIS AND THERMODYNAMICS, A Collection of Papers Dedicated to W. Noll, ed. B. D. Coleman, M. Feinberg, and J. Serrin, Springer-Verlag, Berlin 1987.

Zbornik člankov je posvečen 60-letnici Walterja Nolla, ki je večino svojih raziskav usmeril v osnove termodinamike in mehanike kontinuuma. Članki so bili prvič objavljeni v reviji Archive for Rational Mechanics and Analysis v letih 1984—87. V grobem bi lahko dela razdelili na taka, ki se ukvarjajo z iskanjem strogega matematičnega opisa osnovnih zakonov, in na taka, ki se ukvarjajo z iskanjem matematične rešitve za določen fizikalni pojav. V prvo skupino lahko štejemo naslednje teme: vpliv diskretne zgradbe snovi na mehaniko kontinuuma, Gibbsov princip maksimalne entropije, termodinamika kontinuuma v okviru teorije geometrijske mere. V drugo skupino del pa spadajo: termostatika zmesi, pojavi v termoelastičnih snoveh (nelinearnost, defekti, toplotna prevodnost, elektromagnetizem itd.), valovanje v omejenem in delno vpetem prožnem sredstvu, elastična kapaciteta sferoida, drugi zvok v dielektriku, relaksacija mehaničnih napetosti v duktilnih snoveh, dinamika nelinearnih snovi, katerih spomin blede, tokovi v viskoelastičnih kapljevinah, kavitacija in fazni prehod v hiperelastičnih kapljevinah, skin efekt itd. Večina del se ukvarja predvsem z matematičnim opisom pojavov in manj s fizikalno sliko; tako bo knjiga pritegnila le tiste, ki jih tak način zanima.

Slobodan Žumer

OBVESTILO NAROČNIKOM

Zaradi podražitev papirja in tiskarskih storitev je občni zbor društva sklenil povečati naročnino, v kateri je za člane društva upoštevana tudi članarina, na 30.000.—din. Zaradi hude inflacije vas prosimo, da nam znesek s priloženo položnico nakažete čim prej. Naročnina, plačana po 1. 7. 1989, bo znatno višja.

Janez Strnad in Ciril Velkovrh

HARMONIČNI OSCILATOR V KVANTNI IN KLASIČNI MEHANIKI

JANEZ STRNAD

PACS a0365—q

Pri spoznavanju kvantne mehanike je pripravno povezati njene napovedi z znanimi napovedmi klasične mehanike. Toda povezave kaže skrbno izbrati.

THE HARMONIC OSCILLATOR IN QUANTUM AND CLASSICAL MECHANICS

Introducing quantum mechanics it is suitable to connect its predictions with the known ones of classical mechanics. Ways of comparison should be, however, carefully chosen.

Uvod

»Študente je mogoče pripraviti do tega, da lažje sprejmejo kaj novega, če novo pritrdimo na znani okvir pojmov in znanja; tako poudarimo vidike, ki jih ima skupne z znanim, in tudi tiste, po katerih se od znanega razlikuje.« Tako začenjajo C. Leubner, M. Alber in N. Schupfer razpravo o primerjavi kvantnih in klasičnih napovedi za harmonični oscilator [1]. Harmonični oscilator — premo sinusno nihalo — učbeniki v klasični in kvantni mehaniki zelo radi uporabljajo za zgled.

V klasični mehaniki ima vlogo enačbe gibanja Newtonov zakon $m dx^2/dt^2 = -m\omega^2 x$, v katerem je x odmik točke telesa od ravnovesne lege in ω lastna krožna frekvenca. Rešitev

$$x = x_0 \cos(\omega t + \Phi) \quad (1)$$

vsebuje amplitudo x_0 in fazni premik Φ . V večini učbenikov kvantne mehanike najdemo klasično verjetnostno gostoto za tak oscilator. Verjetnost, da zadenemo odmik na pasu od $x - \frac{1}{2} dx$ do $x + \frac{1}{2} dx$, mora biti sorazmerna s časom, ki ga točka prebije na tem pasu. S hitrostjo $dx/dt = -x_0 \omega \sin(\omega t + \Phi) = -\omega(x_0^2 - x^2)^{1/2}$ in zvezo $dt = dx/|(dx/dt)|$ pridemo do klasične verjetnostne gostote

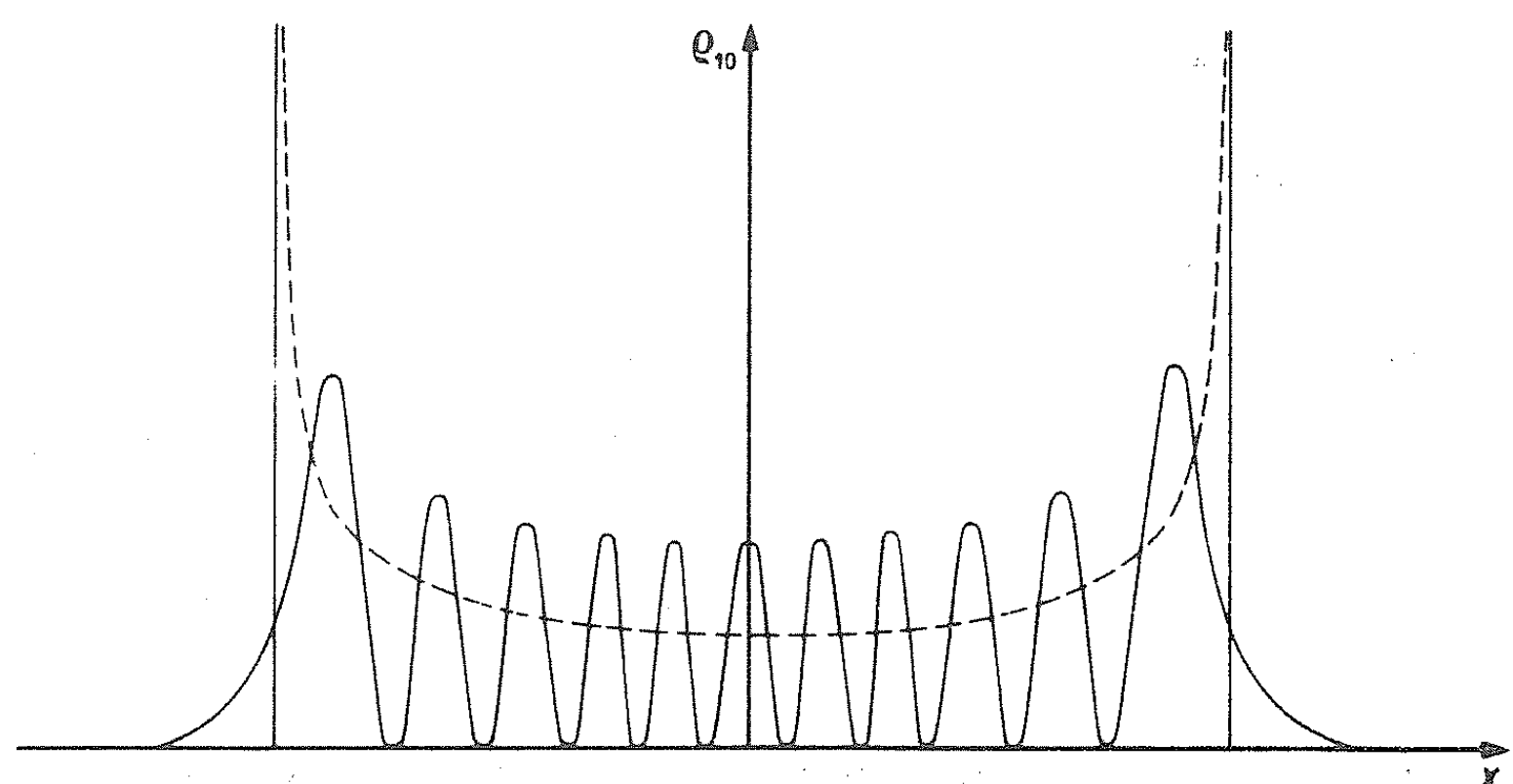
$$\varrho_{kl}(x) = 1/\pi(x_0^2 - x^2)^{1/2} \quad (2)$$

Normirana je takole $\int_{-x_0}^{x_0} \varrho_{kl}(x) dx = 1$.

V kvantni mehaniki je enačba gibanja Schrödingerjeva enačba $-(\hbar^2/2m)d^2\psi_n/dx^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi_n = i\hbar\partial\psi_n/\partial t$ pri robnem pogoju $\psi_n(x \rightarrow \pm\infty) = 0$. Rešitev je lastna valovna funkcija

$$u_n(x) e^{-iW_n t/\hbar} = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n [(m\omega/\hbar)^{1/2} x] e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{-iW_n t/\hbar}$$

Sl. 1 Stara primerjava klasične verjetnostne gostote (2) (črtkano) s kvantno verjetnostno gostoto ϱ_n v lastnem stanju s kvantnim številom $n = 10$ (sklenjeno) [2]



z lastno energijo $W_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Tu je $n = 0, 1, 2, \dots$ kvantno število in H_n Hermitov polinom. Kvantna verjetnostna gostota v lastnem stanju

$$\varrho_n(x) = |\psi_n|^2 = u_n^2 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/2} (2^n n!)^{-1} H_n^2 [(m\omega/\hbar)^{1/2} x] e^{-m\omega x^2/\hbar}$$

je normirana takole $\int_{-\infty}^{\infty} u_n^2 dx = 1$.

Učbeniki kvantne mehanike pribijejo, da se kvantna verjetnostna gostota ϱ_n z naraščajočim kvantnim številom n »v povprečju« bliža klasični verjetnostni gostoti ϱ_{kl} . To pojasnijo z eno od oblik načela korespondence (Sl. 1) [2]. C. Leubner in sodelavca mislijo, da takšna primerjava ni posrečena in predlagajo drugačno. Predlog je vreden premisleka.

Klasična verjetnostna gostota

Prav bo prišlo, če nekoliko podrobneje razčlenimo pot do klasične verjetnostne gostote (2).

Zamislimo si množico enakih oscilatorjev, ki nihajo vsi z enako amplitudo in enakim faznim premikom. Vsak izmed njih gre skozi ravnovesno lego v istem trenutku in v istem trenutku doseže največji odmik. Verjetnostno gostoto za ta primer zapišemo z Diracovo porazdelitvijo δ

$$\varrho_{kl}(x, t) = \delta [x - x_0 \cos (\omega t - \Phi)] \quad (3)$$

Povprečnega odmika ni težko izračunati, če upoštevamo lastnosti Diracove porazdelitve δ [2]

$$\langle x \rangle = \int_{-x_0}^{x_0} x \varrho_{kl}(x, t) dx = x_0 \cos (\omega t + \Phi)$$

Po pričakovanju se ujema z rešitvijo Newtonovega zakona (1).

Zdaj vzemimo množico oscilatorjev z določeno amplitudo in določenim faznim premikom, množico oscilatorjev z enako amplitudo in drugim faznim premikom, množico oscilatorjev z enako amplitudo in še drugim faznim premikom ... Od množice do množice se spreminja fazni premik, tako da so enakopravno zastopane vse mogoče vrednosti. V sestavljeni množici oscilatorjev je torej fazni premik enakomerno porazdeljen po intervalu od 0 do 2π . Tako je verjetnostna gostota za sestavljeno množico določena s povprečjem po faznem premiku verjetnostne gostote (3)

$$\begin{aligned} \varrho_{kl}(x) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varrho_{kl}(x, t) d\Phi = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \delta[x - x_0 \cos (\omega t + \Phi)] d\Phi = \\ &= \pi^{-1} \int_0^{\pi} \delta(x - x_0 \cos \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Uvedli smo novo spremenljivko $\omega t + \Phi = \varphi$.

Naprej pomaga zveza* $\int \delta[f(\varphi)] d\varphi = 1/|df/d\varphi|_{\varphi_1}$, v kateri je φ_1 enojna ničla enačbe $f(\varphi) = 0$. Enačba $x - x_0 \cos \varphi_1 = 0$ ima pri danem $|x| < x_0$ na intervalu $0 < \varphi < \pi$ eno enojno ničlo φ_1 . Za odvod v njej dobimo $|df/d\varphi|_{\varphi_1} = x_0 \sin \varphi_1 = x_0 (1 - \cos^2 \varphi_1)^{1/2}$ in s tem

$$\varrho_{kl}(x) = 1/\pi(x_0^2 - x^2)^{1/2} \quad |x| < x_0$$

To je znana klasična verjetnostna gostota (2).

Dodajmo, da za $|x| = x_0$ verjetnostna gostota ni določena, ker ima enačba $f(\varphi) = 0$ tedaj dvojno ničlo, in da je za $|x| > x_0$ enaka nič, ker enačba $f(\varphi) = 0$ tedaj nima ničle.

Kvantna verjetnostna gostota

V klasični mehaniki ima oscilator najmanjšo mogočo energijo, ko je amplituda x_0 enaka nič in je odmik x ves čas enak nič. Temu ustreza verjetnostna gostota (3) $\delta(0)$, ki je povsod, razen v izhodišču, enaka nič. V kvantni mehaniki ima najmanjšo mogočo energijo $W_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$ oscilator v osnovnem stanju z valovno funkcijo $u_0 e^{-i\omega t/2} = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{-i\omega t/2}$ in verjetnostno gostoto $\rho_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/2} e^{-m\omega x^2/\hbar}$. Ta verjetnostna gostota se od klasične verjetnostne gostote (3) z najmanjšo mogočo energijo razločuje po končni širini. (Razlika je še v tem, da obstaja v kvantni mehaniki neomejeno število stacionarnih stanj z energijo $W_n = \frac{1}{2} \hbar \omega + n \hbar \omega$, $n \geq 1$.)

Najbolje je primerjati oscilatorje, ki »nihajo z določeno amplitudo«. Kaj pomeni to v klasični mehaniki, vemo. V kvantni mehaniki pa je tej zahtevi najbližje *koherentno stanje* z valovno funkcijo [3]

$$\begin{aligned} \psi_a(x, t) = & (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (m\omega/\hbar) (x - x_0 \cos(\omega t + \Phi))^2 \right\} \cdot \\ & \cdot \exp i \left\{ \frac{1}{4} (m\omega x_0^2/\hbar) \sin 2(\omega t + \Phi) - (m\omega/\hbar) x x_0 \sin(\omega t + \Phi) - \frac{1}{2} (\omega t + \Phi) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Nadaljnje korake delamo tako kot pri računanju klasične verjetnostne gostote. Zamislimo si množico enakih harmoničnih oscilatorjev, ki jih opišemo z valovno funkcijo za koherentno stanje (5) z danima parametroma x_0 in Φ . V tem primeru je verjetnostna gostota

$$\rho_a(x, t) = |\psi_a|^2 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/2} e^{-m\omega(x - x_0 \cos(\omega t + \Phi))^2/\hbar} \quad (6)$$

Povprečni odmik

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi_a|^2 dx = x_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

se ujema s klasično rešitvijo (1). Na to smo mislili, ko smo rekli, da je koherentno stanje v kvantni mehaniki najbližje »nihanju z določeno amplitudo«.

Zdaj vzemimo množico enakih oscilatorjev v koherentnem stanju z enakim parametrom x_0 in enakim parametrom Φ , množico enakih oscilatorjev v enakem stanju z enakim parametrom x_0 in drugim parametrom Φ , množico enakih oscilatorjev v enakem stanju z enakim parametrom x_0 in še drugim parametrom Φ ... Od množice do množice se spreminja parameter Φ , tako da so enakopravno zastopane vse mogoče vrednosti. V sestavljeni množici oscilator-

* Zvezo hitro izpeljemo iz osnovne lastnosti porazdelitve δ , da je $\int \delta(\varphi - \varphi_1) d\varphi = 1$, če zajame integracijski interval točko $\varphi = \varphi_1$, v kateri je argument $\varphi - \varphi_1$ enak nič. Funkcijo $f(\varphi)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli enojne ničle φ_1 in obdržimo samo prvi člen: $f(\varphi) = (df/d\varphi)_{\varphi_1} (\varphi - \varphi_1)$. Uvedemo novo spremenljivko $\xi = |df/d\varphi|_{\varphi_1} \varphi$ in takoj uvidimo, da je

$$\int \delta[f(\varphi)] d\varphi = \int \delta[(df/d\varphi)_{\varphi_1} (\varphi - \varphi_1)] d\varphi = |df/d\varphi|_{\varphi_1}^{-1} \int \delta(\xi - \xi_1) d\xi = 1/|df/d\varphi|_{\varphi_1}$$

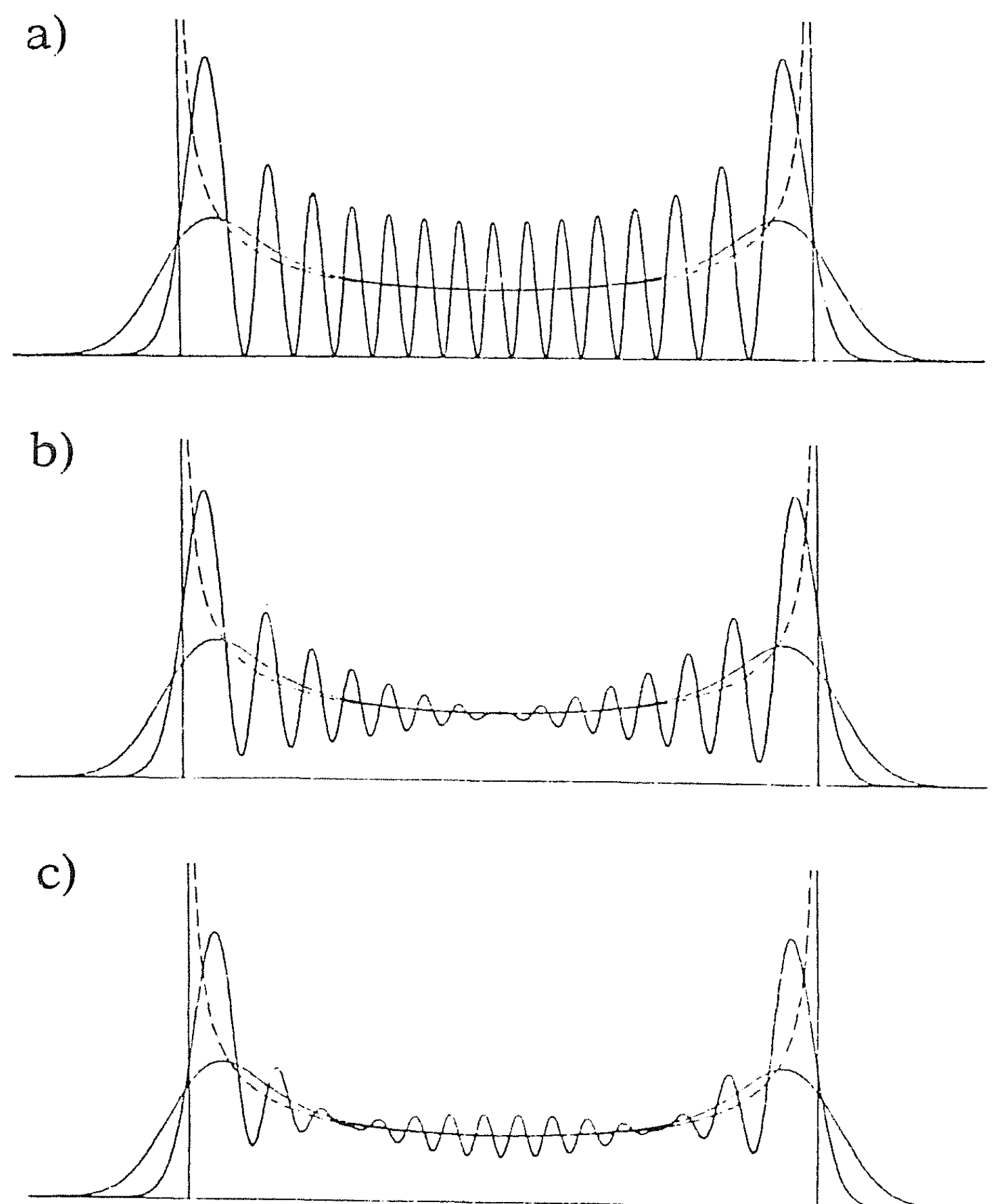
če zajame integracijski interval točko $\varphi = \varphi_1$.

jev je torej parameter enakomerno porazdeljen po intervalu od 0 do 2π . Iako je verjetnostna gostota za sestavljeno množico določena s povprečjem po parametru Φ verjetnostne gostote (6)

$$\begin{aligned} \rho_a(x) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \rho_a(x, t) d\Phi = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \rho_a(x, t) d\Phi = \\ &= \pi^{-1} (m\omega/\pi\hbar)^{1/2} \int_0^{\pi} e^{-m\omega(x - x_0 \cos(\omega t + \Phi))^2/\hbar} d\Phi = \\ &= (m\omega/\pi^3\hbar)^{1/2} \int_0^{\pi} e^{-m\omega((x - x_0 \cos \varphi)^2/\hbar)} d\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Zopet smo vpeljali novo spremenljivko $\varphi = \omega t + \Phi$. Zadnji integral izračunamo numerično. Klasična verjetnostna gostota (2) se s kvantno verjetnostno gostoto (7) ujema precej bolj (Sl. 2) kot z verjetnostno gostoto za lastno stanje $\rho_n(x)$ za velik n . To je uspelo doseči, ker smo primerjali oscilatorje, ki »nihajo z določeno amplitudo«.

Sl. 2 Nova primerjava klasične verjetnostne gostote (2) (a) s kvantno verjetnostno gostoto (7) na osnovi koherentnega stanja (sklenjeno) [1]. — Na določenih območjih lahko integral (7) približno izračunamo. Za $|x| \ll x_0$ največ prispeva pas okoli φ_1 , kjer je $\cos \varphi_1 = x/x_0$ in je pri $\varphi = \varphi_1$ eksponent enak nič. Eksponent razvijemo okoli φ_1 in obdržimo samo člen $-m\omega(x_0^2 - x^2)(\varphi - \varphi_1)^2/\hbar$. Integracijo razširimo na interval od $-\infty$ do ∞ in dobimo naposled klasično verjetnostno gostoto (2) (a). Za $|x| \gg x_0$ je največji prispevek okoli $\varphi = 0$. Eksponent razvijemo okoli $\varphi = 0$ in obdržimo člena $-m\omega(x - x_0)^2/\hbar - m\omega x_0(x - x_0)\varphi^2/\hbar$. Integriramo od 0 do ∞ in dobimo $e^{-m\omega(x-x_0)^2/\hbar}/2\pi x_0(x - x_0)^{1/2}$ (b). Tudi za $|x| = x_0$ razvijemo eksponent okoli $\varphi = 0$ in obdržimo člen $-m\omega x_0^2 \varphi^4/4\hbar$. Zopet integriramo od 0 do ∞ in dobimo $(m\omega/\hbar x_0^2)^{1/4} \Gamma(1/4)/(2\pi)^{3/2}$; pri tem je $\Gamma(1/4) = 3,6256$ (c) (glej sliko na ovitku)



Sl. 3 Zaporedni približki verjetnostne gostote (7) za $n = 14$ z enim samim členom iz vrste (9) (a), z dvema členoma (b) in s tremi členi (c) [1]

Pri tem se nismo ozirali na načelo korespondence, ki je bilo v razvoju kvantne mehanike zelo pomembno. Poglejmo na staro primerjavo še v novi luči. Za začetek se spomnimo, da so v stari kvantni mehaniki določili amplitudo oscilatorja x_0 tako, da so potencialno energijo (klasično: prožnostno energijo) pri največjem odmiku izenačili z energijo oscilatorja (lastno vrednostjo, klasično energijo nihanja). Iz zahteve $\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ so izračunali kvantno število

$$n_0 = m \omega x_0^2 / 2\hbar - \frac{1}{2} \quad (8)$$

ki ustreza tej energiji.

Po tej pripravi razvijmo koherentno valovno funkcijo v vrsto po lastnih valovnih funkcijah harmoničnega oscilatorja [3]

$$\psi_a(x, t) = \sum_{n=0} c_n u_n(x) e^{-i(n+1/2)(\omega t + \Phi)}$$

$$c_n = (m \omega x_0^2 / 2\hbar)^{n/2} (n!)^{-1/2} e^{-m\omega x_0^2 / 4\hbar}$$

Z njo izračunajmo verjetnostno gostoto v koherentnem stanju (6)

$$\varrho_a(x, t) = |\psi_a|^2 = \sum_{nn'} c_n c_{n'} u_n(x) u_{n'}(x) e^{-i(n-n')(\omega t + \Phi)}$$

in kot povprečje po parametru Φ že znano verjetnostno gostoto (7)

$$\varrho_a(x) = \pi^{-1} \int_0^\pi \varrho_a(x, t) d\Phi = \sum_n c_n^2 u_n^2(x) \quad (9)$$

Integral $\int_0^\pi e^{-i(n-n')\varphi} d\varphi$ je namreč enak π , če je $n = n'$, za $n \neq n'$ pa je enak nič. Zdaj bolje razumemo verjetnostno gostoto (7) in staro primerjavo klasične verjetnostne gostote (2) z verjetnostno gostoto v lastnem stanju $\varrho_n(x)$.

Verjetnostna gostota $\varrho_n(x)$ preostane, če spustimo v vrsti (9) vse člene razen enega. Pri danem parametru x_0 obdržimo le člen z največjim koeficientom c_n . Prepoznamo ga tako, da uporabimo Stirlingov približek $n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n}$ za velik n , poiščemo $\ln c_n$, odvajamo po n in zahtevamo, da je odvod enak nič. Iz dobljene enačbe $n_0 e^{1/2n_0} = m \omega x_0^2 / 2\hbar$, v kateri za velik n_0 razvijemo eksponentno funkcijo v $1 + 1/2n_0$, dobimo polklasično zvezo (8). Potem, ko obdržimo samo en člen, moramo koeficient c_n nadomestiti z 1, saj je verjetnostna gostota $\varrho_{n_0} = u_{n_0}^2$ že normirana. Ta verjetnostna gostota je slab približek za verjetnostno gostoto (7), četudi ustreza največjemu koeficientu. Tako, da upoštevamo poleg člena pri n_0 (Sl. 3a) še člen pri $n_0 + 1$ (Sl. 3b) in nato še člen pri $n_0 - 1$ (Sl. 3c), lahko približek izboljšamo, le da moramo pri tem posebej paziti na normiranje. Ko vključimo vse več členov, se vse bolj približamo verjetnostni gostoti (7). Kvantno število n_0 mora biti dovolj veliko, da smemo uporabiti Stirlingov približek in razviti eksponentno funkcijo.

Stara primerjava na osnovi načela korespondence ni brez soli in je ne kaže po vsej sili opustiti. Nova primerjava je vsekakor boljša in jo je vredno omeniti, če poznajo študenti koherentno stanje. Njena slabost je prav v tem, da koherentnega stanja osnovni učbeniki kvantne mehanike doslej navadno sploh niso obravnavali.

Profesorju C. Leubnerju z univerze v Innsbrucku se zahvaljujem za prijaznost, da je dovolil objaviti sl. 2 in 3 [1].

LITERATURA

[1] C. Leubner, M. Alber, N. Schupfer, *Critique and Correction of the Textbook Comparison between Classical and Quantum Harmonic Oscillator Probability Densities*, prednatisk Univerze v Innsbrucku.

[2] J. Strnad, *Fizika*, 3. del., Državna založba Slovenije, Ljubljana 1982, str. 153.

[3] J. Strnad, *Na pot v kvantno elektrodinamiko*, DMFA SRS, Ljubljana 1986, str. 38, 43.

KLADNIK R., Šolinc H., Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami 1, DZS, Ljubljana 1988, 237 str.

Zbirka je zamišljena kot dopolnilo univerzitetnega učbenika iz fizike za študente prvih letnikov tehničnih fakultet. Prvotno zbirko, ki je nastala leta 1972, sta avtorja v novi izdaji temeljito predelala in izpopolnila. Prvi del obsega 21 poglavij iz mehanike in toplote.

Zbirka bo gotovo koristen pripomoček pri učenju fizike v prvem letniku na univerzi, ne le za študente tehničnih smeri, saj so v vsakem poglavju naloge urejene po težavnosti in bo vsak študent lahko našel primerne naloge. Ne bo pa odveč, če opozorimo na dve najbolj pogosti zlorabi, ki se tičejo zbirk rešenih nalog. Izkušnje kažejo, da veliko študentov meni, da se lahko reševanja naučijo le s prebiranjem rešitev—nekako tako, kot se je butalski kovač naučil svoje obrti. Še huje pa je, če se zanašajo na to, da bodo pri pismenem izpitu naloge reševali tako, da bodo poiskali podobne naloge v zbirki. Takšnih skušnjav bi bilo manj, če bi bile rešitve zbrane na koncu knjige, ne pa podane takoj za tekstom naloge.

Avtorja v uvodu omenita, da sta rešitve nalog priredila in dopolnila z mislijo, da bodo zbirko uporabljali tudi srednješolci. Manj zahtevne naloge so gotovo primerne tudi za srednješolski nivo, le škoda, da avtorja takšnih nalog nista posebej označila. Srednješolskim profesorjem, ki nameravajo zbirko uporabljati pri pouku fizike, zato priporočamo, da dijakom jasno povedo, katere naloge so primerne za vse, katere le za boljše dijake, katere pa presegajo srednješolsko znanje fizike in matematike. Hkrati naj jih opozorijo, da bo učenje uspešno samo, če bodo naloge reševali samostojno in rešitve uporabljali le za kontrolo.

Še pripomba na račun založbe. Naše Društvo si prizadeva, da bi vse publikacije iz matematike, fizike, astronomije in računalništva izšle s strokovno recezijo. Ta želja ni nezaupanje do avtorjev, saj recenzija v resnici pomaga izboljšati delo in jih lahko pravočasno opozori na morebitne pomanjkljivosti ali napake.. Ker je v knjigi naveden le jezikovni recenzent, se zdi, da se založba pri zbirki, žal, ni ravnala po tem načelu.

Bojan Golli

KUENLE H.-U., Stochastische Spiele und Entscheidungsmodelle, Teubner Verlag, Leipzig 1986 (Teubner Texte zur Mathematik ; 89).

Knjiga je monografija o stohastičnih igrah, ki so se razvile v zadnjih štiridesetih letih in se pričele uporabljati v matematičnem modeliranju mnogih praktičnih problemov. Največji poudarek je na t.i. markovskih igrah s polno informacijo in modelih odločanja. Glavni problem je seveda poiskati optimalno strategijo. Za različne razrede markovskih iger avtor podaja izreke o eksistenci in lastnostih optimalnih strategij.

Knjiga je pisana v strogo formalnem matematičnem jeziku, kot je v navadi na tem področju. Nudi obilo informacij in tudi pregled nad različnimi tipi stohastičnih iger, za prvi stik s to zanimivo in uporabno teorijo pa verjetno ni najbolj primerna.

Milan Hladnik

ALBEVERIO, S. et al., Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer-Verlag, New York Inc., 1988, XIV + 452 str.

Rešljivi modeli imajo pomembno vlogo pri razlagi naravnih pojavov. Omogočajo razumevanje glavnih značilnosti pojavov in so tudi vodilo pri iskanju metod za obravnavanje bolj kompliciranih in realističnih primerov. Monografija podrobno obravnava le eno vrsto rešljivih modelov v kvantni mehaniki. To so modeli, ki opisujejo gibanje delca v prostoru s končnim ali neskončnim številom točkovnih izvirov potenciala z neskončno majhnim dosegom. V literaturi se uporabljajo v zvezi s takimi modeli imena kot točkovne interakcije, potenciali z ničelnim dosegom, delta interakcije, Fermijeve psevdopotenciali in kontaktne interakcije. Tovrstni modeli so rešljivi v tem smislu, da omogočajo ekspliciten zapis odvisnosti resolventa od jakosti in lege izvirov potenciala. Zato je mogoče tudi eksplicitno izračunati ustrezne matematične in fizikalne količine, nadalje lastne funkcije, resonance in sipalne amplitude. Ti modeli so izredno uporabni v fiziki trdnih snovi, atomski in jedrski fiziki. Monografija podaja sistematičen matematični pristop k obravnavi modelov s točkovnimi interakcijami. Splošna metoda obravnave je bila razvita šele pred nekaj leti. Večina obravnavanih modelov je seveda starejšega datuma. Vendar je njihovo reševanje slonelo na bolj hevrističnih izpeljavah in računih. Monografija je dragocen prispevek k poenotenju obravnave različnih modelov in podaja tudi obilo novih rezultatov. Delo je razdeljeno na tri dele. Prvi obravnava enocentrske točkovne potenciala v treh in v dveh in eni dimenziji. Drugi del obravnava primere končnega števila izvirov. Tretji najobširnejši del monografije pa je posvečen modelom z neskončnim številom točkovnih interakcij. Klasičen primer ali prototip je Kronig-Penneyev model enodimenzionalnega kristala iz leta 1931. Vsebinsko tega dela knjige lepo ilustrirajo naslovi nekaterih podpoglavij: kristali, polkristali, ravni polimeri, monomolekularne plasti, Braggovo sipanje, Fermijeve površine, kristali z defekti in primesmi, neurejeno razporejene točkovne interakcije. Monografija o točkovnih interakcijah je za fizika gotovo zelo zahtevno branje zaradi njenega strogo matematičnega pristopa. Knjiga vsebuje izredno obširen seznam referenc.

Peter Gosar

DAY W. A., A commentary on thermodynamics, Springer-Verlag, New York 1988, 96 str. (Springer tracts in natural philosophy ; 32).

Namen te knjige je prikazati komentarje matematika k fizikalnemu opisu termodinamike. Avtor na pojavu termoelastičnosti pokaže, kako se je možno izogniti matematično spornim postopkom. V nasprotju z geometrijskim pristopom, ki je primeren za opis termostatike, avtor uporablja teorijo polja, ki mu omogoča vključitev pojava toplotne prevodnosti. Tako se da jasno prikazati pomen pojmov kvazistatičen, reverzibilen in ireverzibilen, s katerimi običajno karakteriziramo procese v termodinamiki. Da bi se izognil zapletenemu opisu, se avtor omejuje na enodimenzionalni primer in izpelje parcialni diferencialni enačbi za polji pomikov in temperature. V okviru poenostavitve, kot so linearnost, nedisipativnost in homogenost, slede štiri podrobnejše obravnave termoelastičnosti in različnih verzij drugega zakona termodinamike. Knjiga je razumljivo napisana in je zato dostopna tudi nespecialistom, vendar pa bo s svojo vsebino pritegnila le tiste, ki jih posebej zanimajo matematično strogi opisi v termodinamiki.

Slobodan Žumer

GRIEPENTROG E., MARZ R., Differential-algebraic equations and their numerical treatment, Teubner Verlag, Leipzig 1986 (Teubner Texte zur Mathematik ; 88).

Pod pojmom diferencialno-algebraične enačbe se skrivajo implicitne (vektorske) diferencialne enačbe 1. reda $f(t, x, x') = 0$, v katerih se v splošnem x' ne da eksplicitno izraziti niti lokalno. Očitno je, da je pri obravnavi takih enačb potrebna posebna skrb in posebne metode.

Avtorja raziskujeta primer, ko je ničelni podprostor Jacobijeve matrike $f_{x'}(t, x, x')$ konstanten ali pa odvisen le od neodvisne spremenljivke t . Za dovolj široki in za tehnološko uporabo (v elektrotehniki in drugje) pomembni razred sistemov takih diferencialnih enačb pokažeta, da so splošni nelinearni začetni in robni problemi korektno zastavljeni in stabilni. Proučujeta tudi rešljivost nekaterih drugih sistemov. V drugem delu obravnavata konvergenco in stabilnost različnih (primerno prilagojenih) klasičnih numeričnih metod za reševanje tovrstnih problemov.

Pred nami je torej tipična knjiga iz uporabne matematike, ki se loteva reševanja praktičnih problemov z resno matematično analizo. Čeprav so osnovni pojmi, s katerimi operira, v glavnem znani, pa nikakor ni lahko branje. Namenjena je seveda specialistom s področja (numeričnega) reševanja diferencialnih enačb.

Milan Hladnik

VESTI

ZNANJE BRUCOV MATEMATIKE

Od študentov prvega letnika matematike na Oddelku za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani ne zahtevamo veliko predznanja. Pričakujemo poznavanje osnovnih pojmov in postopkov iz analize in algebre kot so: računanje z ulomki, razstavljanje polinomov, risanje grafov funkcij (premice, kvadratne funkcije, polinomi, racionalne funkcije), poznavanje osnovnih pojmov iz geometrije, nekaj rutine in seveda, da so se naučili premisliti enostavne probleme.

Učitelji in asistentje, ki poučujemo študente prvega letnika matematike, ocenjujemo, da je znanje brucov zadnja leta vse slabše. V začetku letošnjega šolskega leta (1988/89) smo se zato odločili, da s testom potipljemo znanje dijakov, ki so se vpisali na matematiko. V resnici je bil test namenjen srednjim šolam. Sestavljen je bil tako, da se je, kolikor se je dalo, skladal s področji iz analize, za katera mislimo, da bi jih bodoči študentje matematike morali obvladati še pred študijem. V njem ni nobenega »problema« in vsebuje le naloge, za katere smo si želeli, da bi jih vsi kandidati rešili. Test je bil anonimen. Študente smo le prosili, da napišejo vrsto šole, iz katere prihajajo. Časa za reševanje je bilo 90 minut. Testa se je udeležilo 76 študentov.

Za ilustracijo objavljamo testne naloge:

1. Za katera realna števila je $(x^2 - 1)(x + 2) \geq 0$?
2. Rešite neenačbo $|2x + 3| \leq |4x - 3|$.
3. Racionalizirajte $(\sqrt[3]{3} + 1)/(\sqrt[3]{3} - 1)$.
4. Naj bo $p(x) = x^5 + 3x^2 - x + 3$. Izračunajte $p(i)$.
5. Izračunajte $(1 + 3i)/(1 - i)$.

6. Skicirajte grafe funkcij
 - a) $y = x^2 - 4x + 8$, $y = -x^2 + 6x - 8$
 - b) $y = 2x/(x - 1)$.
 7. Poiščite ničle polinoma $p(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 30$ ter odvoda $p'(x)$.
 8. Deli polinoma $(8x^3 + 7x^2 - 6x - 5) : (6x^2 + 5x - 7)$.
 9. Koliko je $\sin \pi/2$, $\cos 17\pi$, $\sin (31\pi/2)$, $\arctg 1$?
 10. Poiščite ničle funkcije $y = \cos 3x$.
 11. Naj bo $\sin t = 1/3$. Izračunajte $\tg t$ in $\cos 2t$.
 12. Ali se naslednji krožnici sekata
 $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 40$, $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 16$.
 13. Poiščite presečišča krivulj $x^2 - y^2 = 0$ in $xy = 1$.
 14. Katere od točk $A(-5, 6)$, $B(7, 12)$ in $C(9, -16)$ ležijo na hiperboli $4x^2 - y^2 = 64$? Skicirajte to hiperbolo.
 15. Zapišite enačbo premice, ki je vzporedna ordinatni osi in ki gre skozi točko $A(1, 2)$.
 16. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = \sin(x^2 + \ln x)$.
- Rezultate navajamo v naslednji tabeli:

naloga	skupaj	nar	ped	rač	ost
1	48	59	33	43	28
2	29	42	11	7	12
3	95	93	100	100	94
4	68	77	50	50	59
5	73	82	67	64	56
6a	88	91	72	86	87
6b	55	65	39	64	35
7	57	69	56	57	25
8	82	88	83	86	63
9a	89	89	78	100	94
9b	62	73	44	57	44
9c	57	66	44	57	37
9d	74	86	44	71	56
10	63	73	61	64	34
11	56	63	56	43	44
12	35	49	11	0	25
13	64	64	39	57	81
14	62	70	61	64	37
15	61	72	65	50	41
16	66	73	39	86	56
skupaj	63	71	52	59	49

Uspeh je podan v odstotkih. V prvem stolpcu je zaporedna številka naloge. V stolpcu **skupaj** je podan uspeh vseh kandidatov pri posamezni nalogi, v drugih stolpcih pa po skupinah šol. Pri tem pomeni **nar** naravoslovno-matematično usmeritev, **ped** pedagoške srednje šole, **rač** računalniške šole in v **ost** so zajete vse druge šole.

Po našem mnenju je rezultat testa slab in se ujema z napovedmi asistentov, ki imajo največ stika s študenti v prvih mesecih študija. Vzroki za take rezultate so lahko različni, npr. nekatere teme niso bile dovolj uvežbane zaradi prenatrpanosti učnega programa v srednji šoli ali so prišli študirat matematiko v povprečju slabši dijaki, mogoče so fantje pri vojakih že vse pozabili itd. O tem bi vedeli marsikaj povedati srednješolski profesorji, zato jih vabimo, da napišejo svoje mnenje in dajo tudi konkretne predloge za spremembe.

Mirko Dobovišek

PUBLIKACIJE KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1988

- 1.— 5. Obzornik za matematiko in fiziko **35** (1988) številke 1/2, 3, 4, 5, 6 (901, 910, 924, 925, 927)
- 6.—11. Presek — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje **14** (1987/88) številke 4, 5, 6; **15** (1988/89) številke 1, 2, 3 (902, 909, 915, 923, 928, 930)

Presekova knjižnica

12. 29. Naše nebo in Zemlja 1989 (932)

Učbeniki in priročniki

13. Leksikon Cankarjeve založbe (matematika, fizika, astronomija), 5. predelana in razširjena izdaja (904)
14. Žabkar J., Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov, ... 22. natis (916)
15. Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 3. razred srednjih šol (F. Avsec in dr.) (920)
16. ... 4. razred srednjih šol (I. Štalec) (908)

Knjižnica Sigma

17. 2. c. Vadnal A., Elementarni uvod v verjetnostni račun (918)
18. 9. c. Prijatelj N., Matematične strukture I (888)
19. 20. p. Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele (903)
20. 30. a. Vadnal A., Osnove diferenčnega računa (906)
21. 41. a. Mohar B., Zakrajšek E., Programski jezik pascal (889)
22. 44. Batagelj V. in dr., Enajsta šola računalništva — Rešene naloge z republiških tekmovanj 1977—1987 (914)

Izbrana poglavja iz matematike in računalništva

23. 23. Kozak J., Lokar M., Naloge iz računalništva (922)

Zbirka izbranih poglavij iz fizike

24. 9. e. Gros M. in dr., Naloge iz fizike I (900)

Matematika-Fizika: Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

25. 14. b. Strnad J., Fizika, 3. del, Posebna teorija relativnosti. Kvantna fizika. Atomi (919)

Seminar za numerično in računalniško matematiko

26. 495. Dacar F., Tlakovanje ravnine s trikotniki in kvadrati, 1. del (933)
27. 501. Dacar F., Tlakovanje ravnine s trikotniki in kvadrati, 2. del (935)

Postdiplomski seminar iz matematike

28. 17. Suhadolc A., Linearni topološki prostori, 2. del (912)

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

29. Letno poročilo, 1987
30. 25. Preprint series of the department of mathematics, 1987 (905)

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije

31. 40. Občni zbor — poročila (929)
32. 12. Seminar iz matematike — Diferencialne enačbe (907)
33. 1. poletna šola iz matematike in fizike (926)

Tekmovanja — poročila

34. 32. republiško iz matematike za srednješolce (913)
35. 26. republiško iz fizike za srednješolce (917)
36. 12. republiško iz znanja računalništva (921)
37. 3. republiško iz logike za osnovnošolce in srednješolce (934)
38. 8. republiško iz fizike za osnovnošolce (931)

Ciril Velkovrh

Na koncu naslovov so v oklepajih vpisane zaporedne številke izdaj Komisije za tisk DMFA SRS od leta 1951 do danes.