

12-12/88
ODPISANO

IZDAJA DRUSTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7446

1988
Letnik 35
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 35 — ŠTEVILKA 6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1988

Uredniški odbor: Milan Hladnik — urednik za matematiko, Niko Prijatelj — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 7000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 3500.— din, za ustanove in podjetja 20000.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 2000.— din, dvojna številka 4000.— din, stare številke 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1988 DMFA SRS — 927

Poštšina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

	Str.-Page
Članki — Articles	
Stirlingova števila druge vrste — Stirling numbers of the second kind (Marko Razpet)	161
Vztrajnostni moment homogenega trikotnikovega oboda — Momentum of inertia of a thin homogeneous triangular frame (Ivan Pucelj)	172
Primeri uporabe glavnih smeri afinih preslikav — On principal directions of affine maps (Radomir Živković, prev. in prir. Marija Vencelj)	175
Merilnik rentgenske svetlobe s scintilacijami v plinu — An X-ray detector based on gaseous scintillations (Aleš Stanovnik)	187
Nove knjige — New books (Peter Petek, Matija Lokar, Matjaž Poljšak)	171, 174, 192

Na ovitku: Stara in nova zgradba Tiskarne Ljudske pravice, v kateri stavijo in tiskajo Obzornik za matematiko in fiziko že 35 let. (Foto: Marjan Ciglič)

STIRLINGOVA ŠTEVILA DRUGE VRSTE

MARKO RAZPET

Math. Subj. Class (1985) 05A05, 10A40, 60C05

V članku so vpeljana Stirlingova števila druge vrste z rodovnimi funkcijami. Definirani so tudi Bellovi polinomi in Bellova števila. Za primer uporabe je navedena razdelitev končne množice na podmnožice in ustrezni verjetnostni model.

STIRLING NUMBERS OF THE SECOND KIND

In this article the Stirling numbers of the second kind through some generating functions are introduced. The basic properties of the Bell polynomials and the Bell numbers are derived. As an application the partition of a finite set into non-empty subsets with the suitable probability model is described.

1. Uvod

Stirlingova števila bomo poskusili obravnavati s teorijo potenčnih vrst, proti koncu bomo podali tudi preprosto kombinatorično razlago zanje. Glede oznak se dogovorimo, da bomo namesto e^z pisali $\exp z$, namesto $\ln x$ pa $\log x$.

Stirlingova števila druge vrste $S_n^{(m)}$, kjer sta zgornji indeks m in spodnji indeks n nenegativni celi števili, bomo vpeljali z razvijanjem funkcij f_m , ki so definirane z relacijami

$$f_m(z) = \frac{1}{m!} (\exp z - 1)^m, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

v potenčne vrste. Razvoj po potencah spremenljivke z zapišimo v obliki

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{z^n}{n!} \quad (2)$$

Koeficienti $S_n^{(m)}$ v tem razvoju so *Stirlingova števila druge vrste*.

Že naslov zahteva, da vsaj omenimo *Stirlingova števila prve vrste*, označimo jih $s_n^{(m)}$, kjer sta indeksa nenegativni celi števili. Namesto (1) je treba tedaj vzeti funkcije

$$g_m(x) = \frac{1}{m!} \log^m(1+x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1')$$

namesto (2) pa študiramo razvoj

$$g_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(m)} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1 \quad (2')$$

V posebnem primeru je $f_0(z) = 1$, iz česar dobimo takoj $S_n^{(0)} = 0$ za $n \geq 1$ in $S_0^{(0)} = 1$. Za $m \geq 1$ je točka $z = 0$ ničla stopnje m funkcije f_m , zato velja $S_n^{(m)} = 0$ za $m > n$. Prav lahko je iz razvoja

$$f_1(z) = \exp z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(1)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3)$$

prebrati, da je $S_n^{(1)} = 1$ za $n \geq 1$. Vrsta (3) je absolutno konvergentna za vsak $z \in \mathbb{C}$. Iz (1) dobimo preprosto zvezo

$$(m+1)f_{m+1}(z) = f_1(z)f_m(z), \quad m \geq 0 \quad (4)$$

iz katere korak za korakom z množenjem vrst pridemo do razvojev (2). Cauchyjev izrek o produktu dveh absolutno konvergentnih vrst pove, da vrste (2) konvergirajo za vsak $z \in \mathbb{C}$. Vse zgornje vrste smemo tudi členoma odvajati.

Ker je $S_n^{(m)} = 0$ za $m > n$, lahko razvoj (2) poenostavimo:

$$f_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{z^n}{n!} \quad (5)$$

Izkaže se, da za Stirlingova števila prve vrste velja

$$g_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1 \quad (5')$$

Za $m \geq 1$ velja preprosta identiteta:

$$f'_m(z) = m f_m(z) + f_{m-1}(z) \quad (6)$$

Po kratkem računu dobimo iz (5) in (6) naslednjo relacijo:

$$\sum_{n=m-1}^{\infty} S_{n+1}^{(m)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=m}^{\infty} m S_n^{(m)} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=m-1}^{\infty} S_n^{(m-1)} \frac{z^n}{n!}, \quad m \geq 1 \quad (7)$$

Od tod sledi

$$S_m^{(m)} = S_{m-1}^{(m-1)} \text{ in } S_{n+1}^{(m)} = m S_n^{(m)} + S_n^{(m-1)}, \quad m \geq 1, n \geq m$$

Ugotovili smo že, da je $S_1^{(1)} = 1$, zato iz prve od zgornjih dveh enakosti z indukcijo dobimo $S_n^{(n)} = 1$ za $n \geq 1$, od prej pa že vemo, da je $S_0^{(0)} = 1$, tako imamo enakost $S_n^{(n)} = 1$ za $n \geq 0$. Zveza

$$S_{n+1}^{(m)} = m S_n^{(m)} + S_n^{(m-1)}, \quad n \geq m \geq 1 \quad (8)$$

je osnovna rekurzivna formula za Stirlingova števila druge vrste. Omogoča nam sestaviti Stirlingov trikotnik druge vrste:

Tabela 1

m	1	2	3	4	5	6	7	8
n								
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Vsa Stirlingova števila druge vrste so torej nenegativna in cela. Zlahka jih s seštevanjem in množenjem izračunamo s formulo (8).

2. Rodovne funkcije

Pri izbranem številu m se pojavijo števila $S_n^{(m)}$ v razvoju funkcije f_m v potenčno vrsto in tvorijo m -ti stolpec Stirlingovega trikotnika. Funkcija f_m torej generira števila $S_n^{(m)}$ in ji zato pravimo *rodovna funkcija ali generatrisa* Stirlingovih števil druge vrste. Vendar se ta števila pojavljajo tudi pri razvojih drugih funkcij v potenčne vrste. V ta namen ponovimo: za vsako realno število x in naravno število m je definiran binomski koeficient

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1) \dots (x-m+1)}{m!}$$

za $m = 0$ pa postavimo $\binom{x}{0} = 1$. S tem si bomo poenostavili marsikateri zapis, pa tudi sicer je to združljivo z drugimi definicijami (glej Vadnal, [6]). Dobro je znan razvoj

$$(1+t)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{x}{m} t^m, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |t| < 1 \quad (9)$$

To je znana binomska vrsta in ni težko videti, da konvergira absolutno za $|t| < 1$, $t \in \mathbb{C}$.

Razvijmo na dva načina v potenčno vrsto funkcijo $(x, y) \rightarrow \exp(xy)$ iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}$. Za vsak realen par (x, y) imamo najprej

$$\exp(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y^n}{n!} \quad (10)$$

Po drugi strani pa za $y < \log 2$ velja ocena $|\exp y - 1| < 1$ in

$$\exp(xy) = (1 + \exp y - 1)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{x}{m} (\exp y - 1)^m \quad (11)$$

Če upoštevamo še razvoj (3), dobimo

$$\exp(xy) = \sum_{m=0}^{\infty} m! \binom{x}{m} \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{y^n}{n!} \quad (12)$$

Vrsti v (5) in (11) sta absolutno konvergentni in zato smemo v (12) zamenjati vrstni red:

$$\exp(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} m! \binom{x}{m} \quad (13)$$

S primerjavo razvoj (10) in (13) dobimo končno

$$x^n = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} m! \binom{x}{m} \quad (14)$$

za vsako nenegativno celo število n in vsak realen x .

Formulo (14) lahko dokažemo tudi z metodo matematične indukcije in osnovno zvezo (8). Formula (14) predstavlja ključ za osnovno limto, ki velja za števila $S_n^{(m)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(m)}}{m^n} = \frac{1}{m!} \quad (15)$$

za vsako naravno število m .

Da bi dokazali formulo (15), vpeljimo števila

$$P_n^{(m)} = \frac{S_n^{(m)} m!}{m^n}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1 \quad (16)$$

Privzemimo, da je $1 \leq m < n$. Iz formule (14) dobimo za $x = m$

$$m^n = \sum_{r=1}^m S_n^{(r)} r! \binom{m}{r} \quad (17)$$

(indeks r teče samo do m , ker je $\binom{m}{r} = 0$ za $r > m$), iz česar sledi

$$S_n^{(m)} m! < m^n, \quad n > m \quad (18)$$

Drugače povedano, pri fiksnem številu m je zaporedje $P_n^{(m)}$, $n > m$, navzgor omejeno z 1. Iz osnovne zveze (8) imamo takoj oceno $S_{n+1}^{(m)} > m S_n^{(m)}$, iz katere po množenju z $m!$ in deljenju z m^{n+1} pridemo do ocene $P_{n+1}^{(m)} > P_n^{(m)}$. Zaporedje $P_n^{(m)}$, $n > m$, je torej pri izbranem številu $m \geq 1$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato obstaja $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(m)}$. Enakost (17) zlahka prepišemo v obliko

$$\sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} P_n^{(r)} \left(\frac{r}{m}\right)^n + P_n^{(m)} = 1 \quad (19)$$

iz katere se takoj vidi, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(m)} = 1$, kar pa pove isto kakor (15).

Če je $n \geq m \geq 1$, potem dobimo s preprostim računom enakost

$$\frac{m P_{n+1}^{(m)}}{P_n^{(m)}} = \frac{S_{n+1}^{(m)}}{S_n^{(m)}}$$

iz katere sledi naslednja važna formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}^{(m)}}{S_n^{(m)}} = m, \quad m \geq 1 \quad (20)$$

Za $n \geq m \geq 1$ dobimo iz rekurzivne formule (8) enakost

$$\frac{S_{n+1}^{(m)}}{S_n^{(m)}} = m + \frac{S_n^{(m-1)}}{S_n^{(m)}}$$

iz katere zaradi (20) sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(m-1)}}{S_n^{(m)}} = 0 \quad (21)$$

Oglejmo si zaporedje vrst v $\mathbb{C}$ oblike

$$\sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} z^n, \quad m \geq 0 \quad (22)$$

Za $m = 0$ dobimo vrsto, ki ima en sam člen, in sicer 1, torej je njen konvergenčni radij neskončen. Če pa je $m \geq 1$, potem je konvergenčni radij vrste (22) obratna vrednost limite (20), torej $\frac{1}{m}$. Znotraj konvergenčnih krogov konvergirajo vrste (22) absolutno in enakomerno proti analitičnim funkcijam, ki jih označimo F_m , torej

$$F_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} z^n, \quad |z| < \frac{1}{m}, \quad m \geq 1$$

$$F_0(z) = 1, \quad z \in \mathbb{C} \quad (23)$$

Hitro se da izračunati tudi funkcija F_1 :

$$F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(1)} z^n = \frac{z}{1-z}, \quad |z| < 1$$

Da bi izračunali F_m za $m \geq 1$, si oglejmo produkt $(1 - mz) F_m(z)$, $|z| < \frac{1}{m}$.

$$\begin{aligned} (1 - mz) F_m(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} z^n - \sum_{n=m}^{\infty} m S_n^{(m)} z^{n+1} = \\ &= S_m^{(m)} + \sum_{n=m}^{\infty} (S_{n+1}^{(m)} - m S_n^{(m)}) z^{n+1} = S_{m-1}^{(m-1)} z^m + \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m-1)} z^{n+1} = \\ &= z \sum_{n=m-1}^{\infty} S_n^{(m-1)} z^n = z F_{m-1}(z) \end{aligned}$$

Ker je očitno $\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1}$, konvergira tudi zadnja vrsta v zgornjem računu.

Tako smo dokazali rekurzivno formulo

$$F_m(z) = \frac{z}{1 - mz} F_{m-1}(z), \quad |z| < \frac{1}{m} \quad (24)$$

iz katere induktivno izpeljemo

$$F_m(z) = \frac{z^m}{(1-z)(1-2z)\dots(1-mz)} = \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} z^n, \quad |z| < \frac{1}{m} \quad (25)$$

Tako smo prišli do nove rodovne funkcije Stirlingovih števil druge vrste.

Za dovolj majhen krog lahko vsak ulomek oblike $\frac{1}{1-kz}$ razvijemo v geometrijsko vrsto in tako iz (25) dobimo nov razvoj:

$$z^m(1+z+\dots)(1+2z+\dots)\dots(1+mz+\dots) = z^m(1 + (1+2+\dots+m)z + \dots) = z^m(S_m^{(m)} + S_{m+1}^{(m)}z + \dots)$$

iz katerega preberemo

$$S_{m+1}^{(m)} = 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2} = \binom{m+1}{2}, \quad m \geq 1$$

V posebnem primeru lahko vstavimo v (25) za z število $\frac{1}{m+r}$, $r = 1, 2, 3, \dots$; po krajšem računu pridemo do novega rezultata:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{S_n^{(m)}}{(m+r)^n} = \frac{(r-1)!}{(m+r-1)!}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

3. Bellovi polinomi

Ni se težko prepričati, da so vrste oblike

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} z^k$$

konvergentne povsod na ravnini $\mathbb{C}$ za $n = 0, 1, 2, \dots$. Za $n = 0$ smatramo, da je $0^0 = 1$. Povsod na ravnini $\mathbb{C}$ so potem definirane funkcije b_n z izrazi

$$b_n(z) = \exp(-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} z^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Očitno je $b_0(z) = 1$. Z odvajanjem relacije (27) pridemo do rekurzivne zveze

$$b_{n+1}(z) = z b_n'(z) + z b_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Iz nje postopoma izračunamo še

$$b_1(z) = z, \quad b_2(z) = z + z^2, \quad b_3(z) = z + 3z^2 + z^3$$

Z metodo matematične indukcije pridemo na podlagi relacije (28) do sklepa: funkcije b_n so polinomi stopnje n . Imenujejo se *Bellovi polinomi*.

Lahko pa poiščemo tudi rodovno funkcijo Bellovih polinomov podobno kot prej za števila $S_n^{(m)}$, torej

$$G(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_n(z), \quad t, z \in \mathbb{C}$$

Ker imamo opravka z absolutno konvergentnimi vrstami, lahko v naslednjem računu zamenjamo vrstni red seštevanj (Fihtengol'c, [1], str. 332)

$$\begin{aligned} G(t, z) &= \exp(-z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} z^k = \exp(-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t k)^n}{n!} = \\ &= \exp(-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \exp(t k) = \exp(-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z \exp t)^k}{k!} = \\ &= \exp(-z) \exp(z \exp t) = \exp(z(\exp t - 1)) \end{aligned}$$

Rodovna funkcija za Bellove polinome je torej dana z izrazom

$$G(t, z) = \exp(z(\exp t - 1)), \quad t, z \in \mathbb{C}$$

Po drugi strani pa lahko funkcijo $G(t, z)$ zapišemo tudi v obliki

$$G(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (\exp t - 1)^m \frac{z^m}{m!}$$

Če upoštevamo formulo (3), dobimo iz zgornje oblike še

$$G(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} z^m S_n^{(m)} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} z^m$$

Iz tega razvoja je sedaj razvidno, da lahko eksplisito zapišemo

$$b_n(z) = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} z^m, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

Iz razvojev (27) in (29) dobimo z razvojem eksponentne funkcije v potenčno vrsto

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} z^k = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} z^m$$

Na levi strani uporabimo Cauchyjev način množenja dveh absolutno konvergentnih vrst in dobimo

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (m-j)^n}{j! (m-j)!} z^m = \sum_{m=0}^n S_n^{(m)} z^m$$

Iz tega takoj sledi

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n = \begin{cases} m! S_n^{(m)}, & m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases} \quad (30)$$

za $n = 0, 1, 2, \dots$ (Primerjaj tudi Krečmar, [3], naloga 55, § 6).

Funkcija G zadošča enačbi

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, z) = z \exp t G(t, z)$$

iz česar dobimo iz razvoja

$$G(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_n(z)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_{n+1}(z) = z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b_n(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} b_k(z)$$

Tako smo prišli do zveze med Bellovimi polinomi

$$b_{n+1}(z) = z \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

To formulo lahko preverimo tudi z razvojem (27).

4. Bellova števila

Vrednosti Bellovih polinomov v točki 1 bomo imenovali *Bellova števila* in jih bomo označevali s T_n , torej

$$T_n = b_n(1)$$

Ker so koeficienti Bellovih polinomov Stirlingova števila druge vrste, so Bellova števila naravna števila. Število T_n je ravno vsota elementov n -te vrstice Stirlingovega trikotnika druge vrste (tabela 1). Tako pridemo do naslednje preglednice:

Tabela 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

Rodovna funkcija za Bellova števila neposredno sledi iz rodovne funkcije G

$$G(t, 1) = \exp(\exp t - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} t^n \quad (32)$$

iz zveze (31) pa dobimo povezavo med Bellovimi števili

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Iz razvojev (27) je potem očitno

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = e T_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Dobinski, 1877})$$

Če vstavimo v razvoj (32) $t = ix$, kjer je x realno število, dobimo

$$\exp(\cos x - 1) \exp(i \sin x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} i^n x^n$$

Ko ločimo realni del od imaginarnega, dobimo zanimivi vrsti

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) \exp(\cos x) &= e \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{T_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \\ \sin(\sin x) \exp(\cos x) &= e \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{T_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

5. Primer uporabe

Vzemimo naravni števili n in m . Vprašajmo se, na koliko različnih načinov lahko množico $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ razdelimo na natančno m nepraznih podmnožic. Število načinov naj bo $N_n^{(m)}$.

Za primer naj bo $n = 4$, torej $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Imamo tele možnosti:

$$m = 1 \quad A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned} m = 2 \quad A_4 &= \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} = \\ &= \{1\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2\} \cup \{1, 3, 4\} = \{3\} \cup \{1, 2, 4\} = \{4\} \cup \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m = 3 \quad A_4 &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} = \{2\} \cup \{3\} \cup \{1, 4\} = \\ &= \{1\} \cup \{4\} \cup \{2, 3\} = \{3\} \cup \{4\} \cup \{1, 2\} = \\ &= \{1\} \cup \{3\} \cup \{2, 4\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{1, 3\} \end{aligned}$$

$$m = 4 \quad A_4 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$$

Torej lahko zapišemo: $N_4^{(1)} = 1$, $N_4^{(2)} = 7$, $N_4^{(3)} = 6$, $N_4^{(4)} = 1$. Ta števila so pa ravno Stirlingova števila druge vrste za $n = 4$. Velja pa čisto splošno: Število vseh možnih razdelitev množice z n elementi na m nepraznih podmnožic je $S_n^{(m)}$.

Očitno je $N_n^{(1)} = S_n^{(1)} = 1$ in $N_n^{(n)} = S_n^{(n)} = 1$. Pokazati moramo še, da števila $N_n^{(m)}$ zadoščajo enakosti (8). Množico $A_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ razdelimo na m nepraznih podmnožic na $N_{n+1}^{(m)}$ načinov. To naredimo v dveh

korakih: najprej razdelimo množico $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ na m nepraznih podmnožic na $N_n^{(m)}$ načinov, element $n+1$ pa dodamo vsaki od teh podmnožic, tako imamo $m N_n^{(m)}$ nepraznih podmnožic množice A_{n+1} . Vendar to še niso vse možnosti. Preostale možnosti dobimo tako, da množico A_n razdelimo na $N_n^{(m-1)}$ načinov na m podmnožic, od katerih je $m-1$ nepraznih in ena prazna, ki pa jo nadomestimo z množico $\{n+1\}$. Velja torej zveza

$$N_{n+1}^{(m)} = m N_n^{(m)} + N_n^{(m-1)}$$

za $m, n \geq 1$. Z indukcijo dobimo končno $N_n^{(m)} = S_n^{(m)}$ za $m, n \geq 1$.

Število vseh možnih razdelitev množice A_n na neprazne podmnožice je potem število

$$S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(n)}$$

kar pa je po formuli (29) enako n -temu Bellovemu številu $T_n = b_n(1)$.

Mislimo si, da delamo z množico A_n poskus, v katerem le-ta razpade na neprazne podmnožice. Verjetnost dogodka, da množica A_n razpade na točno m nepraznih podmnožic, označimo s $p_m(n)$. Predpostavimo še, da so vsi izidi poskusa enako verjetni. Potem lahko zapišemo

$$p_m(n) = \frac{S_n^{(m)}}{T_n}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \quad (34)$$

za vsako naravno število n . Pri tem velja $p_m(n) > 0$ in $\sum_{m=1}^n p_m(n) = 1$. Število X_n podmnožic, na katere razpade množica A_n , je diskretna slučajna spremenljivka, ki ima naslednjo verjetnostno shemo

$$X_n: \begin{pmatrix} 1 & , & 2 & , \dots, & n \\ p_1(n), & p_2(n), & \dots, & p_n(n) \end{pmatrix}$$

Izračunajmo matematično upanje slučajne spremenljivke X_n (glej Jamnik, [2]). To je število

$$E(X_n) = \sum_{m=1}^n m p_m(n) \quad (35)$$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X_n pa je funkcija G_n realne spremenljivke x

$$G_n(x) = \sum_{m=1}^n p_m(n) x^m \quad (36)$$

Izrazimo jo lahko po formuli (29) z Bellovim polinomom

$$G_n(x) = \frac{1}{T_n} b_n(x) \quad (37)$$

Z rodovno funkcijo G_n lahko izračunamo matematično upanje $E(X_n)$ po formuli $E(X_n) = G_n'(1)$. Iz enakosti (28) dobimo $b_n'(1) = T_{n+1} - T_n$, tako da imamo rezultat

$$E(X_n) = \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Disperzija slučajne spremenljivke X_n je število

$$D(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$$

ki se da izraziti z rodovno funkcijo G_n tako:

$$D(X_n) = G_n''(1) + G_n'(1) - (G_n'(1))^2$$

(Formuli za $E(X_n)$ in $D(X_n)$ lahko najdemo v [2]). Po kratkem računu izpeljemo iz zgornje formule in enakosti (28)

$$D(X_n) = \frac{T_n T_{n+2} - T_{n+1}^2 - T_n^2}{T_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Stirlingova števila se pojavljajo tudi na drugih področjih matematike (kombinatorika, analiza). Izvrstna referenca za to je J. Riordan, [4], [5]. V teh delih izvemo tudi, da so Stirlingova števila samo posebni primer tako imenovanega simboličnega ali umbralnega računa.

Za konec povejmo še, da pomeni $m! S_n^{(m)}$ število vseh različnih surjektivnih funkcij iz množice, ki ima n elementov, na množico z m elementi.

LITERATURA

- [1] G. M. Fihtengol'c, *Kurs diferencial'nogo i integral'nogo isčislenija*, Nauka, Moskva 1969.
- [2] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.
- [3] V. A. Krečmar, *Zadachnik po algebre*, Fizmatgiz, Moskva 1961.
- [4] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York 1958.
- [5] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, Wiley, New York 1968.
- [6] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa*, DŽS, Ljubljana 1979.

NOVE KNJIGE

GRASMAN J., *Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications*, New York, Springer Verlag 1987, 221 str. (Applied mathematical sciences; 63)

Preprost relaksacijski oscilator si lahko predstavljamo, če se »nekaj« s tekočim časom nabira, ko doseže nasičeno vrednost, pa se eksplozivno sprosti in se proces začne znova. Tisto »nekaj« je lahko voda, električna napetost, populacija miši, kemična koncentracija. Take dinamične sisteme je začel raziskovati 1926. leta Van der Pol, razcvet je doživela teorija v okviru dinamičnih sistemov prav v zadnjih letih. Avtor v knjigi obravnava Van der Polov oscilator, voden in avtonomen, model dveh populacij Volterra-Lotke, delovanje živca, reakcijo Belousova-Žabotinskega. Ker je knjiga namenjena širokemu krogu bralcev, ne zahteva posebnega predznanja razen nekaj matematične analize in diferencialnih enačb. Razvite so metode, ki povedo, kako sta perioda in amplituda odvisni od parametra, ki nastopa v enačbi.

V dodatku so navedeni nekateri manj znani rezultati iz analize, dinamičnih sistemov in diferencialnih enačb. Seznam literature obsega čez 200 naslovov, v glavnem iz zadnjih desetih let.

Peter Petek

VZTRAJNOSTNI MOMENT HOMOGENEGA TRIKOTNIKOVEGA OBODA

IVAN PUCELJ

Math. Subj. Class. (1985) 26 D 15, 51 M 15, 96 A 15

V članku z elementarnimi metodami izračunamo vztrajnostni moment homogenega trikotnikovega oboda glede na nekatere značilne točke trikotnika. Potem izpeljemo zanimive geometrijske (ne)enakosti.

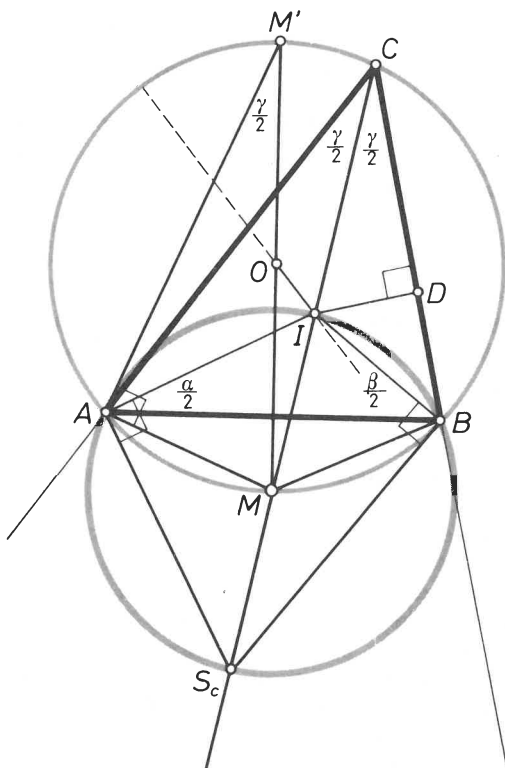
MOMENTUM OF INERTIA OF A THIN HOMOGENEOUS TRIANGULAR FRAME

In the article momentum of inertia of a thin homogeneous triangular frame according to some characteristic points of the triangle is derived using only elementary means. The method produces in the sense of quickies some old and new geometric (in)equalities

1. Članek je dopolnitev k prispevku [1].

Označimo trikotniku ABC kot običajno stranice a, b, c , obseg $2s = a + b + c$, polmera očrtanega in včrtanega kroga R, r , središči teh krogov O, I . Najprej dokažimo zvezo, ki jo je poznal že *L. Euler*

$$d^2 = R(R - 2r), \quad d = OI \quad (1)$$



Sl. 1

Označimo presečišče M simetrale notranjega kota $\gamma = \angle ACB$ trikotnika ABC z očrtno krožnico tega trikotnika, $M \neq C$. Označimo presečišče S_c simetrale notranjega kota $\angle ACB$ trikotnika ABC s simetralo zunanega kota ob oglišču A (ali B). Točka S_c je središče trikotniku ABC pričrtane krožnice, ta se dotika stranice AB in premic AC in BC . Ker je simetrala notranjega kota trikotnika pravokotna na simetralo priležnega zunanega kota, sta kota $\angle S_c AI$ in $\angle S_c BI$ prava. Sklepamo, da je štirikotnik $S_c AIB$ tetivni. Ker je kot $\angle AIB$ enak $(\pi + \gamma)/2$ in kot $\angle AMB$ enak $\pi - \gamma$, sklepamo na podlagi izreka o središčnem in obodnem kotu, da je točka M središče štirikotniku $S_c AIB$ očrtane krožnice.

Torej veljajo enakosti $MA = MI = MB$.

Označimo nožišče D pravokotnice iz I na stranico BC in naj bo MM' premer $2R$. Ker sta si pravokotna trikotnika CDI in

$M'AM$ podobna, velja sorazmerje $ID : IC = AM : MM'$. Zaradi $ID = r$ in $AM = MI$ velja enakost $2Rr = IC \cdot IM$. Ker je produkt $IC \cdot IM$ po izreku o potenci točke I glede na očrtano krožnico trikotnika ABC [3, str. 87] enak $(R + IO)(R - IO)$, dobimo res (1), saj je $d = IO$.

2. Spomnimo se na zakonitosti, ki povezujejo ploščino p trikotnika, polmera R, r in stranice a, b, c

$$p = rs, \quad 4pR = abc$$

Naj bodo točke A', B', C' središča stranic trikotnika ABC , točka A' bodi središče stranice BC in analogno za točki B', C' . Središče trikotniku A', B', C' očrtanega kroga označimo z E (po *Eulerju*), višinska točka trikotnika ABC pa naj bo V .

Znano je, da so točke O, E, V kolinearne, leže na *Eulerjevi premici trikotnika* ABC (vzeli smo, da je ta trikotnik raznostraničen), točka E je središče daljice OV [2, stran 88].

Veljajo tudi zveze [2, strani 97, 99]:

$$\begin{aligned} EA^2 &= \frac{1}{4}(R^2 + b^2 + c^2 - a^2) \\ EB^2 &= \frac{1}{4}(R^2 + a^2 + c^2 - b^2) \\ EC^2 &= \frac{1}{4}(R^2 + a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned} \quad (2)$$

3. Dokažimo, da je težišče homogenega trikotnikovega oboda (okvira) ABC istovetno s središčem trikotniku $A'B'C'$ včrtanega kroga.

Zeleno težišče je tudi težišče treh masnih točk $A'(a), B'(b), C'(c)$. Težišče T' točk $A'(a)$ in $B'(b)$ leži na daljici $A'B'$, tako da velja sorazmerje $A'T' : T'B' = C'A' : C'B'$, saj velja $A'T' : T'B' = b : a$, in je $C'A' = b/2$ ter $C'B' = a/2$. Sledi, da leži točka T' na simetrali notranjega kota z vrhom C' trikotnika $A'B'C'$. Na podlagi tega sklepamo, da leži težišče okvira ABC na vseh treh simetralah notranjih kotov trikotnika $A'B'C'$. Skupna točka vseh teh simetral je pa ravno središče S trikotniku $A'B'C'$ včrtanega kroga.

4. Določimo vztrajnostni moment J_O danega okvira glede na os, ki gre skozi središče O pravokotno na ravnino ABC . Izberimo na stranici BC poljubno točko P in označimo $BP = u, PC = a - u$. Prispevek stranice a k vztrajnostnemu momentu je $\sigma \int OP^2 du$, pri čemer je σ linearna gostota danega homogenega okvira. Po *Stewartovem izreku* [3, str. 75] je $OP^2 = R^2 - u(a - u)$. Ker je OP^2 kvadratna funkcija spremenljivke $u, 0 \leq u \leq a$, lahko zgornji prispevek določimo kar po *Arhimedovi zakonitosti* za ploščino paraboličnega odseka in dobimo zanj $\sigma \left(R^2 a - \frac{a^3}{6} \right)$. Sledi

$$J_O = \sigma(R^2 2s - (a^3 + b^3 + c^3)/6) \quad (3)$$

Analogno določimo vztrajnostni moment J_E . V izpeljavi upoštevamo, da je po *Stewartovem izreku*

$$EP^2 = \frac{u}{a} EC^2 + \left(1 - \frac{u}{a}\right) EB^2 - u(a - u)$$

Upoštevajoč (2), izračunamo

$$J_E = \sigma \left(\frac{R^2}{2} s + \frac{1}{12} (a^3 + b^3 + c^3) \right) \quad (4)$$

Zaradi podobnosti trikotnikov $A' B' C'$ in $A B C$ (absolutna vrednost podobnostnega števila je enaka $\frac{1}{2}$) je

$$E S = \frac{1}{2} O I \quad (5)$$

Ker po Steinerjevem izreku velja $J_E = J_S + \sigma 2s E S^2$, lahko po formuli (1) bralec izrazi J_S z znanimi podatki, torej z a, b, c in σ .

5. Omenimo nekaj korolarjev.

Ker je $J_O = J_S + \sigma 2s O S^2$, sledi po lahkem računu zveza

$$O S^2 = R^2 - \frac{1}{8s} (a^3 + b^3 + c^3) - \frac{R r}{2} \quad (6)$$

Iz enakosti (3) pa dobimo strogo neenakost

$$a^3 + b^3 + c^3 < 12R^2 s \quad (7)$$

Bralca vabimo, da na podoben način kot $O S^2$ izrazi še $T S^2$ s količinami a, b, c in σ , pri čemer je T težišče homogene trikotne plošče $A B C$.

VIRI

- [1] N. Razpet, *Vztrajnostni moment homogene trikotne plošče*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 133–134.
- [2] V. Devidé, »Stara« i »nova« matematika, Školska knjiga, Zagreb 1975.
- [3] I. Pucelj, I. Stalec, *Geometrija za drugi razred gimnazije*, Založba Obzorja, Maribor 1974.

NOVE KNJIGE

Z računalnikom v matematiko, V. Batagelj s sodelavci, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1987, 147 str. (Zbirka Računalniška obzorja).

Pred nami je nova knjiga iz zbirke Računalniška obzorja. Predstavlja zbirko tekstov, ki naj bralca seznani z nekaterimi področji uporabe računalnika v mehaniki. Kot povedo že avtorji v predgovoru, je namenjena predvsem za pomoč učiteljem, da v predavanja vključijo tudi računalnik in jo uporabijo pri računalniških krožkih. Zato nas ne preseneti dejstvo, da posameznih poglavij razen skupnega naslova ne povezuje kaj dosti. Tako prvo poglavje sestavljajo misli o pomenu in načinu uporabe računalnika pri pouku. Naslednji dve nas na kratko seznani s programskima jezikoma prolog in logo. Oba sta zelo primerna za uporabo v matematiki, a ju, žal, premalo pogosto srečamo v šolah. Posebej logo bi lahko nadomestil basic kot prvi programski jezik, s katerim se srečamo.

Naslednjih šest poglavij predstavi različna področja matematike, kjer si lahko uspešno pomagamo z računalnikom. Tako izvemo nekaj o računanju z različnimi vrstami števil, reševanju problemov s pomočjo naključnih števil, seznanimo se z nekaj prijemi, ki nam pridejo prav pri kombinatoričnih problemih. Za konec pa se seznanimo še z nekaj zanimivimi programi v logu in basicu. Žal, je zahtevnost posameznih poglavij dokaj neizenačena, manjka tudi več namigov, kje opisane prijeme srečati in uporabiti. Pod sam naslov bi sodilo še veliko tem. Knjiga je pač bolj ali manj posrečen izbor nekaterih med njimi.

Matija Lokar

PRIMERI UPORABE GLAVNIH SMERI AFINIH PRESLIKAV

RADOMIR ŽIVKOVIĆ*

Math. Subj. Clas. (1985) 51 A 05, 51 E 15

V članku je prikazanih nekaj primerov uporabe glavnih smeri afinih preslikav.

ON PRINCIPAL DIRECTIONS OF AFFINE MAPS

In the paper some applications of the notion of principal directions of affine maps are discussed.

1. Uvod

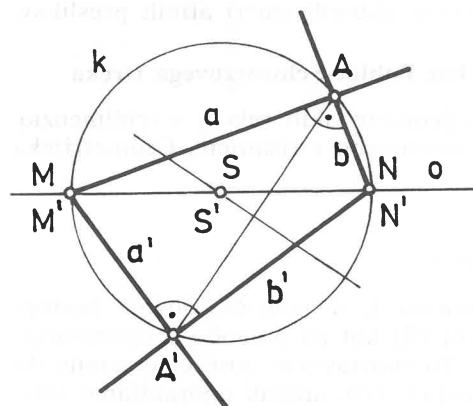
V tem članku si bomo ogledali nekaj primerov uporabe glavnih smeri afinih transformacij ravnine. V ta namen ponovimo najprej nekaj pojmov in trditev, ki nastopajo v teoriji afinih preslikav in njihovih glavnih smeri.

Definicija 1. Preslikava množice točk ravnine α na množico točk ravnine α' se imenuje *afina preslikava*, če preslika tri poljubne kolinearne točke ravnine α v tri kolinearne točke ravnine α' in ohranja delilno razmerje poljubnih treh kolinearnih točk.

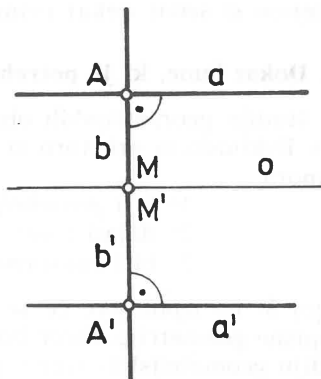
Pri tem sta α in α' lahko ali isti ali dve različni ravnini. Afina preslikava je natanko določena s slikami A' , B' , C' treh nekolinearnih točk A , B , C . Če ima afina preslikava ravnine nase dve negibni točki A in B , potem je vsaka točka premice AB negibna točka te preslikave. Tako afino preslikavo imenujemo *perspektivno afina preslikava*, premico AB pa os te perspektivno affine preslikave. Perspektivno afina preslikava je enolično določena, če podamo os in dvojico prirejenih točk (ki ne ležita na osi).

Iz definicije 1 takoj sledi, da afina preslikava preslika par vzporednih premic v par vzporednih premic. Nadalje je očitno, da so podobnostne, izometrične in identična preslikava affine preslikave. Velja še, da je afina slika krožnice elipsa.

Definicija 2. Naj bo $f_a: \alpha \rightarrow \alpha'$ afina preslikava. Nadalje naj bo a in b par pravokotnih premic ravnine α , takih, da sta tudi njuni sliki a' in b'



Slika 1

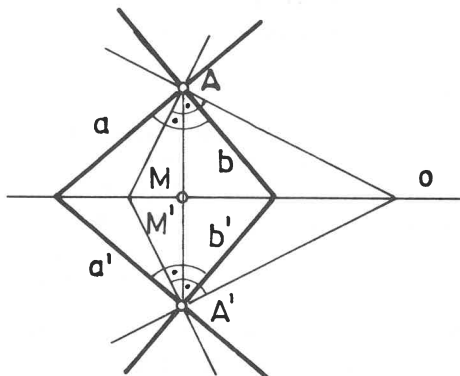


Slika 2

* Prevedla in priredila Marija Vencelj.

pravokotni premici ravnine α' . Potem smeri premic a in b imenujemo *glavni smeri afine preslikave* f_a .

Glavni smeri afine preslikave vedno obstajata. Ob slikah 1, 2 in 3 si oglejmo dokaz te trditve in tehniko določanja glavnih smeri za perspektivno afine preslikave. Preslikava naj bo dana z osjo o in parom prirejenih točk (A, A') .



Slika 3

a) Če daljica AA' ni pravokotna na os o (slika 1), se os o in simetrala daljice AA' sekata v natanko določeni točki S . Krožnica k , ki ima središče v točki S in poteka skozi točko A (in seveda tudi A'), seka os o v točkah M in N . Glavni smeri potem določata premici

$$a = AM \quad \text{in} \quad b = AN$$

Prirejeni smeri podajata pravokotni premici

$$a' = A'M \quad \text{in} \quad b' = A'N$$

Vse štiri smeri so enolično določene.

b) Če je premica AA' pravokotna na o , točka M njuno presečišče in $\overline{AM} \neq \overline{A'M}$ (slika 2), so smeri spet natanko določene. Določajo jih premice a, b in a', b' , za katere velja $a \parallel a' \parallel o$ in $b = b' \perp o$.

c) Če pa je AA' pravokotna na o in $\overline{AM} = \overline{A'M}$ (slika 3), se vsak par pravokotnih premic a, b preslika v par pravokotnih premic a', b' . V tem primeru torej obstaja neskončno mnogo glavnih smeri upodobitve. Taka upodobitev je ali identiteta ali osna simetrija z osjo o .

Kako določimo glavni smeri splošne afine preslikave, bomo pokazali na sliki 8.

Oglejmo si sedaj nekaj primerov uporabe glavnih smeri afinih preslikav.

2. Dokaz leme, ki je potrebna za dokaz Pohlke-Schwarzovega izreka

Pri študiju geometrijskih objektov in geometrijskih relacij v tridimenzionalnem Evklidskem prostoru si pogosto pomagamo z risanjem. Geometrijska risba mora

- 1° biti *projekcijska*
- 2° dajati *zvest videz*
- 3° biti *enostavno izvedljiva*

Pogoj 3° bo izpolnjen, če se bomo, kolikor je le mogoče, izognili postopkom opisne geometrije. Sicer bo risba prej cilj kot pa pomoč pri opazovanju in študiju geometrijskih zvez v prostoru. To enostavnost dosežemo s tem, da ne predpišemo središča oziroma smeri projiciranja, ampak uporabljamo tako imenovano *prosto projekcijo*. Natančneje, ker je tudi prosta središčna projekcija (prosta perspektiva) precej zapletena, se omejimo na prosto paralelno projekcijo.

Pravimo, da daje risba zvest videz, če vzbuja pri opazovalcu jasno predstavo o upodobljeni prostorski geometrijski figuri in o geometrijskih odnosih v prostoru. Za to je potrebno, da ima opazovalec določeno geometrijsko znanje in izkušnje.

Risba je projekcijska, če smo pri risanju ohranili invariante projiciranja. Ker gre pri geometrijskih risbah za vzporedno projekcijo, to pomeni ohranjanje delilnega razmerja treh kolinearnih točk in vzporednosti premic.

Če je izpolnjen pogoj 1^o, včasih tudi pravimo, da je risba natančna. Natančnost risbe je potreben, ne pa tudi zadosten pogoj za to, da bi risba dajala zvest videz (ta je odvisen še od medsebojne lege figur, smeri projiciranja in projekcijske ravnine oziroma ravnine, na katero rišemo). Omenimo še, da risba ni nujno neposredna projekcija obravnavane figure. Zadošča, da je neposredni projekciji podobna.

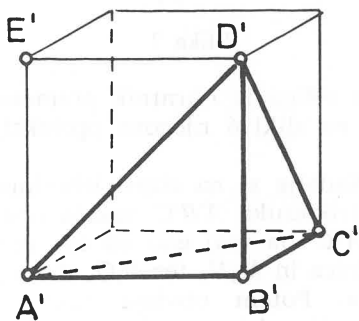
Le izjemoma rišemo geometrijske risbe v pravokotni projekciji. Če je namreč dana smer projiciranja, je s tem bistveno zmanjšana možnost izbora nekaterih pomožnih točk in premic na risbi; to si bomo ogledali v razdelku 4.

Navedimo sedaj Pohlke-Schwarzov izrek, ki je temelj geometrijskega risanja v prosti paralelni projekciji.

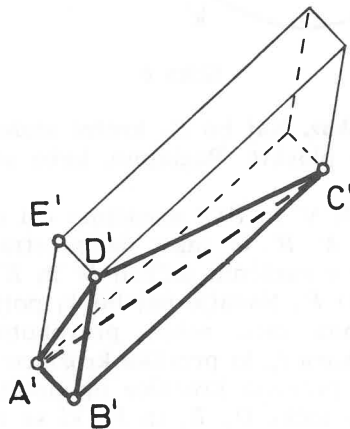
Vsak popolni štirikotnik $A'B'C'D'$ lahko tolmačimo kot paralelno projekcijo nekega tetraedra $ABCD$, ki je podoben poljubnemu danemu tetraedru $A_1B_1C_1D_1$.

Povejmo obširneje. Naj bo v ravnini π dan poljuben popolni štirikotnik $A'B'C'D'$ in v prostoru poljuben tetraeder $A_1B_1C_1D_1$. Potem obstaja taka smer s in tak položaj tetraedru $A_1B_1C_1D_1$ podobnega tetraedra $ABCD$ v prostoru, da je popolni štirikotnik $A'B'C'D'$ paralelna projekcija tetraedra $ABCD$ v smeri s na ravnino π .

Na osnovi Pohlke-Schwarzovega izreka lahko trdimo, da imamo na slikah 4 in 5 projekcijski risbi iste kocke.



Slika 4



Slika 5

Preko popolnega štirikotnika $A'B'C'D'$ in tetraedra $ABCD$ z lastnostmi

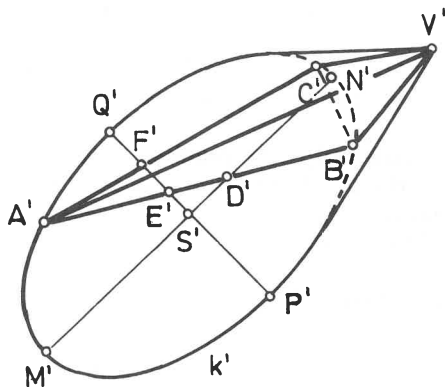
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD} \text{ in } AB \perp BC, AB \perp BD, BC \perp BD$$

lahko v prostoru »rekonstruiramo« tako kocko, da bo risba na sliki 4 oziroma na sliki 5 vzporedna projekcija te kocke. Pri tem slika 5 ne daje vtisa, da gre za kocko, to je, ne izpolnjuje pogoja 2^o o zvestem videzu.

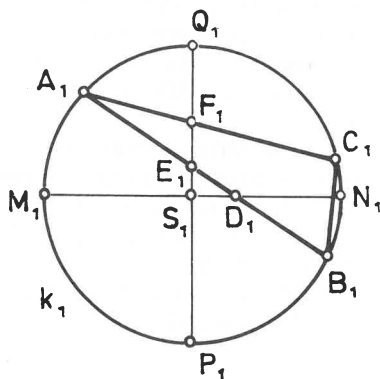
Po vsem, kar smo doslej povedali, je očitno, da se geometrijske risbe razlikujejo od tehniških risb predvsem po tem, da so to v nekem smislu pogojne risbe. Slika 4 in slika 5 predstavljata kocko zato, ker smo tako postavili. Pri sliki 4 tega glede na navade in izkušnje niti ni treba navajati zaradi njenega zvestega videza.

Pohlke-Schwarzov izrek je nasploh osnova za upodabljanje prostorskih geometrijskih figur in odnosov v prostoru. Ilustrirajmo postopek z upodobitvijo stožca.

Naj bosta k' poljubna elipsa in V' poljubna točka v ravnini α' . Če je V' zunanja točka elipse, narišimo še obe tangenti iz točke V' na elipso k' (slika 6). Pokažimo, da smo v vsakem primeru dobili projekcijsko risbo poljubnega krožnega stožca, to je krožnega stožca poljubnih razmerij, velikosti in lege v prostoru.



Slika 6



Slika 7

Dokaz. Naj bo K_1 krožni stožec, katerega višina je r -kratnik premera osnovne ploskve. Poglejmo, kako sledi, da je na sliki 6 njegova projekcijska risba.

Z $M'N'$ in $P'Q'$ označimo osi elipse k' . Nadalje si na elipsi izberimo tri točke A' , B' , C' tako, da bo stranica $A'B'$ trikotnika $A'B'C'$ sekala obe osi elipse v različnih točkah D' in E' stranica $A'C'$ pa vsaj eno od osi, recimo v točki F' . Nadalje naj bo k_1 poljubna krožnica in M_1N_1 ter P_1Q_1 dva njena poljubna med seboj pravokotna premera. Potem obstaja taka afina preslikava f_a , ki preslika krožnico k_1 na elipso k' , pri čemer se izbrana pravokotna premera krožnice upodobita na osi elipse. Na izbranih premerih poiščimo točke D_1 , E_1 in F_1 , ki se z afino preslikavo f_a preslikajo v točke D' , E' in F' (slika 7). S pomočjo teh točk določimo trikotnik $A_1B_1C_1$, včrtan krožnici k_1 , ki se z f_a preslika na trikotnik $A'B'C'$.

Naj bo V_1 točka na premici, ki poteka skozi točko S_1 pravokotno na ravnino α_1 krožnice k_1 , taka, da je

$$\overline{S_1 V_1} = r \cdot \overline{M_1 N_1}$$

Pri tem je vseeno, na kateri strani ravnine α_1 si točko V_1 izberemo. Točka V_1 skupaj s točkami A_1, B_1, C_1 določa tetraeder $A_1B_1C_1V_1$ in skupaj s krožnico k_1 stožec K_1 , očrtan temu tetraedru. Po Pohlke-Schwarzovem izreku obstaja taka smer s in tak tetraeder $ABCV$, podoben tetraedru $A_1B_1C_1V_1$, da je projekcija p_s tetraedra $ABCV$ v smeri s na ravnino α' popolni štirikotnik $A'B'C'V'$.

Da se videti, da obstajata v splošnem dve smeri projiciranja s in s' in, če zanemarimo translacijo, štirje možni položaji tetraedra $ABCV$ v prostoru. Odločimo se za eno od smeri, denimo s , in za eno od dveh možnih leg tetraedra $ABCV$ pri tej izbiri smeri. Očitno je stožec K , ki ga očrtamo tetraedru $ABCV$, podoben stožcu K_1 . Pokažimo še, da je elipsa k' slika osnovne krožnice k stožca K pri projekciji p_s na ravnino α' .

Z α_1 in α' smo že označili ravnini trikotnikov $A_1B_1C_1$ in $A'B'C'$; označimo še ravnino trikotnika ABC z α . Podobna trikotnika ABC in $A_1B_1C_1$ enolično določata podobnostno preslikavo ravnine α na ravnino α_1 , pri kateri se trikotnik ABC preslika na trikotnik $A_1B_1C_1$. Če to preslikavo označimo z g , potem afini preslikavi p_s in $f_a \circ g$ obe preslikata $A \rightarrow A', B \rightarrow B'$ in $C \rightarrow C'$. Ker je s slikami treh točk afina preslikava natanko določena, je torej $p_s = f_a \circ g$. Preslikava $f_a \circ g$ preslika trikotnik ABC in njemu očrtano krožnico k v trikotnik $A'B'C'$ in njemu očrtano elipso k' . To pa pomeni, da je elipsa k' res slika krožnice k pri projekciji p_s .

Na sliki 6 je torej p_s -projekcija stožca K , ki je podoben danemu stožcu K_1 . Res pa je, da risba ne daje zvestega videza.

Pohlke-Schwarzov izrek ima torej eksistenčni pomen v teoriji proste paralelne projekcije.¹ Njegovo pomembnost potrjuje tudi veliko izvedenih dokazov.

K. Pohlke je 1853. leta dokazal izrek za pravilne tetraedre s paroma pravokotnimi stranskimi robovi, H. A. Schwarz pa 1864. leta za splošen primer. Skoraj v vseh dokazih Pohlke-Schwarzovega izreka ima najvažnejše mesto naslednja lema: *poljubno m-strano prizmatično ploskev lahko presekamo z neko ravnino tako, da bo presečni lik večkotnik, podoben poljubnemu danemu m-kotniku.*

V tem članku bomo izvedli dokaz leme z uporabo glavnih smeri perspektivno afinih preslikav in sicer za $m = 3$, ker to zadošča za dokaz Pohlke-Schwarzovega izreka. Zanimal nas bo torej

Izrek 1. *Poljubno tristrano prizmatično ploskev lahko presekamo z neko ravnino α tako, da bo presečni lik trikotnik, podoben poljubnemu danemu trikotniku $A_1B_1C_1$.*

Zadošča pravzaprav dokazati

Izrek 2. *Poljuben trikotnik $A'B'C'$ je pravokotna projekcija nekega trikotnika ABC , podobnega poljubnemu danemu trikotniku $A_1B_1C_1$.*

Dokaz izreka 2. Naj bosta $A'B'C'$ in $A_1B_1C_1$ poljubna dana trikotnika (slika 8), prvi v ravnini α' , drugi v ravnini α_1 . V ravnini α' konstruirajmo trikotnik $A'B'C_2$, podoben trikotniku $A_1B_1C_1$. Trikotnika $A'B'C_2$ in $A'B'C'$ določata perspektivno afino preslikavo

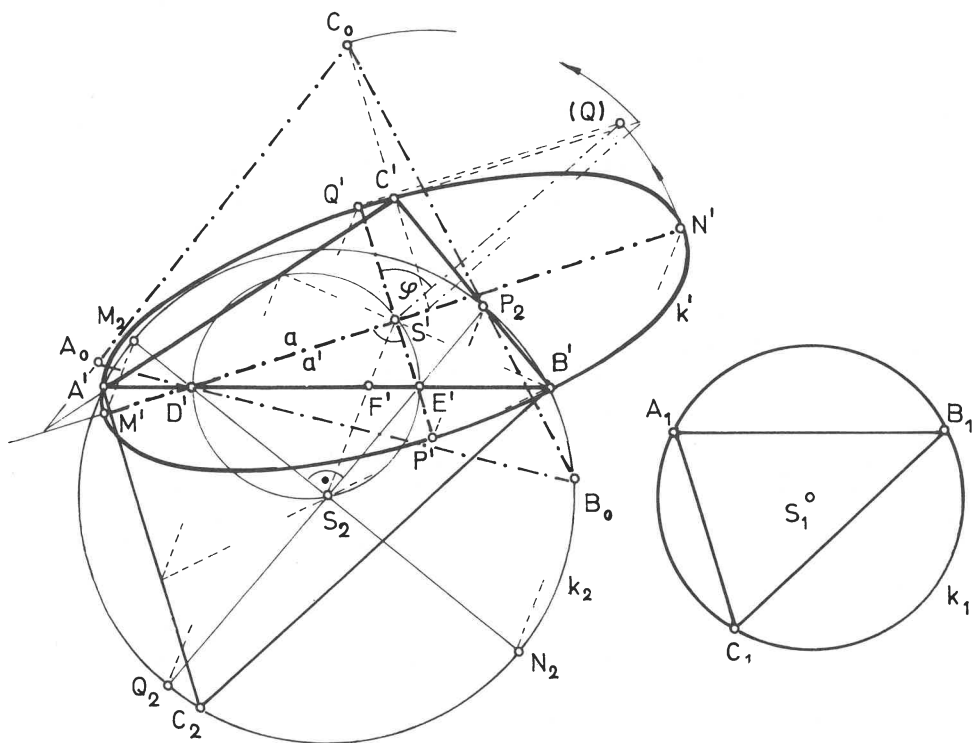
$$f_p: \alpha' \rightarrow \alpha'$$

¹ Za prosto središčno projekcijo velja posplošen Pohlke-Schwarzov izrek; glej knjigo [1].

s predpisom

$$f_p: \triangle A'B'C_2 \rightarrow \triangle A'B'C'$$

Premica $A'B'$ je os te perspektivno afine preslikave. Naj bo S_2 središče trikotniku $A'B'C_2$ očrtane krožnice k_2 in $S' = f_p(S_2)$. Preslikava f_p preslika krožnico k_2 na elipso k' s središčem S' , očrtano trikotniku $A'B'C'$. Nadalje naj bosta S_2D' in S_2E' pravokotni premici, ki določata glavni smeri perspektivno afine preslikave f_p , in $S'D'$ ter $S'E'$ prirejeni pravokotni smeri, s katerima konstruiramo osi $M'N'$ in $P'Q'$ elipse k' .



Slika 8

Znano je, da obstaja taka ravnina α in taka krožnica k v tej ravnini, da je njena pravokotna projekcija p na ravnino α' elipsa k' . Ravnini α in α' se sekata vzdolž premice a , ki je vzporedna veliki osi elipse k' , in oklepata kot φ , za katerega je

$$\cos \varphi = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{M'N'}} \quad (1)$$

Če zanemarimo translacijo v smeri normale ravnine α' , imamo dve možni legi ravnine α , simetrični glede na ravnino α' . Pogosto vzamemo, da se ravnini sekata vzdolž nosilke velike osi elipse k' .

Poglejmo sedaj trikotnik ABC , včrtan krožnici k , ki se pri projekciji p projicira na trikotnik $A'B'C'$. Dokazimo, da je

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Pri zgornji obravnavi smo se srečali z naslednjimi afinimi preslikavami:

1° podobnostna preslikava

$$g: \alpha_1 \rightarrow \alpha' \quad , \quad g: \triangle A_1B_1C_1 \rightarrow \triangle A'B'C_2$$

s podobnostnim koeficientom $l = \overline{A'B'} / \overline{A_1B_1}$

2° perspektivno afina preslikava

$$f_p: \alpha' \rightarrow \alpha \quad , \quad f_p: \triangle A'B'C_2 \rightarrow \triangle A'B'C'$$

3° pravokotni projekciji p inverzna preslikava

$$p^{-1}: \alpha' \rightarrow \alpha \quad , \quad p^{-1}: \triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$$

Kompozitum teh treh preslikav

$$f_a = p^{-1} \circ f_p \circ g$$

je afina preslikava

$$f_a: \alpha_1 \rightarrow \alpha \quad , \quad f_a: \triangle A_1B_1C_1 \rightarrow \triangle ABC$$

ki preslika krožnico k_1 , očrtano trikotniku $A_1B_1C_1$, na krožnico k , očrtano trikotniku ABC . Ta lastnost pa pomeni, da je afina preslikava f_a podobnostna preslikava, in je torej res

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

S tem je izrek 2 dokazan. Trivialno namreč velja tudi v primeru, ko je $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$, ko zgornji dokaz odpove. Tedaj je ravnina trikotnika ABC vzporedna ravnini trikotnika $A'B'C'$.

Veljavnost izreka 1 sledi iz izreka 2, tako da za trikotnik $A'B'C'$ vzamemo presek tristrane prizmatične ploskve z ravnino α' , ki je pravokotna na robove te ploskve.

O p o m b e.

a) S slike 8 tudi vidimo, kako določimo glavni smeri neperspektivne affine preslikave, denimo

$$g_a: \alpha_1 \rightarrow \alpha' \quad , \quad g_a: \triangle A_1B_1C_1 \rightarrow \triangle A'B'C'$$

Ker je $g_a = f_p \circ g$, moramo le še s podobnostno preslikavo g^{-1} preslikati pravokotni premici M_2N_2 in P_2Q_2 v ravnini α' na ustrezni pravokotni premici v ravnini α_1 .

b) Denimo, da bi v dokazu izreka 2 namesto trikotnika $A'B'C_2$ vzeli ali trikotnik $A_2B'C'$ ali trikotnik $A'B_2C'$ podoben trikotniku $A_1B_1C_1$. Ali bi zato dobili drugačno elipso k' in drugačen položaj ravnine α trikotnika ABC ? To se ne bi zgodilo, ker ima afina preslikava g_a natanko določeni glavni smeri in njima prirejeni smeri v ravnini α' (razen v primeru, ko je $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$, ko je neskončno mnogo parov glavnih smeri). To pa natanko določa osi elipse k' , ki določata lego ravnine α .

V zvezi s tem omenimo, da v knjigi [2] P. S. Orehov v svojem elementarnem, a zelo kompliciranem dokazu Pohlke-Schwarzovega izreka trdi, da lahko zavzame ravnina α trikotnika ABC šest položajev, če zanemarimo translacijo, To seveda ni res, kot smo videli. Možna položaja sta le dva oziroma en sam, če je $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$ (pri zanemarjeni translaciji).

c) Na sliki 8 je konstruiran še trikotnik

$$\triangle A_0B_0C_0 \cong \triangle ABC$$

s pomočjo zasuka ravnine α za kot φ okrog premice $a = M'N'$ v ravnino α' , pri čemer za kot φ velja enačba (1).

3. Konstrukcija elipse z danim središčem in tremi njenimi točkami

V tem razdelku se bomo ukvarjali z vprašanjem, ali lahko elipso podamo s središčem S' in s tremi točkami A', B', C' . Videli bomo, da za pozitiven odgovor lega točke S' glede na trikotnik $A'B'C'$ ni popolnoma poljubna. Pogledjmo, za kaj gre!

Elipso bomo narisali tako, da bomo poiskali tak trikotnik ABC , ki se bo z neko perspektivno afino preslikavo preslikal na trikotnik $A'B'C'$. Iskana elipsa bo slika trikotniku ABC očrtane krožnice pri tej preslikavi. Da bi trikotnik ABC lahko konstruirali, ga morajo dani podatki v risbi dobro določati. Pravimo, da mora biti risba metrično določena v skladu z naslednjo definicijo.

Definicija 3. Risba f' geometrijske figure f je *metrično določena*, če določa figuro f do podobnosti natančno.

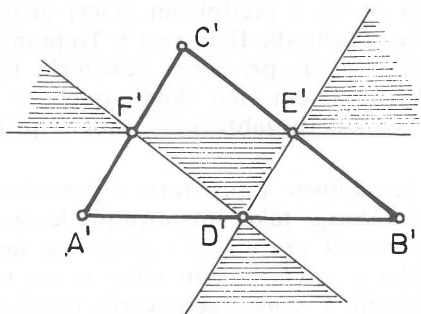
Na metrično določeni risbi morajo biti podana vsa metrična razmerja, ki veljajo za figuro f . Tako npr. tri točke A', B', C' , slike oglišč trikotnika ABC , ne pomenijo metrično določene risbe (razen če je z nekimi pogoji določena oblika trikotnika). Če pa je na primer podana tudi slika S' središča S trikotniku ABC očrtane krožnice, potem je risba metrično določena.

Podatki, dani na začetku tega razdelka, torej omogočajo rešitev naloge. Vprašanje je le, ali se pri afini preslikavi središče trikotniku očrtane krožnice lahko upodobi v poljubno točko, ali je torej lega točke S' glede na trikotnik $A'B'C'$ poljubna.

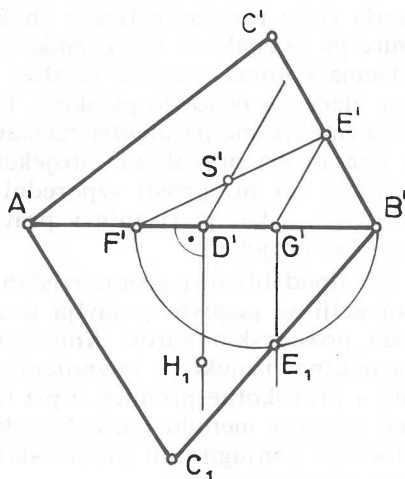
N. F. Četveruhin je v knjigi [1] dokazal naslednjo trditev. Če z D', E', F' označimo razpolovišča stranic trikotnika $A'B'C'$, potem se točka S' lahko nahaja na območju, ki je na sliki 9 črtkano, pri čemer razen točk D', E', F' točk robnih premic $D'E', D'F'$ in $E'F'$ ne štejemo zraven.² Tudi za točke D', E', F' velja, da jih S' sicer lahko zavzame, vendar $A'B'C'$ (skupaj z S') v takem primeru ne pomeni metrično določene risbe trikotnika ABC . Če je npr. $S' = D'$, vemo le to, da je trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri C , to pa v skladu z definicijo 3 ni dovolj, da bi bila risba metrično določena. Tudi elipsa v primeru, ko je dano njeno središče S' in tri njene točke A', B', C' , od katerih ležita dve simetrično na S' , ni enolično določena, ampak obstaja neskončno mnogo takih elips. Zato bomo predpostavili, da je S' različna od točk D', E' in F' , to je, izognili se bomo risbam pravokotnih trikotnikov.

² V. Devidé je trditev dokazal na drug način v knjigi [5].

Poglejmo sedaj, kako rešimo našo nalogo! Naj bodo, kot na sliki 10, dane nekolinearne točke A' , B' , C' in taka točka S' , ki lahko pomeni sliko središča krožnice, očrtane na trikotnik $A'B'C'$ upodobljenemu trikotniku.



Slika 9



Slika 10

Točka S' naj ne bo središče nobene od stranic trikotnika $A'B'C'$. Najprej konstruiramo risbi $S'D'$ in $S'E'$ simetral SD in SE stranic AB in BC trikotnika ABC . Nato na naslednji način priredimo trikotniku $A'B'C'$ perspektivno afini trikotnik $A'B'C_1$, podoben trikotniku ABC . Trikotniku $F'B'E'$ moramo prirediti pravokoten trikotnik $F'B'E_1$ s pravim kotom pri E_1 . Točko E_1 dobimo tako, da narišemo $E'G' \parallel S'D'$ in nato perspektivno afino priredimo $E_1G' \parallel D'H_1$, kjer je seveda $D'H_1 \perp A'B'$. Točka E_1 je presek premice E_1G' in krožnice s premerom $F'B'$.

Ker trikotnik $A'B'C'$ ni slika pravokotnega trikotnika, takoj vidimo, da točki F' in G' vedno obstajata in da G' vedno leži med F' in B' . Zato je tudi točka E_1 določena enolično do simetrije glede na premico $A'B'$. Oglišče C_1 trikotnika $A'B'C_1$, podobnega trikotniku ABC , dobimo iz $E_1C_1 = B'E_1$.

Sedaj poiščemo s pomočjo glavnih smeri perspektivno afine preslikave osi elipse, ki gre skozi točke A' , B' , C' , to je elipse, ki je perspektivno afina krožnici, očrtani trikotniku $A'B'C_1$. S tem je naloga rešena.

4. Določanje prostorskih konjugiranih parov pri pravokotni projekciji

Znano je, da je risanje v pravokotni projekciji zahtevnejše kot v prosti paralelni projekciji. Da bi to lažje razumeli, združimo nekaj znanih dejstev.

Definicija 4. Število neodvisnih parametrov (pogojev), ki so potrebni, da je risba f' figure f metrično določena, imenujemo *parametrično število risbe* f' .

Izrek 3. Potrben in zadosten pogoj za to, da je risba f' ravninske geometrijske figure metrično določena, je, da za neki poljuben trikotnik $A'B'C'$ risbe f' poznamo obliko na $A'B'C'$ upodobljenega trikotnika ABC figure f .

Izrek 4. *Potreben in zadosten pogoj za metrično določenost risbe f' prostorske geometrijske figure f je, da za neki popoln štirikotnik $A'B'C'D'$ risbe f' poznamo obliko nanj upodobljenega tetraedra $ABCD$ figure f .*

Ker je oblika trikotnika določena z dvema podatkom, je parametrično število risbe ravninske figure enako 2. Parametrično število risbe prostorske figure pa je enako 5, kajti oblika tetraedra je določena s petimi podatki (npr. z dvema kotoma osnovne ploskve in s tremi naklonskimi koti stranskih ploskev glede na osnovno ploskev). Izkaže pa se, da s predpisom smeri projiciranja zmanjšamo parametrično število risbe prostorske figure na 3. To pomeni, da imamo pri pravokotni projekciji manj svobode pri izbiri nekaterih točk in smeri kot pri prosti vzporedni projekciji. S tem smo dobili odgovor na vprašanje, zakaj je risanje v pravokotni projekciji zahtevnejše kot v prosti paralelni projekciji.

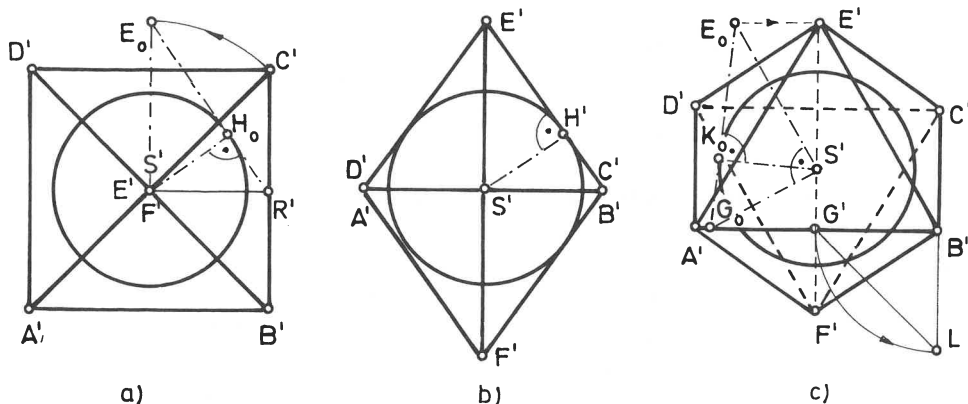
Pri upodabljanju geometrijskih figur in odnosov v prostoru v pravokotni projekciji se pogosto pojavlja problem določanja tako imenovanih konjugiranih prostorskih parov. *Konjugiran prostorski par* (a', n') glede na neko pravokotno projekcijo imenujemo par slike a' ravnine a in slike n' na ravnini a pravokotne premice n pri tej projekciji. V opisni geometriji rešujemo take naloge z metodo normalne aksonometrije, tu pa si bomo ogledali način določanja konjugiranih prostorskih parov z uporabo glavnih smeri perspektivno afinih preslikav.

Problema ne bomo reševali splošno, ampak bomo metodo ilustrirali na primeru.

Naloga. Nariši sliko figure f , ki jo sestavljata pravilen oktaeder in njemu včrtana krogla.

Rešitev. Figuro moramo risati v pravokotni projekciji, ker le v njej daje risba krogle zvest videz.

a) Pri nekaterih posebnih legah oktaedra glede na ravnino risanja π je naloga enostavna. Na sliki 11 a) je risba figure f , če je diagonala EF oktaedra pravokotna na ravnino π . Polmer $S'H_0$ včrtane krogle določimo s pomočjo pravokotnega trikotnika $S'R'E_0$, skladnega trikotniku SRE figure f .



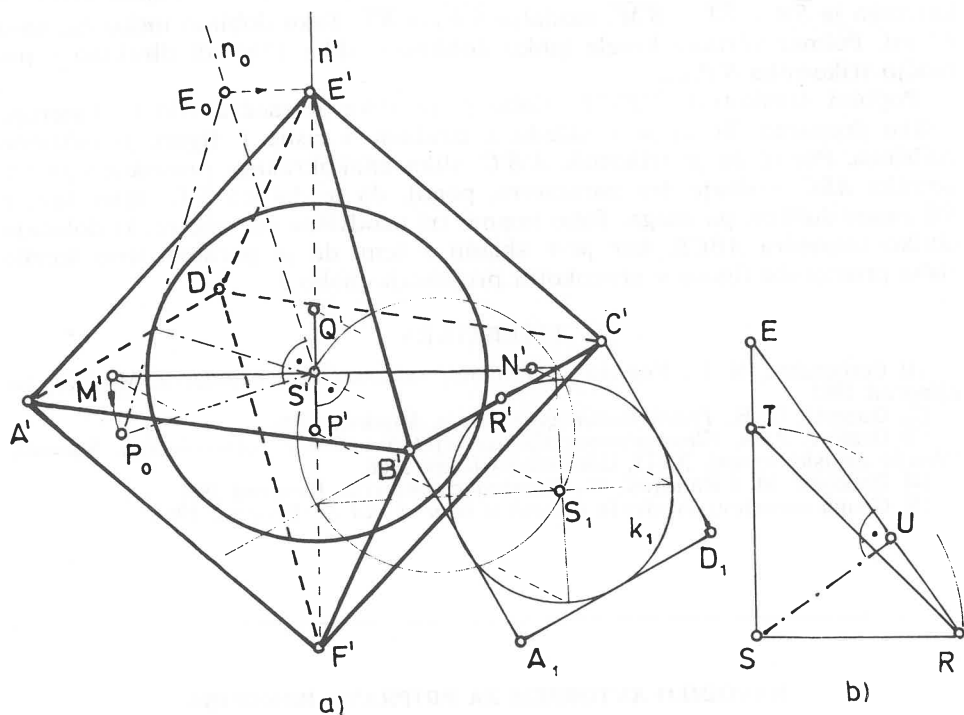
Slika 11

Na sliki 11 b) je risba naše figure, če sta diagonalna EF in rob AB oktaedra oba paralelna ravnini π . Na sliki 11 c) pa smo vzeli rob AB vzporeden ravnini π , toda diagonalna EF ni niti pravokotna na π niti ni z njo vzporedna. V tem primeru določimo polmer $S'K_0$ včrtane krogle s pomočjo »zasukanega« pravokotnega trikotnika $S'G_0E_0$, skladnega trikotniku SGE figure f , za katerega velja

$$\overline{S'G_0} = \overline{SG} = \overline{A'G'} \quad \text{in} \quad \overline{S'E_0} = \overline{SE} = \overline{G'L}$$

Z njim določimo tudi točko E' .

b) Naj bo sedaj oktaeder v splošnem položaju glede na ravnino risanja π . Enega od njegovih kvadratnih simetralnih presekov, recimo kvadrat $ABCD$, lahko narišemo kot poljuben paralelogram $A'B'C'D'$ (slika 12 a)). Trikotnik $A'B'C'$ določa risbo a' ravnine α kvadrata $ABCD$. Ta risba je metrično določena, ker poznamo obliko trikotnika ABC . Torej je določena tudi elipsa k' , včrtana paralelogramu $A'B'C'D'$, slika krožnice k , včrtane kvadratu $ABCD$. Poiščimo osi te elipse!



Slika 12

Paralelogramu $A'B'C'D'$ priredimo kvadrat $B'C'D_1A_1$ s perspektivno afino preslikavo z osjo $B'C'$. Nato s pomočjo glavnih smeri te preslikave konstruiramo osi $M'N'$ in $P'Q'$ elipse k' , ki jo perspektivno afina preslikava preslika na krožnico k_1 , včrtano kvadratu $B'C'D_1A_1$.

Brez omejitve splošnosti lahko predpostavimo, da leži središče S kvadrata $ABCD$ v ravnini π . To pomeni, da ravnina α tega kvadrata seka ravnino π vzdolž premice

$$a = M'N'$$

kjer je $M'N'$ velika os elipse k' .

Ker rišemo v pravokotni projekciji, se poljubna na ravnino α pravokotna premica n upodobi v tako premico n' , ki je pravokotna na premico a . Če torej narišemo skozi točko $S' = S$ premico n' , pravokotno na $M'N'$, dobimo paru (a, n) konjugiran prostorski par (a', n') .

Kot v primeru 11 c) si bomo tudi tu v nadaljevanju pomagali s postopkom, običajnim pri risanju v pravokotni projekciji. Ravnino γ simetrije velike osi elipse k' »zasukamo« v položaj, v katerem lahko odmerimo dejanske razdalje figure f . Tako dobimo normalo n v zasukanem položaju n_0 , določenim z

$$n_0 \perp S'P_0$$

kjer je $\overline{S'P_0} = \overline{SP} = \overline{S'M'}$, ker je velika os elipse k' enaka stranici kvadrata $ABCD$. Na pomožni sliki 12 b) konstruiramo s pomočjo trikotnika SRT , za katerega je $\overline{SR} = \overline{ST} = \overline{S'M'}$, razdaljo $\overline{S'E_0} = \overline{RT}$. Tako dobimo točko E_0 , nato E' itd. Polmer včrtane krogle lahko dobimo s slike 12 b) ali direktno s pomočjo trikotnika $S'P_0E_0$.

Popolni štirikotnik $A'B'C'E'$ risbe f' je slika tetraedra $ABCE$, katerega obliko poznamo. Torej je v skladu z izrekom 4 risba f' figure f metrično določena. Pogoji, da je trikotnik $A'B'C'$ slika enakokrakega pravokotnega trikotnika ABC , vsebuje dva parametra, pogoj, da je daljica $S'E'$ slika daljice SE znane dolžine, pa enega. Tako imamo tri neodvisne parametre, ki določajo obliko tetraedra $ABCE$, kar je v skladu s tem, da je parametrično število risbe prostorske figure v pravokotni projekciji enako 3.

LITERATURA

- [1] Četveruhin, N. F., *Voprosi sovremenoj načertatelnoj geometrii*, Moskva, Leningrad 1947.
- [2] Gurevič, G. B., *Proektivnaja geometrija*, Moskva 1960.
- [3] Orehov, P. S., *Elementarnoe dokazatelstvo teoremi Poljke-Svarca*, Sbornik: Učenje zapiski, vipusk XVII, Udmurtsk-Glazov 1968.
- [4] Radojčić, M. i Radojčić, V., *Nacrtna geometrija*, Beograd 1961.
- [5] Grupa avtorjev, *Uvođenje mladih u naučni rad II*, Beograd 1961.

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnimi razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. 21 (1974) 62–64. Pri korekturah na krtačnih od-tisih uporabljajte dogovorjene oznake (glejte Slovenski pravopis DZS, Ljubljana 1962.)

MERILNIK RENTGENSKE SVETLOBE S SCINTILACIJAMI V PLINU

ALEŠ STANOVNIK

PACS a0785+q

Članek obravnava merilnik rentgenske svetlobe s scintilacijami, ki jih povzročijo elektroni na poti skozi žlahtni plin v električnem polju. Scintilacije v ultravijoličnem področju merimo z večžično proporcionalno komoro, ki vsebuje spojino TMAE.

AN X-RAY DETECTOR BASED ON GASEOUS SCINTILLATIONS

The article describes a detector for X-rays based on scintillations induced by electrons drifting through a noble gas in an electric field. Scintillations in the ultraviolet are measured with a multiwire proportional chamber activated with TMAE.

Uvod

Elektron, ki pod vplivom električnega polja potuje po plinu, pridobiva energijo iz polja in jo izgublja pri trkih z atomi plina. V žlahtnem plinu pri tem nastanejo molekule, t.i. ekscimeri [1], ki z razpadnim časom nekaj sto nanosekund preidejo v atoma in ultravijolični (UV) foton. Pri električni poljski jakosti pod pragom za ionizacijo predstavlja energija UV fotonov precejšen delež celotne energije, ki jo elektron pridobi v električnem polju. Ta delež v ksenonu meri okoli 60 %, tako, da posamezen elektron povzroči nastanek 400 fotonov z energijo 7.5 eV, ko preteče napetost 5 kV. Opisani pojav lahko izkoristimo za merjenje rentgenskih fotonov z boljšo energijsko ločljivostjo, kot jo dosežemo z navadnim plinskim proporcionalnim merilnikom.

Energijska ločljivost

Pri absorpciji fotona z energijo E_x nastane v plinu $N_e = E_x/\Delta$ ionskih parov, če je potrebna za nastanek enega ionskega para povprečna energija Δ . Statistična nedoločenost tega števila je $\sigma_N = \sqrt{F \cdot N_e}$. Tu je F Fanov faktor z vrednostjo za žlahtne pline med 0.1 in 5.2. Ob absorpciji fotona z energijo 6 keV bi v ksenonu ($\Delta = 25$ eV) dobili 240 ± 6 prostih elektronov. Tako majhen naboj je težko izmeriti brez vmesnega ojačevanja, ki ga v proporcionalnem merilniku dosežemo s pomnoževanjem v močnem električnem polju ob anodni žici. Pri M -kratnem pomnoževanju posameznega elektrona velja $\sigma_M/M \approx 0.9$ [2], pri pomnoževanju N_e elektronov pa je relativna nedoločenost velikosti signala podana z $\sigma_M/M \sqrt{N_e}$. Ocenno energijske ločljivosti proporcionalnega merilnika σ_E/E dobimo s seštevanjem kvadratov relativnih nedoločenosti pri nastanku primarnih ionskih parov in pri pomnoževanju

$$(\sigma_E/E)^2 = F/N_e + (\sigma_M/M)^2/N_e$$

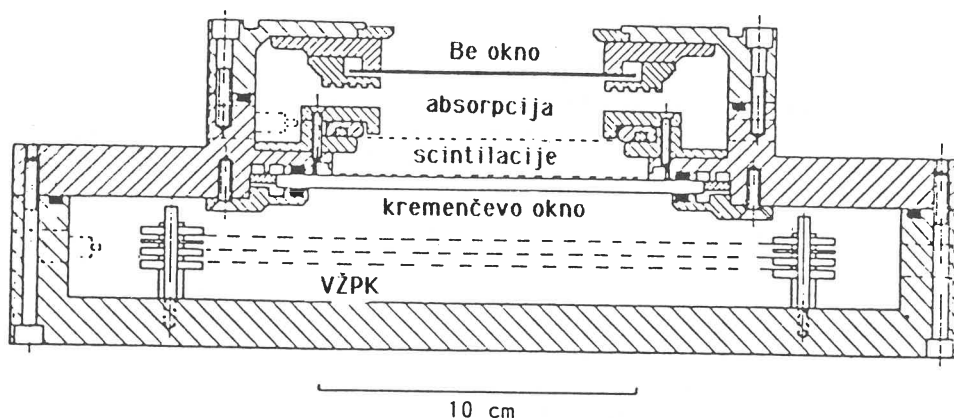
Za žlahtne pline je $(\sigma_M/M)^2$ večji od F , zato ločljivost proporcionalnih merilnikov določajo predvsem statistični pojavi pri pomnoževanju elektronov.

Nastanek in razpad ekscimerov ponujata možnost za ojačevanje števila primarnih elektronov, pri kateri se relativna nedoločenost bistveno ne poveča. Recimo, da pri absorpciji rentgenskega fotona v žlahtnem plinu nastane N_e elektronov, ki pretečejo napetost U in pri tem vsak rodi L ultravijoličnih

fotonov. Nato v posebnem merilniku (fotopomnoževalki ali večžični proporcionalni komori, ki je občutljiva za UV fotone) del ultravijoličnih fotonov ustvari $\eta L N_e$ prostih »sekundarnih« elektronov. Ti elektroni se na koncu pomnožijo v plazmo ob anodni žici ali na dinodah fotopomnoževalke. Celotno ločljivost v tem primeru ocenimo z izrazom

$$(\sigma_E/E)^2 = F/N_e + J/L N_e + 1/\eta L N_e + (\sigma_M/M)^2/\eta L N_e$$

Tu smo sešteli kvadrate relativnih nedoločenosti posameznih prispevkov. Prvi člen je prispevek zaradi nedoločenosti števila prostih elektronov po absorpciji rentgenskega fotona. Drugi člen podaja statistično fluktuacijo izsevanih UV fotonov. Pri tem je J nekakšen ekvivalent Fanovega faktorja. Ta člen je ponavadi zelo majhen v primerjavi s prvim in ga lahko zanemarimo. Statistiko pri spremembi UV fotonov v proste sekundarne elektrone vsebuje tretji člen. Zadnji člen pa je že znana nedoločenost pri pomnoževanju elektronov. Iz izraza je razvidno, da se pri merjenju dovolj velikega števila UV fotonov ($1 \ll \eta L$) ločljivost približa vrednosti, ki jo podaja statistika nastanka ionskih parov pri absorpciji rentgenskega fotona.



Sl. 1. Zgradba merilnika — detektorja

Opis merilnika

Na Tehnični univerzi v Delftu smo izdelali merilnik iz dveh delov [3], ki ju loči okno iz kremenčevega stekla (Sl. 1). Zgoraj je ksenonova komora, v kateri se rentgenski foton absorbira in pri tem nastane gruča elektronov, ki povzroči scintilacije plina. Spodaj je večžična proporcionalna komora (VŽPK), ki te scintilacije zazna. Zahtevamo, da je celotno število izsevanih ultravijoličnih fotonov sorazmerno z energijo rentgenskega fotona, zato mora biti pot, na kateri gruča elektronov »sveti«, neodvisna od mesta absorpcije. To dosežemo z mrežo, ki razdeli ksenonovo komoro na dva dela. V zgornjem območju je šibko električno polje — pod pragom za nastanek ekscimerov —, v katerem se rentgenska svetloba absorbira, nakar gruča elektronov potuje do spodnjega »scintilacijskega« območja. Tu je jakost električnega polja znatno višja (5–6 kV/cm), tako da elektroni povzročajo scintilacije plina na vsej poti do anodne mreže

na samem kremenčevem oknu. Ultravijolični fotoni, ki pridejo skozi kremenčevo okno, v večžični komori ionizirajo plin in nastajajo novi prosti elektroni. Ti sekundarni elektroni nato potujejo proti anodnim žicam VŽPK, kjer se v plazmo pomnožijo. Vsota signalov po vseh anodnih žicah VŽPK je torej sorazmerna s številom sekundarnih elektronov in to je sorazmerno s številom ultravijoličnih fotonov. Število teh je sorazmerno s številom elektronov v grupi in to je sorazmerno z energijo rentgenskega fotona.

Prag za ionizacijo večine plinov je višji od energije ultravijoličnih fotonov iz ksenona z vrhom pri 7.5 eV in s širino približno 1 eV. Zato smo navadni plinski mešanici v VŽPK (90 % Ar + 10 % CH₄) dodali nekaj tetrakis(dimetilamino)etilen za ionizacijskim pragom pri 5.4 eV. Bolj popularni oznaki za to spojino sta TMAE ali tami (tammy). Kombinacijo Xe-TMAE pravzaprav narekuje prepustnost kremenčevega okna ($E_{max} = 7.5$ eV). Može so tudi druge kombinacije, npr. kripton ($E_{uv} = 8.7$ eV) ali argon ($E_{uv} = 9.8$ eV) in TEA (tri-tilamin) z ionizacijskim pragom pri 7.7 eV. V tem primeru bi potrebovali dosti dražja in krhka okna (BaF₂, CaF₂, MgF₂ ali LiF).

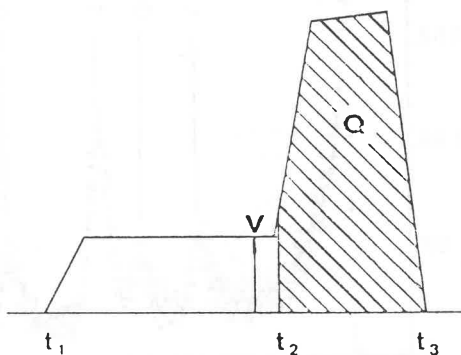
Omenimo še nekaj tehničnih podrobnosti.

— Pridelek ultravijoličnih fotonov je zelo odvisen od količine nečistoč v žlahtnem plinu. Že koncentracija nekaj deset milijonink vodne pare ali kisika zniža pridelek za deset ali več odstotkov. Zato je potrebno posebej paziti na čistočo plina ter komoro dobro za-tesniti in izčrpati, preden vanjo spustimo čisti plin. Kljub temu je dobro poskrbeti še za stalno čiščenje ksenona s sorpcijsko črpalko.

— Tami je pri sobni temperaturi kapljevina z nizkim parnim tlakom (0,5 mbar pri 20 °C). Z zvišanjem temperature se zviša parni tlak in se povečata delež absorbiranih UV fotonov in izkoristek η pri dani debelini več-žične komore.

— Tami je kemično zelo aktivna, zato je potrebno skrbno izbrati materiale za izdelavo večžične komore.

— Tami je tudi zmerno toksična.



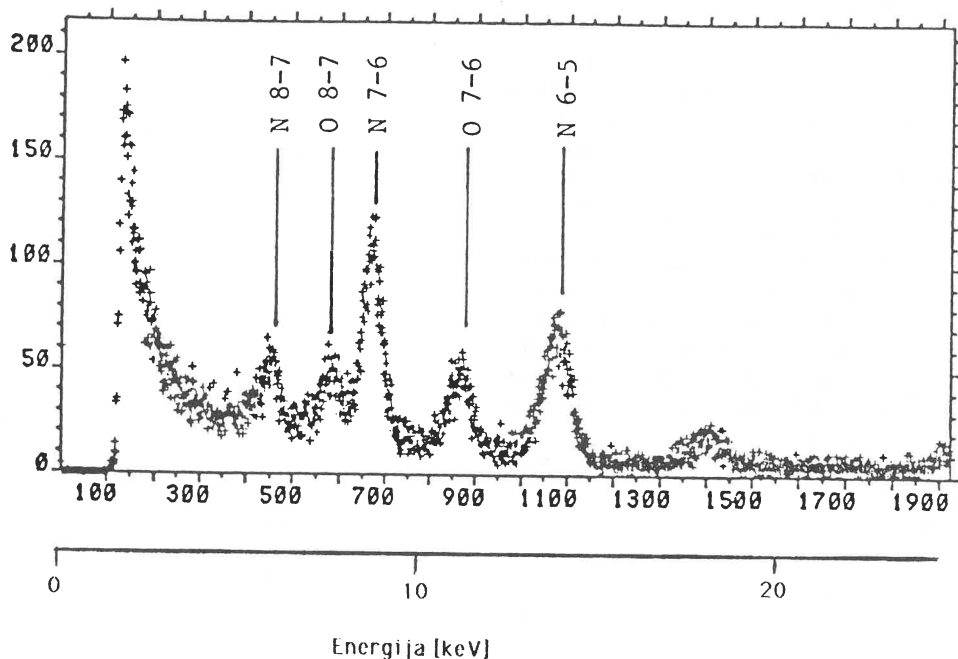
Sl. 2. Oblika signala iz anodnih žic. Pri-
kazana sta predscintilacijski in glavni
scintilacijski del

Meritve

Pomanjkljivost takšnega merilnika je predvsem ta, da je »počasen«. Časovna nedoločенost signala je podana s časom od absorpcije do začetka scintilacij, torej s časom, ki ga potrebujejo elektroni, da prepotujejo absorpcijsko območje. Ta čas pa je odvisen od točnega mesta absorpcije in od hitrosti potovanja elektronov v ksenonu pri danem električnem polju. V našem primeru meri do 7 μ s. To pomanjkljivost odpravimo s povišanjem jakosti električnega polja v absorpcijskem območju tik nad prag za scintilacije. Signal iz anodnih žic (Sl. 2) je v tem primeru sestavljen iz »predscintilacijskega« dela (od t_1 do t_2), ki rabi za določanje časa, ter iz glavnega scintilacijskega dela (Q), ki določa energijo rentgenskega fotona. Z analizo oblike signala je mogoče tudi lo-

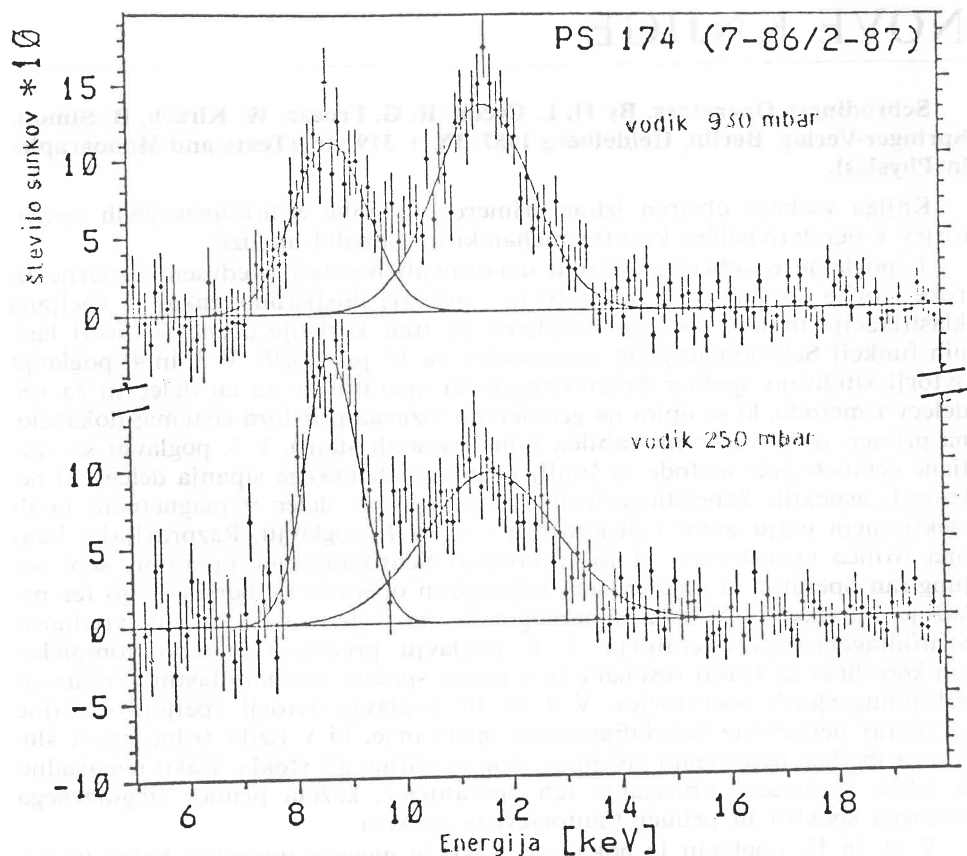
čiti naelektrene delce od fotonov [4]. Naelektreni delci namreč pustijo ionizacijsko sled skozi celotni merilnik, fotoni pa v glavnem vso energijo predajo lokalizirano.

Tako so merilnik uporabili za merjenje rentgenske svetlobe iz antiprotonskih atomov pri nizkoenergijskem nakopičevalniku antiprotonov LEAR (Low Energy Antiproton Ring) v CERN (Sl. 3). Prednost tega merilnika pred polprevodniškim je predvsem v sorazmerno preprosti identifikaciji naelektrenih delcev ter v večji odpornosti proti sevalnim poškodbam. Boljša ločljivost polprevodniških merilnikov v tem primeru ne pride do izraza, ker je širina črt K zaradi vpliva močne interakcije večja od energijske ločljivosti merilnika ($\sigma_E/E \approx 0.034$ pri 6 keV). Rentgenska svetloba iz protonija (atom pp) ima spekter z vrhom K_α pri nižji energiji in vrhom pri višji, ki je mešanica K_β , K_γ itd. (S. 4). To je eno od prvih merjenj premika in razširitve črte K v protoniju, ki sta pomembna podatka za razumevanje močne interakcije med protonom in antiprotonom.



Sl. 3. Spekter rentgenske svetlobe iz atomov $\bar{p}N$ in $\bar{p}O$

Prednosti opisanega merilnika niso le v dobri energijski ločljivosti, nizki ceni, veliki površini in dobri identifikaciji ozadja naelektrenih delcev, temveč tudi v možnosti za lokalizacijo posameznega dogodka. V zadnjem času razvijajo večjično komoro, ki ji dodajo TMAE, za meritev stožca Čerenkovega sevanja (RICH- Ring Imaging CHerenkov). Z večjično komoro s TMAE je mogoče tudi meriti scintilacije v kristalu BaF_2 . Ta možnost je zanimiva za lokalizacijo fotonov iz anihilacije pozitronov pri pozitronski tomografiji v medicini.



Sl. 4. Vrhovi prehodov K v protoniju. Zaradi manjšega vpliva Starkovega pojava se pri manjšem tlaku zveča delež vrha K_{α} [5]

LITERATURA

- [1] A. J. P. L. Policarpo, *Light production and gaseous detectors*, Physica Scripta **23** (1981) 539–549.
- [2] P. Rice-Evans, *Spark, streamer, proportional and drift chambers*, The Richelieu Press, London 1974.
- [3] W. J. C. Okx, C. W. E. van Eijk, R. Ferreira Marques, R. W. Hollander, D. Langerveld, A. Stanovnik, C. A. Baker, J. D. Davies, J. Moir, S. Sakamoto, E. W. A. Lingeman, R. E. Welsh, R. G. Winter, *A gas scintillation proportional detector for exotic hydrogen atom X-rays*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **33** (1986) 391–394.
- [4] W. J. C. Okx, C. W. E. van Eijk, R. Ferreira Marques, R. W. Hollander, D. Langerveld, A. Zoutendijk, *Background suppression in a gas scintillation proportional counter for exotic X-rays*, Nucl. Instr. Meth. **A 252** (1986) 605–608.
- [5] R. W. Hollander, *osebno sporočilo*.

NOVE KNJIGE

Schrödinger Operators. By H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1987, IX + 319 str. (Texts and Monographs in Physics).

Knjiga vsebuje obširen izbor primerov uporabe Schrödingerjevih operatorjev v nerelativistični kvantni mehaniki in globalni analizi:

1. poglavje o sebiadjungiranih operatorjih poudari predvsem osnovne izreke teorije motenj. V 2. poglavju je s primeri ilustrirano, zakaj je vpeljana klasifikacija motenj naravna, najdemo pa tudi koristne ocene lastnosti lastnih funkcij Schrödingerjevih operatorjev na L^p prostorih. V 3. in 4. poglavju avtorji študirajo spekter Schrödingerjevih operatorjev za en delec in za več delcev z metodo, ki se opira na geometrijo faznega prostora sistema; dokažejo, na primer, da ion H_2^- ni stabilen (nima vezanih stanj). V 5. poglavju so vpeljene geometrijske metode za študij kvantnomehanskega sipanja delcev. O nekaterih aspektih Schrödingerjevih operatorjev za delec v magnetnem in/ali električnem polju avtorji diskutirajo v 6. in 7. poglavju. Razpravljajo, kdaj ima trojica operatorjev, ki jo sestavljajo Schrödingerjev operator, sebi adjungiran operator in omejen sebi adjungiran operator, supersimetrijo ter nakažejo implikacije obstoja supersimetrije na degeneracijo lastnih vrednosti Schrödingerjevega operatorja. V 8. poglavju predstavi metodo kompleksnih koordinat za študij resonanc in v zvezni spekter vloženih lastnih vrednosti Schrödingerjevih operatorjev. V 9. in 10. poglavju avtorji vpeljejo slučajne in skoraj periodične Schrödingerjeve operatorje, ki v fiziki trdne snovi služijo za modele neurejenih sistemov, kot so zlitine ali stekla. Kako nenavadno je lahko spektralno obnašanje teh operatorjev, kaže ta primer singularnega zveznega spektra in primer Cantorjevega spektra.

V 11. in 12. poglavju je pokazano, kako je mogoče uporabiti Schrödingerjeve operatorje za analizo na mnogoterostih: s pomočjo semiklasične analize lastnih vrednosti primerno izbranega Schrödingerjevega operatorja na kompaktni mnogoterosti avtorji dokažejo krepke Morsejeve neenačbe, ki kritične točke dane funkcije na gladki kompaktni mnogoterosti povezujejo s topologijo mnogoterosti, natančneje, z Bettijevimi števili. V zadnjem poglavju je s supersimetričnimi prijemi pedagoško detaljno dokazan Gauss-Bonnet-Chernov izrek, tj. poseben primer znamenitega Atiyah-Singerjevega izreka. Avtorji proglasijo, da je njihov pristop k predmetu zadnjih dveh poglavij tak, kot da je ta predmet le samemu sebi namen, in niti s citati ne dajo slutiti kakšne uporabnosti. In vendar Morsejeve neenačbe so uporabne, na primer, če želimo določiti, kakšne sorte nezveznosti v odvodu porazdelitve funkcije frekvenc elastičnih nihanj kristalov so možne in koliko je nezveznosti posamezne vrste. Še veliko pogostejše uporabljen pa je Atiyah-Singerjev izrek, na primer pri kvantnomehanski porušitvi klasičnih simetrij v teoriji polja ali pri dokazu konsistence teorije superstrun.

Ker so v tej knjigi obravnavani predmeti pretežno samo skicirani, o čemer priča tudi število citatov (384), je po mojem mnenju za njeno tekoče branje potrebno trdno znanje osnov funkcionalne analize pa tudi poprejšnje srečanje s fizikalno relevantnimi Schrödingerjevimi operatorji bi utegnilo biti koristno.

Tako je ta knjiga bogato dopolnilo na primer delu M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: v. 1. Functional Analysis, v. 2. Fourier Analysis, Self-adjointness, v. 3. Scattering Theory, v. 4. Analysis of Operators*, Academic Press, New York 1980. Ravno tako tehten pa je njen pronicljivi vpogled v tematiko, ki se je znašla v gorišču pozornosti sodobne matematike in fizike hkrati, in je zato vredna vsaj ogleda, če že ne pozornega študija.

Matjaž Poljšak

VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 35 (1988) št. 1–6, str. 1–192

Članki — matematika

Pretočni in vzporedni računalniki (Matija Lokar)	1— 12
Kubične enačbe (Marko Razpet)	13— 16
Problem iskanja trajektorij (Bojan Orel)	17— 26
Nekaj geometrijskih karakterizacij hilbertske norme (Edvard Kramar)	27— 34
Časovne mere vzporednih algoritmov (Matija Lokar)	68— 72
Iskanje minima funkcije ene spremenljivke (Janez Šparovec)	73— 78
Glasba in matematika (Bruno Ravnikar)	97—113
Diferencialne enačbe in matematično modeliranje (Jože Andrej Čibej)	129—136
Linearne diferencialne enačbe v elektrotehniki (Gabrijel Tomšič)	137—145
Stirlingova števila druge vrste (Marko Razpet)	161—171
Vztrajnostni moment homogenega trikotnikovega oboda (Ivan Pucelj)	172—174
Primeri uporabe glavnih smeri afinih preslikav (Radomir Živković, prev. in prir. Marija Vencelj)	175—186

Članki — fizika

Mioni kot katalizatorji za fuzijo (Marijan Olenik)	35— 41
Zvočni mikroskop (Janez Strnad)	43— 47
Hiperbolična leča (Nada Razpet)	49— 50
Zvezno tekmovanje študentov fizike (Ana Pribaković)	51— 54
Nevtronski interferometer (Irena Drevenšek)	55— 59
Kulminacija vesoljskih teles (Marijan Prosén)	79— 80
Moč živih bitij (Andrej Likar)	81— 82
Iztekanje plina (Janez Strnad)	83— 85
Hodimo v dežju (Janez Strnad)	115—117
Oblika vesoljskih teles (Marijan Prosén)	119—121
Tričetrt stoletja rentgenskih interferenc (Janez Strnad)	147—154
Merilnik rentgenske svetlobe s scintilacijami v plinu (Aleš Stanovnik)	187—191

Nove knjige

Pavković B., Dakić B., Polinomi (Boris Lavrič)	16
Marić V., Skendžić M., Obične diferencialne jednačine (Peter Šemrl)	26
Olver P. J., Applications of Lie groups to differential equations (Franc Forstnerič)	34
Narkiewicz W., Classical problems in number theory (Jože Grasselli)	42
Shub M., Global stability of dynamical systems (Jože Vrabec)	48
Metastability and incompletely posed problems (Anton Suhadolc)	50
Homogenization and effective moduli of materials and media, ed. J. L. Ericksen et al. (Ibrahim Aganović)	VII
Klambauer G., Aspects of calculus (Milan Hladnik)	VII
Blackadar B., K-theory for operator algebras (Bojan Magajna)	72

Borg I., Lingoes J., Multidimensional similarity structure analysis (Milan Hladnik)	78
Amorphous polymers and non-Newtonian fluids (Janez Strnad)	85
Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., Riemannian geometry (Ivan Vidav)	94
Smith K. T., Power series from computational point of view (Peter Petek)	94
Hydrodynamic behavior and interacting particle systems, ed. G. Papanicolaou (Peter Vencelj)	95
Theory and applications of liquid crystals, ed. J. L. Ericksen et al. (Marija Vilfan)	95
Sarapa N., Teorija verojatnosti (Tomaž Košir)	96
Szekely G. J., Paradoxes in probability theory and mathematical statistics (Gorazd Lešnjak)	XI
Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1987 (Ciril Velkovrh)	XI
Suhadolc A., Linearni topološki prostori, 2. del (Ivan Vidav)	114
Faddeev L. D., Takhtajan L. A., Hamiltonian methods in the theory of solitons (Peter Prelovšek)	117
Random media, ed. G. Papanicolaou (Peter Prelovšek)	117
Ludwig G., An axiomatic basis for quantum mechanics, vol. 2 (Peter Gosar)	118
Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems, ed. H. Kesten (Slobodan Žumer)	118
Probability theory and mathematical statistics with applications, Proc. 5. Pannonian symposium on mathematical statistics, Visegrad 1985, ed. W. Grossmann et al. (Tomaž Košir)	123
Grasman J., Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications (Peter Petek)	171
Z računalnikom v matematiko, V. Batagelj s sodelavci (Matija Lokar)	174
Schrödinger operators. By H. L. Cycon et al. (Matjaž Poljšak)	192
Vesti	
Mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM 1987 (Peter Šemrl)	60—64
Praznik našega profesorja (Marija Vencelj, foto Peter Legiša)	65—67
Profesor dr. Anton Moljk — častni član društva (Zbral Janez Strnad)	86
Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v letu 1987 (Zbral in uredil Milan Hladnik)	87—90
Okrogla miza: Matematika in fizika v šoli (Milena Strnad)	90—91
Izjava društva	92
Novi člani društva v letu 1987 (Ciril Velkovrh)	92
39. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov (Martina Koman)	93
Žagarjeva nagrada profesorju Ivanu Vidavu (Milan Hladnik)	122—123
Ob življenjskem jubileju profesorja Križaniča (Vital Sever)	124—126
Nagrade Sklada Borisa Kidriča v letu 1988 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh)	126—127
Prešernove nagrade študentom matematike in fizike (Maja Bleiweis in Ciril Velkovrh)	128
Dvanajsti matematični seminar (Peter Petek, Milena Strnad)	VIII, XV
Seminar iz eksperimentalne astronomije — vabilo (Bojan Dintinjana, Pavla Ranzinger)	XVI
Podeljevanje nazivov častnih članov DMFA SRS (Ciril Velkovrh, Mitja Rosina)	146
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1987 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh)	155—159
Zadrega strokovnega pisanja (Janez Lapajne)	159—160
40. jubilejni občni zbor društva — vabilo (Mitja Rosina)	XIX—XX
Odgovori — 122 (Aleksandar Jurišić)	93