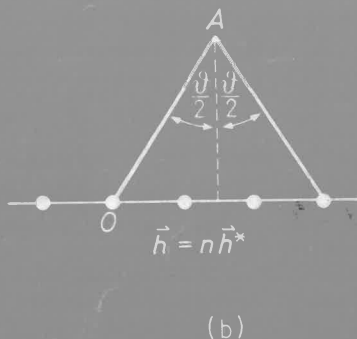
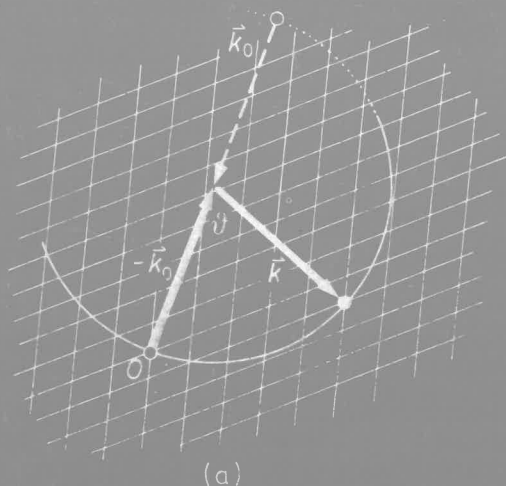


1988
 Letnik 35
 5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 35 — ŠTEVILKA 5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1988

Uredniški odbor: Milan Hladnik — urednik za matematiko, Niko Prijatelj — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 7000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 3500.— din, za ustanove in podjetja 20000.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 2000.— din, dvojna številka 4000.— din, stare številke 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1988 DMFA SRS — 925

Poštšina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

Diferencialne enačbe in matematično modeliranje — Differential equations and mathematical modelling (Jože Andrej Čibej)	129
Linearne diferencialne enačbe v elektrotehniki — Linear differential equations in electrical engineering (Gabrijel Tomšič)	137
Tričetrto stoletja rentgenskih interferenc — Three-quarters of a century of x-ray interferences (Janez Strnad)	147

Vesti — News

Podeljevanje nazivov častnih članov DMFA SRS (Ciril Velkovrh, Mitja Rosina)	146
Obvestilo naročnikom (Ciril Velkovrh, Janez Strnad)	154
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1987 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh)	155
Zadolge strokovnega pisanja (Janez Lapajne)	159
40. jubilejni občni zbor društva — vabilo (Mitja Rosina)	III

Na ovitku: Slika 4. k članku na str. 147.

Prva dva prispevka sta zapisa predavanj z letošnjega 12. matematičnega seminarja.

DIFERENCIALNE ENAČBE IN MATEMATIČNO MODELIRANJE

JOŽE ANDREJ ČIBEJ

Math. Subj. Class. (1985) 34—01, 90A16, 92A15

V članku z nekaj primeri pokažemo, kako lahko uporabimo navadne diferencialne enačbe pri matematičnem modeliranju v biologiji, demografiji, ekonomiji in podobnih znanostih.

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELLING

Some examples are used in this paper to show how ordinary differential equations can be useful in mathematical modelling in biology, demography, economics and similar sciences.

Učbeniki, v katerih se prvič srečamo z navadnimi diferencialnimi enačbami, običajno ilustrirajo teorijo s primeri, ki sodijo na klasična področja uporabe: v fiziko, mehaniko, elektrotehniko. Taka izbira opravičil za študij diferencialnih enačb je po svoje razumljiva in tudi zgodovinsko utemeljena, vendar so v zadnjih petdesetih letih diferencialne enačbe našle mesto tudi v „mehkejših“ znanostih, ki se ukvarjajo z dogajanjem v živem svetu, na primer v biologiji, medicini, demografiji, ekonomiji itd. Zato bomo v tem prispevku predstavili nekaj modelov, ki opisujejo dinamiko različnih sistemov, njihovo rast, razvoj, propad ali večno nihanje okrog nekega ravnovesnega stanja. O takih modelih je bilo zelo veliko napisanega, spisek literature na koncu članka je samo za prvo pomoč, pa tudi članek kot celota je zaradi prostorske stiske lahko le skica nekaterih značilnejših primerov. Omeniti je treba, da modelov nismo združevali po uporabnikih, ampak glede na to, kaj napovedujejo: neomejeno rast, omejeno monotono rast do nekega „stanja nasičenosti“, dušene ali nedušene oscilacije. Tako bodo tudi bolj vidne analogije med različnimi področji uporabe, ki so včasih koristno orodje za ustvarjanje novih modelov, dostikrat pa žal tudi nevarna past pri presajanju izkušenj z enega področja na drugo.

I. Neomejena rast

Leta 1798 je T. R. Malthus napovedal, da bo prebivalstvo na Zemlji naraščalo tako, da bo hitrost naraščanja v vsakem trenutku premo sorazmerna takratni velikosti populacije, v znakih

$$P'(t) = a P(t) \quad (1)$$

Diferencialna enačba (1) nam da skupaj s pripadajočim začetnim pogojem $P(t_0) = P_0$ rešitev

$$P(t) = P_0 \exp[a(t - t_0)] \quad (2)$$

to je t. i. **zakon naravne rasti** (včasih ga imenujejo tudi po Malthusu), ki napoveduje, da bo populacija eksponentno naraščala preko vsake meje. Parameter a , ki pove, kako hitra je ta rast, je pri Malthusu neodvisen od velikosti populacije, starosti njenih pripadnikov in drugih demografskih spremenljivk. To med drugim pomeni, da model ne upošteva zaviralnih vplivov, ki jih imata na nadaljnjo rast populacije njena že dosežena velikost in okolje z omejenimi zalogami hrane in drugih dobrin. Zato je praktična uporabnost

modela dokaj omejena, v splošnem samo na določene faze v razvoju neke populacije, dokler le-ta še neovirano raste. M. Braun ([2], str. 27—28) ocenjuje, da je s tem zakonom mogoče relativno dobro opisati dosedanje dinamiko števila prebivalcev na Zemlji (konkretno navaja model za obdobje 1700—1961), vendar dobimo na primer iz napovedi za leto 2500 podatek, da bo imel takrat vsak Zemljan na voljo približno kvadratni meter prostora.

Če so se napovedi Malthusovega modela zdele pesimistične z vidika blagostanja in so ga demografi zavrnili zaradi očitno nekorektnih predpostavk, pa so na drugi strani ekonomisti (vsaj spočetka) s simpatijami obravnavali modele gospodarske rasti, ki dajejo rezultate, povsem analogne z (2). Ne da bi se spuščali v ekonomsko ozadje (glej npr. [9], str. 130—131, ali lepše v [6], str. 170—172), predstavimo t. i. **(Harrod-) Domarjev model**, ki temelji na naslednjih predpostavkah:

a) Sredstva $S(t)$, ki jih v proučevanem narodnem gospodarstvu privarčujejo, pomenijo konstanten delež v njegovem narodnem dohodku $Y(t)$, torej $S(t) = s Y(t)$.

b) Investicije $I(t)$ so premo sorazmerne hitrosti naraščanja narodnega dohodka, $I(t) = v Y'(t)$.

c) Investiramo lahko natanko toliko, kolikor smo prihranili, $I(t) = S(t)$.

Iz tretje in prve predpostavke sledi, da tudi investicije $I(t)$ v vsakem trenutku pomenijo konstanten delež v narodnem dohodku, namreč $sY(t)$. Ta izraz uvrstimo na levo stran enačbe iz druge predpostavke in po urejanju dobimo homogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda

$$Y'(t) - (s/v) Y(t) = 0 \quad (3)$$

Njena rešitev ima napovedano obliko

$$Y(t) = Y_0 \exp [(s/v) t] \quad (4)$$

Tu Y_0 pomeni velikost narodnega dohodka v začetnem trenutku. Narodni dohodek torej pri danih predpostavkah eksponentno narašča, seveda realno in ne zaradi inflacije — skoraj prelepo, da bi bilo res... Ko pa že omenjamo nam domači pojem (inflacijo), opozorimo na soroden model (glej [1], str. 72—73), ki opisuje naraščanje zadolženosti v takem narodnem gospodarstvu, ki dovoli, da je hitrost naraščanja dolga premo sorazmerna doseženemu narodnemu dohodku. Rezultatov na tem mestu ne bomo navajali, da ne bi bili obdolženi vznemirjanja javnosti.

II. Omejena monotona rast

Eden od preprostejših načinov, da se znebimo nerealnih napovedi o neomejeni rasti populacije, je zamenjava (1) s predpostavko, da hitrost naraščanja populacije ni sorazmerna njeni celotni velikosti, ampak le razliki med maksimalno velikostjo, ki jo še dopušča okolje, denimo P_* , in trenutno velikostjo $P(t)$, tako da se enačba (1) spremeni v

$$P'(t) = a[P_* - P(t)] \quad (5)$$

Pri enakem začetnem pogoju, kot smo ga imeli v prejšnjem razdelku (torej $P(t_0) = P_0$), dobimo kot rešitev te nehomogene linearne diferencialne enačbe funkcijo

$$P(t) = P_* - (P_* - P_0) \exp [-a(t - t_0)] \quad (6)$$

Iz zapisa se vidijo osnovne značilnosti te funkcije: uboga začetni pogoj $P(t_0) = P_0$, na proučevanem intervalu (t_0, ∞) je monotonno naraščajoča funkcija časa t , od zgoraj omejena z vrednostjo P_* , h kateri konvergirajo njene vrednosti pri $t \rightarrow \infty$. Nekoliko podrobnejša analiza in slika 1 odkrjeta poleg naštetih lepih lastnosti tudi kakšno slabo: pri danih predpostavkah je prvi odvod $P'(t)$ na celotnem proučevanem intervalu padajoča funkcija časa, populacija naj bi po tem modelu najhitreje naraščala v začetnem trenutku, ko je najmanjša. Praktične izkušnje iz biologije in sorodnih področij kažejo, da to ne drži. Dosti bolje pa se ta model in njegovi najbližji sorodniki izkažejo pri opisovanju dinamike prodaje blaga in storitev v odvisnosti od sredstev, ki jih vlagamo v ekonomsko propagando (glej npr. [8], str. 71—73 in 79).

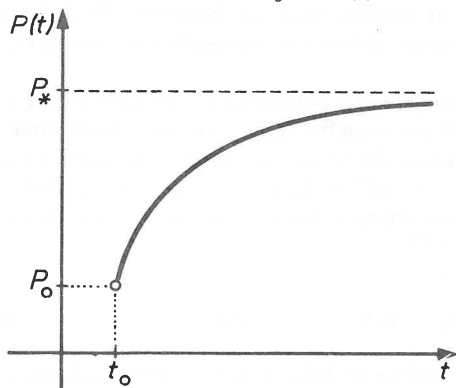
Na vsak način pa se kmalu pokaže, da v okviru linearnih diferencialnih enačb ne moremo pričakovati ustreznih opisov zakonov rasti za populacije, v katerih zaradi že dosežene velikosti prihaja do boja za obstanek med posameznimi osebki; v enačbo je treba vključiti še en člen, s katerim opišemo konkurenco med osebki. Primerna oblika je denimo $-b P^2(t)$, če predpostavimo, da je število 'spopadov' premo sorazmerno kvadratu velikosti populacije. Ta predpostavka je zelo smiselna (spomnimo se naloge o številu partij na šahovskem turnirju z n udeleženci) in jo srečamo tudi na drugih področjih, na primer v teoriji širjenja epidemij, kjer večina klasičnih (determinističnih) modelov predpostavlja, da je intenzivnost širjenja okužbe premo sorazmerna produktu števila že okuženih in števila še zdravih osebkov ([4], str. 162). Z omejenim dušilnim členom dobimo iz zakona naravne rasti t. i. Verhulst-Pearlov ali **logistični zakon**

$$P'(t) = a P(t) - b P^2(t) \quad P(t_0) = P_0 \quad (7)$$

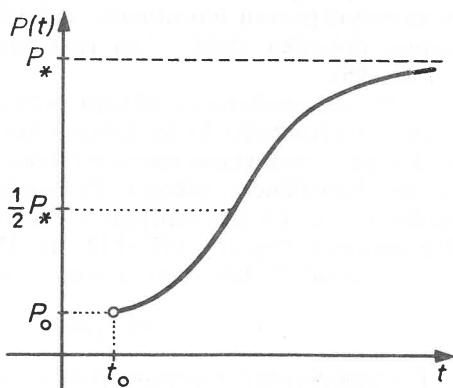
Integracija te enačbe in nekaj premetavanja izrazov (podrobnosti najde bralec v [2], str. 29—30) nam dasta **logistično funkcijo**

$$P(t) = a P_0 [b P_0 + (a - b P_0) \exp(-a(t - t_0))]^{-1} \quad (8)$$

Velikost populacije, ki se spreminja po tem zakonu, torej teži k limitni vrednosti a/b , ki jo po analogiji s prejšnjim modelom označimo s P_* , torej $P_* = a/b$. Če je začetna velikost populacije manjša od P_* , imamo opraviti z monotonim naraščanjem $P(t)$.



Sl. 1. Graf funkcije (6)



Sl. 2. Graf logistične funkcije (8) pri $P_0 < P_*$

Drugi odvod $P''(t)$ je enak produktu $(a - 2b P(t)) P(t) (a - b P(t))$, zato je prvi odvod $P'(t)$ pri $P(t) > a/(2b)$ monotonno padajoča funkcija časa, kar se vidi tudi iz slike 2: dinamika je spočetka takšna kot pri zakonu naravne rasti, ko pa populacija preseže polovico svoje limitne velikosti a/b , prihaja do nasičenosti in rast se zaustavlja, velikost populacije se asimptotično približuje maksimalni možni.

Logistična funkcija je tipičen predstavnik (sicer heterogene) družine funkcij, katerih grafe v praksi pogosto imenujejo '*S-krivulje*'. Nanje naletimo na različnih področjih, tudi funkcije so lahko zelo različne, skupna značilnost pa je tipično obnašanje, ki bi ga lahko poenostavljeno opisali takole: počasen zalet, hitra rast, asimptotično ustavljanje. Ker za podrobnejše opise tu ni prostora, samo nekaj primerov in hkrati kažipotov v lažje dostopno literaturo.

— Da dobimo takšne krivulje pri spremljanju rasti nekaterih populacij, je bilo večkrat eksperimentalno preverjeno ([2], str. 31—34); seveda je treba biti posebej pri demografskih uporabah zelo pazljiv, ker je treba poleg 'vitalnih koeficientov' a in b iz preprostega modela (7) upoštevati še druge faktorje. Vsekakor je zanimiva napoved, narejena na osnovi sedanjih ocen za ta dva parametra: po njej naj bi za prebivalstvo Zemlje veljalo, da je limitna vrednost P_* nekaj manjša od 10 milijard; s sedanjimi petimi milijardami naj bi bili tako ravno na začetku obdobja počasnejše rasti.

— Pri najstarejšem matematičnem modelu širjenja epidemij (Kermack in McKendrick, 1927) prav tako dobimo S-krivuljo kot graf funkcije, ki opisuje število že okuženih osebkov v populaciji konstantne velikosti. Model je nastal ob proučevanju epidemije kuge v gosto naseljenem Bombayu in je dal rezultate, ki so se presenetljivo dobro ujemali z dejansko dinamiko epidemije ([2], str. 428—434).

— Manj znane so morda raziskave E. Mansfielda, ki je na praktičnih primerih iz ZDA pokazal, da se tudi tehnične inovacije širijo podobno kot epidemije nalezljivih bolezni; kumulativni frekvenčni poligoni števila podjetij, ki so do nekega časa že začela uporabljati določeno novost, zelo spominjajo na graf logistične funkcije ([2], str. 37—42; originalni Mansfieldov članek v *Econometrici*, Vol. 29 (1961)).

— Če predpostavimo, da so sredstva za investicije hkrati premo sorazmerna razpoložljivemu narodnemu dohodku in razliki med že doseženo in želeno ravniyo dohodka, dobimo za rast narodnega dohodka logistični zakon ([11], str. 93—95).

— Pri napovedovanju obsega prodaje trajnejših proizvodov uporabljajo t. i. *Weblusovo funkcijo*, ki jo dobimo kot rešitev enačbe (7), če desno stran enačbe delimo z neodvisno spremenljivko t , tako da se začne rast ustavljati prej kot pri logističnem zakonu. Pomembne so tudi nekatere druge posplošitve enačbe (7), ki jih uporabljajo v ekonomski prognostiki in modeliranju bioloških procesov ([6], str. 147—148, str. 154—155).

— Enačbo (7) lahko prepišemo v obliko

$$P'(t) = b P(t) [(a/b) - P(t)] = b P(t) [P_* - P(t)] \quad (9)$$

Pri modeliranju v demografiji se je v zadnjem faktorju namesto nakazane preme sorazmernosti med stopnjo rasti $P'(t)$ in razliko $P_* - P(t)$ bolj izkazal logaritem količnika $P_*/P(t)$. Rešitev tako spremenjene enačbe imenujemo

Gompertzova funkcija. Poleg demografskih uporab je zanimivo modeliranje rasti tumorjev s pomočjo takšne funkcije (spet [2], str. 49—51).

— Ko omenjamo demografijo in populacijsko dinamiko nasploh, je treba vendarle poudariti, da se v zadnjih letih največ ukvarjajo z nelinearnimi modeli, ki eksplicitno upoštevajo starostno in spolno strukturo populacije, zaradi česar so seveda bistveno zahtevnejši od preprostih zgledov, ki smo jih obravnavali. Tudi matematično zelo zanimiv in dokaj svež pregled stanja na tem področju je monografija [12].

Ob koncu razdelka o omejeni monotoni rasti skicirajmo še znani *Evansov tržni model* (pred leti smo ga podrobneje predstavili v [3]). Predpostavimo, da sta ponudba nekega blaga $S(t)$ in povpraševanje po njem $D(t)$ odvisna samo od cene $P(t)$, pri čemer je v vsakem trenutku povpraševanje padajoča, ponudba pa naraščajoča linearna funkcija cene. Tako imamo

$$D(t) = a_0 + a_1 P(t) \quad (a_1 < 0) \quad (10)$$

$$S(t) = b_0 + b_1 P(t) \quad (b_1 > 0) \quad (11)$$

Cena naj se obnaša tako, kot se spodobi (v urejenem gospodarstvu), hitrost njenega spreminjanja naj bo ob vsakem času premo sorazmerna razliki med takratnim povpraševanjem in sočasno ponudbo. Predpostavka da enačbo

$$P'(t) = k [D(t) - S(t)] \quad (k > 0) \quad (12)$$

Če poznamo začetno ceno $P(0) = P_0$, lahko iz enačb (10), (11) in (12) dobimo (glej [2], [3] ali [6]!) ceno kot funkcijo časa,

$$P(t) = P_* + (P_0 - P_*) \exp [-k(b_1 - a_1) t] \quad (13)$$

kjer je s predpisom

$$P_* = (a_0 - b_0)/(b_1 - a_1) \quad (14)$$

določena *ravnovesna cena* P_* , h kateri konvergirajo vrednosti funkcije $P(t)$ pri $t \rightarrow +\infty$. Izraz 'ravnovesna' (ali tudi 'ravnotežna') uporabljamo zato, ker se pri tej ceni izenačita ponudba in povpraševanje, o čemer se lahko prepričamo, če izraz za P_* vstavimo v enačbi (10) in (11). Konvergenca je monotona, žal asimptotična in pri neugodnih kombinacijah vrednosti parametrov lahko tudi dokaj počasna; iz katere smeri se $P(t)$ približuje limitni vrednosti, pa je odvisno od tega, kakšna je v primerjavi z ravnovesno ceno začetna cena P_0 .

III. Nihanja in kolobarjenja

Opisanim modelom rasti (ali padanja) dodajmo še nekaj zanimivih primerov periodičnih procesov. Ni težko ugotoviti, da to v matematičnem pogledu pomeni selitev k diferencialnim enačbam drugega reda ali ekvivalentnim sistemom enačb prvega reda.

Preprost model te vrste bomo dobili kar s predelavo Evansovega tržnega modela, v katerega bomo vključili še zaloge $Z(t)$ (za podrobnosti glej [6], str. 165—167, ali tam navedene originalne vire). Odnos med ponudbo $S(t)$, povpraševanjem $D(t)$ in zalogami bomo opisali na najpreprostejši način, pre-sežne količine blaga, ki jih ponujajo proizvajalci, se prelivajo v zaloge, v obratni smeri teče tok dobrin takrat, ko je povpraševanje večje od ponudbe; predpostavimo, da je $dZ = [S(t) - D(t)] dt$. (Pozornejši bralec bo na tem mestu

verjetno razmislil o dimenzijskih značilnostih spremenljivk $S(t)$ in $D(t)$.) Model bomo zgradili na dokaj logični predpostavki, da se cena v vsakem trenutku spreminja v odvisnosti od tega, koliko nad neko optimalno velikostjo Z_* (ali koliko pod njo) so trenutne zaloge $Z(t)$, torej

$$P'(t) = -k [Z(t) - Z_*] \quad (k > 0) \quad (15)$$

Prevelike zaloge pri naših predpostavkah znižujejo ceno, tem hitreje, čim večje so. Z odvajanjem enačbe (15) po času ugotovimo, da je $P''(t) = -k Z'(t)$. Zaradi predpostavke o obnašanju zalog $Z(t)$ je zato

$$P''(t) = -k [S(t) - D(t)] \quad (16)$$

Enačbo rešujemo za primer, ko sta funkciji ponudbe $S(t)$ in povpraševanja $D(t)$ takšni kot v osnovnem Evansovem modelu (enačbi (10) in (11)), tako da dobimo naslednjo nehomogeno diferencialno enačbo drugega reda:

$$P''(t) + k(b_1 - a_1) P(t) = k(a_0 - b_0) \quad (17)$$

Enačba ima konstantne koeficiente in rutinski račun pokaže, da lahko pri danih predpostavkah o predznakih parametrov zapišemo splošno rešitev te enačbe v obliki

$$P(t) = P_* + C \cos(\lambda t + \delta) \quad (18)$$

kjer je $P_* = (a_0 - b_0)/(b_1 - a_1)$ in $\lambda = +[k(b_1 - a_1)]^{1/2}$. Tako cena $P(t)$ enakomerno niha okrog ravnovesne cene, amplituda C in fazni zamik δ pa sta pri tem še odvisna od začetnih pogojev, torej od začetne cene $P(0)$ in odstopanja začetnih zalog $Z(0)$ od optimalne ravni Z_* .

Preselimo se v ekologijo. Med najzanimivejše '*oscilacijske modele*' gotovo sodijo opisi dinamike dveh populacij, od katerih se ena prehranjuje s pripadniki druge; govorili bomo kar o *plenilcih* in *plenu*. Verjetno se je večina bralcev že kdaj srečala s katerim od omenjenih modelov, denimo z zgodbou o zajcih in lisicah s SPECTRUMOVE demonstracijske kasete. Tu bomo povzeli osnovni model po prevodu članka '*Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*' ([10], str. 23—115), enega prvih in temeljnih del matematične ekologije. Njegov avtor, italijanski matematik V. Volterra (večini bolj znan kot reševalec integralskih enačb), je v omenjenem članku odgovoril na izziv biologa Umberta D'Ancone, naj poskusi v matematičnem jeziku opisati, zakaj se je med I. svetovno vojno nenavadno povečal delež morskih psov in sorodnih vrst v Kvarnerskem zalivu.

Naj $P(t)$ pomeni moč populacije, s katero se prehranjujejo plenilci, število teh pa označimo s $Q(t)$. Predpostavimo, da potencialnih žrtev ni toliko, da bi tudi med seboj intenzivno tekmovala za hrano, tako da dopuščamo naraščanje te populacije po zakonu naravne rasti (1), dokler se v to rast ne vmešajo plenilci: ti dodajo enačbi negativen (dušilni) člen, ki je premo sorazmeren produktu trenutnih velikosti obeh populacij, plenilcev in plena (utemeljitev je podobna kot pred enačbo (7)). Tako imamo za prvo populacijo ('plen') enačbo

$$P'(t) = a P(t) - b P(t) Q(t) \quad (a > 0, b > 0) \quad (19)$$

Dinamiko populacije plenilcev bomo modelirali nekoliko drugače, namreč z enačbo

$$Q'(t) = -f Q(t) + g P(t) Q(t) \quad (f > 0, g > 0) \quad (20)$$

Predpostavljamo namreč, da bi plenilci brez hrane 'eksponentno izumirali' (f torej pomeni stopnjo smrtnosti), na drugi strani pa je hitrost naraščanja njihove populacije sorazmerna tako doseženi velikosti $Q(t)$ kot količini hrane, ki je na voljo, to je $P(t)$. Omejimo se samo na praktično zanimive primere, ko sta začetni velikosti obeh populacij strogo pozitivni ($P(0) > 0$, $Q(0) > 0$).

Sistem enačb (19), (20) na običajni način ([7], str. 269 in dalje) prevedemo v diferencialno enačbo, ki neposredno povezuje velikosti obeh populacij:

$$dQ/dP = (-fQ + gPQ)/(aP - bPQ) = [Q(-f + gP)]/[P(a - bQ)] \quad (21)$$

Enačba (21) ima ločljivi spremenljivki, integracija nam da izraz

$$a \ln Q - bQ + f \ln P - gP = C$$

in po antilogaritmiranju na obeh straneh še

$$Q^a e^{-bQ} P^f e^{-gP} = K \quad (22)$$

Volterra je odkril cel kup zanimivosti v zvezi s funkcijami iz enoparametrične družine (22), za biologe pa je najzanimivejša ugotovitev, da je z enačbo (22) določena družina sklenjenih faznih tirov. Postavljenemu modelu ustreza ciklično spreminjanje moči obeh populacij, funkciji $P(t)$ in $Q(t)$ sta periodični z enako periodo T . Časovni povprečji njunih vrednosti za interval dolžine T sta dani z enačbama

$$\bar{P} = f/g, \quad \bar{Q} = a/b \quad (23)$$

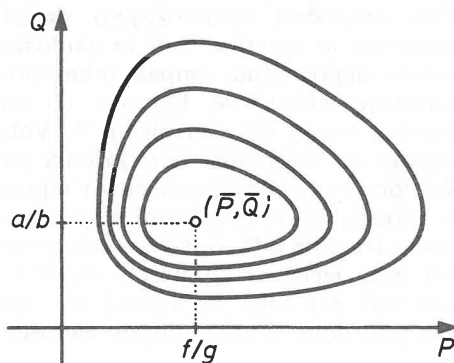
(glej originalno v [12] ali krajše v [2], str. 417). Ni se težko prepričati, da je $(f/g, a/b)$ poleg povsem nezanimive možnosti $(0, 0)$ edina točka mirovanja ([7], str. 271) dinamičnega sistema (19)–(20); gibanja so torej takšna, da je sistem (plen, plenilci) v povprečju v ravnovesju.

Zanimiva je na vsak način ugotovitev, da je povprečna velikost populacij odvisna samo od parametrov a , b , f in g , prav nič pa od začetnih velikosti obeh populacij, to je $P(0)$ oziroma $Q(0)$ (če le vztrajamo pri predpostavki, da sta ti dve vrednosti strogo pozitivni). Povprečno število plenilcev se tako na primer zmanjšuje z manjšanjem stopnje rodnosti njihovega plena (parameter a) ali drugimi ukrepi, ki enako vplivajo na dinamiko te populacije, denimo človekovimi posegi vanjo. Konkreten primer, ki ga je obravnaval Volterra, pomeni vključitev ribolova v model, kjer so sicer plenilci morski psi (in nekatere sorodne vrste), hrana oziroma njihov plen pa druge vrste rib. Če predpostavimo, da z ribolovom zmanjšujemo obe populaciji po stopnji, ki je premo sorazmerna velikostma, je treba sistem (19)–(20) predelati v obliko

$$P'(t) = aP(t) - bP(t)Q(t) - hP(t) = (a - h)P(t) - bP(t)Q(t) \quad (24)$$

$$Q'(t) = -fQ(t) + gP(t)Q(t) - hQ(t) = -(f + h)Q(t) + gP(t)Q(t) \quad (25)$$

Pri tem seveda predpostavljamo, da je $0 < h < a$, ribolov torej obstaja, vendar je njegova intenzivnost manjša od naravne rodnosti. Namesto (23)



Sl. 3. Ciklična gibanja moči obeh populacij

dobimo v tem primeru za ravnovesno točko oziroma za povprečni velikosti populacij vrednosti

$$\bar{P} = (f + h)/g, \quad \bar{Q} = (a - h)/b \quad (26)$$

Pravili (26) povesta, da zmerno intenziven ribolov v obeh populacijah (tako med plenilci kot med njihovim plenom) celo poveča povprečno velikost populacije „prehrambenih rib“ in obratno, opustitev ribolova (kar se je zgodilo med I. svetovno vojno!) pripelje po tem modelu do relativnega povečanja števila plenilcev. Z opisanim modelom je tako Volterra lepo razložil podatke o dejanskem gibanju moči obeh populacij, ki jih je zbral D'Ancona. Pravilo „o perturbaciji povprečnih vrednosti“ ([12], str. 44) je mogoče uporabiti dosti splošneje, vendar samo v primerih, ko ni intenzivnega boja za obstanek znotraj posamezne populacije; če takšna predpostavka ni izpolnjena, je treba v sistemih (19)–(20) oziroma (24)–(25) na račun notranje konkurence v populacijah dodati ustrezna dušilna člena, to je $-c P^2(t)$ oziroma $-d Q^2(t)$, kot smo to napravili pri logističnem zakonu v prejšnjem razdelku. Rešitve tako dobljenega sistema v splošnem niso več periodične, pri določenih kombinacijah vrednosti parametrov lahko plenilci popolnoma izumrejo, če se njihove žrtve prepočasi razmnožujejo, da bi jim zagotovile dovolj hrane. Podobna dinamika je značilna tudi za ekološke sisteme, kjer se dve populaciji ne spopadata neposredno, ampak tekmujeta za omejene naravne vire. *Načelo konkurenčne izključitve*, ki pove, da ena od obeh populacij v takem primeru izumre, bomo spet pripisali V. Volterri ([12], str. 25–30), kritičen pretres pogojev za veljavnost tega pravila pa najdemo na primer v [2], str. 421–426. Ko ponovno opozarjamo na to izjemno zanimivo Braunovo knjigo, omenimo še model, ki s podobnim dinamičnim sistemom opisuje širjenje kapavice v neki (recimo odkrito: k promiskuiteti nagnjeni) populaciji ([2], str. 435–445). Ker nam sicer že objavljeni modeli širjenja AIDS-a pri pisanju tega članka niso bili pri roki, bo moral kot zgled za uporabo diferencialnih enačb na tem področju epidemiologije zadoščati kar omenjeni nedolžnejši primer.

LITERATURA

- [1] Beach E. F., *Economic Models*, New York, J. Wiley 1957.
- [2] Braun M., *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, New York 1978.
- [3] Čibej J. A., *Trije preprosti ekonomski modeli*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 172–176.
- [4] Čibej J. A., *O širjenju epidemij*, Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 161–169.
- [5] Čibej J. A., *Matematični modeli oboroževalne tekme in vojaških spopadov*, Obzornik mat. fiz. **27** (1980) 1–6.
- [6] Indihar S., *Matematične metode za ekonomiste (izbrana poglavja)*, Maribor, VEKŠ 1981.
- [7] Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Ljubljana, DZS 1974.
- [8] Leeflang P. S. H., *Mathematical Models in Marketing*, Leiden, Leiden University Press 1974.
- [9] Martić L., *Primjena matematičkih metoda u ekonomskoj analizi*, Zagreb, Informator 1971.
- [10] Oliveira-Pinto F., Conolly B. W., *Applicable Mathematics of Non-Physical Phenomena*, Chichester, Ellis Horwood 1982.
- [11] Stojanović D., *Matematičke metode u ekonomiji preduzeća*, Beograd, Suvremena administracija 1972.
- [12] Webb G. F., *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, New York, Marcel Dekker 1985.

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE V ELEKTROTEHNIKI

GABRIJEL TOMŠIČ

Math. Subj. Class. (1985) 34 A 30, 35 F 05

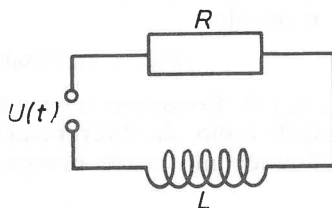
Sestavek opisuje uporabo nekaterih linearnih navadnih in parcialnih diferencialnih enačb v elektrotehniki.

LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ELECTRICAL ENGINEERING

In the article some applications of linear ordinary and partial differential equations in electrical engineering are described.

Diferencialne enačbe so uporabljene na raznih področjih fizike in tehnike. Prispevek naj vsaj v glavnih potezah nakaže uporabo diferencialnih enačb v elektrotehniki.

Začnimo z navadnimi diferencialnimi enačbami. Omejili se bomo na linearne diferencialne enačbe. Lahko bi rekli, da so električna vezja klasičen primer za uporabo teh vrst diferencialnih enačb. Ni ga učbenika, ki jih ne bi navajal (npr. [1], [2], [3], [4], [5]). Kot standarden primer iz teorije vezij navadno opišemo spreminjanje toka pri vključitvi vezja RL na enosmerno napetost (Sl. 1).



Sl. 1

R je upor, I tok, L induktivnost, $U(t)$ pa napetost. V stacionarnem stanju je po Ohmovem zakonu $I = U/R$, vendar ob vključitvi jakost toka ne skoči z vrednosti 0 na U/R , ampak zaradi induktivnosti počasi narašča do te vrednosti, saj inducirana napetost pojav ovira. Ta napetost je sorazmerna hitrosti spreminjanja toka, torej $-L dI/dt$. Že smo pri znanem Kirchhoffovem izreku in dobimo tole diferencialno enačbo

$$L dI/dt + R I = U \quad (1)$$

Če je $U(t) = \text{konst.} = U_0$, ima diferencialna enačba (1) rešitev

$$I(t) = (U_0/R) + ce^{-(R/L)t}$$

Vključimo tok v času $t = 0$, tako da je $I(0) = 0$. Tedaj določimo konstanto c :

$$I(t) = (U_0/R) (1 - e^{-(R/L)t})$$

Tok bi šele v času $t = \infty$ dosegel vrednost U_0/R . Ker $e^{-(R/L)t}$ hitro pada proti nič, tok praktično doseže to vrednost v času, ki je nekajkrat večji kot L/R . Izraz L/R imenujemo časovno konstanto. Naj bo napetost $U(t) = U_0 \sin \omega t$. Rešitev diferencialne enačbe (1) se sedaj glasi

$$\begin{aligned} I(t) &= ce^{-(R/L)t} + (U_0/(R^2 + \omega^2 L^2)) (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) = \\ &= ce^{-(R/L)t} + (U_0/(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}) \sin(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (2)$$

kjer je $\tan \delta = \omega L/R$. Odtod vidimo, da s časom eksponentni del postane praktično enak nič, to pomeni, da po dovolj dolgem času tok sinusno niha.

Za električni ali dinamični sistem pravimo, da je v stacionarnem stanju, če so spremenljivke, ki opisujejo tak sistem, periodične funkcije časa ali konstante. V nasprotnem primeru je sistem v prehodnem stanju. Tako imamo v prvem primeru stacionarno rešitev, v drugem pa taki rešitvi ustreza zadnji člen v izrazu (2).

Podobno, kot smo obravnavali vezje RL, bi lahko obravnavali vezja RC. Zanj se diferencialna enačba glasi

$$R \, dI/dt + (1/C) I = dU/dt$$

Poleg diferencialnih enačb prvega reda v uporabi naletimo na diferencialne enačbe višjih redov. Zapišimo diferencialno enačbo n -tega reda

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

ali v eksplisitni obliki

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Ker vemo, da splošna rešitev vsebuje n konstant, potrebujemo za določitev le-teh še n pogojev:

$$y(x_0) = k_1, y'(x_0) = k_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_n$$

$k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$. Govorimo o problemu začetnih vrednosti. Iz teorije diferencialnih enačb vemo, da diferencialno enačbo n -tega reda lahko prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

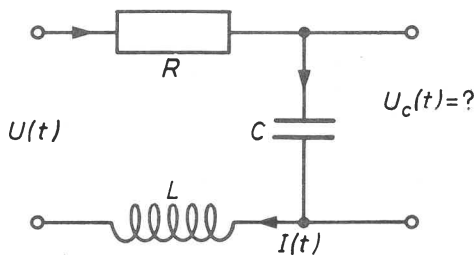
tu so $f_i: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ dane funkcije. Običajno sistem zapišemo kratko v vektorski obliki

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, (x)) \quad (3)$$

kjer je

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

Problem začetnih vrednosti za sistem prevedemo na nalogo poiskati rešitev sistema (3) pri pogoju $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.



Sl. 2

Navedimo nekaj primerov električnih vezij, pri katerih potrebujemo diferencialne enačbe višjega reda ali sistem diferencialnih enačb prvega reda. Pri številnih primerih imamo opravke kar z diferencialnimi enačbami drugega reda.

Vzemimo vezje (Sl. 2) z uporabo R , kapacitivnostjo C , induktivnostjo L , z napetostjo, odvisno od časa $U(t)$. Spet

z $I(t)$ zaznamujemo tok, z $U_R(t)$ in $U_L(t)$ pa napetosti na upor in tuljavi. Upoštevajmo Ohmov zakon $U_R(t) = I(t) R$ in razmere na kondenzatorju, kajti tok je sorazmeren s spremembo napetosti na kondenzatorju, torej $I(t) = C dU_C(t)/dt$. Na tuljavi je napetost sorazmerna s spremembo toka, torej $U_L(t) = L dI(t)/dt$ in po Kirchhoffovem izreku dobimo

$$U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) = U(t) \quad (4)$$

Iz prejšnjih zvez lahko izrazimo U_R in U_L z U_C ,

$$U_R(t) = R I(t) = R C dU_C/dt$$

in

$$U_L(t) = L dI(t)/dt = L d(C dU_C(t)/dt)/dt = L C d^2 U_C/dt^2$$

delimo še s C in iz enačbe (4) dobimo diferencialno enačbo 2. reda

$$L \ddot{U}_C(t) + R \dot{U}_C(t) + (1/C) U_C(t) = (1/C) U(t)$$

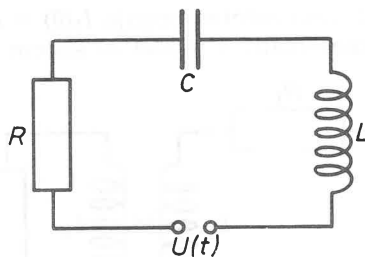
ki je matematični model za obravnavano električno vezje.

Še enkrat matematično opišemo vezje RLC (Sl. 3).

Da bi dobili ustrezno enačbo za to vezje, bi si lahko pomagali najprej z vezjem RC in ko bi upoštevali padec napetosti $L\dot{I}$ na tuljavi v vezju, bi dobili

$$L\dot{I} + RI + (1/C) \int I dt = U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Odvajamo dobljeno integro-diferencialno enačbo na t in že imamo diferencialno enačbo za vezje RLC



Sl. 3

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + (1/C) I = U_0 \omega \cos \omega t \quad (5)$$

Pot do partikularne rešitve le kratko nakažimo. Postavimo v (5)

$$I_p(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

kjer je

$$\alpha = -U_0 S/(R^2 + S^2) \text{ in } \beta = U_0 R/(R^2 + S^2)$$

Reaktanca S je podana z izrazom $S = \omega L - 1/(\omega C)$. Rešitev $I_p(t)$ lahko zapišemo po nekaj računanja v obliki

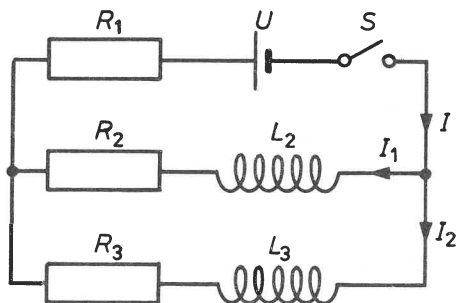
$$I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (6)$$

tu je $I_0 = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = U_0(R^2 + S^2)^{1/2}$ in $\tan \delta = -\alpha/\beta = S/R$. Količina $(R^2 + S^2)^{1/2}$ se imenuje impedanca.

Ko rešujemo homogeni del enačbe, dobimo karakteristično enačbo

$$r^2 + (R/L)r + 1/(LC) = 0$$

in korena $r_1 = -a + b$, $r_2 = -a - b$, kjer je $a = R/(2L)$, $b = (1/2L)(R^2 - 4L/C)^{1/2}$. Ker je v praktičnih primerih $R > 0$, splošna rešitev homogenega dela $I_h(t)$ postaja z naraščajočim t vse manjša, torej se prehodni tok $I = I_h + I_p$ približuje stacionarnemu toku I_p in po dovolj dolgem času imamo spet sinusni tok (6) s frekvenco, ki je enaka začetni frekvenci.



Sl. 4

Za primer uporabe sistema diferencialnih enačb preprost zgled, in sicer dvozančno vezje (Sl. 4). Podobno obravnavamo tudi večznančna vezja.

Določiti želimo tokove $I(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, ko smo sklenili krog pri stikalu S. Spet po Kirchhoffovem izreku imamo

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t)$$

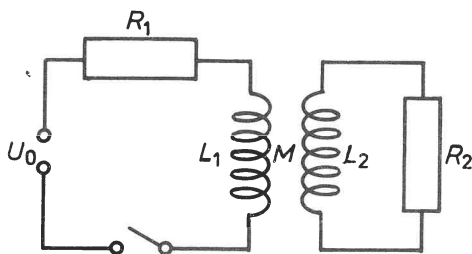
in

$$\begin{aligned} L_2 \dot{I}_1 + R_2 I_1 - L_3 \dot{I}_2 - R_3 I_2 &= 0 \\ L_2 \dot{I}_1 + R_2 I_1 + I_1 R_1 - U &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo sistem diferencialnih enačb za I_1 in I_2

$$\begin{aligned} L_2 \dot{I}_1 + R_2 I_1 - L_3 \dot{I}_2 - R_3 I_2 &= 0 \\ L_2 \dot{I}_1 + R_2 I_1 + I_1 R_1 + I_2 R_1 - U &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Postavimo začetna pogoja $I_1(0) = I_2(0) = 0$ in imamo za dvozančno vezje ustrezen matematični model — sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.



Sl. 5

Pogosto se pojavljajo vezja, ki so kako sklopljena. Poglejmo vezji, ki sta sklopljeni z medsebojno induktivnostjo M (Sl. 5).

V času $t = 0$ bouda tokova I_1 in I_2 enaka 0. Po Kirchhoffovem izreku se diferencialni enačbi za tokova glasita

$$\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 + R_1 I_1 &= M \dot{I}_2 + U_0 u_0(t) \\ L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 &= M \dot{I}_1 \end{aligned}$$

Tu je $u_0(t)$ enotna stopničasta funkcija, $u_0(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Spet imamo sistem diferencialnih enačb. Običajno se takega sistema lotimo z uporabo Laplaceove transformacije. Ko upoštevamo začetne pogoje, dobimo sistem dveh algebraičnih enačb za Laplaceovi transformiranki $\mathcal{L}(I_1)$ in $\mathcal{L}(I_2)$:

$$\begin{aligned} L_1 s \mathcal{L}(I_1) + R_1 \mathcal{L}(I_1) &= M s \mathcal{L}(I_2) + U_0/s \\ L_2 s \mathcal{L}(I_2) + R_2 \mathcal{L}(I_2) &= M s \mathcal{L}(I_1) \end{aligned}$$

Privzamemo, da je $D = L_1 L_2 - M^2 > 0$; to se v uporabi zaradi energijskih pogojev vedno dogaja. Iz rešitve sistema z inverzno Laplaceovo transformacijo dobimo

$$\begin{aligned} I_1(t) &= U_0 [e^{-\alpha t} ((-1/R_1) \cos \omega^* t + ((L_2/D - \alpha/R_1)/\omega^*) \sin \omega^* t + 1/R_1], \quad \omega^{*2} > 0 \\ I_2(t) &= (K/\omega^*) e^{-\alpha t} \sin \omega^* t, \quad \omega^{*2} > 0 \end{aligned}$$

Tu smo zaznamovali

$$K = (U_0 M)/D, \quad \alpha = (R_1 L_2 + R_2 L_1)/D, \quad \omega^{*2} = (R_1 R_2)/D - \alpha^2$$

Reševanje diferencialnih enačb, na katere naletimo pri obravnavanju vezij, seveda ne gre vedno po analitični poti in je treba dostikrat uporabiti numerične metode.

Kakor hitro nastopajo funkcije, ki so odvisne od dveh ali več spremenljivk, že imamo opravka s parcialnimi diferencialnimi enačbami. Pri reševanju problemov v elektrotehniki pogostokrat naletimo na parcialne diferencialne enačbe. Oglejmo si nekaj tipičnih primerov. Spremenljivke so običajno čas in ena ali več koordinat v prostoru. Vemo, da so v fizikalni uporabi najvažnejše linearne parcialne diferencialne enačbe drugega reda kot: enačba valovanja $u_{tt} = c^2 \Delta u$, difuzijska enačba $u_t = a^2 \Delta u$, Laplaceova enačba $\Delta u = 0$ in seveda še druge. Vse te enačbe so klasičen primer uporabe v elektrotehniki; o valovni enačbi ni treba izgublјati besed; difuzijska enačba se pojavi, ko opisujemo razmere v polprevodnikih; da so rešitve Laplaceove enačbe potencialne funkcije, je pa tudi znano. Vloge potenciala na primer v teoriji elektromagnetnih polj spet ni potrebno posebej poudarjati.

Problemi, ki jih opišemo s parcialnimi diferencialnimi enačbami, so običajno take narave, da poznavanje splošne rešitve ne pomaga kaj prida. Poiskati je pač treba tako rešitev, ki ustreza začetnim in robnim pogojem. Parcialne diferencialne enačbe, na katere naletimo v elektrotehniki, so večinoma prej omenjenih standardnih tipov. Robni problemi pa so glede na postavljene podatke oziroma rezultate, ki jih pričakujemo, precej različni. To seveda vpliva na izbiro metode, s katero parcialno diferencialno enačbo rešujemo.

Enačbo valovanja, ki je osnovnega pomena v elektrotehniki, običajno rešujemo z d'Alembertovo metodo ali metodo separacije spremenljivk (Fourierovo metodo); seveda je način reševanja odvisen od konkretnega problema, se pravi od začetnih in robnih pogojev.

Ena najpomembnejših parcialnih diferencialnih enačb v elektrotehniki je Laplaceova enačba. Zapisana v kartezičnih koordinatah se glasi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Z indeksi zaznamujemo parcialne odvode. Teorija rešitev Laplaceove enačbe se imenuje potencialna teorija in rešitve, ki imajo zvezen drugi parcialni odvod, so harmonične funkcije, ki jih veliko uporabljajo. V elektrostatiki velja za električno silo Coulombov zakon, ta pa je po obliki enak Newtonovemu gravitacijskemu zakonu. To pomeni, da se da polje porazdelitve električnih nabojev matematično opisati s potencialno funkcijo, ki reši Laplaceovo enačbo. Navedimo le en klasičen primer uporabe Laplaceove enačbe: denimo, da na sferi S z radijem R podamo električni potencial

$$u(R, \Phi, \Theta) = f(\Phi)$$

kjer so r, Φ, Θ krogelne koordinate in f znana funkcija. Treba je določiti potencial v vseh točkah prostora, če privzamemo, da ni drugih nabojev. Ločili bomo notranji problem, to je določitev potenciala v notranjosti sfere ob danem robnem pogoju, od zunanjega problema, to je določitev potenciala zunaj sfere, ko seveda poleg robnega pogoja zahtevamo še, da bodi potencial v neskončnosti nič, torej

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \Phi) = 0$$

Ker smo predpostavili, da je potencial na sferi neodvisen od kota θ , je neodvisen od kota θ tudi potencial v prostoru. Zato se Laplaceova enačba, zapisana v polarnih koordinatah, glasi

$$(r^2 u_r)_r + (1/\sin \Phi) (\sin \Phi u_\Phi)_\Phi = 0$$

Rešitev tega problema z metodo separacije spremenljivk se za točke v notranjosti sfere glasi v obliki neskončne vrste

$$u(r, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \Phi)$$

kjer so P_n Legendrovi polinomi. Koeficienti a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ se dobe iz pogoja

$$u(R, \Phi) = f(\Phi)$$

in se glase

$$a_n = ((2n + 1)/2R^n) \int_0^\pi f(\Phi) P_n(\cos \Phi) \sin \Phi d\Phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

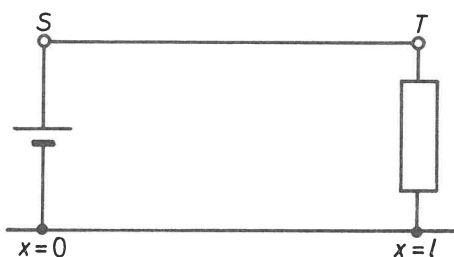
Rešitev zunaj sfere se glasi

$$u(r, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n/r^{n+1}) P_n(\cos \Phi)$$

in koeficienti b_n pa

$$b_n = ((2n + 1)/2) R^{n+1} \int_0^\pi f(\Phi) P_n(\cos \Phi) \sin \Phi d\Phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pomemben primer uporabe parcialnih diferencialnih enačb v elektrotehniki je določanje porazdelitve toka in napetosti na prenosni liniji. Vzemimo daljši vodnik (npr. telefonsko žico), ki seveda ni perfektno izoliran, tako da nastanejo po vodniku izgube (Sl. 6). Napetost (potencial) in tok sta funkciji časa in dolžinske koordinate x ; $I = I(x, t)$, $U = U(x, t)$, R upor na enoto dolžine, L induktivnost, C kapaciteta in G naj predstavlja prevodnost med vodnikom in zemljo, torej izgube.



Sl. 6

Tok seveda ni konstanten, nekaj ga uhaja, nekaj se ga porabi za polnjenje kapacitete. Tudi napetost ima padce. Potencial v točki T je enak potencialu v točki S, zmanjšan za padeč na razdalji ST, torej

$$U(x + \Delta x, t) - U(x, t) = -(R \Delta x) I - (L \Delta x) I_t$$

po deljenju z Δx in ko gre $\Delta x \rightarrow 0$, dobimo

$$U_x = -R I - L I_t \quad (8)$$

Podobno napravimo za tok in dobimo enačbo

$$I_x = -G U - C U_t \quad (9)$$

Po odvajanju enačbe (8) po x in enačbe (9) po t dobimo

$$\begin{aligned} U_{xx} &= -R I_x - L I_{xt} \\ I_{xt} &= -G U_t - C U_{tt} \end{aligned}$$

Eliminiramo člen I_{xt} in izrazimo I_x iz enačbe (9)

$$U_{xx} = LC U_{tt} + (RC + GL) U_t + RGI \quad (10)$$

Če bi izrazili vse s tokom, bi dobili

$$I_{xx} = LC I_{tt} + (RC + GL) I_t + RGI \quad (11)$$

To sta tako imenovani telegrafski enačbi. Zaradi zadnjih dveh členov je potujoče valovanje dušeno. Poleg problema izgub se pojavijo še popačitve. Če o tem tukaj ne govorimo (problem pupinizacije), ostane le slabitev signala. Rešitev teh enačb se da dobiti na primer z metodo separacije spremenljivk.

Dva posebna primera telegrafskih enačb je vredno omeniti: (a) če sta izguba in induktivnost zanemarljivo majhni, torej $G = L = 0$, se enačbi (10) in (11) glasita

$$U_{xx} = RC U_t \text{ in } I_{xx} = RC I_t$$

Enačbi imata obliko difuzijske enačbe, ki jo srečamo tudi pri prevajanju toplote. Prav pri podmorskih kablilih so izgube zanemarljive in tudi frekvence so nizke, tako da včasih govorimo o enačbah za podmorski kabel.

(b) Pri linijah brez izgub: $G = 0$, $R = 0$ preideta enačbi (10) in (11) v

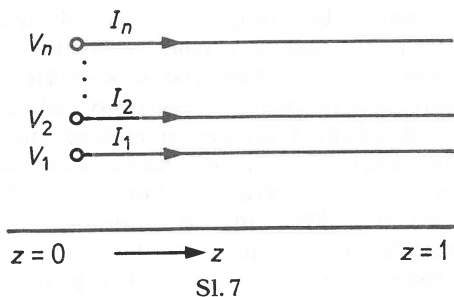
$$U_{xx} = LC U_{tt} \text{ in } I_{xx} = LC I_{tt}$$

To sta po matematični obliki enodimenzijski valovni enačbi in reševanje takih enačb dobro poznamo.

Z naslednjima zgledoma ([6], [7]) le še potrdimo, da brez diferencialnih enačb v elektrotehniki ne gre pri problemih, ki se pojavljajo vsak dan.

Električno energijo moramo običajno prenašati na večje razdalje. Način prenosa je voden razširjanje električne energije in model za to je ena ali več prenosnih linij. Podobni so pojavi pri prenašanju sporočil. Pri prenosih energije so zelo kritični prehodni pojavi pri vklopih večjih porabnikov, central ali ob udaru strele. Pri prenosih sporočil je v zadnjem času najpomembnejši prenos z impulzi. Posebno zanimivo je prenašanje signalov med pod sistemi večjih digitalnih sistemov, na primer računalnikov. V vseh teh primerih lahko matematično opišemo prenos signalov s sistemom hiperboličnih parcialnih diferencialnih enačb. Povejmo še to, da glede na precejšnjo različnost robnih pogojev pride v poštev le numerično reševanje dobljenih enačb.

Vzemimo sistem n sklopljenih linij (Sl. 7).



Osnovni problem v teoriji prenosnih linij je določitev napetosti in tokov na linijah. Napetosti in tokovi so podani s sistemom enačb

$$\begin{aligned} -I_z &= C V_t + G V \\ -V_z &= L I_t + R I \end{aligned} \quad (12)$$

Tu je

$$I = I(z, t) = [I_1(z, t), \dots, I_n(z, t)]^T$$

vektor tokov in

$$V = V(z, t) = [V_1(z, t), \dots, V_n(z, t)]^T$$

vektor napetosti vzdolž linij. C, G, L, R so matrike parametrov linij. Elementi teh matrik so lahko odvisni od z, t , V, I , pri čemer sta matriki C in L simetrični in pozitivno definitni. V vseh teh primerih je sistem (12) hiperbolični sistem kvazilinearnih parcialnih diferencialnih enačb. Tak sistem lahko rešujemo z metodo karakteristik.

Izkaže se, da so najpomembnejši primeri, pri katerih so matrike C, G, L, R konstantne. Praktično so zelo pomembni tudi primeri, pri katerih so C, G, L, R funkcije frekvence, vendar se v takih primerih potek tokov in napetosti ne da opisati s sistemom (12). Pri obravnavanju opisanega sistema ločimo dva primera:

(a) kadar sta matriki G in R enaki 0, matriki L in C pa konstantni in pozitivno definitni, govorimo o sistemu brezizgubnih linij;

(b) ko sta matriki G in R različni od nič, govorimo o sistemu linij z izgubami.

Da bomo sistem (12) sploh rešili, morajo biti predpisani še robni in začetni pogoji na področju $t > 0, 0 < z < 1$. Začetne pogoje podamo z

$$V(z, 0) = f(z), I(z, 0) = g(z)$$

Vektorski funkciji $f(z)$ in $g(z)$ sta dani. Robni pogoji so dani z vezji na obeh straneh linijskega sistema. Vzeli bomo, da so vezja linearna in so robni pogoji dani z

$$L_1 \{V(0, t), I(0, t)\} = f_1(t)$$

$$L_2 \{V(1, t), I(1, t)\} = f_2(t)$$

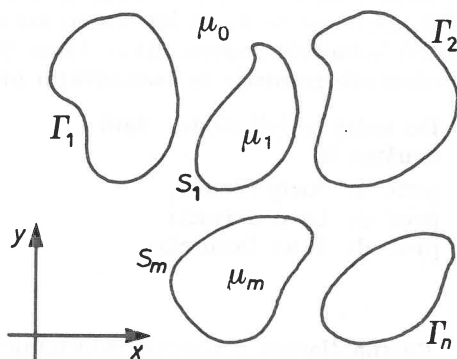
tu sta L_1 in L_2 dva navadna linearna diferencialna operatorja, $f_1(t)$ in $f_2(t)$ sta dani časovni funkciji

Linije brez izgub so dober približek za linije z majhnimi izgubami in takšne naj bi bile linije v dobro oblikovanih sistemih. V takih primerih lahko sistem (12) rešimo v celoti analitično. Kot naravna metoda za reševanje se izkaže metoda karakteristik. Karakteristike so običajno premice. Rešitve so sestavljene iz valov, ki potujejo vzdolž linij in jih te ne popačijo. Robni pogoji so določeni z linearnim električnim vezjem, ki ga opisuje navaden linearni diferencialni operator. Kadar omenjeni problem rešujemo numerično, ta operator aproksimiramo s končnimi diferencami. Povejmo, da za reševanje problemov električnih vezij dandanes obstaja vrsta programskih paketov, ki avtomatično formirajo in rešijo enačbe takih vezij, zato je smiselno, če rešitve linijskih enačb vgradimo v tak paket.

Pri izgubnih linijah se dajo analitično določiti le karakteristike. Notranje vrednosti spremenljivk je treba določiti numerično, torej moramo enačbe integrirati vzdolž karakteristik in pri tem uporabimo aproksimacije.

S takim sistemom parcialnih diferencialnih enačb študiramo dogajanja na električnih linijah sklopnikov, uporabljamo jih za študij tirnih tokokrogov, za določanje prehodnih pojavov na energetskih vodih in podobno.

Naslednji primer je iz magnetostatike. V prostoru naj bo n cilindričnih kovinskih teles, med njimi pa homogena cilindrična telesa iz magnetnih materialov z različnimi permeabilnostmi (Sl. 8).



Sl. 8

Imamo torej n vodnikov, ki jih omejujejo krivulje Γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Prostor med vodniki naj bo zapolnjen z magnetnimi materiali, ki imajo različne permeabilnosti μ_i , in meje teh materialov zaznamujemo s S_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Vprašamo se po porazdelitvi tokov na površinah teh vodnikov. Taka vprašanja se pojavljajo pri mikrovalovnih integriranih vezjih. Te vrste problemi se matematično prevedejo na reševanje Laplaceove parcialne diferencialne enačbe. Za reševanje take enačbe obstaja precej dobrih metod, na primer metoda končnih elementov ali končnih diferenc, vendar jih je treba reševati v neomejenih področjih, rešitve oziroma odvode rešitev pa potrebujemo le na robovih področja. Za take primere je obetavna prevedba Laplaceove enačbe na Fredholmove integralske enačbe, oziroma na sistem takih enačb. Integralske enačbe, do katerih pridemo, imajo to lepo lastnost, da rešitve lahko preprosto povežemo z iskanimi rezultati. Reševanja integralnih enačb se je povečini treba lotiti numerično. Res pa je, da je numerično reševanje Fredholmovih integralnih enačb druge vrste stabilno, kar je tudi ena od prednosti reševanja postavljenega problema z integralnimi enačbami. Znana je povezava med problemi začetnih vrednosti in Volterrovo integralno enačbo druge vrste ter robni problemi in Fredholmovo integralno enačbo druge vrste, s tem pa prehajamo že na področje integralnih enačb. Očitno je, da se tudi te v elektrotehniki precej uporabljajo.

LITERATURA

- [1] Braun M., *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag 1975.
- [2] Burg K., Haf H., Wille F., *Höhere Mathematik für Ingenieure*, B. G. Teubner, Stuttgart 1985.
- [3] Kreyszig E., *Advanced Engineering Mathematics*, J. Wiley 1972.
- [4] Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana 1974.
- [5] Riley K. F., *Mathematical Methods for the Physical Sciences*, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [6] Slivnik T., Tomšič G., *Numerical solution of hyperbolic PDE of coupled transmission lines*, Conf. on Appl. Math., Lj. 1986, 139—145.
- [7] Slivnik T., Tomšič G., *Computation of current distribution on conductors*, Proceed. AMSE Conf., Karlsruhe 1987, vol. 2 B, 11—19.

PODELJEVANJE NAZIVOV ČASTNIH ČLANOV DMFA SRS

Leta 1983 je upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS imenoval za deset let stalno komisijo za častne člane društva v sestavi: Anton Suhadolc (matematika), Janez Strnad (fizika) in Ciril Velkovrh (tajnik). Predsednik komisije je vsakokratni predsednik upravnega odbora društva.

Do tedaj so bili častni člani društva le:

1. prof. dr. Josip Plemelj
2. prof. dr. Lavo Čermelj
3. prof. dr. Fran Dominko

V naslednjih letih so postali še:

4. prof. dr. Alojzij Vadnal
5. prof. Jože Povšič
6. prof. dr. Anton Peterlin
7. prof. Ivan Štalec
8. prof. dr. Ivan Kuščer
9. prof. dr. Anton Moljk

Častna članica v koprski podružnici pa je prof. Bogomila Kolenko.

Komisija za častne člane deluje po pravilniku, ki ga je odobril upravni odbor društva.

Pravilnik za častne člane društva

- Komisija za častne člane se mora sestati vsaj enkrat letno na pobudo kateregakoli njenega člana. Obravnavati mora tudi predloge UO DMFA SRS oz. evidentirane kandidate s prejšnjih sej. Strokovno utemeljitev praviloma napiše zunanji sodelavec.
- Pri izbiri kandidatov je najpomembnejše naslednje: Kandidat mora biti matematik, fizik ali astronom in po pravilih upokojeni član društva. Njegovo delovanje v znanosti, pri poučevanju, objavljanju samostojnih del in člankov v revijah, sodelovanju pri društvenih akcijah in popularizaciji matematike, fizike in astronomije mora biti pomembno za ves slovenski prostor.
- Komisija predlaga imena kandidatov z utemeljitvami UO DMFA SRS vsaj mesec dni pred občnim zborom. Do končnega sprejetja ali ob odklonilnem stališču so predlogi tajni. Predlogi in imenovanja morajo biti na vseh sejah sprejeti soglasno.
- Častni član se sme udeleževati in aktivno sodelovati na vseh društvenih prireditvah in dobiva brezplačno društveni glasili: Obzornik za matematiko in fiziko ter Presek.
- Častne člane podružnice imenuje UO DMFA SRS v podružnici po soglasnem sklepu vseh članov UO podružnice. Kriteriji so podobni kot v republiki. Častni člani podružnice ne morejo postati častni člani republiškega društva.
- Diplome častnih članov društva so zlate, častnih članov podružnice pa srebrne z besedilom: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS (Podružnica ...) N. N. — naziv, je bil na (zap. št.) občnem zboru na (v) ..., dne ... imenovan za častnega člana Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (Podružnice ...) zaradi svojih zaslug za razvoj matematike, fizike in astronomije na Slovenskem (V podružnici ...). Diplomo podpiše predsednik društva (Podružnice ...).

Tajnik: *Ciril Velkovrh*

Predsednik: *Mitja Rosina*

TRIČETRT STOLETJA RENTGENSKIH INTERFERENC

JANEZ STRNAD

PACS a6110-l
a0165+d

Rentgenske interference so odkrili Walter Friedrich, Paul Knipping in Max Laue leta 1912. Tričetrto stoletja pozneje je poučno razčleniti ozadje odkritja. Ali so okoliščine tega odkritja značilne za odkritja v fiziki nasploh? Vsekakor se je odkritje razraslo v obsežno raziskovalno in merilno vejo, ki je odločilno prispevala k poznavanju trdnin.

THREE-QUARTERS OF A CENTURY OF X-RAY INTERFERENCES

X-ray interferences were discovered by Walter Friedrich, Paul Knipping, and Max Laue in 1912. Three-quarters of a century later it is instructive to analyse the background of the discovery. Are the circumstances of this discovery characteristic for discoveries in physics in general? In any case, the discovery grew into a branch of research and measurement which has decisively contributed to the knowledge of the solid state.

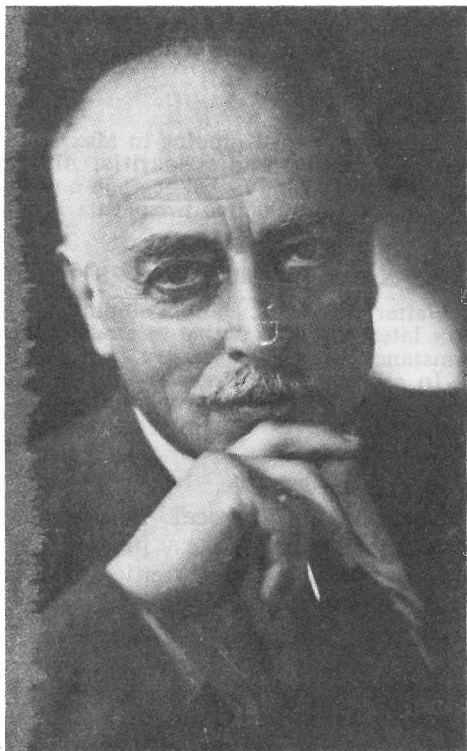
Uvod

Na koncu prejšnjega stoletja so o trdninah vedeli precej. Razmeroma natančno so izmerili veliko njihovih lastnosti in zbrali podatke v priročnikih. Nekateri fiziki so celo predvidevali, da bo vse natančnejše merjenje snovnih lastnosti ena najpomembnejših nalog fizike v prihodnosti. Tudi pri načinu obdelovanja so dosegli nekaj uspehov. Toda »nihče si ni jasno predstavljal, kaj povzroča te lastnosti«.

Leta 1895 je Wilhelm Conrad Röntgen odkril žarke X. Kdo bi si tedaj mislil da bodo postali ti eno glavnih orodij za raziskovanje kristalov? Kmalu po odkritju so jih na veliko začeli uporabljati za presvetljevanje teles, na primer v medicini, ne da bi poznali njihovo pravo naravo. Röntgen, ki se je sicer izogibal domnev, je predlagal misel, da gre za longitudinalno elektromagnetno valovanje. Na začetku novega stoletja je Röntgen prešel v München kot vodja eksperimentalnega inštituta. Njegov asistent je bil Paul Knipping. Teorijski inštitut je tam tedaj uspešno vodil Arnold Sommerfeld. Njegov asistent Walter Friedrich je dobil za nalogo preverjanje domnev o Röntgenovih žarkih. Leta 1909 je prišel v München Max Laue, katerega ime je neločljivo povezano z rentgenskimi interferencami.

Lauejeva življenjska pot

Max Laue (Sl. 1) je bil rojen leta 1879 blizu Koblenza. Njegovega očeta so kot višjega vojnega uradnika precej premeščali, tako da je Laue obiskoval osnovno šolo v Magdeburgu in srednjo šolo v Poznanju, Berlinu in Strassburgu. Na univerzi v Strassburgu je začel študirati matematiko, fiziko in kemijo in nadaljeval študij na univerzah v Göttingenu, Münchnu in Berlinu. Po doktoratu leta 1903 je delal dve leti na univerzi v Göttingenu, nato je postal asistent Maxa Plancka v Berlinu. Pozneje ga je iz Münchna pot zanesla v Zürich, Frankfurt, Würzburg in Berlin. Ob ustanovitvi inštituta v Berlinu-Dahlemu leta 1917 je postal ob Albertu Einsteinu drugi direktor in je skrbel za administrativne zadeve. Med drugo svetovno vojno se je skupaj z inštitutom preselil na deželo, tam je napisal *Zgodovino fizike*, da bi pozabil na vojne težave. Po vojni je bil skupaj z drugimi devetimi nemškimi znanstveniki



Sl. 1. Max von Laue
(9. 10. 1879 do 24. 4. 1960)

konfiniran v Angliji. Leta 1946 je postal direktor Inštituta Max Planck v Göttingenu in leta 1951 direktor Inštituta Fritz Haber za fizikalno kemijo v Berlinu-Dahlemu. Leta 1958 je šel v pokoj, leta 1960 pa je umrl po avtomobilski nesreči [1] — [4].

Sodobniki so ga cenili zaradi trdnega značaja in preiščljenih odločitev. Pod Hitlerjem je kljub nevarnosti zagovarjal znanstvene poglede, ki so jih nacisti preganjali, na primer teorijo relativnosti. Edini je izrazil obžalovanje, ko so drugi odobraval Einsteinov izstop iz berlinske akademije znanosti.

Max von Laue (besedica von opozarja na dedni plemiški naslov, ki ga je dobil Lauejev oče leta 1913) si je pridobil v fiziki ugled z delom v posebni teoriji relativnosti. Napisal je knjigi o posebni (1911) in splošni (1921) teoriji relativnosti. Pomemben je tudi njegov prispevek k razlagi superprevodnosti. Leta 1932 je pojasnil, zakaj je mejna gostota magnetnega polja, ki povzroči prehod iz superprevodnega v navadno stanje, odvisna od oblike telesa. Najbolj pa je Laue brez dvoma znan po odkritju rentgenskih interferenc.

Narava Röntgenovih žarkov

Že Röntgen je poskušal opazovati interferenco, ki bi pritrdila, da so njegovi žarki valovanje. Veliko fizikov se je nagibalo k temu mnenju in se sklicevalo na Maxwellovo elektrodinamiko. Valovna dolžina tega valovanja bi morala biti vsekakor manjša od valovne dolžine vidne svetlobe. Wilhelm Wien je zanjo napovedal od 10^{-12} do 10^{-11} m. Več fizikov, med njimi B. Walter in R. W. Pohl, je poskusilo ugotoviti uklon in interferenco pri prehodu žarkov skozi ozko trikotno režo. Razširitev slike so imeli za potrditev valovne narave in celo ocenili valovno dolžino na $4 \cdot 10^{-11}$ m. Temu sklepu se je pridružil tudi A. Sommerfeld. Valovno naravo Röntgenovih žarkov so podpirali še poskusi C. G. Barkle z dvojnimi sipanjem, ki so pokazali, da je žarke mogoče polarizirati. Toda niti ti niso prepričali vseh fizikov. W. H. Bragg in nekateri drugi so še leta 1912 zagovarjali mnenje, da gre za curke delcev. To so utemeljevali z nekaterimi pojavi, ki jih z valovanjem niso mogli zlahka pojasniti, na primer s tem, da izbijajo iz snovi elektrone.

Pot do odkritja

M. Laue se je že od gimnazijskih let zanimal za optiko. Med študijem so mu predavanja Woldemarja Voigta, Maxa Plancka in Otta Lummerja posredovala tedanje znanje. Pozneje je objavil samostojne članke o širjenju valovanja v snovi z disperzijo in o termodinamiki interferenčnih pojavov. V doktorskem delu je obravnaval ohranitev energije pri interferenci na plan-paralelni plošči. Zato mu je A. Sommerfeld poveril pisanje poglavja *Valovna optika* v *Enciklopediji matematičnih znanosti*. Poglavje naj bi zajelo tudi teorijo interferenc na ravninskih mrežah. Po lastni izjavi naj bi že tedaj pomislil na razširitev na prostorske mreže, a misel opustil, ker te »navsezadnje nimajo nobene prave vloge v optiki«.

Kristalografiji so že precej časa pojasnjevali pravilno obliko kristalov z urejenim razporedom atomov in matematiki so razvili teorijo prostorskih mrež. Toda s fizikalne strani misli še ni uspelo neposredno podpreti. Laue jo je sprejel že prej, »ker ni poznal nobenega načelnega nasprotnega razloga, eksperimentalna dognanja pa so jo vsaj posredno podpirala«. Po prihodu v München se je M. Laue začel zanimati tudi za Röntgenove žarke zaradi pozornosti, ki so jim jo tu posvečali domala vsi fiziki.

Odločilne dogodke je, kot kaže, sprožil neki obisk na koncu leta 1911 ali na začetku leta 1912. Kaki dve leti prej je Paul Peter Ewald prosil A. Sommerfelda za naslov doktorskega dela. Dobil je spisek več nalog, od katerih mu je mentor nalogo »Poiščite optične lastnosti anizotropne razporeditve izotropnih resonatorjev« odsvetoval, češ da sam ne ve, kako bi se je kazalo lotiti. Ewald si je izbral prav to. Raziskal je, kako valovanje zaradi sipanja na resonatorjih potuje z drugačno hitrostjo kot v praznem prostoru. Pri tem sta se pojavili dve različni hitrosti, torej dva lomna kvocienta, ki sta značilna za dvojni lom v anizotropnih kristalih. Za razlago dvojnega loma ni bilo treba vpeljati anizotropnega sipanja na resonatorjih! Poleg tega se je pokazalo, da lomni kvocient takega modela neomejenega kristala določajo lastna nihanja gradnikov. Tedaj ni bilo v navadi, da bi računali z neomejeno prostorsko mrežo resonatorjev. Zato je bil Ewald nekoliko negotov in si je želel Laujeve podpore.

Laue ga je povabil k sebi na večerjo. Pred tem sta se srečala v parku in se po njem sprehodila. Ewald je hitel pojasnjevati, kako je razporedil resonatorje v prostorsko mrežo. Toda pokazalo se je, da Laueju ni jasno, kaj je prostorska mreža, ali da mu pojem vsaj ni domač. Zanimal pa ga je razmik med resonatorji. Ewald mu je omenil desettisočino do tisočino valovne dolžine vidne svetlobe in pripomnil, da je za njegovo nalogo to nepomembno. Med preostankom večera Laue ni kazal zanimanja za bistvo, ki je vznemirjalo Ewalda. Vsaj še enkrat pa je povprašal po razmiku med resonatorji, ne da bi omenil Röntgenove žarke, in nekako mimogrede dodal: »Kaj bi se primerilo v kristalu z zelo kratkimi valovi?« Ewald ni imel odgovora, a je rekel: »Enačbe veljajo strogo za vse valovne dolžine. Rad vam jih prepustim, sam pa moram najprej končati in oddati disertacijo in zdaj ne morem zapravljati časa za vaše vprašanje.« [1] Razočaran se je poslovil. Šele poleti, potem ko je zvedel za uspeh Laueja in sodelavcev, je premislil o rezultatu za majhne valovne dolžine. Njegove enačbe so za ta primer napovedovale interference.

Laue je poročal o srečanju takole: »Tedaj mu nisem znal pomagati. Toda med pogovorom se mi je nenadoma porodilo očitno vprašanje o valovanju,

ki ima majhno velovno dolžino v primeri z mrežnimi razdaljami prostorske mreže. In pri tem mi je moja optična intuicija nemudoma odgovorila: sledijo mrežni spektri... O tem je v kratkem slišal W. Friedrich. Takoj je bil pripravljen narediti odločilni poskus. Toda priznani mojstri naše znanosti, ki sem jim imel priliko posredovati zamisel, so imeli določene dvome. Bilo je potrebno nekaj diplomacije, preden sta Friedrich in Knipping končno smela narediti poskus po mojem načrtu z zelo preprostimi napravami.« [4]

Odkritje

Zdi se, da je na počitniškem smučanju v Alpah M. Laue prerešetal svojo zamisel z A. Sommerfeldom in W. Wienom. Ne samo ta dva, ampak tudi mlajši fiziki so menili, da ne bo mogoče opazovati interferenc zaradi temperaturnega nihanja gradnikov v kristalih. Po poskusih z infrardečo svetlobo na kameni soli so cenili pri sobni temperaturi amplitudo klorovih ionov na 0,75 nm, medtem ko so navajali za valovno dolžino rentgenske svetlobe od 0,04 do 0,06 nm. Menda je A. Sommerfeld spočetka W. Friedrichu celo prepovedal, da bi sodeloval pri poskusu. Razprave o poskusu so se nadaljevale v kavarni Lutz, kamor so zahajali fiziki in kjer so imeli svojo mizo. Nazadnje je le prevladalo mnenje, da pove »poskus več kot katera koli teorija in ga je zato treba narediti«.

Röntgenov asistent P. Knipping je medtem končal svoje doktorsko delo in je bil pripravljen priskočiti na pomoč. Friedrich in Knipping sta začela delati poskuse s kristalom modre galice, da bi atomi bakra z velikim vrstnim številom dovolj sipali vpadne žarke. Prvi poskusi niso bili uspešni, ker sta menda po Lauejevem navodilu položila fotografsko ploščo ob kristal vzporedno s curkom. Da bi videla na fotografiji vsaj sled prepuščenega curka, sta prestavila ploščo za kristal. Tedaj sta na plošči ugotovila dokaj zabrisane interferenčne pege. Laue je drugi dan od Friedricha zvedel, da je poskus uspel. Na poti domov se mu je posvetilo, da mora enačbama, ki veljata za interferenco na prekržanih optičnih mrežicah, pri interferenci na prostorski mreži v kristalu dodati še tretjo enačbo. V svojih spominih je navedel celo hišo, pred katero se mu je to primerilo. Tako so bile rojene *Lauejeve enačbe*. Da bi si zagotovili prvenstvo, so W. Friedrich, P. Knipping in M. Laue akademiji znanosti poslali kratko poročilo o začetnih poskusih v aprilu 1912.

V nadaljevanju dela, za katero sta imela zdaj na voljo precej več naprav in podpore, sta Friedrich in Knipping najprej ponovila poskuse s kristalom modre galice. Postavila sta ga v različne lege in se prepričala, da se interferenčne pege ne pojavijo, če sta kristal zdrobila v prah. Pozneje sta naredila vrsto merjenj s kubičnim kristalom cinkove svetlice, na katerega je padal curek žarkov v smeri štirištevne osi. Opravljeno delo je podpiralo dve temeljni domnevi: gradniki kristalov so razporejeni v prostorsko mrežo in Röntgenovi žarki pri prehodu skozi kristal dajo interferenčne slike. S tem so neposredno podprli misel o valovni naravi Röntgenovih žarkov in odtlej smemo govoriti o rentgenski svetlobi. Da pa so v fiziki ugotovitve začasne, so pokazali poskusi A. H. Comptona desetletje pozneje. Njihove izide je bilo mogoče najpreprosteje pojasniti s prožnimi triki elektronov in fotonov, torej nekakšnih delcev, ki so jim tedaj pravili še svetlobni kvanti.

Julija 1912 so *Poročila s sej matematično-fizikalnega razreda bavarske kraljeve akademije znanosti v Münchnu* prinesla daljši članek z naslovom *Inter-*

ferenčni pojavi pri rentgenskih žarkih, ki so ga podpisali W. Friedrich, P. Knipping in M. Laue. Sestavljala sta ga dva dela: Lauejev *Teorijski del* in *Eksperimentalni del* W. Friedricha in P. Knippinga. Sledil je Lauejev nekoliko pozneje napisani prispevek z naslovom *Kvantitativni preskus teorije za interferenčne pojave pri rentgenskih žarkih* (Sl. 2) [5].

Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen.

Von W. FRIEDRICH, P. KNIPPING und M. LAUE.

Vorgelegt von A. SOMMERFELD in der Sitzung am 8. Juni 1912.

Theoretischer Teil

VON M. LAUE.

Einleitung. BARKLAS¹⁾ Untersuchungen in den letzten Jahren haben gezeigt, daß die Röntgenstrahlen in der Materie eine Zerstreuung erfahren, ganz entsprechend der Zerstreuung des Lichtes in trüben Medien, daß sie aber noch daneben im allgemeinen die Atome des Körpers zur Aussendung einer spektral homogenen Eigenstrahlung (Fluoreszenzstrahlung) anregen, welche ausschließlich für den Körper charakteristisch ist.

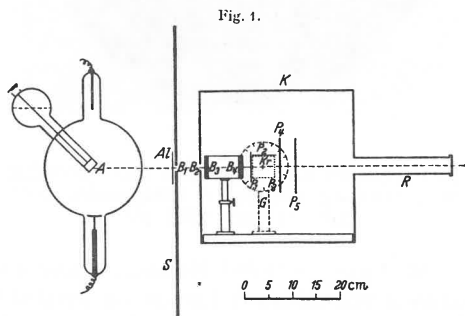
Experimenteller Teil

VON W. FRIEDRICH und P. KNIPPING.

Zur experimentellen Prüfung der im vorhergehenden Teil beschriebenen Überlegungen wurde nach einigen Vorversuchen mit einem provisorischen Apparat folgende definitive Versuchsanordnung verwandt, die in Fig. 1 schematisch abgebildet ist. Von den von der Antikathode *A* einer Röntgenröhre ausgehenden Röntgenstrahlen wird ein schmales Bündel von ca. 1 mm Durchmesser durch die Blenden *B*₁ bis *B*₄ ausgeblendet. Dieses Bündel durchsetzt den Kristall *Kr*, der in einem Goniometer *G* aufgestellt ist. Um den Kristall waren in verschiedenen Richtungen und Abständen photographische Platten *P* angebracht, auf denen sich die Intensitätsverteilung der vom Kristall ausgehenden Sekundärstrahlen registrierte. Gegen nichtgewollte Strahlen war die Anordnung durch einen großen Bleischirm *S* sowie durch den Bleikasten *K* in genügender Weise geschützt. Die Größe der wichtigen Teile der Versuchsanordnung lassen sich aus der Fig. 1 entnehmen, die im Maßstab 1:10 gezeichnet ist.

Die Herren FRIEDRICH und KNIPPING haben auf meine Anregung diese Vermutung experimentell geprüft. Über die Versuche und ihr Ergebnis berichten sie selbst im zweiten Teil der Veröffentlichung.

Die Theorie und ihr qualitativer Vergleich mit der Erfahrung. Wir wollen den oben angedeuteten Gedanken mathematisch zu fassen suchen. Den Ort der Mittelpunkte der Atome bestimmen wir durch die



Abstand Antikathode-Kristall	350 mm
„ Kristall- <i>P</i> ₁ resp. <i>P</i> ₂ resp. <i>P</i> ₃	25 „
„ Kristall- <i>P</i> ₄	35 „
„ Kristall- <i>P</i> ₅	70 „

Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen

VON M. LAUE.

Vorgelegt von A. SOMMERFELD in der Sitzung am 6. Juli 1912.

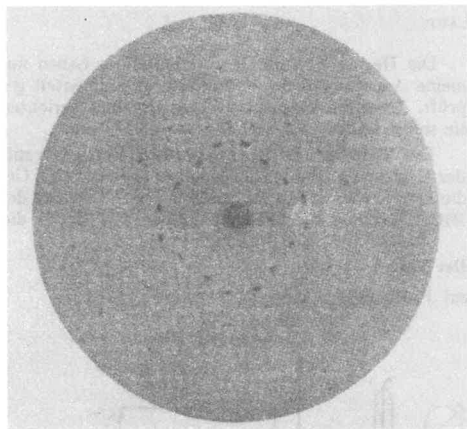
³³ Vor kurzem veröffentlichten W. FRIEDRICH, P. KNIPPING und der Verfasser¹⁾ an dieser Stelle Beobachtungen über Interferenzerscheinungen, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle ent-

stehen, sowie eine Theorie dazu, welche sich qualitativ der Erfahrung anschloß. Jetzt soll diese Theorie einer ersten quantitativen Prüfung unterzogen werden. Mag es sein, daß es dabei nicht gelingt, zur vollen Wahrheit durchzudringen, daß besonders die Werte für die Wellenlängen der Röntgenstrahlen später ersetzt werden müssen durch andere, welche zu ihnen in einfachen,

¹⁾ W. FRIEDRICH, P. KNIPPING und M. LAUE, diese Verhandlungen 1912, p. 303. Die dortige Numerierung der Gleichungen und Figuren wird hier fortgesetzt.

Sl. 2. Članek W. Friedricha, P. Knippinga in M. Laueja iz dveh delov in članek M. Laueja, kakor so jih po Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. b. Akademie der Wissenschaften zu München iz leta 1912 ponatisnile Die Naturwissenschaften [6].

Pri Lauejevem poskusu z rentgensko svetlobo z valovno dolžino na širokem pasu je sicer mogoče enolično določiti, kako nastane vsaka interferenčna pega (Sl. 3), valovno dolžino pa lahko določimo le do celoštevilskega faktorja. Laue je sam opozoril na te omejitve. V tem pogledu sta njegovo delo dopolnila William Lawrence Bragg (sin) in William Henry Bragg (oče) v Londonu z delom, ki sta ga začela leta 1912, a objavila v naslednjem letu. Sestavila sta prvi rentgenski spektrometer z ionizacijskim merilnikom in delala poskuse v odbiti svetlobi. Tako sta pojasnila zgradbo kamene soli. M. Laue je prosto-



Sl. 3. Znamenita fotografija interferenčne slike cinkove svetlice z rentgensko svetlobo iz leta 1912 [6].

dušno priznal, da bi tak korak »komaj lahko naredil, ker so ga zanimala velika, splošna načela«. »In tako sta mogla samo onadva izpeljati končno merjenje valovnih dolžin.« [4]

Tudi P. P. Ewald, ki je umrl šele leta 1985 v visoki starosti 98 let, je dodal svoj prispevek. Uvedel je krogo v recipročni mreži (1913) in dinamično teorijo rentgenskih interferenc (1917). Svoje doktorsko delo je namreč razširil tako, da je upošteval sodelovanje med sevanjem in sipalnimi centri.

Odkritje je odprlo dve novi veji: rentgenske spektroskopijo, to je merjenje valovnih dolžin značilnih emisijskih ali absorpcijskih spektralnih črt, ki je postala glavna opora razvijajoče se atomske fizike, in določanje kristalne zgradbe z rentgenskimi interferencami.

M. Laue je dobil Nobelovo nagrado za fiziko leta 1914 »za svoje odkritje uklona rentgenskih žarkov na kristalih«, W. L. Bragg in W. H. Bragg pa leta 1915 »za svoje zasluge pri raziskovanju kristalne zgradbe z rentgenskimi žarki«. Iz istega gnezda je pozneje zraslo še več Nobelovih nagrad. Leta 1962 sta dobila J. C. Kendrew in M. F. Perutz za odkritje kristalne zgradbe mioglobina in hemoglobina Nobelovo nagrado za kemijo in J. D. Watson, F. Crick in M. Wilkins za odkritje zgradbe deoksiribonukleinske kisline Nobelovo nagrado za fiziologijo. Leta 1985 sta dobila J. Karle in H. Hauptmann Nobelovo nagrado iz kemije za »nadaljnji razvoj tako imenovanih 'neposrednih metod' za določanje kristalne zgradbe«.

Enačbe

Na kratko se pomudimo ob glavnih enačbah, ki so pomembne za rentgenske interference. Začnimo z nizom sipalnih centrov na ravni črti v enakih razmikih a_1 . Pod kotom β_0 glede na niz naj pada ravno enobaravno valovanje z valovno dolžino λ . Daleč od niza je ojačeno valovanje na plašjih stožcev z nizom kot osjo in polovičnim kotom ob vrhu značilnega preseka β . Razlika poti po vzporednih žarkih skozi sosednja centra mora biti enaka celemu številu h_1 valovnih dolžin

$$a_1 \cos \beta - a_1 \cos \beta_0 = h_1 \lambda \quad (1)$$

Enačbe smo vajeni v obliki $a_1 \sin \alpha - a_1 \sin \alpha_0 = h_1 \lambda$ pri poševnem vpadu na uklonsko mrežico, če namesto kotov β in β_0 uporabimo komplementarna kota α in α_0 , ki ju merimo proti vpadni pravokotnici.

Pri ravninski mreži sipalnih centrov — ali dveh prekrizanih mrežicah — ki jo določata osnovna vektorja $\mathbf{a}_1$ in $\mathbf{a}_2$, moramo dodati enačbi (1) drugo, v kateri nadomestimo indekse 1 z indeksi 2. Vsaki izmed enačb ustreza družina stožcev — os prve določa smer $\mathbf{a}_1$, os druge pa smer $\mathbf{a}_2$ — in tvornice v presečiščih stožcev kažejo smer ojačenih curkov.

Če so sipalni centri razporejeni v prostorsko mrežo, ki jo določajo osnovni vektorji $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$, je treba dodati enačbi (1) še drugo z indeksi 2 in tretjo z indeksi 3. Trojica celih števil h_1 , h_2 , h_3 iz vseh treh enačb določa red interference. Zdaj imamo opraviti s tremi družinami stožcev z osmi v smereh vektorjev $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Ojačane curke podajajo tvornice, v katerih se sekajo trije stožci. To se primeri le pri izbranih valovnih dolžinah.

Lauejeve enačbe zapišemo pregledneje v obliki

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k} - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}_0 = 2\pi h_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

če uvedemo valovni vektor $\mathbf{k}_0$ v vpadnem valovanju in valovni vektor $\mathbf{k}$ v ojačenem; velikost obeh je $k_0 = k = 2\pi/\lambda$. Tri skalarne enačbe (2) lahko zamenjamo za eno vektorsko [6]

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = 2\pi \mathbf{h} \quad (3)$$

Dobimo jo, ko enačbe (2) za $i = 1$, $i = 2$ in $i = 3$ po vrsti pomnožimo z osnovnimi vektorji *recipročne mreže* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ in $\mathbf{b}_3$ in dobljene enačbe seštejemo. Na desni dobimo z 2π pomnoženi vektor *recipročne mreže* $\mathbf{h} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3$, to je vektor iz izhodišča do ene izmed točk *recipročne mreže*. Na levi pa uporabimo zvezo $\mathbf{r} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}_2 + (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}_3$, ki velja za poljuben vektor $\mathbf{r}$.

O *recipročni mreži* povejmo, da so njeni osnovni vektorji $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ in $\mathbf{b}_3$ povezani z osnovnimi vektorji »atomske« mreže $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ z enačbami

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)/(\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)) \quad \text{c.p.} \quad \mathbf{a}_1 = (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)/(\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)) \quad \text{c.p.}$$

Preostali enačbi dobimo v obeh primerih s ciklično permutacijo indeksov. Ni težko uvideti, da velja med obojimi osnovnimi vektorji še preprosta zveza

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij} \quad (\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \text{ za } i \neq j)$$

Prepričamo se tudi, da lahko poljuben vektor $\mathbf{r}$ zapišemo na dva načina

$$\mathbf{r} = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}_2 + (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}_2 + (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}_3$$

$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r}$ so komponente glede na osi atomske mreže ali kontravariantne komponente, a $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}$ komponente glede na osi *recipročne mreže*, ki so pravokotne na koordinatne ravnine atomske mreže. Vektor $\mathbf{h} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3$ je pravokoten na mrežno ravnino z Millerjevimi indeksi h_1 , h_2 , h_3 .

Vektorji *recipročne mreže* dajo preprost pregled nad mrežnimi ravninami. Po izkušnjah si namreč večina ljudi lažje predstavlja daljice, ki jih določata skupna začetna točka in končna točka, kot ravnine, ki jih določajo trije odseki na oseh. V *recipročni mreži* po enačbi (3) ni težko poiskati smeri ojačenih curkov. Iz izhodišča narišemo vektor $-\mathbf{k}_0$ do točke A. Vektor $\mathbf{k}$ mora biti enako velik in $\mathbf{h}$ je vektor *recipročne mreže*. Zato določa ojačeni curek vektor $\mathbf{k}$ iz točke A do točke *recipročne mreže* na krogli s središčem v A in radijem $2\pi/\lambda$. Kroglja gre tudi skozi izhodišče. Ta *Ewaldova kroglja* omogoči preprost pregled nad ojačenimi curki, posebej nam da vtis o simetriji interference (Sl. 4a).

Po W. L. Braggu nastane ojačeni curek po »zrcalnem obdobju« na mrežni ravnini z Millerjevimi indeksi h_1, h_2, h_3 . V enakokrakem trikotniku velja $2\pi h/2 = k \sin \frac{1}{2} \vartheta$ ali $2h^{-1} \sin \frac{1}{2} \vartheta = \lambda$, če je ϑ sipalni kot, to je kot med ojačanim in vpadnim valovanjem. Če na vektorju $\mathbf{h}$ med izhodiščem in končno točko ni nobene druge točke recipročne mreže, indeksi h_1, h_2, h_3 nimajo skupnega faktorja. Tedaj je velikost h enaka obratni vrednosti razmika a_h med mrežnima ravninama, na kateri je vektor $\mathbf{h}$ pravokoten (tako je na sl. 4a). Če pa leži na vektorju $\mathbf{h}$ še kaka dodatna točka recipročne mreže, imajo indeksi skupni faktor n , ki ga izpostavimo: $\mathbf{h} = n\mathbf{h}^*$, tako da h_1^*, h_2^*, h_3^* nimajo več skupnega faktorja. Zdaj velja $h = n/a_h$ (na sl. 4b ležita na vektorju $\mathbf{h}$ dve dodatni točki recipročne mreže in je $n = 3$). Tako smo prišli do Bragrove enačbe

$$2a_h \sin \frac{1}{2} \vartheta = n \lambda \quad (4)$$

To enačbo nazorno »izpeljemo« z zahtevo, da je razlika poti pri zrcalnem odboju na mrežni ravnini in na sosednji mrežni ravnini enaka celemu večkratniku valovne dolžine. Račun je tak kot pri interferenci na tanki planparalelni plasti. Sipanje zajamemo z zrcalnim odbojem, ker s tem že upoštevamo pravo razliko poti med deli valovanja. Vsa ta dognanja so stara že tri četrto stoletja. Bralec si lahko misli, kaj vse so jim v tem času še dodali.

Sl. 4. Ewaldova krogla, s katero si po enačbi (3) ponazorimo smeri ojačenih curkov (a), in trikotnik, iz katerega dobimo enačbo (4) (b) (glej sliko na ovitku).

LITERATURA

- [1] P. P. Ewald, *Max v. Laue — Mensch und Werk*, Phys. Blätter **35** (1979) 337.
- [2] G. Hildebrandt, *75 Jahre Röntgenstrahlinterferenzen in Kristallen*, Phys. Blätter **43** (1987) 430.
- [3] G. S. Ždanov, *75-letie odkritja difrakcii rentgenovskih lučej*, Usp. fiz. nauk **153** (1987) 619.
- [4] Max von Laue, *Concerning the detections of X-ray interferences*, Nobel Lectures, Physics 1901—1921, Elsevier, Amsterdam 1967, str. 347.
- [5] W. Friedrich, P. Knipping, M. Laue, *Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen*, Naturwissenschaften **39** (1952) 361; M. Laue, *Eine quantitative Prüfung für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen*, Naturwissenschaften **39** (1952) 368.
- [6] P. P. Ewald, *Die Erforschung des Aufbaus der Materie mit Röntgenstrahlen*, Handbuch der Physik, H. Geiger, K. Scheel (ur.), XXIII/2, Springer, Berlin 1933, str. 278.

OBVESTILO NAROČNIKOM

V teh dneh smo poslali opomine vsem naročnikom, ki še niso poravnali naročnine za Obzornik za matematiko in fiziko. Poleg položnice v prvi dvojni številki Obzornika ter splošnega opozorila v tretji je to zadnji letošnji opomin. Vljudno vas prosimo, da znesek nakažete vsaj do občnega zbora. Želimo, da ostanete tudi v prihodnje naš naročnik in z rednimi vplačili naročnine omogočite izhajanje Obzornika za matematiko in fiziko.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

VESTI

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1987*

Pedagoška fakulteta — Maribor

Matematika — fizika

377. Ocvirk, Marjeta	381. Rajh, Marija	385. Rotar, Jelka
378. Pipenbaher, Magda	382. Žnidarič, Lili	386. Senekovič, Jožef
379. Sitar, Zoran	383. Bek, Jože	
380. Habjanič, Nevenka	384. Jokič, Angela	

Fizika — tehnična vzgoja

283. Kumer, Tatjana	286. Vrtič, Janez	289. Šošter, Vesna
284. Polanec, Stanislav	287. Barat, Lenart	290. Divjak, Daniel
285. Sirec, Vladimir	288. Kulčar, Igor	291. Sajko, Edvard

Pedagoška akademija — Ljubljana

Matematika — fizika

785. Ban, Anica	Časovna razporeditev učne snovi pouka matematike v 6. razredu OŠ
786. Grünfeld, Mojca	Ploščina
787. Janžek, Tanja	Analiza napak pri preizkusu znanja iz matematike učencev v 8. razredu OŠ
788. Udovč, Barbara	Trirazsežni vektorski prostor
789. Dolenc, Polona	Pouk matematike v OŠ v Kraljevini Jugoslaviji
790. Maren, Mira	Matematični pouk v OŠ od začetka do propada Avstro-Ogrske
791. Zupančič, Anita	Pouk matematike v OŠ SFRJ
792. Špes, Veronika	Fizikalne naloge za 7. razred OŠ
793. Mikec, Lidija	O funkcijah
794. Bartolj, Tanja	O prostornini
795. Prem, Barbka	O fundamentalnih grupah poliedrov
796. Brkljač, Milan	Delo z nadarjenimi učenci pri pouku matematike v OŠ
797. Kuterovac, Vesna	Konstruktivske metode v geometriji
798. Colnar, Dušanka	Uporaba Pitagorovega izreka
799. Gorup, Marija	Sklepni račun in sklepanje v programu matematike v OŠ
800. Prijatelj, Franc	Uvod v elementarno geometrijo z vektorji
801. Čavdek, Magda	Poglavje decimalnih števil pri dodatnem pouku matematike
802. Palčič, Katja	Obravnava neenačb v OŠ
803. Erent, Mirela	Demonstracijski poskusi iz elektrostatičke
804. Kaferle, Jožica	
805. Djudarič, Rajko	Konstrukcija s šestilom in ravnilom v osnovnošolskem programu matematike
806. Grlj, Marija	Analiza testov iz matematike za 6. in 8. razred OŠ
807. Preskar, Milena	Analiza napak v preizkusu znanja iz matematike učencev 7. razreda OŠ
808. Starešinič, Ticijana	O vozlovkah
809. Kecić, Stevan	Širjenje ultrazvoka v trdih snoveh
810. Sinko, Nadica	Dodatni pouk iz matematike v 8. razredu OŠ — logika
811. Tekavec, Valentina	
812. Žerdner, Suzana	Dopolnilni pouk kot oblika pomoči učencem, ki se težko učijo matematiko
813. Turk, Roman	Modeli hiperbolične geometrije
814. Strle, Vesna	Izbrane teme iz žive matematike

Matematika — tehnična vzgoja

- | | |
|------------------------|--|
| 32. Hrastnik, Milena | Tehnologija keramike |
| 33. Kepec, Ivica | Pogoni v lesarskih strojih in model polnojermernika |
| 34. Jerina, Alenka | Krmiljenje in regulacija — mehanski del |
| 35. Šivec, Milan | Tehnologija izdelave valjarskih polizdelkov |
| 36. Penca, Mateja | } Analiza najpogostejših napak pri testih znanja iz matematike učencev v 8. razredu OŠ |
| 37. Zajc, Ines | |
| 38. Nose, Maja | Motorizacija, energetska kriza in varstvo okolja |
| 39. Zore, Marija | Zadnji Fermatov izrek |
| 40. Kamenščak, Marija | Uporaba vrtnalnih strojev v OŠ |
| 41. Mesojedec, Marinka | Obravnava štirikotnikov v OŠ |
| 42. Kotar, Marija | Logika prvega reda in nevtralna geometrija |
| 43. Natlačen, Boža | Modeli pravilnih večkotnikov |
| 44. Zgaga, Lucijana | Modeli zvezdnih večkotnikov in simetrija |
| 45. Bizjak, Metka | Uporaba zobniških gonil v obdelovalnih strojih |
| 46. Gačnik, Elizabeta | Poklici v luči tehnično-tehnološke revolucije |
| 47. Gartner, Irma | Uporaba in izdelava lesnih vezi |
| 48. Klinar, Marija | Toplotna obdelava jekel |
| 49. Ocvirk, Vanja | Pridobivanje furnirja in uporaba pri tehnični vzgoji |
| 50. Peklar, Tatjana | Kvadratni recipročnostni zakon |

Fizika — tehnična vzgoja

- | | |
|-----------------------|---|
| 729. Škof, Špela | Uporaba zavore kot strojnega dela |
| 730. Štuhec, Srečko | Ureditev in oprema učilnic tehnične vzgoje za obdelavo lesa |
| 731. Brezavšček, Aleš | Fizikalni eksperiment iz dinamike |
| 732. Zadel, Tanja | Električne inštalacije in naprave v gospodinjstvu |

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika — pedagoška smer

- | | |
|--------------------------------|--|
| 130. Pavletič-Pintar, Smiljana | Eulerjeva karakteristika |
| 131. Marušič-Suštar, Alenka | Barvanje grafov |
| 132. Bobek, Stanislav | Elementarne analitične neenakosti |
| 133. Povše, Danica | Razkosanja kompaktnih podmnožic ravnine na dele z manjšimi premeri |

Matematika — uporabna smer

- | | |
|----------------------------|---|
| 194. Fonda, Robert | Trigonometrijske vrste z monotonimi koeficienti |
| 195. Jan, Rajmond | Elementarne funkcije v kalkulatorjih Hewlett-Packard |
| 196. Kogovšek, Matjaž | Zasnova zbirke podatkov v zavarovalni skupnosti Triglav |
| 197. Bajt, Renata | Reševanje nelinearne enačbe na žepnem kalkulatorju HP-34C |
| 198. Kovač-Lopatic, Carmen | Neskončni produkti in njihova uporaba |
| 199. Köberl, Simona | Makro procesor za urejevalnik besedil |
| 200. Vinček, Tomaž | Urejevalnik besedil — RUNOFF |
| 201. Muhič, Niko | Evidenca o študentih |
| 202. Hrovatin, Ingrid | Računanje singularnih integralov |
| 203. Žerovnik, Zdenka | Seznami kod, ki omogočajo popravljanje napak |

Matematika — študij ob delu — uporabna smer — AOP

- | | |
|------------------|---|
| 12. Ložič, Miloš | Uporaba regresije pri obravnavi antropometričnih značilnosti novorojenčka |
| 13. Zidar, Ignac | Statistična obdelava nekaterih nevrofizioloških meritev |

- | | |
|------------------------|---|
| 14. Lindtner, Mirko | Računalniške statistične rutine |
| 15. Kovač, Vilhelm | Poenotena obdelava v računskem centru |
| 16. Hrvatin, Miroslav | Algoritmi za barvanje točk grafov |
| 17. Sladič, Branko | Knjižnica grafičnih podprogramov za risanje na matrični tiskalnik |
| 18. Rehberger, Dušan | Podprogrami za pripravo in uporabo jedilnikov |
| 19. Siebenreich, Alojz | Preračun vzmeti po ponudbi kupca |

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

- | | |
|------------------------|--|
| 436. Rugelj, Marinka | Projektivna geometrija nad obsegom Q |
| 437. Majcenovič, Marta | Kategorialna posplošitev nekaterih pojmov teorije množic |
| 438. Erker, Jaka | Nova pot do Lebesguea |
| 439. Posavec, Sonja | Hurwitzevi verižni ulomki |
| 440. Velec, Jože | Aritmetične funkcije |
| 441. Medic, Vinko | Konveksne množice v R^n |

Matematika — uporabna smer

- | | |
|----------------------------|--|
| 350. Elesini, Dušica | Variacijske metode |
| 351. Ulčar, Stanka | Metoda urejenih elementov v dvodimenzionalnem toku |
| 352. Simonič, Aleksander | Spekter nenegativnih matrik |
| 353. Kerec, Tatjana | Bezoutove matrike |
| 354. Gazvoda, Zdenka | Variacijske neenačbe |
| 355. Božič, Branko | Računanje intervalov zaupanja za Studentovo porazdelitev |
| 356. Trampuž-Tavčar, Mojca | Metoda diagonalnega pivotiranja |
| 357. Zupanec, Janez | Čakajoče vrste |
| 358. Savnik, David | Interpolacije, ki ohranjajo obliko podatkov |
| 359. Romih, Maks | Aproksimacija lastnih vrednosti zaprtih operatorjev |
| 360. Smolnikar, Jože | Posplošen problem lastnih vrednosti za pasovne matrike |
| 361. Brešar, Matej | Odvajanja in sorodne preslikave na prakolobarjih |
| 362. Schara, Tomaž | Metoda končnih elementov pri prevajanju toplote |
| 363. Zrimšek, Gorazd | Program za ocenjevanje in določanje posplošenih modelov ARMA na računalniku PC |

Matematika — teoretična smer

- | | |
|-------------------------|---|
| 18. Černe, Miran | Občutljivost stacionarnih porazdelitev markovskih verig |
| 19. Jurišić, Aleksandar | Topologija v teoriji grafov in kombinatoriki |

Fizika — pedagoška smer

- | | |
|--------------------------|--|
| 101. Pajk, Bojan | Eksperimentalna obdelava gibanja in nihanja v šoli z računalnikom |
| 102. Okretič-Salmič, Eda | Študij širjenja udarnega vala v plinskem valju — primer fizikalne raziskave v industriji |
| 103. Burger, Janez | Sistem za merjenje mase z oddaljenim senzorjem |
| 104. Golob, Milan | Lagrangeva gostota z višjimi odvodi ter statični potencial točkastega telesa |
| 105. Kham, Boris | Študij kasetnega pouka fizike (Ob radijskih oddajah o Halleyevem kometu) |
| 106. Vičar, Zorko | Merjenje očesnega tlaka |
| 107. Kebe, Branko | Poskusi s toplotnim tokom |
| 108. Kariž, Vida | Model termomagnetnega toplotnega stroja |

Fizika — tehniška smer

- | | |
|------------------------|--|
| 439. Pahor, David | Določanje ravnosti nosilca merilne letve |
| 440. Čibej, Marko | Preprost model mezonskega oblaka v nukleonu |
| 441. Belina, Ruben | Spekter scintilacijskega šuma svetlobnega toka svetlih zvezd |
| 442. Mandrino, Đorđe | Preiskava miniaturne Penningove črpalke ter njene uporabe kot vakuumskega merilnika |
| 443. Bajt, Saša | Vezana stanja v dvodimenzionalnem prevodniku v močnem magnetnem polju |
| 444. Križnič, Ervin | Določitev sprejemljivosti detektorja ARGUS za reakcijo |
| 445. Jarh, Orest | Študij faznih prehodov v RbD_2PO_4 s pomočjo jedrske magnetne resonance |
| 446. Kaluža, Matjaž | Leptoni in kvarki v Hararijevem modelu z rišoni |
| 447. Planinšič, Gorazd | Raziskave elektrostatičnega odklonskega sistema miniaturne katodne elektronke |
| 448. Kutnjak, Zdravko | Šum pri merjenju mejnih sil |
| 449. Urbanc, Brigita | Elektromehanska povratna zanka |
| 450. Karič, Erik | Študij feroelektričnega faznega prehoda v diglicin nitratu z dvojno resonanco $^1\text{H} - ^{14}\text{N}$ in $^1\text{H} - ^{17}\text{O}$ |
| 451. Poberaj, Igor | Meritev tenzorja nelinearne optične susceptibilnosti |
| 452. Rokavec, Aleš | Računanje hitrosti širjenja akcijskega potenciala po živčni celici |
| 453. Štuhec, Matjaž | Kvantizacija zvezne družine biljardov na analitično preslikanem kvadratu |
| 454. Žigon, Borut | Reševanje linearizirane Boltzmannove enačbe z metodo F_N |
| 455. Herman, Bojan | Elementarna analiza aerosolov z metodo PIXE |

3. stopnja

Matematika

- | | |
|------------------|--|
| 43. Šemrl, Peter | Avtomatična zveznost spletajočih operatorjev |
|------------------|--|

Fizika — pedagoška smer

- | | |
|-------------------|---|
| 10. Verovnik, Ivo | Fluktuacijski intenzitetni interferometer |
| 11. Cvahte, Mirko | Toplotni stroj in toplotna črpalka na polprevodniški termoelement za preverjanje entropijskega zakona |

Fizika — tehniška smer

- | | |
|-----------------------|--|
| 85. Hanžel, Darko | Porazdelitev EM polja v laserjih s preklopnikom kvalitete |
| 86. Jenčič, Igor | Določanje izgorelosti poškodovanega gorivnega elementa z merjenjem razmerja ^{134}Cs in ^{137}Cs v hladilu reaktorja |
| 87. Boštjančič, Bojan | Produkcija 4 barionov v e^+e^- anihilacijah pri težiščni energiji okoli 10 GeV |

Matematika

- | | |
|------------------------|---|
| 31. Lavrič, Boris | Projektorske lastnosti Rieszovih prostorov |
| 32. Mastinšek, Miklavž | Strukturni operatorji za abstraktne funkcionalne diferencialne enačbe |

Fizika

- | | |
|----------------------|---|
| 103. Krivec, Rajmund | Variacijska formulacija kvantnomehanskega sipanja s tremi delci v končnem stanju |
| 104. Ferbar, Janez | Pojem fotona v pouku kvantne mehanike |
| 105. Križan, Peter | Študij dvopionske interakcije z meritvijo reakcije $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^+n$ |

Doktorske disertacije

- | | |
|----------------------|---|
| 106. Gelo, Branko | Mezometeorološki model za prognozo oborina u razvijenoj orografiji pri pojedinim smjerovima vjetrova |
| 107. Zgonik, Marko | Nelinearni optični pojavi v snoveh s strukturnimi faznimi prehodi |
| 108. Dolinšek, Janez | Študij substitucijsko neurejenih inkomezurabilnih sistemov z metodo NMR |
| 109. Topič, Bogdan | Študij inkomezurabilnih faznih prehodov v K_2ZnCl_4 in K_2SeO_4 s pomočjo jedrske magnetne resonance ^{39}K |
| 110. Demšar, Franci | Slikanje z elektronsko paramagnetno resonanco |
| 111. Pleško, Mark | Določitev sklopitvene konstante močne sile iz meritve sevalnega razpada resonance |

* Seznam diplomantov iz leta 1986 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. 34 (1987) 147—149.

ZADREGE STROKOVNEGA PISANJA

Uvodna misel

Sestavek *O strokovnem pisanju* [1] me je vzpodbudil, da še sam dodam prgišče utrinkov. To so predvsem odsevi ogledala; malo je med njimi šolskih nasvetov. Teh je Ivan Kuščer za dobro bero zgledno nanizal v imenovanem pisanju. Vsakemu, ki kaj piše o fiziki, pa svetuje branje brošure *Style Manual*.

Sam sem našel mnogo koristnega v knjižici *Scientists Must Write* [2], ki ni le rožni venec dolgočasnih navodil ter svarilnih in zglednih primerov, ampak živahen vodič skozi učenost strokovnega pisanja. Ob vsem, kar je povedal Ivan Kuščer, bi lahko ostal pri priporočilu branja te knjige. Malo za šalo in malo zares vendarle dodajam nekaj uvoženih iskric in čisto majčken poganjek z domačega zelnika.

Cvetke iz domačih...

Izvleček je za naslovom najbolj brani del članka. Največkrat je to vse, kar bralci vidijo. Poleg tega rabi informacijski in dokumentacijski službi. Zato mora biti napisan skrbno; nobena beseda naj ne bi bila odveč.

V domačih strokovnih revijah (pa tudi v kaki tuji) se prispevki pogosto začnajo s »Članek obravnava...«. Z malo domišljije »članek podaja, vsebuje, navaja, opisuje, uvaja, predstavi, vpeljuje, oceni, izpeljuje, razčleni, pojasnjuje, prinaša...« in celo »razpravlja, govori, se spominja, postreže...«. Česa vsega ne počne ta presneti članek (in to v dovršni ali nedovršni obliki). Ko se utruji, ga zamenja »sestavek«, »prispevek«, »zapis« ali sam »avtor«.

Nezaupljivci pišejo raje »Ta sestavek...«, »Pričujoči zapis...«, »V tem prispevku...« ali kar »Pred vami je članek, v katerem avtor...«. Sedaj ne dvomimo več, da gre za »članek« in sicer »ta« in ne morda kateri drugi, da ga je res napisal »avtor« in da je članek res pred nami.

Bolj ko se naslajamo ob pestri ponudbi in občudujemo iznajdljivost ustvarjalcev, bolj postaja očitno, da so ti dodatki odveč. Toda kako napisati izvleček brez nepogrešljivega »članka« ali »avtorja«. Če ga z začetka pomaknemo nekam v besedilo, ostanemo na istem. Zdi se, da se ga otresemo z zapisom »Podana je...« ali »...obravnavamo...« in podobno. Ali res?

Kako gre brez okraskov, ki so nepotrebni kot eter ali flogiston, je npr. lepo pokazal Sergej Pahor z izvlečkom v enem (zares nekoliko daljšem, pa vendarle lahko berljivem) stavku [3]: »Z nekaj medicinskimi podatki in nekaj zdrave pameti lahko uporabimo osnovna fizikalna spoznanja v elementarni obliki tudi za človeško telo in tako naredimo pouk fizike v srednji šoli privlačnejši.« Le kako se je ubranil skušnjavi in ni zapisal: »Članek pokaže, kako lahko z nekaj medicinskimi podatki in z nekaj zdrave pameti uporabimo...«.

...in tujih logov

Izražanje v strokovnih in znanstvenih prispevkih naj bo jasno, preprosto in natančno. Pri tem nekaj lepote ne bo odveč, da le vsebina ne bo obremenjena z vezanjem otrobov. Prav v to pa se pisci hote ali nehotе pogosto zatekajo. Marsikdo se podzavestno ali zaradi obilja slabih zgledov rešuje s praznim besedičenjem, ko se znajde na majavih tleh. Včasih se celo ni mogoče otrestiti občutka, da gre morda za zavestno zavajanje.

Nekaj pogosto uporabljenih primerkov zavitega (in zvitega) ter puhlega strokovnega leporečja najdemo v *Prakla — Seismos Report* [4] (publikaciji največje zahodnonemške firme s področja uporabne geofizike). Prispeval jih je neimenovani ugledni univerzitetni profesor iz svojega pikro šaljivega *Besednjaka uporabnih raziskovalnih puhlic*. Poslovenjene dajem v premislek in svarilo ter poduk in razvedrilo:

- | | |
|---|--|
| »Že dolgo je znano ...« | — Nisem poiskal prvotnega vira. |
| »Očiten je določen potek ...« | — Ti podatki so dejansko nepomembni. |
| »Ker ni bilo mogoče dobiti končnoveljavnih odgovorov na ta vprašanja ...« | — Poskus je bil neuspešen, vendar upam, da bom iztržil objavo. |
| »Trije primeri so izbrani za podrobne raziskave ...« | — Izdelki drugih niso imeli nobenega smisla. |
| »Podani so značilni izsledki ...« | — Podal sem najboljše izsledke. |
| »Ti izsledki bodo podani v naslednjem poročilu ...« | — Če bom prisiljen, se bom tega morda ob priliki lotil. |
| »Najbolj zanesljive izsledke je dobil A. J. ...« | — A. J. je bil moj asistent. |
| »Zdi se, da ...« | — Jaz mislim tako. |
| »V splošnem se zdi, da ...« | — Še dva ali trije mislijo tako. |
| »Očitno je, da bo potrebno še mnogo dela, preden bomo popolnoma razumeli pojav ...« | — Pojava ne razumem. |
| »Pravilno znotraj enega velikostnega razreda ...« | — Napačno! |
| »Upamo, da bo ta študija vzpodbudila nadaljnje raziskave na tem področju ...« | — To je ušiv prispevek, toda taki so tudi drugi, ki obravnavajo to bedno temo. |
| »Zahvaljujemo se J. B. za sodelovanje pri poskusu in G. F. za koristne nasvete ...« | — J. B. je opravil poskus, G. F. pa mi ga je razložil. |
| »Statistično usmerjena projekcija pomena teh odkritij ...« | — Divje uganje. |
| »Zelo pomembno področje za raziskovalno študijo ...« | — Temo je izbrala moja komisija, je pa popolnoma neuporabna. |

Janez Lapajne

LITERATURA

- [1] Kuščer I., *O strokovnem pisanju*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 6/7, 211—219.
[2] Barrass R., *Scientists Must Write — A guide to better writing for scientists, engineers and students*, Chapman and Hall, London 1979.
[3] Pahor S., *Človeško telo in fizika v srednji šoli*, ibid. **34** (1987) 6/7, 193.
[4] *Es ist seit langem bekannt — It has long been known*, *Prakla Seismos Report* (1984) 1/2, 43.

40. OBČNI ZBOR — DNEVNI RED

1. Otvoritev
2. Imenovanje častnih članov
3. Jubilejna priznanja
4. Društvena priznanja
5. Poročila o delu društva
6. Razprava o poročilih
7. Poročilo nadzornega odbora
8. Volitve novega odbora
9. Pregled sklepov in razno

* Ustvarjalna dejavnost matematikov, fizikov in astronomov je vse premalo znana, zato lepo prosimo vse člane, da prikažejo svoje inovacije ne samo pri delu v industriji in inštitutih, ampak tudi pri pouku in izdelavi učil. Priložnost bo za posterje in prikaz aparatur. Prijave o udeležbi pošljite do 7. oktobra na DMFA SRS Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 6. Informacije lahko dobite pri Marku Valiču, Iskra, Center za elektrooptiko, tel. 061 573-215.

PRIJAVA

Prijavljam se na 40. občni zbor DMFA SRS, ki bo v hotelu Špik, Gozd Martuljek, tel. 064 88-415 (do 7. 10. 1988).

Ime in priimek (tiskano):

Točen naslov:

Rezervirajte mi prenočišče za odraslih in otrok

Pridem dne, prvi obrok: zajtrk, kosilo, večerja

Odidem dne, zadnji obrok: zajtrk, kosilo, večerja
(obkrožite)

Večina sob je dvoposteljnih. Sobo želim deliti z

Ce nujno želite enoposteljno sobo, obkrožite ta stavek.

Podpis:

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS
vabi vse matematike, fizike in astronome na

40. JUBILEJNI OBČNI ZBOR DRUŠTVA

14. in 15. oktobra 1988 v Gozd Martuljku v hotelu Špik

Spored:

Petek, 14. 10. 1988

- 9.45 otvoritev razstave o ustvarjalni dejavnosti matematikov, fizikov
in astronomov, predstavitev in razgovor z avtorji*
- 11.15 Dušan Zadavec: Načrtovanje in uporaba sodobne optike
- 12.30 kosilo
- 15.00 ponovna predstavitev razstave in razgovor z avtorji
- 16.15 Ivan Vidav: Razmišljanja o matematiki
- 17.45 Ivan Kuščer: Odkod ogenj ognjeniku?
- 19.30 večerja in družabni večer

Sobota, 15. 10. 1988

- 9.00 občni zbor
- 12.30 kosilo
- 14.00 izlet po dogovoru

Predsednik DMFA SRS:
Mitja Rosina

odreži

x din

HOTEL ŠPIK

64282 GOZD MARTULJEK