

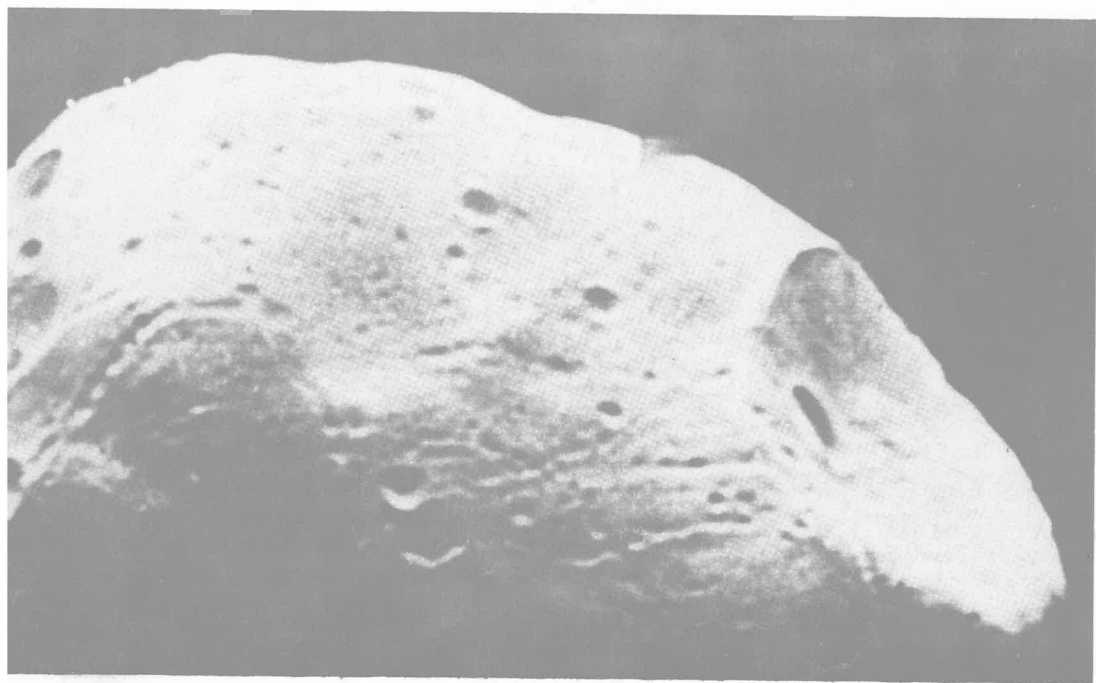
ODPISAN
2077/88-4
IZDAJ
LJUBLJANA
NA EKONOMSKA

IZDAJ DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7446

1988
Letnik 35
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 35 — ŠTEVILKA 4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JUNIJ 1988

Uredniški odbor: Milan Hladnik — urednik za matematiko, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Niko Prijatelj — glavni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 7000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 3500.— din, za ustanove in podjetja 20000.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 2000.— din, dvojna številka 4000.— din, stare številke 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1988 DMSA — 924

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

Glasba in matematika — Music and mathematics (Bruno Ravnikar)	97
Hodimo v dežju — Walking in the rain (Janez Strnad)	115
Oblika vesoljskih teles — The shape of heavenly bodies (Marijan Prosén) . .	119

Vesti — News

Žagarjeva nagrada profesorju Ivanu Vidavu (Milan Hladnik)	122
Ob življenjskem jubileju profesorja Križaniča (Vital Sever)	124
Nagrade Sklada Borisa Kidriča v letu 1988 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) . .	126
Prešernove nagrade študentom matematike in fizike (Maja Bleiweis, Ciril Velkovrh)	128
Navodilo avtorjem za pripravo rokopisa	128
Dvanajsti matematični seminar (Milena Strnad)	III
Seminar iz eksperimentalne astronomije — vabilo (Bojan Dintinjana, Pavla Razinger)	IV
Razpis priznanj (Milena Strnad)	IV

Nove knjige — New books

(Ivan Vidav, Peter Prelovšek, Peter Gosar, Slobodan Žumer, Tomaž Košir)	114, 117, 118, 123
---	--------------------

Na ovitku: Del površja Marsovega satelita Fobosa (glej članek na str. 115)

GLASBA IN MATEMATIKA

BRUNO RAVNIKAR

Math. Subj. Class (1985): 62 P 99

Članek opisuje uporabo matematičnih sredstev pri raziskovanju glasbenih pojavov.

MUSIC AND MATHEMATICS

The article describes the application of mathematical methods in research of musical phenomena.

1. Uvod

Pred časom je Obzornik objavil oceno knjižice Musik und Mathematik, zbornik prispevkov simpozija o glasbi in matematiki, ki je bil leta 1984 v Salzburgu. Knjižico je izdala znana nemška založba Springer-Verlag v Heidelbergu. V prispevkih se sicer pojavlja težnja po povezavi glasbe in matematike, muzikologiji koristnih spoznanj pa v njih žal ni mogoče zaslediti. Zgodovinske ugotovitve Pitagore in Helmholtza o celoštevilčnih razmerjih intervalov v dobi računalništva in informatike ne morejo biti več matematična osnova za obravnavanje glasbenih pojavov. Zlasti informatiki odstopa knjižica le nekaj načelnih, obrobni pripomb. Po letu 1948, ko je Shannon [1] objavil svoj znameniti model o informaciji, je bila njegova uporaba prenesena ne samo iz teorije komunikacij v lingvistiko ampak kasneje od tod še dalje v muzikologijo.

Domače raziskave glasbenih pojavov z uporabo matematičnih metod precej presegajo obseg omenjene knjižice in ne puščajo nikakršne negotovosti o smiselnosti njihove uporabe v muzikologiji. Gradnja vsake hiše se pričinja pri temeljih, zato tudi obravnavanje glasbe ne moremo začeti takoj z analizo simfonične glasbe, ampak je treba iskati osnovna spoznanja v preprostih glasbenih oblikah, ki jih predstavljajo ljudski napevi. Ta prispevek želi v močno zgoščeni obliki prikazati uporabljene raziskovalne metode.

2. Kodiranje melodije

Osnovni glasbeni pojav je melodija. Zaradi enostavnosti se omejimo najprej na enoglasne napeve, ki so niz slišnih impulzov določenih frekvenc in trajanj. Glasbena teorija predpisuje tema parametroma le določene diskretne vrednosti. Trajanje not je omejeno s celoštevilčnimi razmerji, ki privedejo do znanih vrednosti: celinke, polovinke, četrтинke itn. Frekvence tonov določajo diskretne vrednosti glasbenih lestvic, katerih izhodiščni ton je a^1 s frekvenco 440 Hz. V splošno privzeti temperirani lestvici lahko izračunamo frekvenco poljubnega tona s pomočjo frekvence normalnega tona a^1 in razmerja dveh sosednjih tonov lestvice

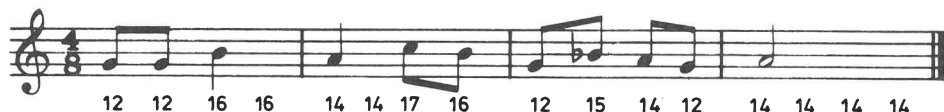
$$f_{i+1}/f_i = \sqrt[12]{2} = 1,05946 \quad (1)$$

Opisovanju višjih tonov z ustreznimi frekvencami se izognemo, saj predstavljajo geometrijski niz, kateremu lahko priredimo niz naravnih števil. Upoštevajoč raziskave finskega muzikologa Krohna [2], bi lahko izbrali izhodišče na tonu g^1 , mi pa si izberemo za oktavo nižjo vrednost g in se tako izognemo morebitnim negativnim vrednostim. Del tako kodirane temperirane lestvice vidimo na sl. 1. Preostane nam le še določiti zapis trajanja not. V melodijskem nizu izberemo najdaljši časovni interval — hronos protos, za katerega velja,

da lahko izrazimo vsako noto tega niza kot cel mnogokratnik izbranega časovnega intervala. Na tem načelu kodirano preprosto glasbeno frazo kaže sl. 2.



Sl. 1 Kodiranje temperirane lestvice



Sl. 2 Kodiranje glasbene fraze

Melodijo potemtakem vedno lahko preslikamo v ustrezen niz diskretnih spremenljivk

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

ki dobi za primer na sl. 2 vrednosti

(12, 12, 16, 16, 14, 14, 17, 16, 12, 15, 14, 12, 14, 14, 14).

Tako smo melodijo kodirali — pretvorili v številčni niz, ki je primeren za nadaljnjo obdelavo z računalnikom. V tem nizu niso upoštevane dinamične vrednosti spremenljivk in njih razdelitev v takte, zato predstavlja le prvi približek v opisovanju resnične melodije.

3. Statistična analiza

Osnovni namen statističnega obravnavanja melodij je ugotoviti, katere številske karakteristike bi lahko sprejeli kot cenilke zakonitosti, ki določajo strukturo in slog glasbe kakega področja, skladatelja ali obdobja. Smiselne rezultate lahko pričakujemo le tam, kjer so na razpolago dovolj obsežne populacije značilnih vzorcev — melodij. Izbira ni težka, saj naša država slovi po svoji bogati ljudski glasbi; že vrsto let sem jo raziskuje posebna muzikološka panoga — etnomuzikologija. Obravnavane populacije predstavljajo kot maksimalen vzorec vsi zapisani in objavljeni napevi izbranih etničnih področij

a) Srednja vrednost $\bar{x}$

Vsakemu melodijskemu nizu (x_i) lahko določimo *srednjo vrednost* $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

kjer pomeni n število vseh elementov niza — elementarnih tonov melodije. Srednja vrednost je močno odvisna od lege (tonalitete) melodije in je primerljiva le za nize enakih tonalitet. To je spoznala tudi etnomuzikologija, ki je usvojila predlog že omenjenega Krohna [2] in podaja v primerjalnih analizah vse napeve v takšni tonaliteti, da se končujejo na istem sklepnem tonu (tonus finalis) g^1 .

Srednje vrednosti je sedaj moč koristiti na dva načina. Med seboj lahko primerjamo srednje vrednosti napevov istega etničnega področja, lahko pa tudi povprečja srednjih vrednosti napevov različnih etničnih področij. V drugem primeru dobi izraz (3) razširjeno obliko

$$\bar{x} = \frac{1}{k \cdot n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (4)$$

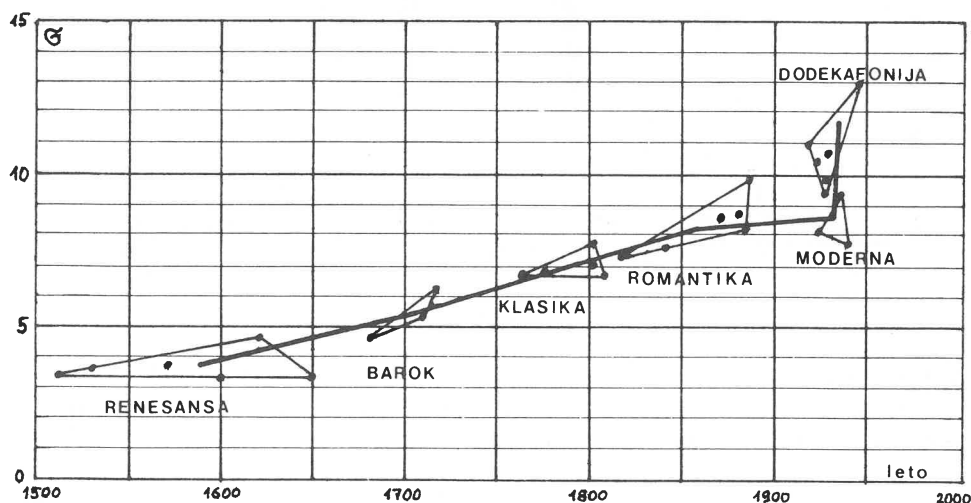
kjer pomeni k število analiziranih napevov izbranega področja.

b) Standardna deviacija σ

Stopnjo razpršenosti tonov okrog svoje srednje vrednosti določa *dispersija* σ^2

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5)$$

oziroma *standardna deviacija* σ , ki pa v nasprotju s srednjo vrednostjo $\bar{x}$ ni odvisna od lege (tonalitete) analiziranih napevov. To omogoča neposredno medsebojno primerjavo standardnih deviacij tudi za napeve različnih tonalitet. Višje vrednosti standardnih deviacij bi smeli pripisati bolj razgibanim napevom in obratno. V nekaterih delih se stopnja razgibanosti istoveti s stopnjo razvitosti napevov. Bolj razgibani napevi naj bi bili mlajšega datuma, manj razgibani starejšega. Zato so v tej smeri zelo zanimive raziskave Fucks [3], ki je izračunal standardne deviacije za prve violine 29 glasbenih del od renesanse, preko baroka, klasike, romantike in moderne vse do dvanajsttonske glasbe (dodekafonije). Ugotovil je, da vrednost standardne deviacije s časom monotono narašča in doseže svoj višek v dvanajstttonski glasbi, kar je grafično prikazano na sl. 3. Fucks sklepa, da predstavlja standardna deviacija parameter, ki omogoča številčno izraziti neko določeno glasbeno lastnost, ki se je s časom nedvomno spreminjala.



Sl. 3 Časovni potek standardne deviacije

c) Porazdelitev tonskega gradiva

Že v enem samem napevu lahko ugotovimo, da različni toni ne nastopajo z enako pogostostjo. Še bolj pride to spoznanje do veljave pri analizi celotne populacije napevov izbranega etničnega področja. V muzikologiji govorimo o različnem tonskem gradivu, v matematiki pa o različnih pogostostih tonov v melodijskih nizih. Te pogostosti predstavimo s porazdelitveno ali *verjetnostno shemo*

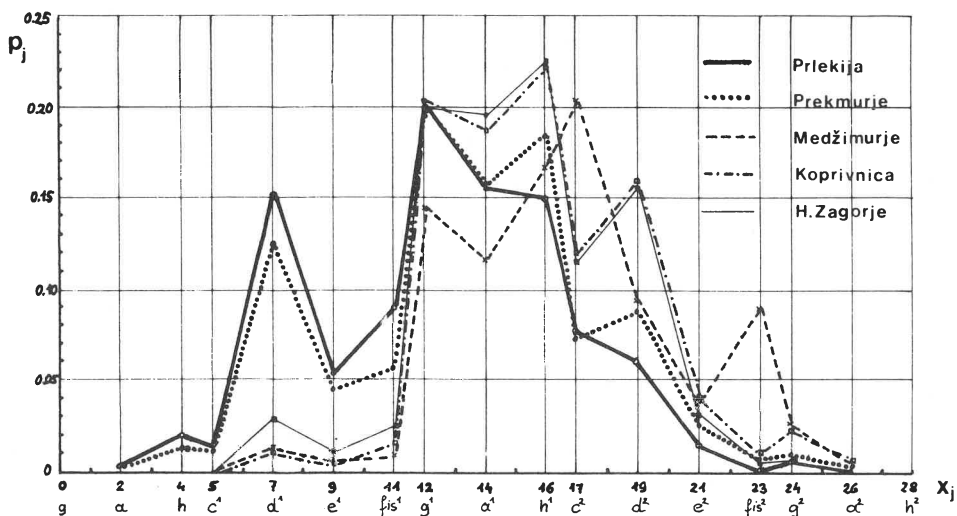
$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m \\ p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

iz katere vidimo, da se pojavlja ton x_j v obravnavani populaciji s pogostostjo p_j . Seveda velja tudi za našo verjetnostno shemo še dodatni pogoj

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1 \quad (7)$$

kjer pomeni m število različnih tonov obravnavanega tonskega gradiva.

Naše raziskave so zajele 1103 zapise ljudskih napevov Prlekije [4], Prekmurja [5], Medžimurja [6], Koprivnice [7] in Hrvatskega Zagorja [8]. Porazdelitve tonskega gradiva za pet obravnavanih področij vidimo grafično na sl. 4. Analiza pogostosti posameznih tonov v ljudskih napevih različnih etničnih področij je za primerjalno etnomuzikologijo zelo pomembna.



Sl. 4 Porazdelitev tonov

d) Entropija H

Teorija informacije pripisuje vsaki porazdelitvi neko množino informacije — *entropijo* H [9]. Določena je z izrazom

$$H = - \sum_{j=1}^m p_j \cdot \log_2 p_j \quad (8)$$

in predstavlja merilo za stopnjo nedoločenosti porazdelitve verjetnostne sheme. Po poskusu — sprejemu melodijskega niza (x_i) — te nedoločenosti ni več, ker smo o njej prejeli ustrezno informacijo.

Entropijo napevov lahko primerjamo z njihovo standardno deviacijo, saj upravičeno slutimo med obema določeno stopnjo sorodnosti. Zato smo izračunali za prej omenjeno populacijo 1103 ljudskih napevov tudi ustrezne standardne deviacije in entropije. Izkazane so bile visoke vrednosti korelacij, na tem mestu pa podajamo iz prostorskih razlogov le tabelo srednjih vrednosti standardnih deviacij in entropij za analiziranih pet področij (sl. 5). Vrstni red po padajočih vrednostih je za oba parametra enak, zato tudi na tem mestu lahko sklepamo o visoki korelaciji med standardno deviacijo in entropijo.

1. Medjimurje	$\sigma = 3,32$	$H = 2,55$	142 napevov
2. Prlekija	3,14	2,54	315 napevov
3. Prekmurje	3,11	2,50	203 napevi
4. Koprivnica	2,76	2,37	154 napevov
5. Hrv. Zagorje	2,71	2,35	289 napevov

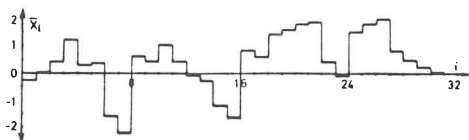
Sl. 5 Tabela srednjih vrednosti standardnih deviacij in entropij

e) Srednja melodijska krivulja $\bar{x}_i$

Do zanimivih rezultatov nas privede tudi analiza srednje melodijske krivulje večje populacije sorodnih napevov z istega področja. Izbrali smo tiste ljudske napeve Prekmurja, ki so se odlikovali po enaki dolžini — v njih je bilo enako število osnovnih tonov $n = 32$. Za posamezne vrednosti i smo izračunali srednje vrednosti preko vseh obravnavanih vzorcev

$$\bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij} \quad \text{za } 1 \leq i \leq 32 \quad (9)$$

kjer pomeni x_{ij} i -ti ton v j -tem napevu. Dobljene vrednosti so prikazane grafično na sl. 6. Njihov potek predstavlja nekakšno *srednjo melodijsko krivuljo* $\bar{x}_i$, ki izraža določene težnje v oblikovanju melodijskega loka. Posebej zanimiva je ugotovitev, da kaže srednja melodijska krivulja izrazito periodičnost, saj je očitno sestavljena iz štirih enako dolgih delov. O tem pojavu bomo govorili še nekoliko kasneje.



Sl. 6 Srednja melodijska krivulja za ljudske napeve v Prekmurju

4. Korelacijska analiza

Korelacijski račun omogoča medsebojno primerjavo dveh ali več enako dolgih melodijskih nizov. Stopnjo korelacije med dvema diskretnima nizoma (x_i) in (y_i) določa *koeficient medsebojne korelacije* r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (10)$$

kjer pomeni n število diskretnih spremenljivk — tonov v nizu. Postopek omogoča določevati stopnjo podobnosti med različnimi, a enako dolgimi napevi, kar je še posebej pomembno za študij in sistematizacijo variant. V praksi namreč ni vedno jasno, kdaj smemo kak napev šteti kot varianto drugega napeva in kdaj to ni več [10]. Za ilustracijo smo izbrali iz zbirke ljudskih pesmi Hrvaškega Zagorja [8] pet sorodnih napevov, katere bi lahko ocenili kot medsebojne variante. Prikazani so na sl. 7 skupaj s tabelarično podanimi vred-

nostmi koeficientov medsebojne korelacije r_{xy} . Najvišja vrednost koeficienta medsebojne korelacije je med napevoma 1 in 3, napev 5 pa kaže v primerjavi z vsemi drugimi najnižjo stopnjo korelacije. Upravičeno je vprašanje, če je napev 5 sploh varianta preostalih napevov. Korelacijska analiza bi bila lahko zanimiva tudi za sodno prakso, saj omogoča zanesljivo ugotavljanje plagiatov.

	2	3	4	5
1	0,898	0,964	0,941	0,603
2	—	0,931	0,839	0,702
3	—	—	0,916	0,635
4	—	—	—	0,566

Sl. 7 Korelacija med sorodnimi napevi

5. Nelinearna regresija

Korelacijska analiza pozna tako linearno kot tudi nelinearno regresijo. V prvem primeru je regresijska krivulja premica, v drugem pa krivulja višjega reda. V zadnjem času pa uporablja korelacijska analiza tudi drugače oblikovane regresijske krivulje. Takšno krivuljo predstavlja npr. lahko srednja melodijska krivulja $\bar{x}_i$ določene populacije napevov, kakršno smo že spoznali na sl. 6. Vse spremenljivke x_{ij} lahko razdelimo v n grup s po k spremenljivkami. Srednjo vrednost vsake grupe $\bar{x}_i$ določa že znani izraz (9), skupno povprečje $\bar{x}$ pa je določeno z izrazom

$$\bar{x} = \frac{1}{k \cdot n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_{ij} \quad (11)$$

kjer pomeni x_{ij} i -ti ton v j -tem napevu. Enako kot pri analizi variance izrazimo totalno varianco z dvema delnima variancama: varianco v grupah

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (12)$$

in varianco med grupami

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^n k(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (13)$$

Ker velja

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n k(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (14)$$

lahko zapišemo krajše

$$\sigma^2 = \sigma_g^2 + \sigma_m^2 \quad (15)$$

Kadar prevladuje v totalni varianci delež variance v grupah, je razpršenost napevov okrog srednje melodijske krivulje $\bar{x}_i$ velika. Posledično je varianca med grupami nizka in potek srednje melodijske krivulje je le šibko izražen. Nasprotno pomeni prevladovanje variance med grupami zelo razgibano srednjo melodijsko krivuljo in močnejše izražene zakonitosti v njenem poteku. Majhna razpršenost napevov okrog srednje melodijske krivulje kaže veliko podobnost med posameznimi napevi.

Od tu dalje poteka račun drugače kot pri analizi variance (11). Ker priča delež variance med grupami o stopnji zakonitosti v zgradbi posameznih napevov, definiramo razmerje

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma} \quad (16)$$

Pri $\eta = 1$ je varianca v grupah $\sigma_g = 0$. V tem primeru ležijo vse točke x_{ij} na regresijski krivulji $\bar{x}_i$. Vsi analizirani napevi so med seboj enaki in istovetni regresijski krivulji $\bar{x}_i$. Zato lahko rečemo, da je razmerje η merilo stopnje sličnosti med posameznimi napevi in srednjo melodijsko krivuljo $\bar{x}_i$.

Opisana metoda je bila praktično preskušena z analizo dvoglasnega petja v Prekmurju. Etnomuzikologija razlikuje napeve glede na stopnjo lestvice, na kateri se napev končuje. V slovenski ljudski pesmi se končuje največ na

pevov na prvi in tretji stopnji lestvice. Upoštevajoč obvezno transpozicijo na sklepni ton g^1 , govorimo o G - in Es -tonaliteti. (V Es -duru predstavlja sklepni ton g^1 tretjo stopnjo lestvice). Doslej ni bilo moč zanesljivo ugotoviti, katera tonaliteta predstavlja preostanek vodilnega glasu in katera spremljevalnega. Vsekakor pa mora izražati vodilni glas večjo stopnjo zakonitosti v zgradbi melodije. Zato so bile izračunane za obe tonaliteti delne variance in ustrezno razmerje η . Dobili smo

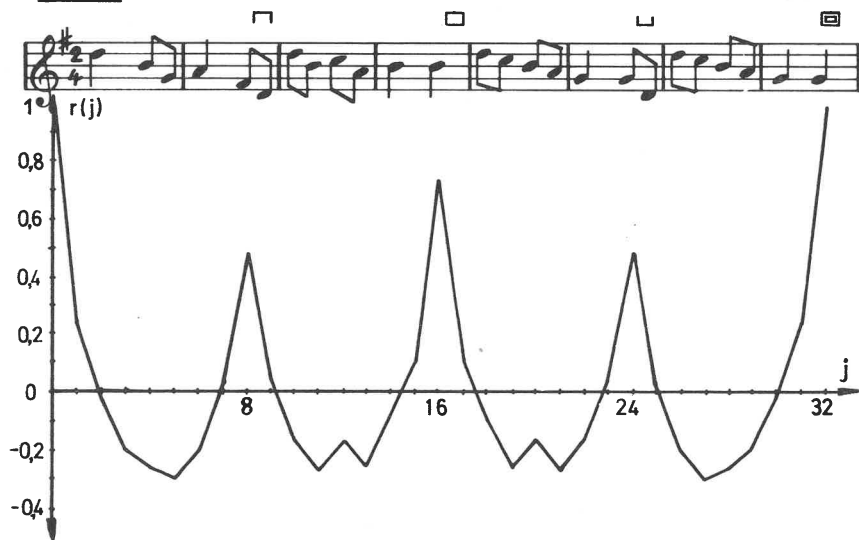
G -tonaliteta	$\sigma^2 = 25,53$	$\sigma_g^2 = 12,85$	$\sigma_m^2 = 12,68$	$\eta = 0,70$
Es -tonaliteta	$\sigma^2 = 6,54$	$\sigma_g^2 = 4,21$	$\sigma_m^2 = 2,33$	$\eta = 0,60$

Višja vrednost razmerja η za napeve G -tonalitete govori, da so v Prekmurju bolj razviti ti napevi in so potemtakem preostanek nekdanj vodilnega glasu v dvoglasnem petju, napevom Es -tonalitete pa preostane spremljevalni značaj.

6. Avtokorelacijska analiza

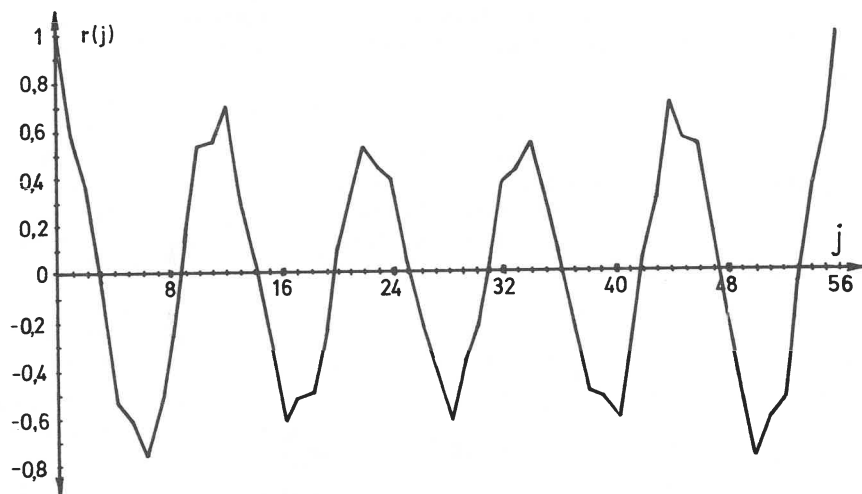
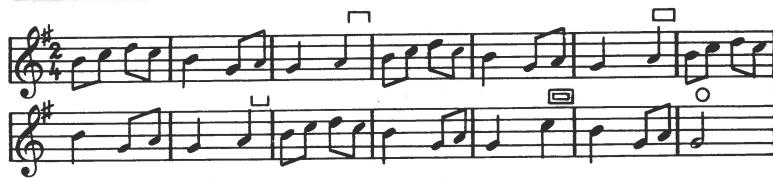
Periodično strukturo ljudskih napevov je ugotovil že Bela Bartók [12], mi pa smo jo srečali na sl. 6. To periodičnost so nekateri avtorji pripisovali periodičnosti spremljevalnega teksta, drugi pa so jo upravičeno iskali v sami strukturi napeva. Muzikološka analiza napevov deli danes ljudske napeve v tako imenovane melodijske vrstice. Žal so ustrezne obravnave v praksi še vedno preveč subjektivne in neenotne. Sistemska analiza uporablja za ugotavljanje morebitnih periodičnosti v nizu spremenljivk (x_i) metodo avtokorelacije [13], ki primerja niz spremenljivk (x_i) s samim seboj. Vrednost koeficienta medsebojne korelacije r_{xy} dveh enakih nizov mora biti seveda 1. Drugače pa je, če se oba niza fazno razlikujeta za vrednost j . V tem primeru postane vrednost koeficienta medsebojne korelacije funkcija fazne razlike j . Tak koeficient označimo z $r_{xx}(j)$ in ga imenujemo *koeficient avtokorelacije*.

A Stučica

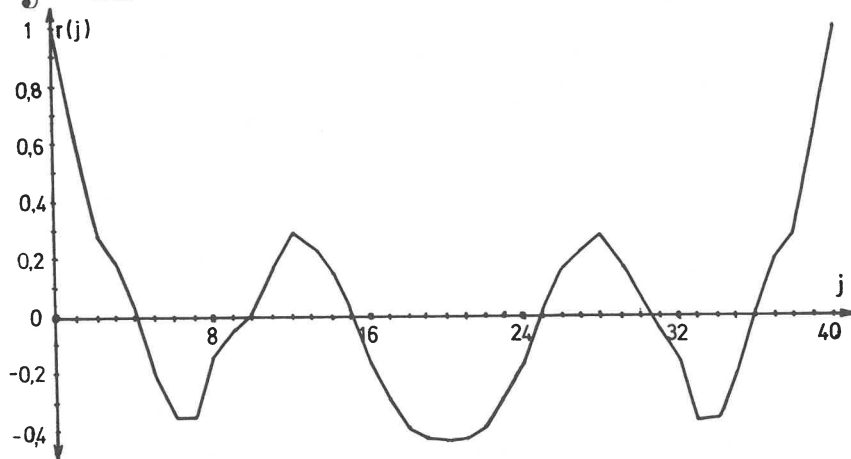


Sl. 8 Trije primeri avtokorelacijske analize

B Dober večer



C Zraslo nam je



Njegovo vrednost izpeljemo iz izraza za koeficient medsebojne korelacije (10) in dobimo

$$r_{xx}(j) = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (17)$$

Vrednosti j potekajo preko indeksov vseh spremenljivk v nizu od 0 do n . Ker je avtokorelacija soda funkcija, moramo pri računanju upoštevati še relacijo

$$r_{xx}(-j) = r_{xx}(j) \quad (18)$$

Uporabo metode avtokorelacije vidimo na treh napevih iz Hrv. Zagorja [8] (sl. 8). Prvi primer **A** kaže klasično razdelitev napeva na štiri melodijske vrstice, kot je to označil tudi zapisovalec. Zanimiv je drugi primer **B**, kjer je napev razdeljen na pet melodijskih vrstic. Napev **C** je zapisovalec razdelil na pet melodijskih vrstic, potek koeficienta avtokorelacije pa izpričuje le tri melodijske vrstice.

Prikazani primeri potrjujejo, da avtokorelacijska analiza lahko zanesljivo nadomesti dosedanje subjektivne metode v določevanju periodičnosti in ustreznih melodijskih vrstic ljudskih napevov.

7. Struktura in slog

Z zamenjavo vrstnega reda tonov se verjetnostna shema melodije ne spremeni, prav tako se ne spremenijo vrednosti iz nje izhajajočih parametrov: srednje vrednosti $\bar{x}$, standardne deviacije σ in entropije H . Pač pa doživi pri tem bistveno spremembo sama melodija. Potemtakem določajo vsi doslej obravnavani parametri zgolj strukturo melodije, ne pa njenega sloga. Analiza glasbenega sloga mora poznati zaporedje diskretnih spremenljivk x_i oziroma zakonitost, ki to zaporedje določa. V glasbeni govorici pomeni to zaporedne (sukcesivne, horizontalne) intervale, ki so določeni z izrazom

$$y_i = x_{i+1} - x_i \quad (19)$$

Izkaže se, da imata med statističnimi momenti slučajnih spremenljivk y_i še posebno težo tretji in četrti moment, ki določata asimetrijo (skewness) in sploščenost (kurtozis) porazdelitve. Koeficient asimetrije α_3 je določen z izrazom

$$\alpha_3 = \sqrt{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})^3}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})^2 \right)^{3/2}} \quad (20)$$

in ima lahko pozitivno ali negativno vrednost. V prvem primeru so naraščajoči intervali v povprečju večji od padajočih, v drugem primeru pa so večji padajoči intervali.

Kadar je absolutna vrednost α_3 manjša od 0,10, je asimetrija zanemarljiva in porazdelitev smemo obravnavati kot simetrično. Do simetrične porazde-

litve pripelje npr. naključna porazdelitev tonov, čeprav obratno ne velja: ni nujno, da je simetrična porazdelitev tudi naključna. V ljudski glasbi imajo simetrično porazdelitev najstarejši napevi, novejši pa težijo k asimetriji.

Pri absolutnih vrednostih α_3 med 0,10 in 0,25 ocenjujemo asimetrijo kot majhno, med 0,25 in 0,50 kot srednjo in nad 0,50 kot veliko.

Grupirane vrednosti koeficientov asimetrije za obravnavana področja kaže sl. 9. Zanimivo je, da prevladujejo v vseh obravnavanih področjih ljudski napevi s pozitivnimi vrednostmi koeficienta asimetrije. To pomeni, da teži slog obravnavanih ljudskih napevov v naraščajočih odsekih melodije k višjim intervalom in v padajočih delih k nižjim intervalom. Potek melodijskih krivulj teži potemtakem k skokovitemu vzpenjanju in položnejšemu spuščanju.

	— 0,51	— 0,26 do — 0,50	— 0,11 do — 0,25	0,10 do — 0,10	0,25 do 0,11	0,50 do 0,26	0,51
1. Prlekija	4,1 ‰	6,3 ‰	6,0 ‰	11,1 ‰	6,3 ‰	16,8 ‰	49,4 ‰
2. Prekmurje	3,9 ‰	5,4 ‰	5,9 ‰	10,3 ‰	12,3 ‰	12,8 ‰	49,4 ‰
3. Medjimurjc	2,1 ‰	4,9 ‰	4,2 ‰	16,9 ‰	7,0 ‰	9,9 ‰	55,0 ‰
4. Koprivnica	3,2 ‰	2,6 ‰	5,2 ‰	8,4 ‰	10,4 ‰	24,0 ‰	46,2 ‰
5. Hrv. Zagorje	2,4 ‰	5,9 ‰	5,9 ‰	9,7 ‰	12,1 ‰	20,8 ‰	43,2 ‰
Sr. vrednost	3,3 ‰	5,3 ‰	5,6 ‰	11,0 ‰	9,6 ‰	17,2 ‰	48,0 ‰

Sl. 9 Porazdelitev koeficienta asimetrije α_3

Kurtosis α_4 določa izraz

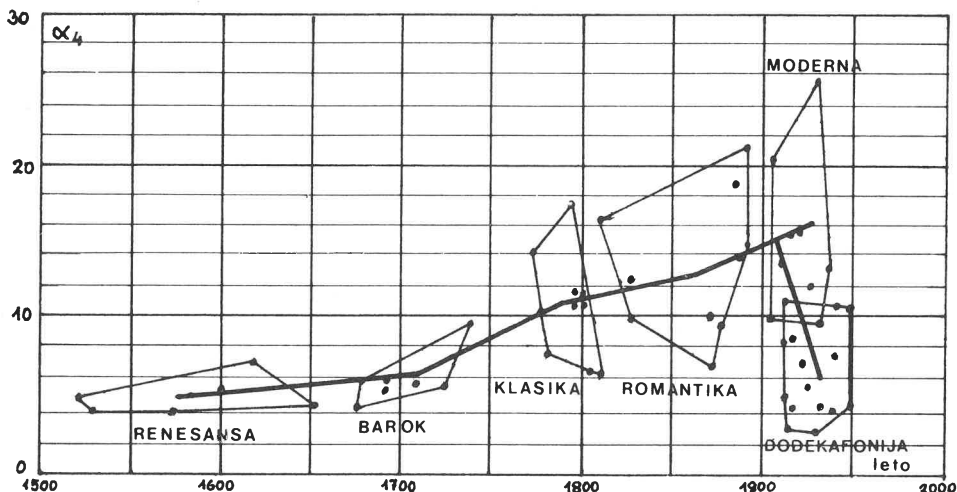
$$\alpha_4 = (n - 1) \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})^4}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})^2 \right)^2} \quad (21)$$

in nam pove, kakšna je oblika porazdelitvene krivulje. Za normalno Gaussovo porazdelitev velja $\alpha_4 = 3$. Če je $\alpha_4 < 3$, tedaj je krivulja široka (platycurtic), pri $\alpha_4 > 3$ pa je ozka (leptocurtic). Popolnoma naključni porazdelitvi ustreza vrednost $\alpha_4 = 2,4$.

V glasbenem jeziku pomenijo visoke vrednosti kurtosisa visok delež nižjih intervalov, nizke vrednosti pa bodo šle na račun sorazmerno razpršenih višjih intervalov. Nižje vrednosti bi lahko ocenjevali tudi kot približevanje naključni porazdelitvi tonov.

Vrednosti kurtosisa za prve violine 57 glasbenih del od renesanse do dvajststonske glasbe je izračunal Fucks [3]. Ugotovil je, da se vse od renesanse do moderne enakomerno vzpenjajo in dosežejo višek v Šoštakovičevi 9. simfoniji. Od te veje se odcepi okrog leta 1922 stranska veja, katere vrednosti kurtosisa padejo nazaj na vrednosti iz baroka (sl. 10). Ta veja ustreza pred-

stavnikom dvanajstttonske glasbe (Schönberg, Berg, Webern, Dallapiccola, Henze, Nono) in odpira muzikologom niz vprašanj o pomenu in vrednosti tega glasbenega sloga. Fucks upravičeno sklepa, da predstavlja kurtozis merilo za stopnjo razvitosti sloga zapadnoevropske glasbe.



Sl. 10 Časovni potek kurtozisa

Vrednosti kurtozisa so bile izračunane tudi za ljudske napeve iz naših krajev. Njihove srednje vrednosti so podane skupaj s srednjimi vrednostmi koeficientov asimetrije v pregledni tabeli na sl. 11. Primerjava s strukturnimi parametri na sl. 5 kaže sedaj nekoliko drugačen vrstni red. Največjo strukturno razgibanost izražajo ljudski napevi Medjimurja, po razgibanosti sloga pa so na prvem mestu napevi Prekmurja, njim pa sledita Prlekija in Medjimurje. V obeh primerih sta na zadnjem mestu Koprivnica in Hrvatsko Zagorje. Etnomuzikologija tolmači to navidezno neskladje s posegi v ljudsko glasbo v Medjimurju po zadnji vojni. Vrednosti koeficientov asimetrije se v obravnavanih področjih med seboj bistveno ne razlikujejo, kar smo ugotovili že s pomočjo sl. 9.

	α_3	α_4
1. Prekmurje	0,54	3,40
2. Prlekija	0,46	3,36
3. Medjimurje	0,47	3,02
4. Koprivnica	0,49	2,98
5. Hrvatsko Zagorje	0,42	2,71

Sl. 11 Tabela srednjih vrednosti koeficienta asimetrije in kurtozisa

8. Prehodna matrika

Statistična analiza zaporednih intervalov nam je posredovala vrednosti dveh parametrov, ki pa predstavljata le dve cenilki glasbenega sloga. Za bolj popolno analizo sloga moramo poiskati verjetnosti p_{ij} , da bo tonu x_i sledil ton x_j . Pri n tonih dobimo n^2 vrednosti, katere razvrstimo v kvadratno prehodno matriko

$$\|p_{ij}\| = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (22)$$

V melodijskem nizu je pojav vsakega tona x_j odvisen od neposredno pred njim stoječega tona x_i . Ta povezanost je verižna, zato imenujemo tako zaporedje *markovska veriga prvega reda* po ruskem matematiku A. Markovu, ki je objavil leta 1907 prve dosežke na tem področju. Kasneje je s pomočjo prehodne matrike analiziral slog Puškinove poeme Evgenij Onjegin [14]. Ker sledi, razen zadnjega tona melodijskega niza, vsakemu tonu x_i vedno neki ton x_j , mora biti vsota vseh elementov v eni vrstici matrike 1.

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (23)$$

Prehodno matriko za ljudske napeve G-tonalitete v Hrv. Zagorju vidimo na sl. 12. V predzadnjem stolpcu so podane pogostosti posameznih tonov p_i , ki določajo verjetnostno shemo napevov (6). V zadnjem stolpcu je prikazana vrednost entropije, ki ustreza vsaki vrstici H_i . Entropija markovske verige prvega reda je izražena s srednjo vrednostjo vseh vrstičnih entropij

$$H_I = \sum_{i=1}^n p_i \cdot H_i \quad (24)$$

Ton	$x_i \backslash x_j$	4	5	7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	P _i	H _i
h	4			1,000												0,001	0,000
c ¹	5	0,500		0,500												0,002	1,000
d ¹	7		0,037	0,222	0,074	0,037	0,445	0,037	0,111	0,037						0,027	2,336
e ¹	9		0,100	0,500	0,100	0,200	0,100									0,010	1,961
fi a ¹	11				0,167	0,042	0,624	0,167								0,024	1,479
g ¹	12			0,052	0,010	0,052	0,337	0,246	0,209	0,037	0,052	0,005				0,191	2,444
a ¹	14			0,020	0,005	0,035	0,391	0,178	0,244	0,056	0,066	0,005				0,197	2,320
h ¹	16					0,004	0,157	0,381	0,148	0,135	0,166	0,009				0,229	2,271
c ²	17					0,017		0,130	0,549	0,122	0,165	0,017				0,115	1,857
d ²	19						0,013	0,038	0,226	0,302	0,314	0,094		0,013		0,159	2,194
e ²	21									0,103	0,691	0,138	0,034	0,034		0,029	1,432
fi a ²	23											0,400		0,400	0,200	0,005	1,522
g ²	24										0,300	0,200	0,200	0,200	0,100	0,010	2,246
a ²	26													1,000		0,001	0,000

$H = 2,198$

Sl. 12 Prehodna matrika za ljudske napeve G-tonalitete v Hrv. Zagorju

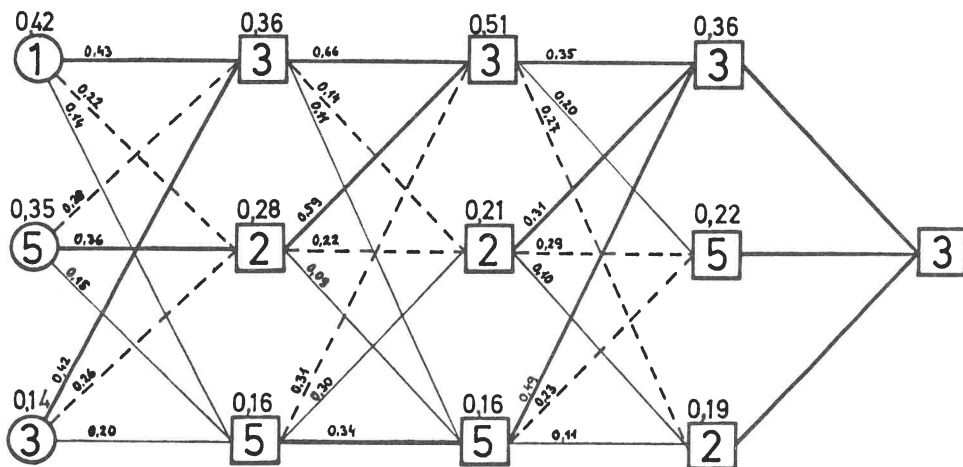
Za prehodno matriko ljudskih napevov Hrv. Zagorja dobimo entropijo $H_I = 2,198$. Če jo primerjamo z entropijo verjetnostne sheme p_i , ki je $H = 2,35$ (sl. 5), vidimo, da je slednja višja in ima potemtakem višjo stopnjo nedoločenosti. Tej razliki ustreza množina informacije $H - H_I$, ki jo posreduje prehodna markovska veriga prvega reda. Iz nje npr. spoznamo, da sledi tonu h vedno ton d^1 in enako tonu a^2 ton g^2 . Dalje vidimo, da sledi tonu c^1 v polovici slučajev ton h in v drugi polovici ton d^1 itn. Tako dobljena spoznanja predstavljajo zakonitosti, ki določajo glasbeni slog nekega področja, skladatelja ali dobe. [15]

Seveda preostane v prehodni markovski verigi prvega reda še vedno precej nedoločenosti. Zato pomeni v analizi sloga korak dalje prehodna veriga drugega reda. V njej analiziramo zaporedja treh tonov in iščemo verjetnosti, da bo tonoma (x_i, x_j) sledil ton x_k . Tako dobimo nove zakonitosti o glasbenem slogu, entropija markovske verige drugega reda H_{II} pa bo za posredovano množino informacije manjša od entropije markovske verige prvega reda H_I . Splošno velja

$$H_{II} < H_I \quad (25)$$

Zdi se, da lahko z višanjem reda markovske verige določimo vse zakonitosti, ki določajo glasbeni slog. To pa v resnici ne drži, saj smo že uvodoma povedali, da je številčni melodijski niz le prvi približek v opisovanju resnične melodije. Mimo tega postanejo markovske verige višjih redov manj pregledne in preobsežne. Zato se v praksi zadovoljimo z drugim in kvečjemu še tretjim redom. Poleg tega moramo upoštevati tudi dejstvo, da vsi toni melodije niso enako pomembni nosilci informacije. Posebej se odlikujejo sklepni toni posameznih melodijskih vrstic, zato so nekatere študije posvečene zgolj njim.

Tako imenovano kadenciranje melodijskih vrstic je moč pregledno prikazati tudi z *grafi*. Graf za tri najpogostejše sklepne tone ljudskih napevov *Es*-tonalitete v Hrv. Zagorju kaže sl. 13. Vidimo, da pričena 91 % vseh napevov na prvi, peti ali tretji stopnji lestvice. Podobno so sklepni toni prvih



Slika 13 Graf najpogostejših sklepnih tonov ljudskih napevov *Es*-tonalitete v Hrv. Zagorju

[illegible]

treh melodijskih vrstic najpogosteje porazdeljeni na tretjo, drugo in peto stopnjo lestvice, vsi napevi te tonalitete pa se — skladno z definicijo — končujejo na tretji stopnji.

Poznavanje prehodne matrike in porazdelitve sklepnih tonov melodijskih vrstic posreduje že tako popolno informacijo o določenem glasbenem slogu, da se lahko lotimo tudi obratnega procesa — računalniško podprtega komponiranja glasbe. V program je treba vstaviti prehodne verjetnosti markovske verige, določenega reda in porazdelitve sklepnih tonov posameznih melodijskih vrstic. Zaradi že omenjene pomembnosti sklepnih tonov poteka računalniško komponiranje glasbe do konca melodije proti njenemu začetku. Kolikšno zvestobo v reprodukciji sloga lahko dosežemo, si bomo zaradi enostavnosti ogledali na primeru računalniške reprodukcije angleškega teksta [16]. Računalniku je bilo naloženo naključno izbirati znake iz nabora angleške abecede. Zapisal je:

**IKXYTLULNRWJPKSLPAQJOG DHJDAGUNMBYHBCVVXIBAYYXJLA
FZCQOFRHLYUADEWQIJUCR**

Značilno za ta »tekst« so nesorazmerno dolge »besede«, saj je bila pogostost presledka enaka pogostosti posameznih črk. Korak naprej predstavlja vstavitev resničnih pogostosti črk in presledka. Sledilo je:

**OCRO HLI RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI ALHENHT-
TPA OUBTTVA NHA BRL**

Besede so sedaj po dolžini že podobne angleškim besedam, ni pa iz njih moč spoznati pripadnost angleškemu jeziku. Zato je bila z naslednjim korakom računalniku posredovana prehodna matrika prvega reda za angleški tekst. Računalnik je izpisal:

**ON IE ANTSOUTINYS ARE T INCTORE ST BE SDEAMY ACHIN ILO-
NASIVE TUCOOWE AT**

V tem tekstu se že nakazujejo značilnosti angleškega jezika še bolj pa pridejo do izraza z uporabo prehodne matrike drugega reda:

**IN NO LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID PONDENOME OF
DEMOSTURES OF THE**

Tokrat pa ni nobenega dvoma več, da računalniški izpis slogovno ustreza angleškemu tekstu in nekaj podobnega bi dobili tudi pri komponiranju glasbe. S pomočjo ustrezne prehodne matrike lahko računalnik komponira glasbo, ki slogovno ustreza določenemu etničnemu področju, skladatelju ali dobi.

Za etnomuzikologijo ima prehodna matrika predvsem drug pomen, saj določa značilnosti določenega glasbenega sloga. S pomočjo korelacijskih primerjav je moč številčno izraziti sorodnosti in razlike med posameznimi glasbenimi slogi. Pomembno je tudi ugotavljanje pripadnosti kakega napeva določenemu glasbenemu slogu, kar prav tako omogoča korelacijska analiza [15].

9. Polifonija

Uvodoma smo se omejili na enoglasne napeve, kar je poenostavilo naša dosedanja izvajanja. Ta omejitev tudi ni vplivala na analizo številnih enoglasnih napevov, čeprav je ravno za naše ljudsko petje značilno večglasje. O večglasju, polifoniji govorimo takrat, kadar zvenita istočasno dva ali več tonov.

Takšen skupek tonov imenujemo *akord*. Posameznemu tonu smo priredili diskretno spremenljivko x_i , akordu pa moramo prirediti *vektor* x_i s toliko komponentami, kolikor je v akordu tonov.

$$x_i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_k^i)$$

Posameznim komponentam lahko določimo vse parametre, katere smo spoznali pri analizi enoglasnih napevov; to pa ne prinese bistveno novih spoznanj. Za muzikologijo je mnogo bolj pomembna analiza sloga polifonske glasbe, kar vodi h konstrukciji ustrezne prehodne matrike. Poiskati je treba verjetnosti p_{ij} , da bo akordu $(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_k^i)$ sledil akord $(\xi_1^j, \xi_2^j, \dots, \xi_k^j)$, in jih zapisati v obliki prehodne matrike. Čeprav v akordu ne nastopajo vse kombinacije k komponent, postane ustrezna matrika zelo obsežna. Nekoliko enostavnejše so razmere pri dvoglasju. Sl. 14 kaže polifonsko matriko za dvoglasno petje v Prekmurju. V njej je kar 17 vrstic s po enim samim preходом, ki morajo občutno znižati stopnjo nedoločenosti. Oglejmo si ustrezne vrednosti entropij. Če bi bili vsi v matriki navedeni intervali enako verjetni, bi bila entropija takšne prehodne matrike $H = 5,248$. V resnici so intervali porazdeljeni z verjetnostmi p_i , kar daje entropijo $H = 3,830$. Entropija prehodne markovske verige prvega reda je še nižja, in sicer $H = 1,909$. To pomeni, da moramo pripisati razliko v entropiji $\Delta H = 3,830 - 1,909 = 1,921$ tisti množini informacije, ki jo posreduje matrika. Ta pa nam pove, da sledi intervalu (b, g) vedno le interval (es^1, b) , intervalu (es^1, g) le (b^1, es) intervalu (d^1, as) le (es^1, as) itn. Z višjimi redi markovske verige bi spoznali še več pravil, ki določajo zakonitosti glasbenega sloga ljudskih napevov.

LITERATURA

- [1] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communications*, B.S.T.J. **27** (1948) 379.
- [2] I. Krohn, *Suomen kansan sävelmiä*, Helsinki 1888.
- [3] W. Fucks, *Mathematische Analyse von Formalstrukturen von Werken der Musik*, Köln — Opladen 1965.
- [4] J. Dravec, *Glasbena folklor Prlekije*, Pesmi, Ljubljana 1981.
- [5] J. Dravec, *Glasbena folklor Prekmurja*, Pesmi, Ljubljana 1957.
- [6] V. Žganec, *Hrvatske pučke popijevke iz Međimurja*. Zbornik jugoslovenskih pučkih popijevka, Zagreb 1924.
- [7] V. Žganec, *Hrvatske narodne popijevke iz Koprivnice i okoline*, Zagreb 1962.
- [8] V. Žganec, *Narodne popijevke Hrvatskog Zagorja*, Zagreb 1960.
- [9] R. Jamnik, *Elementi teorije informacije*, Ljubljana 1964.
- [10] B. Bartók-A. B. Lord, *Serbo-Croatian Folk Songs*, New York 1951.
- [11] V. Vranić, *Vjerojatnost i statistika*, Zagreb 1965.
- [12] B. Bartók, *A magyar népdal*, Budapest 1924.
- [13] L. Gyergyek, *Statistične metode v teoriji sistemov, teorija o informacijah*, Ljubljana 1971.
- [14] A. Markov, *Essai d'une recherche statistique sur le texte du roman »Eugene Onegin«*, Bull. Acad. imper. Sci., St. Petersburg **7** (1913).
- [15] B. Ravnikar, *Analiza melogramov z metodami teorije o informaciji*, Disertacija, Ljubljana 1985.
- [16] D. Lewin, *Some Applications of the Communication Theory to the Study of Twelve-Tone Music*, J. Music Theory, **12** (1968) 1.

NOVE KNJIGE

SUHADOLC Anton, Linearni topološki prostori, 2. del. Ljubljana : DMFA SRS, 1987, (Postdiplomski seminar iz matematike; 16)

V drugem delu knjige Linearni topološki prostori, katere prvi del je izšel že l. 1979, obravnava avtor dualnost med vektorskimi prostori, refleksivne prostore, zvezne linearne preslikave, projektivne in induktivne limite, na koncu pa uporabo v teoriji distribucij.

Knjiga je razdeljena na 4 poglavja. Najprej se seznanimo z dualnimi sistemi vektorskih prostorov in pripadajočimi lokalno konveksnimi topologijami, predvsem s polarnimi topologijami, med katere sodijo šibka, krepka, Mackeyeva topologija idr. Zvemo tudi, kaj so sodasti in infrasodasti prostori in kakšne lastnosti imajo. Naslednje poglavje obravnava nekatere pomembne tipe lokalno konveksnih prostorov, kot so bornološki prostori, v katerih so vsi omejeni linearni operatorji zvezni, nadalje refleksivni in polrefleksivni prostori, pa Montelovi prostori, kjer so vse omejene množice relativno kompaktne. To poglavje govori tudi o topoloških prostorih zveznih linearnih preslikav, o adjungiranih operatorjih, o dualih podprostorov in kvocientnih prostorov ter o direktnih vsotah in produktih lokalno konveksnih prostorov. Tretje poglavje se začne s študijem lastnosti končnih lokalno konveksnih topologij. Nato avtor definira induktivne limite lokalno konveksnih prostorov, posebej pa se pomudi pri lastnostih striktnih in regularnih induktivnih limit. Na koncu pa obravnava še projektivne limite, vprašanje, kateri prostori se dajo reprezentirati s projektivno limito, in dualnost med induktivnimi in projektivnimi limitami. Zadnje poglavje je uvod v teorijo distribucij. Ta teorija je lep zgled za uporabo splošne teorije lokalno konveksnih prostorov, ki jo je avtor razvil v prejšnjih poglavjih. Najprej je definiran prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij s kompaktnim nosilcem, ki leži v odprti množici Ω evklidskega prostora R^n . Izkaže se, da je $\mathcal{D}(\Omega)$ poln bornološki refleksiven Montelov prostor. Je prve kategorije in ni metrizabilen. Distribucije so zvezni linearni funkcionali na $\mathcal{D}(\Omega)$. Prostor vseh distribucij $\mathcal{D}'(\Omega)$ je prav tako poln Montelov prostor. Odvajanje je v njem zvezen linearen operator. To poglavje govori tudi o prostoru $\mathcal{E}(\Omega)$, ki sestoji iz vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij na Ω . Če ga opremimo s primerno topologijo, je vsak zvezen linearen funkcional na njem distribucija, ki ima kompakten nosilec. Narobe pa se da vsaka distribucija s kompaktnim nosilcem razširiti do zveznega funkcionala na $\mathcal{E}(\Omega)$. Nazadnje so opisani še prostori $\mathcal{S}$ hitro padajočih neskončnokrat odvedljivih funkcij. Zvezni linearni funkcionali na $\mathcal{S}$ pa so tako imenovane umirjene distribucije. Vsa poglavja so posejana s številnimi zgledi, ki so primeri raznih tipov prostorov ali pa osvetljujejo obravnavano teorijo.

Knjiga je napisana jasno in razumljivo. Skupaj s prvim delom daje izčrpen pregled nad teorijo lokalno konveksnih vektorskih prostorov. Izreki so večinoma vsi dokazani, le nekaj jih avtor samo navaja in pove, kje v literaturi se najdejo dokazi. Potrebno predznanje so osnove matematične analize in linearne algebre. Ker oba dela sestavljata celoto, seveda bralec ne more vzeti v roke drugega dela, če ni prej preštudiral prvega.

Ivan Vidav

HODIMO V DEŽJU

JANEZ STRNAD

PASC a 4750 Dp

V dežju kaže hitro hoditi, če želimo biti manj mokri. Preproste enačbe pokažejo, da s hitrim tekom ne pridobimo veliko.

WALKING IN THE RAIN

It is reasonable to walk briskly in the rain if we want to be less wet. Simple equations show that the benefit of running fast is not appreciable.

V nalivu, ki nas preseneti brez dežnika, tečemo. Ali ravnamo prav? Vprašanje so postavili v revijah, ki se ukvarjata tudi s poučevanjem fizike [1], [2]. Obdelajmo ga še v Obzorniku, le da storimo to bolj na kratko.

Homogen dež s povprečno delno gostoto vode ρ naj pada s hitrostjo v_d pod kotom φ proti navpičnici (Sl. 1). Vzemimo da prehodi v njem pešec vodoravno pot s s konstantno hitrostjo $v = s/t$. Pešča obravnavajmo približno kot kvader s čelno ploskvijo S_x in z vrhno ploskvijo S_y . Razmerje površin ocenimo z $S_x/S_y =$ višina ramen/globina ramen = 150 cm/10 cm = 15.

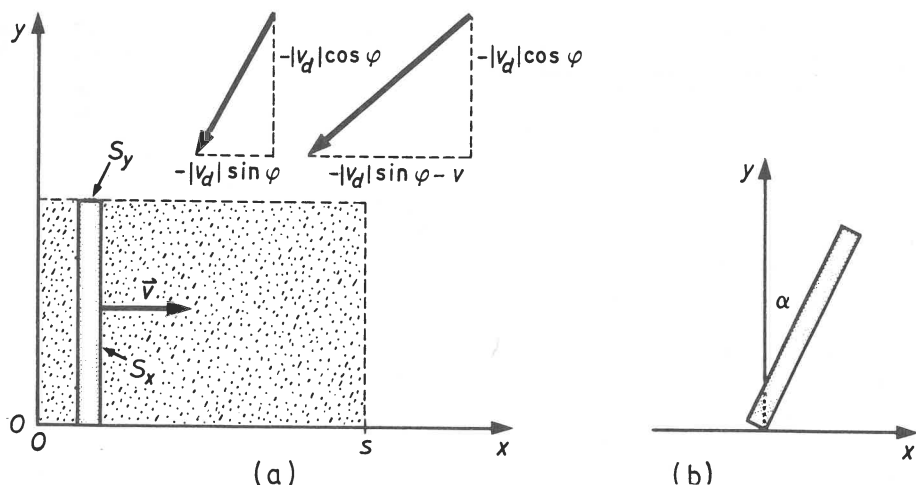
Masni tok skozi ravno ploskev $\mathbf{S}$ izračunamo z relativno gostoto masnega toka $\mathbf{j} = \rho(\mathbf{v}_d - \mathbf{v})$ takole: $\Phi_m = |\mathbf{jS}| = \rho|\mathbf{S}(\mathbf{v}_d - \mathbf{v})|$. Smer vektorja $\mathbf{S}$ določa pravokotnica na ploskev. Maso dežja, ki zadene človeka, dobimo tako, da pomnožimo masni tok s časom $t = s/v$ in seštejemo prispevke vseh ploskev ($i = 1, 2 \dots$):

$$m = \Phi_m t = (s/v) \left| \sum_i \mathbf{S}_i \mathbf{j}_i \right| = (\rho s/v) \left| \sum_i \mathbf{S}_i (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}) \right|$$

V našem primeru, ko je $\mathbf{v}_d = (-v_d \sin \varphi, -v_d \cos \varphi, 0)$ in $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, imamo

$$m = \rho s S_x [1 + (v_d/v) |\sin \varphi + S_y \cos \varphi / S_x|] \quad (1)$$

Pri tem je $\rho s S_x$ masa dežja v prostornini, ki jo zajame med potjo čelna ploskev. Ker nas dež moči tudi po ramenih, je masa odvisna od razmerja hitrosti

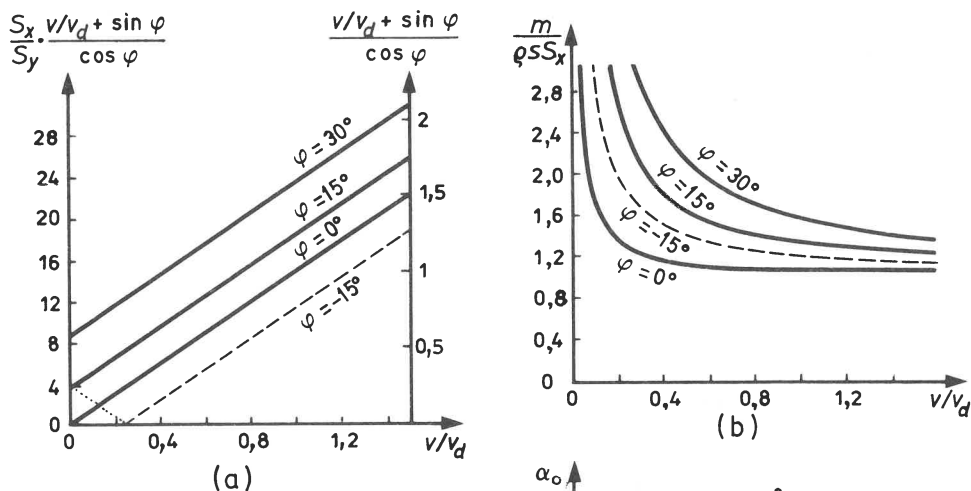


Sl. 1 Model pešča v dežju v pokončni (a) in namišljeni nagnjeni drži (b)

v/v_d in od razmerja površin S_x/S_y ter, če dež ne pada navpično, še od nagiba φ . Po stranskih ploskvah ne dežuje. Dež zmoči le čelno ploskev, to je prsi, in vrnjo ploskev, to je ramena, ali zadnjo ploskev, to je hrbet, pri »dežju od zadaj«, ko je $\varphi < 0$ in $|\sin \varphi| > v/v_d$. Razmerje med maso dežja, ki nas zmoči po prsih in po ramenih, je $(S_x/S_y) |v/v_d + \sin \varphi|/\cos \varphi$, razmerje ploskovnih gostot pa $|v/v_d + \sin \varphi|/\cos \varphi$ (Sl. 2a).

Končna hitrost dežnih kapelj, ki določa v_d , je tem večja, čim večji je radij kapelj. Kaplje z večjim radijem kot 3 ali 4 mm so zaradi strižnih sil neobstoje in se razletijo. Tako navadno meri ta hitrost od 5 do 8 m/s, samo redko doseže 9 m/s. Izid našega približnega računa (Sl. 2b) kaže, da se splača v dežju hitro hoditi. Pri hitrem teku, ki ga zmoremo le na kratke razdalje, ostanemo le malo bolj suhi. Pri navpičnem dežju s hitrostjo 8 m/s smo pri hoji s hitrostjo 3 m/s le za 4 % bolj mokri kot pri teku s hitrostjo 6 m/s in le za 13 % bolj mokri kot pri zelo hitrem teku s hitrostjo 10 m/s (pri tej hitrosti bi se na poti 100 m približali svetovnemu rekordu). Seveda pa je še najbolj vedriti, če si to lahko privoščimo.

Nazadnje dodajmo še enačbo za maso dežja, ki ga prestreže za kot α proti navpičnici nagnjena premikajoča se prizma (Sl. 1b):



Sl. 2 Razmerje med maso dežja, ki nas zmoči po prsih in ramenih (hrbtu in ramenih — pikčasto), in razmerje ustreznih ploskovnih gostot (a). Odvisnost mase dežja, ki zadane pešca, od hitrosti hoje (ali teka). Na navpično os nanese-mo $m/\rho S S_x$, na vodoravno pa v/v_d za nekaj nagibov φ pri $S_x/S_y = 15$ (b). Kot, za katerega bi morala biti nagnjena premikajoča se prizma, da je dež ne bi zmočil po sprednji ploskvi, v odvisnosti od razmerja v/v_d za nekaj nagibov φ (c)

$$m = \rho s S_x [\cos \alpha + (v_d/v) \sin (\varphi - \alpha) + (S_y/S_x) (\sin \alpha + (v_d/v) \cos (\varphi - \alpha))]$$

Pri tem smo samo upoštevali, da preideta vektorja obeh ploskev v $\mathbf{S}_x = S_x (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$ in $\mathbf{S}_y = S_y (\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$. Pri izbranem nagibu α_0 , ki ga izračunamo iz enačbe $\cos \alpha_0 + (v_d/v) \sin (\varphi - \alpha_0) = 0$ ali $\operatorname{tg} \alpha_0 = (v/v_d + \sin \varphi)/\cos \varphi$ (Sl. 2c), dosežemo, da sprednja stran sploh ni mokra in da je mokra samo zgornja ($m = \rho s S_y (\sin \alpha_0 + (v_d/v) \cos (\varphi - \alpha_0))$). Preprosti model, ki smo mu lahko že doslej očitali kako pomanjkljivost, postane neuporaben, saj se pešec kot celota med hojo nagne lahko samo za zelo majhen kot. Vendar sledi iz prejšnjega premisleka praktično navodilo za hojo po dežju: z zgornjim delom telesa se nagnimo naprej, pa bomo po prsih ali po hrbtu manj mokri. Nagib je pravi, ko se nam med hojo zdi, da padajo kaplje vzporedno z zgornjim delom telesa.

LITERATURA

- [1] S. A. Stern, *An optimal speed for traversing a constant rain*, Am. J. Phys. **51** (1983) 815.
 [2] A. de Angelis, *Is it really worth running in the rain?* Eur. J. Phys. **8** (1987) 201.

NOVE KNJIGE

FADDEEV L. D., Takhtajan L. A., Hamiltonian methods in the theory of solitons, Berlin, Springer-Verlag 1987, 592 str.

Pojem solitonov sta v fiziko vpeljala Kruskal in Zabusky leta 1965. Samotni valovi oziroma solitoni predstavljajo take rešitve nelinearnih diferencialnih enačb, ki imajo več lastnosti delcev: gibanje ne spreminja notranje oblike solitonov, medsebojni trki so elastični z ohranitvijo števila in oblike. V zadnjih desetih letih je ta pojem dokazal svojo univerzalnost s široko uporabo na različnih primerih nelinearnih pojavov.

Avtorja monografije sta bila med začetniki tega področja matematične fizike. V obsežnem delu predstavita zlasti metodo inverznega sipanja, ki je zelo koristno orodje za obravnavo nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb. Uporabljata Hamiltonov pristop in prikažeta delovanje metode na več primerih točno rešljivih enačb, največ na t. i. nelinearni Schrödingerjevi enačbi. Knjiga je namenjena matematičnim fizikom, poznavalcem problematike. Odlikuje se po preglednosti in matematični rigoroznosti in bo kot taka verjetno ena standardnih referenc na tem modernem področju.

Random media, Ed. G. Papanicolaou, New York, Springer-Verlag 1987, 321 str. (The IMA volumes in mathematics and its applications; 7) 68 DM.

Zanimanje za slučajne sredine se je sprva povečalo zlasti v fiziki z odkritjem pojavov lokalizacije in steklastih faz. Zaradi fundamentalnih matematičnih težav pri reševanju so se v zadnjih letih vključili v to problematiko tudi matematiki oz. matematični fiziki. Obravnavani zbornik del z delovnega srečanja o slučajnih sredinah kaže na pestrost tega področja, saj segajo teme od rigoroznih matematičnih razprav do uporabe v trdni snovi. Zlasti je teža na enodimenzionalnih problemih, saj je trenutno tu največ znanega.

Peter Prelovšek

LUDWIG G., An axiomatic basis for quantum mechanics. Vol. 2., Quantum mechanics and macrosystems, Springer-Verlag, Berlin 1987, 242 str. 155 DM.

V prvem zvezku zanimive monografije o osnovnih konceptih kvantne mehanike je avtor zgradil aksiomatsko osnovo za opis mikrosistemov izključno s sistematično analizo odzivov makrosistemov, ki jih uporabljamo za njihovo detekcijo. Tak makrosistem največkrat sestoji iz pripravljalnega in detekcijskega dela. Prvi del deluje na drugega, pri tem je mikrosistem prenašalec interakcije. Drugi zvezek monografije pa je namenjen predvsem iskanju odgovora na vprašanje, ali sta kompatibilna predstavljeni objektivni opis makrosistemov in standardna ekstrapolirana kvantna mehanika makrosistemov. Ekstrapolirana kvantna mehanika avtorju pomeni kvantno mehaniko sistemov, ki so sestavljeni iz velikega števila elementarnih mikroskopskih enot. Kompatibilnost obeh pristopov je sicer formalno dokazana, vendar je po avtorjevem mnenju nov pristop k problemu merjenja bolj smiseln, ker se izogne zahtevam po nenadnem skrčenju valovnega paketa in razmišljanju o vlogi zavesti pri procesu merjenja. V delu je podrobno razvita teorija, ki opisuje proces merjenja kot interakcijo med mikrosistemi in makroskopsko merilno napravo. Teorija omogoča vsaj v principu izračun observable, ki jo merilna naprava. Avtor je posvetil veliko pozornost posebnim primerom merjenja. Tako pri problemih v zvezi z zaporednimi merjenji obširno razpravlja o znanem paradoksu Einsteina, Podolskega in Rosena in ga razjasni v okviru svoje teorije. Dotakne se tudi vprašanj smeri časa in mesta človeka v kvantni mehaniki. Delo zaključuje obširno poglavje o splošnih problemih fizikalnih teorij. Gre za vprašanja aksiomatskih osnov, fizikalne vsebine in povezave z realnostjo. Monografija ni lahko branje. Pritegnila bo predvsem bralce, ki si skušajo pridobiti vpogled v konceptualne osnove in v vprašanja interpretacije kvantne mehanike.

Peter Gosar

Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems. Ed. H. Kesten, Springer-Verlag, Berlin 1987 (The IMA volumes in Mathematics and its applications).

Zanimanje za perkolacijsko teorijo in statistično mehaniko neskončnega sistema delcev z medsebojno interakcijo se je v zadnjih letih močno povečalo tako med fiziki kot med matematiki. Objavljena dela zato kažejo zelo različno stopnjo rigoroznosti. Ta knjiga je zbornik predavanj delovnega srečanja na naslovno temo, ki je bilo na inštitutu za matematiko in njeno uporabo v Minneapolisu leta 1986. Obravnavane so bile predvsem naslednje teme: Relaksacija v okviru stokastičnega Isingovega modela za eno- in večdimenzionalne mreže. Perkolacijska teorija in kritični eksponenti v okolici perkolacijske kritične točke, stokastični modeli rasti, slučajno gibanje (random walk) v fraktalnih mrežah, sebi izogibajoče slučajno gibanje (selfavoiding random walk) za opis polimerov, modeli reverzibilne rasti v d-dimenzionalni mreži, kontaktni proces kot model za širjenje infekcije, fraktalni opis perkolacije, rast Edenovih gruč itd. Velik del prispevkov je izrazito matematične narave, tako da je knjiga namenjena tistim specialistom, ki jih predvsem zanima rigoroznost pristopov in manj fizikalna plat.

Slobodan Žumer

OBLIKA VESOLJSKIH TELES

MARIJAN PROSEN

PASC a 9530 SI

Oblika vesoljskega telesa je odvisna od mase, vrtenja in drugega. Članek oceni mejno maso, pri kateri postane vesoljsko telo kroglasto.

THE SHAPE OF HEAVENLY BODIES

The shape of a heavenly body depends on mass, rotation and on other quantities. The mass limit for a spherical form of the heavenly body is estimated.

Planetoidi in manjši sateliti imajo različne oblike, vsi planeti in njihovi večji sateliti pa so kroglasti. Sonce in planeti imajo obliko krogle, ki je zaradi vrtenja še rahlo sploščena. Krogla je zaradi gravitacije stabilna oblika vesoljskega telesa z dovolj veliko maso.

Zanimivo se je vprašati, kolikšna je mejna masa, pri kateri se vesoljsko telo oblikuje v kroglo. Naj bo m masa vesoljskega telesa in ρ njegova povprečna gostota, tako da je prostornina približno m/ρ . Zaznamujmo z R radij vesoljskega telesa. Ne glede na obliko velja ocena za velikost $R \approx (m/\rho)^{1/3}$. Gravitacijski pospešek na površju vesoljskega telesa je $g \approx Gm/R^2 \approx Gm^{1/3} \rho^{2/3}$, tlak v središču telesa pa $p \approx \rho g R \approx Gm^{2/3} \rho^{4/3}$.

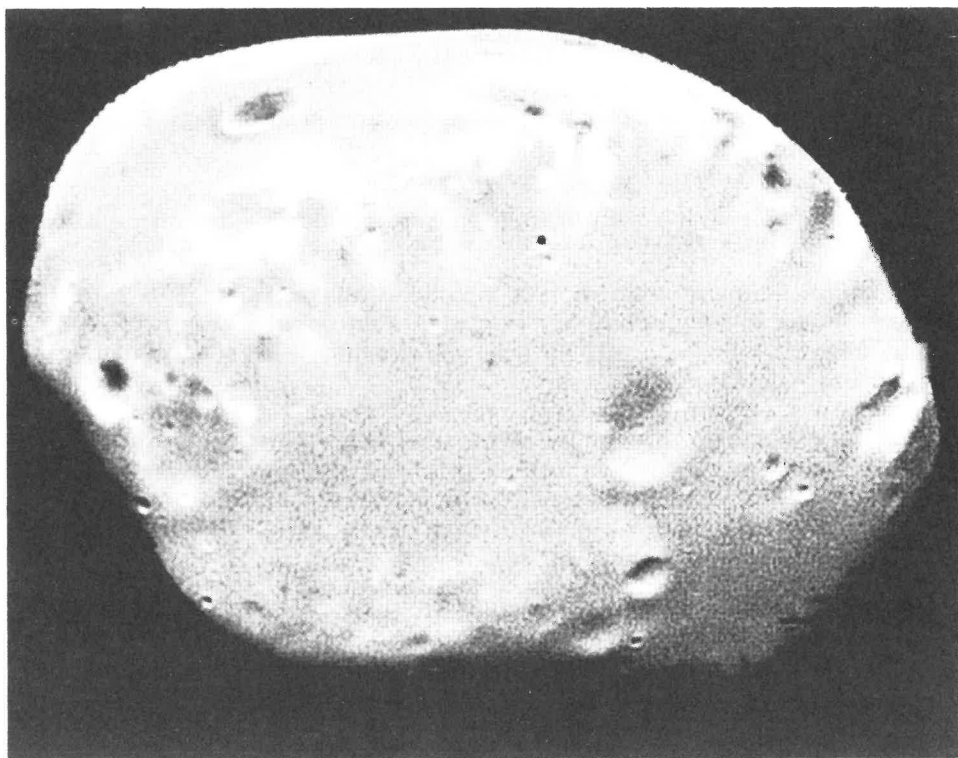
Zaradi gravitacije nastane v notranjosti poljubnega trdnega telesa mehanična napetost. Ocenimo napetost σ v plasti vesoljskega telesa s tlakom tako, da na meji postavimo mejo prožnosti σ_m za napetost. Pri prekoračitvi meje prožnosti ($\sigma > \sigma_m$) trdno telo spremeni obliko. Oceno za mejno maso, pri kateri vesoljsko telo ravno zavzame kroglasto obliko, dobimo iz pogoja $p \approx \sigma_m$. Tako je mejna masa približno $\rho^{-2} (\sigma_m/G)^{3/2}$. Iz nje izhaja še mejni radij, ki je približno $\rho^{-1} (\sigma_m/G)^{1/2}$.

Ocene za mejno maso in mejno velikost, ko trdno telo iz določene snovi ravno zavzame kroglasto obliko [1]

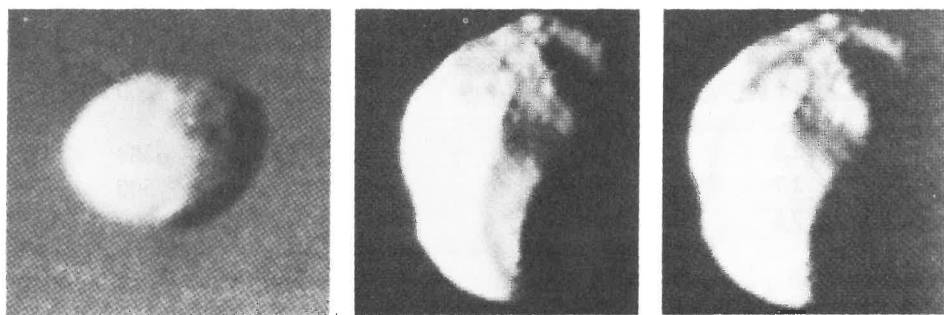
Snov	Gostota	Meja prožnosti	Mejna masa	Mejni radij
led	$1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	$3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$	10^{19} kg	200 km
Lunina				
hribina	2,5	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{19}$	300
granit	2,7	10^8	$3 \cdot 10^{20}$	500
železo	7,8	10^9	10^{21}	500

Radij vseh planetov Osončja je mnogo večji od mejnega. Vsi planeti so okrogli. Marsova satelita Fobos ($27 \times 21 \times 18 \text{ km}^3$) in Deimos ($15 \times 12 \times 11 \text{ km}^3$) pa imata nepravilno obliko, sta krompirjasta. Njuni velikosti sta manjši od mejnega radija [2], [3], [4] (Sl. 1). Enako velja tudi za najbolj notranji Jupitrov satelit Amaltejo z razsežnostma preseka $250 \times 150 \text{ km}^2$ in pred nekaj leti odkrite Saturnove satelite [5] (Sl. 2).

Saturnov satelit Mimas pa je primer vesoljskega telesa blizu meje. Ima obliko krogle z radijem okoli 400 km, maso okoli $3 \cdot 10^{19} \text{ kg}$ in povprečno gostoto blizu gostote ledu, a na njegovem površju vidimo globok krater s premerom okoli 120 km, najbrž ostanek padca meteorita [5] (Sl. 3).



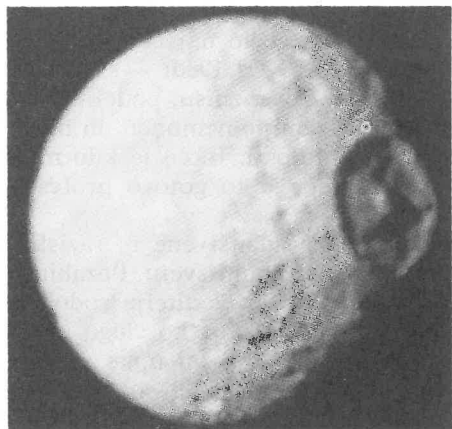
Sl. 1 Marsov satelit Deimos (glej še sliko na naslovni strani)



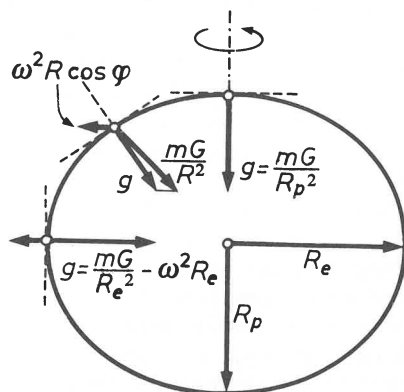
Sl.2 Trije novi Saturnovi sateliti z velikostjo okoli 100, 200 in 250 km, ki so jih odkrili z Voyagerji

Poglejmo še, kako vpliva vrtenje na obliko vesoljskega telesa. Vzemimo, da se vrti telo z radijem R , ki je večji od mejnega. Telo je sploščeno ob polih: ekvatorski radij R_e je večji od polarnega R_p . V ravnovesnem stanju je površje v poljubni točki pravokotno na vektorsko vsoto gravitacijskega in radialnega pospeška (Sl. 4). Za obliko je pomembno njuno razmerje $\omega^2 R/g = \omega^2 R^3/m G$.

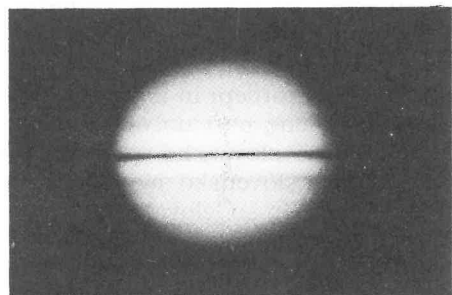
Sploščenost vesoljskega telesa, na primer planeta, to je relativni odmik površja od krogle, je namreč približno enaka razmerju pospeškov, torej $(R_e - R_p)/R_e \approx \omega^2 R^3/mG$. Izračunana sploščenost planetov se dobro ujema z opazovano [3], [4] (Sl. 5).



Sl. 3 Saturnov satelit Mimas ima že okroglo obliko



Sl. 4 Ravnotezna oblika vrtečega se planeta. Normala v poljubni točki površja kaže v smer vektorske vsote gravitacijskega in radialnega pospeška; φ — zemljepisna širina



Sl. 5 Sploščenost Saturna

Sploščenost planetov [1]

Planet	Izračunano* $\omega^2 R^3/mG$	Izmerjeno $(R_e - R_p)/R_e$
Zemlja	1/29	1/30
Mars	1/22	1/19
Jupiter	1/11	1/15
Saturn	1/6	1/9

* $\omega = 2\pi/t_0$; t_0 je vrtilni čas planeta [3], [4].

LITERATURA

- [1] A. V. Bjalko, *Naša planeta — Zemlja*, Nauka, Moskva 1983.
- [2] F. Avsec—M. Prosen, *Astronomija*, DZS, Ljubljana 1975
- [3] K. U. Allen, *Astrofizičeskie veličiny*, Mir, Moskva 1977.
- [4] *Astronomičeskij kalendar'* (Postojannaja čast'), 7. izd., Nauka, Moskva 1981.
- [5] *Sky and Telescope*, 61 (1981) številka 1, 12 in 14.

ŽAGARJEVA NAGRADA PROFESORJU IVANU VIDAVU

Številnim družbenim priznanjem, ki jih je za svojo izjemno dejavnost prejel akademik profesor dr. Ivan Vidav — med njimi so celo največja (Prešernova nagrada 1952, Kidričeva nagrada 1970, nagrada AVNOJ 1980) — se je pridružila tudi Žagarjeva nagrada. Le-ta se, tako beremo v razpisu, podeljuje za izredne uspehe na področju vzgoje in izobraževanja, tem pomembnem in hkrati občutljivem segmentu narodove kulture in samobitnosti. In če je kdo med matematiki-pedagogi, ki si zasluži Žagarjevo nagrado, je to gotovo profesor Vidav.

Pustimo ob tej priliki ob strani njegove vrhunske znanstvene in raziskovalne uspehe, ki so mu prinesli slavo in ugled v znanstvenem svetu. Pozabimo na njegovo delo utemeljitelja, sooblikovalca in nespornega voditelja sodobne slovenske matematične šole. Odmislimo si celo njegovo pionirsko vlogo pisca temeljnih slovenskih matematičnih del oziroma njegov obsežni opus slovenskih matematičnih monografij, učbenikov, knjig za popularizacijo matematike in strokovnih člankov. Storimo torej nekaj, kar je sicer nedopustno, in zane-marimo tri četrtine Vidavove ustvarjalnosti. In kaj vidimo: celo v tem primeru ostane pred nami podoba izjemne osebnosti, učitelja in vzgojitelja novih matematičnih rodov, neutrudnega predavatelja, strogega, a vendar razumevajočega izpraševalca pri izpitih, priljubljenega in nepogrešljivega mentorja pri diplomskih, magistrskih in doktorskih delih, oblikovalca novih študijskih programov.

Raznovrstne so vloge, v katerih nastopa profesor Vidav kot pedagog, in o vsaki bi se dalo marsikaj povedati. Ta trenutek pa izkoristimo le za bežno misel, poudarek, opozorilo na to in ono razsežnost njegovega pedagoškega in kulturnega poslanstva, ki se je nemara premalo zavedamo.

Profesor Vidav je dejansko učitelj in vzgojitelj v prvotnem in najbolj žlahtnem pomenu besede. V štirih desetletjih svoje poklicne poti univerzitetnega profesorja je vzgojil takorekoč vse živeče in delujoče slovenske matematike in to ne le posredno glede na svoj vpliv na celotno slovensko matematično šolstvo, ampak tudi neposredno, tako da je kot mentor sodeloval vsaj v eni fazi njihovega strokovnega razvoja. Že samo to dejstvo zgovorno potrjuje vlogo profesorja Vidava v slovenski družbi in zasluži vso pozornost in priznanje.

Profesor Vidav je izvrsten predavatelj. O tem se strinjajo vsi, ki so imeli kdaj priložnost občudovati njegov predavateljski dar, neverjetno lahkoto in eleganco, s katero zna na tablo pričarati tudi najbolj zapletene matematične ideje in jih narediti dostopne drugim. Poslušalcev pa v svoji dolgoletni predavateljski praksi ni imel malo. Poslušali so ga študentje matematike in fizike na dodiplomskem in podiplomskem nivoju, naravoslovci in tehniki, osnovnošolski učitelji in srednješolski profesorji na seminarjih Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Zavoda za šolstvo, dijaki srednjih šol in priložnostni poslušalci na številnih poljudnih predavanjih. In kaj poleg vsestranskega temeljitega znanja, ki ga tako rad posreduje drugim, pri Vidavu — predavatelju najbolj preseneča? Morda posluh za skladnost in lepoto matema-

tičnega izvajanja, saj njegova predavanja dajejo pravi estetski užitek. Ali pa izjemen občutek za poslušalca, ko se v vsakem trenutku natanko zaveda, koliko mu le-ta zmore slediti. Nemara občutek za čas in za pravo mero. Skoraj nikoli ne zaide v časovno stisko, kar se drugim predavateljem, ne samo začetnikom, pogosto dogaja. In čeprav vedno temeljito in korektno izpelje dokaze, nikoli ne pretirava niti z rigoroznostjo niti z abstraktnostjo. Vedno pove samo toliko in v taki obliki, kot je za razumevanje potrebno.

Vidavov pomen v slovenskem prostoru presega ozke okvire matematike. Njegovo ime poznajo mnogi slovenski izobraženci in tudi drugi ljudje, ki morda nikoli niso imeli zares opravka z matematiko. Ker pa je ukvarjanje z matematiko zlasti v domačih razmerah ne samo znanstvena, ampak tudi kulturna dejavnost, je profesor Vidav tudi nepogrešljivi del slovenske kulture v najširšem smislu. Brez njega bi bila mnogo bolj siromašna.

Ob Žagarjevi nagradi profesorju Vidavu iskreno čestitamo in mu želimo, da bi nam tako kot doslej še dolgo odkrival lepote in skrivnosti matematike in nas navduševal zanje. Gotovo mu je v največje zadoščenje, ko vidi, da raste nov rod slovenskih matematikov, ki že dosegajo uspehe tudi v mednarodnem merilu. Ali bi bilo preveč drzno sklepati, da si želi med njimi poleg znanstvenikov tudi dovolj dobrih pedagogov, takih po srcu, kakršen je sam?

Milan Hladnik

NOVE KNJIGE

Probability Theory and Mathematical Statistics with Applications, Proceedings of the 5th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Visegrad, Hungary, 20.—24. May 1985, Editors W. Grossmann et al., Akademiai Kiado, Budapest 1988.

V knjigi je natisnjen izbor prispevkov 5. panonskega simpozija o matematični statistiki, ki je bil leta 1985 v Visegradu na Madžarskem. Od 3. panonskega simpozija dalje so organizatorji izmenoma madžarski in avstrijski matematiki. Prvotno je bil simpozij namenjen predstavitvi rezultatov in srečanju specialistov za verjetnostni račun in matematično statistiko, delujočih na področju bivše rimske province Panonije. Tokrat pa so na njem sodelovali še mnogi matematiki iz drugih evropskih držav in tudi od drugod. Jugoslavijo zastopata v zborniku P. M. Peruničić iz Beograda in T. Pogany iz Sombora.

Zbornik je razdeljen v dva dela. V prvem so zajeti članki iz verjetnostnega računa. V njih avtorji rešujejo tako elementarne kot zahtevnejše probleme, kot so: slučajno polnjenje škatel v naraščajočem vrstnem redu, slučajni sprehod v večrazsežnem času, osnove nekolmogorovske teorije verjetnosti in drugi. Več člankov se ukvarja z markovskimi verigami, slučajnimi procesi in tudi drugimi vrstami odvisnosti.

Drugi del, ki je namenjen prispevkom iz matematične statistike, pokriva ocenjevanje parametrov, testiranje hipotez, različne statistične metode in modele, regresijo in uporabo v stohastični kinetiki kemičnih reakcij.

Knjiga je namenjena predvsem poznavalcem verjetnostnega računa in matematične statistike.

Tomaž Košir

OB ŽIVLJENJSKEM JUBILEJU PROFESORJA KRIŽANIČA

Marca meseca je praznoval šestdesetletnico matematik, pedagog in publicist profesor dr. France Križanič. Ob visokih življenjskih jubilejih je v lepi navadi spregovoriti nekaj besed o življenju in delu slavljenca v znamenje zahvale za njegov prispevek skupnosti, v kateri deluje.

Na prvi pogled je ta naloga v primeru profesorja Križaniča preprosta. O plodnih desetletjih slavljenca najbolje pričajo številna matematična besedila, zastavljena v sočnem domačem jeziku in briljantno izpiljenem slogu, s katerimi je obogatil knjižnico slovenskih matematičnih del. Sadove tega dela že dalj časa obirajo tako mlajše generacije slovenskih matematikov kot tudi širok krog uporabnikov in ljubiteljev vsakovrstnega matematičnega znanja, ki je našlo svoje mesto v njegovem opusu. Pisanje matematičnih knjižnih del pa je bilo le ena od dejavnosti profesorja Križaniča; vse so dale pomemben prispevek k širjenju matematične kulture in krepitvi korenin, na katerih počivajo matematične tradicije v slovenskem prostoru. Tu so še strokovno in pedagoško delo ter prizadevanja za oblikovanje sodobnega tipa spoznavanja in študija matematike v našem šolskem sistemu. V domačih razmerah, v katerih obvladovanje za domače potrebe in težave koristnih znanj pogosto ni ravno zaželeno, skrb za dobro poučevanje matematičnih znanj predstavlja težak in običajno zelo nevhvalno opravilo. Za marsikatero od teh zaslug slavljenca ne obstaja »corpus delicti« v obliki pisane besede. Zato seveda niso nič manj dragocene za ožjo, matematično, pa tudi širšo družbeno skupnost. Profesor Križanič je v preteklih desetletjih botroval in pomagal pri vgrajevanju številnih kamenčkov v mozaik delovanja domače matematične skupnosti, ki se, gledano iz današnjega zornega kota, zde nekako samoumevni, a ob njihovem nastajanju temu pogosto še zdaleč ni bilo tako. O tej plati delovanja profesorja Križaniča lahko sicer nekaj malega zaslutimo in sklepamo iz suhega navajanja bibliografskih podrobnosti, dolžnosti, ki jih je opravljal, ter naslovov in časa izdaje posameznih besedil. Večji del pa zunanjim opazovalcem in mlajšim generacijam ostaja skrit.

Rojen v marcu mesecu leta 1928 v Mariboru, srednjo šolo in visoko šolo obiskuje v Ljubljani, kjer leta 1946 maturira, leta 1951 pa diplomira v matematični skupini prirodoslovno-matematične fakultete. Na isti fakulteti leta 1955 uspešno obrani doktorsko disertacijo z naslovom Linearni funkcionali v Banachovem prostoru in osnovni lemma variacijskega računa. Najbrž ni odveč omeniti, da so profesorja Križaniča kot prvega slovenskega matematika pritegnili zanimivi in pomembni problemi funkcionalne analize, ki je kmalu nato postala eno od osrednjih področij uspešnega dela slovenskih matematikov. V tem obdobju od leta 1951 deluje kot asistent na inštitutu za matematiko prirodoslovno-matematične fakultete. Ob tem občasno honorarno poučuje na vrsti srednjih šol v Ljubljani, kjer si, vsaj tako sklepam, pridobi za pisanje srednješolskih učbenikov potrebne izkušnje in občutek. Te izkušnje v šestdesetih letih s pridom uporabi pri pisanju gimnazijskih učbenikov. Sam sem se z delom profesorja Križaniča prvikrat srečal po krtačnih odtisih prvega dela Aritmetike, algebre in analize za gimnazije, s katerimi je prihajala k učnim uram moja gimnazijska profesorica matematike. Brez dvoma je s temi učbeniki med slovenske srednješolske klopi prvikrat zavel sodoben duh matematike.

Leta 1959 ga srečamo na študiju v Moskvi. Istega leta postane docent na katedri za matematiko naravoslovne fakultete in prevzame predavanja iz diferencialnih enačb. Leta 1964 je izvoljen za izrednega, leta 1975 pa za rednega profesorja za ta predmet. Ob tem je spet potrebno poudariti, da se profesor Križanič ne pomišlja spopasti s problematiko diferencialnih, še posebej parcialnih, enačb, ki je v tem času v slovenskem prostoru sorazmeroma slabo zastopana. Rezultat njegove odločitve so prve tej matematični disciplini posvečene slovenske monografije, ki so med drugim v veliki meri olajšale študij teh predmetov mlajšim generacijam slovenskih matematikov.

Leta 1981 je ponovno izvoljen v naziv rednega profesorja za matematično analizo. V obdobju 1976 do 1986 predava navadne in parcialne diferencialne enačbe oziroma analizo III na VTO Matematika in mehanika ter analizo I in II za študente fizike. Hkrati na podiplomskem študiju matematikom predava o upodobitvah grup in linearni analizi na grupah, na podiplomskem študiju za fizike pa vodi tečaj iz teorije grup. V tem času je mentor pri številnih diplomskih in magistrskih nalogah ter eni doktorski disertaciji. Tudi ob tem delu mu književniška žilica ne da miru in zastavi vrsto z vsebino podiplomskega študija povezanih zvežčičev pa tudi monografij.

V zvezi s pedagoškim delom je potrebno še posebej poudariti velike zasluge profesorja Križaniča za oblikovanje in nastanek tehniške smeri visokošolskega študija matematike na domači univerzi. O tem bi znali mnogo več povedati njegovi sodelavci. Sam sem se srečal s študijem matematike šele potem, ko so ta prizadevanja že obrodila sadove. Za predstavo o njegovem odnosu do uporabnih plati matematike vsaj meni osebno zadostuje podatek o letu izdaje, 1960, njegovega zvežčiča z naslovom *Elektronski aritmetični računalniki* (Ljubljana, 1960; v srbskem prevodu 1963). Ob postopnem uvajanju tehniško naravnih predmetov je v prvi polovici šestdesetih let priskočil na pomoč tudi s predavanjem predmetov numerična analiza, aritmetični računalniki in zgodovina matematike ter z vodenjem matematičnega praktikuma.

Slavljenec se ni nikoli izogibal odgovornim dolžnostim povezanim bodisi s samim pedagoškim delom v okviru univerze pa tudi širše, s skrbjo za širjenje in ohranjanje matematične kulture in tradicij v domačih logih. Med pomembnejšimi dolžnostmi te vrste omenimo, da je bil v letih 1967—1969 dekan fakultete za naravoslovje in tehnologijo, v letih 1977—1979 predstojnik VTO Matematika in mehanika, dvakrat predsednik DMFA SRS, ob 25-letnici tega društva odlikovan z redom dela z zlatim vencem, član fakultetnega in univerzitetnega sveta. Tu je še sodelovanje v komisiji za matematiko pri Zavodu za šolstvo SRS, urejanje ali sodelovanje pri urejanju slovenskih ter jugoslovanskih matematičnih glasil in zbirk ter vrsta drugih opravil, ki jim je s pronicljivim občutkom za mesto in vlogo matematike v okviru širše družbene skupnosti ter s širokim matematičnim in intelektualnim obzorjem ponavadi molče in možato podstavil svoj hrbet. Ob tem velja opozoriti na njegove, pogosto polemične, zapise v slovenskih časopisih in revijah o različnih šolskih, kulturnih in družbenih vprašanjih, po katerih ga pozna in ceni tudi širša slovenska kulturna javnost.

S tem skromnim prikazom prispevka profesorja Križaniča naj končam svoj prigodni zapis. Naj slavljenec ne zameri, če sem kako njegovo zaslugo

izmeril z napačnim ali pomanjkljivim vatlom, kako postavil na napačno mesto, spet drugo pa nehote prezrl.

Spoštovani profesor Križanič, za konec naj mi bo v imenu generacij, ki so se srečevale z Vami pri prebiranju Vaših iskrivih matematičnih besedil, dovoljeno pristrčno čestitati ob Vašem jubileju ter Vam zaželeli še dolga leta plodnega in uspešnega dela. Upamo, da bomo imeli kmalu spet priliko »razpoznavati znake« v kakem od Vaših, v moji generaciji že pregovornih, predgovorov k Vašim matematičnim besedilom, saj Vam domača beseda pa tudi misel tečeta kot le malokateremu izmed slovenskih matematikov.

Vital Sever

NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1988

Sklad Borisa Kidriča pri Raziskovalni skupnosti Slovenije je v letošnjem letu podelil 6 Kidričevih nagrad, 16 nagrad Sklada Borisa Kidriča in 20 nagrad za izume in izboljšave. Med nagarjenci je tudi 10 članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije; za te objavljamo povzetek utemeljitev.

Zbral in uredil Ciril Velkovrh

Kidričeve nagrade

1. Doc. dr. **Franc Forstnerič** za vrhunsko delo na področju kompleksne analize.

Nagrajenec je v vodilnih matematičnih revijah v minulih dveh letih objavil 9 del s področja teorije analitičnih funkcij več kompleksnih spremenljivk. V njih je obravnaval štiri ločene probleme. Trije od teh sodijo med osrednje probleme teorije analitičnih funkcij več kompleksnih spremenljivk, zato so izsledki, ki so v pretežni meri dokončni, vrhunskega pomena za teorijo. Poseben poudarek zasluži delo o vložitvah strogo psevdokonveksnih območij. Leta 1974 je bilo dokazano, da je mogoče taka območja vložiti v strogo konveksna območja kot transversalne preseke z mnogoterostmi. Od tedaj so največji eksperti poskušali dokazati, da je strogo psevdokonveksna območja mogoče na enak način vložiti v krogle. Nagrajenec je z zelo domiselnim in preprostim prijemom dokazal, da to ni možno.

2. Prof. dr. **Boštjan Žekš** in doc. dr. **Adrijan Levstik** za izjemne dosežke pri raziskavah tekočih kristalov.

Nagrajenca sta skupaj s sodelavci v zadnjih letih objavila šestnajst člankov v uglednih mednarodnih strokovnih revijah. V njih obravnavata fizikalne lastnosti feroelektričnih trdnih in tekočih kristalov z modularno ali vijačno strukturo v urejeni fazi. Z uspešno povezavo teorijskih in eksperimentalnih metod jima je uspelo razjasniti problem nenavadnega obnašanja feroelektričnih tekočih kristalov ob prehodu v vijačno fazo. Značilna za te sisteme je smektična ali plastna ureditev molekul, ki pri nižjih temperaturah preide v strukturo z vijačno modulacijo; pri tem pride do spontane polarizacije.

Nagrade Sklada Borisa Kidriča

1. Prof. dr. **Gojmir Lahajnar** za raziskave vezave vode v strukturnih in bioloških materialih.

Nagrajenec obravnava v devetih objavah gibanje molekul v kondenziranih fazah. Poseben poudarek je na dinamiki, transportu in naravi vezanja vodnih molekul v bioloških sistemih. Z eksperimentalnimi modeli je pojasnil vlogo vode v biološkem sistemu in njeno sodelovanje v pojavih, ki so vezane na posebne lastnosti molekulskih skupkov in struktur ter s tem omogočajo delovanje biosistema. S tem je pojasnil pojave pri strjevanju cementa in difuziji vodnih molekul, ki so pri gibanju omejene s samosvojo geometrijo struktur, s katerimi integrirajo.

2. Dr. **Dragoljub Mihailović** za raziskave polprevodnikov in visoko temperaturnih superprevodnikov s sipanjem svetlobe.

Nagrajenec v desetih objavah posega v analizo vzbujenih stanj kristalne mreže. Prispevki vsebujejo nove ugotovitve pri Jahn-Tellerjevih sistemih, kvantno moduliranih strukturah in elektronskih ekscitacijskih spektrih visokotemperaturnih superprevodnikov. Nagrajenec opiše elektronska vzbujena stanja sistema s kooperativnimi Jahn-Tellerjevimi deformacijami in izmeri difuzijo ter zajetje vzbujenih nosilcev naboja v sestavljenih polprevodnikih. Prvi je točno določil vzdrževanje nosilcev v kvantnih jamah. Proučeval je tudi sipanje svetlobe na kvazidelcih v superprevodni dinamiki.

Nagrada za vrhunske dosežke na področju izumov in izboljšav

Dr. **Igor Levstek** za uvajanje merskih metod jedrske magnetne resonance pri selekciji oljaric in na številna druga področja ter za sistem za vzpodbujanje inovacij na Institutu Jožef Stefan, ki je dal v zadnjih 15 letih več kot 250 izumov in prav toliko izboljšav.

Nagrade za izume in izboljšave

1. **Zdenko Milavc**, Marko Dolanc in Herman Kralj za tlačilko za infuzijo — Infuzon, s katero so natančno dozirali raztopino farmakov. Doma razvita in izdelana aparatura ima nekaj bistvenih tehničnih prednosti pred uvoženimi.

2. **Franc Dacar**, Peter Reinhardt, Albert Kolar, Boris Težak in Marjan Špegel za grafični procesor GRAF — 100, katerega so zasnovali kot cenen dodatek za funkcionalno razširitev alfanumeričnih terminalov DEC in Gorenje z ločljivostjo 480×256 slikovnih elementov s šestnajstimi odtenki sivine.

3. **Andrej Eleršek**, mag. Jurij Šoba, Edo Kladnik, mag. Zmago Štandler in dr. **Matjaž Žaucer** za toplotnoizolacijski keramični material, ki so ga izdelali na podlagi mineralnih vlaken in keramičnega veziva, obstojnega do $1300\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pri tem so uporabili domače surovine in razvili izventehnološki postopek za izdelavo končnih izdelkov različnih oblik in dimenzij. Material se odlikuje po visoki trdnosti in negorljivosti.

4. **Dušan Kustrle**, dr. **Marko Valič**, Roman Debeljak, Danijel Šlebingar in Milan Krsmanović za laserski sistem za trodimenzionalno obdelavo, ki sestoji iz robota, laserja, računalnika in programskega paketa. Celota sestavlja robotsko celico za rezanje z laserjem.

PREŠERNOVE NAGRADE ŠTUDENTOM MATEMATIKE IN FIZIKE

Na univerzi v Ljubljani med letošnjimi Prešernovimi nagrajenci ni nobenega študenta matematike in fizike. Pač pa je Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo podelila Prešernove nagrade dvema študentoma matematike in petim študentom fizike. Poleg teh navajamo še šest študentov fizike, ki so že pred leti dobili Prešernovo nagrado na Univerzi, a jih zaradi nepopolnih podatkov v arhivih v lanskem seznamu nismo omenili. V dopolnilnem seznamu navajamo prave zaporedne številke; med študenti fizike je bilo nagrajenih že 41 posameznikov z 38 Prešernovimi nagradami. Kolegom se opravičujemo za neljubo napako.

Maja Bleiweis, Ciril Velkoverh

Prešernove nagrade študentov na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v letu 1987

Matematika

- | | |
|------------------|---|
| 2. Brešar, Matej | Odvajanja in sorodne preslikave na prakolobarjih |
| 3. Cerne, Miran | Občutljivost stacionarnih porazdelitev markovskih verig |

Fizika

- | | |
|--------------------|--|
| 8. Kaluža, Matjaž | Leptoni in kvarki v Hararijevem modelu z rišoni |
| 9. Rokavec, Aleš | Računanje hitrosti širjenja akcijskega potenciala po živčni celici |
| 10. Križnič, Ervin | Določitev sprejemljivosti detektorja ARGUS za reakcijo $\gamma\gamma \rightarrow 4\pi$ |
| 11. Poberaj, Igor | Meritev tenzorja nelinearne optične susceptibilnosti |

Prešernove nagrade študentov na Univerzi v prejšnjih letih

- | | |
|--------------------------|--|
| 1. 1953 Ribarič, Marjan | Torzijska togost L nosilcev |
| in Povh, Bogdan | |
| 5. 1957 Kernel, Gabrijel | Jedrska absorpcija žarkov gama |
| 9. 1962 Vencelj, Peter | Maxwellski plin kot model nevtronskega moderatorja |
| 12. 1968 Koller, Jože | Spin-spinska konstanta sklapljanja HF in HF ₃ |
| 23. 1972 Luzar, Metka | Študij paraelektrične faze v kristalu ND ₄ D ₃ AsO ₄ s kvadrupolno moteno jedrsko resonanco devterija |

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnimi razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62–64. Pri korekturah na krtačnih odčitih uporabljajte dogovorjene oznake (glejte Slovenski pravopis. DZS, Ljubljana 1962.)

DVANAJSTI MATEMATIČNI SEMINAR

Po ustaljenem redu je bil letos na vrsti društveni seminar iz matematike. Predavanja 12. in 13. februarja je povezoval naslov Diferencialne enačbe. Privlačno, zanimivo in prijetno so jih podali učitelji matematike s Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, z Ekonomske fakultete in s Fakultete za elektrotehniko.

Ob sodelovanju zavoda SR Slovenije za šolstvo in Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko je Društvo na začetku seminarja izdalo gradivo z vsemi predavanji. Nekatera izmed njih bodo ponatisnjena tudi v Obzorniku za matematiko in fiziko. Zato predavanja omenimo samo na kratko.

J. A. Čibej je v predavanju *Diferencialne enačbe in matematično modeliranje* privlačno predstavil nekaj primerov za uporabo diferencialnih enačb v biologiji, demografiji, ekonomiji in medicini.

F. Križanič je na sebi svojstven, prijeten in kdaj pa kdaj šegav način v predavanju *Simetrije* govoril o »težkih teorijah s preprostimi zgledi«. Pokazal je, kako uporabimo Liejeve grupe pri reševanju diferencialnih enačb.

J. Vrabec je v predavanju *Kako obesiti sliko?* razgrnil zanimiv matematični problem in ga reševal postopno; od uporabe geometrijskih metod je prišel do teorije katastrof.

F. Križanič je v svojem drugem predavanju spregovoril o *Kaosu*, ki danes marsikoga zanima.

G. Tomšič pa je živo pokazal nekaj najpreprostejših primerov za *Uporabo diferencialnih enačb v elektrotehniki*.

Na letošnjem štiriindvajsetem društvenem seminarju se nas je zbralo rekordno število; prišlo nas je prek 180 iz vse Slovenije, s srednjih in tudi z osnovnih šol. Prijateljsko smo si stisnili roke in v zanimivih in živahnih pogovorih v odmorih izmenjali izkušnje, potožili nad težavami in pogosto gluhi ušesi šolskih oblasti. Več kot sto se nas je zbralo na družabnem večeru v Maximu. Prijetno razpoloženje je potrdilo misel, da so tudi takšna srečanja potrebna in koristna. Za zabavo je poskrbel Andrej Kuzman, ki je pripravil točko, v kateri je z besedo in sliko kritično razčlenil več strani našega šolskega vsakdanjika.

Da so bile šole obveščene o seminarju in da je gradivo izšlo pravočasno, je poskrbela Nada Razpet. Strokovni vodja seminarja je bil Peter Petek.

Milena Strnad

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS prireja ob sodelovanju Oddelka za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in Zavoda SRS za šolstvo za svoje člane, učitelje srednjih šol

SEMINAR IZ EKSPERIMENTALNE ASTRONOMIJE

Seminar bo 15., 16. in 17. septembra 1988 v prostorih observatorija na Golovcu. Ker bomo delali praktične vaje, bo število udeležencev omejeno. Sprejeli bomo predvidoma prvih 20 prijavljenih.

Vsebina vaj:

1. Karakteristike daljnogleda Newtonovega tipa
2. Astronomska fotografija (oprema, snemanje zanimivih objektov, fotografska obdelava)
3. Fotometrija Sonca (robna zatemnitev, temperatura peg)
4. Spektroskopija Sonca (snemanje spektra, identifikacija črt in določitev njihovega profila)
5. Večbarvna fotometrija zvezdne kopice (HR diagram, določitev oddaljenosti in starosti kopice)
6. Časovni potek pomračitve prekrivalne spremenljivke (določitev nekaterih parametrov dvojnega sistema)

Prijave pošljite na naslov: Astronomsko-geofizikalni observatorij, 61001 Ljubljana, p. p. 20.

Kotizacijo 30 000.— din bodo udeleženci nakazali na žiro račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS št. 50101-678-49168 ali plačali ob začetku seminarja.

Bojan Dintinjana, Pavla Ranzinger

RAZPIS PRIZNANJ

Na osnovi Pravil o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi (Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 160), vabimo podružnice DMFA in aktive matematikov in fizikov na šolah, da do 15. septembra 1988 predlagajo kandidate. Kandidati morajo biti člani društva. Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: DMFA SRS, Komisija za pedagoško dejavnost, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 64.

Milena Strnad