

ODPISNO
R-177/3

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

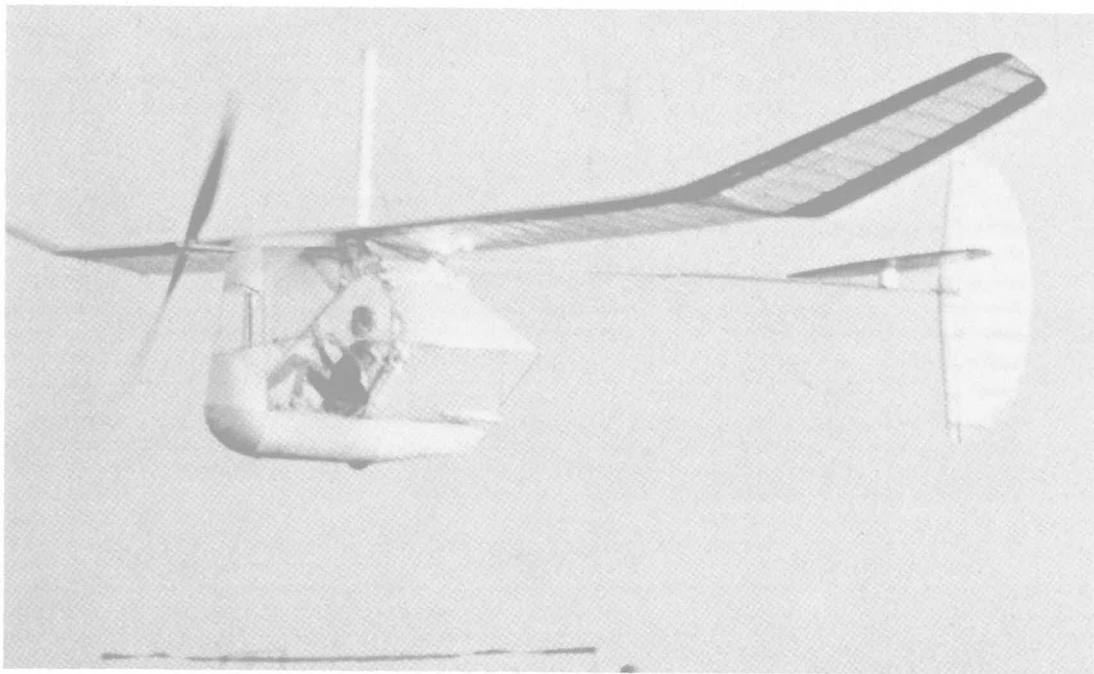
YU ISSN 0473-7446

1988

Letnik 35

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 35 — ŠTEVILKA 3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1988

Uredniški odbor: Milan Hladnik — urednik za matematiko, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Niko Prijatelj — glavni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 7000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 3500.— din, za ustanove in podjetja 20000.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 2000.— din, dvojna številka 4000.— din, stare številke 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1550 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1988 DMFA — 910

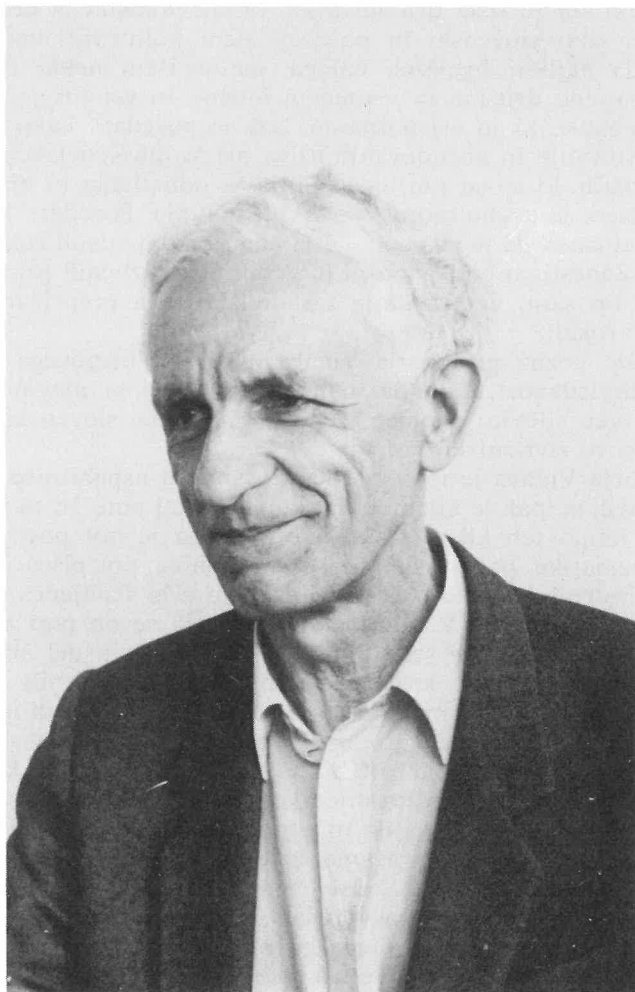
Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

	Str.-Page
Praznik našega profesorja (Marija Vencelj, foto Peter Legiša)	65
Članki — Articles	
Casovne mere vzporednih algoritmov — Time measures of parallel algorithms (Matija Lokar)	68
Iskanje minima funkcije ene spremenljivke — Minimizing a function of one variable (Janez Šparovec)	73
Kulminacija vesoljskih teles — The culmination of heavenly bodies (Marijan Prosen)	79
Moč živih bitij — Power of living creatures (Andrej Likar)	81
Iztekanje plina — Efflux of gas (Janez Strnad)	83
Vesti — News	
Obvestilo naročnikom (Janez Strnad, Ciril Velkovrh)	82
Profesor dr. Anton Moljk — častni član društva (Zbral Janez Strnad)	86
Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v l. 1987 (Zbral in uredil Milan Hladnik)	87
Okrogla miza: Matematika in fizika v šoli (Milena Strnad)	90
Izjava DMFA SRS	92
Novi člani društva v letu 1987 (Ciril Velkovrh)	92
39. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov (Martina Koman)	93
Odgovori — Answers — 122 (Aleksandar Jurišić)	93
Nove knjige — New books	
(Bojan Magajna, Milan Hladnik, Janez Strnad, Ivan Vidav, Peter Petek, Peter Vencelj, Marija Vilfan, Tomaž Košir, Gorazd Lešnjak) 72, 78, 85, 94, 95, 96, III	
Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1987 (Ciril Velkovrh)	IV

Na ovitku: Letalo na človeški pogon Monarch B., ki je leta 1984 zmagalo na tekmo-
vanju. V manj kot treh minutah je preletelo tisočpetstometersko pot v obliki tri-
kotnika (glej članek na str. 81, [1]).

PRAZNIK NAŠEGA PROFESORJA



Sredi januarja je praznoval sedemdesetletnico življenja naš profesor Ivan Vidav. Brez vsakega slavlja, kakor je v svoji skromnosti želel, ne pa tudi brez odmeva v srcih svojih učencev in sodelavcev.

Ob tej priliki sta že izšla dva sestavka, ki sta predstavila delo in lik profesorja Vidava širši slovenski in posebej njeni kulturni javnosti. Meni je pripadla morda najbolj hvaležna naloga, da napišem nekaj besed za slovensko matematično družino in v njenem imenu. In vendar je težko opisati to izjemno osebnost, ki jo vsi poznamo, laže je povedati, kako veliko in nedeljeno spoštovanje in občudovanje uživa pri svojih sodelavcih in učencih: današnjih in tistih, ki so se jim leta študija že odmaknila in bi se v njih po vseh zakonih časa že davno moral osuti kult učitelja. Povedati, kako smo ponosni, da ga poznamo, da je naš učitelj, da nam je kdaj stisnil roko — ponosni, da ga imamo. Zanesljivo bolj ponosni in veseli ob družbenih priznanjih, ki jih je prejel, kot on sam, ne nazadnje zaradi iskrenega prepričanja, da so se znašla v pravih rokah.

Kdor поблиže pozna profesorja Vidava, iskrivost njegovega duha in njegovo veliko razgledanost, čuti, da matematični genij ni njegov edini talent. Pa vendar je tako silovito izjemen, da je — na srečo slovenske matematike — odločil njegovo življenjsko pot.

Pot profesorja Vidava je matematika. Posamezni uspehi niso cilj, ob katerem bi se ustavil, ampak le kilometrski kamni ob tej poti. In ta pot se trojno, četverno vije mimo teh kilometrskih kamnov. To je pot povojnega razvoja slovenske matematike, pot matematika znanstvenika, pot pisca in učitelja.

Bralcem Obzornika je bilo bogato znanstveno delo slavljenca predstavljeno ob njegovi šestdesetletnici. V zadnjih desetih letih so ob poti zrasli novi kilometrski kamni. Tako šteje sedaj seznam profesorjevih del štirideset znanstvenih razprav, osemnajst knjig, devetindvajset strokovnih člankov, petnajst mentorstev doktorjem matematike in deset raziskovalnih nalog. Njegova znanstvena dela so bila v mednarodnem matematičnem svetu vedno sprejeta z veliko pozornostjo, kar dokazuje njihovo pomembnost in kvaliteto; njegove knjige, obogatene s spoštovanjem do jasne razlage in lepe slovenske besede, so dar slovenski matematiki in z njo slovenski kulturi. Ob spoštovanje zbujačem opusu se nehote vprašamo, kako je ob svojem obsežnem pedagoškem in do pred nekaj leti tudi vodstvenem delu naš profesor vse to utegnil premisliti in napisati. Rada bi ga vprašala, pa ga ne bom. Tudi vedel ne bi. Njegovo delo je nehoteno odrekanje osebnemu času. Po drugi strani pa je tako izjemen matematik, da ni naključje, da sodi v skupino tistih osupljivih ljudi,

redkih tudi v svetovnem merilu, ki zmorejo tako znanstveno delati kot pisati matematične knjige.

Ima pa še eno odliko, po kateri ga široka slovenska matematična javnost najbrž najbolje pozna: izjemen predavateljski dar. Sam sposoben preplezati najtežje previsne stene je nepreksljliv in skrben vodnik svojim učencem po hribovju in sredogorju matematike, izbirajoč pri tem najlepša in najbolj uglajena pota. Vsem nam je in bo zgled učitelja matematike. Pri tem prav nič ne moti dejstvo, da ob tem delu očitno uživa. Morda bo tej ugotovitvi skušal ugovarjati, zanikati je ne more. Vsi poznamo tisti njegov nasmešek, ki mu prebегne obraz, ko na tabli pokaže kako posebno lepo in presenetljivo preprosto rešitev zapletenega problema. Rad predava. Morda je v tem skrivnost, da je dolga leta ob pomanjkanju učiteljev zmogel predavati za dva.

Znanstvena in učiteljska pot profesorja Vidava je tudi pot povojnega razvoja slovenske matematike. Zaradi svojega znanstvenega genija je po naravnem izboru za profesorjem Plemljem prevzel mesto vodje slovenskih matematikov. Zaradi svoje osebnosti in navdušujoče pedagoške moči to tudi res je v najžlahtnejšem pomenu besede.

Pod njegovim vodstvom je iz katedre z dvema matematikoma zrasla številčna samostojna visokošolska organizacija. Ustanovljen je bil Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, ki združuje še več matematikov raziskovalcev. Ob mentorstvu profesorja Vidava je zrasla in se razrasla moderna slovenska matematična šola funkcionalne analize, ob njej so se uveljavile še druge raziskovalne smeri. Imamo več smeri na dodiplomskem, dve na podiplomskem študiju matematike. Pri vsem je profesorjev delež neprecenljiv.

Ne moremo mimo dela profesorja Vidava v Društvu matematikov, fizikov in astronomov. Eden njegovih ustanoviteljev in večletni predsednik je vrsto let vodil tudi komisijo za republiška tekmovanja mladih matematikov. Poznamo ga po odličnih predavanjih s seminarjev za srednješolske profesorje, kot pisca in sourednika Obzornika za matematiko in fiziko in kot odgovornega urednika knjižne zbirke Sigma. Njegovo bogato knjižno bero, ki jo je v pretežni meri izdalo Društvo, smo že omenili. Omeniti pa je treba še nekaj. Njegov zgled in vzpodbuda sta dala slovenski matematiki nove pisce in z njimi zbirko, na katero smo lahko ponosni.

Beseda je prešibka, da bi se z njo lahko primerno zahvalili profesorju Vidavu za vse, kar nam daje. Zato mu ob prazniku samo voščimo:

Spoštovani naš profesor, še na mnoga lepa leta!

Marija Vencelj

ČASOVNE MERE VZPOREDNIH ALGORITMOV

MATIJA LOKAR

Math. Subj. Class. (1985) 65 W 05, 68 Q 10

V članku obravnavamo mere za časovne lastnosti vzporednih algoritmov na pretočnih in večprocesorskih računalnikih.

TIME MEASURES OF PARALLEL ALGORITHMS

In this article we consider some measures about the performance of parallel algorithms on pipeline and multiprocessor computers.

1. Uvod

Potreba po zmogljivejših računalnikih je pripeljala do razvoja novih računalnikov, ki niso von Neumannovega tipa. V [3] so predstavljeni različni modeli teh novih arhitektur. Le-te so za sabo potegnile tudi nov pristop k razvoju algoritmov, ki jih izvajamo na teh računalnikih. V članku so predstavljeni določeni parametri, s katerimi ocenjujemo lastnosti teh algoritmov. Pri uporabi takih parametrov v praksi se srečamo z določenimi problemi, ker ne obstaja standardni model vzporednega računalnika.

2. Časovne lastnosti vzporednih algoritmov na pretočnih računalnikih

Čas izvajanja vektorske operacije lahko razdelimo na dva dela. Prvi je začetni čas in drugi izračun posameznih komponent rezultata. Kot smo videli pri obravnavi modelov vektorskih računalnikov ([3]), ta čas izrazimo s formulo

$$T = S + f n$$

kjer je n dolžina vektorja, S začetni čas in f čas izračuna komponente rezultata. Čas, potreben za izvedbo skalarne operacije, pa označimo s t_{op} . V tabeli 1 so prikazane tipične vrednosti za S , f in t_{op} . Oklepaji v tabeli označujejo uporabo skalarnih operacij za vektorske in jih moramo opraviti tolikokrat, kolikor je dolžina vektorja. Tako seštevanje elementov vektorja zahteva en vektorski ukaz, ki se izvede v $4n + 122$ časovnih enotah, ali pa n seštevanj skalarnih vrednosti, za kar potrebujemo $13n$ enot. Vrednosti v tabeli so izražene v večkratnikih $40 ns$ in veljajo za računalnik CDS STAR, predhodnik računalnikov Cyber serija 200.

Tabela 1

	t	f	S	$S/(t-f)$
+, —	13	0.5	71	6
x	17	1	159	10
/	46	2	167	4
$\sqrt{\quad}$	74	2	155	3
zaokr.	11	0.5	91	9
$\sum a_i$	(13)	4	122	(14)
skal. p.	(17 + 13)	5.5	137	(6)

Iz formule $T = S + f n$ izhajata dve očitni posledici. Prva je linearna odvisnost časa od števila operacij in druga dejstvo, da je smiselno uporabljati vektorske operacije, če je f precej manjši kot t_{op} . Če je $n > S/(t - f)$, je bolje, če uporabimo eno vektorsko operacijo kot n skalarnih.

Zaradi ugotovitve, da število operacij direktno vpliva na časovno zahtevnost, sta Lambiotte in Voight [2] vpeljala pojem asimptotske povezanosti med vektorskim in skalarnim algoritmom.

Definicija:

Vektorski algoritem, ki uporablja $R_V(N)$ operacij, je asimptotsko konsistenten z najboljšim skalarnim algoritmom, ki zahteva $R_S(N)$ operacij, če velja $R_V(N) = O(R_S(N))$.

Naslednja očitna lastnost, ki izhaja iz časovne formule, je ta, da je koristno delati s čimdaljšimi vektorji.

Postopek, s katerim računanje organiziramo z vektorskimi operacijami, imenujemo vektorizacija. Vendar vektorizacija, ki je uspešna za velike N , lahko pri majhnih N odpove, ker postane vpliv začetnega časa S prevelik. Zato je za take N potrebno uporabiti drugačno vektorizacijo ali pa računati skalarno.

Hockney in Jesshope [1] sta vpeljala uporaben pojem dolžine polizkoristka. **Definicija:**

Dolžina polizkoristka $n_{1/2}$ je dolžina vektorja, ki je potrebna da dosežemo polovico maksimalnega izkoristka računalnika.

Izkaže se, da je poleg maksimalne možne hitrosti to zelo uporaben podatek. Omeniti velja še Amdahlov zakon. Naj računski postopek sestavlja m skalar-nih in n operacij, ki jih lahko izvedemo vektorsko. Potem velja, da lahko hitrost računanja povečamo kvečjemu za faktor $(m + n)/m$. Ugotovitev velja tudi, če bi bile vektorske operacije neskončno hitre. Na primer: če imamo polovico skalarnih operacij, z uporabo vektorizacije ne moremo več kot dvakrat povečati hitrost.

3. Časovne lastnosti večprocesorskih računalnikov

Pri analizi vzporednih algoritmov, kjer uporabljamo več procesorjev, se je kot mera uspešnosti algoritma zlasti uveljavil pospešek, ki je definiran kot

$$S_p = \frac{\text{čas teka z uporabo 1 procesorja}}{\text{čas teka z uporabo } p \text{ procesorjev}}$$

Dobra lastnost te definicije je v tem, da uporablja izvajalni čas in s tem zajema tudi čas, ki je potreben za komunikacijo in sinhronizacijo, če je ta potrebna. Slabost pa je v tem, da nas običajno bolj zanima, koliko hitreje lahko rešimo probleme z uporabo več procesorjev kot na običajnem računalniku von Neumannovega tipa. Radi bi torej primerjali najboljši zaporedni in naš vzporedni algoritem. Zato vpeljemo S_p' kot kvocient med izvajalnim časom z uporabo najhitrejšega zaporednega algoritma na enem procesorju in izvajalnim časom z uporabo vzporednega algoritma s p procesorji. Število S_p' nam da marsikdaj veliko bolj realno sliko o lastnostih vzporednega algoritma. Očitno je namreč, da algoritem z odličnim S_p še ne pomeni dejanskega izboljšanja glede na običajni zaporedni algoritem.

Pri konstruiranju vzporednih algoritmov je najboljše, kar lahko dosežemo, linearni pospešek (glede na število procesorjev), saj to zagotavlja kar najboljšo izrabo procesorjev. To je, za probleme velikosti N želimo doseči asimptotski pospešek v obliki

$$S_p(N) = cP - g(P, N)$$

kjer je

$$0 < c \leq 1, \quad 0 \leq g(P, N) = o(1) \quad (N \rightarrow \infty)$$

in c neodvisen od P in kar se le da blizu 1. Funkcijo $g(P, N)$ si lahko predstavljamo kot kazen za uporabo vzporednosti na majhnih problemih.

Vendar linearni pospešek ni vedno dosegljiv. Obstajajo problemi, kjer velja

$$S_p(N) \leq d$$

in je d neodvisen od P . Tak primer nam označuje slabo vzporednost problema. Za mnoge probleme iz linearne algebre je najboljši možni pospešek

$$S_p(N) = cP / \log P - g(P, N)$$

kar je sprejemljivo, čeprav odvisnost ni linearna.

V splošnem lahko glede na število S_p vzporedne algoritme razdelimo v štiri skupine (Stone [5])

Tabela 2

S	primeri
kp	matrični račun, diskretizacija
$kp / \log_2 p$	urejanje, tridiagonalni linearni sistemi linearne rekurzivne enačbe, izračun
$k \log_2 p$	iskanje
k	določene nelinearne rekurzije in operacije

S k smo označili konstanto med 0 in 1; odvisna je od računalnika (običajno blizu ena), p pa je število procesorjev.

Ware ([6]) je predlagal nekoliko drugačno definicijo pospeška, kjer se jasneje vidi vpliv skalarnega računanja v vzporednem algoritmu

$$S_p = ((1 - \alpha) + \alpha/p)^{-1}$$

Tu je α delež dela v algoritmu, ki ga lahko opravimo vzporedno, čas izvajanja z uporabo enega procesorja pa je normaliziran na 1.

Slabost Warejeve definicije je v tem, da je $S_p = p$ za popolnoma vzporedni algoritem. Definicija torej ne upošteva časa komunikacije, zakasnitve itd.. Zato je Busbee ([6]) predlagal naslednjo spremembo Warejeve formule

$$S_p = ((1 - \alpha) + \alpha/p + \sigma(p))^{-1}$$

kjer $\sigma(p)$ izraža dodatno delo, ki nastane zaradi vzporednosti.

Če poznamo pospešek, lahko definiramo tudi učinkovitost vzporednega sistema. Tako vpeljemo mero učinkovitosti

$$E_p = S_p / p$$

Število E_p je omejeno z 1. Običajno se izkaže, da E_p teži k 0 z naraščajočim p , kar je očitno znamenje, da določen algoritem ni popolnoma vzporeden.

Za primerjavo vzporednih algoritmov lahko vpeljemo tudi funkcijo

$$F_p(A) = S_p(A)/C_p(A)$$

kjer $F_p(A)$ meri učinkovitost danega algoritma A . Število $C_p(A)$ tolmačimo kot stroške algoritma in je definirano z

$$C_p(A) = p T_p(A)$$

če s $T_p(A)$ označimo čas teka algoritma A z uporabo p procesorjev. Potem je

$$F_p(A) = S_p(A)/p T_p(A) = E_p/T_p = E_p S_p/T_1 \leq 1$$

Za zgled vzemimo naslednji primer. Recimo, da moramo izračunati vsoto

$$A = \sum_{i=1}^{16} a_i$$

Z uporabo enega procesorja potrebujemo za izračun 15 seštevanj. Če postavimo čas enega seštevanja kot časovno enoto, dobimo $T_1 = 15$. Če imamo na voljo dva procesorja, lahko tvorimo dve vsoti

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_8 \\ b_2 &= a_9 + a_{10} + \dots + a_{16} \end{aligned}$$

istočasno, kar zahteva 7 časovnih enot in nato

$$A = b_1 + b_2$$

kar spet zahteva 1 časovno enoto. Torej lahko A izračunamo v $T_2 = 7 + 1 = 8$ časovnih enotah. Z uporabo treh procesorjev lahko zmanjšamo potrebni čas na 6 časovnih enot, z uporabo 4, 5, 6 ali 7 procesorjev na 5 enot in z 8 ali več procesorji na 4 časovne enote. Pokažimo izračun še za tri procesorje. Vsoto izračunamo v treh korakih

- a) $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_5$
 $b_2 = a_6 + a_7 + \dots + a_{10}$ $b_3 = a_{11} + \dots + a_{15}$
- b) $c_1 = b_1 + b_2$ $c_2 = b_3 + a_{16}$
- c) $A = c_1 + c_2$

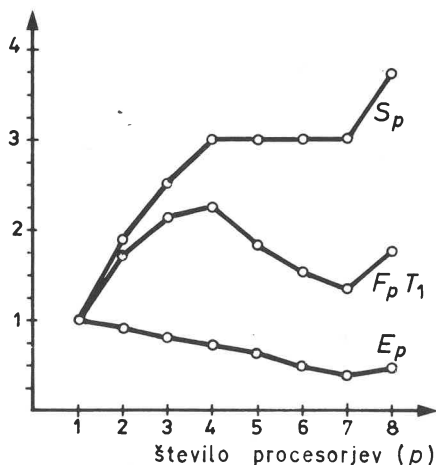
V tabeli 3 so zbrani vsi rezultati, na sliki pa so prikazani še grafično.

Iz tabele vidimo da ima $F_p T_1$ maksimum pri $p = 4$. Torej je za izračun A najbolj smotrno uporabiti 4 procesorje.

Parametri, ki smo jih vpeljali, dajo le en pogled na lastnosti vzporednega algoritma. Druge lastnosti so še stabilnost in analiza napak. Najbolj pomembno pa je razpoznavati, kateri algoritmi so po svoji naravi vzporedni in kateri se dajo napraviti vzporedni.

Tabela 3

p	T_p	C_p	S_p	E_p	$F_p T_1$
1	15	15	1	1	1
1	8	16	1.88	0.94	1.76
3	6	18	2.5	0.83	2.08
4	5	20	3	0.75	2.25
5	5	25	3	0.60	1.80
6	5	30	3	0.50	1.50
7	5	35	3	0.43	1.29
8	4	32	3.75	0.47	1.76



LITERATURA

- [1] R. Hockney, C. Jesshope, *Parallel Computers: Architecture, Programming and Algorithms*, Adam Hilger, Bristol 1981.
- [2] J. J. Lambiotte, Jr., R. G. Voigt, *The solution of tridiagonal systems on the CDC STAR-100 computer*, ACM Trans. Math. Software, **1** (1975), pp. 308–329.
- [3] M. Lokar, *Vektorski in vzporedni računalniki*, Obzornik za matematiko in fiziko **35** (1988) 1–2, pp 1–12.
- [4] U. Schendel, *Introduction to numerical methods for parallel computers*, Ellis Horwood (1984).
- [5] H. S. Stone, *Problems of parallel computation, Complexity of sequential and parallel numerical algorithms*, ed. J. F. Traub, Academic Press (1973).
- [6] W. Ware, *The ultimate computer*, IEEE Spect., **10**, 3 (1973), pp. 89–91.

NOVE KNJIGE

BLACKKADAR, B., K-Theory for Operator Algebras, Math. Sci. Research Institute Publ., **5**, Springer-Verlag, New York 1986, 338 str.

Uporaba **K**-teorije je v zadnjih petnajstih letih prinesla nove metode v področje operatorskih algebr. Zdi se, da je ta teorija dobila poseben zagon nekako po letu 1973, ko je v Brownu, Douglasu in Fillmoru uspelo z metodami algebraične topologije klasificirati bistveno-normalne operatorje do unitarne ekvivalence modulo kompaktni operatorji. Razvili so teorijo ekstenzij komutativnih **C***-algebr in pokazali, da je v nekem smislu dualna topološki **K**-teoriji. To je bilo takrat presenetljiva zveza med dvema na videz povsem različnima področjema matematike: algebraično topologijo in operatorsko teorijo. Njihovo odkritje je pritegnilo silovito pozornost drugih raziskovalcev; ti so teorijo ekstenzij razširili na nekomutativne **C***-algebre. Pomemben nov prodor je uspel v začetku osemdesetih let Kasparovu s t. i. **KK**-teorijo, ki zajema kot posebna primera tako teorijo ekstenzij **C***-algebr kot klasično topološko **K**-teorijo. **K**-teorija operatorskih algebr se je izkazala za koristno orodje pri proučevanju strukture **C***-algebr, uporabna pa je tudi pri določenih problemih iz topologije in diferencialne geometrije.

Blackadarjeva knjiga je učbenik, ki zajema običajno **K**-teorijo **C***-algebr, teorijo ekstenzij in **KK**-teorije, v zadnjem poglavju pa je navedenih tudi nekaj primerov uporabe v geometriji in topologiji. Kolikor je avtorju teh vrstic znano, je to doslej edina celovita knjiga o **K**-Teoriji operatorskih algebr. Napisana je zelo pregledno, vključene so tudi naloge in še odprti problemi. Namenjena je predvsem specialistom iz operatorskih algebr, zanimanje pa bo zbudila tudi med topologi.

Bojan Magajna

ISKANJE MINIMA FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE

JANEZ ŠPAROVEC

Math. Subj. Class. (1985) 65 K 10

V članku sta opisana dva algoritma za računanje minima funkcije ene spremenljivke: z zlatim rezom in algoritem, ki temelji na Fibonaccijevih številih.

MINIMIZING A FUNCTION OF ONE VARIABLE

The article contains the golden section search and Fibonacci search for computing the minimum of a function of a single variable.

1. Uvod

Iskanje ekstrema funkcije ene spremenljivke je zelo pomembno pri reševanju optimizacijskih problemov, saj je to osnovna operacija za mnoge zahtevnejše metode računanja ekstremov funkcij več spremenljivk. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je ekstremna vrednost minimum.

DEFINICIJA. Zvezna funkcija $f(x)$ doseže pri $x = x_0$ minimum, če eksistira tako pozitivno število δ , da je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$

za vsak h , ki zadošča neenačbi $|h| < \delta$.

Enakost je v neenačbi izključena, razen seveda za $h = 0$. Pri definiciji minima smo se omejili na zadostno bližino točke, kjer je minimum. Gre nam torej za tako imenovani lokalni minimum. V večji razdalji pa lahko funkcija zavzema manjše ali enake vrednosti kakor pri $x = x_0$. Če ima odvedljiva funkcija $f(x)$ pri $x = x_0$ minimum, je tam odvod enak nič. Če pa obstaja točka, kjer je prvi odvod enak nič, drugi odvod pa pozitiven, nastopa v tej točki minimum.

2. Računanje minima unimodalne funkcije

V tem razdelku bomo obravnavali metodo za iskanje minima dane unimodalne funkcije, ki predpostavlja le zveznost funkcije in zato zahteva le računanje funkcijskih vrednosti.

Oglejmo si definicijo unimodalne funkcije:

DEFINICIJA. Funkcija $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ unimodalna, če obstaja takšna točka $x_0 \in [a, b]$, da je funkcija na $[a, x_0]$ strogo padajoča, na $[x_0, b]$ pa strogo naraščajoča.

Pri razvijanju optimizacijskih metod je ključna naslednja trditev:

LEMA 1. Naj bo $f(x)$ zvezna in unimodalna na intervalu $[a, b]$. Za določitev podintervala, na katerem je minimum, je treba izračunati $f(x)$ natanko v dveh notranjih točkah.

DOKAZ. Če imamo vrednost funkcije samo v eni notranji točki x_1 , še ne vemo, ali je minimum na levi ali na desni strani te točke. Podinterval, na katerem leži minimum, pa lahko določimo, če izračunamo še eno vrednost funkcije, npr. v točki x_2 . Naj bo $a < x_1 < x_2 < b$. Poglejmo si obe možnosti:

(i)
$$f(x_1) > f(x_2)$$

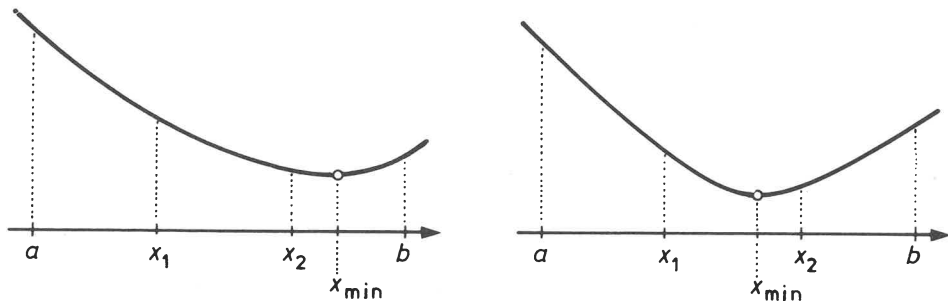
V tem primeru minimum leži na podintervalu $[x_1, b]$. Če bi bil namreč minimum manjši od x_1 , bi vrednosti funkcije $f(x_1)$ in $f(x_2)$ bili v nasprotju z unimodalnostjo funkcije na intervalu $[a, b]$. Glej sliko (1).

$$(ii) \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sedaj minimum leži na podintervalu $[a, x_2]$. Če bi bil namreč minimum večji od x_2 , bi vrednosti funkcije $f(x_1)$ in $f(x_2)$ bili v nasprotju z unimodalnostjo funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Podobno sklepamo v primeru $a < x_2 < x_1 < b$.

Na ta način lahko z dovolj velikim številom funkcijskih vrednosti izračunamo minimum funkcije tako natančno, kot želimo. Učinkovitost tega procesa je odvisna od izbire točk, v katerih računamo funkcijske vrednosti. Eno točko uporabimo pri skrčitvi na podinterval, druga točka pa že leži na tem podintervalu in nam rabi pri naslednji delitvi. Torej, čeprav na začetku zahtevamo dve funkcijski vrednosti, je za vsako nadaljnjo delitev potrebna ena sama.



Slika 1

3. Algoritem z zlatim rezom

Postavimo si naslednje vprašanje: „Ali je možno oblikovati algoritem tako, da dolžina intervala, ki vsebuje minimum, pada na vsakem koraku s konstantnim faktorjem t ?' Naj bo trenutni interval $(a^{(i)}, b^{(i)})$ in $x_1^{(i)}$ in $x_2^{(i)}$, kjer je $x_1^{(i)} < x_2^{(i)}$, notranji točki, v katerih računamo vrednost funkcije. Te točke morajo zadoščati enačbi

$$\frac{x_2^{(i)} - a^{(i)}}{b^{(i)} - a^{(i)}} = \frac{b^{(i)} - x_1^{(i)}}{b^{(i)} - a^{(i)}} = t \quad (1)$$

Od tod sledi, da je

$$x_1^{(i)} - a^{(i)} = b^{(i)} - x_2^{(i)} \quad (2)$$

Če privzamemo, da je $f(x_1^{(i)}) > f(x_2^{(i)})$, potem je

$$\begin{aligned} a^{(i+1)} &= x_1^{(i)} \\ b^{(i+1)} &= b^{(i)} \end{aligned}$$

in uporabimo točko $x_2^{(i)}$, ki leži na podintervalu z minimumom, pri naslednji delitvi

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}$$

To je dovolj, da lahko opišemo postopek natančneje. Imamo

$$\frac{b^{(i+1)} - x_1^{(i+1)}}{b^{(i+1)} - a^{(i+1)}} = \frac{b^{(i)} - x_2^{(i)}}{b^{(i)} - x_1^{(i)}} = t \quad (3)$$

in po enačbi (2) je

$$b^{(i)} - x_2^{(i)} = b^{(i)} - a^{(i)} - (b^{(i)} - x_1^{(i)}) \quad (4)$$

tako da velja

$$\begin{aligned} \frac{b^{(i+1)} - x_1^{(i+1)}}{b^{(i+1)} - a^{(i+1)}} &= \frac{b^{(i)} - a^{(i)}}{b^{(i)} - x_1^{(i)}} - \frac{b^{(i)} - x_1^{(i)}}{b^{(i)} - x_1^{(i)}} = \\ &= \frac{1}{t} - 1 = \\ &= t \end{aligned}$$

Tu smo uporabili enačbi (1) in (3). Iz zadnje enakosti sledi enačba za faktor t

$$t^2 + t - 1 = 0 \quad (5)$$

V poštev pride le pozitivni koren enačbe. Faktor t je

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \doteq 0.618 \quad (6)$$

Torej lahko iz (1) izračunamo naslednjo točko $x_2^{(i+1)}$. Podobno ravnamo, če je $f(x_1^{(i)}) \leq f(x_2^{(i)})$. Najprej zapišemo

$$\begin{aligned} a^{(i+1)} &= a^{(i)} \\ b^{(i+1)} &= x_2^{(i)} \end{aligned}$$

in uporabimo točko $x_1^{(i)}$, ki leži na podintervalu z minimom, pri naslednji delitvi

$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}$$

Sedaj imamo

$$\frac{x_2^{(i+1)} - a^{(i+1)}}{b^{(i+1)} - a^{(i+1)}} = \frac{x_1^{(i)} - a^{(i)}}{x_2^{(i)} - a^{(i)}} = t$$

in po enačbi (2) je

$$x_1^{(i)} - a^{(i)} = b^{(i)} - a^{(i)} - (x_2^{(i)} - a^{(i)}) \quad (7)$$

tako da iz (1) in (7) sledi

$$\begin{aligned} \frac{x_2^{(i+1)} - a^{(i+1)}}{b^{(i+1)} - a^{(i+1)}} &= \frac{b^{(i)} - a^{(i)}}{x_2^{(i)} - a^{(i)}} - \frac{x_2^{(i)} - a^{(i)}}{x_2^{(i)} - a^{(i)}} = \\ &= \frac{1}{t} - 1 = \\ &= t \end{aligned}$$

in odtod sledi zopet enačba (5) za faktor t .

4. Algoritem s Fibonaccijevimi števili

Postavimo si sedaj vprašanje, ali obstaja algoritem, ki je optimalen v tem smislu, da daje za določeno število izračunov funkcijskih vrednosti največje razmerje med prvim in zadnjim intervalom. Mi bomo privzeli, da ima zadnji interval dolžino 1. V tem primeru je optimalna strategija tista, za katero je prvi interval največji.

Naj bo L_n dolžina najdaljšega intervala, ki se zmanjšuje do enotnega intervala z n funkcijskimi izračuni. Hitro najdemo omejitev za L_n . Izračunajmo vrednost funkcije v dveh notranjih točkah x_1 in x_2 , kjer je $x_1 < x_2$. Če je minimum na $[a, x_1]$, potem imamo še $n-2$ funkcijskih izračunov za skrčevanje tega intervala, tako da je $x_1 - a \leq L_{n-2}$. Če pa minimum leži na $[x_1, b]$, potem za ta interval ostane še $n-1$ funkcijskih izračunov, saj x_2 leži na tem intervalu. Dobimo, da je $b - x_1 \leq L_{n-1}$. Torej je

$$L_n \leq L_{n-1} + L_{n-2} \quad (8)$$

Ker po LEMI 1 nobena skrčitev na podinterval ni možna z manj kot dvema funkcijskima izračunoma, je $L_0 = L_1 = 1$. Če označimo z F_n oceno za dolžino L_n , dobimo iz neenačbe (8) enačbo

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 &= F_1 = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Ta tročlenska rekurzivna relacija določa Fibonaccijeva števila. Enačbo (9), ki je linearna diferenčna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti, rešimo z nastavkom

$$F_i = r^i$$

Če to vstavimo v enačbo (9), dobimo, da r zadošča enačbi

$$r^2 - r - 1 = 0$$

ki ima dva korena

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (10)$$

Splošna rešitev je

$$F_i = A r_1^i + B r_2^i$$

Vrednosti za A in B dobimo, če zadostimo začetnima pogoju. Zato je

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^{i+1} - r_2^{i+1}) \quad (11)$$

Označimo z N število vseh funkcijskih izračunov. Algoritem, ki izvede optimalno iskanje minima, je potem osnovan na formulah

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}} (b^{(i)} - a^{(i)}) + a^{(i)} \\ x_2^{(i)} &= \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}} (b^{(i)} - a^{(i)}) + a^{(i)} \end{aligned} \quad (12)$$

za $i = 1, 2, \dots, N$. Imamo

$$b^{(i+1)} - a^{(i+1)} = x_2^{(i)} - a^{(i)} = b^{(i)} - x_1^{(i)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}} (b^{(i)} - a^{(i)})$$

tako da je po N izračunih dolžina zadnjega intervala

$$\delta = (b^{(1)} - a^{(1)}) \prod_{i=1}^N \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}} = \frac{b^{(1)} - a^{(1)}}{F_N}$$

kar dokazuje, da algoritem zagotavlja optimalno skrajševanje intervala. Ostalo nam je še, da pokažemo, da smo varčevali z računanjem funkcijskih vrednosti v posameznih točkah. Privzemimo npr., da je $f(x_1^{(i)}) < f(x_2^{(i)})$. Potem moramo pokazati, da je $x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}$. To pa sledi iz (12)

$$\begin{aligned} x_2^{(i+1)} &= \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i}} (x_2^{(i)} - a^{(i)}) + a^{(i)} \\ &= \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i}} \left(\frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}} (b^{(i)} - a^{(i)}) + a^{(i)} - a^{(i)} \right) + a^{(i)} \\ &= x_1^{(i)} \end{aligned}$$

Zanimivo je primerjati delitev z zlatim rezom z delitvijo, ki je osnovana na Fibonaccijevih številih. Če upoštevamo, da je $|r_1| > |r_2|$, potem hitro odkrijemo, da je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F_{N-1}}{F_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_1^N - r_2^N}{r_1^{N+1} - r_2^{N+1}} = \frac{1}{r_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = t$$

Pri tem smo uporabili enačbi (11) in (10). Torej asimptotično oba algoritma učinkujeta z isto hitrostjo na padanje dolžin. Če tudi pri delitvi z zlatim rezom dolžino intervala označimo z G_n , potem je

$$G_i = \frac{1}{t^{i-1}} = r_1^{i-1} \quad (13)$$

in G_i zadošča enačbi

$$G_{i+1} = G_i + G_{i-1}$$

z začetnima pogojema

$$G_0 = t \quad G_1 = 1$$

saj je

$$\begin{aligned} G_i + G_{i-1} &= r_1^{i-1} + r_1^{i-2} \\ &= r_1^{i-2} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= r_1^{i-2} \cdot r_1^2 \\ &= r_1^i \\ &= G_{i+1} \end{aligned}$$

Zanimiv rezultat dobimo, če za $N > 1$ izračunamo

$$\begin{aligned} F_{N-1} + t F_{N-2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} [r_1^N + (r_2 - 1) r_1^{N-1}] \\ &= r_1^{N-1} \frac{2r_1 - 1}{\sqrt{5}} \\ &= r_1^{N-1} \\ &= G_N \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali enačbe (11), (6), (10) in (13). Od tod sledi za $N > 1$, da je

$$G_N < F_N < G_{N+1}$$

Ti rezultati kažejo, da je majhna razlika pri izbiri algoritma z zlatim rezom in algoritma, ki temelji na Fibonaccijevih številih. Po zadnji enačbi algoritem z zlatim rezom nikoli ne zahteva več kot eno dodatno računanje funkcije, da bi zadostil predpisani toleranci. Ker je algoritem z zlatim rezom do neke mere enostavnejši in ne zahteva poznavanja števila N naprej, je v praksi zelo priljubljen.

LITERATURA

- [1] J. Kowalik, M. R. Osborne, *Methods for unconstrained optimization problems*, Amer. Elsevier Pub., New York 1968.
- [2] M. A. Wolfe, *Numerical methods for unconstrained optimization*, Van Nostrand Reinhold, Wokingham 1978.
- [3] K. J. Overholt, *Algorithms supplement*, Computer J., 9 (1967) 414.

NOVE KNJIGE

BORG I., LINGOES J., Multidimensional Similarity Structure Analysis, Springer-Verlag, New York 1987.

Čeprav iz učenega naslova morda to ni jasno, spada knjiga na področje diskretne matematike, natančneje, na področje urejanja in grafičnega prikaza množice (numeričnih, statističnih) podatkov. Že iz uvoda in še bolj seveda iz nadaljnje vsebine namreč zvemo, da se (večrazsežna) strukturna analiza podobnosti ukvarja s predstavitvijo določene končne množice objektov s točkami večrazsežnega evklidskega prostora, pri čemer je mera za podobnost objektov razdalja med ustreznimi točkami. Bolj ko sta si objekta (v nekem smislu) podobna, bliže skupaj ležita točki. Na ta način dosežemo večji pregled nad podatki in med njimi odkrijemo marsikatero povezavo (podobnost), ki je sicer iz tabele ali grafikona ne vidimo.

Knjiga na 390 straneh obravnava različne modele takih predstavitev ter postopke za njihovo konstrukcijo in optimizacijo. Posejana je s 170 ilustracijami in številnimi tabelami, kar že samo po sebi daje vedeti, da je bolj praktično usmerjena. Zanimivi konkretni zgledi segajo od lažjih, npr. rekonstrukcije originalne konfiguracije množice geografskih lokacij iz dane tabele medsebojnih razdalj, do zapletenih psiholoških eksperimentov. Ker ne zahteva mnogo predznanja »klasične« matematike (le nekaj metričnih pojmov, malo odvajanja in osnove linearne algebre), je dostopna vsem študentom. Primera je za vse, ki jih zanimajo praktični problemi.

Milan Hladnik

KULMINACIJA VESOLJSKIH TELES

MARIJAN PROSEN

PACS a9510CI

Prispevek opiše, kdaj je kulminacija vesoljskega telesa enaka prehodu čez meridian opazovališča.

THE CULMINATION OF HEAVENLY BODIES

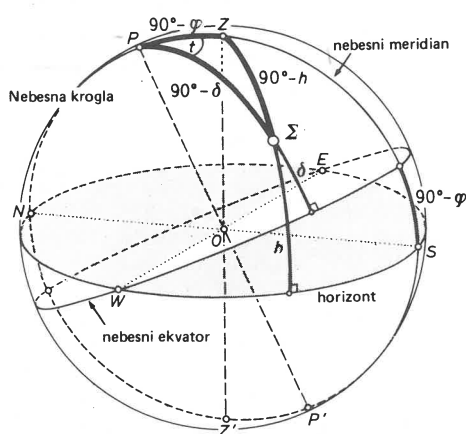
In the article it is described when the culmination of a heavenly body is equal to meridian transit.

Zaradi vrtenja Zemlje se spreminja višina vesoljskih teles. Ko je vesoljsko telo najviše nad obzorjem, rečemo, da *kulminira* [1]. Poglejmo, kako se spreminja višina vesoljskega telesa s časom. To odvisnost izpeljemo iz osnovnega sfernega nebesnega trikotnika $PZ\Sigma$ (Sl. 1):

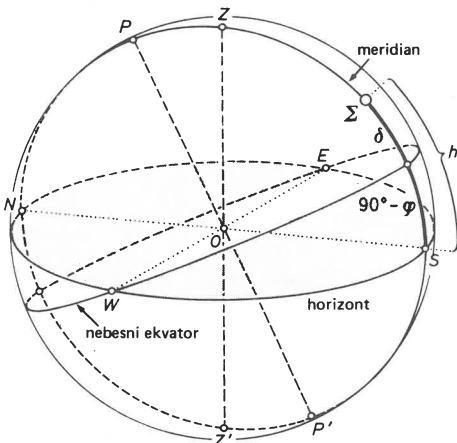
$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (1)$$

Tu pomeni h višino vesoljskega telesa, φ zemljepisno širino, δ deklinacijo vesoljskega telesa, t časovni kot v vlogi mere za čas.

Najprej obravnavamo zgornjo kulminacijo zvezd ($t = 0$). Za dano opazovališče se v enačbi (1) spreminjata h in t , φ in δ pa sta konstantna. Ob kulminaciji je višina vesoljskega telesa največja. Zato poiščemo maksimum za h v (1), torej $dh/dt = 0$. Po odvajanju dobimo $\cos h \cdot dh/dt = -\cos \varphi \cos \delta \sin t = 0$. Ob kulminaciji za zvezde ($\cos \varphi \neq 0$, $\cos \delta \neq 0$) velja $\sin t = 0$. Sledi $t = 0$ (zgornja kulminacija) in $t = 180^\circ$ (spodnja kulminacija). To pomeni, da imajo zvezde ekstremno višino v meridianu opazovališča in lahko kulminacijo zvezd enačimo z njihovim prehodom čez meridian (Sl. 2).



Sl. 1. Osnovni sferni nebesni trikotnik $PZ\Sigma$. O — opazovališče, P — severni nebesni pol, Z — zenit, $Z\Sigma = 90^\circ - h$, $P\Sigma = 90^\circ - \delta$, $PZ = 90^\circ - \varphi$, $\sphericalangle ZP\Sigma = t$. Za kosinus stranice $(90^\circ - h)$ velja: $\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos t$



Sl. 2. Zaradi preglednosti pogledjmo le značilnosti zgornje kulminacije zvezde Σ južno od zenita. Za zgornjo kulminacijo je $t = 0$ in iz (1) sledi $\cos(90^\circ - h) = \cos(\varphi - \delta)$. Tako dobimo preprosto zvezo med h , φ in δ . Višina zvezde Σ v zgornji kulminaciji je torej $h = 90^\circ - \varphi + \delta$, kar neposredno izpeljemo tudi iz slike

V nasprotju z zvezdami druga vesoljska telesa, katerih ekvatorske koordinate se med dnevom spreminjajo, ne dosežejo največje višine ob prehodu čez meridian, ampak blizu njega. Taka telesa so Sonce, Luna, planeti in (včasih tudi) kometi. Čas največje višine takih vesoljskih teles pred prehodom čez meridian ali po njem ugotovimo tako, da pri diferenciranju enačbe (1) upo-

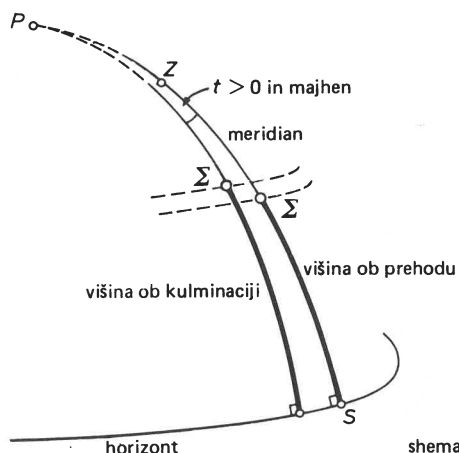
$$\cos h \cdot d h / d t = (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cdot \cos t) \cdot d \delta / d t - \cos \varphi \cos \delta \cdot \sin t = 0,$$

se pravi (za $\cos h \neq 0$) $\sin t = (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos t) \cdot d \delta / d t$. Ob kulminaciji torej t ni nič, ampak ima majhno končno vrednost. Zato postavimo $\sin t \approx t$ in $\cos t \approx 1$ in dobimo za časovni kot

$$t \approx (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta) \cdot d \delta / d t \quad (2)$$

Deklinacija Sonca, Lune in planetov, ki se gibljejo blizu ekliptike, večinoma ne presega vrednosti okoli $\pm 30^\circ$. Za omenjena vesoljska telesa, ki jih opazujemo z naših zemljepisnih širin (Ljubljana $\varphi = 46^\circ$), je vedno $\varphi - \delta > 0$ in izraz $(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta)$ je tudi vedno pozitiven. Znak časovnega kota je tako odvisen le od časovne spremembe deklinacije. Če je $d \delta / d t > 0$ (δ s časom narašča), je $t > 0$ in obratno (Sl. 3).

Tako smo ugotovili, da za vesoljska telesa, ki se jim deklinacija med dnevom spreminja, kulminacije ne smemo enačiti s prehodom čez meridian (Sl. 3).



Za zgled pogledjmo, kako je s kulminacijo Sonca. Za Sonce je $d \delta / d t > 0$ od 22. 12. do 22. 6. V tem času Sonce kulminira po prehodu čez meridian. V času od 22. 6. do 22. 12. pa je $d \delta / d t < 0$ in Sonce doseže največjo višino pred prehodom čez meridian [2], [3].

Sl. 3. Zgornja kulminacija vesoljskega telesa s spremenljivo dnevno deklinacijo v času, ko $d \delta / d t > 0$. Razlika višin vesoljskega telesa Σ ob prehodu čez meridian in ob kulminaciji je poudarjena pretirano

Izračunajmo še, koliko časa največ poteče od kulminacije Sonca do njegovega prehoda čez meridian ali pa od prehoda do kulminacije. Iz [2] ugotovimo, da je največja časovna sprememba deklinacije Sonca okoli $(1''/60)/s$ ob enakonočjih ($\delta = 0$). Iz (2) za $\delta = 0$ in $\varphi = 46^\circ$ dobimo, da Sonce kulminira največ okoli $\frac{1}{4}$ minute pred svojim prehodom ali po prehodu čez meridian opazovališča.

LITERATURA

- [1] F. Avsec — M. Prosen, *Astronomija*, DZS, Ljubljana 1975, str. 33.
- [2] P. Ranzinger in dr., *Naše nebo in Zemlja*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana 1987, str. 4 in 5.
- [3] K. A. Cvetkov — I. F. Polak, *Sferna i opšta astronomija*, Naučna knjiga, Beograd 1952, str. 75 in 76.

MOČ ŽIVIH BITIJ

ANDREJ LIKAR

PACS a 8745 Dy

Prispevek pokaže, kako preprosto na velikostno stopnjo natančno ocenimo mehanično moč živali. Ocenimo preizkusimo na živalih, ki letijo.

POWER OF LIVING CREATURES

In the article it is shown how an order of magnitude estimate of mechanical power for animals can be achieved. The estimate is tested for flying animals.

Človek si od nekdaj želi leteti kot ptice — z lastno močjo. Dostikrat slišimo, da to ni mogoče, ker je prešibek. Obenem pa vemo, da se je nekomu z lastno močjo že posrečilo preleteti iz Anglije v Evropo v zelo lahkem letalu. Polet je bil dolg 35 km in je trajal okrog ene ure [1].

Takšne novice so za fizika kot nalašč, da poskuša z grobimi ocenami priti do lastne sodbe. Zanimivo pri ocenjevanju je, da se vedno presenetljivo hitro in dovolj natančno približamo pravim razmeram, čeprav moramo včasih uporabiti hude zanemaritve in poenostavitve. Pomembno je le to, da si pojav pravilno razlagamo. Take ocene so pri pedagoškem delu zelo cenjene, ker mnogo bolj kot pikolovski računi pokažejo moč fizike in prednost tistega, ki jo zna rabiti [2].

Poglejmo razmere pri lebdenju. Ptica ali žuželka plahuta s krili in potiska curek zraka navzdol. Nasprotno silo curka dobimo iz izreka o gibalni količini $Fdt = d(mv) = v dm$

$$F = v dm/dt \quad (1)$$

Masni pretok zraka dm/dt ocenimo iz površine kril S in hitrosti zraka v

$$dm/dt = \rho S v$$

Z ρ smo zaznamovali gostoto zraka. Sila F (1) je tedaj

$$F = \rho S v^2 \quad (2)$$

Pri lebdeči ptici je sila F enaka njeni teži

$$F = Mg \quad (3)$$

Sedaj lahko ocenimo povprečno mehanično moč

$$P = (dm v^2/2)/dt = \rho S v^3/2 \quad (4)$$

Z enačbami (2), (3) in (4) dobimo

$$P = (Mg)^{3/2}/2(\rho S)^{1/2} \quad (5)$$

Enačba (5) pokaže, da načeloma poljubno šibko in poljubno težko bitje lahko leti, če ima dovolj veliko površino kril. Pri človeku, ki za krajši čas doseže moč enega kilovata in ima maso 70 kg, bi morala krila imeti površino

$$S = (Mg)^{3/2} 4 \rho P^2 = 66 \text{ m}^2 \quad (6)$$

če bi bila brez teže. Tako velika krila, ki bi bila narejena le iz kože, bi imela maso preko 50 kg, za kar bi naš Ikarus potreboval že 480 m² velika krila.

Z zelo lahkim letalom pa ni nepremostljivih težav, čeprav ni upati, da bi v prihodnosti taka letala postala prav množična.

Moči manjših bitij ne poznamo dovolj dobro. Vemo pa tole: bolha skoči v višino glede velikostne stopnje prav toliko kot kobilica, pes, človek, konj in morda slon — en meter. Denimo, da je tako za vsa živa bitja. Pri poskovanju je povprečna moč bitja z maso M

$$P = Mgh/t$$

če je $h = 1$ m, t pa čas od odriva do doskoka

$$t = 2 (2 h/g)^{1/2}$$

Iz zadnjih dveh enačb dobimo

$$P/M = (g^3 h)^{1/2} / 2^{2/3} = 11 \text{ W/kg}$$

Mehanična moč, ki jo zmore bitje, je v grobem približku torej sorazmerna z njegovo maso. Če to upoštevamo v enačbi (6), lahko zapišemo specifično površino kril

$$S/M = g^3/4 \varrho (P/M)^2 = 1,6 \text{ m}^2/\text{kg} \quad (7)$$

Pri pticah [3] je zares specifična površina kril v mejah

$$0,1 \text{ m}^2/\text{kg} < S/M < 2 \text{ m}^2/\text{kg} \quad (8)$$

Naša ocena je znotraj teh meja kljub grobim približkom, ki smo jih uporabili. Ocene za žuželke kažejo, da je specifična površina prav tako v mejah (8).

Podatka za specifično moč $P/M = 100 \text{ W/kg}$ in specifično površino kril $S/M = 0,03 \text{ m}^2/\text{kg}$ pri lahkih letalih [4] ne nasprotujeta enačbi (7), če ocenjujemo na velikostno stopnjo natančno.

Zaključka ta zapis ne potrebuje, bralec ga najde zapisanega v članku S. Pahorja o človeškem telesu in fiziki v srednji šoli [2]. Taki in podobni primeri gotovo osvežijo srednješolsko fiziko, saj ima človek pri njej včasih občutek, da se hote izogiba primerom iz vsakdanjega življenja.

LITERATURA

- [1] M. Drela, J. S. Langford, *Human powered flight*, Sci. Am. **235** (1985) str. 122.
- [2] S. Pahor, *Človeško telo in fizika v srednji šoli*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) str. 193.
- [3] J. Gregori, I. Krečič, *Naši ptiči*, DZS, Ljubljana 1979, str. 12.
- [4] *Tehnička Enciklopedija*, Leksikografski Zavod Jugoslavije, Zagreb 1963, str. 581.

OBVESTILO NAROČNIKOM

S tretjo številko Obzornika za matematiko in fiziko smo izdali že polovico letnega obsega. Zato prosimo tiste naročnike, ki s položnico, priloženo v prvi dvojni številki še niso poravnali letošnje naročnine, da to store čimprej. Znesek 7.000.— din lahko vpačate osebno v pisarni Komisije za tisk DMFA SRS, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, soba 316, ali pa nam ga nakažete na ŽR številka 50101-678-47233 DMFA SRS — Ljubljana.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

IZTEKANJE PLINA

JANEZ STRNAD

PACS a 0130 Na
a 0340 Gr

Bernoullijeva enačba je za pisce uvodnih fizikalnih učbenikov manj preprosta, kakor se zdi na prvi pogled. Čeprav da, na primer, pri iztekanju plina iz posode pravo hitrost, pot do tega izida zavaja.

EFFLUX OF GAS

Bernoulli's equation is for authors of introductory physics textbooks less simple than it appears at first sight. Though it gives, e. g., the proper efflux velocity of a gas, the way to this result is misleading.

Piscem uvodnih učbenikov za fiziko ni lahko. Obsežno gradivo morajo zajeti s knjigo z znosnim obsegom in pri tem ne smejo postavljati zmotnih ali zavajajočih trditev. L. N. Cooper, ki je pomagal postaviti teorijo superprevodnosti, je ob pisanju uvodnega učbenika zavzdihnil: »Pripovedujejo, kako težko je napisati knjigo; toda napisati jo moraš, preden to verjameš.« Natisnjeno besedilo je le vidni vrh, glavni del piščevega premišljevanja ostaja skrit kot potopljeni del ledene gore. Večkrat pisci pogledajo v druge učbenike in tako »živi učbeniška fizika svoje življenje.«

Če bi si pisci, preden bi začeli pisati, morali nabrati vse izkušnje, bi se utegnili tako postarati, da jim ne bi bilo več do pisanja. Učbenik torej kaže napisati čim pozneje, a ne toliko odlašati, da ga ne bi napisali. L. D. Landau, ki je poleg znamenitega učbenika teorijske fizike soustvaril tudi več manj zahtevnih knjig, je zagotovil, da je bolje napisati dve slabi knjigi, kot ne napisati ene dobre. Ne gre pa prikrivati, da se je treba ozirati na vsakokratne možnosti za tiskanje in na zaledje porabnikov.

Zmote in zavajajoče trditve, ki kljub vsej skrbi zaidejo v učbenik, je mogoče popraviti pri poznejših natisih. Pri tem so dragocena opozorila študentov in kolegov.

Kot zgled za značilno težavo učbeniške fizike lahko navedemo *Bernoullijevo enačbo*. Pri izvajanju je treba opozoriti na to, v kakšnih razmerah velja, in pri računanju na to, da velja v konkretnih primerih precej slabše kot druge enačbe uvodne fizike.

Navadno opazujemo del tekočine v stacionarnem laminarnem toku po cevi ali po namišljeni tokovni ceni. Skozi prvi presek priteče v opazovalni del cevi pri tlaku p' prostornina tekočine V' z maso m , s povprečnim kvadratom hitrosti v'^2 in z višino težišča z' , skozi drugi presek pa iz opazovanega dela odteče pri tlaku p prostornina tekočine V z maso m , s povprečnim kvadratom hitrosti v^2 in z višino težišča z . Če razen dela tlaka na obeh presekih zunanje sile in notranje sile ne opravijo nobenega dela, je po izreku o kinetični in potencialni energiji

$$-pV - (-p'V') = m v^2/2 - m v'^2/2 + m g z - m g z' \quad (1)$$

V naslednjem koraku se omejimo na kapljevino, ki jo obravnavamo kot nestisljivo tekočino. Vpeljemo gostoto $\varrho = m/V = m/V'$ in pridemo do enačbe

$$p' + \varrho v'^2/2 + \varrho g z' = p + \varrho v^2/2 + \varrho g z \quad (2)$$

ki jo je prvi zapisal Daniel Bernoulli (1700 do 1782) leta 1738 v *Hydromecanici*.

Vsota tlaka, gostote kinetične energije in gostote potencialne energije po cevi, tokovni cevi ali tokovnici se ohrani. V resnici na račun dodatnega negativnega dela zunanjih sil ali notranjih sil zaradi viskoznosti vsota v smeri toka pojema. Vseeno uporabljamo enačbo (2), a se moramo sprijazniti z relativno napako 10 % in več. Uporabimo jo še za turbulentni tok, če je v povprečju stacionaren, in celo za pline. Pri tem mislimo, da se dovolj zavarujemo, če zagotovimo, da velja enačba le približno in da velja tem boljše, čim manj se razmere v dveh presekih cevi ali tokovne cevi ali dveh točkah tokovnice razlikujejo.

V velikem številu učbenikov, na primer [1] — [5], uporabijo enačbo (2) pri iztekanju plina iz velike posode v prostor z nižjim tlakom. Pri tem vzamemo, da se potencialna energija ne spremeni. V posodi je tlak p' in hitrost $v' = 0$. Zunaj je tlak p in doseže plin hitrost

$$v = [2(p' - p)/\rho]^{1/2} \quad (3)$$

Ali se lahko na enačbo zanesemo, če je relativna razlika tlakov $(p' - p)/p'$ dovolj majhna?

V izreku (1) smo upoštevali le kinetično in potencialno energijo, ne pa notranje. Če naj se notranja energija plina ne spremeni, mora ostati temperatura nespremenjena. Tedaj pa velja Boylov zakon $p' V' = p V$ in dobimo na levi strani enačbe (1) nič. Po tem nekoliko naglem premisleku naj bi imel plin pri izotermnem iztekanju hitrost nič in enačba (2) ne bi veljala.

Pri iztekanju plina iz posode navadno plin ne utegne izmenjati z okolico toplote. Pri stacionarnem toku plina po toplotno izolirani cevi pa je treba na desni strani enačbe (1) dodati razliko notranjih energij $W_n - W_n'$. Tako dobimo — iz energijskega zakona — *posplošeno Bernoullijevo enačbo* [6]

$$h' + v'^2/2 + g z' = h + v^2/2 + g z \quad (4)$$

Uvedli smo entalpijo $H = W_n + p V$ in specifično entalpijo $h = H/m$. Plin izteka s hitrostjo

$$v = [2(h' - h)]^{1/2} = [2c_p(T' - T)]^{1/2} \quad (4)$$

Za spremembo specifične entalpije idealnega plina velja namreč $h' - h = c_p(T' - T)$. Plin se pri iztekanju ohladi. Pri tem pridobi kinetično energijo, in sicer delež $c_v(T' - T)/c_p(T' - T) = 1/\kappa$ na račun spremembe notranje energije in delež $R(T' - T)/M c_p(T' - T) = 1 - 1/\kappa$ na račun dela tlaka. c_p in c_v sta specifični toploti pri konstantnem tlaku in pri konstantni prostornini, $\kappa = c_p/c_v$ njun kvocient in $R/M = c_p - c_v$ njuna razlika.

Pri izentropni spremembi velja $T'/p'^{(\kappa-1)/\kappa} = T/p^{(\kappa-1)/\kappa}$, tako da je

$$\begin{aligned} v &= [2\kappa p'(1 - (p/p')^{(\kappa-1)/\kappa})/\rho'(\kappa - 1)]^{1/2} = \\ &= [2(p' - p)/\rho]^{1/2} (1 - (p' - p)/4\kappa p' + \dots) \end{aligned} \quad (4a)$$

Pri tem smo uporabili še plinsko enačbo v obliki $T' = p'/(\kappa - 1)c_v\rho'$. Enačba (3) velja potemtakem za zrak s $\kappa = 1,4$ pri tlakih $p' = 1,1$ bar in $p = 1$ bar, ko je hitrost $v = 130$ m/s, na 1,6 % natančno.

Pomagamo si lahko tudi naravnost z energijskim zakonom: $dH = m dh = d(W_n + pV) = dW_n + p dV + V dp = dQ + dA + p dV + V dp = T dS - p dV + p dV + V dp = T dS + V dp$. Pri reverzibilni izentropni spremembi se entropija ne spremeni, $dS = 0$, in je $dh = V dp/m = dp/\rho$.

Do enačbe $d(v^2/2) = -d p/\rho$ še hitreje pripelje Newtonov zakon $\rho \mathbf{a} = \rho(d\mathbf{v}/dt - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} + \text{grad}(v^2/2)) = -\text{grad} p$, če upoštevamo, da je v stacionarnem toku prvi člen v oklepaju enak nič in v toku brez vrtincev $\text{rot} \mathbf{v} = 0$. Zahtevati moramo le, da ni trenja. [7].

Prej, ko smo pri izotermnem iztekanju napovedali hitrost nič, smo pogrešili. Spregledali smo, da pride do izotermne spremembe le, če plin izmenja toploto z okolico. Pri izotermnem iztekanju moramo plin segrevati, in sicer mu moramo dovesti toliko toplote, kolikor opravi plin dela. S popravljeno enačbo (1) $0 = m v^2/2 - m v'^2/2 + Q$ dobimo $v^2 = -Q/m = 2 A/m = -2 \int p dV/m = 2 \int V d p/m = 2 \int d p/\rho$. Velja namreč $-p dV = V dp$, če je $d(pV) = 0$. Upoštevamo zvezo $\rho = \rho' p/p'$ in dobimo nazadnje

$$v = [2(p'/\rho') \ln(p'/p)]^{1/2} = [2(p' - p)/\rho]^{1/2} (1 - (p' - p)/4p + \dots)$$

Tudi za ta primer velja enačba (3) v navedenih okoliščinah na 2,5 % natančno.

Enačbe (3) velja v dobrem približku za iztekanje plina, če mu ne dovajamo toplote, in pri izotermnem iztekanju, če mu jo dovajamo, torej za precej širši krog pojavov, kakor smo mislili spočetka. Vseeno pa ne velja, če se držimo omejitev, ki smo jih postavili ob izvajanju Bernoullijeve enačbe. Ali naj torej v učbeniku ob Bernoullijevi enačbi obravnavamo iztekanje plina ali ne? Najbrž je drugo bolje vsaj za študente fizike, ki jim lahko pozneje v poglavju o toploti podrobneje povemo, kako je s to zadevo.

M. Rosini se zahvaljujem, ker me je opozoril na pomanjkljivost v učbeniku [5] in dal več koristnih nasvetov.

LITERATURA

- [1] F. W. Sears, M. W. Zemansky, *University Physics*, Addison-Wesley Reading, Mass. 1964, str. 314.
- [2] D. Halliday, R. Resnick, *Physics*, Vol. 1 & 2, J. Wiley, New York 1966, str. 452.
- [3] W. H. Westphal, *Physik*, Springer, Berlin 1970, str. 159.
- [4] I. Kuščer, A. Moljk, *Fizika*, 1. del, DZS, Ljubljana 1980, str. 248.
- [5] J. Strnad, *Fizika*, 1. del, DMFA in ZOTKS, Ljubljana 1987, str. 128.
- [6] I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota*, DMFA in ZOTKS, Ljubljana 1987, str. 36.
- [7] I. Kuščer, *Pregled klasične fizike*, DMFA, Ljubljana 1979, str. 31, 50.

Amorphous polymers and non-Newtonian fluids. Ed. C. Dafermos et al. New York: Springer-Verlag, 1987. 195 str.

Na minesotski univerzi so leta 1982 osnovali Inštitut za matematiko in njene uporabe (IMA), da bi spodbujal razvoj novih matematičnih prijemov in združeval matematike z raziskovalci z drugih področij. *Amorfni polimeri in newtonske tekočine* so šesti zbornik tega inštituta; zajemajo dela iz načrta fizika kontinuumov in parcialne diferencialne enačbe iz let 1984/85. O vsebini nas poučijo naslovi prispevkov: R. B. Bird, Matematični problemi v kinetični teoriji polimernih tekočin, B. Caswell, Lagrangeovi pojmi za numerično analizo viskoelastičnega toka, C. Dafermos, Rešitve z valovnimi čeli za ohranitvene zakone s spominom, D. D. Joseph, Hiperbolična dinamika v toku prožnih kapljev, E. A. Kearsley, Gumijaste kapljčevine v teoriji in poskusu, M. Marcus in V. J. Mizel, Dinamično vedenje pri ključnih motnjah v materialih s selektivnim vračanjem, J. A. Nohel in M. J. Renardy, Razvoj singularnosti pri nelinearni viskoelastičnosti, Y. Rabin, Makromolekule v elongacijskem toku: metastabilnost in histereza, M. J. Renardy in W. Hrusa, Širjenje nezveznosti pri linearni viskoelastičnosti, R. P. Wool, Izdatnost stika in razvoj prepletenosti na meji med amorfnima polimeroma. Po tem vidimo, da zajema zbornik zanimiva nova vprašanja reologije, ki so pomembna za specialista, pa naj prihaja iz fizikalnih ali iz matematičnih vrst.

Janez Strnad

PROFESOR DR. ANTON MOLJK — ČASTNI ČLAN DRUŠTVA

Anton Moljk je bil rojen leta 1916 na Vrhniki. Na univerzi v Ljubljani je diplomiral leta 1938. Po vojni si je prizadeval, da bi ustvaril podlago za eksperimentalni pouk fizike in pozneje je sodeloval pri tem, ko so vpeljali študij fizike na takratni tehniški fakulteti. Imel je veliko zaslug za to, da sta Oddelek za matematiko in mehaniko ter Oddelek za fiziko dobila svojo stavbo. Bil je med idejnimi očeti Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, in ga nekaj časa vodil.

Kot učitelj fizike na univerzi je poskušal vplivati na kakovost pouka fizike v srednji šoli. Leta 1958 je skupaj z Ivanom Kuščerjem napisal srednješolski učbenik fizike, ki je doživel več izdaj. Dragocena je bila njegova pobuda pri organiziranju in izvajanju magistrskega študija za učitelje fizike. Skupaj s študenti je razmišljal o možnostih, kako učence navdušiti za stroko in popestriti pouk s poskusi. Kot predsednik predmetne komisije za fiziko je ob šolski reformi nasprotoval zapostavljanju fizike.

Težišče raziskovalnega dela A. Moljka sega v jedro in atomsko fiziko. Njegovi večjični proporcionalni števcu so omogočili natančne in zanesljive meritve šibkih radioaktivnosti, sevanja na območju nizkih energij ter rentgenskih spektrov in fluorescentnih pridelkov. Posluh za razvoj interdisciplinarnih povezav je pokazal kot pobudnik in organizator mednarodnih konferenc z naslovom Znanost in družba leta 1964 in leta 1966. Tudi kot predsednik znanstvenega odbora na Institutu J. Stefan, kot predsednik strokovnega odbora Zvezne komisije za nuklearno energijo ter pozneje kot predsednik Sveta za naravoslovne vede in kot predsednik komisije za fiziko pri Zveznem svetu za koordinacijo znanstvene dejavnosti si je prizadeval za ustrezno znanstveno raziskovalno politiko v državi. Bil je urednik znanstvene revije Fizika.

Od vsega začetka je delal pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Bil je med ustanovitelji društva in eden glavnih organizatorjev ustanovnega občnega zbora na Bledu leta 1949. Sodeloval je pri ustanavljanju Obzornika za matematiko in fiziko in bil dolgo član uredniškega odbora. Kot predsednik komisije za tekmovanje mladih fizikov je pomagal, da se je tekmovanje razmahnilo do današnje priljubljenosti. Kot predsednik društva je imel glavne zasluge za to, da je proslava stoletnice rojstva profesorja Josipa Plemlja na Bledu izredno uspela. Bil je predsednik organizacijskega odbora 16. mednarodne fizikalne olimpiade v Portorožu in je prispeval k njenemu uspehu.

Za svoje delo je A. Moljk prejel več družbenih priznanj: nagrado Sklada Borisa Kidriča, red dela III. stopnje, red zaslug za narod s srebrnimi žarki, red dela z rdečo zastavo in red republike s srebrnim vencem.

Profesor dr. Anton Moljk je s svojim delom in pobudami dal neizbrisen pečat raziskovanju v fiziki in poučevanju fizike v naši ožji domovini, prispeval k njeni uveljavitvi v širši skupnosti in pomagal oblikovati Društvo matematikov, fizikov in astronomov.

Zbral Janez Strnad

RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V L. 1987*

V letu 1987 je oddelek za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani prijavil pri Raziskovalni skupnosti Slovenije 20 raziskovalnih nalog. Objavljamo kratke izvlečke vseh del.

Zbral in uredil *Milan Hladnik*

178. Zvezne razširitve pravih holomorfnih preslikav. Nosilec Franc Forstnerič, sodelavec Mitja Lakner.

Ocene o hitrosti naraščanja Kobayashijeve metrike v bližini strogo psevdokonveksnih robnih točk omejenih območij D_1 in D_2 v kompleksnem evklidskem prostoru $\mathbb{C}_n$ so uporabljene pri obravnavi vprašanja, kdaj lahko pravo holomorfnost preslikavo $f: D_1 \rightarrow D_2$ zvezno razširimo do vsake strogo psevdokonveksne robne točke območja D_1 .

179. Razširitve s pravimi holomorfnimi preslikavami. Nosilec Josip Globevnik, sodelavci Edgar L. Stout, Aleš Založnik in Anton Cedilnik.

Naj bo B_n odprta enotna krogla v $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, in $F \subset bB_n$ interpolacijska množica za algebro $A(B_n)$ vseh zveznih kompleksnih funkcij na $\bar{B}_n$, holomorfnih na B_n . Dokazano je, da lahko za vsa dovolj velika naravna števila M vsako zvezno funkcijo $f: F \rightarrow bB_M$ razširimo do zvezne preslikave $\tilde{f}: B_n \rightarrow B_M$, ki je analitična v B_n in za katero velja $\tilde{f}(bB_n) \subset bB_M$.

180. Produkti hermitskih operatorjev. Nosilec Milan Hladnik, sodelavca Gorazd Lešnjak in Bojan Magajna.

V poljubni Banachovi algebri ima vsak hermitski element h funkcijski račun za algebro Lip_α vseh Lipschitzovih funkcij z indeksom $\alpha > 1/2$ na neki okolici spektra $\sigma(h)$. Iz njega izpeljana ocena o rasti eksponentne grupe za Lipschitzove funkcije elementa h je uporabljena pri proučevanju kvazinilpotentnosti in algebraičnosti polinomov komutirajočih hermitskih elementov.

181. Pozitivni operatorji na Rieszovih prostorih. Nosilec Boris Lavrič, sodelavca Damjan Kobal in Mirko Dobovišek.

Na Rieszovih prostorih, v katerih veljajo razne oblike Freudenthalovega spektralnega izreka, so lastnosti pozitivnih operatorjev povezane z lastnostmi mer na Boolovih algebrah komponent pozitivnih elementov prostora. Posebej so obdelane f -algebre ortomorfizmov in pozitivni operatorji na Rieszovih prostorih, ki imajo dovolj projektorjev.

182. Pararefleksivni operatorji. Nosilec Matjaž Omladič, sodelavca Bojan Hvala in Edvard Kramar.

Podprostor Banachovega prostora je parazaprta, če je enak zalogi vrednosti nekega omejenega operatorja. Omejen linearen operator T je pararefleksiven, če je vsak operator, ki ohranja vse za T invariantne parazaprte podprostore, cela analitična funkcija operatorja T . Podana je karakterizacija pararefleksivnih operatorjev.

* Izvlečki raziskovalnih nalog iz leta 1986 so bili objavljeni v Obzorniku mat. fiz. 34 (1987) 152–156.

183. Iztekanje tekočine skozi polpropustno steno. Nosilec Anton Suhadolc, sodelavec Robert Bakula.

Za potencialni tok idealne nestisljive tekočine s predpisano normalno hitrostjo dotekanja in tlaku proporcionalno normalno hitrostjo odtekanja je dokazana eksistenca in enoličnost rešitve ustreznega robnega problema pri predpostavki, da je hitrost tekočine majhna ali upornost polpropustne stene velika.

184. Nove karakterizacije Hilbertovega prostora. Nosilec Joso Vukman.

Dobljene so različne nove karakterizacije Hilbertovega prostora: med vsemi Hausdorffovimi lokalno konveksnimi prostori, med vsemi kompleksnimi bornološkimi in sodčastimi Hausdorffovimi prostori ter med vsemi normiranimi prostori.

185. Aciklične preslikave na mnogoterostih. Nosilec Dušan Repovš, sodelavca Janez Rakovec in Jože Vrabec.

Dokazana je invariantnost Quinnovega lokalnega indeksa (ovire za razrešljivost posplošene mnogoterosti dimenzije večje ali enake 4) za aciklične preslikave in, kot posledica, razrešljivost vsake posplošene n -mnogoterosti, ki je aciklična slika neke topološke n -mnogoterosti. Korektno je formulirana in dokazana Freedmanova verzija kriterija celurnosti za 4-mnogoterost in s tem posplošen izrek D. R. McMillana.

186. Končna aritmetika. Nosilec Zvonimir Bohte, sodelavca Peter Petek in Marko Petkovšek.

Po predstavitvi teoretičnih osnov končne aritmetike je dokazana še neenoličnost polnih mestnih sistemov, izpeljana osnovna zaokrožitvena napaka za premično piko za rezanje in zaokrožanje ter obravnavana nova enostavnejša analiza zaokrožitvenih napak.

187. Računalniško orientirane matematične metode — XII. Nosilec Janez Grad, sodelavec Janez Barle.

Za analizo LU razcepa osnovne matrike linearnega programa so razvite posebne podatkovne strukture, ki omogočajo učinkovito uporabo nekaterih algoritmov v primeru, ko je matrika v hitrem pomnilniku. Opisane so posebnosti v realizaciji teh algoritmov in podatkovnih struktur na mikroračunalnikih tipa IBM PC.

188. Numerične metode za stabilno reševanje problema trajektorije, singularno perturbiranih robnih problemov in parcialnih diferencialnih enačb. Nosilec Bojan Orel, sodelavca Andrej Kmet in V. V. Bobkov.

Poleg algebrائيh pogojev, ki jim morajo zadoščati koeficienti metode tipa Runge-Kutta za doseg določenega reda konsistence, sta izpeljani dve konkretni metodi tega tipa. V drugem delu so podane analitične in numerične metode za reševanje singularno perturbirane Riccatijeve diferencialne enačbe z aproksimacijo posebnih rešitev ter ocenjena napaka aproksimacijske funkcije. Iste metode so uporabljene tudi pri reševanju singularno perturbiranega robnega problema.

189. O interpolacijskih projektorjih. Nosilec Jernej Kozak, sodelavca Matija Lokar in Yu Yu Feng.

Razvit je algoritem, ki omogoča tako izbiro napetostnih parametrov nape-tega zleпка, da je pripadajoči interpolacijski projektor omejen neodvisno od izbora vozlišč. Prikazane so aproksimativne lastnosti in uporabnost napetih zlepkov. Zadnji del raziskave je namenjen doseganju spodnje meje časovne zahtevnosti pri izračunu kvadratičnih B-zlepkov v dveh dimenzijah.

190. Numerično reševanje enačb linij, pri katerih so parametri odvisni od frekvence. Nosilec Tomaž Slivnik, sodelavec Gabrijel Tomšič.

Po pregledu znanih metod za analizo električnih prenosnih linij, katerih parametri so odvisni od frekvence, je podana nova formulacija problema s sistemom integrodiferencialnih enačb in njegova rešitev z aproksimacijo s končnimi diferencami. Izvedena je primerjava nove metode s prejšnjimi.

191. Osnove matematike in prolog. Nosilec Izidor Hafner.

Problem simbolizacije matematike v programskem jeziku prolog je prikazan na zgledih iz kombinatorike, algebre množic, urejenostnih struktur, verjetnostnega računa in primitivno rekurzijskih funkcij.

192. Graduirane deformacije afinih Liejevih algeber. Nosilec Dušan Pagon.

Pojem deformacije algebre temelji na teoriji formalnih potenčnih vrst. S stališča tako imenovanih graduiranih deformacij so raziskane afine Kac-Moodyjeve algebre, ki so najbolj dostopne za proučevanje. Netrivialni rezultati so dobljeni pri deformacijah modularnih algeber.

193. Towards intensionalization of Lambek calculus. Nosilec Andreja Prijatelj.

Poleg Montaguejeve rakurzivne korespondence med kategorijami in tipi je opredeljena ekstenzionalna inačica Lambekovega računa s prirejeno semantiko λ termov, predlagana pa je tudi intenzionalna zasnova Lambekovega računa in dokazana sta dva pomembna izreka tega sistema.

194. Navajanje učenca k raziskovalni misli pri pouku matematike. Nosilec Marija Vencelj.

Nekateri manj znani zanimivi problemi elementarne matematike, ki jih je moč uporabiti pri delu z boljšimi učenci, so po metodi generalizacije obdelani matematično in metodično na način, ki na vsakem koraku daje čimboljše izhodišče za nova vprašanja, hipoteze in odgovore ter tako razvija učenčeve raziskovalne sposobnosti.

195. Kombinatorična optimizacija 2. Nosilec Vladimir Batagelj, sodelavec Sandi Klavžar.

Problem razvrščanja v skupine je obravnavan kot optimizacijski problem. Poenoten je pojem mere podobnosti med enotami in podan pregled mer različnosti, karakterizirani nekateri razredi presečnih grafov sfer ter izpeljan učinkovit postopek lokalne optimizacije za uravnotežanje turbin.

196. Krepka regularnost in simetrični grafi. Nosilec Dragan Marušič.

Raziskana je krepka regularnost nekaterih družin po točkah in povezavah simetričnih grafov. Konstruirani so s Paleyevimi grafi tesno povezani krepko regularni grafi s p^2 točkami, kjer je p praštevilo, in proučevane $(0,1)$ — matrike v zvezi z dvojnimi krovi grafov.

197. Topološka teorija grafov 5. Nosilec Bojan Mohar in Tomaž Pisanski, sodelavci John Shawe-Taylor, Aleksander Malnič in T. D. Parsons.

Raziskovalno nalogo sestavlja deset samostojnih prispevkov, od katerih trije obravnavajo topološko teorijo grafov, drugi pa izoperimetrične lastnosti in spekter grafov, Wienerjev indeks, upodobitve grafov z vektorji ter univerzalne, razdaljno tranzitivne in lokalno ciklične grafe.

OKROGLA MIZA: MATEMATIKA IN FIZIKA V ŠOLI

Po tožbah učiteljev matematike in fizike iz vse Slovenije, ki so prihajali na društvena predavanja, se je upravni odbor društva zavedel, da nas je vse manj, da smo zato vse bolj obremenjeni in tudi vse bolj nezadovoljni s kakovostjo svojega dela. Zato se je odločil, da bo ob 39. občnem zboru v Topolšici priredil okroglo mizo z naslovom Matematika in fizika v šoli. Namen je bil dvojen: želeli smo težave matematikov in fizikov v šoli predstaviti širši javnosti, predvsem pa opozoriti odgovorne ustanove, da končno pričnejo ukrepati, sicer bomo že čez nekaj let zaradi pomanjkanja učiteljev zašli v slepo ulico.

Na okroglo mizo smo povabili poleg učiteljev matematike in fizike z osnovnih, srednjih in visokih šol še ravnatelje naravoslovnih šol ter predstavnike Zavoda za šolstvo, Republiškega komiteja za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo, Izobraževalne skupnosti, novinarje časopisov, radia in televizije. Poleg tega smo po vseh osnovnih in srednjih šolah razposlali vprašalnik z željo, da dobimo podatke o sestavi učiteljev matematike in fizike, njihovi tedenski obremenitvi in o odhodih s šol.

Pri okrogli mizi, ki jo je 16. oktobra 1987 vodila novinarka Manca Košir, so poleg stoosemdesetih udeležencev v dvorani sodelovali: Anton Suhadolc, predstojnik VTO matematika in mehanika; Zvonimir Bohte, direktor Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko; Peter Šemrl, asistent na VTO matematika in mehanika; Zlatko Bradač, Pedagoška fakulteta, Maribor; Peter Vencelj, Izobraževalna skupnost Slovenije; Seta Oblak in Zvone Perat, Zavod za šolstvo; Zvonka Alt, Srednja kmetijska šola, Maribor; Mirjam Horzelenberg, Osnovna šola Šlandrove brigade, Domžale; Jože Kotnik, Osnovna šola Zvonka Runka, Ljubljana; Martina Koman in Milena Strnad, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Iz dvorane se je med drugimi v razpravo vključil tudi Boštjan Zgonc iz Republiškega komiteja za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo.

Rezultati ankete, ki so bili izhodišče za razgovor, so pokazali, da je stanje na naših šolah zares zaskrbljujoče. Še slabšo sliko so dali podatki Zavoda za statistiko za leto 1986. Ker niso odgovorile vse šole, so rezultati ankete navedeni v oklepaju.

Ustrezno izobrazbo ima na osnovnih šolah 60 % (78 %) učiteljev matematike in 67 % (80 %) učiteljev fizike, na srednjih šolah pa 55 % (64 %) učiteljev matematike in 41 % (52 %) učiteljev fizike. Na srednjih šolah uči celo 7 % učiteljev matematike in 9 % učiteljev fizike, ki imajo samo srednješolsko izobrazbo. V zadnjih dveh letih je odšlo po anketi z osnovnih šol 14 % učiteljev matematike in 16 % učiteljev fizike, s srednjih šol pa 30 % učiteljev matematike in 48 % učiteljev fizike. Število diplomantov na matematiki in fiziki je manjše, tako da se bo izobrazbena sestava učiteljev v prihodnje še slabšala, namesto da bi se izboljševala. Število diplomantov na nekdanjih pedagoških akademijah je bilo doslej veliko bolj spodbudno. V prihodnje pa se bo tudi močno skrčilo, saj se je na štiriletni dvopredmetni študij matematika in fizika v Ljubljani vpisalo le 10 študentov namesto dosedanjih 50, v Mariboru pa je število vpisanih študentov ostalo skoraj nespremenjeno, okoli 40.

Odgovor, zakaj učitelji množično uhajajo s šol in zakaj se le malo dobrih študentov zapiše pedagoškemu študiju matematike in fizike, je najslikoviteje oblikoval Ivan Kuščer: »Učitelji se čutijo ponižane in razžaljene.« Učitelji učimo v nemogočih razmerah, povprečna tedenska obveznost v prenapolnjenih učilnicah je 22 ur za učitelja na osnovni šoli in 25 ur za učitelja na srednji šoli; pri tem so honorarne ure slabše plačane kot redne. Poleg tega nas pestijo razni nesmiselni predpisi, na primer predpis o napredovanju učencev z negativno oceno v osnovni šoli, predpis o ponavljanju pisnih nalog pri tretjini negativnih ocen, neomejeno število popravnih izpitov in veliko rokov zanje, preobsežna administracija, pisanje raznih pravilnikov, sestankovanje ... Učitelji fizike so pri vsem tem obremenjeni še s poskusi in pri tem na osnovni šoli ne morejo razdeliti razreda na manjše skupine.

Ob vsem tem nam ne ostaja dovolj časa, da bi lahko spočiti in dobro pripravljeni prihajali v razred, kaj šele da bi se »permanentno samoizobraževali«. Da je slednje potrebno, govorijo podatki o obisku društvenih predavanj in seminarjev. Pri tem pa učitelji ne moremo poklicno napredovati, čeprav si z leti pridobimo izkušnje. Podatki ankete, da se z dodatnim strokovnim delom ukvarja na osnovnih šolah kar 91 % in na srednjih 70 % učiteljev matematike ter na osnovnih šolah 64 % in na srednjih 36 % učiteljev fizike, kažejo, da ostajamo na šolah le še tisti, ki imamo radi svojo stroko in svoje učiteljsko poslanstvo.

Poleg tega pri šolskih reformah po pravilu ne upoštevajo predlogov in opozoril učiteljev in se ne ozirajo na njihove izkušnje. Tudi zadnja prenova srednješolskih programov se ravna predvsem po ozkih pogledih preštevilnih posebnih izobraževalnih skupnosti. Tako ostaja učitelj sam med tnalom želja in pričakovanj učencev ter nakovalom predpisov šolskih oblasti pa zahtev in pritožb staršev.

Da ne bi ostalo tako, smo po živahni in izčrpni razpravi, ki se je nadaljevala tudi na občnem zboru naslednjega dne, sprejeli posebno izjavo; objavilo jo je več časopisov. O okrogli mizi so poročali tudi v radiu.

Milena Strnad

IZJAVA

Učiteljev matematike in fizike je na slovenskih šolah vedno manj. Stari bežijo s šol, novi pa se raje zaposlujejo drugje. Šola stoji in pade z učiteljem, brez njega pa propade. Da se ne bi zgodilo slednje, zahtevamo:

- enotno slovensko šolstvo kot nacionalno nalogo;
- da je učitelj kreator in ne le izvajalec šolskih reform;
- zmanjšanje števila predmetov na vseh stopnjah;
- zmanjšanje števila učencev v razredih;
- zmanjšanje tedenske učne obveznosti na največ 18 ur;
- ukinitve napredovanja učencev z negativnimi ocenami;
- omejitev števila popravnih izpitov;
- spremembo pravilnika o ocenjevanju;
- delitev učencev na skupine pri laboratorijskih vajah;
- stimulatивnejše namensko štipendiranje za študij matematike in fizike;
- omogočanje izobraževanja in napredovanja učiteljev;
- ureditev vzgojno izobraževalnih programov za učitelje matematike in fizike.

**KER ŽELIMO UČENCEM DOBRE SOLE, HOČEMO UČITI
V USTVARJALNEM MIRU!**

Sprejeto na občnem zboru DMFA SRS
Topolšica, 17. 10. 1987

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1987

V letu 1987 smo zabeležili 41 novih članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije in 25 novih naročnikov med študenti matematike in fizike, ki plačujejo za društveno revijo le polovično ceno. Tako je danes vpisanih v karto teko že 1026 članov društva, 124 drugih individualnih naročnikov ter prav toliko študentov. Obzornik naročata še 202 ustanovi ter 12 naročnikov iz tujine. 144 izvodov revije pošiljamo v zameno strokovnim revijam v Jugoslaviji in tujini. Obzornik za matematiko in fiziko tako izhaja v nakladi vsaj 1632 izvodov.

Ciril Velkovrh

1465. Bertonceľj Marija
1466. Bizjak Silvo
1467. Bobek Stane
1468. Borovnik Majda
1469. Bratina Barbara
1470. Dolinar Francka
1471. Erjavec Jani
1472. Erker Jaka
1473. Finkšt Metoda
1474. Gazvoda Zdenka
1475. Gostenčnik Angela
1476. Grasselli Tanja
1477. Grünfeld Mojca
1478. Jančan Silva

1479. Jurko Jožica
1480. Kambič Desanka
1481. Kerec Tatjana
1482. Kubale Valentin
1483. Kukavica Igor
1484. Matoh Leopold
1485. Mikec Lidija
1486. Milutinović Uroš
1487. Murovec Jožica
1488. Petek Angela
1489. Pivec Irena
1490. Plankar Albin
1491. Ravbar Milan
1492. Rogina Darinka

1493. Rotovnik Irena
1494. Simonič Aleksander
1495. Slatinšek Dragica
1496. Slejko Ana
1497. Smole Vera
1498. Starešinič Matjaž
1499. Tancer Mladen
1500. Tojnkó Zdenka
1501. Tomašič Melita
1502. Vidmar Rok
1503. Vuković Erna
1504. Zidarič Marija
1505. Žakelj Amalija

39. OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV

Preko 180 članov društva se je udeležilo 39. občnega zbora v Topolšici 16. in 17. oktobra 1987.

Prvi dan je bilo najprej na programu predavanje Tomaža Skulja o računalniku v šoli, sledila pa je okrogla miza z naslovom Položaj matematike in fizike v šoli. Drugi dan smo imeli občni zbor.

Po otvoritvi smo počastili spomin preminulih članov društva v preteklem letu. Naše vrste so zapustili: dr. Fran Dominko, Ljudmila Javornik, Slavica Jelenc, Ivana Prijatelj, Radovan Tavzes in dr. Alojzij Vadnal.

Občni zbor je za častnega člana društva imenoval prof. dr. Antona Moljka. Društveno priznanje za delo z mladimi pa sta prejela Terezija Draginc, učiteljica matematike na osnovni šoli Črnomelj, in Miha Štalec, učitelj matematike na Srednji šoli za trgovinsko dejavnost.

Komisijo za tisk kljub uspešnemu delu pri izdajanju strokovne literature pestijo kadrovske težave, tako da do občnega zbora ni pripravila predloga za nov celotni upravni odbor. Uredniki revij in knjižnih zbirk, tajnik in blagajnik KT so ostali dosedanji; novi urednik Preseka je Boris Lavrič. Predsednika in podpredsednika KT do občnega zbora komisija za tisk še ni imenovala, ima pa kandidata za predsednika.

Stari Upravni odbor DMFA SRS je bil razrešen ter izvoljen novi s člani: predsednik Mitja Rosina, podpredsednica Martina Koman, tajnica Zvonka Kos, blagajničarka Helena Velikonja, sekretarka komisije za pedagoško dejavnost Milena Strnad, sekretarji komisij za popularizacijo: matematika OŠ Aleksander Potočnik, fizika OŠ Jožica Okorn, fizika 1. letnik SVIO Miro Trampuš in Jože Kotnik, matematika srednja šola Darjo Felda, fizika srednja šola Iztok Kukman, astronomija Boris Kham, sekretar komisije za predavanje učencem Franc Lončar, sekretar komisije za uporabno fiziko Marko Valič; manjka sekretar komisije za uporabno matematiko.

ODGOVOR

Vprašanje 122 (Obzornik mat. fiz. 25 (1978) 4, 151)

Na nekem otoku živi n živalskih vrst. Vsaka si je prisvojila n -ti del otoka tako, da so njihovi prostori popolnoma ločeni. Na otok pripluje n ladij, na vsaki drugo plemo. Poselijo otok tako, da ga razdele vsakomur enako — kot so to storile že živali pred njihovim prihodom. Vsako plemo mora imeti svojo sveto žival, vendar mora ta izpolnjevati dve zahtevi:

1. ozemlje, na katerem živi, se mora vsaj deloma ujemati z ozemljem plemena, kateremu pripada;
2. ne sme biti hkrati sveta žival več plemen.

Vprašanje: Ali je tak izbor vselej mogoč, ne glede na to, kako se plemena razselijo po otoku? (Dušan Repovš)

Uporabili bomo naslednjo obliko Hallove »Poročne leme« [1]:

Za skupini n fantov in n deklet ($n \in \mathbb{N}$) velja, da poljubna skupina fantov pozna skupaj vsaj toliko deklet, kolikor je število fantov v tej skupini. Potem se lahko vsi fantje poročijo z dekleti, ki jih poznajo.

Eleganten dokaz poročne leme najdemo v [2].

Rešitev: Naj bo S površina otoka. Ker poljubnih m plemen s svojimi ozemlji zavzema mS/n površine otoka, živi na njihovem skupnem ozemlju vsaj m živali. Torej iz poročne leme takoj sledi, da je odgovor na zastavljeno vprašanje pritrdilen.

LITERATURA

[1] P. Hall, *On representatives of subset*, J. London Math. Soc. 10 (1935), 26—30.

[2] P. R. Halmos and H. E. Vaughan, *The marriage problem*, Amer. J. Math. 72 (1950) 214—215.

Aleksandar Jurišić

NOVE KNJIGE

GALLOT S., Hulin D., Lafontaine J., Riemannian geometry, Springer-Verlag, Berlin 1987, 248 str. (Universitexts).

Diferenciabilna mnogoterost je opremljena z Riemannovo metriko g , če je dan predpis, po katerem se da izračunati razdalja ds dveh poljubnih infinitesimalno bližnjih točk na mnogoterosti. V lokalnih koordinatah se kvadrat te razdalje izraža s prvo osnovno formo $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$. Koeficienti g_{ij} so dane funkcije koordinat, odvisni so torej od lege točke na mnogoterosti. S pomočjo prve osnovne forme moremo izračunati dolžine krivulj, kote, v katerih se krivulje sečejo, prostornine itd. Če je diferenciabilna mnogoterost podmnogoterost evklidskega prostora, podeduje metriko od evklidskega prostora in je zato mnogoterost z Riemannovo metriko. Primer so ploskve v trirazsežnem prostoru. Riemannova geometrija študira lastnosti mnogoterosti, ki so odvisne le od metrike g , ne pa od tega, kako je mnogoterost vložena v evklidski prostor in kakšno obliko ima v njem. Knjige, ki obravnavajo Riemannovo geometrijo, začnejo po navadi z lokalno teorijo mnogoterosti, ki so vložene v evklidski prostor, nadaljujejo pa s študijem splošnih, tj. abstraktnih mnogoterosti. Avtorji pričujoče knjige pa začnejo obravnavo kar z abstraktnimi mnogoterostmi. To utemeljujejo z dejstvom, da so številne znane mnogoterosti, kot so projektivni prostor, hiperbolična ravnina itd., dane kot abstraktne mnogoterosti. Realizirati jih kot podmnogoterosti v evklidskem prostoru pa po navadi ni lahka naloga.

Knjiga je razdeljena na pet poglavij. Prvo poglavje je kratek uvod v teorijo diferenciabilnih mnogoterosti. Drugo govori o Riemannovi metriki. Tu se seznanimo s kovariantnim odvajanjem, paralelnim premikom in geodetičnimi krivuljami. Tretje poglavje je posvečeno ukrivljenosti mnogoterosti. Obravnava tenzor ukrivljenosti, Jacobijeva vektorska polja, mnogoterosti s konstantno ukrivljenostjo, povezavo med ukrivljenostjo in topologijo in med ukrivljenostjo in prostornino. Četrto nas seznani z analizo na Riemannovih mnogoterostih in z Riccijevo ukrivljenostjo. Zadnje poglavje pa govori o Riemannovih podmnogoterostih, o ukrivljenosti hiperploskev, o povezavi med ukrivljenostjo in konveksnostjo in o minimalnih ploskvah. Vsak nov pojem avtorji osvetlijo s primeri. V knjigi pa so posejane številne naloge, ki so bistvenega pomena za razumevanje teksta. Zato so na koncu zbrane rešitve skoraj vseh nalog.

Ivan Vidav

SMITH K. T., Power series from a computational point of view. New York: Springer-Verlag, 1987. 132 str. (Universitext).

Naslovi poglavij 1. Taylorjevi polinomi, 2. Zaporedja in vrste, 3. Potenčne vrste in kompleksna odvedljivost, 4. Analitične funkcije lokalno, 5. Analitično nadaljevanje povedo, da gre za snov, ki jo naši študentje srečajo v prvem in drugem letniku. Vrste uporabljamo pri računanju določenih integralov, reševanju diferencialnih enačb, aproksimaciji funkcij. Na koncu vsakega poglavja je dodano precejšnje število nalog, orientirane so h konkretnim izračunom.

Peter Petek

Hydrodynamic behavior and interacting particle systems, ed. G. Papanicolaou, Springer-Verlag, New York 1987, str. XII + 210, 10 ilustr., (The Institute for mathematics and its applications; 9).

Inštitut za matematiko in njeno uporabo — IMA je leta 1982 ustanovila National Science Foundation na univerzi v Minnesoti. Namen ustanovitve pove že samo ime, vsebina dela pa je usmerjena v razvoj in študij novih matematičnih pojmov in vprašanj, ki se porajajo na različnih znanstvenih področjih. Tako obsega program za to desetletje statistično in kontinuumsko obravnavanje faznih prehodov, matematična modeliranja v ekonomiji, fiziko kontinuum in parcialne diferencialne enačbe, stohastične diferencialne enačbe in njihovo uporabo, uporabo računalništva v znanosti, uporabno kombinatoriko in nelinearne valove.

Stohastične enačbe so zajete v štirih knjigah in ta je tretja od njih. Delavnica o hidromehaničnem obnašanju sistemov interagirajočih delcev je bila v marcu 1986. V knjigi je zbranih petnajst prispevkov s tega srečanja. Prispevki so z različnih področij in smeri. Tako govorita dva članka o problemih numerične analize vrtninčnih metod. Sznitman obravnava širjenje kaosa za Burgersovo enačbo. Trije drugi prispevki se nanašajo na slučajne procese v sistemih z delci. Lopezov prispevek obravnava suspenzijo z veliko trdnih delcev z metodami mehanike zveznega stanja. Prav tako več avtorjev študira različne robne probleme v primeru, ko območje reševanja vključuje številne majhne vključitve. Pri tem se omejuje predvsem na statične razmere. Preostali prispevki pa se ukvarjajo bolj ali manj s suspenzijami in sedimentacijo, in to z eksperimentalnega vidika, z vidika matematičnega modeliranja in uporabe analitičnih in numeričnih metod, ki se uporabljajo v kemiji in fiziki.

Peter Vencelj

Theory and Applications of Liquid Crystals. Ed. J. L. Ericksen, D. Kinderlehrer. Springer-Verlag, New York 1987, 353 str.

IMA (The Institute for Mathematics and Its Applications) iz Minneapolisa v Minnesoti, ZDA je v letih 1984/85 organiziral interdisciplinarno konferenco o teoriji in uporabi tekočih kristalov, ki ji je sledilo delovno srečanje na isti ustanovi. Namen obojega je bil — po besedah izdajateljev knjige — vzbuditi zanimanje matematikov za področje tekočih kristalov, da bi poslej bolj sodelovali pri njihovem proučevanju.

Knjiga, ki vsebuje 17 prispevkov različnih avtorjev, dokazuje, da je srečanje doseglo svoj namen. Delno so v njej zapisana predavanja s konference, ki hočejo predvsem informirati o nekaj specialnih temah s področja tekočih kristalov: o holesterinski modri fazi, ki ima tridimenzionalno translacijsko urejenost, čeprav se pojavi pri temperaturah nad navadno holesterinsko fazo z enodimenzionalno urejenostjo; o faznih prehodih med raznimi tekočimi kristalnimi fazami in o makroskopskih lastnostih polimernih tekočih kristalov.

Druga vrsta prispevkov v knjigi pa so članki, ki so jih napisali matematiki o rezultatih svojega dela na več mesecev trajajočem delovnem sre-

čanju po konferenci. V njih obravnavajo predvsem hidrodinamsko teorijo tekočih kristalov, fazne prehode in singularnosti v strukturi. Posebej zanimiv se zdi prispevek R. Cohena s soavtorji, ki podaja pregled matematičnih metod, primernih za uporabo pri računanju tekočokristalnih konfiguracij z minimiziranjem proste energije.

Knjiga je interdisciplinarna in precej zahtevna z izjemo preglednega članka P. Cladisove o holesterinski modri fazi, ki je primerno uvodno branje tudi za študente.

Marija Vilfan

SARAPA N., Teorija verjetnosti, šolska knjiga, Zagreb 1987, 674 str.

Knjiga je sistematično napisan učbenik iz verjetnostnega računa. V njej bo vedoželjan študent našel odgovore na marsikatera vprašanja, ki se mu porajajo ob študiju verjetnosti, pa tudi zahtevnejši bralec bo prišel na svoj račun, saj v delu najdemo številne novejšje rezultate iz teorije verjetnosti.

Avtor najprej naredi kratek uvod iz zgodovine verjetnostnega računa in prikaže nekatere neuspele poskuse vpeljave aksiomatike v verjetnostni račun. Nato pa svoje delo gradi na aksiomatiki A. N. Kolmogorova.

Knjiga je razdeljena na dva dela. V prvem delu se pisec omeji na diskretni verjetnostni prostor, v drugem pa obravnava splošno teorijo verjetnosti. V prvem delu naj bi bralec spoznal vse pojme verjetnostnega računa, vendar s preprostim matematičnim orodjem in brez uporabe teorije mere. Pri tem ima pomembno vlogo kombinatorika. Posebna pozornost je posvečena Bernoullijevi shemi, ki je služila za model, v okviru katerega je nastalo veliko pomembnih idej v zgodovinskem razvoju verjetnostnega računa. Prvi del se zaključuje s poglavjem o markovskih verigah.

V drugem delu avtor s pomočjo teorije mere obdela splošno teorijo verjetnosti. V knjigi razvije skoraj vse pripomočke iz teorije mere, ki jih potrebuje (izjema je na primer Radon-Nikodymov izrek). Uvodnim definicijam sledi poglavje o porazdelitvenih funkcijah slučajnih spremenljivk, slučajnih vektorjev in tudi o družinah porazdelitvenih funkcij slučajnih procesov. V naslednjih poglavjih se temeljito seznanimo z lastnostmi matematičnega upanja, neodvisnostjo, zakoni velikih števil in karakterističnimi funkcijami. Rezultati, dobljeni v poglavju o funkcijah slučajnih spremenljivk in slučajnih vektorjev, so uporabljeni pri prikazu povezav med porazdelitvami, pomembnimi v statistiki. V poglavju o centralnem limitnem izreku srečamo neomejeno deljive porazdelitve, ki nam pomagajo pri dokazu posplošenega centralnega limitnega izreka. Posebno poglavje je namenjeno pogojnemu matematičnemu upanju in martingalom. Knjiga se konča s poglavjem o slučajnih spremenljivkah z vrednostmi v Banachovem prostoru.

Avtor pričakuje od bralca osnovno znanje iz matematične analize in linearne algebre. Za razumevanje zadnjega poglavja je potrebno znanje funkcionalne analize. Delo je opremljeno s številnimi primeri, ki so namenjeni za ponazoritev napisanega, so pa tudi kažipot za nadaljnje branje. Vsako poglavje se zaključuje z izborom nalog.

Tomaž Košir

SZÉKELY, GABOR J., Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics. Akadémiai Kiadó, Budapest 1986, xii + 250 str.

Znano je, da so v mnogih primerih rešitve konkretnih problemov teorije verjetnosti odvisne od jasnega in popolnega opisa privzetkov in pogojev. Prav tako je dokaj razširjeno nezaupanje v statistiko posledica pogosto napačnega tolmačenja rezultatov ali pa celo napačne uporabe njenih metod. Oboje daje slutiti, da je na teh dveh področjih obilo paradoksov. Z obsežno zbirko takšnih z »zdravo pametjo« navidezno sprtih resnic nas o tem prepričuje G. J. Székely.

Knjižica odraža njegovo mnenje, da je kot številne druge znanosti tudi matematika v bistvu zgodovina paradoksov: največja odkritja razrešijo najpomembnejše paradokse in odprejo pot nadaljnjemu razvoju in — spoznavanje novih idej s pomočjo paradoksov je pomembna oblika učenja. Zbrano gradivo je avtor razvrstil v poglavja: *Klasični paradoksi teorije verjetnosti*, *Paradoksi v matematični statistiki*, *Paradoksi slučajnih procesov*, *Paradoksi v osnovah teorije verjetnosti*. Obravnave pomembnih paradoksov je razčlenil na zgodovinski uvod, opis problema, rešitev in opombe ter zaključil s seznamom ustrezne literature. Vsakemu poglavju je dodal še izbor skic (z napotki v literaturo) zgodovinsko manj pomembnih paradoksov.

Knjižica ni lahko branje, čeprav si pisec opazno prizadeva za jasnost. Ni ne učbenik ne zbirka rešenih nalog, lahko pa je koristno dopolnilo obojemu, saj olajša razumevanje verjetnosti. Priporočam jo vsakomur, ki se zanima za teorijo verjetnosti, matematično statistiko, slučajne procese ali za nenavadne resnice nasploh.

Gorazd Lešnjak

PUBLIKACIJE KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1987

Komisija za tisk je tudi v letu 1987 nadaljevala izdajateljsko dejavnost s publikacijami, ki jih izdajajo društvo, inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ter oba oddelka na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Izšla so naslednja dela:

1— 4. Obzornik za matematiko in fiziko, 34 (1987) št. 1/2, 3, 4/5, 6/7 (839, 846, 862, 873)

5. 12. seminar iz fizike: Medicina in fizika (877)

6. Kuščer I., O strokovnem pisanju (879)

7—13. Presek — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje, 14 (1986/87) 4, 5, 6, 7; 15 (1987/88) 1, 2, 3 (849, 850, 852, 859, 869, 874, 884)

Presekova knjižnica

Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja — Zbirka nalog iz matematike za učence osnovnih šol za

14. 11b. peti in šesti razred (848)

15. 13a. sedmi razred (843)

16. 14a. osmi razred (844)

17. 26. Vidav I., Josip Plemelj — Ob dvajsetletnici smrti (851)

18. 27. Strnad J., Do Newtonovih zakonov — Ob tristoletnici Principov (858)

19. 28. Ranzinger P., in dr., Naše nebo in Zemlja 1988 — Astronomske efemeride. Umetni sateliti. Potresi. (886)

Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo

20. Žabkar J., Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov naravnih števil od 1 do 999 ter obsegov in ploščin kroga za merska števila premera od 1 do 299 (838)

Štalec I., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za

21. 1. razred srednjih šol (882)

22. 2. razred srednjih šol (883)

Knjižnica Sigma

- 23. 10 b. Jamnik R., Elementi teorije informacije (871)
- 24. 12 č. Vadnal A., Funkcije I (872)
- 25. 15 b. Prijatelj N., Matematične strukture II (842)
- 26. 20 o. Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele (841)
- 27. 21 b. Hribar M., Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 1. del (875)
- 28. 43. Lavrič B., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 3. del (885)

Matematični rokopisi

- 29. 13 a. Mohar B., Pascal — prevajalniki na osebni in hišni računalnikih (847)
- 30. 14 a. Batagelj V., Lokar M., Mohar B., Uporaba računalnika partner (861)

Izbrana poglavja iz matematike in računalništva

- 31. 6 f. Dobovišek M., Hladnik M., Omladič M., Rešene naloge iz analize I (857)
- 32. 20 b. Dobovišek M., Magajna B., Naloge iz algebre I (840)

Zbirka izbranih poglavij iz fizike

- 33. 12 b. Ahlin F. in dr., Izpitna vprašanja iz fizike (853)

Matematika-Fizika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

- 34. 3 a. Jamnik R., Verjetnotni račun (866)
- 35. 4 b. Vidav I., Algebra (870)
- 36. 6 g. Vidav I., Višja matematika I (878)
- 37. 9 c. Strnad J., Fizika I (865)
- 38. 10 b. Bohte Z., Numerične metode (854)
- 39. 16 b. Jamnik R., Matematika (855)
- 40. 28. Kuščer I., Žumer S., Toplota (867)

Publikacije inštitutov

- 41. Letno poročilo IMFM, 1986 (856)
- 42. Preprint series of the department of mathematics, no. 24. (845)
- 43. Proceedings of the Workshop on mesonic degrees of freedom in hadrons, Bled, Ljubljana, june 28—july 12, 1987 (887)

Društvene publikacije

- 44. 39. občni zbor, Velenje (880)
- 45. Tekmovanja: 31. republiško iz matematike za srednje šole (860)
- 46. republiško iz fizike za srednje šole, Jesenice (863)
- 47. 11. republiško iz računalništva za srednje šole (876)
- 48. 7. republiško iz fizike za osnovne šole, Ljubljana (868)
- 49. Zvezno tekmovanje iz fizike za osnovne in srednje šole (864)
- 50. 5. poletna šola iz računalništva (881)

Tudi v letu 1987 nam je uspelo redno izdajati vse periodične publikacije, nove natisne knjig in ponatisne razprodanih ter še vedno uporabljenih in iskanih učbenikov in priručnikov za osnovne, srednje in visoke šole. Obzornik za matematiko in fiziko je izšel v povečanem obsegu. Zadnja številka, ki je vsebovala tudi predavanja s seminarja Medicina in fizika, je izšla v večji nakladi. Zanj so se zanimali predvsem dijaki srednjih zdravstvenih šol. Presek — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje je izšel v polnem obsegu. Spomladi smo namesto ene številke z običajnim obsegom izdali dve s po 32 strani. V prvi je bil objavljen tekst o življenju in delu prof. dr. Josipa Plemlja ob dvajseti obletnici njegove smrti. Zadnja številka pa je posvečena 300-letnici izida Newtonovih Principov. Izidi rednih števil v Knjižnici Sigma so za leto 1987 v zaostanku. Učbenikov v zbirkah izbranih poglavij iz matematike, fizike, mehanike ter računalništva zaradi večjih zalog v lanskem letu skoraj ni bilo treba ponatisniti. Zato pa nam je uspelo izdati več ponatisov v Zbirki univerzitetnih učbenikov in monografij Matematika-Fizika. Uspešno leto 1987 bomo skušali s pridom izkoristiti v letu 1988, ko nam z vseh strani obetajo hude čase za izdajateljsko dejavnost.

Ciril Velkovrh

Na koncu naslovov so v oklepajih vpisane zaporedne številke izdaj DMFA SRS od leta 1951 do danes.