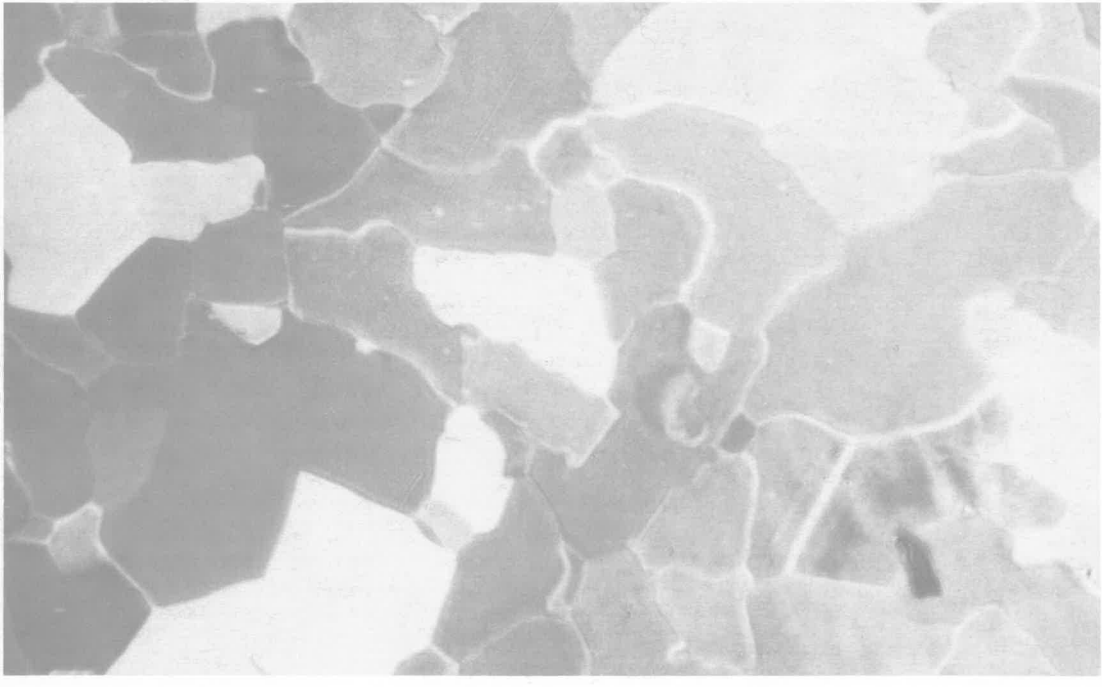
R-ODPISAN
88-1/2

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7446

1988
Letnik 35
1/2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 35 • ŠT. 1/2 • STR. 1–64 • JANUAR 1988

LETNIK 35 — ŠTEVILKA 1/2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1988

Uredniški odbor: Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Milan Hladnik — urednik za matematiko, Niko Prijatelj — glavni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 7000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 3500.— din, za ustanove in podjetja 20000.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 2000.— din, dvojna številka 4000.— din, stare številke 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1650 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1988 DMFA SRS — 901 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.-Page

Pretočni in vzporedni računalniki — Pipeline and parallel computers (Matija Lokar) 1

Kubične enačbe — Cubic equations (Marko Razpet) 13

Problem iskanja trajektorij — Trajectory problems (Bojan Orel) 17

Nekaj geometrijskih karakterizacij hilbertske norme — Some geometric characterizations of Hilbertian norm (Edvard Kramar) 27

Mioni kot katalizatorji za fuzijo — Muons as catalisators for fusion (Marijan Olenik) 35

Zvočni mikroskop — The acoustic microscope (Janez Strnad) 43

Hiperbolična leča — Hyperbolic lens (Nada Razpet) 49

Zvezno tekmovanje študentov fizike — National physics contest (Ana Pribaković) 51

Nevtronski interferometer — The neutron interferometer (Irena Drevenšek) . . 55

Vesti — News

Mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM 1987 (Peter Šemrl) . . 60

12. seminar iz matematike: Diferencialne enačbe — vabilo (Milena Strnad, Peter Petek) IV

Obvestila 41, 47

Nove knjige — New books (Boris Lavrič, Peter Šemrl, Franc Forstnerič, Jože Grasselli, Jože Vrabec, Anton Suhadolc, Ibrahim Aganović, Milan Hladnik) . . . . . 16, 26, 34, 42, 48, 50, III, IV

Na ovitku: Posnetek zglajenega površja železa z zvočnim mikroskopom ELSAM pri frekvenci 1,2 GHz v 250-kratni povečavi. Na območju z vodoravno stranico 0,5 mm je mogoče kristalna zrna jasneje razločiti kot s svetlobnim mikroskopom; ultrazvok se različno odbija na zrnih, posebno pa na mejah med njimi (k članku na str. 43).

R-177/88-1/2

ODPISANO

PRETOČNI IN VZPOREDNI RAČUNALNIKI

MATIJA LOKAR

Math. Subj. Class. (1985) 65 W 05, 68 B 20

V članku obravnavamo pojem in zgradbo pretočnih in vzporednih računalnikov.

PIPELINE AND PARALLEL COMPUTERS

In this article the arhitecture of pipeline and parallel computers is given.

Uvod

Pri reševanju zahtevnih znanstvenih in tehničnih problemov z računalniki se stalno pojavljajo zahteve po vse zmogljivejših računalniških sistemih. V zadnjem času so se pojavili računalniški sistemi, ki so sposobni učinkovito izvajati operacije nad vektorji in večrazsežnimi tabelami podatkov.

Do sedaj so povečevali računsko moč z uporabo vse hitrejših in hitrejših računalnikov. Doseženi napredek je očiten. Preklopni časi v osnovnih logičnih vezjih (čas, v katerem lahko vezje zavzame novo stanje) so sedaj že v velikostnem redu nanosekund, na voljo so hitri pomnilniki velikih zmogljivosti. Skrajne možnosti še niso dosežene, vendar je nadaljnji razvoj izredno zapleten. Zato je enostavneje, če organiziramo računalnike v večje in zmogljivejše zgradbe, s katerimi naj bi povečali njihove možnosti. Tako so se pojavili sistemi, ki uporabljajo več procesorjev, vektorski procesorji in zgradbe po načelu tekočega traku. S skupno besedo te nove modele imenujemo vzporedne računalnike.

Vzporednost v računalniškem sistemu lahko zasledimo na dveh nivojih. Prvi je vzporednost v pripravi ukazov in podatkov, drugi pa samo izvajanje ukazov. Dosežemo jo z uporabo različnih tehnik: vnaprejšnjega pregledovanja ukazov in podatkov, prekrivanja izvajanja operacij, uporabe tehnike tekočega traku, s prekrivanjem skalarnih in vektorskih ukazov.

Pojem vzporednega računalnika težko natančno definiramo. Najkrajše in najsplošneje s to besedo označimo računalnike, ki so sposobni istočasno opravljati več kot eno nalogo.

Ideja o sočasnem izvajanju več opravil na računalniku sploh ni nova. Zasledimo jo že v času nastajanja ENIAC-a, ki je bil sposoben izvajati več aritmetičnih operacij istočasno. Vendar so se avtorji odločili, da dajo prednost zaporednemu izvrševanju ukazov. Med razlogi, ki jih navajajo, sta težavno programiranje vzporednih operacij in prepričanje avtorjev, da bo z izboljšanjem hitrosti posameznih komponent vzporednost v izvajanju postala nepotrebna.

Za numerične algoritme je zgornja definicija vzporednosti preveč ohlapna, po drugi strani pa ne zajema vseh oblik vektorskih računalnikov. Zato se bomo omejili na tiste računalnike, ki so sposobni izvajati aritmetične operacije na več operandih kot elementu (npr. vektorjih) ali ki vsebujejo procesorje, ki med seboj neodvisno rešujejo aritmetični del kakega problema.

Na kratko rečeno, omejili se bomo na vzporednost pri izvajanju aritmetičnih operacij, ki je lahko posledica posebne zgradbe ali uporabe večih procesorjev.

Arhitektura

Računalnike, ki so sposobni istočasno izvajati več aritmetičnih operacij, lahko razdelimo na vzporedne računalnike in pretočne računalnike.

Poenostavljena ideja, ki je pripeljala do zasnove vzporednih računalnikov, je v tem, da naj bi se programi, ki uporabljajo P neodvisnih procesorjev, izvajali P-krat hitreje kot identični programi, ki uporabljajo le en procesor. Izkušnje kot tudi teorija kažejo, da je dejansko izboljšanje hitrosti manjše.

Naštejmo nekaj računalnikov, ki spadajo v to kategorijo:

— C.mmp (Carnegie-Mellon multiminiprocessor), razvit na Carnegie-Mellon University, ki ga sestavlja 16 procesorjev.

— Illiac IV, zgrajen s sodelovanjem med University of Illinois in Burroughs Corporation. Bil je med prvimi v svoji kategoriji in zelo nezanesljiv. Njegov največji problem je bil delovati nepretrgano toliko časa, da je rešil problem. Kljub temu pa so z njim rešili več izredno težkih problemov iz aeronavtike. Sestavljalo ga je 64 procesorjev.

— Distributed Array Processor (DAP), ki ga je zgradila firma International Computers Limited.

— ZMOB z University of Maryland, ki ga sestavlja 256 mikroprocesorjev Z-80 in še mnogo drugih, razvitih predvsem v laboratorijih univerz.

Pretočni računalniki, katerih delovanje je zasnovano na principu tekočega traku, delujejo zelo hitro predvsem z uporabo posebne zgradbe in ne toliko z uporabo večjega števila procesorjev. Če je treba izvesti isto aritmetično operacijo velikokrat zapored, lahko izboljšamo učinkovitost tako, da razdelimo operacijo na podnaloge (kontrola eksponenta, premik mantise,...) in vzdržujemo tok operandov na različnih stopnjah izvajanja. Tudi ta pristop ni čisto nov. Srečamo ga že pri računalniku CDC 6600 in IBM System 360 Model 91. Tak proces je posebno primeren za vektorske operacije in tako so vektorji tu osnovni podatkovni tipi. Zato so računalniki, katerih aritmetične enote delujejo po principu tekočega traku, znani kot vektorski računalniki. Poleg posebne zgradbe imajo ti računalniki običajno več aritmetičnih enot — linij, ki lahko delujejo istočasno, kar še izboljša njihove lastnosti. Pretočni računalniki niso edini vektorski računalniki.

Procesorje v vektorskih računalnikih delimo v dva tipa. Prvi so pretočni procesorji (pipeline processors), drugi pa matrični procesorji (array processors).

Osnova prvih je popolnoma podobna tekočemu traku v tovarni. Proces razdelimo na več podprocesov, ki jih opravljajo osnovni gradniki. Ti podprocesi se izvajajo istočasno. Procesi prihajajo v izvajanje zaporedoma. Naslednji sledi predhodnemu takoj, ko je opravljen prvi podproces. Tako poteka več procesov. Tekoči trak lahko vpeljemo v različnih operacijah računalnika. Nekaj računalnikov iz te skupine:

— CDC Cyber serija 200, ki se je razvila iz računalnika STAR in jo sestavljata dva osnovna tipa: Cyber 203 z dvema linijama in Cyber 205, ki ima eno, dve ali štiri linije;

— računalniki firme Cray: Cray 1, Cray 1S, Cray X-MP;

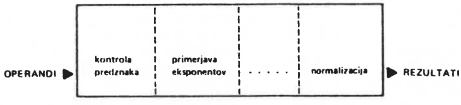
— Advanced Scientists Computer (ASC), ki ga je izdelovala firma Texas Instruments. Bil je eden prvih računalnikov s pretočno zgrajeno aritmetično enoto; danes jih ne delajo več.

V to skupino spadajo tudi superračunalniki, ki so jih v zadnjih letih razvile japonske firme Fujitsu, Hitachi in Nippon Electric.

Matrične računalnike sestavlja več procesnih enot, ki delujejo pod kontrolo ene centralne procesne enote. Spadajo med vzporedne računalnike, v model SIMD (Single Instruction Stream — Multiple Data Stream). Zgrajeni so izključno za opravljanje vektorskih operacij nad matrikami in vektorji podatkov. Taki računalniki so Illiac IV, Burroughs PEPE (Parallel Element Processing Ensemble), Goodyear Aerospace MPP (Massively Parallel Processor), kitajski CVCVHP (Cellular Vector Computer), BSP (Burroughs Scientific Processor). Vendar so v bistvu to vzporedni računalniki, zato jih bomo obravnavali tam.

Pretočni računalniki

Kot smo rekli, je ideja teh računalnikov v tem, da posamezni ukaz na strojnem nivoju razdelimo na več podukazov. Tako je na sliki 1 shematsko predstavljeno seštevanje v premični piki:



Slika 1

Taka struktura je primerna za ponavljajoče se operacije, kot so operacije na komponentah vektorjev, skalarni produkt, . . .

Vektorski strojni ukaz zajema tok operandov do linije in če upoštevamo, da se ukaz nanaša na dva vektorja, vsak segment linije sprejme dva elementa, opravi svojo določeno funkcijo (npr. primerjava eksponentov), preda rezultat naslednjemu segmentu in od prejšnjega segmenta prejme nadaljnja dva elementa. Tako se v liniji istočasno obdela več parov operandov. Vsak par je v različni stopnji obdelave. Število rezultatov, ki jih dobimo iz linije v vsakem taktu, je odvisno od aritmetične operacije same in dolžine besede. Prav tako na hitrost izvajanja bistveno vpliva hitrost prenosa iz pomnilnika in začetna organizacija operandov. Da poenostavimo prenos iz pomnilnika, morajo biti posamezni elementi vektorja organizirani na poseben način. Tako računalniki Cyber zahtevajo, da so komponente vektorja zaporedoma shranjene v enotnem bloku, pri računalniku ASC in Cray 1 pa si morajo pomnilniški naslovi komponent slediti v aritmetičnem zaporedju.

Računalniki von Neumanovega tipa, ki delujejo na običajni zaporedni način, izvajajo operacije nad podatki, ki so skalarji. Pri vektorskih procesorjih pa so podatki eno ali večrazsežna polja, ki jih bomo imenovali vektorji.

Tako lahko program za vektorski procesor gledamo kot zaporedni program nad vektorji. Vsak element vektorja je realno število, celo število, logična vrednost ali znak (zlog).

Aritmetične vektorske operacije, ki so jih sposobni izvajati vektorski računalniki, lahko razdelimo v štiri tipe:

Pri prvem tipu iz danega vektorja dobimo spet vektor

$$f_1 : V \rightarrow V$$

drugi tip operacije kot rezultat vrne skalarno vrednost

$$f_2 : V \rightarrow S$$

pri tretjem s kombinacijo dveh vektorjev dobimo spet nov vektor

$$f_3 : V \times V \rightarrow V$$

pri zadnjem tipu operacije pa iz danega vektorja in skalarne vrednosti dobimo nov vektor

$$f_4 : V \times S \rightarrow V$$

V tabeli 1 je našteto nekaj standardnih operacij, ki jih izvajajo obstoječi vektorski računalniki.

Tip	Simbol	Opis (I = 1, N)	
f_1	VSQR	kvadratni koren	$B(I) = \sqrt{A(I)}$
	VSIN	sinus	$B(I) = \sin(A(I))$
f_2	VSUM	vsota komponent	$S = \sum A(I)$
	VMAX	maksimalna komponenta	$S = \max A(I)$
f_3	VADD	vsota vektorjev	$C(I) = A(I) + B(I)$
	VMPY	produkt vektorjev	$C(I) = A(I) * B(I)$
	VAND	logični **in**	$C(I) = A(I)$ **and** $B(I)$
	VLAR	večja komponenta	$C(I) = \max(A(I), B(I))$
	VTGE	test $\geqq$	$C(I) = 0$ če $A(I) < B(I)$
			$= 1$ če $A(I) \geqq B(I)$
f_4	SADD	vsota s skalarjem	$B(I) = S + A(I)$
	SDIV	deljenje s skalarjem	$B(I) = A(I)/S$

Tabela 1

Poleg aritmetičnih operacij imamo še posebne operacije za kombiniranje in skrajševanje vektorjev. Taki operaciji sta COMPRESS (stisni) in MERGE (zlij). Prva skrajša vektor, druga pa zlije dva vektorja v enega.

Jezik, v katerem običajno programiramo vektorske računalnike, je največkrat razširjena verzija fortrana. Vsebuje ukaze, ki smo jih navedli v razpredelnici, in kontrolne strukture, ki omogočajo operacije nad vektorji. V splošnem zahtevamo od prevajalnika, ki deluje za vektorski računalnik, dvoje:

a) avtomatsko prepoznavanje vzporednosti v programu (tudi zaporednem);
b) podpiranje vektorskih ukazov.

Ker je naloga precej zahtevna, običajno razdelimo prevajanje na dva dela. Prvo opravimo s predprevajalnikom, ki ga imenujemo vektorizator. Njegovo delo je analiza fortranskega programa, ki naj določi možnost prevajanja v vektorsko sintakso. Ta del je zelo odvisen od računalniškega sistema, na katerem vektorizator deluje, ker mora upoštevati aparaturne lastnosti sistema. Treba je odkriti možnost prestrukturiranja zank, odvisnosti spremenljivk itd.

Glavni postopki vektorizatorja so:
— določitev vzorca izvajanja podprogramov;
— preverjanje relacij med podprogrami;
— preverjanje lokalnosti spremenljivk;

— določitev kontrolnih spremenljivk v zankah;
— preverjanje neodvisnosti spremenljivk;
— zamenjava notranjih zank z vektorskimi ukazi;

Oglejmo si nekaj najbolj značilnih tehnik za spreminjanje običajnih fortranskih stavkov v vektorske ukaze. (Vektorske spremenljivke označimo z notranjim DO zapisom $A(e_1:e_2:e_3)$. Če velja DIMENSION X(8), Y(10, 4), potem X(2:8:2) označuje elemente X(2), X(4), X(6) in X(8), Y(3:5,3) pa Y(3,3), Y(4,3) in Y(5,3). Te tehnike so:

1) enostavno DO zanko, ki vsebuje neodvisne ukaze in je brez razvejitvenih stavkov, spremenimo v en vektorski ukaz. Primer:

```
DO I = 8, 120, 2
   A(I) = B(I + 3) + C(I + 1)
END DO
A(8:120:2) = B(11:123:2) + C(9:121:2)
```

2) IF stavek nadomestimo s kontrolno vektorsko strukturo

```
DO I = 1, N
   IF (L(I). NE. 0) THEN A(I) = A(I) — 1
END DO

WHERE (L(.). NE. 0) A(1:N) = A(1:N) — 1
```

3) sprememba vrstnega reda ukazov lahko omogoči vzporednost

```
DO I = 1, N
   A(I) = B(I — 1)
   B(I) = 2 * B(I)
END DO

B(1:N) = 2 * B(1:N)
A(1:N) = B(0:N — 1)
```

4) uporaba dodatne spremenljivke omogoča vzporednost

```
DO I = 1, N
   A(I) = B(I) + C(I)
   B(I) = 2 * A(I + 1)
END DO

TEMP(1:N) = A(2:N + 1)
A(1:N) = B(1:N) + C(1:N)
B(1:N) = 2 * TEMP(1:N)
```

Uporaba predprevajalnika omogoča kar se da enostavno doseganje vzporednosti. Seveda vgrajene tehnike ne dajo vedno optimalnih programov. Lahko pa pomenijo uporabno orodje pri prepoznavanju vzporednosti.

Vzporednost pri teh računalnikih lahko razdelimo v dva nivoja. Prvi je vzporednost pri sprejetju in razpoznavanju ukaza ter vzpostavitvi potrebnih poti, drugi pa samo izvajanje ukaza. Princip tekočega traku lahko zasledimo pri različnih aparaturah komponentah:

a) aritmetične enote lahko razdelimo na posamezne bolj elementarne gradnike, ki izvajajo svoj del operacije istočasno z drugimi gradniki. Tako poznamo vektorske aritmetične enote za seštevanje, množenje, deljenje in ra-

čunanje kvadratnega korena. Take enote imajo računalniki Cyber serija 200 in TI-ASC.

b) tok ukazov lahko izvajamo na pretočni način z razdelitvijo na sprejem ukaza, razpoznavanje ukaza in sprejem operandov. Tipična primera sta IBM System 360/91 in Amdahl 470/V6.

c) pretočnost z uporabo več procesorjev. Tok podatkov gre od prvega procesorja, ki izvede določeno operacijo, do drugega itd. Ločimo eno in večfunkcijske zgradbe. Pri prvih zaporedje procesorjev izvaja le en ukaz (npr. seštevalnik), pri drugih pa več različnih ukazov, bodisi ob drugem času bodisi istočasno, s povezavo različnih segmentov. Druga delitev je na statične in dinamične pretočne zgradbe. Statične so lahko eno ali večfunkcijske, vendar v enem trenutku lahko izvajajo le eno vrsto ukazov. Dinamična zgradba pa omogoča več funkcijskih konfiguracij istočasno — torej je nujno večfunkcijska. Dinamične in večfunkcionalne zgradbe so uporabnejše, vendar je nadzor nad izvajanjem operacij dosti težji.

Učinkovitost pretočne zgradbe je odvisna od učinkovitosti najslabšega gradnika. Povečamo jo lahko tako, da ta gradnik izboljšamo. To običajno ni mogoče, razen če ga lahko razdelimo na elementarnejše dele. Ponavadi to ne gre. Zato učinkovitost povečamo tako, da ga podvojimo. To pa spet poveča zapletenost kontrole.

Računalniki Cyber serija 200 in računalniki Cray

Oglejmo si podrobneje računalnike Cyber 203 in 205 ter družino računalnikov Cray.

Računalniki Cyber serija 200 imajo ločeni aritmetični enoti za skalarno in vektorsko aritmetiko v premični piki. Vektorska aritmetična enota — linija izvaja strojne vektorske ukaze, ki prejemajo operande neposredno iz glavnega pomnilnika. Zmogljivost pomnilnika je pri tipu 203 od 0.5 do 2 milijona 64-bitnih besed in od 1 do 16 milijonov besed pri tipu 205. Najavljene so že nove razširitve pomnilnika. Poleg tega je pri vsaki besedi dodanih še 8 t. i. SECDED bitov, ki služijo za kontrolo parnosti (Single Error Correction Double Error Detection). Računalniki niso samostojni, temveč potrebujejo čelni računalnik. To je običajno računalnik Cyber 170 ali IBM 303X. Poleg tega je v sistemu še več računalnikov, ki služijo za pripravo podatkov.

Tip 203 ima dve ločeni liniji, 205 pa po želji dobavljajo z eno, dvema ali s štirimi neodvisnimi linijami. Na sliki 2 je shematsko prikazan računalnik serije 200.

Hitrost izvajanja operacij je odvisna od operacije same in od tega, s kakšno dolžino besede operiramo. Lahko izvajamo operacije na polni (64 bitov) ali na polovični besedi (32 bitov). Teoretično serija 200 lahko doseže hitrosti, kot so prikazane v tabeli 2. Vrednosti so podane v MFLOPS-ih (milijon operacij v premični piki na sekundo).

	203 2 liniji		205 2 liniji		205 4 linije	
	64 bitov	32 bitov	64 bitov	32 bitov	64 bitov	32 bitov
+	50	100	100	200	200	400
×	25	50	100	200	200	400
/	12.5	25	12.5	25	25	50

Tabela 2

Poleg tega pa ima tip 205 še važno lastnost. Operacije v obliki

$$x + c\,y$$

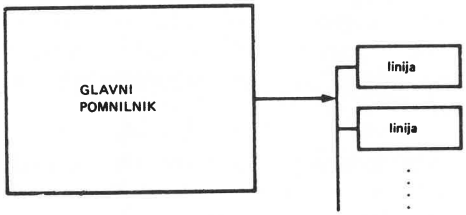
kjer sta x in y vektorja, c pa skalar, lahko izvaja tako hitro kot seštevanje, kar lahko pogosto s pridom izkoristimo (npr. pri Gaussovi eliminaciji). Tako je maksimalna teoretična hitrost kar 200 MFLOPS za 64-bitno aritmetiko in dve liniji in 800 MFLOPS za 32-bitno aritmetiko in štiri linije. Kot primer navedimo, da je hitrost računalnika VAX 11/780 samo 0.3 MFLOPS.

Zgornji rezultati predstavljajo le teoretično možno hitrost, ki ni dosegljiva. Vsaka vektorska operacija je povezana z zakasnitvijo med izdanim ukazom in časom, ko pride prvi rezultat iz linije. Aproksimativno časovno formulo za vektorske ukaze lahko izrazimo v obliki

$$T = S + f\,n$$

kjer je S tako imenovani začetni čas, f čas, v katerem dobimo eno komponento rezultata, izražen v taktih, in n dolžina vektorja. T merimo v taktih. S predstavlja čas, v katerem dobimo prvo komponento rezultata, in čas, potreben za organizacijo ukaza. Za Cyber 203 je takt 40 ns, f pa 0.5 za seštevanje, 1 za množenje in 2 za deljenje v 64-bitni aritmetiki. S se giblje v mejah od 70 taktov za seštevanje do 165 za deljenje. Cyber 205 ima še enkrat hitrejšo uro: njegov takt je 20 ns. Faktor f in S sta enaka za vse aritmetične operacije: $f = 0.5$ in $S \approx 50$ taktov.

Tako je v tabeli 3 prikazana dejanska hitrost izvajanja vektorskih operacij pri različno dolgih vektorjih za računalnik Cyber 205, ki doseže, kot smo videli, teoretično hitrost 100 MLOPS. Učinek začetnega časa je posebej opazen pri kratkih vektorjih, kjer je n majhno število:



Slika 2

n	MFLOPS
10	9
100	50
1000	91
10000	99
∞	100

Tabela 3

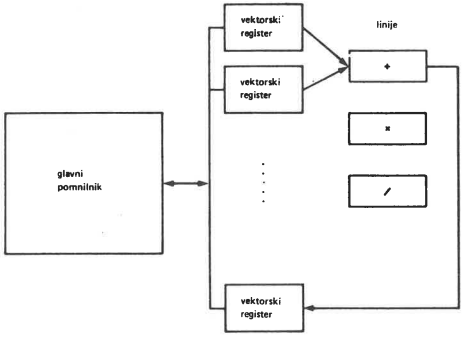
Za kratke vektorje je izkoristek možnost računalnika le 9 odstotkov, šele za vektorje dolžine okoli 1000 dosežemo 90 % izkoristek.

K zmanjšanju hitrosti veliko prispeva tudi zahteva, da morajo biti komponente vektorja na zaporednih pomnilniških lokacijah. Če podatki za vektorske operacije niso tako organizirani, jih moramo preurediti (npr. matrične operacije po vrsticah). Računalniki Cyber imajo vgrajene ukaze na strojnem nivoju, ki omogočajo združevanje, premeščanje in druge operacije v pomnilniku. Kljub temu to preurejanje doda svoj delež k počasnejšemu izvajanju.

Družina računalnikov Cray je v marsičem podobna računalnikom Cyber serija 200. Obstajajo pa bistvene razlike med njimi.

Glavni pomnilnik modela Cray 1 in Cray 1S obsega od 0.5 do 4 milijone 64-bitnih besed in do 8 milijonov besed pri tipu X-MP. V nasprotju z računalniki Cyber, računalniki Cray nimajo možnosti dela s polovičnimi (32-bitnimi) besedami. Tudi Cray 1 ni samostojni računalnik, marveč kot čelni računalnik uporablja Data General Eclipse ali Cray Research »A« processor. S čelnim računalnikom je povezan z vhodno izhodnimi kanali, ki imajo zmogljivost 80 Mzlogov na sekundo. Naloge čelnega računalnika so zbiranje podatkov, posredovanje podatkov računalniku Cray 1 in posredovanje rezultatov počasnejšim zunanjim enotam.

Poleg tega ima računalnik Cray za vsako vektorsko aritmetično operacijo v premični piki svojo enoto. Tako imamo linijo, ki sešteva vektorje, linijo, ki jih množi, in linijo, ki izračuna recipročno vrednost vektorja (po komponentah). Dejansko imamo kar 12 pretočnih zgradb. Poleg omenjenih imamo še dve liniji za celoštevilsko aritmetiko (seštevanje, premik, logične operacije in štetje ničel — vodilnih ali v besedi) in še tri vektorske (seštevanje, logične operacije in premik). Takt procesorja je hitrejši kot pri računalniku Cyber 205 in je 12.5 ns pri modelu Cray 1 in 9.5 ns za model Cray X-MP. Poleg tega ima slednji možnost zgradbe z 1, 2 ali 4 procesorji. Tako v sebi združuje tako vektorski kot vzporedni pristop.



Slika 3

Najvažnejša razlika med računalniki Cray in Cyber je v tem, da računalniki Cray črpajo operande za vektorske ukaze iz posebnih vektorskih registrov. Vsak izmed osmih registrov lahko sprejme 64 besed. Shematsko je procesor računalnika Cray prikazan na sliki 3.

Uporaba vektorskih registrov omogoča zelo kratek začetni čas za operacije, če imamo podatke že pripravljene v registrih. Če izrazimo hitrost dela enako kot pri računalnikih Cyber:

$$T = S + f n$$

je S velikostnega reda nekaj deset taktov, kar je precej manj kot pri računalnikih Cyber, f pa je zopet okoli 1. Maksimalna hitrost vsake aritmetične operacije pri modelu Cray 1 je 80 MFLOPS. Ker imamo aritmetični enoti za seštevanje in množenje ločeni, lahko ti operaciji izvajamo istočasno. Tako je teoretična maksimalna hitrost modela Cray 1 160 MFLOPS. Tip X-MP, ki uporablja hitrejšo uro in štiri procesorje, pa je več kot petkrat hitrejši. Teoretična hitrost tega modela je 840 MFLOPS.

Posledica kratkega začetnega časa se kaže zlasti pri računanju s kratkimi vektorji. Izraba procesorja je veliko boljša, saj je pri $n = 10$ kar 50 % v primerjavi z 9 % računalnikov Cyber (glej tabelo 4).

n	MFLOPS
10	40
20	53
64	69

Tabela 4

Vendar to velja le, če imamo vektorje že pripravljene v registrih. Ker imamo tu lahko največ 64 besed, moramo boljši izkoristek, kot je 70 %, doseči s posebnimi tehnikami. Tako se uporablja preklapljanje registrov, veriženje aritmetičnih enot itd. Veriženja uporabljamo takrat, ko je rezultat vektorsko operacije spet vektor in ga potrebujemo takoj v naslednjem izračunu. Rezultata shranimo v pomnilnik, ampak takoj vzpostavimo potrebne povezave za izvajanje naslednjega ukaza. Tako lahko začnemo izvajati naslednji ukaz takoj, ko dobimo prve komponente vmesnega rezultata.

Vendar teh tehnik ne moremo uporabiti vedno. Tako k manjši hitrosti računanja prispeva svoj delež še prenos med glavnim pomnilnikom in registri. Te operacije lahko v določeni meri izvajamo istočasno kot računanje. Vendar je med pomnilniki in registri le ena povezava. Ker zahteva shranjevanje in nalaganje en takt za besedo, lahko hkrati z aritmetično operacijo naložimo ali shranimo le eno besedo.

Problem je delno rešen pri tipu X-MP, ki ima tri poti med pomnilnikom in registri. To omogoča istočasno nalaganje dveh besed in shranjevanje ene.

Tako se principi programiranja računalnikov Cray in Cyber razlikujejo predvsem v organizaciji podatkov. Pri prvih si prizadevamo, da ohranimo podatke v registrih in kar se le da redko posegamo v pomnilnik. Pri računalnikih Cyber pa zaradi dolgega začetnega časa poskušamo računanje organizirati tako, da je dolžina vektorjev kar največja.

Vzporedni računalnik

Pod modelom vzporednega računalnika si običajno mislimo računalnik, ki ga sestavlja več identičnih procesorjev. To je običajno res, vendar nekateri računalniki, kot npr. C.mmp, dopuščajo nekaj razlik med procesorji.

Ukazi za procesor lahko izhajajo bodisi iz posameznega procesorja bodisi iz centralne krmilne enote. Glede na to delimo vzporedne računalnike v dve skupini. V prvem primeru se lahko ukazi, ki jih izvajajo posamezni procesorji istočasno, med seboj razlikujejo. Ti računalniki spadajo v MIMD model (Multiple Instruction Stream — Multiple Data Stream). V drugem primeru vsak procesor izvaja ob istem času isti ukaz. Seveda z različnimi podatki. To je SIMD model (Single Instruction Stream — Multiple Data Stream). Posamezen procesor lahko tudi izklopimo, če ne želimo, da bi izvajal ta ukaz.

Računalnike tipa SIMD lahko opišemo s četvorico (N, F, I, M), kjer N označuje število procesorjev, F način povezave med procesorji, I nabor ukazov in M način izključitve procesorjev. Centralna procesna enota, ki nadzoruje delovanje vseh procesorjev, ima svoj pomnilnik, v katerem je shranjen program. Njene naloge so:

— razpoznati ukaz;
— določiti, kje se ukaz izvaja;
— izvajati skalarne in kontrolne ukaze;
— rezanje daljših vektorjev (če dolžina vektorja presega število procesorjev).

Precejšnji del časa za izvajanje zavzemajo manipulacije s podatki, določanje pomnilniških lokacij in predvsem pretok podatkov med procesorji in procesorji in pomnilnikom.

Da bi zmanjšali zakasnitve, do katerih prihaja zaradi komunikacij, je vsak izmed procesorjev opremljen s svojim pomnilnikom. Procesorji so povezani med seboj po komunikacijski mreži. Ta mreža omogoča predvsem prenos podatkov med procesorji.

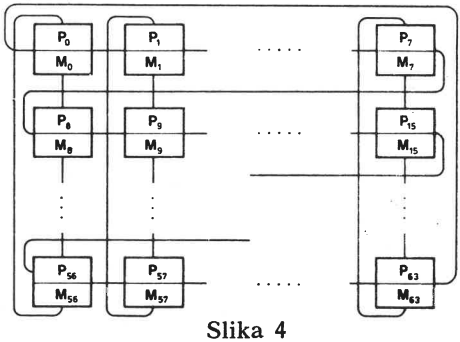
Ker je predrago, da bi direktno povezali vsak procesor z vsemi drugimi, je treba procesorje na tak ali drugačen način organizirati v mrežo. To pa povzroča zakasnitev zaradi podaljšane poti, ki jo mora opraviti podatek na poti od enega do drugega procesorja. Ta zakasnitev lahko resno vpliva na čas izvajanja programa. Tako Gentleman [1] ugotavlja, da je pretok podatkov, ne pa aritmetične operacije, glavni omejitveni faktor pri matričnih operacijah.

V idealnih okoliščinah bi bil vsak procesor neposredno povezan z vsakim procesorjem (oz. njegovim pomnilnikom) in z glavnim pomnilnikom. To bi omogočalo, da bi bil v enem taktu dosegljiv katerikoli podatek. Vendar je to nepraktično in neizvedljivo. Razloga sta dva. Na prvem mestu je dejstvo, da kompleksnost sheme povezave narašča s kvadratom števila procesorjev. Po drugi strani pa obstoječa tehnologija ne more omogočiti tako velikega števila priključkov na posameznem procesorju. Vsak procesor bi namreč moral voditi n komunikacijskih linij in že za zmerno število procesorjev ne moremo na procesorsko ploščico razvrstiti toliko priključkov.

Tako obstoječi sitemi omogočajo neposredno povezavo le nekaj procesorjev. Seveda imajo vsi procesorji možnost posredne povezave z vsemi drugimi. Organizacijo povezav lahko razdelimo v tri skupine.

a) Mreža

Vsakega izmed p procesorjev opremimo z lokalnim pomnilnikom. Razvrstimo jih v pravilno strukturo, ki je lahko tabela, drevo, n-kotnik itd. Vsak procesor je stalno povezan z nekaterimi drugimi, običajno s sosedi v mreži.



Slika 4

Klasičen primer take povezave srečamo pri računalniku Illiac IV. Tega je sestavljalo 64 hitrih procesorjev, razvrščenih v matriko 8 × 8, kot je prikazano na sliki 4. Vsak procesor je lahko deloval s hitrostjo okoli 1 MFLOPS, tako da je bila teoretična maksimalna hitrost okoli 60 MFLOPS.

Vsak procesor je bil opremljen s pomnilnikom kapacitete 2048 64-bitnih besed. Illiac IV je bil računalnik tipa SIMD, torej so vsi procesorji istočasno izvajali isti ukaz. Predstavljamo si ga lahko kot računalnik, ki izvaja vektorske ukaze na vektorjih dolžine 64 ali manj. Maksimalna hitrost je bila le težko dosegljiva zaradi relativno majhnega pomnilnika in omejitev, ki so jih predstavljale komunikacije. Illiac IV je deloval od leta 1972 do 1981.

Na mrežni povezavi je zasnovan tudi Distributed Array Processor (DAP) firme International Computers Limited in Massively Parallel Processor (MPP) firme Goodyear Aerospace Corporation.

DAP sestavlja tabela iz 64 × 64 enobitnih procesorjev. Vsak procesor je povezan s štirimi najbližjimi sosedi. Dodane so še podatkovne linije po vrsticah in stolpcih.

Enobitni procesorji, ki dovoljujejo vzporednost na zelo osnovnem nivoju, in dodatne linije naj bi rešili nekatere komunikacijske probleme, ki so se pojavljali pri Illiacu IV. Osnovna naloga računalnika DAP je množenje matrik in to nalogo lahko opravlja s hitrostjo okoli 20 MFLOPS za 32-bitne besede.

V računalniku MPP so procesorji tudi enobitni, razdeljeni v tabelo. MPP sestavlja 16000 procesorjev, ki delujejo v SIMD načinu s hitrostjo 430 MFLOPS za seštevanje in 216 MFLOPS za množenje 32-bitnih besed. Zgrajen je bil predvsem za obravnavo podatkov, ki jih pošiljajo sateliti, uporabljajo pa ga tudi pri proučevanju dinamike tekočin.

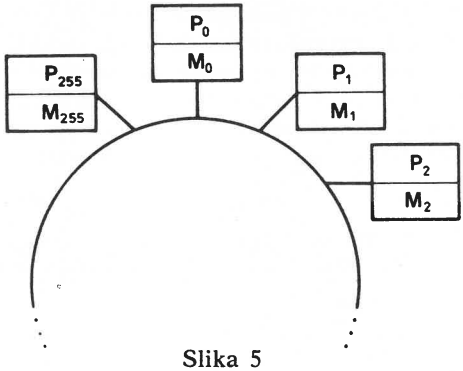
Poleg razvrstitve v tabele se uporablja tudi drevesna zgradba, predvsem dvojiška drevesa. Procesorje postavimo v vozlišča drevesa, povezave med vozlišči pa so povezave med procesorji. Glavni problem pri uporabi take organizacije je v komunikaciji, ki jo mora opraviti procesor v korenu drevesa (povezava med levo in desno polovico drevesa). Da zmanjšamo stopnjo te komunikacije, običajno vpeljemo še prečne povezave med procesorji na istem nivoju drevesa.

Prav tako je možna tudi n-dimenzionalna mreža. Na California Institute of Technology deluje računalnik Cosmic Cube, ki je zasnovan na razporeditvi procesorjev v 6-dimenzionalno kocko. Procesorji Intel 8086/8087 z 128 K zlogi pomnilnika so razvrščeni v ogliščih (torej jih je 64). Povezani so preko robov kocke. Intel Corporation je napovedal komercialno verzijo z boljšimi procesorji in večjim pomnilnikom.

b) Vodilo

Naslednji možni pristop h komunikaciji je preko skupnega vodila. Vsak procesor, opremljen z lokalnim pomnilnikom, je povezan z vodilom, ki omogoča komunikacijo med procesorji.

Primer takega računalnika je ZMOB z University of Maryland. Sestavlja ga do 256 mikroprocesorjev Z-80. Ti so razvrščeni, kot je prikazano na sliki 5.



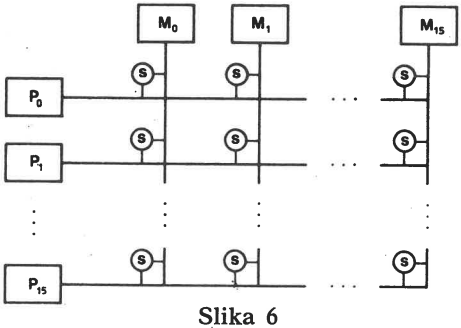
Slika 5

Lastnosti vodila glede na procesorje so tako dobre, da ni običajnih zakasnitev, ki so drugače karakteristične za uporabo vodil. Zaradi visoke hitrosti, ki jo omogoča vodilo, lahko procesor dobi podatke iz poljubnega pomnilnika v praktično enakem času. Žal je ta lastnost posledica počasnosti procesorja Z-80 in ne izjemnih lastnosti vodila.

Vodilo kot komunikacijsko sredstvo uporablja tudi eksperimentalni sistem Cm* Carnegie-Mellon University. Sestavlja ga 50 procesorjev DEC LSI-11. Ti so povezani v skupine, ki jih povezuje sistem vodil. Procesorji nimajo lokalnega pomnilnika, ampak si delijo skupni virtualni adresni prostor.

c) Preklopi

Imamo P procesorjev in M pomnilnikov, ki so povezani s preklopi, tako da ima procesor dostop do nekaj (tudi vseh) pomnilnikov.



Slika 6

Klasičen primer takega računalnika je 15 let stari sistem C.mmp Carniege Mellon University. Sistem sestavlja 16 DEC PDP miniračunalnikov in 16 pomnilniških modulov, ki jih povezuje mreža 16 × 16 preklopov. Shematsko je ta računalnik prikazan na sliki 6.

Popolna mreža za povezavo n procesorjev in n pomnilnikov vsebuje n^2 preklopov, kar ni primerno za velike n. Običajno imajo sistemi $O(n \log n)$ preklopnih vezij. Med njimi je najbolj poznan Heterogeneous Element Processor (HEP, ki ga izdeluje Denelcor, Inc..

Obstajajo tudi drugi načini povezave procesorjev, ki so vgrajeni v različne, predvsem eksperimentalne, vzporedne sisteme. Vendar so običajno načini povezave izbrani tako, da kar najbolj ustrezajo določeni vrsti nalog. Torej imamo opraviti predvsem s problemsko usmerjenimi računalniki, npr. za reševanje nalog iz metode končnih elementov ali za reševanje diferencialnih enačb.

Pri analizi vzporednih algoritmov se pogosto srečamo s konceptom pararačunalnika. Ta ima lahko poljubno število procesorjev, katerih število se spreminja od algoritma do algoritma ali od naloge do naloge. Prav tako zanemarimo čas, potreben za komunikacijo in konflikte, ki lahko nastopajo pri sočasnem poseganju dveh ali več procesorjev na isto pomnilniško lokacijo. Čeprav nerealističen, daje tak modul uporabne podatke o lastnostih algoritma in predstavlja možnost primerjave algoritmov za različne računalnike.

Razvoj v arhitekturi bo verjetno združil oba koncepta: pretočni in vzporedni. Prvi taki računalniki so že na trgu, saj Cray X-MP lahko deluje s štirimi procesorji, ki vsak zase predstavljajo vektorski računalnik.

LITERATURA

[1] W. M. Gentleman, *Some complexity results for matrix computations on parallel processors*, Dept. of Comp. Sci., Univ. of Waterloo, 1976.

[2] J. J. Lambiotte, Jr., R. G. Voigt, *The solution of tridiagonal systems on the CDC STAR-100 computer*, ACM Trans. Math. Software **1** (1975) 308—329.

[3] R. Hockney, C. Jesshope, *Parallel Computers : Architecture, Programming and Algorithms*, Adam Hilger, Bristol 1981.

[4] W. Ware, *The ultimate computer*, IEEE *Spect.* **10** (1973) 89—91.

[5] B. Buzbee, *Remarks for the IFIP congress '83 panel on how to obtain high performance for high-speed processors*, Los Alamos National Laboratory Report LA-UR-83-1392, Los Alamos, NM 1983.

[6] J. M. Ortega, R. G. Voigt, *Solution of partial differential equations on vector and parallel computers*, SIAM Review **27** (1985) 149—240.

[7] D. Heller, *A survey of parallel algorithms in numerical linear algebra*, SIAM Review **20** (1978) 740—777.

[8] W. L. Miranker, *A survey of Parallelism in Numerical Analysis*, SIAM Review **13** (1971) 524—547.

[9] K. Hwang, S. P. Su, L. M. Ni, *Vector computer architecture and processing techniques*, Advances in Computers; **20**, Ed. M. C. Yovits, Academic Press 1981 115—197.

[10] *CONPAR* 81, Ed. W. Händler, Lecture Notes in Computer Science; **111**, Springer Verlag 1981,

KUBIČNE ENAČBE

MARKO RAZPET

Math. Subj. Class. (1985) 10 B 10, 12 D 10, 30 C 15

V članku izračunamo korene kubične enačbe s transformacijo na binomsko obliko.

CUBIC EQUATIONS

In this article we compute the roots of the cubic equation by the transformation to the binomial form.

Splošna kubična enačba ima obliko

$$A z^3 + B z^2 + C z + D = 0 \tag{1}$$

kjer so koeficienti A, B, C in D kompleksna števila. Seveda bomo privzeli, da je vodilni koeficient A od nič različen. Z linearno transformacijo

$$z = w - \frac{B}{3A} \tag{2}$$

prevedemo enačbo (1) na obliko, kjer ni kvadratnega člena:

$$w^3 + 3p\,w + 2q = 0 \tag{3}$$

Namenoma smo označili koeficient pred w s $3p$ in prosti člen z $2q$. Če je $p = 0$, imamo opravka z binomsko enačbo oblike

$$w^3 = E \tag{4}$$

1. Najprej obravnavajmo primer $p = 0$ in $q = 0$. Enačba (3) ima tedaj en sam trojni koren, in sicer $w = 0$.

2. Če je $p = 0$ in $q \neq 0$, rešujemo binomsko enačbo

$$w^3 = -2q \tag{5}$$

Če zapišemo kompleksno število $-2q$ v polarni obliki

$$-2q = 2|q|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

potem lahko en koren enačbe (5) zapišemo v obliki

$$w_1 = \sqrt[3]{2|q|}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \tag{6}$$

Preostala korena w_2 in w_3 enačbe (5) lahko potem izrazimo z relacijama

$$w_2 = w_1\,\varepsilon, \quad w_3 = w_1\,\varepsilon^2 \tag{7}$$

kjer smo označili

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \tag{8}$$

3. Enačbi (3) priredimo njeno diskriminanto D z izrazom

$$D = p^3 + q^2 \tag{9}$$

Oglejmo si primer, ko je $p \neq 0$ in $D = 0$. Tedaj je tudi $q \neq 0$. Z neposrednim računom lahko preverimo, da ima enačba (3) tri korene, od katerih pa sta dva enaka:

$$w_1 = w_2 = -\frac{q}{p}, \quad w_3 = \frac{2q}{p} \tag{10}$$

4. Preostane še primer $p \neq 0$ in $D \neq 0$, zaradi česar je tudi nastal pričujoči članek. Prejšnje tri točke smo navedli samo zaradi popolnosti.

Naj bo torej $p \neq 0$ in $D \neq 0$. Enačbo (3) bomo rešili z vpeljavo nove neznanke t, ki je povezana z neznanko w z relacijo

$$w = \frac{a\,t + b}{t + 1} \tag{11}$$

Vpeljimo še funkcijo $f(w) = w^3 + 3p\,w + 2q$. Enačba (3) potem s substitucijo (11) in po preureditvi preide v enačbo

$$f(a)\,t^3 + 3(a^2\,b + p\,b + 2p\,a + 2q)\,t^2 + 3(a\,b^2 + 2p\,b + p\,a + 2q)\,t + \\ + f(b) = 0 \tag{12}$$

Ta enačba bo imela najenostavnejšo obliko, če bosta izpolnjena pogoja

$$a^2\,b + p\,b + 2p\,a + 2q = 0 \tag{13}$$

$$a\,b^2 + 2p\,b + p\,a + 2q = 0 \tag{14}$$

Zanima nas samo primer $a \neq b$, saj bi v nasprotnem primeru imeli $w = a = b$, iz česar bi zaradi (13) in (14) dobili $f(a) = f(b) = 0$ in relacija (12) sploh ne bi bila več enačba. Če enačbi (13) in (14) odštejemo oziroma seštejemo, dobimo enačbi

$$(a\,b + p)\,(a - b) = 0 \tag{15}$$

$$(a + b)\,(a\,b + 3p) + 4q = 0 \tag{16}$$

Zaradi pogoja $a \neq b$ dobimo iz (15) in (16) še

$$a\,b = -p \quad \text{in} \quad a + b = -\frac{2q}{p} \tag{17}$$

Števili a in b morata biti po Viètovem pravilu korena kvadratne enačbe

$$p\,\lambda^2 + 2q\,\lambda - p^2 = 0 \tag{18}$$

z diskriminanto $4p^3 + 4q^2 = 4D \neq 0$.

Koeficient $f(a)$ v enačbi (12) je zaradi (17) mogoče poenostaviti:

$$f(a) = a^3 + 3p\,a + 2q = a^3 - 3a^2\,b + (a + b)\,a\,b = a(a - b)^2 \tag{20}$$

Na isti način dobimo tudi

$$f(b) = b(a - b)^2 \tag{21}$$

Enačbo (12) smo tako prevedli na binomsko obliko

$$t^3 = -\frac{b}{a} \tag{22}$$

če sta le števili a in b korena enačbe (18). Binomska enačba (22) ima tri različne kompleksne korene t_1, t_2 in t_3. V ravnini kompleksnih števil (t) tvorijo oglišča enakostraničnega trikotnika, ki je včrtan krogu s središčem v točki 0 in polmerom

$$r = \sqrt[3]{\left|\frac{b}{a}\right|} \tag{23}$$

Z relacijo (11) pa imamo za $a \neq b$ definirano preslikavo ravnine kompleksnih števil (t) v ravnino kompleksnih števil (w). Preslikava je konformna za $t \neq -1$. Obratna preslikava je dana z relacijo

$$t = \frac{b - w}{w - a} \tag{24}$$

in je konformna za $w \neq a$. Iz relacije (24) izpeljemo še

$$|t|^2 (w - a)(\overline{w} - \overline{a}) = (b - w)(\overline{b} - \overline{w}) \tag{25}$$

oziroma po preureditvi

$$(|t|^2 - 1)\,|w|^2 + (\overline{b} - \overline{a}\,|t|^2)\,w + (b - a\,|t|^2)\,\overline{w} + |t|^2\,|a|^2 - |b|^2 = 0 \tag{26}$$

Krožnica $|t| = r$, na kateri ležijo koreni enačbe (22), se preslika na krivuljo, ki je dana z relacijo

$$(r^2 - 1)\,|w|^2 + (\overline{b} - \overline{a}\,r^2)\,w + (b - a\,r^2)\,\overline{w} + r^2\,|a|^2 - |b|^2 = 0 \tag{27}$$

Če je $|a| = |b|$, $a \neq b$, potem ležijo točke

$$w_k = \frac{a\,t_k + b}{t_k + 1}, \quad k = 1, 2, 3 \tag{28}$$

v ravnini (w) na premici, ki je dana z relacijo

$$\mathrm{Re}((\overline{b} - \overline{a})\,w) = 0 \tag{29}$$

Če pa je $|a| \neq |b|$, potem ležijo točke na krožnici, ki ima središče v točki

$$c = \frac{a\,r^2 - b}{r^2 - 1} \tag{30}$$

in polmer

$$R = \frac{r\,|a - b|}{|r^2 - 1|} \tag{31}$$

To dobimo iz relacije (27), če upoštevamo, da ima krožnica s središčem v točki c v ravnini (w) in radijem R enačbo

$$|w - c|^2 = |w|^2 - (\overline{c}\,w + c\,\overline{w}) + |c|^2 = R^2$$

Števila w_k, ki so podana z izrazi v (28), so za $a \neq b$ koreni enačbe (3). Če upoštevamo še enačbo (22), potem lahko zapišemo tudi

$$w_k = a\,t_k(1 - t_k), \quad k = 1, 2, 3 \tag{32}$$

Odtod lahko pridemo do Cardanove formule (glej na primer Mitrinović, [2] ali Vidav, [3]). Običajna pot do Cardanove formule je nesporno kratka in elegantna in tudi ne zahteva razvejitve na možnosti 1, 2, 3 in 4. Naš namen je bil samo pokazati, da se enačba (1) skoraj zmeraj da prevesti na binomsko obliko (4) z neko linearno lomljeno substitucijo, ki je kompozitum substitucij (2) in (11).

Ideja za substitucijo (11) izvira iz tehnike integralskega računa (Fihtengol'c, [1], str. 70).

Za zaključek si oglejmo enačbo (3), kjer sta koeficienta p in q realna, poleg tega pa naj bo $p \neq 0$ in $D \neq 0$. Poskusimo odgovoriti na vprašanje, kdaj so koreni w_1, w_2 in w_3 pri navedenih pogojih realni.

i) Naj bo najprej $p \neq 0$ in $D > 0$. Enačba (18) ima tedaj različna realna korena a in b. Če je $q = 0$, dobimo $a = -b$ in s tem $|a| = |b|$, koreni ležijo na imaginarni osi ravnine (w), kar je razvidno iz relacije (29), še laže pa to izvemo iz enačbe (3). Če pa je $q \neq 0$, imamo primer, ko je $|a| \neq |b|$, koreni pa ležijo na neki krožnici.

ii) Oglejmo si še primer, ko je $p \neq 0$ in $D < 0$. Števili a in b sta tedaj konjugirano kompleksni, razločujeta se za čisto imaginarno število, denimo $a - b = d\,i$, $d \neq 0$. Opravka imamo torej s primerom $|a| = |b|$ in $a \neq b$, koreni enačbe (3) ležijo na premici, ki je v ravnini (w) dana z relacijo (29), ki se v tem primeru glasi $\mathrm{Re}(d\,i\,w) = 0$ oziroma $\mathrm{Im}\, w = 0$. Enačba (3) ima pri danih pogojih tri različne realne korene.

LITERATURA

[1] G. M. Fihtengol'c, *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija*, tom II, Nauka, Moskva 1969.

[2] D. S. Mitrinović, *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd 1966.

[3] I. Vidav, *Algebra*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana 1980.

NOVE KNJIGE

PAVKOVIĆ B., DAKIĆ B., Polinomi, Školska knjiga, Zagreb 1987, 180 str.

Vsebinsko sega pričujoča knjiga nekoliko (?) čez okvir srednješolskega programa in je najbrž namenjena predvsem šolam naravoslovno-matematične usmeritve.

Številni zgledi tekoče podano snov dobro osvetlijo, med mnogimi nalogami utrjevalnega značaja pa najdemo tudi kopico manj običajnih (z rešitvami na koncu knjige).

Za ilustracijo in razbistritev vprašaja v prvem stavku preglejmo nekaj podrobnosti iz vsebine.

Evklidov in Hornerjev algoritem za polinome, njihov odvod in Taylorjeva formula so natančno obdelani. Prav tako je s Cardanovimi formulami. Obravnavana je razcepnost polinoma nad obsegi kompleksnih, realnih in racionalnih števil. Pri iskanju realnih ničel polinoma z realnimi koeficienti spoznamo poleg dveh najpreprostejših numeričnih metod tudi Sturmov kriterij o številu ničel polinoma na danem intervalu. V poglavju o polinomih z več spremenljivkami pa je dokazan osnovni izrek o simetričnih polinomih.

Boris Lavrič

PROBLEM ISKANJA TRAJEKTORIJ

BOJAN OREL

Math. Subj. Class. (1985) 65 L 05

V članku je opisanih nekaj metod za numerično iskanje trajektorije sistema navadnih avtonomnih diferencialnih enačb.

TRAJECTORY PROBLEMS

Some methods for the numerical solution of trajectory problem are described.

1. Uvod

Mnogo problemov v matematiki, fiziki ali mehaniki se reducira na reševanje sistema navadnih avtonomnih diferencialnih enačb

$$d\mathbf{y}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \qquad 0 \leqq t \leqq T, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{y}\colon [0, T] \to \mathbf{R}^d \quad , \quad \mathbf{f}\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$$

(Evklidsko normo v prostoru $\mathbf{R}^d$ bomo označili z $\| \cdot \|$.)

V problemih iz fizike in mehanike parameter t navadno pomeni čas, $\mathbf{y}(t)$ (rešitev sistema (1)) pa si lahko predstavljamo kot gibanje neke točke v faznem prostoru $\mathbf{R}^d$. Če poznamo rešitev sistema (1), poznamo tudi lego točke $\mathbf{y}(t)$ v poljubnem trenutku $0 \leq t \leq T$.

Veliko problemov pa je takih, da nas v resnici ne zanima lega točke $\mathbf{y}(t)$ v določenem trenutku, temveč le tir *(trajektorija)*, ki ga opiše točka $\mathbf{y}(t)$, ko parameter t preteče interval $[0, T]$.

Primer: Pri opisovanju nihanj v fiziki ali mehaniki pogosto pridemo do avtonomne diferencialne enačbe drugega reda

$$d^2 x/(dt)^2 + f(x, dx/dt) \,.\, dx/dt + g(x) = 0, \qquad x = x(t) \tag{2}$$

ki jo s pomočjo nove spremenljivke $dx/dt = y$ lahko zapišemo kot sistem enačb prvega reda

$$\begin{aligned} dx/dt &= p(x, y) \\ dy/dt &= q(x, y) \end{aligned} \tag{3}$$

oziroma

$$(dt =)\; dx/p(x, y) = dy/q(x, y) \tag{4}$$

Za primer enačbe (2) lahko vzamemo enostaven harmonični oscilator

$$d^2 x/(dt)^2 + x = 0$$

ki mu ustreza sistem enačb prvega reda

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -x \end{aligned} \tag{5}$$

Rešitve tega sistema so sinusoide v ravninah (x, t) in (y, t), od koder lahko ugotovimo lego $(x(t))$ in hitrost $(y(t))$ rešitve v vsakem trenutku t. Če pa nas zanima le zveza med spremenljivkama $x(t)$ in $y(t)$, rešimo ekvivalentni sistem v obliki (4)

$$dx/y = -dy/x$$

in dobimo družino koncentričnih krožnic (trajektorij sistema)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

v ravnini (x, y), centriranih v koordinatnem izhodišču.

Konec primera

Problemom tipa (1), pri katerih nas namesto eksplicitne odvisnosti lege točke $\mathbf{y}(t)$ od parametra t zanima le trajekorija, ki jo opiše rešitev $\mathbf{y}(.)$ sistema (1), bomo rekli *problemi iskanja trajektorije.*

Čeprav je znano mnogo analitičnih metod za iskanje trajktorije, ostaja mnogo zanimivih problemov tipa (1), ki jim z analitičnimi metodami ni mogoče določiti trajektorije. V zadnjem času pa se kaže potreba po učinkovitih numeričnih metodah za iskanje trajektorije tudi v primerih, ko trajektorijo poznamo analitično, pa je računanje točk na njej iz analitičnega izraza zamudno. Te vrste problemi se pojavljajo npr. pri upravljanju numerično krmiljenih strojev ali pri upravljanju robotov, kjer je hitrost računanja ena glavnih zahtev.

2. Preproste numerične metode

Pri numeričnem iskanju trajektorij v splošnem ne moremo pričakovati, da bomo natančno našli celo trajektorijo $\mathbf{y}(t)$. Zadovoljni bomo že, če bomo dobili zaporedje točk $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, ki ležijo čim bliže trajektoriji, kar pomeni, da obstaja zaporedje $t_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ $(t_0 = 0)$, da je napaka

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}(t_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

čim manjša (na primer $\|\mathbf{e}_i\| < \varepsilon$ za vnaprej predpisan $\varepsilon > 0$).

Poizkusimo rešiti preprost sistem enačb (5) s pomočjo nekaterih enostavnejših metod za numerično reševanje diferencialnih enačb.

1. *Eulerjeva metoda:* Pri Eulerjevi (eksplicitni) metodi generiramo zaporedje točk $\mathbf{y}_i$ rekurzivno s formulo

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_n \tag{6}$$

kjer nam $\mathbf{f}_n$ pomeni $\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$, $h > 0$ pa je primerno izbran (navadno dovolj majhen) parameter, ki mu pravimo korak metode. Če sistem (5) rešujemo s to metodo, dobimo zvezi

$$x_{n+1} = x_n + hy_n$$
$$y_{n+1} = y_n - hx_n$$

kar pomeni, da je

$$(x^2_{n+1} + y^2_{n+1})/R^2 = 1 + n^2$$

pri pogoju, da je $x_n^2 + y_n^2 = R^2$. Ker vemo, da so trajektorije sistema (5) koncentrične krožnice, vidimo, da s pomočjo Eulerjeve metode (6) dobimo zaporedje točk, ki se vedno bolj oddaljujejo od koordinatnega izhodišča, torej tudi od izbrane trajektorije.

2. *Implicitna Eulerjeva metoda*: To je metoda, pri kateri zaporedje $\mathbf{y}_i$ generiramo s formulo

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_{n+1} \tag{7}$$

Metoda je implicitna, ker nastopa $\mathbf{y}_{n+1}$ tudi na desni strani enačbe (7) $(\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}))$, torej moramo za izračun vsake točke numerične rešitve rešiti im-

pliciten sistem enačb (7). Ta sistem enačb je linearen le v primeru, ko je linearen tudi prvotni sistem diferencialnih enačb (1). Naš sistem (5) je linearen, zato je linearen tudi ustrezen sistem (7), rešitev pa lahko kar zapišemo

$$x_{n+1} = (x_n + hy_n)/(1 + h^2)$$
$$y_{n+1} = (y_n - hx_n)/(1 + h^2)$$

to pa pomeni, da je

$$(x^2_{n+1} + y^2_{n+1})/R^2 = 1 - h^2 + 0(h^4)$$

spet pri pogoju, da leži točka (x_n, y_n) na krožnici z radijem R. S pomočjo implicitne Eulerjeve metode torej dobimo zaporedje točk, ki se približujejo središču krožnice, torej se oddaljujejo od trajektorije.

3. Rezultati, ki smo jih dobili pri uporabi eksplicitne in implicitne Eulerjeve metode, nam ponujajo idejo, da bi metodi na kak način kombinirali. Za prvo komponento sistema (5) uporabimo Eulerjevo eksplicitno metodo (6), za drugo komponento pa implicitno metodo (7). Tako pridemo do relacij

$$x_{n+1} = x_n + hy_n \qquad (8)$$
$$y_{n+1} = y_n(1 - h^2) - hx_n$$

Izračunajmo, kako se pri tem spremeni radij:

$$(x^2_{n+1} + y^2_{n+1})/R^2 = 1 + h^2 \cos(2t/R) - h^3 \sin(2t/R) + h^4 \sin^2(t/R)$$

seveda spet pri pogoju, da je $x_n^2 + y_n^2 = R^2$. Zaporedje točk $(x_n, y_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, ki ga generira rekurzivna relacija (8), se torej oddaljuje od koordinatnega izhodišča, vendar bistveno počasneje kot pri eksplicitni Eulerjevi metodi, saj se povprečna vrednost členov

$$h^2 \cos(2t/R) \text{ in } h^3 \sin(2t/R)$$

z naraščajočim t približuje 0. S kombinacijo obeh Eulerjevih metod (6) in (7) torej dobimo precej »gostejšo«, vendar manj enakomerno spiralo kot z eksplicitno Eulerjevo metodo.

4. *Trapezna metoda*: pri tej metodi zaporedje izračunanih približkov $\mathbf{y}_i$ k rešitvi diferencialne enačbe generiramo s pomočjo implicitne formule

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + (h/2)(\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1})$$

Če s to metodo rešujemo linearni sistem (5), lahko rešitve računamo rekurzivno

$$x_{n+1} = ((1 - (h/2)^2)x_n + hy_n)/(1 + (h/2)^2)$$
$$y_{n+1} = (-hx_n + (1 - (h/2)^2)y_n)/(1 + (h/2)^2)$$

Poglejmo, kako se pri tem spreminja radij:

$$(x^2_{n+1} + y^2_{n+1})/R^2 = 1$$

če le velja, da je $x_n^2 + y_n^2 = R^2$.

Točke, ki jih izračunamo po trapezni metodi, torej ležijo točno na krožnici, če seveda, kot smo pri vseh metodah do sedaj, zanemarimo vpliv zaokrožitvenih napak.

Izmed vseh doslej omenjenih metod je trapezna metoda najboljša za reševanje sistema (5). Njeno lastnost, da v primeru krožne trajektorije generira točke točno na trajektoriji, bi si želeli pri vsaki »dobri« metodi za iskanje trajektorij, zato kar zapišimo definicijo.

Definicija: Numerična metoda za iskanje trajektorije je *krožno-eksaktna*, če pri reševanju vsakega problema, ki ima za rešitev krožno trajektorijo, in pri uporabi točnih začetnih vrednosti dobimo točke, ki ležijo natančno na trajektoriji. [2]

3. Lambert-McLeodova metoda

Izmed metod, ki so zasnovane posebej za iskanje trajektorij, si najprej oglejmo Lambert-McLeodovo metodo. To je eksplicitna metoda, pri kateri zaporedje točk $\mathbf{y}_n$ generiramo s formulama

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_n + 2h_{n+1}\mathbf{f}_{n+1} \tag{10a}$$

$$h_{n+1} = (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n)^T\mathbf{f}_{n+1} / \| \mathbf{f}_{n+1} \|^2 \tag{10b}$$

Ta metoda je dvočlenska, zato v začetku potrebujemo dve že izračunani točki $\mathbf{y}_0$ in $\mathbf{y}_1$.

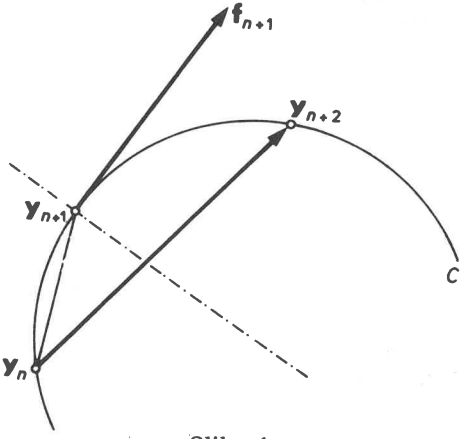
Trditev 1: Točka $\mathbf{y}_{n+2}$, izračunana po Lambert-McLeodovi metodi, je od točke $\mathbf{y}_{n+1}$ oddaljena enako, kot sta med seboj oddaljeni začetni točki $\mathbf{y}_0$ in $\mathbf{y}_1$:

$$\| \mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} \| = \| \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_1 \|$$

Dokaz: Izračunajmo $\| \mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} \|^2$!

$$\| \mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} \|^2 = \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n+1} + 2h_{n+1}\mathbf{f}_{n+1} \|^2 =$$
$$= \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n+1} \|^2 + 4h_{n+1} (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n+1})^T\mathbf{f}_{n+1} + 4h^2_{n+1} \| \mathbf{f}_{n+1} \|^2 = \| \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n \|^2$$

Trditev nato dokažemo z matematično indukcijo. □



Slika 1

Trditev 2: Lambert-McLeodova metoda (10) je krožno eksaktna.

Dokaz: Naj bo trajektorija problema (1) krožnica C, točki $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}_{n+1}$ pa naj ležita na njej. Točko $\mathbf{y}_{n+2}$ izračunamo po formuli (10).

Vektor $\mathbf{f}_{n+1}$ je tangentni vektor na krožnico C v točki $\mathbf{y}_{n+1}$, točka, ki leži na krožnici C simetrično točki $\mathbf{y}_n$ glede na točko $\mathbf{y}_{n+1}$, pa je ravno $\mathbf{y}_{n+2}$, saj je smer $\mathbf{f}_{n+1}$ smer tetive $\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_n$, $h_{n+1} \| \mathbf{f}_{n+1} \|$ pa polovica dolžine te tetive. □

Formuli (10) koraka metode, kot smo ga srečali v prejšnjem poglavju, ne vsebujeta, saj je h_{n+1} določen z (10b) in ga ne moremo prosto izbirati. Vlogo koraka metode pri Lambert-McLeodovi metodi zaradi Trditve 1 prevzame evklidska razdalja med začetnima točkama $\mathbf{y}_0$ in $\mathbf{y}_1$.

Lambert-McLeodovo metodo lahko uporabimo tudi za reševanje običajnih začetnih problemov, to je problemov tipa (1), kjer nas zanima preslikava

$t \to \mathbf{y}(t)$. Ker v formulah (10) parameter t ne nastopa eksplicitno, moramo zaporedje $t_n (n = 0,1,2,\ldots)$ generirati posebej na tak način, da bo $\mathbf{y}_n$ dober približek za $\mathbf{y}(t_n)$, kar lahko dosežemo npr. tako:

$$t_{n+2} = t_n + 2h_{n+1} \tag{11}$$

Na formule (10) in (11) lahko gledamo kot na sredinsko metodo

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_{n+1}$$

s spremenljivim korakom, kjer je dolžina koraka preko (11) in (10b) določena z zadnjima izračunanima točkama $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}_{n+1}$. Ker je metoda, določena s formulami (10) in (11), krožno-eksaktna, se je je prijelo ime **CELF** (kratica za **C**ircularly **E**xact **L**eap-**F**rog = krožno-eksaktna sredinska metoda).

Če bi hoteli metodo CELF uporabiti za reševanje začetnih skalarnih problemov, nas hitro razočara dejstvo, da ni niti ničelno stabilna [1], saj se (10) v skalarnem primeru reducira na preprosto homogeno dvočlensko rekurzijo

$$\mathbf{y}_{n+2} - 2\mathbf{y}_{n+1} + \mathbf{y}_n = 0 \tag{12}$$

katere karakteristična enačba

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

ima dvojni koren pri $r = 1$, torej je splošna rešitev sistema (12)

$$\mathbf{y}_n = C_1 + C_2 n$$

neodvisno od diferencialne enačbe, ki jo rešujemo. Kljub temu se da dokazati [4], da je pri določenih (ne prav hudih) omejitvah na razred problemov (1) metoda CELF konvergentna v naslednjem smislu:

Če označimo $h = \| \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0 \|$, potem je

$$\| \mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n \| = O(h^2)$$

kjer je $\mathbf{y}(t_n)$ točna rešitev problema (1) v točki t_n, ki je določena z (11).

4. Ostanek metode

Za izpeljavo približka za ostanek Lambert-McLeodove metode je ugodno, če namesto parametra t v sistemu (1) vpeljemo naravni parameter s (ločno dolžino):

$$s = \int_0^t \sqrt{(d\mathbf{y}/dt)^T (t)\, (d\mathbf{y}/dt)\, (t)}\, dt$$

Tako dobimo namesto (1) sistem

$$d\mathbf{y}/ds = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \tag{13}$$

kjer je $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) / \| \mathbf{f}(\mathbf{y}) \|$. Ta sprememba parametra trajektorije ne prizadene: sistema (1) in (13) imata isti družini trajektorij. (Molče bomo privzeli, da $\| \mathbf{f}(\mathbf{y}) \| \neq 0$, tako da krivulja $\mathbf{y}(t)$ nima singularnih točk).

Formuli (10) lahko za sistem (13) prepišem v eno samo

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_n + 2(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n)^T \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1} \tag{14}$$

Ostanek metode kot mera za natančnost metode je po definiciji enak razliki med točno vrednostjo rešitve in vrednostjo, izračunano z enim korakom metode pri točnih začetnih vrednostih, torej je za metodo (14)

$$\mathbf{OM} = \mathbf{y}(s_0 + 2k) - \mathbf{y}(s_0) -$$
$$- 2(\mathbf{y}(s_0 + k) - \mathbf{y}(s_0))^T (d\mathbf{y}/ds)(s_0 + k)(d\mathbf{y}/ds)(s_0 + k)$$

kjer je k razdalja med začetnima točkama $\mathbf{y}_0$ in $\mathbf{y}_1$ vzdolž trajektorije.

Pri razvoju ostanka metode v Taylorjevo vrsto po potencah k-ja moramo upoštevati, da, če označimo s $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ in $\mathbf{b}(s)$ *tangentni*, (*prvi*) *normalni* in *drugi normalni* enotski vektor na krivuljo $\mathbf{y}(s)$, se odvodi funkcije $\mathbf{y}(s)$ glede na parameter s izražajo s *Frenetovimi formulami* [5]:

$$d\mathbf{y}/ds = \mathbf{t} \tag{15a}$$

$$d^2\mathbf{y}/(ds)^2 = \varkappa\,\mathbf{n} \tag{15b}$$

$$d^3\mathbf{y}/(ds)^3 = (d\varkappa/ds)\mathbf{n} - \varkappa^2\,\mathbf{t} + \varkappa\,\tau\,\mathbf{b} \tag{15c}$$

kjer sta $\varkappa$ *fleksijska ukrivljenost* krivulje $\mathbf{y}(t)$, τ pa njena *druga ukrivljenost*. (Če krivulja leži v trodimenzionalnem prostoru, uporabljamo navadno namesto imen druga normala in druga ukrivljenost imeni *binormala* in *torzijska ukrivljenost* oz. *zvitost*.)

Z upoštevanjem formul (15) lahko že zapišemo ostanek Lambert-McLeodove metode, razvit v Taylorjevo vrsto okrog $k = 0$:

$$\mathbf{OM} = (k^3/3)\,((d\varkappa/ds)(s_0)\mathbf{n}(s_0) + \varkappa(s_0)\,\tau(s_0)\mathbf{b}(s_0)) + 0(k^4) \tag{16}$$

kar pomeni, da je Lambert-Mc-Leodova metoda konsistentna reda 2.

Kadar je rešitev sistema (13) krožnica ($\varkappa$ = konst, $\tau = 0$), pa je $\mathbf{OM} = 0(k^4)$ (pravzaprav velja celo več: noben člen Taylorjeve vrste (16) ne vsebuje samo ukrivljenosti $\varkappa$, kar pomeni, da je za krožne trajektorije $\mathbf{OM} = 0$).

Poglejmo si še, kakšen je ostanek trapezne metode

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_{n+1} + (k/2)\,(\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n) \tag{17}$$

ki je tudi krožno-eksaktna, če le primerno izberemo parameter k. Po definiciji je

$$\mathbf{OM} = \mathbf{y}(s_1 + k) - \mathbf{y}(s_1) - (k/2)\,((d\mathbf{y}/ds)(s_1) + (d\mathbf{y}/ds)(s_1 + k))$$

kar razvijemo v Taylorjevo vrsto po potencah k in dobimo

$$\mathbf{OM} = -(k^3/12)\,(d^3\mathbf{y}/ds^3)(s_1) + 0(k^4)$$

Če upoštevamo še Frenetove formule (15), pa dobimo

$$\mathbf{OM} = -(k^3/12)\,(d\varkappa/ds)(s_1)\mathbf{n}(s_1) - \varkappa^2(s_1)\mathbf{t}(s_1) + \varkappa(s_1)\,\tau(s_1)\mathbf{b}(s_1)) + 0(k^4) \tag{18}$$

Kadar so trajektorije sistema (13) krožnice ($\varkappa$ = konst, $\tau = 0$), pa je

$$\mathbf{OM} = (k^3/12)\,\varkappa^2(s_1)\mathbf{t}(s_1) + 0(k^4)$$

kar pomeni: ko so trajektorije sistema (12) krožnice, je glavni del ostanka trapezne metode v tangencialni smeri; to pa je glede na naravo naše naloge manj pomembno.

5. Krožno-eksaktna metoda tipa prediktor-korektor

Če primerjamo ostanek Lambert-McLeodove metode (16) in ostanek trapezne metode (18), vidimo, da ima (implicitna) trapezna metoda manjši ostanek kot (eksplicitna) Lambert-McLeodova metoda; to nas navede na misel, da ti dve metodi uporabimo skupaj kot metodo tipa prediktor-korektor [1], na primer

$$\mathbf{y}^p_{n+2} = \mathbf{y}_n + 2(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n)^T \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1} \tag{19a}$$

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_{n+1} + h(\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}^p_{n+2}) / \| \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}^p_{n+2} \| \tag{19b}$$

kjer pomeni $\mathbf{F}^p_{n+2} = \mathbf{F}(\mathbf{y}^p_{n+2})$ in $h = \| \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_1 \|$.

Tudi za metodo (19) ostaneta veljavni trditvi 1 in 2 za Lambert-Mc-Leodovo metodo. Trditev 1 je očitna iz (19b), o pravilnosti Trditve 2 pa se prepričamo po naslednjem razmisleku:

Če je trajektorija krožnica in točki $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}_{n+1}$ ležita na njej, potem tudi točka $\mathbf{y}^p_{n+2}$ leži na njej, saj je prediktor krožno-eksaktna metoda, zaradi $\| \mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} \| = h$, pa je trikotnik z ogliščema v točkah $\mathbf{y}_{n+1}$ in $\mathbf{y}^p_{n+2}$ ter vrhom v središču krožnice enakokrak, od koder lahko ugotovimo, da je $\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}^p_{n+2}$, torej je tudi (19) krožno-eksaktna metoda.

6. Metoda tipa prediktor-korektor s spremenljivim korakom

Vse doslej opisane metode za iskanje trajektorij imajo skupno lastnost, da je dolžina »koraka« metode implicitno določena z evklidsko razdaljo med začetnima točkama $\mathbf{y}_0$ in $\mathbf{y}_1$ in nanjo med računanjem ne moremo vplivati. Pri krivuljah, ki imajo skoraj konstantno ukrivljenost $\varkappa$ in majhno torzijsko ukrivljenost τ (to so krivulje, ki jih lokalno lahko dobro aproksimiramo s krožnico), nas to ne moti. Pri trajektorijah, pri katerih se ukrivljenost vzdolž krivulje zelo spreminja, pa bi si želeli spreminjati tudi gostoto izračunanih točk, torej potrebujemo metodo oz. algoritem, pri kateri bomo med računanjem po potrebi lahko spreminjali dolžino »koraka«.

Izpeljimo najprej krožno-eksaktno eksplicitno metodo (prediktor) s spremenljivim korakom. Pri danih $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_{n+1}$ in $\mathbf{F}_{n+1}$ ter pozitivni dolžini koraka h_{n+1} naj ta metoda izračuna točko $\mathbf{y}^p_{n+2}$ tako, da bo ta ležala na krožnici C_n, ki jo določata točki $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}_{n+1}$ ter smer tangente $\mathbf{F}_{n+1}$ v točki $\mathbf{y}_{n+1}$, in da bo $\| \mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} \| = h_{n+1}$.

Na sliki 2 je narisana (dvodimenzionalna) ravnina, ki jo določata točki $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}_{n+1}$ ter vektor $\mathbf{F}_{n+1}$. Če z γ označimo kot med $\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n$ in $\mathbf{F}_{n+1}$, potem je središčni kot v krožnici C_n, ki ga določata točki $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}_{n+1}$ enak 2γ, torej je (obodni) kot med $\mathbf{y}_n - \mathbf{y}^p_{n+2}$ in $\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}^p_{n+2}$ tudi enak γ.

Kot med $\mathbf{F}_{n+1}$ in $\mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_n$ označimo z δ. Kot med $\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1}$ je torej $\gamma + \delta$. Iz trikotnika z oglišči $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_{n+1}$ in $\mathbf{y}^p_{n+2}$ pa lahko ugotovimo, da je kot med $\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n$ in $\mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_n$ tudi enak δ. Z $\mathbf{N}_{n+1}$ označimo normalni enotski vektor na krožnico C_n v točki $\mathbf{y}_{n+1}$ v smeri proti središču krožnice.

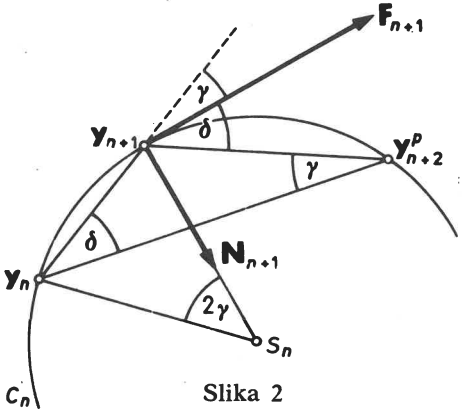
Vektorja $\mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1}$ in $\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n$ razstavimo na komponenti v pravokotnih smereh $\mathbf{F}_{n+1}$ in $\mathbf{N}_{n+1}$:

$$\mathbf{y}^p_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} = h_{n+1} \cos \delta \, \mathbf{F}_{n+1} + h_{n+1} \sin \delta \, \mathbf{N}_{n+1} \tag{20}$$

$$\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n = h_n \cos \gamma \, \mathbf{F}_{n+1} - h_n \sin \gamma \, \mathbf{N}_{n+1} \tag{21}$$

Iz (21) lahko izračunamo

$$\mathbf{N}_{n+1} = \operatorname{ctg}\gamma\, \mathbf{F}_{n+1} - (1/h_n \sin\gamma)\,(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) \tag{22}$$



Slika 2

Kot δ lahko izrazimo s sinusnim izrekom v trikotniku z oglišči $\mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_{n+1}$ in $\mathbf{y}^p{}_{n+2}$

$$h_n/\sin\gamma = h_{n+1}/\sin\delta \tag{23}$$

Očitno velja tudi

$$h_n \cos\gamma = \mathbf{F}^T{}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) \tag{24}$$

Enačbe (22), (23) in (24) uporabimo, da iz (20) izločimo $\mathbf{N}_{n+1}$ ter kota γ in δ, pa dobimo naslednjo eksplicitno formulo (prediktor):

$$\mathbf{y}^p{}_{n+2} = \mathbf{y}_{n+1} + (h_{n+1}/h_n)^2\,(A_n\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n+1}) \tag{25}$$

kjer je

$$A_n = B_n + \sqrt{B_n^2 - h_n^2(1 - (h_n/h_{n+1})^2)} \tag{26a}$$

in

$$B_n = \mathbf{F}^T{}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) \tag{26b}$$

Formula (25) je posplošitev Lambert-McLeodove metode (14), kar ugotovimo, če v (25) in (26) postavimo $h_{n+1} = h_n$. Zaradi kvadratnega korena v (26a) moramo h_{n+1} izbrati tako, da bo

$$h_{n+1} \leqq h_n^2/\sqrt{h_n^2 - B_n^2} \tag{27}$$

Za korektor lahko vzamemo kar formulo (19b), ki je enočlenska in pri njeni uporabi nimamo težav zaradi spremembe dolžine koraka

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_{n+1} + h_{n+1}(\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}^p{}_{n+2})/\|\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}^p{}_{n+2}\| \tag{28}$$

pa bo veljalo tudi $\|\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1}\| = h_{n+1}$.

Da bi po standardni poti (Milne's device [1, str. 255]) lahko izračunali približek za napako $\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{n+2}$, kjer je točka $\mathbf{y}^*$ na trajektoriji in $\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{n+1}\| = h_{n+1}$, moramo poznati približka za ostanek prediktorja (25) in korektorje (26).

Podobno, kot smo izračunali ostanek trapezne metode, dobimo

$$\mathbf{y}^* - \mathbf{y}^p{}_{n+2} \simeq (1/6)\,(h^3{}_{n+1} + h^2{}_{n+1}h_n)\,(d\varkappa/ds\,\mathbf{n} + \varkappa\tau\,\mathbf{b})$$

in

$$\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{n+2} \simeq -(h^3{}_{n+1}/12)\,(d\varkappa/ds\,\mathbf{n} + \varkappa\tau\,\mathbf{b})$$

tako da lahko izračunamo približek za napako metode prediktor-korektor ((25), (26) in (27))

$$\mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{n+2} \simeq -(h_{n+1}/(3h_{n+1} + 2h_n))\,(\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}^p{}_{n+2}) \tag{29}$$

Končno sestavimo še algoritem za iskanje trajektorije sistema (13) z metodo (25, 28):

Algoritem:

1. Pri danem začetnem $\mathbf{y}_0$ izberi h_0 in izračunaj $\mathbf{y}_1$;
2. Izberi h_1, $\varepsilon > 0$, $n := 0$;
3. Izračunaj $\mathbf{F}_{n+1}$, B_n (26b), $d_n := h_n^2/\sqrt{h_n^2 - B_n^2}$, če je $h_{n+1} > d_n/2$, potem $h_{n+1} := d_n/2$;
4. Izračunaj $\mathbf{y}^p_{n+2}$ (25), $\mathbf{F}^p_{n+2}$ in $\mathbf{y}_{n+2}$ (28);
5. Izračunaj približno velikost napake $e = \| \mathbf{y}^* - \mathbf{y}_{n+2} \|$ (29), $h^*_{n+1} := h_{n+1}/\sqrt[3]{e/\varepsilon}$;
6. Če je $e > \varepsilon$, potem $h_{n+1} := h^*_{n+1}$ in nadaljuj na 4.;
7. Izpiši $\mathbf{y}_{n+2}$, $h_{n+2} := h^*_{n+1}$, $n := n + 1$ in nadaljuj na 3.

Konec algoritma

7. Numerični primer

Z algoritmom, opisanem v prejšnjem poglavju, smo reševali naslednji sistem enačb

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2 \\ dy_2/dt &= -y_1 \\ dy_3/dt &= 4y_1y_2 \end{aligned} \tag{30}$$

z začetnimi pogoji

$$y_1(0) = 1, \; y_2(0) = 0, \; y_3(0) = 1$$

Njegova točna rešitev je

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t \\ y_2(t) &= -\sin t \\ y_3(t) &= \cos 2t \end{aligned} \tag{31}$$

Pri različnih vrednostih za parametra ε in h_0 smo izračunali največji odmik numerične rešitve od točne rešitve (31) v 500 korakih algoritma. Izkaže se, da je največji odmik e_M le malo odvisen od začetne izbire parametra h_0, zelo pa je seveda odvisen od predpisane natančnosti ε (tabela 1).

Tabela 1

ε	e_M
10^{-2}	1.6
10^{-4}	0.0024
10^{-6}	0.00012

8. Zaključek

Opisane metode so seveda še daleč od tega, da bi bile lahko osnova učinkovitim algoritmom za iskanje trajektorij. Raziskave na tem področju so šele v začetni fazi in tudi v literaturi se je šele v zadnjih letih pojavilo nekaj člankov s to tematiko, tako da je nerešenih še mnogo vprašanj. Nekateri objavljeni numerični rezultati kažejo, da se opisane metode pri iskanju trajektorij obnesejo bolje kot nekatere standardne metode za reševanje začetnih problemov; to vsekakor spodbuja nadaljnje delo na tem področju.

LITERATURA

[1] Henrici P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons. Inc, New York, London, Sydney 1962.

[2] Lambert J. D. DcLeod R. J. Y., *Numerical Methods for Phase Plane Problems in Ordinary Differential Equations*, Numerical Analysis Proceedings Dundee 1979, A. G. Watson, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1980.

[3] McLeod R.J.Y., Sanz Serna J. M., *Geometrically Derived Difference Formulae for the Numerical Integration of Trajectory Problems*, IMA J. Numer. Anal., **2** (1982), 357—370.

[4] Sanz-Serna J. M., *Convergence of the Lambert-McLeod Trajectory Solver and of the CELF Method*, Numer. Math. **45** (1984), 173—182.

[5] Vidav I., *Višja matematika* II, DZS, Ljubljana 1979.

NOVE KNJIGE

MARIĆ V., SKENDŽIĆ M., Obične diferencijalne jednačine, Naučna knjiga, Beograd 1980, 142 str.

Knjiga vsebuje osnovni tečaj iz običajnih diferencialnih enačb za študente matematike. S primernim izborom snovi pa bo učbenik prav gotovo koristen tudi širšemu krogu bralcev, predvsem študentom tehničnih in naravoslovnih fakultet.

V prvem poglavju, ki je namenjen predvsem študentom matematike, so obdelani eksistenčni izreki za navadne diferencialne enačbe 1. reda. Vključena je tudi obravnava odvisnosti rešitve od začetnih pogojev in parametrov. Jedro knjige tvori pregled običajnega izbora elementarno rešljivih tipov diferencialnih enačb. Pri obravnavi sistemov diferencialnih enačb in linearnih diferencialnih enačb n-tega reda so dodani ustrezni izreki o eksistenci in edinosti rešitve. Za študente nematematike pa je k razdelku o reševanju linearnega homogenega sistema s konstantnimi koeficienti dodan še opis postopka za konstrukcijo Jodranove forme matrike. Sledi obravnava robnega problema za linearno enačbo 2. reda. Dokazan je obstoj lastnih vrednosti in lastnih funkcij za Sturm-Liouvilleov problem. Dokazana je tudi ortogonalnost lastnih funkcij, vendar pa ni obravnavana zveza s Fredholmovo integralsko enačbo. Zadnje poglavje, ki se ukvarja s problemi kvalitativne analize, je ponovno namenjeno ožjemu krogu bralcev. Tu so poleg nekaterih klasičnih rezultatov obdelani tudi primeri najnovejših rezultatov s tega področja (McLeod, 1972). Pri tem pa se za dokaze uporabljajo le elementarni pojmi klasične analize. To poglavje naj bi po besedah avtorjev budilo kreativne ambicije študentov.

Ob zaključku skoraj vseh razdelkov najdemo tudi podrobno obdelane primere, ki so največkrat vzeti iz naravoslovnih in tehničnih ved. Pač pa si bo moral študent, ki se bo odločil za študij s pomočjo te knjige, poiskati naloge za vajo kje drugje, saj jih tukaj ni.

Peter Šemrl

NEKAJ GEOMETRIJSKIH KARAKTERIZACIJ HILBERTSKE NORME

EDVARD KRAMAR

Math. Subj. Class. (1985) 15 A 63, 46 B 20, 46 C 05

V članku obravnavamo nekaj geometrijskih karakterizacij predhilbertovega prostora med realnimi normiranimi prostori.

SOME GEOMETRIC CHARACTERIZATIONS OF HILBERTIAN NORM

In this article some geometric characterizations of inner product space among real normed spaces are considered.

Kot vemo, je evklidska ravnina izomorfna realnemu vektorskemu prostoru dvojic $\mathbb{R}^2$, v katerem imamo skalarni produkt $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ in z njim povezano normo $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Posplošitev tega primera je Hilbertov prostor, ki ima bogato geometrijsko strukturo. Še splošnejši je Banachov prostor, v katerem je take strukture precej manj. Odkar sta bila ta prostora vpeljana, so se matematiki spraševali, pri katerih pogojih postane Banachov prostor Hilbertov. Izmed številnih takih karakterizacij bomo v tem prispevku prikazali nekaj geometrijskih pogojev, ki jih dobimo, če določeno geometrijsko lastnost, ki velja za evklidsko ravnino zahtevamo tudi za splošen normirani prostor.

Vzemimo realen normiran prostor X (polnost za nas ne bo pomembna). Če bi bil ta prostor hkrati tudi predhilbertov, bi bila norma povezana s skalarnim produktom z že omenjeno zvezo $\| x \|^2 = (x, x)$. Na kratko bomo rekli, da je norma *hilbertska*, če obstaja skalarni produkt, s katerim se izraža, kar je ekvivalentno temu, da je normiran prostor predhilbertov.

Najstarejša in najbolj znana je karakterizacija, ki sta jo uvedla P. Jordan in J. von Neumann [6]:

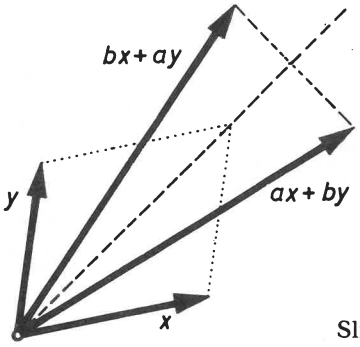
Izrek 1. *Norma* $\| \cdot \|$ *je hilbertska natanko tedaj, ko velja zanjo enačba*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{JN}$$

za poljubna $x, y \in X$.

To karakterizacijo dobimo iz znane lastnosti paralelograma napetega na vektorja x in y v evklidski ravnini. Zato pogoj (JN) imenujemo tudi paralelogramska enačba. Tega izreka ne bomo dokazovali, saj dokaz lahko najdemo v marsikaterem učbeniku funkcionalne analize, objavljen pa je bil tudi v OMF ([10]). Spomnimo naj le, da je tedaj skalarni produkt dan z zvezo $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$, $x, y \in X$.

Poleg zgornje je ena najpomembnejših karakterizacija, ki nosi ime po F. A. Fickenu ([4]). Osnovo ima v naslednji geometrijski sliki v evklidski ravnini. Vzemimo linearno neodvisna vektorja x in y z enako normo in zr-



Slika 1

calimo vektorje preko premice, ki jo nosi vektor $x + y$. Kratek račun nam pokaže da se poljuben vektor oblike $a x + b y$, $a, b \in \mathbb{R}$ prezrcali v vektor $b x + a y$ in oba sta seveda enako dolga (Sl. 1). Ta preprosta zahteva nam da Fickenovo karakterizacijo.

Izrek 2. *Norma $\|.\|$ je hilbertska natanko tedaj, ko za poljubna $x, y \in X$ velja implikacija*

$$\|x\| = \|y\|; \quad a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \|a x + b y\| = \|b x + a y\| \tag{F}$$

Dokaz. Če norma izvira iz skalarnega produkta, potem očitno taka zveza velja. Da je zgornji pogoj tudi zadosten, bomo pokazali v nekaj korakih.

Lema 1. *Če norma $\|.\|$ zadošča pogoju (F), potem velja: brž ko je $\|x\| = \|y\| = \|(x + y)/2\|$, je $x = y$.*

(Opomba: Pravimo tudi, da je tedaj prostor strogo konveksen.) Vzemimo torej vektorja $x, y \in X$, ki zadoščata zgornji predpostavki. Dokazali bomo, da tedaj velja

$$\|(2n + 1)(x - y) - 2y\| = 2\|x\| = 2\|y\|; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Najprej iz $\|x + y\| = \|2y\|$ in pogoja (F) sledi: $\|x + y + 2(-2y)\| = \|2(x + y) - 2y\| = 2\|x\|$ oziroma $\|x - y - 2y\| = 2\|x\| = 2\|y\|$. Torej velja (1) pri $n = 0$. Naj velja ta zveza pri nekem naravnem številu n in še enkrat uporabimo pogoj (F) pri primerno izbranih parametrih: $\|2((2n + 1)(x - y) - 2y) + (2n + 3)(2y)\| = \|(2n + 3)((2n + 1)(x - y) - 2y) + 2 . 2y\|$. Če obe strani uredimo in okrajšamo z $(2n + 1)$, dobimo

$$\|(2n + 3)(x - y) - 2y\| = 2\|x\| \; (= 2\|y\|)$$

kar je ravno (1) pri $n + 1$. Iz dokazane zveze sedaj sledi ocena

$$\|(2n + 1)(x - y)\| \leqq \|(2n + 1)(x - y) - 2y\| + \|2y\| = 4\|y\|$$

oziroma

$$\|x - y\| \leqq 4\|y\|/(2n + 1); \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ker ta ocena velja za še tako velik n, sledi $x - y = 0$.

Lema 2. *Če velja pogoj (F), potem iz $\|y\|x \neq \|x\|y$ sledi: $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$.*

Lahko privzamemo, da je $\|x\| \leqq \|y\|$ (sicer pa vlogi zamenjamo). Po predpostavki različna vektorja $\|y\|x$ in $\|x\|y$ imata isto normo, zato po prejšnji lemi sledi

$$\| \|y\|x + \|x\|y \| < 2\|x\| \, \|y\|$$

(v splošnem vedno velja znak $\leqq$), kar upoštevajmo v naslednji oceni

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|x + y . \|x\|/\|y\| + (\|y\| - \|x\|) y/\|y\| \| \leqq \\ &\leqq \| x + y . \|x\|/\|y\| \| + \|y\| - \|x\| < 2\|x\| + \|y\| - \|x\| = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Lema 3. *Za poljubna vektorja $u, v \in X$ in realno število $r \geqq 0$ obstajata kvečjemu dve različni realni števili t z lastnostjo*

$$\|u + t(v - u)\| = r$$

Lahko privzamemo, da sta u in v linearno neodvisna. Pa denimo, da bi obstajala tri različna števila $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, da bi veljalo

$$\|u + t_j(v - u)\| = r; \quad j = 1, 2, 3$$

Vektorje $z_j = u + t_j(v - u)$, $j = 1, 2, 3$, očitno lahko tako prenumeriramo, da bo $z_3 = s\, z_1 + (1 - s)\, z_2$, $0 < s < 1$, pri čemer sta z_1 in z_2 linearno neodvisna. Potem pa velja tudi neenačba $\|(1 - s)\, z_2\|\, s\, z_1 \neq \|s\, z_1\|\, (1 - s)\, z_2$ in po zgornji lemi sledi

$$\|z_3\| < \|s\, z_1\| + \|(1 - s)\, z_2\| = s\, r + (1 - s)\, r = r$$

kar je v nasprotju z našo predpostavko.

Nadaljujmo sedaj z dokazovanjem izreka. Dokazali bomo, da iz Fickenovega pogoja sledi paralelogramska enačba. Vzemimo poljubna $x, y \in X$, pri čemer lahko privzamemo, da sta linearno neodvisna. Upoštevajmo pogoj (F) v zvezi

$$\|x + y\| = \|x - y + 2y\| = \|\, \|x - y\| \,.\, (x - y)/\|x - y\| + 2\|y\| \,.\, y/\|y\|\, \| =$$
$$= \|\, 2\|y\| \,.\, (x - y)/\|x - y\| + \|x - y\| \,.\, y/\|y\|\, \|$$

Po odpravi imenovalcev dobimo

$$\|y\|\, \|x + y\|\, \|x - y\| = \|\, 2\|y\|^2\, x + (\|x - y\|^2 - 2\|y\|^2)\, y\, \| \tag{2a}$$

Če na podoben način izrazimo še vektorje $y - x + 2x$, $x + y - 2y$ in $x + y - 2x$, dobimo še tri zveze z isto levo stranjo

$$\|y\|\, \|x + y\|\, \|x - y\| = \|2\|y\|^2\, x + (\|x - y\|^2 - 2\|x\|^2)\, y\| \tag{2b}$$
$$= \|2\|y\|^2\, x + (2\|y\|^2 - \|x + y\|^2)\, y\| \tag{2c}$$
$$= \|2\|y\|^2\, x + (2\|x\|^2 - \|x + y\|^2)\, y\| \tag{2d}$$

V zvezah (2a) — (2d) opazimo na desnih straneh štiri vektorje, ki jih lahko pišemo v obliki $\alpha(u + t(v - u))$ in imajo isto normo. Po lemi 3 so potem med števili

$$a = \|x - y\|^2 - 2\|y\|^2, \quad c = 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2$$
$$b = \|x - y\|^2 - 2\|x\|^2, \quad d = 2\|x\|^2 - \|x + y\|^2$$

kvečjemu dve različni. Zato imamo sedaj tri možnosti:

I) $a = d$ ali $b = c$ in tedaj neposredno sledi paralelogramska enačba. Zato odslej lahko vzamemo $a \neq d$ in $b \neq c$.

II) $a = c$ in $b = d$, potem je $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4\|x\|^2 = 4\|y\|^2$ in zopet velja pogoj (JN). Ostane nam možnost

III) $a = b$ in $c = d$, tedaj pa je $\|x\| = \|y\|$. Hitro se prepričamo, da lahko privzamemo, da velja tudi $\|x + y\| = \|x - y\|$. Vzemimo namreč vektorja $x' = x + y$ in $y' = x - y$, ki sta linearno neodvisna in z njima ponovimo zgornji postopek. Če bi zanju veljala ena od prvih dveh možnosti, velja paralelogramska enačba za x' in y', s tem pa tudi za x in y, o čemer se takoj prepričamo. Ostane tretja možnost, tedaj pa je $\|x'\| = \|y'\|$ oziroma $\|x + y\| = \|x - y\|$.

Oglejmo si sedaj število a. Če bi bilo $a > 0$, bi iz (2a) in linearne neodvisnosti vektorjev x in y (oziroma leme 2) dobili

$$\|y\|\, \|x + y\|\, \|x - y\| < 2\|y\|^2\, \|x\| + (\|x - y\|^2 - 2\|y\|^2)\, \|y\| = \|x - y\|^2\, \|y\|$$

oziroma $\|x + y\| < \|x - y\|$, kar je protislovje. Če pa je $a < 0$, sledi na podoben način iz (2a) (le, da uporabimo lemo 2 na vsoti $2\|y\|^2 x = (2\|y\|^2 x + a y) + (-a) y)$ neenačba $\|x - y\| < \|x + y\|$, kar zopet ni mogoče. Torej je $a = 0 = b$. Potem pa je tudi $c = d = 0$ in paralelogramska enačba je zopet izpolnjena.

Opomba: Ni težko videti, da sta Fickenovemu pogoju (F) ekvivalentna tudi naslednja pogoja:

$$\text{če } \| x + y \| = \| x - y \|, \text{ potem } \| x + ay \| = \| x - ay \|; \text{ za vse } a \in \mathbb{R} \qquad (F')$$

$$\text{če } \| x \| = \| y \|, \text{ potem } \| ax + y/a \| = \| ay + x/a \|; \text{ za vse } a > 0 \qquad (F'')$$

Podobnih karakterizacij, kot je zgornja, je še cela vrsta. Eno med njimi na primer dobimo iz dejstva, da je trikotnik v evklidski ravnini enakokrak, brž ko sta težiščnici na kraka enako dolgi. Dobimo zahtevo

$$\text{če } \| x \| = \| y \|, \text{ potem } \| x + 2y \| = \| 2x + y \|; \text{ za vse } x, y \in X \qquad (L)$$

ki je ena od Lorchevih karakterizacij (gl. [7]).

Druga velika skupina karakterizacij so karakterizacije z ortogonalnostmi. V normiran prostor lahko na različne načine posplošimo relacijo pravokotnosti, ki bo imela vsaj nekatere od naslednjih lastnosti, značilnih za običajno ortogonalnost v $\mathbb{R}^2$:

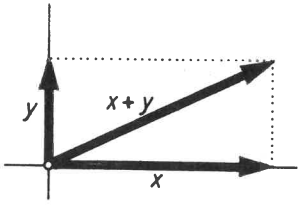
a) $x \perp y$, potem $y \perp x$; $x, y \in \mathbb{R}^2$ (simetričnost)
b) $x \perp y$, potem $ax \perp by$; $x, y \in \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ (homogenost)
c) $x \perp y$, $x \perp z$, potem $x \perp (y + z)$; $x, y \in \mathbb{R}^2$ (aditivnost)
d) za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^2$ obstaja $a \in \mathbb{R}$, da je $x \perp (ax + y)$

Oglejmo si tri relacije ortogonalnosti, ki jih najpogosteje srečamo v normiranem prostoru.

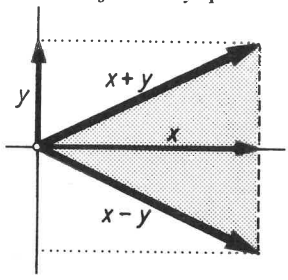
1.) Vektorja $x, y \in X$ sta **pitagorejsko ortogonalna**, na kratko P-ortogonalnalna, v znakih $(x \perp y)$ (P), če velja

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

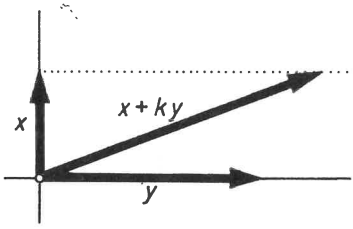
Ta definicija ima izvor v evklidski ravnini, kjer lahko pri pravokotnih x in y izračunamo normo vektorja $x + y$ po Pitagorovem izreku (Sl. 2).



Slika 2



Slika 3



Slika 4

2.) Vektorja $x, y \in X$ sta **enakokrako ortogonalna**, na kratko e-ortogonalna, kar bomo označili z $(x \perp y)$ (e), če velja

$$\| x + y \| = \| x - y \|$$

V geometrijski interpretaciji to pomeni, da sta x in y ortogonalna natanko tedaj, ko je trikotnik na sliki enakokrak (Sl. 3).

3.) Vektorja $x, y \in X$ sta ortogonalna v **Birkhoff-Jamesovem smislu,** na kratko BJ-ortogonalna, v znakih $(x \perp y)$ (BJ), če je

$$\| x + ky \| \geqq \| x \| \text{ za vsak } k \in \mathbb{R}$$

Ta definicija pa je nastala iz naslednje geometrijske slike: x in y sta v evklidski ravnini pravokotna natanko tedaj, ko je vektor $x + ky$ za vsak $k \in \mathbb{R}$ daljši ali enak vektorju x (Sl. 4).

Zgornje relacije ortogonalnosti seveda sovpadajo z običajno pravokotnostjo v Hilbertovem prostoru. Da pa se v splošnem normiranem prostoru razlikujejo, se lahko prepričamo na naslednjem zgledu. Vzemimo kar $X = \mathbb{R}^2$, za normo pa $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, kjer $x = (x_1, x_2)$. Naj bo $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ in $z = (-1/3, 1)$, potem je $(x \perp y)$ (e), $(x \perp y)$ (BJ), vendar $(x \not\perp y)$ (P) in $(x \perp z)$ (P), $(x \perp z)$ (BJ), vendar $(x \not\perp z)$ (e). Še druge primere bo bralec našel sam.

Oglejmo si, katere od lastnosti a) do d) imajo zgoraj definirane relacije. Pitagorejska in enakokraka ortogonalnost sta očitno simetrični, BJ-ortogonalnos pa v splošnem ni. Za homogenost velja ravno obratno, prvi dve ortogonalnosti nista homogeni. Dokažimo, da pa BJ-ortogonalnost ima to lastnost. Naj bo $(x \perp y)$ (BJ), torej $\| x + ky \| \geqq \| x \|$, za vsak $k \in \mathbb{R}$ in $a, b \in \mathbb{R}$ poljubni števili (smemo privzeti $a, b \neq 0$), potem imamo: $\| ax + kby \| = |a| \, \| x + y \, . \, kb/a \| \geqq |a| \, \| x \| = \| ax \|$. Torej je res $(ax \perp by)$ (BJ). Lastnosti c) in d) moramo pri BJ-ortogonalnosti, ker ni simetrična, v resnici obravnavati po dve, z leve in z desne. Izkaže se, da v splošnem ni nobena od zgornjih relacij aditivna, lastnost d) pa imajo vse tri. Da ima P-ortogonalnost to lastnost, ne bomo dokazovali, ker je dokaz precej dolg (Gl. [5]).

Pokazali bomo, da ima e-ortogonalnost lastnost d). V ta namen vzemimo poljubna $x, y \in X$ in $b \in \mathbb{R}$ in definirajmo funkcijo $f(t) = \| (t + b)x + y \| - \| tx + y \|$, $t \in \mathbb{R}$ in dokažimo

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = b \, \| x \| \tag{3}$$

Vzemimo dovolj velik t, da bo $t + b > 0$, potem najprej velja identiteta $\| (t + b) x + y \| = (t/(t + b) + b/(t + b)) \, \| (t + b)x + y \| = \| tx + y \, . \, t/(t + b \| + b \, \| x + y/(t + b) \|$, od tod pa zapis

$$f(t) = \| tx + y \, . \, t/(t + b) \| - \| tx + y \| + b \, \| x + y/(t + b) \| \tag{4}$$

Ocenimo razliko

$$\big| \, \| tx + y \, . \, t/(t + b) \| - \| tx + y \| \, \big| \leqq \| y \| \, . \, |b|/(t + b)$$

od koder sledi, da gre pri $t \to \infty$ razlika prvih dveh členov v (4) proti 0 in zaradi zveznosti norme potem sledi (3). Sedaj za dana $x, y \in X$ definirajmo še funkcijo $g(t) = \| x + (tx + y) \| - \| x - (tx + y) \|$, $t \in \mathbb{R}$ in izračunajmo:

$\lim_{t \to \infty} g(t) = \lim_{t \to \infty} (\|(t + 1) x + y \| - \|(t - 1) x + y \|) = \lim_{t \to \infty} (\|(t + 2) x + y \| - \| tx + y \|) = 2 \, \| x \|$, kjer smo upoštevali limito (3). Podobno je $\lim_{t \to -\infty} g(t) = \lim_{t \to \infty} g(-t) = \lim_{t \to \infty} (\|(t - 1) x - y \| - \|(t + 1) x - y \|) = -2 \, \| x \|$. Ker je funk-

cija g zvezna, obstaja realno število a, da je $g(a) = 0$ ali $\|x + (a\,x + y)\| = \|x - (a\,x + y)\|$ oziroma $(x \perp (a\,x + y))$ (e).

Dokažimo, da ima tudi BJ-ortogonalnost lastnost d) — na primer z desne. Vzemimo $x, y \in X$ in brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da je $x \neq 0$. Po znani posledici Hahn-Banachovega izreka lahko konstruiramo funkcional $f \neq 0$, da bo $f(x) = \|f\|\,\|x\|$. Vektor y lahko potem izrazimo v obliki $y = \alpha\,x + z$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$, z pa iz jedra funkcionala f. Za poljuben realen k lahko sedaj ocenimo: $\|x\|\,\|f\| = f(x) = f(x + k\,z) \leqq \|f\|\,\|x + k\,z\|$, od koder sledi, da je $(x \perp z)$ (BJ) oziroma $(x \perp (-\alpha\,x + y))$ (BJ), kar je bilo treba dokazati. Podobno dokažemo lastnost d) z leve.

Zanimivo je, da če od pitagorejske ali enakokrake ortogonalnosti zahtevamo še po eno od zgornjih lastnosti, ki je še nima, dobimo hilbertsko normo. Isto velja, če od BJ-ortogonalnosti zahtevamo simetričnost ali pa levo aditivnost in je prostor vsaj trorazsežen. Tako je nastalo novih šest karakterizacij, od katerih si za ilustracijo oglejmo dve.

Izrek 3. *Norma je hilbertska natanko tedaj, ko je enakokraka ortogonalnost homogena.*

Dokaz. Potrebnost pogoja je očitna. Vzemimo $x, y \in X$ z lastnostjo $\|x\| = \|y\|$, kar ni nič drugega kot to, da je $((x + y) \perp (x - y))$ (e). Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ iz homogenosti sledi $(\frac{1}{2}(a + b)\,(x + y) \perp \frac{1}{2}(a - b)\,.\,(x - y))$ (e) ali $\|a\,x + b\,y\| = \|b\,x + a\,y\|$. Torej velja Fickenov pogoj in norma je res hilbertska.

Enak rezultat dobimo, če predpostavimo homogenost pitagorejske pravokotnosti.

Izrek 4. *Norma je hilbertska takrat, ko je enakokraka ortogonalnost aditivna.*

Dokaz. Nekaj več dela imamo le z eno smerjo. Če je $(x \perp y)$ (e), je tudi $(x \perp 2y)$ (e) in v splošnem $(x \perp n\,y)$ (e) za poljubno naravno število n. Potem pa je zaradi simetričnosti tudi $(m\,x \perp n\,y)$ (e) za poljubni naravni števili m in n. Sledi $\|m\,x + n\,y\| = \|m\,x - n\,y\|$ ali $\|x + (n/m)\,y\| = \|x - (n/m)\,y\|$ in zaradi zveznosti norme $\|x + r\,y\| = \|x - r\,y\|$ oziroma $(x \perp r\,y)$ (e) za poljubno realno število r. Še enkrat uporabimo simetričnost in spoznamo, da je enakokraka ortogonalnost homogena in po zgornjem izreku je norma res hilbertska.

Enak rezultat se da pokazati tudi za pitagorejsko ortogonalnost.

Povedali smo že, da v splošnem iz ene ortogonalnosti ne sledi druga. Izkazalo se je, da pa, brž ko iz katerekoli od zgornjih treh ortogonalnosti sledi ena od drugih, dobimo hilbertsko normo. Iz skupine tako nastalih karakterizacij si oglejmo le eno.

Izrek 5. *Iz BJ-ortogonalnosti sledi P-ortogonalnost natanko tedaj, ko je norma hilbertska.*

Dokaz. Dokazati moramo le netrivialno smer. Vzemimo poljubna linearno neodvisna $x, y \in X$. Ker ima BJ-ortogonalnost lastnost d), obstaja $a \in \mathbb{R}$, da je $(x \perp z)$ (BJ), kjer je $z = a\,x + y$. Vektorja x in z sta potem tudi P-ortogonalna in isto velja tudi, če katerega od njiju pomnožimo s skalarjem, ker je BJ-ortogonalnost homogena. Dobimo $\|y\|^2 = \|z - a\,x\|^2 = \|z\|^2 + a^2\,\|x\|^2$, $\|x + y\|^2 = \|x + z - a\,x\|^2 = (1 - a)^2\,\|x\|^2 + \|z\|^2$ in $\|x - y\|^2 = \|x - z + a\,x\|^2 = (1 + a)^2\,\|x\|^2 + \|z\|^2$. Sledi $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$ — torej paralelo-

gramska enačba. Če sta x in y linearno odvisna, je taka enačba direktno veljavna. Dokazi drugih podobnih karakterizacij bi bili precej daljši.

V [3] najdemo definicijo ortogonalnosti, ki je posplošitev dveh zgoraj omenjenih. Odvisna je od realnega parametra $\alpha \neq 1$. Vektorja x in y sta **α-ortogonalna**, v znakih $(x \perp y)\ (\alpha)$, če velja

$$(1 + \alpha^2)\ \|x - y\|^2 = \|x - \alpha\, y\|^2 + \|y - \alpha\, x\|^2$$

Opazimo, da pri $\alpha = 0$ dobimo pitagorejsko, pri $\alpha = -1$ pa enakokrako ortogonalnost. Očitno je tako definirana relacija simetrična in zopet se da pokazati, da, če je še homogena ali aditivna, je norma hilbertska. Dokaz te trditve se naslanja na nekatere zgoraj omenjene rezultate in ga najdemo v omenjenem članku. Obstajajo pa tudi že posplošitve omenjene relacije ortogonalnosti in z njo povezanih karakterizacij (Gl. [1]).

V evklidski ravnini je še vrsta drugih geometrijskih lastnosti, ki jih skušamo vzeti za osnovo karakterizacije hilbertske norme. Mnoge od njih hitro privedejo na že znane rezultate. Vzemimo za primer znano dejstvo, da ima paralelogram pravokotni diagonali natanko tedaj, ko je romb. Iz tega lahko naredimo štiri zahteve za splošen normiran prostor:

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow (x + y) \perp (x - y)\ \text{(P)}$$
$$\|x\| = \|y\| \Leftarrow (x + y) \perp (x - y)\ \text{(P)}$$
$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow (x + y) \perp (x - y)\ \text{(BJ)}$$
$$\|x\| = \|y\| \Leftarrow (x + y) \perp (x - y)\ \text{(BJ)}$$

enakokraka ortogonalnost pa nam da le identiteto. Vzemimo na primer, da velja prva zahteva in naj bosta u in v e-ortogonalna, potem je $\|u + v\| = \|u - v\|$ in tudi $\|(u + v)/2\| = \|(u - v)/2\|$ in po zgornji implikaciji je potem $u \perp v$ (P). Torej je to ravno zahteva, da iz e-ortogonalnosti sledi P-ortogonalnost. Podobno pomenijo druge tri zahteve implikacijo ene ortogonalnosti v drugo.

Nekatere druge lastnosti pa privedejo do popolnoma novih karakterizacij. Tak primer je stara Ptolomejeva lastnost, da v poljubnem četverokotniku vsota produktov dolžin po dveh nasproti ležečih stranic ni manjša od produkta dolžin njegovih diagonal. Če to zahtevo prenesemo v poljuben normiran prostor, dobimo

$$\|x - y\|\ \|z\| + \|y - z\|\ \|x\| \geqq \|z - x\|\ \|y\|$$

I. J. Schoenberg je v [8] pokazal, da, če ta neenačba velja za poljubne tri vektorje x, y in z normiranega prostora, je norma hilbertska.

Številni avtorji so tudi marsikatero zahtevo omilili. Tako je na primer v (JN) dovolj, če namesto enakosti velja neenakost, obrnjena v katerokoli smer ($\leqq$ ali $\geqq$), ter celo, da to velja le za vektorje z normo 1 ([2], [8]).

Kljub na prvi pogled že dokaj raziskani tematiki, ki smo jo zgoraj na kratko predstavili, se je mnogi matematiki znova lotevajo in marsikdaj izboljšajo stare rezultate ali pa odkrijejo nove. Pred kratkim je izšla knjiga D. Amira ([1]), v kateri je zbranih okrog 350 karakterizacij, dobljenih do leta 1985.

LITERATURA

[1] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart 1986.

[2] M. M. Day, *Some characterizations of inner product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947) 320—327.

[3] E. R. Diminnie, R. W. Freese, E. L. Andalafte, *An extension of pythagorean and isosceles orthogonality and a characterization of inner product spaces*, J. Approx. theory **39** (1983) 295—298.

[4] F. Ficken, *Note on the existence of scalar products in normed linear spaces*, Ann. of Math. **45** (1944) 362—366.

[5] R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. **12** (1945) 291—302.

[6] P. Jordan, J. v. Neumann, *On inner products in linear metric spaces*, Ann. Math. (2) **36** (1935) 719—723.

[7] E. R. Lorch, *On certain implications which characterize Hilbert space*, Ann. Math. **49** (1948) 523—532.

[8] I. J. Schoenberg, *A remark on M. M. Day's characterization of inner product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952) 961—964.

[9] M. Škrinar-Majdič, *Nekatere geometrijske karakterizacije Hilbertovega prostora*, diplomsko delo, Ljubljana 1982.

[10] J. Vukman, *O bilinearnih in kvadratnih funkcionalih*, Obzornik mat. fiz. **30** (1983) 80—85.

NOVE KNJIGE

OLVER P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics 107, Springer Verlag, Berlin 1986.

Ko se pri študiju matematike prvič srečamo z diferencialnimi enačbami, nam je predstavljena široka paleta navidezno nepovezanih posebnih metod za reševanje nekaterih specialnih tipov enačb. Sredi prejšnjega stoletja je Sophus Lie opazil, da so vse te metode le poseben primer splošne integracijske procedure, ki temelji na poznavanju invariantnosti dane enačbe glede na neko zvezno grupo transformacij. Danes ne moremo preceniti pomena, ki ga imajo te grupe, znane kot Liejeve grupe, v skoraj vseh področjih matematike pa tudi fizike, klasične in relativnostne mehanike itd.

Pričujoča knjiga je posvečena uporabi teorije Liejevih grup pri fizikalno pomembnih sistemih diferencialnih enačb. Knjiga je po mojem mnenju napisana odlično, zelo čitljivo, z obilico dobro izdelanih primerov iz klasične mehanike, mehanike tekočin, elastičnosti in drugih področij.

V prvem poglavju so zbrana (večinoma brez dokazov) najvažnejša dejstva iz splošne teorije gladkih mnogoterosti in Liejevih grup. Drugo poglavje je posvečeno metodam računanja grup simetrije diferencialnih enačb, tretje pa iskanju rešitev, ki so invariantne glede na dano grupo transformacij. Četrto poglavje obravnava zvezo med grupami simetrije in ohranitvenimi zakoni, peto posplošene simetrije, šesto in sedmo Hamiltonove sisteme.

V knjigi so razmeroma preprosto razložene osnovne metode in nato ilustrirane s pomembnimi in dobro izbranimi primeri. Zato je delo zanimivo tako za teoretično kot tudi za aplikativno orientiranega bralca.

Franc Forstnerič

MIONI KOT KATALIZATORJI ZA FUZIJO

MARIJAN OLENIK

PACS 2580

V mionskem molekulskem ionu $(dd\mu)^+$ sta devterona dovolj blizu, da se lahko zlijeta. Mion deluje kot katalizator fuzije. Članek opiše ta pojav in obravnava možnosti za dobivanje energije z mionsko katalizo fuzije.

MUONS AS CATALISATORS FOR FUSION

In the muonic molecular ion $(dd\mu)^+$ deuterons are kept in such a proximity that they can fuse. The muon acts as a catalisator for fusion. In the article this phenomenon is described and possibilities for energy production from muon catalysed fusion are discussed.

Uvod

V želji, da bi dolgoročno rešili problem ekonomičnega in čistega pridobivanja energije, se vse bolj oziramo za novimi viri. V zadnjih letih se je med obetajoče vire energije uvrstila *mionska kataliza fuzije.*

Pri fuziji se zlivajo lažja jedra v težja. Ker imajo težja jedra večjo specifično vezavno energijo na nukleon, se pri fuziji energija sprošča, na primer:

$$d + t \rightarrow \alpha + n \qquad -Q = 17{,}6\ \mathrm{MeV}$$

Reakcijska energija $-Q$ bi se sprostila, če bi delca pred reakcjo ne imela znatne kinetične energije. Za začetek fuzije moramo dovesti zadostno energijo, da premagamo odbojno elektrostatično silo med jedri. Ta pogoj je izpolnjen v zvezdah, kjer poteka fuzija pri temperaturi več deset milijonov kelvinov. Pri tej temperaturi je kinetična energija termičnega gibanja dovolj velika, da premaga odbojne sile med lahkimi jedri.

Razvijajo več različnih postopkov, s katerimi poskušajo doseči fuzijo. Najvažnejša sta magnetno in lasersko zadrževanje plazme. Z njima poskušajo simulirati razmere v zvezdah: visoko temperaturo, visok tlak in veliko gostoto snovi. Tretji pa je mionska kataliza: fuzijo sprožimo tako, da mešanici vodikovih izotopov dodamo negativni mion. Kot bomo videli, lahko mion deluje kot katalizator za jedrsko fuzijo.

Najprej si bomo ogledali dve zgodovinsko starejši mionski katalizi fuzije, pri katerih je povprečni pridelek manjši od ene fuzije na mion, zatem pa mnogo bolj zanimivo mionsko katalizo v mešanici devterija in tritija. Tu je povprečen pridelek 150 fuzij na mion, sprosti pa se čez 2 GeV energije.

Mionska kataliza fuzije protona z devteronom

Mionska kataliza fuzije p-d poteka po reakciji [1]:

$$\mu + p + d \rightarrow {}^3He + \mu \qquad -Q = 5{,}4\ \mathrm{MeV}$$

Reakcija poteka v naslednjih korakih: mion vstopi v tekoči vodik, ki vsebuje okoli 1 % devterija. V vodiku prevladujejo protoni. Na proton se ujeme počasni mion. Negativni mion namreč lahko nadomesti elektron v atomu in nastane mionski vodikov atom

$$\mu + p \rightarrow p\mu$$

Čeprav je devterona v naravnem vodiku le 0,02 %, se mion hitro ireverzibilno veže na devteron in tvori z njim atom $d\mu$

$$p\mu + d \rightarrow d\mu + p$$

Reakcija nastane zato, ker je vezavna energija osnovnega stanja atoma $d\mu$ po absolutni vrednosti za 135 eV večja kot vezavna energija atoma $p\mu$. Pri trku atoma $d\mu$ in vodikovega atoma nastane mionski molekulski ion

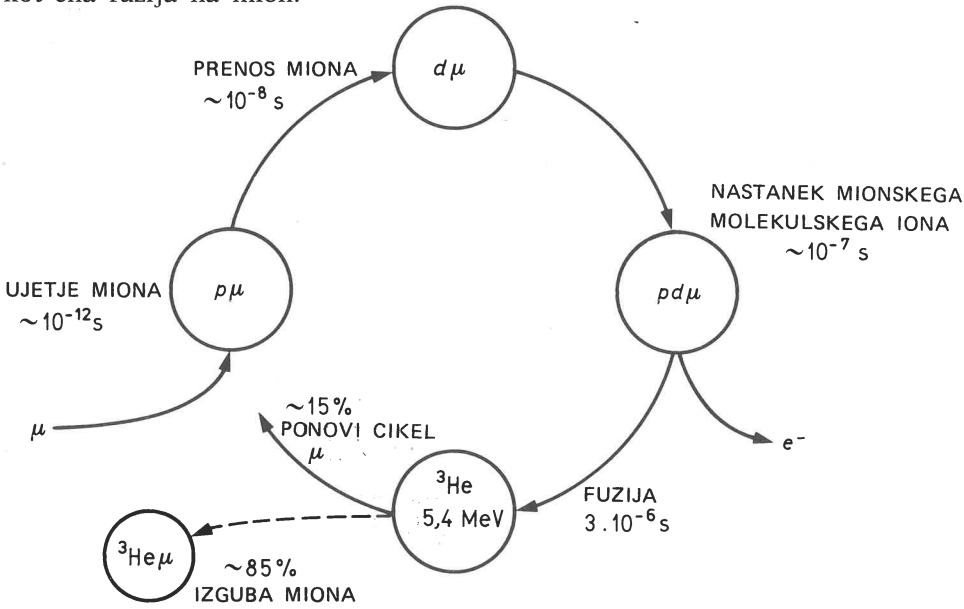
$$(d\mu) + [pe] \rightarrow (pd\mu)^+ + e-$$

Okrogli oklepaji zaznamujejo mionski atom, oglati pa elektronski. Mion je 206,8-krat težji od elektrona. Zaradi večje mase miona so absolutne vrednosti lastne energije mionskih atomov približno 200-krat večje kot pri običajnih, elektronskih atomih. Bohrov radij mionskih atomov je približno 200-krat manjši, tako da je mion mnogo bliže jedru kot elektron. Podobno kot v mionskih atomih je tudi ravnovesni razmik v mionskih molekulah približno 200-krat manjši.

V mionskem molekulskem ionu $(pd\mu)^+$ sta proton in devteron dovolj blizu, da lahko pride do tuneliranja skozi elektrostatično ograjo in s tem do zlitja jeder. Proton in devteron se zlijeta v ^3He in oddasta energijo mionu

$$(pd\mu)^+ \rightarrow {}^3He + \mu + 5{,}4\ \mathrm{MeV}$$

Vsi časi (sl. 1) so dobljeni z meritvami. Povprečni za fuzijo potrebni čas 3 μs je daljši od življenjskega časa miona 2,2 μs, tako da mion običajno razpade, preden utegne ponoviti cikel. Poleg tega je verjetnost, da se mion prilepi na ^3He, kar 85 %. Vse to povzroči, da je povprečni pridelek manjši kot ena fuzija na mion.



Sl. 1. Mionska kataliza fuzije p-d

Mionska kataliza fuzije devterona z devteronom

V čistem devteriju lahko mion katalizira fuzijo d-d preko dveh reakcij:

$$\mu + d + d \rightarrow d\mu d \rightarrow {}^3He + n + \mu \qquad -Q = 3{,}3\ MeV$$

ali

$$\mu + d + d \rightarrow d\mu d \rightarrow t + p + \mu \qquad -Q = 4\ MeV$$

Atom $(d\mu)$ vstopi v molekulo D_2. Pri tem nastane mionski molekulski ion $(dd\mu)^+$ znotraj dvonadstropne elektronske molekule $[(dd\mu)dee]$. V taki dvonastropni molekuli je eno jedro devteron, vlogo drugega jedra pa ima ion $(dd\mu)^+$; kovalentno ju vežeta dva elektrona. Nastanke mionskega molekulskega iona razvrstimo glede na način porabe sproščene vezavne energije. Pri prvi možnosti energijo odnese tako imenovani Augérjev elektron [2]

$$(d\mu) + [ddee] \rightarrow [(dd\mu)de]^+ + e^-$$

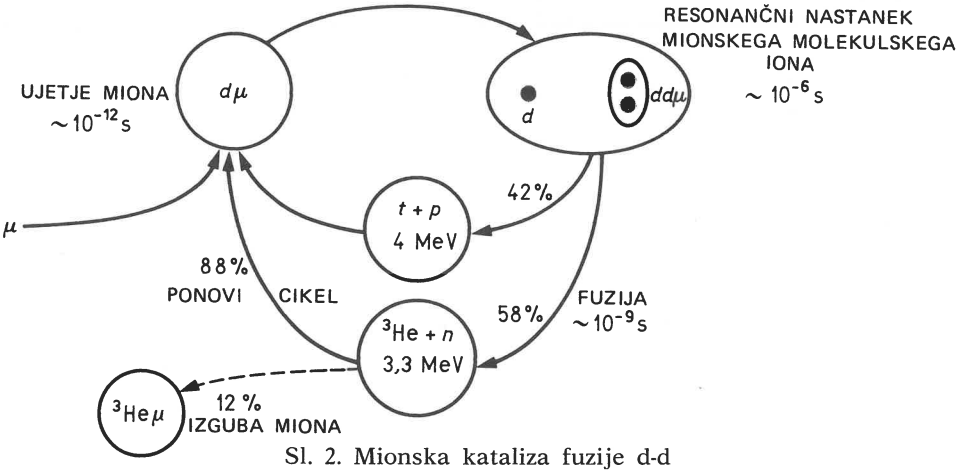
Pri drugi možnosti se sproščena vezavna energija prenese v nihajne in vrtilne prostostne stopnje elektronske molekule

$$(d\mu) + [ddee] \rightarrow [dd\mu)dee]^*$$

Pri tem ne pride do emisije elektrona, zvezdica pa pomeni, da je elektronska molekula v vzbujenem stanju. Tak pojav imenujemo resonančen, nastane pa, če je izpolnjen pogoj za ohranitev energije.

Označimo z j in ν vrtilno in nihajno kvantno število mionskega molekulskega iona $(dd\mu)^+$ ter s k in ν vrtilno in nihajno kvantno število elektronske molekule $[(dd\mu)dee]$. Pri nastanku mionskega molekulskega iona $(dd\mu)^+$ sodelujeta mionski atom $(d\mu)$ in molekula devterija. Oba sta v osnovnem stanju z energijama $E_{(d\mu)}$ in $E_{[ddee]}$. V težiščnem opazovalnem sistemu imata atoma $(d\mu)$ in molekula devterija še skupno kinetično energijo E_{kin}. Pojav je resonančen, če je vsota teh treh energij enaka vsoti energije osnovnega stanja dvonadstropne elektronske molekule $E_{[(dd\mu)dee]}$ ter vzbuditvenih energij mionskega molekulskega iona ε_{rj} in kompleksne elektronske molekule ε_{kv}:

$$E_{(d\mu)} + E_{[ddee]} + E_{kin} = E_{[(dd\mu)dee]} + \varepsilon_{jr} + \varepsilon_{kr}$$



Sl. 2. Mionska kataliza fuzije d-d

Vzbuditvena energija ε_{jv} je razlika vezavne energije vzbujenega stanja j, v in energije osnovnega stanja. Nazorneje lahko pojasnimo resonančni proces, če vpeljemo spoščeno energijo ΔE z enačbo:

$$E_{(d\mu)} + E_{[ddee]} = E_{[(dd\mu)dee]} + \Delta E$$

Vrtilna in nihajna stanja so kvantizirana. Zato ima vsota vzbuditvenih energij samo diskretne vrednosti. Če naj bo pojav resonančen, morata atom $(d\mu)$ in molekula devterija imeti tolikšno kinetično energijo E_{kin}, da je izpolnjena na novo zapisana enačba za ohranitev energije:

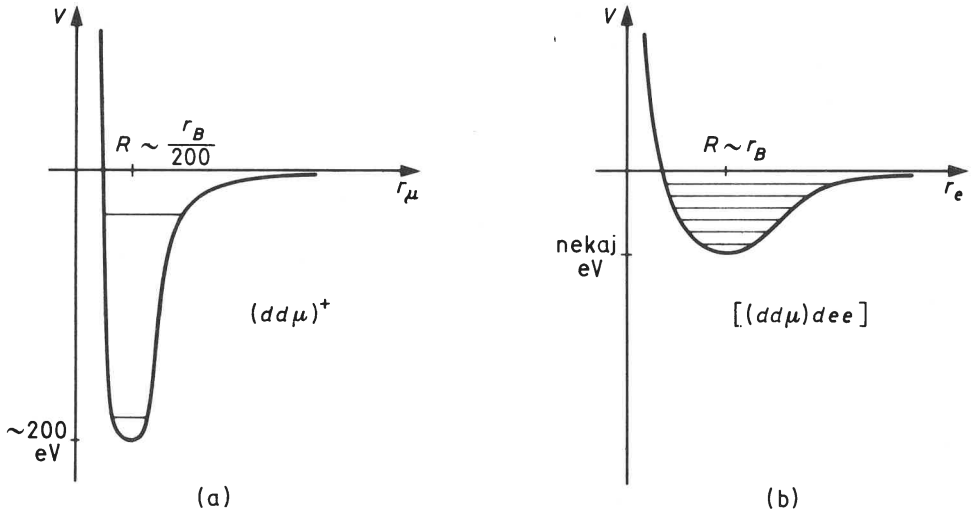
$$\Delta E + E_{kin} = \varepsilon_{jv} + \varepsilon_{kv}$$

Ta enačba mora biti izpolnjena le toliko natančno, kot je po načelu nedoločenosti ostro določena energija. Zaradi kratkega življenjskega časa τ vzbujenih stanj, so namreč vezavne energije teh stanj nedoločene do energije $\pm \hbar/\tau$.

Tako mionski molekulski ion $(dd\mu)^+$ kot elektronsko molekulo $[(dd\mu)dee]$ veže kovalentna vez. Na sl. 3 sta približno narisani potencialni energiji z ocenami značilnih vrednosti ter z vrisanimi vezanimi stanji.

Opazimo, da je v potencialu elektronske molekule veliko več vezanih stanj. Da bomo razumeli vzrok, se spomnimo, da lahko okolico minimuma potenciala približno opišemo s harmoničnim potencialom. Razmiki med vezanimi stanji navadnega harmoničnega oscilatorja so enaki $\hbar\omega = \hbar(K/m_r)^{1/2}$, če je $K = \partial^2 V/\partial_r^2 \propto V(R)/R^2$. Ker so energije mionskih molekul 200-krat večje od energij elektronskih molekul, ravnovesni razmiki pa 200-krat manjši, velja:

$$K_{\text{mionski}} \sim 200^3\, K_{\text{elektronski}}$$



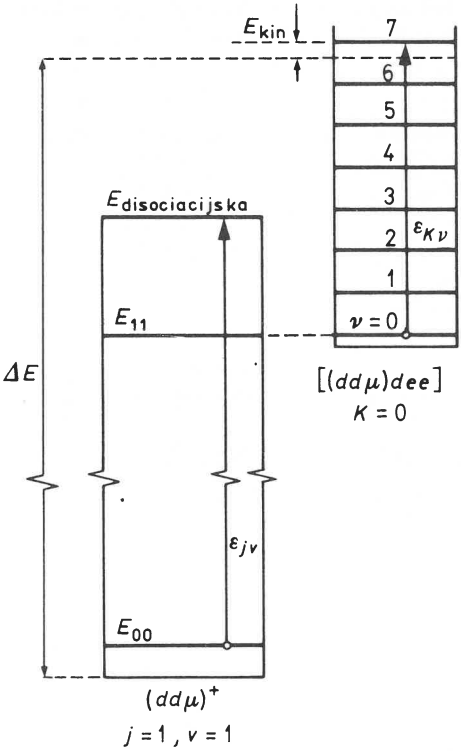
Sl. 3. Približni potek potenciala mionskega molekulskega iona $(dd\mu)^+$ v odvisnosti od razdalje med devteronoma (a) in potenciala elektronske molekule $[(dd\mu)dee]$ v odvisnosti od razdalje med ionom $(dd\mu)^+$ in devteronom (b)

Vzemimo, da sta reducirani masi obeh sistemov približno enaki. Ker je mionski potencialni lonec 200-krat globlji, sledi, da je v njem $(200)^{1/2} \approx 14$-krat manj vezanih stanj kot v elektronskem potencialnem loncu.

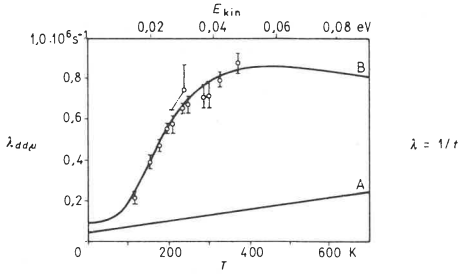
Vendar je resonančni nastanek mionskega molekulskega iona $(dd\mu)^+$ mogoč le, če sproščeno energijo ΔE skoraj v celoti prevzame vzbujeno stanje mionskega molekulskega iona $(dd\mu)^+$. Energije vzbujenih stanj elektronske molekule so namreč le »drobiž« za fino prilagoditev. Res leži prvo nihajno in vrtilno vzbujeno stanje tega iona tik pod robom lonca. Vezavna energija stanja je $E_{11} = -1{,}91$ eV.

Sproščena energija ΔE se porabi za vzbujanje mionskega molekulskega iona v stanje $j = 1$ in $v = 1$ ter za vzbujanje molekule $[(dd\mu)dee]$ v stanje z vrtilnim kvantnim številom $k = 1$ in nihajnim $\nu = 7$ (Sl. 4). Na tem mestu pojasnimo še, zakaj ne vzbujamo višjih vrtilnih stanj. Pri elektronski molekuli tega ne dovoljujejo izbirna pravila, zaradi katerih se zmanjša matrični element in s tem verjetnost za prehod v višja vzbujena stanja. V mionskem molekulskem ionu pa vsako višje stanje pade iz potencialnega lonca.

Resonančna vrednost kinetične energije atoma $(d\mu)$ v laboratorijskem sistemu meri $E_{kin} = 0{,}053$ eV. Čas nastanka mionskega molekulskega iona v odvisnosti od kinetične energije atoma $(d\mu)$ kaže sl. 5 [3].



Sl. 4. Shematični prikaz potencialnih loncev mionskega molekulskega iona $(dd\mu)^+$ in elektronske molekule $[(dd\mu)dee]$



Sl. 5. Diagram odvisnosti števila nastavkov mionskih molekulskih ionov na enoto časa v odvisnosti od kinetične energije atoma $(d\mu)$. A izračunani prispevek Augerjevega pojava. B izračunani prispevek Augerjevega in resonančnega pojava

Mionska kataliza fuzije devterona s tritonom

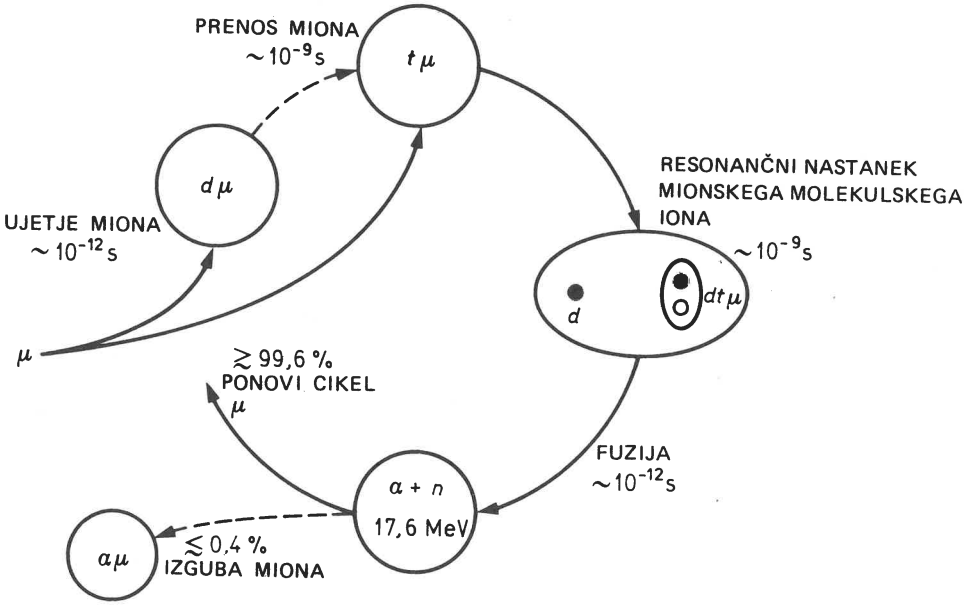
Mionska kataliza fuzije d-t v mešanici devterija in tritija poteka preko reakcije:

$$\mu + t + d \rightarrow dt\mu \rightarrow \alpha + n + \mu \qquad -Q = 17{,}6\ \mathrm{MeV}$$

Čas nastanka mionskega molekulskega iona $(dt\mu)^+$ je krajši kot čas nastanka iona $(dd\mu)^+$. Ker je vezavna energija prvega nihajnega stanja mionskega molekulskega iona višja ($E_{11} = -0{,}64$ eV), je treba vzbuditi elektronsko molekulo v nižje nihajno stanje z $v = 3$. Zaradi izbirnih pravil je potem matrični element za prehod večji. Tudi preostali reakcijski časi so v primerjavi z življenjskim časom miona 2,2 μs zelo kratki (Sl. 6). Zato mion v povprečju ponovi 150 kataliz fuzije.

Tak pridelek fuzij na mion je pri današnji tehnologiji premajhen za ekonomično fuzijsko elektrarno. Mion dobimo iz razpada π, tega pa s trkom pospešenih devteronov v tarčah, bogatih z nevtroni. Za nastanek miona potrebujemo v tem primeru približno 5 GeV, kar je enako energiji, ki jo pridobimo iz več kot tisoč fuzij. V to ceno miona so všteti izkoristek pospeševalnika, izkoristek pridelovanja pionov iz trkov devteronov z nevtroni, izkoristek konverzije pionov v mione ter Carnotov izkoristek pri spremembi toplote v električno delo. Več upanja vzbujajo hibridni reaktorji, v katerih poleg fuzije teče še cepitev urana; z njo dobimo dodatnih 200 MeV energije. Za elektrarno s hibridnim reaktorjem predvidevajo, da bi bilo potrebnih od 100 do 300 fuzij na mion.

Na koncu povejmo še nekaj o pridobivanju tritija. Tritij je radioaktivni izotop vodika; razpade z razpadom $\beta-$ in razpolovnim časom 12,5 leta. Tri-

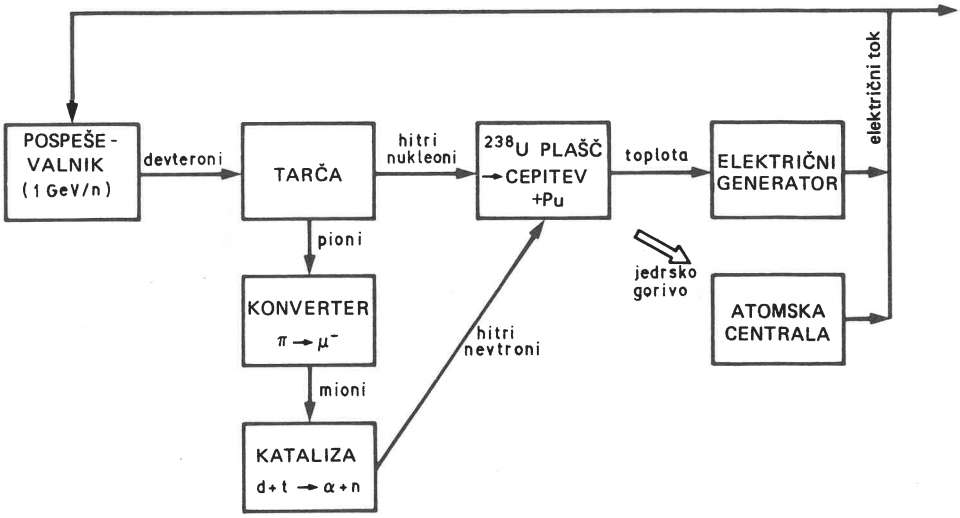


Sl. 6. Mionska kataliza fuzije d-t

tija v naravi praktično ni. Na 10^{18} vodikovih atomov pride en atom tritija. Zato pridobivamo triton na primer z obstreljevanjem izotopa ^{6}Li z nevtroni:

$$n + {}^6\mathrm{Li} \rightarrow \alpha + t$$

Pri tem uporabimo nevtrone, pridelane pri fuziji d-t. V hibridnih reaktorjih nevtrone sicer porabimo za cepitev urana, toda pri cepitvi jih dobimo nazaj. Nevtrone iz fuzije torej prodamo dvakrat: za cepitev in še za tvorbo novega goriva — tritija ter plutonija. Zato pa je hibridni reaktor dosti manj čist kot fuzijski reaktor.



Sl. 7. Primer hibridnega reaktorja, ki ga je leta 1980 predlagal sovjetski fizik V. Petrov

LITERATURA

[1] S. E. Jones, *Muon-catalysed fusion revisited,* Nature **321** (1986) 127.

[2] S. S. Gerstein, L. I. Ponomarev, *μ^- meson catalysis of nuclear fusion in a mixture of deuterium and tritium,* preprint Th. 2393—CERN (1977).

[3] L. Bracci, G. Fiorentini, *Mesic molecules and muon catalysed fusion,* Physics Reports **86** (1982) 196.

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake.

NOVE KNJIGE

NARKIEWICZ W. Classical problems in number theory. PWN — Polish scientific publishers. Monografie matematyczne 62. Warszawa 1986, 363 str.

Knjiga prinaša izbor rešenih in nerešenih problemov iz teorije števil. Za rešene probleme so opisani dokazi, za nerešene so izpeljane najvažnejše doslej najdene ugotovitve. Problemi so izbrani tako, da bralec spozna različne tehnike, ki se uporabljajo v teoriji števil.

Zajeta je tale snov: popolna števila, Mersennova švetila, domnevi Carmichaela in Lehmerja, egipčanski ulomki, vsote karakterjev, ocene za najmanjši pozitivni primitivni koren praštevilskega modula, Artinova domneva, produkt dveh in več zaporednih naravnih števil ni kvadrat ali višja potenca naravnega števila, Grimmova domneva, Waringov izrek, razredno število pri binarnih kvadratnih formah.

Domnevi Carmichaela in Lehmerja se nanašata na Eulerjevo funkcijo φ. Če je m dano naravno število, vprašujemo, koliko je naravnih x, za katere velja $\varphi(x) = m$ (*). Ni znan noben m, ko bi enačba (*) imela natančno eno rešitev. Carmichael je postavil domnevo: število rešitev enačbe (*) je pri vsakem m različno od ena.

Če je p praštevilo, je $\varphi(p) = p - 1$ in $\varphi(p)$ deli $p - 1$. Niso pa še našli nobenega sestavljenega n, da bi $\varphi(n)$ bil delitelj za $n - 1$. Od tod domneva D. H. Lehmerja: $\varphi(n)$ pri sestavljenem n nikdar ne deli $n - 1$.

Vsak praštevilski modul ima primitivne korene. More pa biti isto število primitivni koren za različne praštevilske module. Iz tabel vidimo, da pod 5000 leži 669 praštevil; za te praštevilske module se npr. 2 pojavi 254-krat, 10 pa 258-krat kot primitivni koren. Ob tem je E. Artin izrekel domnevo: celo število, ki ni kvadrat ali -1, je primitivni koren za neskončno praštevilskih modulov. Da za -1 in kvadrate 0, 1, 2^2, 3^2 itd. trditev ne drži, je jasno.

Navedimo še Grimmovo domnevo: če so zaporedna naravna števila $n + 1$, $n + 2, \ldots, n + k$ sestavljena, obstajajo različna praštevila $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tako, da p_1 deli $n + 1$, p_2 deli $n + 2, \ldots, p_k$ deli $n + k$.

Nobena teh domnev še ni ne dokazana ne ovržena.

Omenjena snov je razdeljena na 5 poglavij oz. 15 razdelkov. Razdelki imajo na koncu obširna pojasnila z zgodovinskimi in drugimi podatki. Vsebujejo tudi naloge; večina je težjih in je zato navedena literatura, s katero si je pri reševanju mogoče pomagati. Vsako poglavje sklene kratek seznam sorodnih nerešenih problemov.

Knjiga se končuje z dodatkom in bibliografijo. V dodatku so nekatere ugotovitve, ki so v prejšnjih poglavjih uporabljene, ne pa opisane in izpeljane. Tudi tu zanje v glavnem ni dokazov. Bibliografija zavzema 57 strani.

Bralec bo z veseljem in pridom vzel to knjigo v roke.

Jože Grasselli

ZVOČNI MIKROSKOP

JANEZ STRNAD

PACS a4385+z

Ultrazvočni vrstični mikroskop po ločljivosti že dosega svetlobni mikroskop, v nekaterih primerih pa ga po drugih lastnostih prekaša. Članek opozori na prednosti zvočnega mikroskopa, kratko opiše tak mikroskop družbe Leitz in pojasni nekatere značilnosti s fizikalne strani.

THE ACOUSTIC MICROSCOPE

The acoustic scanning microscope can achieve the resolution of the light microscope and at some instances is preferable with respect to other features. In the article the advantages of the acoustic microscope are considered, the acoustic microscope of Leitz is described briefly and some of its characterics are explained from the physical side.

Uvod

Svetlobne mikroskope poznajo že dolgo, pa tudi elektronske mikroskope uporabljajo že skoraj pol stoletja. Pri slednjih se je obnesel poseben način opazovanja, pri katerem zelo ozek elektronski curek otipa predmet. Zaznavajo tok odbitih ali tudi tok prepuščenih elektronov in z ojačenim tokom krmilijo tok v drugem elektronskem curku, ki v enakem ritmu opleta po zaslonu katodne cevi. Govorimo o *vrstičnem* (tipalnem, rastrskem, angl. scanning) mikroskopu. Nekaj krajši čas je v navadi, da ugotavljajo z ultrazvokom globino morja, iščejo napake v kovinskih odlitkih, preiskujejo nosečnice. Naprava, o kateri smo se namenili poročati, združuje vse troje: objektiv svetlobnega mikroskopa, vrstični način elektronskega mikroskopa in ultrazvok. S tem doseže na eni strani podobno ločljivost kot svetlobni mikroskop, na drugi strani pa ima v nekaterih primerih pred njim nekaj prednosti. Odbojnost predmeta za ultrazvok določajo mehanične napetosti, ki se lahko od predela do predela močno spreminjajo. Tako dobimo mnogo večjo razliko v svetlosti kot pri svetlobnem mikroskopu. Ultrazvok prodira v snovi, ki za svetlobo niso prepustne, zato je mogoče z njim opazovati še na majhnih razdaljah pod površjem predmeta. To je posebno pripravno pri integriranih vezjih na silicijevih ploščicah, ker vezij s tem ne poškodujemo. Veliko obeta tudi v biologiji, ker je mogoče dobiti jasne slike celic, ne da bi jih barvali.

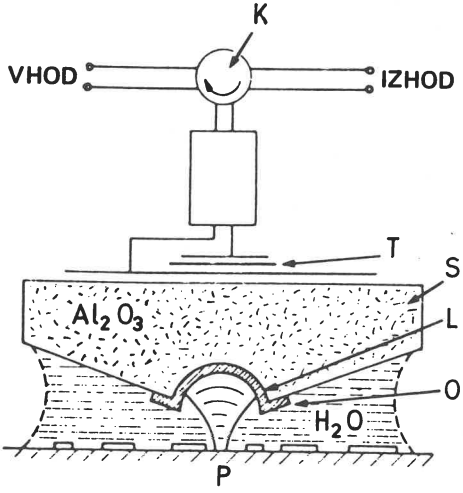
Valovna dolžina ultrazvoka v uporabnih mikroskopih se domala ujema z valovno dolžino rumenozelene svetlobe. Zvočni mikroskop ne bi bil zanimiv, razen v izjemnih primerih, če bi bila valovna dolžina ultrazvoka desetkrat večja, svetlobni mikroskop pa ne, če bi bila valovna dolžina desetkrat manjša. Tako pa ima vsak od njiju svoje dobre lastnosti in nekako drug drugega dopolnjujeta.

Prvi je razmišljal o ultrazvočnem mikroskopu sovjetski fizik S. J. Sokolov pred petdesetimi leti. Toda takrat še ni bilo mogoče dobiti ultrazvoka z dovolj kratko valovno dolžino. Šele pred dvajsetimi leti so dosegli v vodi ultrazvok z valovno dolžino 1,6 μm. V zadnjem desetletju je več raziskovalnih skupin, predvsem v Združenih državah, razvilo osnove ultrazvočnega mikroskopa. Najdlje je prišla, kot kaže, skupina na stanfordski univerzi, ki jo je vodil C. F. Quate [1]. V zadnjem času so začeli izdelovati zvočni mikroskop tudi za prodajo. Pri tem vodi, vsaj v Evropi, družba Ernst Leitz iz Wetzlarja v Zvezni

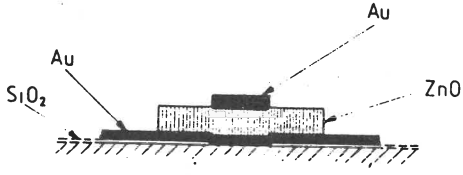
republiki Nemčiji, ki izdeluje in prodaja ELSAM (Ernst Leitz Scanning Acoustic Microscope). Pri tem so Quatovi zamisli dodali precej lastnih izboljšav [2], [3]. Izdelava je zahtevna predvsem z mehanične strani.

Leitzov mikroskop

Izvir je piezoelektrični kristal iz cinkovega oksida, ki ga napajajo s sunki visokofrekvenčne napetosti. Objektiv sestavlja 2 mm dolg valj iz safirja, ki ima na dnu vdolbino s krivinskim radijem samo 2 μm. (Quate je uporabljal vdolbino s krivinskim radijem 40 μm.) Vdolbino pokriva tanka protiodbojna plast iz stekla. Curek speljejo od objektiva do predmeta po vodi; v zraku ali kakem drugem plinu bi se preveč oslabil. V nekaterih primerih je treba vodo segreti do 60 °C, da se ultrazvok tudi v njej preveč ne oslabi. Goriščna ravnina objektiva v vodi je samo dober krivinski radij oddaljena od temena vdolbine. V tej ravnini se zbere curek ultrazvoka na območje z razsežnostjo valovne dolžine (Sl. 1).



Sl. 1. Osrednji deli zvočnega mikroskopa: T izvir (narisan na desni povečano), S safirni objektiv z ukrivljeno mejo L, O protiodbojna obloga iz stekla, P predmet. Na vhodu dovajamo sunke radijskih valov, z izhoda odvajamo signale na ojačevalnik, K elektronska kretnica [2].

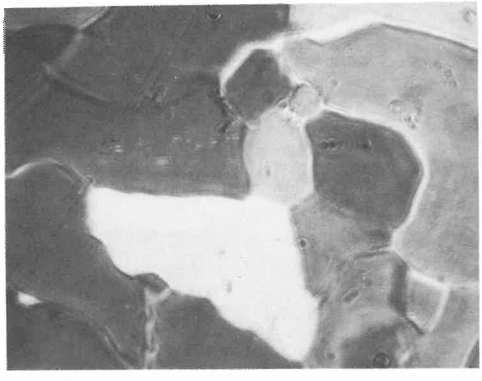


Mikroskop uporablja več območij z ustreznimi objektivi: za frekvenco 0,1 GHz, 0,2 GHz in 0,4 GHz tri objektive z odprtino po 30° in za frekvenčni območji od 0,8 GHz do 1,3 GHz in od 1,3 GHz do 2 GHz objektiva z odprtino po 50°, ki ju je mogoče segreti do 60 °C. Ker ima ultrazvok v vodi hitrost 1500 m/s, meri valovna dolžina v vodi pri frekvenci 2 GHz 0,75 μm in pri frekvenci 0,1 GHz 15 μm. Ta podatka določata meje ločljivosti mikroskopa. Višji frekvenci ustreza boljša ločljivost kot nižji, toda ultrazvok z nižjo frekvenco prodre globlje v predmet.

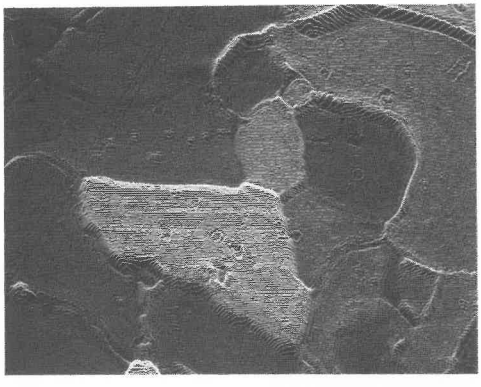
Ultrazvok se na površini predmeta ali pod njo v globini, ki jo določa goriščna ravnina, odbije. Po objektivu potuje nazaj do piezoelektričnega kristala, ki deluje kot sprejemnik, ko ne oddaja. Ko deluje kot izvir, izseva kristal sunke ultrazvoka, ki trajajo po 10 ns in ki si sledijo v časovnih razmikih po 2000 ns, torej s frekvenco 500 kHz. Curek otipa na predmetu pravokotno območje z vodoravno stranico 0,5 mm ali manj. To dosežejo s hitrim gibanjem objektiva in s počasnim gibanjem predmeta. Gibanje objektiva se ponavlja

približno vsaki dve stotini sekunde, gibanje predmeta pa vsakih 20 sekund. Tako nastane vsakih 20 sekund slika s 1024 črticami, od katerih sestavlja vsako deset tisoč odbojev ultrazvočnega curka. Tudi če bi povečali območje predmeta na 2 ali 3 milimetre, pri dani širini curka v goriščni ravnini, ločljivost ne bi bila nič slabša.

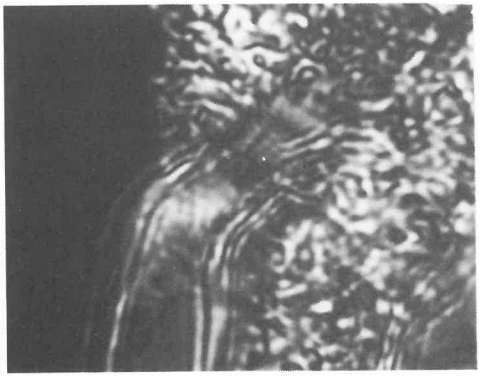
Sprejeto valovanje ojačijo in z jakostjo odbitega ultrazvoka — podobno kot pri vrstičnih elektronskih mikroskopih — krmilijo tok v elektronskem curku v katodni cevi. Pri tem poskrbijo, da se začne vsaka vrstica in vsaka slika ob pravem trenutku. Na zaslonu katodne cevi zasledujemo, kako vsakih 20 sekund nastane nova slika. Če je ta čas predolg, ga je mogoče skrajšati na 2,5 sekunde; pri tem shajamo s 128 vrsticami in se moramo zadovoljiti s slabšo ločljivostjo pravokotno na vrstice. Poljubno sliko je mogoče shraniti



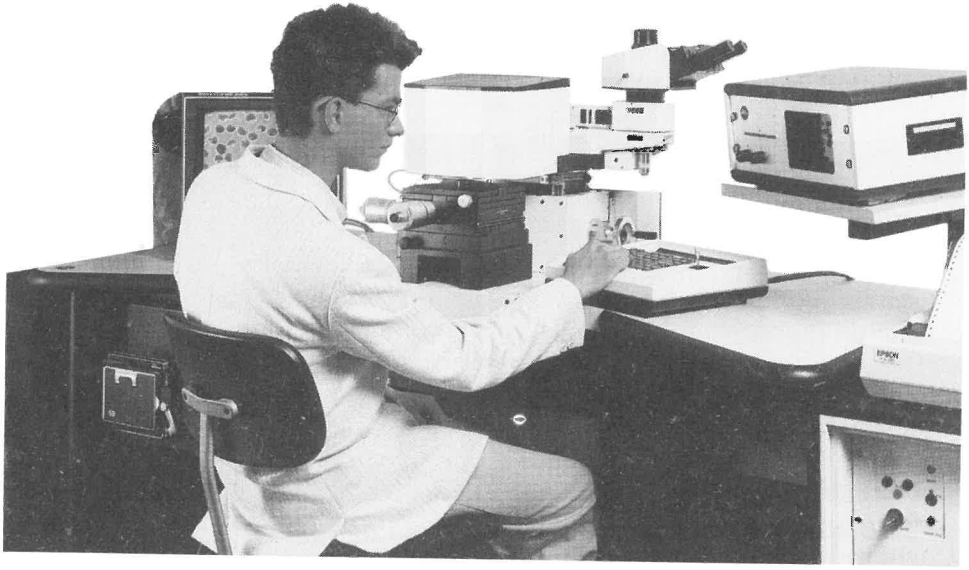
Sl. 2. Območje z vodoravno stranico 0,2 mm na zglajenem površju železa, posneto z zvočnim mikroskopom ELSAM pri frekvenci 1,2 GHz v 625-kratni povečavi (levo) in njegova lažna višinska karta (desno). Zahvaljujem se gospe dr. Sybille Ganz od družbe Leitz iz Wetzlarja, ki je ljubeznivo razkazala mikroskop, posnela fotografije za Obzornik in dala na voljo literaturo



Sl. 3. Kovinski priključek na silicijevo ploščico pod prevleko iz plastične snovi, posnet z zvočnim mikroskopom ELSAM pri frekvenci 0,1 GHz v 125-kratni povečavi (levo), in isto območje v nekaj večji globini, v kateri je mogoče zaznati silicij pod stikom (desno). Po desni sliki je mogoče sklepati, da stik ni neoporečen.



v računalniku, jo priklicati na njegov zaslon in posneti s polaroidno kamero (Sl. 2 in 3). Na zaslonu katodne cevi je mogoče tudi neposredno opazovati krajevno odvisnost jakosti odbitega ultrazvoka po sredi slike. To je pomemben podatek, ko iščemo globino z najugodnejšim kontrastom s tem, da predmet odmikamo od izvira. Nosilec zvočnega mikroskopa lahko premaknemo in s preprosto kretnjo na njegovo mesto primaknemo svetlobni mikroskop, če želimo z njim za primerjavo opazovati isti del predmeta (Sl. 4).



Sl. 4. Zvočni mikroskop ELSAM. V ospredju je predmetna mizica z mikrometrskima vijakoma, nad njo zvočni mikroskop z elektronskim delom. Desno vidimo svetlobni mikroskop, ki ga lahko preprosto prestavimo na mesto zvočnega. Skrajno desno je zaslon katodne cevi, na katerem spremljamo nastanek slike. Na levi je računalniški zaslon z izbrano sliko in levo spodaj polaroidna kamera. Premike opravljamo ročno, ukaze računalniku dajemo s pritiskom na gumb ali z miško [3].

Geometrijska in valovna akustika

Poskusimo nekatere od podatkov razumeti po preprostih enačbah iz optike. Povečavo zvočnega in svetlobnega mikroskopa določa geometrijski približek, ločljivost pa uklon valovanja. Ni težko izračunati goriščne razdalje objektiva v obliki krogelne meje z radijem r med safirjem in vodo. Hitrost zvoka v safirju je 11 000 m/s, v vodi pa 1500 m/s, tako da je lomni kvocient za prehod iz safirja v vodo $n = 11\,000\ \mathrm{ms}^{-1}/1500\ \mathrm{ms}^{-1} = 7{,}5$. Tako velikih lomnih kvocientov v optiki ne poznamo, največji lomni kvocient za vidno svetlobo meri 1,9, navadno pa imamo opraviti z lomnim kvocientom okoli 1,5. Goriščno razdaljo lahko izračunamo tudi iz znane enačbe za plankonveksno lečo, če bi jo merili v steklu: $n/f = (n-1)/r$. Za naš primer dobimo $f = nr/(n-1) = 1{,}15\,r$ in za $r = 2\ \mu\mathrm{m}$ končno $f = 2{,}3\ \mu\mathrm{m}$, merjeno od temena. Samo omenimo, da

napake pasov do odprtine 55° ni treba upoštevati [1]. V tem pogledu je ultrazvočni objektiv precej boljši od svetlobnega.

Protiodbojna obloga meje med safirjem in steklom je najučinkovitejša, če meri hitrost v njej $(11\,000\ \mathrm{ms}^{-1} \cdot 1500\ \mathrm{ms}^{-1})^{1/2}$, to je okoli 4000 m/s. To je približno hitrost, ki jo ima zvok v steklu. (V raznih vrstah stekla meri hitrost zvoka od 3800 do 5600 m/s.) Debelina obloge mora biti enaka četrtini valovne dolžine v snovi, torej pri frekvenci 2 GHz okoli $\frac{1}{4}(4000\ \mathrm{ms}^{-1}/2 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}) = 0{,}5\ \mu\mathrm{m}$. Pri tem izkoristimo interferenco. Kar zadeva valovanje, omenimo samo še to, da ultrazvok ni popolnoma enobarven, saj trajajo sunki le po 10 ns. Pomagamo si z zvezo $\delta\omega\, \delta t = 1$, v kateri je $\delta\omega = 2\pi\, \delta\nu$ razpolovna širina črte in δt čas trajanja sunka. Pri frekvenci 2 GHz meri tako relativna razpolovna širina $\delta\nu/\nu = 1/2\pi\nu\delta t = 0{,}008$.

Ultrazvok potrebuje za pot po 2 mm dolgem safirnem objektivu in nazaj $2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}/11\,000\ \mathrm{ms}^{-1} = 360$ ns. Za največ 50 μm dolgo pot v vodi od predmeta in nazaj potrebuje še $2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}/1500\ \mathrm{ms}^{-1}$, to je dobrih 60 ns. Časovni razmik med zaporednima sunkoma 2000 ns, so vzeli tolikšen, da je mogoče z izbiro časa, v katerem kristal po sevanju sprejema valovanje, izločiti neželene signale. Tako je mogoče izbrati globino, v kateri opazujemo predmet. Tega prej nismo mogli dobro pojasniti. Na ta način tudi izločijo neželene signale, ki izvirajo od odboja na meji med safirjem in steklom ter steklom in vodo. Pri zvočnem mikroskopu uporabijo tako še dodatno načelo radarja, ki ga pri svetlobnem ali elektronskem mikroskopu ni mogoče izkoristiti.

Vodo so izbrali kot kapljevino za vodenje ultrazvoka — v optiki bi rekli kot imerzijo —, ker ne reagira s predmetom, omoči objektiv in predmet, ima majhno zvočno hitrost in razmeroma slabo absorbira ultrazvok. Kljub temu absorpcija pri sobni temperaturi ni zanemarljiva: 10 μm debela plast zadrži pri sobni temperaturi okoli 25 % energijskega toka. Pri temperaturi 60 °C, zadrži samo še 10 %, zato se splača pogosto vodo segreti do te temperature. Kot kapljevino uporabijo lahko tudi etanol. Raziskovalci razmišljajo tudi o kapljevinskem argonu z zvočno hitrostjo okoli 900 m/s. Še boljši je kapljevinski helij, v katerem meri hitrost zvoka samo okoli 500 m/s in ni upoštevanja vredne absorpcije. V njem so že pred dvajsetimi leti dosegli ultrazvok z valovno dolžino 0,2 μm. Z njim nameravajo izdelati mikroskop z boljšo ločljivostjo od svetlobnega [1].

LITERATURA

[1] C. F. Quate, *The Acoustic Microscope*, Scientific American **241** (1979) 58 (4).

[2] A. Thaer, M Hoppe, W. J. Patzelt, *Akustomikroskop ELSAM*, Ernst Leitz GmbH 951—354.

[3] *Ultraschallmikroskop LEITZ ELSAM*, Ernst Leitz GmbH 913—317.

OBVESTILO NAROČNIKOM

V tem koledarskem letu nameravamo pohiteti in čimprej izdati vseh šest številk Obzornika za matematiko in fiziko, da bi tiskarski stroški nekoliko manj narasli. Zato vas lepo prosimo, da po položnici v tej številki čimprej nakažete naročnino za Obzornik v višini 7000.— din, člani pa s tem tudi članarino za Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

SHUB, M., Global Stability of Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York 1987.

Dinamični sistem na odprti množici $U \subset \mathbf{R}^n$ je 1-parametrična grupa transformacij množice U, to je taka družina homeomorfizmov (ali difeomorfizmov) $\Phi_t : U \to U$ $(t \in \mathbf{R})$, da je Φ_0 identiteta in da za poljubna $s, t \in \mathbf{R}$ velja $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$. Ta pojem izhaja iz teorije diferencialnih enačb in mehanike. Vsak sistem navadnih diferencialnih enačb poljubnega reda, ki jih lahko »razrešimo« na odvode najvišjih redov, lahko zapišemo kot »vektorsko« diferencialno enačbo oblike $\dot{x} = F(x)$ (na primerni odprti množici $U \subset \mathbf{R}^n$ za primeren n). Pri znanih, dovolj milih pogojih za F obstaja za vsako »začetno« točko $x_0 \in U$ natanko ena taka rešitev $x = \Phi(t\,; x_0)$ te diferencialne enačbe (definirana v neki okolici točke $t = 0$, odvisni od x_0), da je $\Phi(0; x_0) = x_0$. Če je ta splošna rešitev Φ definirana za vsak t (pri poljubnem x_0), je družina $\Phi_t(x) := \Phi(t; x)$ $(t \in \mathbf{R})$ dinamični sistem na U; to sledi neposredno iz enolične rešljivosti enačbe.

Zlasti pri tovrstnih dinamičnih sistemih iz mehanike pogosto vemo že naprej, da so »tokovnice« (ali »integralske krivulje«) $t \to \Phi(t; x_0)$ vezane na določene nivojske »ploskve« (nivojske ploskve energije, gibalne količine, vrtilne količine itd.). Če hočemo upoštevati to dodatno informacijo, smo prisiljeni raziskovati dinamične sisteme ne le na evklidskih domenah (kot smo definirali v začetku), temveč na poljubnih mnogoterostih; omenjene nivojske ploskve so namreč (z redkimi izjemami) gladke mnogoterosti v U.

Naj bo $\{\Phi_t \mid t \in \mathbf{R}\}$ dinamični sistem na mnogoterosti M. Iz definicije sledi, da za vsako celo število k velja $\Phi_k = \Phi_1{}^k$ (potenca za kompozitum); »diskretna« poddružina $\{\Phi_t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ našega sistema je torej porojena z eno samo transformacijo Φ_1. Obratno, vsaka transformacija (homeomorfizem ali difeomorfizem) $f : M \to M$ porodi »diskreten dinamični sistem« $\{f^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Ker so diskretni sistemi pojmovno toliko preprostejši od »zveznih« in ker so »pojavi«, ki nas pri dinamičnih sistemih najbolj zanimajo, praktično enaki pri diskretnih in zveznih sistemih, je pretežni del študija dinamičnih sistemov posvečen diskretnim sistemom.

Z diskretnimi dinamičnimi sistemi se ukvarja tudi Shubova knjiga. Na hitro preletimo njeno vsebino, ne da bi nepoučenemu bralcu poizkušali razložiti pojme, ki jih bomo omenjali. Knjiga je razdeljena na deset kratkih poglavij. Prva tri uvajajo osnovne pojme v zvezi z asimptotičnim obnašanjem transformacij f^k, ko gre k proti $+\infty$ ali $-\infty$. Nadaljnja štiri poglavja obravnavajo hiperbolične invariantne množice, posebej hiperbolične negibne točke, in njihove stabilne in nestabilne mnogoterosti. Osmo in deveto poglavje sta posvečeni pojmu, po katerem je knjiga imenovana: stabilnosti, predvsem strukturni stabilnosti in Ω-stabilnosti. Zadnje poglavje pa obravnava simbolično dinamiko in markovske particije hiperboličnih invariantnih množic.

Knjiga je dovolj skrbno napisana in bogato opremljena s komentarji in bibliografskimi referencami, ki jih je pisec zbral na koncu vsakega poglavja. Namenjena je bralcem, ki so približno na nivoju naših podiplomskih študentov matematike.

Jože Vrabec

HIPERBOLIČNA LEČA

NADA RAZPET

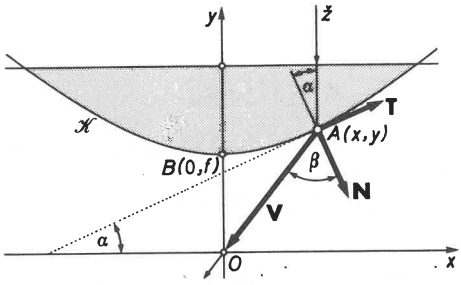
PASC a4278-j

Prispevek obravnava obliko plankonveksne leče, ki snop žarkov, pravokotnih na ravno ploskev, zbere v eni sami točki.

HYPERBOLIC LENS

The paper describes a plano-convex lens which focuses in one point a light beam falling perpendicularly onto the plane surface.

Pri običajni plankonveksni leči z eno ravno in drugo krogelno mejo se žarki, ki padajo pravokotno na ravno stran, ne zberejo natančno v eni točki. Kakšno obliko mora imeti ukrivljena mejna ploskev, da leča vse žarke, pravokotne na ravno mejo, zbere v eno točko? Pri tem privzemimo, da je leča optično izotropna in njen lomni kvocient n, $n > 1$. Neravna ploskev leče mora biti del rotacijske ploskve z osjo v optični osi leče. V ravnini preseka leče skozi njeno optično os postavimo pravokotni koordinatni sistem $x\,y$ (Sl. 1). Žarek $\check{z}$, ki pada pravokotno na ravno stran leče, se lomi v točki $A(x, y)$; vpadni kot je α, lomni pa β. Enačbo krivulje K poiščemo v obliki $y = y(x)$. V točki A sta enotska vektorja tangente $\mathbf{T}$ in normale $\mathbf{N}$. Vektor $\mathbf{T}$ oklepa z osjo x tudi kot α. Takoj zapišemo



Slika 1

$$\mathbf{T} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \mathbf{N} = (\sin\alpha, -\cos\alpha) \tag{1}$$

Iz osnovnih trigonometričnih zvez pridemo do izrazov $\cos\alpha = 1/(1 + y'^2)^{1/2}$ in $\sin\alpha = y'/(1 + y'^2)^{1/2}$, če je $y' = \operatorname{tg}\alpha$. Vektor $\mathbf{V}$ od točke A do izhodišča koordinatnega sistema $x\,y$ zapišemo kot $\mathbf{V} = (-x, -y)$. Za lomni kot β upoštevamo enakost $\sin\beta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ in dobimo

$$\sin\beta = -\mathbf{T}\,.\,\mathbf{V}/|\mathbf{V}| \tag{2}$$

Lomni zakon v točki A zahteva $n \sin\alpha = \sin\beta$. Z zapisanimi zvezami dobi lomni zakon obliko

$$n\,y'/(1 + y'^2)^{1/2} = (x + y\,y')/(1 + y'^2)^{1/2}(x^2 + y^2)^{1/2} \tag{3}$$

Ker bi radi, da se vsi žarki zberejo v koordinatnem izhodišču, mora enačba (3) veljati na odprtem intervalu. Iz nje dobimo preprosto diferencialno enačbo

$$n\,dy = d(x^2 + y^2)/2(x^2 + y^2)^{1/2} \tag{4}$$

Z integracijo dobimo $n\,y + C = (x^2 + y^2)^{1/2}$, kjer je C integracijska konstanta. Sedaj ni več težko videti, da je krivulja K hiperbola $((n^2 - 1)\,y + n\,C)^2 - (n^2 - 1)\,x^2 = C^2$. Konstanto C določimo iz pogoja, da krivulja K gre skozi točko $B(0, f)$, $f > 0$. Dobimo $C = -(n - 1)\,f$. Hiperbolo prepišemo v obliki

$(y - q)^2/a^2 - (x - p)^2/b^2 = 1$, iz katere preberemo njene geometrijske parametre. Po krajšem računu dobimo: $p = 0$, $q = nf/(n + 1)$, $a = f/(n + 1)$, $b = f((n - 1)/(n + 1))^{1/2}$. Če je e geometrijska goriščna razdalja hiperbole, iz znane formule $e^2 = a^2 + b^2$ dobimo $e = q$. Geometrijski gorišči F_1, F_2 hiperbole pa sta točki $F_1(0, 0)$, $F_2(0, 2q)$. Torej se geometrijsko gorišče F_1 ujema z optičnim goriščem leče.

Hiperbola ima dve veji. Krivulja K, ki smo jo iskali, je na zgornji. Če bi vzeli K na spodnji veji, bi dobili plankonkavno lečo, pri kateri bi se žarki razpršili, kakor da bi izhajali iz ene same točke. V obeh primerih je neravna stran leče del dvodelnega rotacijskega hiperboloida.

Tako obliko leče uporabljajo pri mikrovalovih, pri katerih je leča iz dielektrika, v njenem gorišču pa je primarna antena (dipolna, okvirna, lijakasta itd.).

LITERATURA

[1] F. W. Sears, M. W. Zemansky, *University Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.

[2] I. Vidav, *Višja matematika II*, DZS, Ljubljana 1951.

NOVE KNJIGE

Metastability and incompletely posed problems. Ed. Stuart S. Antman et all. (IMA volumes in mathematics and its applications; 3.) Springer Verlag, New York, 1986. 378 + 12 str.

Knjigo sestavljajo zapiski predavanj v okviru delovnega seminarja iz programa Fizika kontinuumov in parcialne diferencialne enačbe iz let 1984 in 1985.

Pri mnogih ravnovesnih stanjih fizikalnih sistemov energija sistema ni nujno minimalna, zato imenujemo taka stanja metastabilna. Pri fizikalnem pojavu pogosto ne poznamo natanko enačb stanja, zato rečemo, da so podatki in problem sam nekompletni. Ti ugotovitvi pojasnjujeta naslov zbirke člankov.

Udeleženci seminarja so bili matematiki, fiziki in inženirji. Heterogena sestava raziskovalcev se seveda odraža tudi na vsebini člankov. Prispevki z matematičnim poudarkom so npr. Regularnost rešitev variacijske naloge, Študij Schrödingerjevega operatorja, Asimptotično vedenje rešitev parcialnih diferencialnih enačb, Inverzni problem teorije potencialov in drugi. Primeri prispevkov s fizikalnim poudarkom so: Disipativni mehanizmi, Bifurkacija rešitev pri termoelastičnih problemih, Študij faznih prehodov, Nelokalni pojavi v elektromagnetizmu. Še bolj uporabno, inženirsko usmerjeni prispevki so npr. Enačbe mazanja, Razcepljanje kristalov, Tvorba dendritov pri ohlajanju raztopine, Stabilnost kremenčevih kristalov, Psevdoplastično vedenje gumijastih balonov, Stabilnost nelinearnih valov in drugih.

Branje prispevkov zahteva temeljito poznavanje ustreznih poglavij iz teorije parcialnih diferencialnih enačb, večinoma pa tudi globoko poznavanje obravnavanih fizikalnih pojavov. Zato je knjiga dostopna predvsem le specialistom s področja parcialnih diferencialnih enačb in njihove uporabe v fiziki in tehniki.

Anton Suhadolc

ZVEZNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV FIZIKE

ANA PRIBAKOVIĆ

PACS a0140-z

Prispevek poroča o IV. zveznem tekmovanju študentov fizike v Beogradu, ki so se ga udeležili predstavniki ljubljanskih študentov.

NATIONAL PHYSICS CONTEST

The national physics contest in Belgrade is reported on, at which students from Ljubljana took part.

Študenti naše fakultete so se med 23. in 25. majem 1986 že četrtič zapored udeležili tekmovanja študentov fizike v Beogradu. Tekmovanje vsako leto organizira Oddelek za fiziko v Beogradu. Naš oddelek je stalen gost te prireditve. K sodelovanju povabijo vse jugoslovanske fakultete, vendar se nekatere ne odzovejo. Poleg domačinov iz Beograda so to pot sodelovali še študenti iz Zagreba, Sarajeva, Prištine in Ljubljane. Skupino iz Prištine je vodil asistent, ki je kasneje pomagal pri popravljanju nalog. To je bilo za nas nekaj novega, saj je bilo do sedaj vse v rokah študentov; beograjski profesorji in asistenti so na njihovo prošnjo prevzeli le pripravo in popravljanje nalog.

Ker naj bi bilo tekmovanje zgolj ekipno v štiričlanskih ekipah, smo se odločili za večje število udeležencev: trije študenti prvega letnika: Uroš Seljak, Vlado Robar in Matjaž Žitnik, študent drugega Božo Casar, trije iz tretjega: Dean Mozetič, Boštjan Zalar in Ana Pribaković ter študent četrtega letnika Matjaž Kaluža. Naš namen je bil ekipna zmaga in nabiranje izkušenj za prihodnje leto.

V Beograd smo prispeli že v petek dopoldne. Organizatorji so upoštevali naše poprejšnje pripombe in poiskali sobe v Domu za mlade na Avali; tam je dovolj miru za priprave in koncentracijo. Pri tem pa so pozabili na oddaljenost, saj smo do tja potrebovali dve uri z avtobusom in tramvajem, nato pa še pol ure peš. Ozračje je bilo kar prijetno, čeprav so se posamezne ekipe držale bolj skupaj. Na našo pobudo smo v soboto zvečer na Trgu Marxa in Engelsa v središču Beograda poslušali rock koncert, namenjen mladim ob dnevu mladosti.

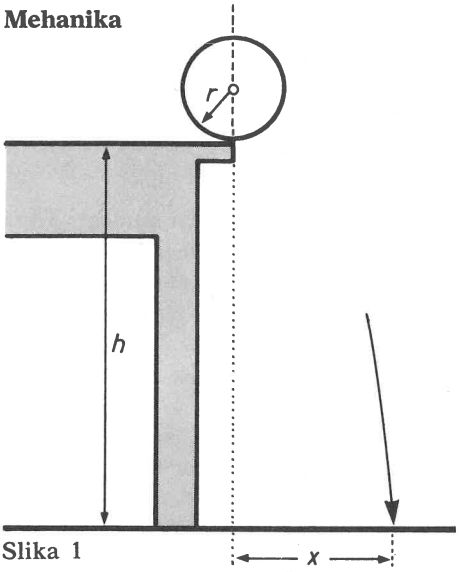
Naloge smo reševali v soboto dopoldne. Na voljo smo imeli štiri ure. Po pravilih tekmovanja študenti prvega in drugega letnika tekmujejo v prvi skupini, tretjega in četrtega letnika pa v drugi. Nalog je precej, kar 12. Zmaga tekmovalec, ki jih največ reši pravilno. Odrezali smo se odlično, vendar na naše presenečenje sploh niso upoštevali razvrstitve ekip in razdelili le posamične nagrade. V prvi skupini je Matjaž Žitnik osvojil prvo mesto, Uroš Seljak tretje, Vlado Robar pa je bil pohvaljen. Organizatorji so namreč lahko nagradili le nekaj prvouvrščenih. V drugi skupini je Dean Mozetič osvojil prvo in Matjaž Kaluža tretje mesto. Nagrade so bile knjižne in vsakemu, ki zna rusko, dobrodošle.

Na koncu razglasitve se je pritožila ekipa iz Zagreba, žal upravičeno. Po ponovnem pregledu so ugotovili, da so jim črtali pravilno rešene naloge. Po tem je obvisela v zraku neprijetna misel o neobjektivnosti tekmovanja.

Za zgled navajamo nekaj nalog.

Prva skupina

Mehanika



Slika 1

Krogle so razvrščene v ravni vrsti. Prva se začne z znano hitrostjo gibati proti drugi, ta se po trku giblje proti tretji itd... V sistemu nastane zaporedje trkov. Razmerje mas med sosednjima kroglama je tolikšno, da je kinetična energija pete krogle po trku s četrto enaka kinetični energiji, ki jo imajo v tem trenutku prve štiri skupaj. Kolikšno je razmerje mas med sosednjima kroglama?

Na robu vodoravne mize z višino h je krogla z radijem r, $r << h$. Krogla je v labilnem ravnovesju. Nenadoma izgubi ravnotežje in se prevrne z mize brez začetne hitrosti. V kolikšni oddaljenosti od vznožja mize se bo krogla dotaknila tal (sl. 1)?

Molekulska fizika in termodinamika

Toplotno izolirana valjasta posoda je z zanemarljivo lahkim batom razdeljena v dva enaka dela. V prvi polovici je mol idealnega plina z začetno temperaturo T, v drugi pa vakuum. Bat nenadoma spustimo, tako da plin zapolni ves valj. Nato bat počasi vrnemo v začetni položaj. Kolikšna je sprememba notranje energije in entropije plina?

Ocenite maso največje kapljice živega srebra, ki ne razpade na vodoravni podlagi.

Pojasni delovanje medicinskega termometra s skalo od 33 do 42 °C.

1. Kako dosežemo, da kaže termometer isto temperaturo tudi po merjenju.
2. Izračunaj najmanjši pospešek, ki je potreben, da živo srebro ob otresanju pade na najnižjo temperaturo, ki je na skali še označena. Definiraj vse potrebne količine.
3. Zapiši enačbe za segrevanje in ohlajanje termometra. Zakaj merjenje temperature traja nekaj minut (5 do 10), živo srebro pa lahko zbijemo že takoj po opravljeni meritvi.

Elektrika in magnetizem

Tanka kvadratna plošča s stranico b je enakomerno naelektrena po vsej površini.

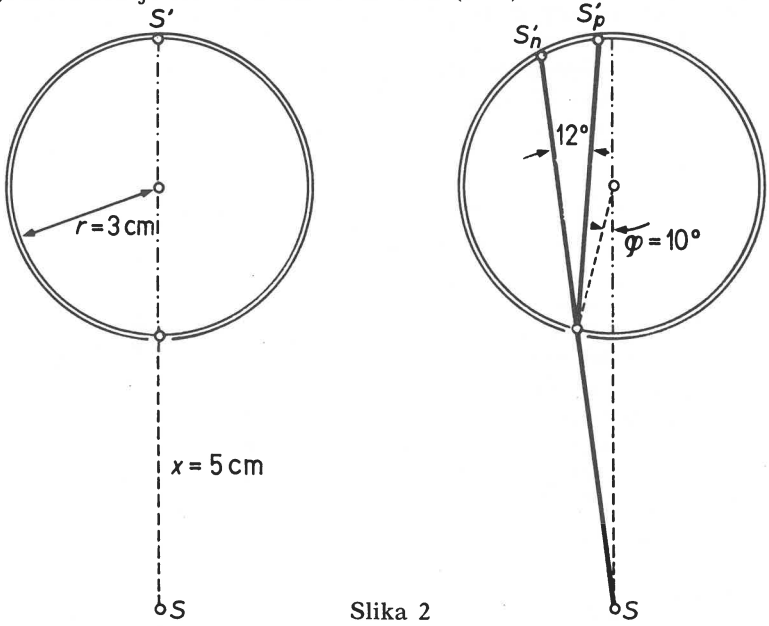
a) Z enačbo za potencial enakomerno nabite krožne plošče oceni potencial v središču kvadratne plošče z natančnostjo na nekaj procentov.

b) Poišči točno enačbo za potencial kvadratne plošče.

Optika

Na ravno površino steklenega polvalja (osnovna ploskev je polkrog) pada pod kotom 45° enobarvna svetloba v ravnini, pravokotni na os polvalja. Iz katerega dela bočne površine lahko pričakujemo izstopni žarek. Lomni količnik stekla je n.

Valjast kozarec z radijem $r = 3$ cm iz tankega stekla oblepimo s papirjem, iz katerega izrežemo tanek navpičen pravokotnik. Kozarec napolnimo z anilinom tako, da je del odprtine pod gladino. Pred odprtino postavimo v oddaljenosti $x = 5$ cm točkasto svetilo S. Na zadnji steni valja nastane slika S'. Ko kozarec zavrtimo okrog navpične osi za kot $\varphi = 10^0$, se slika pokvari; njen zgornji del (nad gladino) S_n' je za 12^0 bolj odklonjen kot spodnji del S_p' (pod gladino). Kolikšen je lomni kvocient anilina (sl. 2)?



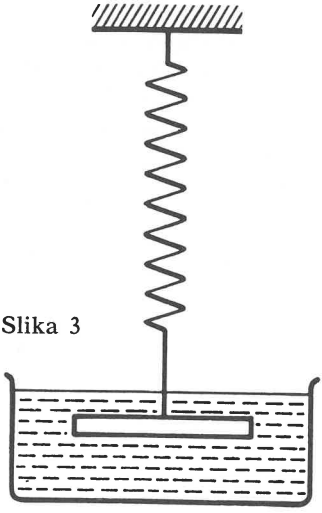
Slika 2

Druga skupina

Analitična mehanika

Homogen valj z radijem r in višino $h = r\frac{1}{2}\sqrt{6}$ je vrtljiv okoli osi, ki gre skozi središče ene od osnovnih ploskev in oklepa z geometrijsko osjo valja kot γ. Vrtenje valja je dušeno. Navor ima dve komponenti, prva je konstantna, druga pa sorazmerna oddaljenosti središča mase od osi vrtenja. Preostale sile zanemarimo. Valj, ki ga zavrtimo z začetno hitrostjo $\dot{\varphi}_0$, se zaustavi po času T. Pri kolikšnem kotu je čas zaustavljanja T največji, če sta T in $3T$ časa zaustavljanja pri $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ in $\gamma = 0$ pri enaki začetni hitrosti $\dot{\varphi}_0$?

Coulomb je meril viskoznost kapljevine tako, da je na vzmet obesil težko kovinsko ploščo in izmeril razliko frekvenc pri nihanju nihala v zraku in v kapljevini.



Slika 3

1. Izpelji formulo za viskoznost iz podatkov za poskus; definiraj potrebne količine. Pri izpeljavi zanemari viskoznost zraka in upoštevaj približek malih nihanj.

2. Premisli in ugotovi glavno slabost merjenja. Kako bi preprosto to slabost odpravil (sl. 3)?

Statistična fizika

Naredimo Joule-Thompsonov poskus pri konstantni temperaturi; sistem ni toplotno izoliran.

a) Kateri od termodinamičnih potencialov se ne spremeni?

b) Kolikokrat je stisljivost enoatomnega idealnega plina manjša kot pri običajnem Joule-Thompsonovem poskusu (pri nespremenjeni entalpiji)?

Elektrodinamika

Dokaži, da tvorita gibalna količina in enegija prostorsko omejenega ravnega vala v smeri gibanja četverec, podoben četvercu energije in gibalne količine snovnega delca.

Opiši bistvo pojava, ki sta ga prva proučila Hertz (1881) in Quincke (1886) in pozneje še mnogi drugi, da bi morebiti izdelali dialektični motor.

Na sredo med plošči ploščatega kondenzatorja vstavimo valj iz snovi z dialektričnostjo ε_1 in električno prevodnostjo σ_1, tako da je os valja vzporedna s površino kondenzatorskih plošč. Vmesni prostor izpolnjuje kapljevina z dialektričnostjo ε_2 in električno prevodnostjo σ_2.

Dokaži, da stalno električno polje v kondenzatorju zavrti valj okoli njegove osi pri pogoju, da velja neenakost $\varepsilon_1 \sigma_2 > \varepsilon_2 \sigma_1$. Poišči natančen ali približen izraz za navor, ki ga povzroči vrtenje.

Kvantna mehanika

Elektronu v polju dipola lahko včasih približno priredimo hamiltonko

$$H = -\tfrac{1}{2}(\hbar^2/m)d^2/d\,x^2 - Z\,e^2\,\delta(x+a) + Z\,e^2\,\delta(x-a)$$

1. Pokaži, da za $a > 0$ vedno obstaja vezano stanje ($E < 0$).
2. Izračunaj energijo vezanega stanja v primeru
   a) ko je a zelo velik,
   b) ko lahko člene z a^n; $n > = 2$ zanemarimo.
3. Na katerem intervalu $(-\infty, -a)$ ali (a, ∞) z večjo verjetnostjo zadenemo na elektron?

Ravnemu biharmoničnemu oscilatorju ustreza hamiltonka

$$H = \tfrac{1}{2}\,p^2/m + V(x); \quad V(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\,m\,\omega_1^2\,x^2; & x < 0 \\ \tfrac{1}{2}\,m\,\omega_2^2\,x^2; & x > 0 \end{cases}$$

1. Izračunaj energijska stanja v prvem redu motenj, če je razlika kvadratov obeh frekvenc $\omega_1^2 - \omega_2^2$ majhna.
2. Določi energijo osnovnega stanja s funkcijo $\psi(x) = a\,e^{-bx^2}$.
3. Izračunaj verjetnost, da ima sistem s hamiltonko

$$H = \tfrac{1}{2}\,p^2/m + \tfrac{1}{2}\,m\,\omega_1^2\,x^2$$

v osnovnem stanju biharmoničnega oscilatorja energijo $\tfrac{1}{2}\,\hbar\,\omega_1$.

NEVTRONSKI INTERFEROMETER

IRENA DREVENŠEK

PACS 07.60.Ly

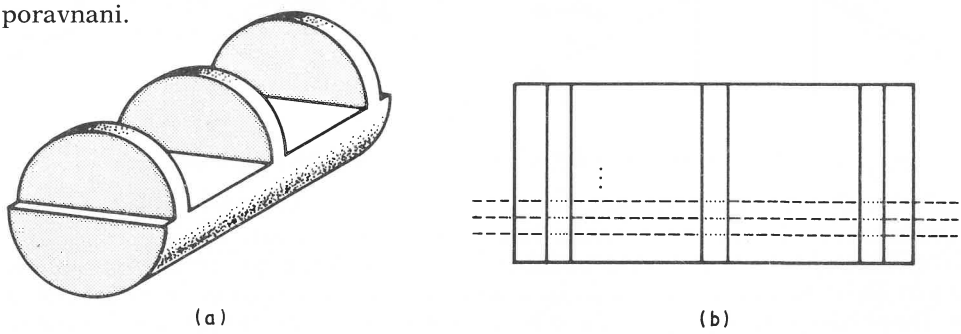
Nevtronski interferometer omogoči osnovne poskuse, na katere se v uvodnih poglavjih sklicujejo skoraj vsi učbeniki kvantne mehanike. V napravi z monokristalom razcepimo curek termičnih nevtronov na dva delna curka, ki potujeta po različnih poteh in naposled interferirata. Merimo fazno razliko, ki nastane med delnima curkoma, če enega izmed njiju pošljemo skozi snov ali magnetno polje.

THE NEUTRON INTERFEROMETER

Using the neutron interferometer basic experiments can be carried out mentioned in introductory quantum mechanics courses. In the interferometer the incident thermal neutron beam is split by monocrystal into two coherent beams that take different paths and finaly interfere. One of them is sent through magnetic field or a piece of matter and the resulting phase shift is measured.

Prehod nevtronov skozi monokristal

Nevtronski interferometer izdelajo iz silicijevega monokristala, ki je umetno vzgojen v obliki valja z dolžino okoli 8 cm in premerom 5 cm. Iz valja z diamantnimi rezili odstranijo del kristala, tako da ostanejo na eni strani le trije vzporedni, kakih 5 mm debeli polkrožni listi. Povezuje jih dno, ki daje napravi potrebno trdnost (sl. 1). Atomi v listih so med seboj poravnani.



Sl. 1. Nevtronski interferometer (a). Na tlorisu (b) so nakazane mrežne ravnine, ki so poravnane v vseh treh listih

Vpadni curek termičnih nevtronov iz reaktorja ni monoenergijski, ampak ustvari takšen curek šele naprava. Kristalni list prepusti le nevtrone z določeno smerjo in hitrostjo, ki zadoščata Braggovemu pogoju. Mrežne ravnine so pri tem pravokotne na zunanjo, mejno ravnino kristala. Curek se sipa v kristalu, kakor smo vajeni pri *Lauejevem sipanju.* Ob tem pa pride do izraza nenavadno izrazit prehodni pojav, ki so ga najprej odkrili pri sipanju rentgenske svetlobe in ki je znan kot *Borrmannov pojav* [1].

Oglejmo si Borrmannov pojav pri sipanju nevtronov le kvalitativno. Nevtronski curek pošljemo na kristal pod kotom ϑ glede na normalo. Po odboju na mrežnih ravninah xz (sl. 2) v razmiku a_y se ojači curek, za katerega je izpolnjena Braggova enačba

$$2a_y \sin \vartheta = \lambda = 2\pi/k \qquad \mathbf{k} = (k_x,\ k_y) = ((\pi/a_y) \operatorname{ctg} \vartheta,\ \pi/a_y)$$

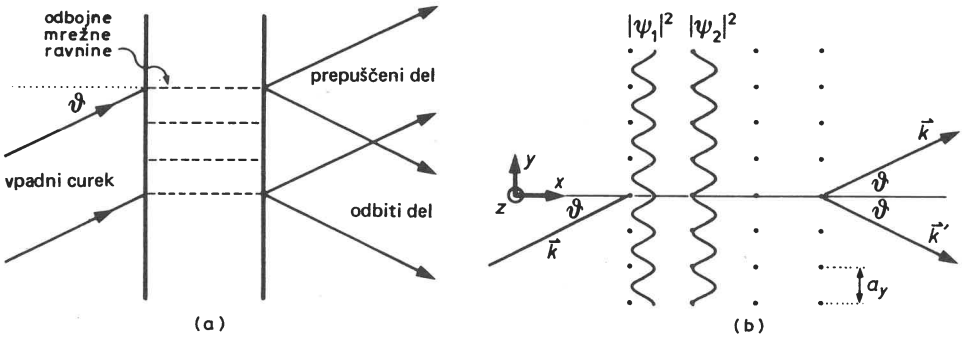
Vpadni curek prostih nevtronov opišemo z valovno funkcijo

$$\psi \propto e^{ik_x x} e^{ik_y y}$$

V kristalnem listu se curek zaporedoma večkrat odbije. Pri reševanju Schrödingerjeve enačbe v kristalu moramo upoštevati potencial atomskih jeder. Dobimo dve lastni rešitvi, ki kažeta v smeri osi x podobne lastnosti kot potujoče valovanje in v smeri osi y podobne lastnosti kot stoječe valovanje [2]

$$\psi_1 \propto e^{ik_x x} \cos k_y y, \qquad \psi_2 \propto e^{ik_x x} \sin k_y y$$

Verjetnostna gostota, ki ustreza eni od njiju, denimo ψ_1, ima na mestih jeder maksimume. Na nevtrone, ki jih opiše, najverjetneje naletimo v bližini jeder in zato ti z jedri močno sodelujejo. Verjetnostna gostota, ki ustreza rešitvi ψ_2, ima ob jedrih minimume. Na nevtrone, ki jih opiše, najverjetneje naletimo na sredi med jedri in zato ti z jedri le neznatno sodelujejo.



Sl. 2. Lauejevo sipanje (a) in Borrmannov pojav (b)

Nevtroni, ki jih opiše prva lastna rešitev, se v kristalu močneje sipajo kot nevtroni, ki jih opiše druga. Lastni rešitvi imata zato za malenkost različni fazni hitrosti. Pojav je podoben dvojnemu lomu pri prehodu svetlobe skozi anizotropne snovi. Sicer potujejo nevtroni po kristalu v smeri osi x s skupinsko hitrostjo $v_x = d\,\omega/d\,k_x = v \cos \vartheta$, ki je za faktor $\cos \vartheta$ manjša od hitrosti nevtronov v zraku.

Na izstopni strani kristalnega lista nastane med lastnima rešitvama fazna razlika $\alpha' = \alpha - \pi/2$, ki je odvisna od debeline lista in razlike med faznima hitrostma. Obe lastni rešitvi na izstopni meji spet sestavimo in zunaj kristala opišemo nevtrone z valovno funkcijo

$$\begin{aligned} e^{i\alpha'} \psi_1 + \psi_2 &= e^{-i\pi/2} (e^{i\alpha} \psi_1 + e^{i\pi/2} \psi_2) = e^{-i\pi/2}(e^{i\alpha} \psi_1 + i\, \psi_2) \propto \\ &\propto e^{ik_x x}(e^{i\alpha} \cos k_y y + i \sin k_y y) = \\ &= \tfrac{1}{2} e^{ik_x x} e^{ik_y y}(e^{i\alpha} + 1) + \tfrac{1}{2} e^{ik_x x} e^{-ik_y y}(e^{i\alpha} - 1) \propto \psi_0 + \psi_p \end{aligned}$$

Ta valovna funkcija vsebuje poleg dela ψ_0 z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$, ki ustreza vpadnemu curku, še del ψ_p z valovnim vektorjem $\mathbf{k}' = (k_x, -k_y)$, ki ustreza odbitemu curku. Verjetnostni gostoti drugega in prvega dela sta v razmerju

$$|\psi_0|^2/|\psi_p|^2 = |(e^{i\alpha} - 1)|^2/|(e^{i\alpha} + 1)|^2 = (1 - \cos \alpha)/(1 + \cos \alpha) = \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} \alpha$$

Iz literature izvemo, da je nedoločenost vpadnega kota $\delta\vartheta$ pri Borrmannovem pojavu okoli 10^{-6} radiana. Narašča sorazmerno s kvadratom valovne dolžine ter obratno sorazmerno s sinusom vpadnega kota $\delta\vartheta \approx \lambda^2 \sin 2\vartheta$ [3]. Gostota prepuščenega nevtronskega toka skozi interferometer je tem večja, čim večja je kotna nedoločenost $\delta\vartheta$. Velika kotna nedoločenost pa po drugi strani poveča nedoločenost valovne dolžine $\delta\lambda$ in interferenčna slika se zabriše.

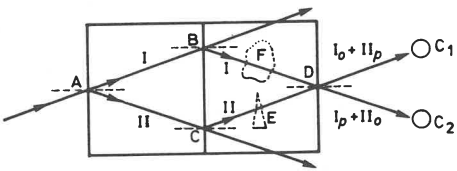
Energijski interval, ki ga zajame nevtronski interferometer, je navzdol omejen z minimalnim prepuščenim tokom okrog 0,25 nevtronov cm^2 s, ki je še zadosten za praktične meritve [3]. Navzgor je interval omejen z maksimalno medmrežno razdaljo, ki je v siliciju $d_{111} = 0{,}31$ nm. Tako dobimo interval $2{,}3\ \text{meV} \leqslant E \leqslant 8{,}2\ \text{eV}$ ali $0{,}01\ \text{nm} \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6\ \text{nm}$.

Pri običajnih razmerah, ko meri λ okrog 0,1 nm in ϑ okrog 30^0, je nedoločenost koordinat $\delta x \approx \delta y \approx 0{,}03$ mm. To so teoretične dimenzije valovnega paketa, ki jih definira sistem in ki so za mikroskopske razmere izjemno velike. Hitrost nevtronov v interferometru je okoli 10^3 m/s in meritve lahko preprosto nadzorujejo.

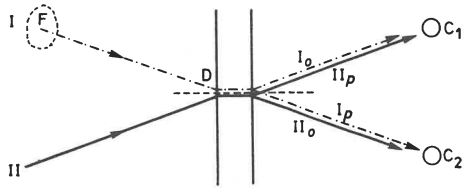
Kako deluje interferometer

Dogajanje v nevtronskem interferometru hitro razumemo s poenostavljenim modelom (sl. 3), v katerem lahko nevtronskemu curku ves čas tudi računsko sledimo. Čeprav je pri dejanski napravi veliko zapletenih pojavov, v modelu ne zanemarimo nič bistvenega.

Nevtronski curek se pri A razcepi na dva delna curka I in II, ki gresta vsak svojo pot. Pri B in C se vsak od njiju delno odbije. Oslabljena curka se sestavita v zadnjem kristalnem listu pri D. Tam vsak od njiju prispeva odbiti in prepuščeni del. Vsoto odbitega dela enega in prepuščenega dela drugega delnega curka zaznata merilnika pri C_1 in C_2. Če na pot delnemu curku I pri F vrinemo plast kake snovi ali magnetno polje, dobimo med delnima curkoma I in II dodatno fazno razliko δ. Za toliko se spremenita tudi fazna razlika med odbitim in prepuščenim delom, katerih vsoto zazna prvi merilnik, in fazna razlika med odbitim in prepuščenim delom, katerih vsoto zazna drugi merilnik. Ker vsak nevtron zadene natanko enega izmed merilnikov, gostota toka na mestu enega merilnika naraste, na mestu drugega pa se ustrezno zmanjša (sl. 5). Tako iz različnih gostot tokov, ki ju zaznata merilnika, razberemo fazno razliko δ med delnima curkoma I in II.



Sl. 3. Model nevtronskega interferometra in potek curkov v njem



Sl. 4. Razcep delnih curkov v tretjem kristalnem listu

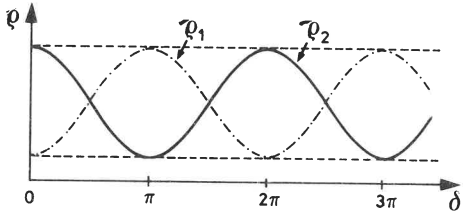
Zanima nas odvisnost gostot tokov, ki ju zaznata merilnika pri C_1 in C_2, od fazne razlike δ. Pri obravnavanju Borrmannovega pojava smo izračunali, da se po prehodu skozi kristalni list spremeni faza prepuščenega dela vpadnega curka za faktor $(e^{i\alpha} + 1)$ in faza odbitega dela za faktor $(e^{i\alpha} - 1)$ glede

na fazo vpadnega curka. Po prehodu skozi prvi in drugi kristalni list je med delnima curkoma I in II fazna razlika δ', za katero dobimo iz enačbe $(e^{i\alpha} + 1)(e^{-i\alpha} + 1)/|(e^{i\alpha} - 1)|^2 = -i \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha\, e^{-i\pi/2}$, da je enaka $-\frac{1}{2}\pi$.

Fazo delnega curka I pri F dodatno povečamo za δ. Pri D je med delnima curkoma fazna razlika $\gamma = \delta + \delta'$. Merilnika zaznata gostoti tokov

$$\varrho_1 \propto |\psi_{Io} + \psi_{IIp}|^2 \propto |e^{i\gamma}(e^{i\alpha} - 1) + (e^{i\alpha} + 1)|^2 = 1 - \sin\alpha\cos\delta$$
$$\varrho_2 \propto |\psi_{Ip} + \psi_{IIo}|^2 \propto |e^{i\gamma}(e^{i\alpha} + 1) + (e^{i\alpha} - 1)|^2 = 1 + \sin\alpha\cos\delta$$

Interferenčni poskus naredimo večkrat tako, da merimo gostoto toka le z enim merilnikom. Če delnemu curku II postavimo pri E na pot trikotni klin iz neke snovi, se pojavi med delnima curkoma fazna razlika, ki je odvisna od debeline klina. Ko klin počasi pomikamo skozi curek, se dolžina poti delnega curka II skozi klin zvezno spreminja in na merilniku dobimo pričakovano sinusno krivuljo. Potem na pot delnega curka I postavimo oviro in poskus s klinom ponovimo. Dobimo enako krivuljo kot prej, le da je premaknjena za fazo δ, ki jo je povzročila ovira.



Sl. 5. Gostoti tokov, ki ju zaznata merilnika v odvisnosti od fazne razlike med delnima curkoma

Poskus iz kvantne mehanike

V klasični mehaniki je telo, ki ga zavrtimo za 360°, v isti legi kakor pred zasukom. Nikakor ne moremo ugotoviti, da smo ga zasukali. V kvantni mehaniki to vedno ne drži. Valovna funkcija fermiona pri zasuku za 360° spremeni predznak in z nevtronskim interferometrom lahko to zaznamo.

Nevtron je fermion s spinom $S = 1/2$. Ima spinski magnetni moment $g\,\mu_j = -1{,}9\,\mu_j$, če je $\mu_j = e_0\hbar/2m$ jedrski magneton in m masa nukleona. Zasuk nevtronske valovne funkcije okoli osi z za kot φ opišemo takole $\psi(\varphi) = \hat{R}_z\,\psi(0)$ z unitarnim operatorjem $\hat{R}_z$, ki vsebuje Paulijevo matriko $\hat{S}_z$ za operator projekcije vrtilne količine na os z:

$$\hat{R}_z = e^{-i\hat{S}_z\varphi/\hbar} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pri zasuku za kot $\varphi = 2\pi$ valovna funkcija spremeni znak

$$\psi(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{-i.2\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i.2\pi/2} \end{pmatrix} \psi(0) = -\mathbf{1}\,\psi(0) = -\psi(0)$$

Pri tem je **1** enotska matrika.

Nevtronsko valovno funkcijo lahko zavrtimo s homogenim magnetnim poljem. Hamiltonka je v tem primeru sorazmerna s projekcijo vrtilne količine $\hat{S}_z$

$$\hat{H} = -\hat{\mu}\,B = -g(e/2m)\,\hat{S}_z\,B$$

Iz kvantnomehanične enačbe gibanja v Heisenbergovi obliki razberemo, da ustreza časovni potek vrtenju okoli osi z s krožno frekvenco $\omega = g\,e\,B/2m$: torej

$$\psi(t) = \hat{R}_t\,\psi(0) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\psi(0)$$

$$\psi(t) = e^{(igeB/\hbar 2m)\hat{S}zt} = \begin{bmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{bmatrix} \psi(0)$$

Z interferenco med zasukanim in nezasukanim stanjem zaznamo spremembo faze zaradi vrtenja. V nevtronskem interferometru na pot delnega curka I postavimo magnetno polje, ki zavrti valovno funkcijo za liho število obratov. Fazna razlika se spremeni za π in gostoti tokov pri C_1 in C_2 se zamenjata. Gostota toka, ki jo je prej zaznal prvi merilnik, preide v gostoto toka na drugem merilniku in obratno.

Uporaba interferometra na drugih področjih fizike

Nevtronski interferometer ni pomemben le pri izvajanju osnovnih poskusov kvantne mehanike. Z njim lahko merimo spremembe faze valovne funkcije zaradi gravitacijskega polja in sistemskih sil. Pri tem lahko pokažemo, da sta vztrajna in težka masa ekvivalentni [2], [5].

V jedrski fiziki je interferometer uporaben za merjenje koherentnih sipalnih dolžin, ki so povezane z lomnim kvocientom snovi. Osnovna zamisel je v tem, da namesto sipalnih presekov neposredno merimo fazno razliko, ki jo povzroči sipanje na tarči [3].

V fiziki trdne snovi je naprava uporabna za določevanje relativne gostote elementov ali izotopov v snoveh. Povprečna koherentna sipalna dolžina je namreč odvisna od deleža posameznih sestavin. Z interferometrom raziskujemo spreminjanje strukture pri faznih prehodih in nehomogenosti v različnih snoveh [3].

Osnovna problema interferometra sta velika izguba nevtronskega toka zaradi nemonoenergijskega vpadnega curka in izguba kontrasta interferenčne slike zaradi nedoločenosti valovne dolžine. Pri poskusih močno motijo vsakovrstni tresljaji naprave.

Z nevtronskim interferometrom bi bilo mogoče tudi preskusiti, ali Newtonov gravitacijski zakon ne velja natančno. O. Bertolami, *Testing the barion or hypercharge interaction with a neutron interferometer device*, Modern Physics Letters A **1** (1986) 383 (op. ur.).

LITERATURA

[1] D. M. Greenberger, *The neutron interferometer as a device for illustrating the strange behavior of quantum systems*, Rev. Mod. Phys. **55** (1983) 875.

[2] D. M. Greenberger, A. W. Overhauser, *Coherence effects in neutron diffraction and gravity experiments*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 43.

[3] U. Bonse, H. Rauch, *Neutron interferometry*, Oxford university Press, Oxford 1979.

[4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Kvantna mehanika*, Građevinska knjiga, Beograd 1966.

[5] D. M. Greenberger, A. W. Overhauser, *The role of gravity in quantum theory*, Scientific American **242** (1980) 66 (5).

VESTI

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE ISTAM 1987

Kot vsako leto, smo se tudi letos udeležili mednarodnega tekmovanja študentov matematike ISTAM 1987, ki je bilo od 3. do 6. aprila v Beogradu. Letos je bilo tekmovanje že dvajsetič, in zato ni čudno, da so se organizatorji še posebej potrudili. Tako jim je v primerjavi s prejšnjimi leti uspelo privabiti v Beograd precej tujih tekmovalcev. Poleg domačih se je tekmovanja udeležilo devet tujih ekip iz Bolgarije, Madžarske, Češkoslovaške in Poljske. Pohvaliti je treba tudi točno izvajanje programa, kar je bilo zadnja leta bolj izjema kot pa pravilo. Vsi tekmovalci in vodje ekip so dobili kartico častnega gosta mesta Beograd, ki je zagotavljala brezplačen prevoz z mestnimi avtobusi in tramvaji. Organizatorji so počitniški dom v Zvezdanom gradu, kjer smo bili nastanjeni dobro založili tudi s sokovi, pivom in vinom. To je skupaj z dejstvom, da smo bili nastanjeni precej daleč od centra mesta, povzročilo, da je ISTAM dosegel svoj cilj: biti ne samo tekmovanje, ampak tudi srečanje študentov matematike iz različnih okolij.

Poleg organizatorjev moramo na tem mestu ponovno pohvaliti naše tekmovalce. Ljubljano sta zastopali dve ekipi v sestavi: Aleksander Simonič, 4. letnik, Miran Černe, 4. letnik, Martin Juvan, 2. letnik, Jure Škarabot, 2. letnik, Roman Dernovšek, 1. letnik in Miloš Žafran, 1. letnik.

V kategoriji 3. in 4. letnikov je zmagal Igor Križ iz Prage s 75 točkami, drugi je bil Adam Strzebonski iz Krakova s 53 točkami in tretji Miran Černe z 51 točkami. Aleksander Simonič je bil v tej kategoriji drugi najbolje uvrščen Jugoslovan. V kategoriji 1. in 2. letnikov so se na prva tri mesta uvrstili Vasil Daskalov iz Sofije, 90 točk, Zoltan Szabo iz Budimpešte, 85 točk in Laszlo Erdos iz Budimpešte, 65 točk. V tej kategoriji je bil Martin Juvan drugi najbolje uvrščen Jugoslovan.

Oglejmo si še ekipni vrstni red. Na prvih petih mestih so bile tuje ekipe: Budimpešta, 195 točk, Praga 1, 185 točk, Sofija 1, 152 točk, Praga 2, 125 točk in Bratislava 1, 118 točk. Naša prva ekipa pa je dosegla najboljšo jugoslovansko uvrstitev s šestim mestom in 113 zbranimi točkami.

Naša tekmovalca Miran Černe in Aleksander Simonič sta si s svojim uspehom priborila mesto v jugoslovanski ekipi, ki se bo udeležila tekmovanja študentov matematike v Brnu.

Na koncu podajmo še pregled nalog. Pri tem je treba omeniti, da so tekmovalci v kategoriji prvih in drugih letnikov reševali iste naloge, tekmovalci iz višjih letnikov pa so izbirali po dve nalogi z dveh področij.

Naloge za prvi in drugi letnik

Naj bo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ nepadajoča funkcija. Dokaži, da obstaja tako število $a \in (0,1)$, da velja

$$\int_a^x f(t)\,dt \geqslant (x-a)\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \text{za vsak } x \in [0,1]$$

2. Zaporedje (a_n) je definirano s predpisom $a_0 = a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ za $n = 1, 2, \ldots$ Za katera realna števila x konvergira vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

3. Naj bo funkcija $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x) = x^t C x + p^t x$ ($C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{R}^n$, x^t je transponiran vektor k vektorju x), navzdol omejena na množici

$$K = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \right\}$$

Dokaži, da funkcija $F|_K: K \to \mathbb{R}$ doseže svoj minimum.

4. V realnem n-dimenzionalnem vektorskem prostoru V s skalarnim produktom $(\, , \,) : V \times V \to \mathbb{R}$ je dana množica $2n + 1$ različnih neničelnih vektorjev. Dokaži, da v tej množici obstajata 2 različna vektorja x in y z lastnostjo $(x, y) > 0$.

Realna analiza

1. Naj bo realna os opremljena z običajno Lebesgueovo mero in $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija s periodo 1. Z M označimo bistveni supremum funkcije f. Dokaži, da velja $\limsup_{n \to \infty} f(n\,t) = M$ za skoraj vsak t iz $\mathbb{R}$.

2. Naj bo (a_n) konvergentno zaporedje realnih števil in $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna v Riemannovem smislu. Izračunaj:

$$\lim_{t \uparrow 1} (1 - t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n f(t^n)$$

Funkcionalna analiza

1. Naj bosta E in F zaprta podprostora Banachovega prostora X. Predpostavimo, da obstaja družina $\tau \subseteq B(X)$ z lastnostmi:

(a) $(\exists M > 0)\,(\forall T \subseteq \tau)\ \|T\| \leqq M$,

(b) $(\forall T \in \tau)\ T X \subseteq E$,

(c) $(\forall T \in \tau)\ T F \subseteq F$,

(d) $(\forall u \in E)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists T \in \tau)\ \|T u - u\| < \varepsilon$

Dokaži, da je $E + F$ zaprt podprostor v X.

2. Naj bodo A, B, $K \in B(X)$ omejeni operatorji, kjer je X Banachov prostor. Predpostavimo še, da je K kompakten in da obstaja polinom p z lastnostjo

$$p(A)\,K - K\,p(A) = B$$

Dokaži, da potem obstaja tak kompakten operator $C \in B(X)$, da velja

$$A\,C - C\,A = B$$

Algebra

1. Naj bo A Abelova grupa, v kateri ima vsak element končen red. Predpostavimo, da ima sistem enačb:

$$\begin{aligned} m_{11} x_1 + \ldots + m_{1n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ m_{n1} x_1 + \ldots + m_{nn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

za naravna števila m_{ij} samo trivialno rešitev: $x_1 = \ldots = x_n = 0$ v grupi A. Dokaži, da ima za vsak nabor elementov $a_1, \ldots, a_n$ iz A sistem

$$m_{11} x_1 + \ldots + m_{1n} x_n = a_1$$
$$\vdots$$
$$m_{n1} x_1 + \ldots + m_{nn} x_n = a_n$$

rešitev v A.

2. (a) Naj bo G grupa in $\mathrm{Hom}(G, S_n)$ množica vseh homomorfizmov grupe G v simetrično grupo S_n. Dokaži:

$$|\{H \leqslant G : |G{:}H| = n\}|^{-n} \leqslant |\mathrm{Hom}(G, S_n)|$$

(b) Naj bo G končno generirana grupa in H njena podgrupa končnega indeksa. Dokaži, da obstaja taka podgrupa K grupe H, da je indeks $|G{:}K|$ končen in da je $\alpha(K) = K$ za vsak avtomorfizem α grupe G.

Programiranje

1. Binarni semafor je skupna spremenljivka paralelnih procesov, s katero dosežemo vzajemno izključevanje procesov pri uporabi skupnih resorjev. Dovoljene operacije nad semaforjem S so: — inicializacija semaforja (S: = = začetna vrednost)

— $P(S)$: **if** $S = 1$
  then S: $= 0$
  else BLOKIRATI proces (na semaforju S), ki opravlja operacijo P;
    RAZPOREDITI neki pripravljen proces za opravljanje
— $V(S)$: **if** obstajajo procesi, ki čakajo blokirani na S
  then aktivirati enega od teh procesov
  else S: $= 1$

Semafor štetja S je skupna spremenljivka paralelnih procesov, s katero se doseže sinhronizacija v delu paralelnih procesov. Poleg inicializacije semaforja S se za semafor štetja definirajo še operacije:

— $P(S)$: **if** $S > 0$
  then S: $= S - 1$
  else BLOKIRATI proces (na semaforju S), ki opravlja operacijo P;
    RAZPOREDITI neki pripravljen proces za opravljanje
— $V(S)$: **if** obstajajo procesi, ki čakajo blokirani na S
  then aktivirati enega od teh procesov
  else S: $= S + 1$

S pomočjo binarnih semaforjev in semaforjev štetja reši nalogo: Neka železniška linija ima ŠT_POSTAJ postaj. Vlak lahko sprejme ŠT_POTNIKOV potnikov. Vlaki potujejo od enega konca linije do drugega in nazaj, in sicer neprestano. Predpostavi, da je več vlakov in potnikov. V danem trenutku je lahko na eni postaji samo en vlak. Med postajami pa se vlaki lahko srečujejo in prehitevajo. Napiši programsko proceduro PREPELJATI_SE (od_postaje, do_postaje), ki jo lahko pokliče proces prevažanja potnikov za prevoz od ene postaje do druge. Poleg tega napiši proceduro VLAK, ki se izvaja neskončno na poti od enega konca linije do drugega in nazaj. Definiraj in inicializiraj semaforje in druge podatke, ki so potrebni procesom, ki kličejo te procedure, ter samim proceduram (lokalne spremenljivke in globalne — skupne semaforje).

2. Dano je zaporedje n elementov in naravni števili k in m, ki sta manjši od n. Napiši program, ki v danem zaporedju izbira k disjunktnih podzaporedij z največ m elementi na tak način, da je njihova vsota maksimalna.

Diferencialne enačbe

1. Naj bo $f(t, y)$ zvezna funkcija na območju $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$, $|y - y_0| \leqslant \leqslant b$, $a > 0$, $b > 0$. Imejmo y in f za evklidske vektorje (to pomeni, da je $y \equiv y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))$, $f(t, y) = (f_1(t, y), \ldots, f_m(t, y))$, $m \in \mathbb{N}$) in predpostavimo, da velja

$$(f(t, y_2) - f(t, y_1)) \circ (y_2 - y_1) \leqslant (t - t_0)^{-1} \|y_2 - y_1\|^2,$$
$$t_0 < t \leqslant t_0 + a, \ |y - y_0| \leqslant b$$

kjer smo s simbolom $\circ$ označili skalarni produkt. Dokaži, da ima tedaj Cauchyeva naloga

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

na vsakem intervalu $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ največ eno rešitev.

2. Naj bo $u_\lambda(x) \in L_2(G)$, $G = (a, b) \subset \mathbb{R}$, realna funkcija, ki je skupaj s svojim prvim odvodom absolutno zvezna na vsakem zaprtem intervalu $K \subset G$. Naj ta funkcija zadošča diferencialni enačbi

$$-u'_\lambda{}'(x) + q(x)u_\lambda(x) = \lambda\, u_\lambda(x), \lambda \geqslant 1$$

skoraj povsod na G, pri čemer velja $q(x) \in L_1(G)$. Privzemimo, da ima družina $\{u_\lambda(x) : \lambda \geqslant 1\}$ naslednje lastnosti:

a) Obstaja taka konstanta $C(q, G) > 0$, da je

$$(\forall\, \lambda) \sup_{X \in G} |u_\lambda(x)| \leqslant C(q, G)\, \|u_\lambda\|_{L_2(G)}$$

b) Za vsak zaprt interval $K \subset G$ obstaja konstanta $C_1(q, K) > 0$ ($K = [c, d]$) z lastnostjo

$$(\forall\, \lambda) \max_{X \in K} |\, u'_\lambda(x)\, | \leqslant C_1(q, K) \sqrt{\lambda}\, \|u_\lambda\|_{L_2(K_R)}$$

kjer je $K_R = [c - R, d + R]$, $0 < R < \operatorname{dist}(K, \{a, b\})$

Dokaži, da obstaja $\sup_{X \in G} |u'_\lambda(x)|$ in da velja ocena

$$(\forall\, \lambda) \sup_{X \in G} |u'_\lambda(x)\, | \leqslant C_2(q, G) \sqrt{\lambda}\, \|u_\lambda\|_{L_2(G)}$$

za neko konstanto $C_2(q, G) > 0$. Pri tem so konstante $C(q, G)$, $C_1(q, K)$ in $C_2(q, G)$ odvisne samo od naznačenih objektov.

Kompleksna analiza

1. Naj bo (z_n) zaporedje v enotskem krogu $|z| < 1$. Če obstaja taka konstanta $0 < c < 1$, da je

(a) $1 - |z_{n+1}| \leqslant c(1 - |z_n|), n = 1, 2, \ldots$

potem velja

(b) $\inf_k \prod_{j=1}^{k-1} |\, (z_j - z_k)/(1 - \bar{z}_j z_k)| > 0$

Dokaži, da tudi iz (b) sledi (a), če velja $0 \leq z_1 < z_2 < \ldots < 1$.

2. Skonstruiraj zaporedji (f_n) in (g_n) celih funkcij z lastnostmi:

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$, za vsako kompleksno število z, vendar konvergenca ni enakomerna na vsaki kompaktni podmnožici kompleksne ravnine.

b) $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$, za vsako kompleksno število z, pri čemer ima funkcija g vsaj eno točko nezveznosti.

Verjetnost

1. Naj bodo $X(t)$, $t \geqslant 0$ in $Y(t)$, $t \geqslant 0$, stohastični procesi, definirani na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, pri čemer imajo $X(t)$ in $Y(t)$ porazdelitev $\mathscr{N}(0, t)$ za vsak $t \geqslant 0$. Naj bo Z slučajna spremenljivka s porazdelitvijo $\chi^2(1)$, ki je definirana na istem verjetnostnem prostoru. Naj bodo $\{X(.)\}$, $\{Y(.)\}$ in Z neodvisne slučajne spremenljivke. Naj bo $U = X(Z)$ (tj. $U(\omega) = X(Z(\omega))\,(\omega)$, $\omega \in \Omega$) in $V = Y(Z)$. Poišči porazdelitev za (U, V).

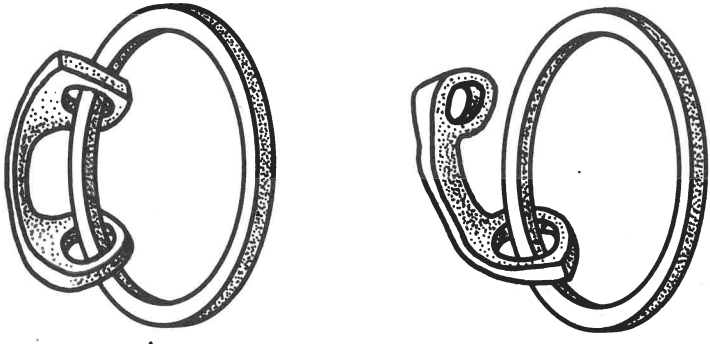
2. Dokaži ali ovrzi:

Če obstajata taki zaporedji (ε_n), $\varepsilon_n \geqslant 0$ in (η_n), $\eta_n \geqslant 0$, da je $\sum_n \varepsilon_n^2 < \infty$ in $\sum_n \eta_n^2 < \infty$ in če za vsako naravno število n velja $P(|X_{n+1} - X_n| > \eta_n) < \varepsilon_n$, potem obstaja $\lim_n X_n(\omega)$ za skoraj vsak ω.

Topologija

1. Naj bo $\mathscr{F}$ veriga zaprtih množic v prostoru s prvo lastnostjo števnosti. Dokaži, da je $\bigcup \{F : F \in \mathscr{F}\}$ F_σ-množica.

2. Ali obstaja izotopija, ki prevede množico A na množico B?



A B

Geometrija

1. Naj bo $\varepsilon(\mathscr{X}, X)$ nelinearen epicikel v absolutni ravnini S^2, definiran s pramenom premic $\mathscr{X}$ in poljubno točko X te ravnine. Naj bo J izometrična transformacija te ravnine, ki pušča epicikel ε invarianten. Dokaži, da je J ali refleksija $\mathscr{S}_p$ ali kompozicija $\mathscr{S}_q \circ \mathscr{S}_p$ dveh refleksij, kjer sta p in q premici iz $\mathscr{X}$.

2. Naj bo ω konveksna poliedrska površina in $B_1 B_2 \ldots B_m$ enostaven poligon na tej površini, ki površno separira na dve površini, od katerih eno označimo z λ. Dokaži, da je vsota notranjih kotov na robu površine λ enaka vsoti notranjih kotov enostavnega ravnega m-kotnika, povečani za vsoto defektov tistih rogljev površine ω, ki se nahajajo na površini λ.

Peter Šemrl

NOVE KNJIGE

Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media, Ed. J. L. Ericksen et al., Springer Verlag, Berlin 1986.

Ta knjiga predstavlja zbornik del iz programa Fizika kontinuuma in parcialne diferencialne enačbe (IMA, 1984—85), posvečenih metodi homogenizacije in določevanju efektivnih koeficientov sestavljenih materialov.

V okviru mehanike kontinuumov se zakon konstitucije kompozita izraža s hitro spremenljivimi koeficienti, zato diskretizacija ustreznih kontinuitetnih enačb nima pomena. Teorija homogenizacije proučuje asimptotično vedenje rešitve za majhne vrednosti strukturne periode materiala. Zakon konstitucije, ki mu zadošča asimptotična rešitev, se izraža z »efektivnimi« konstantnimi koeficienti, dobljenimi z reševanjem kanonskih robnih problemov na celici periodičnosti kompozita. Osnovni problemi te teorije so v določevanju in ocenjevanju asimptotskega razvoja in izračunavanju efektivnih koeficientov.

V knjigi je metoda homogenizacije uporabljena na nekaterih modelih, ki so za sodobno tehnologijo zelo pomembni. Iz vsebine: Posplošen model plošče in optimalno oblikovanje (M. P. Bendsøe), Efektivni dielektrični koeficient sestavljene snovi (D. J. Bergman), Variacijske ocene Darcyjeve konstante (J. G. Baryman), Mikromodeliranje rasti razpok in kolapsa (M. M. Caroll), O oceni efektivne vodljivosti anizotropnega kompozita (R. V. Kohn, M. Vogelius), Modeliranje lastnosti kompozita s sloji (G. W. Milton), Valovi v mehurjasti tekočini (R. Coflisch, M. Miksis, G. Papanicolaou, L. Ting), Nekateri primeri nabora (A. C. Pipkin), Mikrostrukture in fizikalne lastnosti kompozita (Ping Sheng), Opombe o homogenizaciji (L. Tartar), Variacijske ocene za skupno vedenje nehomogenega nelinearnega dielektrika (J. R. Willis).

Ibrahim Aganović

KLAMBAUER G., Aspects of Calculus, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag 1986.

Naslov te na prvi pogled neambiciozne knjige dobro označuje njeno vsebino. Avtor se namreč osredotoči le na nekaj izbranih tem iz infinitezimalnega računa, kot so eksponentna in logaritemska funkcija, zveznost in limita, uporaba odvoda, nekatere integracijske metode in kriteriji za konvergenco vrst. Te teme na elementarnem nivoju, dostopnem študentu prvega letnika matematike ali tehnike, temeljito in rigorozno obdela. Omejitev po vsebinski plati mu omogoči, da pove marsikaj zanimivega, kar mora sicer pri standardnih tečajih odpasti. Tako npr. dokaže zveznost konveksne funkcije na odprtem intervalu, obravnava tangente na splošne algebraične krivulje, obdela nekatere numerične metode za reševanje nelinearnih enačb in za integriranje, pri integralih izpelje Youngovo neenakost, pri vrstah Wallisovo in Stirlingovo formulo itd.

Kot rečeno, je knjiga pisana elementarno in se ogiba abstrakciji. Glavni poudarek je na posrečeno izbranih in skrbno izdelanih primerih. Naloge, ki

so bodisi v celoti rešene bodisi opremljene vsaj z napotki za reševanje, je treba še posebej pohvaliti. Večinoma so netrivialne in nestandardne, zanimive s teoretičnega ali uporabnega stališča, nekatere pa zgolj zaradi kakšnega posebnega prijema pri reševanju. Avtor je v njih zbral mnogo takega, do česar se človek dokoplje npr. šele z večletnimi izkušnjami pri pripravljanju vaj iz analize.

Zaradi navedenih lastnosti knjige ne moremo šteti ne za učbenik infinitezimalnega računa (za to je po eni strani premalo izčrpna, po drugi pa prenatrpana s primeri) ne za učbenik analize (za to vsebuje premalo teorije). Kot pravi v uvodu sam avtor, je namenjena študentom, ki obvladajo osnovne spretnosti računanja s funkcijami, odvodi in integrali in bi radi začeli z resnejšim in rigoroznejšim študijem analize; predstavlja torej nekakšno prvo stopničko na poti v analizo. Morda si bo bralec kasneje zaželel vzeti v roke tudi delo istega avtorja Problems and propositions in analysis (Lecture notes in pure and applied mathematics 49, Marcel Dekker, New York 1979), ki dopolnjuje in bistveno razširja snov obravnavane knjige.

Milan Hladnik

OBVESTILO O 12. SEMINARJU IZ MATEMATIKE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov organizira, tako kot vsako leto, v sodelovanju z Zavodom za šolstvo seminar za svoje člane, učitelje na srednjih šolah. Tokrat je na vrsti tema:

DIFERENCIALNE ENAČBE

Predavanja bodo v petek, 12., in soboto, 13. februarja 1988 v prostorih VTO Matematika in mehanika na Jadranski 21/II.

12. februarja

9,00 *J. A. Čibej*: Diferencialne enačbe v družbenih znanostih

11,00 *F. Križanič*: Simetrija

16,00 *J. Vrabec*: Kako obesiti sliko

18,30 Večerja z družabnim večerom

13. februarja

9,00 *F. Križanič*: Kaos

11,00 *G. Tomšič*: Uporaba diferencialnih enačb v elektrotehniki

Seveda bomo v začetku januarja razposlali vabila še po šolah.

Udeležence seminarja prosimo, da kotizacijo 12.000.— din nakažejo na žiro račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS št. 50101-678-49168, ali pa da jo plačajo ob začetku seminarja.

Milena Strnad in Peter Petek