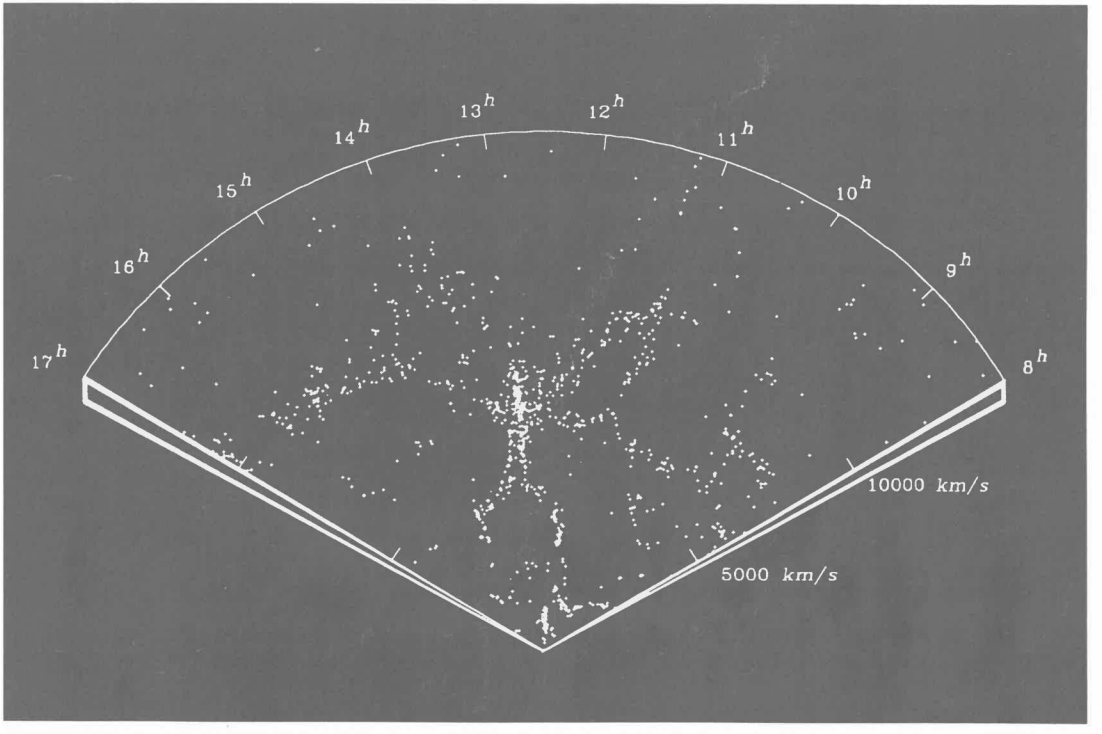
ODPISANO

ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

U ISSN 0473-7466

1987
Letnik 34
4/5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 34 — ŠTEVILKA 4/5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JUNIJ 1987

Uredniški odbor: Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Milan Hladnik — urednik za matematiko, Anton Suhadolc — glavni urednik, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 3000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 1500.— din, za ustanove in podjetja 6000.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 1000.— din, dvojna številka 2000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1550 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1987 DMFA SRS — 862 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str. — Page

Članki — Articles

Problem invariantnih podprostorov — The invariant subspace problem (Bojan Magajna) . . . . . 97—112

Gravitacijski zakon je star tristo let — Ali še velja? — The gravitational law is 300 years old — Is it still valid? (Janez Strnad) . . . . . 115—123

O Brewstrovem zakonu — On Brewster's law (Peter Gosar) . . . . . 125—127

Merjenje in krmiljenje fizikalnih procesov z mikroračunalnikom — Measurement and regulation of physical processes with a microcomputer (Slavko Kocjančič) . . . . . 129—132

Vztrajnostni moment homogene trikotne plošče — Moment of inertia of a triangular slab (Nada Razpet) . . . . . 133—134

Poletna šola opazovalne astronomije in astrofizike vatikanskega observatorija — Vatican observatory summer school in observational astronomy and astrophysics (Tomaž Zwitter) . . . . . 135—137

Fizikalna olimpiada v Veliki Britaniji — The physics olympiad in Great Britain (Bojan Golli) . . . . . 138—143

Rayleigh-Jeansov približek — The Rayleigh-Jeans approximation (Marijan Prosen) . . . . . 143—144

Domače vesti — Home news

Prešernove nagrade študentov matematike in fizike (Zbrala in uredila Maja Bleiweis in Ciril Velkovrh) . . . . . 145—146

Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1986 (Zbrala in uredila Maja Bleiweis in Ciril Velkovrh) . . . . . 147—149

Umrla častna člana društva: prof. A. Vadnal in prof. F. Dominko (France Križanič) . . . . . 150—151

Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v letu 1986 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) . . . . . 152—156

Novi člani DMFA SRS v letu 1986 (Ciril Velkovrh) 156

Visokošolska matematika v ZDA (Dušan Repovš) . . . . . 157—159

Utrinek Kako dosežete, da postane fizika samouničevalna? (Janez Strnad) 123

Nove knjige — New books

(Matjaž Omladič, Matjaž Poljšak, Anton Suhadolc, Janez Rakovec, Peter Gosar, Damjan Kobal, Matija Lokar) . . . . . 113, 114, 124, 127, 128, 160 III

Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1986 (Ciril Velkovrh) . . . III—IV

Na ovitku: Porazdelitev galaksij v tankem izseku nebesne krogle kaže na mehurčasto strukturo vesolja. Glej članek na str. 135.

PROBLEM INVARIANTNIH PODPROSTOROV

BOJAN MAGAJNA

Math. Subj. Class. (1985) 47 A 15.

Članek obravnava nekatere najosnovnejše in dostopnejše rezultate o invariantnih podprostorih operatorjev na Hilbertovem prostoru.

THE INVARIANT SUBSPACE PROBLEM

Some of the most fundamental results about invariant subspaces of Hilbert space operators are treated in this article.

1. Uvod

S pojmom linearnega operatorja se srečamo že v linearni algebri, kjer podrobno spoznamo strukturo operatorjev na končno razsežnih vektorskih prostorih. Ko izberemo bazo prostora, lahko predstavimo operatorje z matrikami, Za dani operator T, ki deluje na končno razsežnem vektorskem prostoru $\mathscr{H}$, je mogoče bazo prostora $\mathscr{H}$ izbrati tako, da pripada operatorju T matrika posebne oblike — Jordanova kanonična forma. Če poznamo njegovo Jordanovo kanonično formo, lahko odgovorimo na skoraj vsako zanimivo vprašanje o danem operatorju. Vemo na primer, da sta dva operatorja podobna natanko tedaj, ko imata enako Jordanovo kanonično matriko. Nadalje lahko iz kanonične forme hitro izračunamo funkcije operatorja itd. Skratka, poznati Jordanovo kanonično matriko danega operatorja pomeni poznati ta operator povsem zadovoljivo.

Tako v matematiki kot v njeni uporabi pa pogosto naletimo na operatorje, ki delujejo na neskončno razsežnih vektorskih prostorih. Ti prostori so največkrat normirani in polni, to je Banachovi. Od proučevanih operatorjev navadno zahtevamo, da so omejeni (= zvezni) ali vsaj, da imajo zaprte grafe. V končno razsežnih prostorih so vse te predpostavke vedno izpolnjene same od sebe. Struktura operatorjev na neskončno razsežnih prostorih je neprimerno bolj zapletena od strukture operatorjev na končno razsežnih prostorih. Za operatorje na neskončno razsežnih prostorih v splošnem ne obstaja noben kriterij, ki bi (podobno kot Jordanova kanonična forma v končno razsežnem primeru) povedal, kdaj sta dva operatorja podobna. Že osnovna ideja, ki tiči za Jordanovo formo, v neskončno razsežnih prostorih odpove. Da bi si to lahko podrobneje ogledali, ponovimo najprej nekaj osnovnih dejstev o spektru operatorjev.

Simbol $\mathscr{H}$ naj označuje kompleksen Hilbertov ali pa Banachov prostor, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ množico vseh omejenih linearnih operatorjev na njem, I pa identičen operator na $\mathscr{H}$. Za poljuben operator $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je spekter, $\sigma(T)$, definiran kot množica vseh tistih kompleksnih števil λ, za katere operator $T - \lambda I$ ni obrnljiv (bijektiven). Spekter je vedno neprazna kompaktna podmnožica kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. Za operator na končno razsežnem prostoru se spekter ujema z množico lastnih vrednosti in je torej končna množica. V nasprotju s tem pa je katerakoli kompaktna množica v ravnini lahko spekter omejenega operatorja na Hilbertovem neskončno razsežnem prostoru. V neskončno razsežnih prostorih tudi zelo pogosto srečamo operatorje, ki sploh nimajo lastnih

vrednosti in lastnih vektorjev. Primer takega operatorja na Hilbertovem prostoru $\mathscr{L}^2[0,1]$ je množenje z identično funkcijo $\chi(x) = x$ na intervalu $[0,1]$. Ta operator, ki ga bomo označevali kot M_χ, je torej definiran s predpisom $M_\chi f = \chi f$ za vsak $f \in \mathscr{L}^2[0,1]$. (Tukaj pomeni $\mathscr{L}^2[0,1]$ seveda prostor vseh s kvadratom integrabilnih funkcij glede na Lebesgueovo mero.) Operator M_χ je celo sebi-adjungiran, pa kljub temu nima lastnih vektorjev. Ker imajo lastni vektorji osnovno vlogo pri proučevanju operatorjev na končno razsežnih prostorih, vidimo, da teorija operatorjev na neskončno razsežnih prostorih ne more biti samo posplošitev linearne algebre.

Iz linearne algebre je pravzaprav že znana naslednja posplošitev pojma lastnega vektorja.

Definicija. Podprostor $\mathscr{L}$ prostora $\mathscr{H}$ je **invarianten za operator** $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, če je $T\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$ (torej $Tx \in \mathscr{L}$ za vsak $x \in \mathscr{L}$).

Cel prostor $\mathscr{H}$ in ničelni podprostor O sta očitno invariantna za vsak operator T. Imenujemo ju trivialna invariantna podprostora.

Med enorazsežnimi podprostori so invariantni za T natanko tisti, ki so generirani z lastnimi vektorji operatorja T. Domenimo se še, da v neskončno razsežnem primeru pomeni beseda **podprostor** vedno **zaprt podprostor.** Ko bomo mislili na ne nujno zaprte podprostore, bomo to vselej posebej povedali.

Ker na neskončno razsežnih prostorih obstajajo operatorji brez lastnih vektorjev, je smiselno in netrivialno naslednje vprašanje:

Ali za poljuben operator $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, kjer je $\mathscr{H}$ poljuben Banachov prostor, obstaja invarianten podprostor, različen od podprostorov O in $\mathscr{H}$?

To vprašanje je bilo dolgo eden glavnih nerešenih problemov operatorske teorije, čeprav so se z njim ukvarjali tudi nekateri najvidnejši matematiki. Leta 1975 je P. Enflo konstruiral Banachov prostor in omejen operator na njem, ki je brez netrivialnih invariantnih podprostorov. Žal pa je bila ta konstrukcija tako zapletena, da dolgo le redki matematiki niso dvomili o njeni pravilnosti. Deset let kasneje je B. Beauzamy poenostavil Enflojevo konstrukcijo in jo predstavil širši matematični javnosti [5]. Leto pred tem (1984) je nekoliko drugačen primer operatorja brez netrivialnih invariantnih podprostorov našel tudi C. J. Read v [11]. Tako kot Enflo in Beauzamy je tudi Read konstruiral istočasno Banachov prostor in operator na njem. Tudi njegov dokaz ni ravno zelo kratek, saj obsega približno 60 strani. Operator, katerega edina invariantna podprostora sta ves prostor in ničelni podprostor, imenujemo **tranzitiven operator.** Po Enfloju in Readu torej na nekaterih Banachovih prostorih obstajajo tranzitivni operatorji. V [12] je Read to trditev še nekoliko izboljšal: dokazal je obstoj tranzitivnih operatorjev na prostoru l^1. Še vedno pa ni znano, na katerih Banachovih prostorih lahko obstajajo tranzitivni operatorji. Ali na primer lahko obstajajo tranzitivni operatorji na separabilnih refleksivnih Banachovih prostorih? V tej zvezi povejmo, da na refleksivnih lokalno konveksnih linearnih topoloških prostorih tranzitivni operatorji obstajajo. Primer takega operatorja na nuklearnem Frechetovem prostoru je leta 1983 našel A. Atzmon v [3]. Problem eksistence tranzitivnih operatorjev celo za Hilbertov prostor ni rešen. Zaradi njegove pomembnosti formulirajmo ta problem še enkrat v celoti.

PROBLEM INVARIANTNIH PODPROSTOROV. Ali na separabilnem Hilbertovem prostoru obstaja za poljuben omejen linearen operator netrivialen invarianten podprostor?

Za neseparabilne prostore je problem trivialen. Naj bo namreč $\mathscr{H}$ neseparabilen Hilbertov prostor, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ in $x \in \mathscr{H}$ od 0 različen vektor. Označimo z $\mathscr{L}$ zaprtje linearne lupine množice $\{T^n x : n = 0, 1, 2..\}$. Potem je $\mathscr{L}$ očitno invarianten podprostor za T in ker je $\mathscr{H}$ neseparabilen prostor, je $\mathscr{L} \neq \mathscr{H}$.

Zakaj operatorski teoretiki posvečajo toliko časa problemu invariantnih podprostorov? Delen odgovor na to vprašanje je v upanju, da bi rešitev morda pokazala, v kateri smeri iskati splošno strukturno teorijo operatorjev na Hilbertovem prostoru. Več kot rešitev sama bi morda povedala pot do nje. V naslednjih razdelkih si bomo ogledali nekaj delnih rešitev problema invariantnih podprostorov.

Večkrat je ugodno namesto posameznih operatorjev proučevati operatorske algebre. Pri raziskovanju danega operatorja T ima pomembno vlogo algebra vseh operatorjev, ki komutirajo s T. To algebro imenujemo **komutant** operatorja T in označimo kot $(T)'$. Formalno je torej

$$(T)' = \{S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : S\,T = T\,S\}$$

Definicija. Podprostor $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$ je **invarianten za algebro** $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$, če je invarianten za vse operatorje iz $\mathscr{A}$. $\mathscr{L}$ je **hiperinvarianten za operator** T, če je invarianten za algebro $(T)'$.

Dejstvo, da je $\mathscr{L}$ invarianten podprostor za algebro $\mathscr{A}$, lahko simbolično zapišemo kot $\mathscr{A}\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$. Očitno je vsak hiperinvarianten podprostor za T tudi invarianten. Obratno pa ni nujno res. Če je na primer λ lastna vrednost operatorja T in x pripadajoči lastni vektor, potem x ni vedno lastni vektor za vse operatorje, ki komutirajo s T — torej enorazsežen podprostor, razpet na x, ni vedno hiperinvarianten za T.

Na končno razsežnem prostoru ima vsak neskalaren operator netrivialen hiperinvarianten podprostor. (Skalarne imenujemo operatorje oblike λI, $\lambda \in \mathbb{C}$, neskalarni so vsi drugi operatorji.) Za poljubno lastno vrednost λ je namreč jedro operatorja $T - \lambda I$ invarianten podprostor za vse operatorje, ki komutirajo s T. Na neskončno razsežnem separabilnem Hilbertovem prostoru je vprašanje eksistence hiperinvariantnih podprostorov seveda nerešeno. Pozitiven odgovor nanj bi bil obenem rešitev problema invariantnih podprostorov.

Vsaki podmožici spektra operatorja T, ki je hkrati odprta in zaprta v spektru, pripada tako imenovani spektralni projektor (glejte na primer [16]), ki komutira z vsemi operatorji iz $(T)'$. Njegova zaloga vrednosti je zato invarianten podprostor za $(T)'$, torej hiperinvarianten za operator T. Potemtakem ima vsak operator, katerega spekter ni povezan, netrivialen hiperinvarianten podprostor.

Množico vseh invariantnih podprostorov za operator T bomo označili z $Lat\,T$. Z relacijo inkluzije je $Lat\,T$ delno urejena množica; še več, $Lat\,T$ je mreža za operaciji $\mathscr{L}_1 \wedge \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ in $\mathscr{L}_1 \vee \mathscr{L}_2 = \overline{\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2}$.

Za vsako podalgebro $\mathscr{A}$ v $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, ki vsebuje identični operator I, in za vsak vektor $x \in \mathscr{H}$ je (ne nujno zaprt) podprostor $\mathscr{A}x = \{Ax : A \in \mathscr{A}\}$ invarianten za $\mathscr{A}$. Njegovo zaprtje, $\overline{\mathscr{A}x}$, je najmanjši za $\mathscr{A}$ invarianten zaprt podprostor, ki vsebuje x. Če je $\overline{\mathscr{A}x} = \mathscr{H}$, imenujemo vektor x **cikličen za algebro** $\mathscr{A}$. Vektor x imenujemo **cikličen za operator** T, če je cikličen za algebro, generirano s T in I, (to je algebra vseh operatorjev oblike $p(T)$, ko p teče po vseh kompleksnih polinomih). **Operator T je cikličen**, če obstaja kak cikličen vektor za T. Očitno je operator T tranzitiven natanko tedaj, ko je vsak neničeln vektor cikličen za T. Pri dokazovanju eksistence invariantnih podprostorov se smemo — brez izgube splošnosti — omejiti na ciklične operatorje.

2. Hiperinvariantni podprostori za kompaktne operatorje

Za začetek spomnimo bralca, da je po definiciji operator kompakten, če preslika poljubno omejeno množico v množico, katere zaprtje je kompaktno. Kompaktni operatorji se obnašajo bolj podobno operatorjem na končno razsežnih prostorih kot pa splošni omejeni linearni operatorji. Tako je na primer vsaka neničelna točka spektra kompaktnega operatorja lastna vrednost. Vsak operator končnega ranga (tj. s končno razsežno zalogo vrednosti) je kompakten in na Hilbertovem prostoru se množica kompaktnih operatorjev ujema z zaprtjem množice vseh operatorjev končnega ranga [13, str. 58].

Eksistenco invariantnih podprostorov za kompaktne operatorje so neodvisno drug od drugega dokazali von Neumann ter Aronszajn in Smith že pred več kot 30 leti. Šele 12 let kasneje je uspelo Bernsteinu in Robinsonu posplošiti ta rezultat na polinomsko kompaktne operatorje. (Operator T imenujemo polinomsko kompakten, če je za kak neničelni polinom p operator $p(T)$ kompakten.) Njun dokaz je uporabljal nestandardno analizo, kar je pri mnogih matematikih ustvarjalo nelagoden vtis skrivnostnosti; zato ga je P. R. Halmos takoj prevedel v običajni matematični jezik. Leta 1973 pa je Viktor Lomonosov odkril presenetljiv dokaz mnogo splošnejše trditve: vsak operator, ki komutira s kakim neničelnim kompaktnim operatorjem, ima netrivialen hiperinvarianten podprostor. Dokaz Lomonosova uporablja Schauderjev izrek o fiksni točki, ki spada v nelinearno analizo. Ker želimo v tem članku ostati pri najosnovnejših sredstvih linearne funkcionalne analize, dokaza ne bomo navedli. Navedli pa bomo presenetljivo enostaven Hildenov dokaz naslednjega, nekoliko šibkejšega izreka.

IZREK 1. Za vsak od 0 različen kompakten operator na Banachovem prostoru obstaja netrivialen hiperinvarianten podprostor.

Potrebovali bomo naslednje dejstvo: če je v spektru operatorja $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ samo točka 0, potem je $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$. V resnici je celo $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$, po formuli za spektralni radij. Kratek dokaz te znane formule je mogoče najti v skoraj vsakem učbeniku analize, na primer v [16, str. 36] ali v [14, str. 355].

Dokaz izreka 1. Naj bo $K \neq 0$ kompakten operator na Banachovem prostoru $\mathscr{H}$. Če ima K kako lastno vrednost λ, potem je ustrezni lastni podprostor $\mathscr{N}(K - \lambda I)$ hiperinvarianten za K. Zato denimo, da K nima nobene lastne vrednosti. Ker so vse neničelne točke spektra kompaktnega operatorja vedno lastne vrednosti, to med drugim pomeni, da je $\sigma(K) = \{0\}$. Nadalje lahko brez izgube splošnosti vzamemo, da je $\|K\| = 1$.

Izberimo tak vektor $x_0 \in \mathcal{H}$, da je $\|K x_0\| > 1$; potem je tudi $\|x_0\| > 1$ (ker je $\|K\| = 1$). Naj bo $\mathcal{U}$ odprta krogla s središčem x_0 in polmerom 1, torej $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{H} : \|x - x_0\| < 1\}$. Označimo z $\mathcal{A}$ komutant operatorja K. Privzemimo, da ne obstaja netrivialen invarianten podprostor za algebro $\mathcal{A}$. Pokazali bomo, da nas ta privzetek pripelje v protislovje.

Ker ne obstaja noben netrivialen invarianten podprostor za $\mathcal{A}$, je $\overline{\mathcal{A}z} = \mathcal{H}$ za vsak od nič različen vektor $z \in \mathcal{H}$. Množica $\mathcal{A}z$ je torej gosta v $\mathcal{H}$, kar med drugim pove, da je $\|A z - x_0\| < 1$ za vsaj en operator $A \in \mathcal{A}$, torej $A z \in \mathcal{U}$ oziroma $z \in A^{-1}(\mathcal{U})$. Od tod sledi

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{H} \setminus \{0\} \tag{1}$$

Ker je K kompakten operator, je $\overline{K(\mathcal{U})}$ kompaktna podmnožica prostora $\mathcal{H}$. Ker je $\|K\| = 1$, je $\|K x - K x_0\| < 1$ za vsak $x \in \mathcal{U}$; zato iz $\|K x_0\| > 1$ sledi $0 \notin \overline{K(\mathcal{U})}$. Iz (1) sedaj vidimo, da je družina množic $\{A^{-1}(\mathcal{U}) : A \in \mathcal{A}\}$ odprto pokritje kompaktne množice $\overline{K(\mathcal{U})}$. Izberimo končno podpokritje, torej operatorje $A_1, \ldots, A_n$ iz algebre $\mathcal{A}$, za katere je

$$\overline{K(\mathcal{U})} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{-1}(\mathcal{U}) \tag{2}$$

Naj bo $c = \max\{\|A_i\| : i = 1, \ldots, n\}$. Iz (2) sledi, da je $K x_0 \in A_{i_1}^{-1}(\mathcal{U})$ oziroma $A_{i_1} K x_0 \in \mathcal{U}$ za vsaj en $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$. Ker je potem $K A_{i_1} K x_0 \in K(\mathcal{U})$, mora (prav tako zaradi (2)) obstajati tak i_2, da je $A_{i_2} K A_{i_1} K x_0 \in \mathcal{U}$. Ko ponovimo ta postopek m-krat (kjer je m poljubno naravno število), dobimo

$$A_{i_m} K \ \ldots \ A_{i_1} K x_0 \in \mathcal{U}$$

Ker vsi operatorji A_i komutirajo s K, sledi od tod

$$x_m \overset{\text{def.}}{=} (c^{-1} A_{i_m} \ \ldots \ c^{-1} A_{i_2} c^{-1} A_{i_1}) (c K)^m x_0 \in \mathcal{U} \tag{3}$$

Ker je $\sigma(K) = \{0\}$, je seveda tudi $\sigma(c K) = \{0\}$ in zato $\lim_{m \to \infty} \|(c K)^m\| = 0$. Po izbiri števila c so norme operatorjev $c^{-1} A_{i_s}$ v prvem oklepaju v (3) manjše ali enake 1, zato ima tudi produkt normo $\leqq 1$. Torej konvergirajo vektorji x_m proti 0, ko gre m proti ∞. Toda to je protislovje, saj je $\|x_m - x_0\| < 1$ po (3) in $\|x_0\| > 1$. ///

Zaradi splošnosti izreka Lomonosova in enostavnosti njegovega dokaza se morda zdi dotedanji trud drugih matematikov v zvezi z invariantnimi prostori kompaktnih operatorjev odveč, vendar ni tako. Od metod obravnavanja problema pred Lomonosovom je namreč ostal živ koncept kvazitrikotnih operatorjev, ki je vodil do pomembnega napredka v operatorski teoriji in teoriji operatorskih algeber. Nekaj besed o kvazitrikotnih operatorjih bomo povedali v zadnjem razdelku.

Kako lahko izrek o eksistenci invariantnih podprostorov pomaga pri proučevanju kompaktnih operatorjev na Hilbertovih prostorih? Izrek vodi do predstavitve kompaktnih operatorjev, ki je analogna zgornje trikotni predstavitvi operatorjev na končno razsežnih prostorih. Z uporabo Zornove leme lahko dokažemo, da obstaja maksimalna veriga (= linearno urejena podmnožica) v mreži invariantnih podprostorov za poljuben kompakten operator

K. Naj bo $\mathcal{F}$ ena taka veriga in za vsak $\mathcal{M} \in \mathcal{F}$ označimo z $\mathcal{M}_-$ zaprtje unije vseh tistih elementov verige $\mathcal{F}$, ki so pravi podprostori v $\mathcal{M}$. (Za $\mathcal{M} = 0$ naj bo $\mathcal{M}_- = 0$.) Če je $\mathcal{F}$ maksimalna veriga, ni težko videti, da je $\dim(\mathcal{M} \ominus \ominus \mathcal{M}_-) \leqq 1$ za vsak $\mathcal{M} \in \mathcal{F}$. ($\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_-$ pomeni ortogonalni komplement podprostora $\mathcal{M}_-$ v prostoru $\mathcal{M}$.) Kar predpostavimo nasprotno, da je $\dim(\mathcal{M} \ominus \ominus \mathcal{M}_-) > 1$. Naj bo P ortogonalni projektor na $\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_-$. Ker je operator $PK|(\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_-)$ kompakten, ima netrivialen invarianten podprostor $\mathcal{N}$. Toda potem ni težko videti, da je podprostor $\mathcal{M}_- \oplus \mathcal{N}$ invarianten za K. Tedaj pa je $\mathcal{F} \cup \{\mathcal{M}_- \oplus \mathcal{N}\}$ veriga invariantnih podprostorov za K, ki je večja od verige $\mathcal{F}$, kar pa nasprotuje maksimalnosti verige $\mathcal{F}$.

Definirajmo sedaj tako imenovane diagonalne koeficiente $\alpha_{\mathcal{M}}$ kompaktnega operatorja K glede na maksimalno verigo $\mathcal{F}$ invariantnih podprostorov. Za vsak $\mathcal{M} \in \mathcal{F}$ sta samo dve možnosti: 1. Če je $\dim(\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_-) = 0$, je $\mathcal{M} = \mathcal{M}_-$ in tedaj postavimo $\alpha_{\mathcal{M}} = 0$. 2. Če je $\dim(\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_-) = 1$, potem je $PKP = \alpha P$ za primeren $\alpha \in \mathbb{C}$, kjer je P projektor na $\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_-$; tedaj postavimo $\alpha_{\mathcal{M}} = \alpha$. Množico $\{\alpha_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \in \mathcal{F}\}$ imenujemo množica diagonalnih koeficientov kompaktnega operatorja K glede na verigo $\mathcal{F}$. Da se dokazati, da je spekter $\sigma(K)$ enak uniji množice diagonalnih koeficientov in singeltona $\{0\}$ (za neskončno razsežen prostor). Na končno razsežnih prostorih se ta trditev prevede na znano dejstvo, da se spekter zgornje trikotne matrike ujema z množico diagonalnih elementov. Več o zgornje trikotni reprezentaciji kompaktnih operatorjev in njeni uporabi lahko poišče bralec v [13].

Oglejmo si še primer kompaktnega operatorja s povsem znano mrežo invariantnih podprostorov. **Volterrov operator** na prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2[0,1]$ je definiran s predpisom

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \quad f \in \mathcal{H}$$

Volterrov operator je kompakten (celo Hilbert-Schmidtov) in 0 je edina točka njegovega spektra [7]. Tukaj nas zanimajo le njegovi invariantni podprostori. Za vsak $\alpha \in [0,1]$ naj bo $\mathcal{H}_\alpha = \{f \in \mathcal{H} : f = 0$ skoraj povsod na $[0,\alpha]\}$. Očitno je $\mathcal{H}_\alpha$ invarianten podprostor za V. Mnogo težje pa je dokazati obratno trditev, da so vsi invariantni podprostori Volterrovega operatorja take oblike [10, str. 68]. Mreža *Lat V* je torej izomorfna intervalu $[0,1]$ za relacijo $\geq$.

3. Subnormalni operatorji

Med operatorji na končno razsežnih prostorih imajo normalni posebno enostavno strukturo: v izbranih ortonormiranih bazah se dajo predstaviti z diagonalnimi matrikami. (Operator N imenujemo normalen, če komutira z adjungiranim operatorjem, torej $N^*N = NN^*$.) Struktura normalnih operatorjev na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru ni tako enostavna. Na neskončno razsežnem prostoru ne obstaja za vsak normalen operator poln ortonormiran sistem lastnih vektorjev, saj vemo, da obstajajo celo sebi-adjungirani operatorji brez lastnih vektorjev. Kako lahko ugotovimo, ali ima vsak normalen operator netrivialen invarianten podprostor? Odgovor pove tako imenovani spektralni izrek, ki je analogija diagonalizacije na končno razsežnih prostorih. Naj bo μ končna pozitivna mera definirana na neki sigma

algebri podmnožic dane množice Ω. Za vsako omejeno merljivo kompleksno funkcijo φ na Ω lahko definiramo na prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$ operator množenja s φ, to je M_φ, s predpisom

$$M_\varphi f = \varphi f, \quad f \in \mathscr{L}^2(\mu)$$

Z lahkoto se prepričamo, da je M_φ normalen operator. Spektralni izrek pove, da je vsak normalen operator v bistvu take oblike.

IZREK 2. **(Spektralni izrek.)** Za poljuben normalen operator N na separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathscr{H}$ obstaja množica Ω, sigma algebra, pozitivna končna mera μ na njej in taka omejena merljiva funkcija $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, da je N unitarno ekvivalenten operatorju M_φ na prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$. (To pomeni, da obstaja unitaren operator $U : \mathscr{L}^2(\mu) \to \mathscr{H}$, ki zadošča pogoju $M_\varphi = U^{-1} N U$).

Za normalne operatorje na končno razsežnih prostorih je spektralni izrek takojšnja posledica diagonalizacije. Naj bo namreč N normalen operator na n-razsežnem prostoru $\mathscr{H}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, kjer štejemo vsako v skladu z večkratnostjo. Naj bo μ mera na množici $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, ki šteje točke, torej $\mu(\{j\}) = 1$ za vsak $j \in \Omega$, funkcija $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ pa naj bo definirana z $\varphi(j) = \lambda_j$. Prostor $\mathscr{L}^2(\mu)$ je tedaj enak množici vseh funkcij iz Ω v $\mathbb{C}$. Normalna operatorja N in M_φ sta unitarno ekvivalentna, ker ju lahko v ortonormiranih bazah predstavimo z isto diagonalno matriko.

Spektralni izrek v taki ali drugačni obliki je ponavadi vključen v osnovne tečaje funkcionalne analize. Tukaj ga ne bodo dokazovali, dokaz je na primer v [10]. Zveza med normalnim operatorjem N in množico Ω v izreku ni posebno naravna (in je niti ne potrebujemo), razen v primeru, ko je N *-cikličen operator. Normalen operator N imenujemo *-cikličen, če je za kak vektor $x \in \mathscr{H}$ (ne nujno zaprt) podprostor $P_x = \{p(N, N^*)\, x\colon\ p$ poljuben kompleksen polinom dve spremenljivk$\}$ gost v $\mathscr{H}$. Vsak cikličen normalen operator je očitno *-cikličen. (Velja tudi obratno, kar pa je mnogo težje dokazati [6].) Za *-cikličen normalen operator N je v spektralnem izreku množica Ω kar spekter $\sigma(N)$, mero μ dobimo s pomočjo Rieszovega izreka o reprezentaciji funkcionalov, funkcija φ pa je kar identična funkcija χ na $\sigma(N)$ $(\chi(z) = z)$. Unitaren operator $U : \mathscr{L}^2(\mu) \to \mathscr{H}$, ki posreduje ekvivalenco med operatorjema M_φ in N, je na gostem podprostoru vseh polinomov dveh spremenljivk v $\mathscr{L}^2(\mu)$ definiran s predpisom $Up = p(N, N^*)\, x$ (kjer smo vzeli, da je $\|x\| = 1$).

Sedaj je lahko dokazati obstoj invariantnih prostorov za normalne operatorje. Po spektralnem izreku zadošča obravnavati operatorje množenja. Naj bo torej $N = M_\varphi$ operator množenja na prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$, kjer je μ mera na Ω in dim $\mathscr{L}^2(\mu) > 1$. Potem obstaja taka merljiva podmnožica v Ω, da njena karakteristična funkcija τ ni skoraj povsod enaka niti 1 niti 0. (Če taka funkcija ne bi obstajala, bi iz dejstva, da so linearne kombinacije karakterističnih funkcj goste v $\mathscr{L}^2(\mu)$, sledilo dim $\mathscr{L}^2(\mu) = 1$.) Označimo $\tau \,.\, \mathscr{L}^2(\mu) = \{\tau \,.\, f : f \in \mathscr{L}^2(\mu)\}$. V $\tau \,.\, \mathscr{L}^2(\mu)$ so natanko tiste funkcije iz $\mathscr{L}^2(\mu)$, ki so enake 0 (skoraj) povsod, kjer je funkcija τ enaka 0. Očitno je $\tau \,.\, \mathscr{L}^2(\mu)$ invarianten podprostor za operator M_φ. Na ta način pa ne dobimo vseh možnih invariantnih podprostorov normalnih operatorjev. Podprostor $\tau \,.\, \mathscr{L}^2(\mu)$ ima namreč dodatno lastnost, da je tudi njegov orogonalni komplement, to je $(1 - \tau) \,.\, \mathscr{L}^2(\mu)$, invarianten za operator $N = M_\varphi$. Kasneje bomo videli, da te lastnosti nimajo vsi invariantni podprostori normalnih operatorjev.

Definicija. Podprostor $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je **reducirajoč za operator** $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, če sta $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}^\perp$ invariantna podprostora za T. (Ekvivalentno, $\mathcal{M}$ je invarianten za T in za T^*.)

Ni težko videti, da je na končno razsežnem prostoru vsak invarianten podprostor za normalen operator že reducirajoč. (Dokaz prepuščamo za vajo iz linearne algebre. Med drugim je treba uporabiti dejstvo, da je vsak lastni vektor normalnega operatorja N lasten tudi za N^*.) Normalni operatorji na neskončno razsežnih prostorih se tudi v tem pogledu obnašajo drugače.

Primer. Naj bo U operator na Hilbertovem prostoru

$$\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}) = \{..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...) : x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} |x_j|^2 \infty\}$$

definiran s predpisom

$$U(..., x_{-1}, \overset{\downarrow}{x_0}, x_1, ...) = (.. x_{-2}, \overset{\downarrow}{x_{-1}}, x_0, ..)$$

(Tukaj označuje puščica ničelni položaj.) Operator U imenujemo **dvostranski premik** v desno. Njegov adjungirani operator U^* je premik v levo, kar preverimo lahko z neposrednim računom. Operator U je unitaren ($U^* U = U U^* = I$), torej tudi normalen. Hilbertov prostor $l^2 = l^2(\mathbb{N})$ lahko imamo za podprostor v $l^2(\mathbb{Z})$ na naraven način. Očitno je l^2 invarianten podprostor za U, njegov ortogonalni komplement $l^2(\mathbb{Z}^-)$ pa ne. Zožitev operatorja U na podprostor l^2 imenujemo **enostranski premik** v desno ali kar premik. Označimo ga z S. Adjungirani operator S^* je premik v levo na prostoru l^2 (pri tem prva koordinata x_0 izgine, S^* ima netrivialno jedro). Opazimo, da S ni normalen operator ($S^* S = I \neq S S^*$).

Naslednja trditev bo med invariantnimi podprostori normalnih operatorjev karakterizirala reducirajoče. V jenem dokazu bomo potrebovali, da je operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normalen natanko tedaj, ko je $\|N^* x\| = \|N x\|$ za vsak $x \in \mathcal{H}$. Dokaz: enakost $N N^* = N^* N$ velja natanko tedaj, ko za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja $\langle N N^* x, x\rangle = \langle N^* N x, x\rangle$ oziroma $\|N^* x\|^2 = \|N x\|^2$.

TRDITEV 1. Invarianten podprostor $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ je reducirajoč za normalen operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ natanko tedaj, ko je zožitev $N|\mathcal{M}$ normalen operator.

Dokaz. Naj bo P ortogonalni projektor na podprostor $\mathcal{M}$. Neposredno iz definicije adjungiranega operatorja lahko zaključimo, da je $(N|\mathcal{M})^* = P N^*|\mathcal{M}$. Torej je operator $N|\mathcal{M}$ normalen natanko takrat, ko za vsak $x \in \mathcal{M}$ velja $\|P N^* x\| = \|N x\|$ oziroma (ker je $\|N x\| = \|N^* x\|$ zaradi normalnosti operatorja N) $\|P N^* x\| = \|N^* x\|$. Zadnja enakost pa pove, da je $N^* x \in P\mathcal{H} = \mathcal{M}$, torej, da je $\mathcal{M}$ invarianten podprostor za N^*. Ker je v splošnem $\mathcal{M}$ invarianten za N^* natanko tedaj, ko je $\mathcal{M}^\perp$ invarianten za N, je trditev dokazana. ///

Definicija. Operator $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je **subnormalen**, če obstaja Hilbertov prostor $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ in tak normalen operator $N \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, da je $S = N|\mathcal{H}$. Pri tem pravimo operatorju N normalna razširitev operatorja S.

Subnormalen operator je torej zožitev normalnega operatorja na kak invarianten podprostor. Vsak normalen operator je subnormalen, operator premika pa je primer subnormalnega operatorja, ki ni normalen. Na končno razsežnih prostorih se pojma normalnega in subnormalnega operatorja ujemata.

Samo po sebi se nam sedaj ponuja vpašanje o eksistenci invariantnih prostorov za subnormalne operatorje. Kot že vemo, se smemo pri tem omejiti na ciklične operatorje. Za začetek si oglejmo kanonične modele takih operatorjev. Naj bo $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cikličen subnormalen operator, $x \in \mathcal{H}$ pripadajoči ciklični vektor z normo 1 in N normalna razširitev za S na prostoru $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$. Naj bo $\mathcal{N}$ najmanjši podprostor v prostoru $\mathcal{K}$, ki vsebuje $\mathcal{H}$ in je invarianten za N^*. $\mathcal{N}$ je tedaj zaprtje linearne lupine množice $\{N^{*n}x\colon x \in \mathcal{H}, n = 0, 1, 2, ..\}$. Ker je x cikličen vektor za $S = N|\mathcal{H}$, je $\mathcal{N}$ hkrati zaprtje linearne lupine množice $\{N^{*n}N^m x\colon n, m = 0, 1, 2, ..\}$. Očitno je podprostor $\mathcal{N}$ invarianten za N in za N^*, torej reducira N. Po trditvi 1 je zato zožitev $N_1 = N|\mathcal{N}$ normalen operator. Ker $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{H}$, je N_1 normalna razširitev operatorja S. Za operator N_1 je vektor x očitno *-cikličen. Tako smo spoznali, da ima vsak cikličen subormalen operator *-ciklično normalno razširitev.

Poenostavimo sedaj oznake, tako da je S cikličen subnormalen operator s cikličnim enotskim vektorjem x na prostoru $\mathcal{H}$, N pa njegova *-ciklična normalna razširitev na prostoru $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$. Po komentarju k spektralnemu izreku je N unitarno ekvivalenten operatorju množenja M_χ na prostoru $\mathcal{L}^2(\mu)$, kjer je μ pozitivna mera na $\sigma(N)$, χ pa identična funkcija. Unitaren operator $U : L^2(\mu) \to \mathcal{H}$, ki pri tem posreduje ekvivalenco, preslika poljuben polinom p dveh konjugiranih spremenljivk z in $\bar{z}$ v vektor $p(N, N^*)\, x$. Če je polinom p odvisen samo od spremeljivke z (torej, če je holomorfen), ga U preslika v vektor oblike $p(N)\, x$. Naj bo $\mathcal{P}^2(\mu)$ zaprtje množice vseh holomorfnih polinomov v $\mathcal{L}^2(\mu)$. Označimo z S_χ zožitev operatorja M_χ na $\mathcal{P}^2(\mu)$. Ker je množica vseh vektorjev oblike $p(N)\, x$, ko p teče po holomorfnih polinomih, gosta v $\mathcal{H}$ (saj je x cikličen vektor za S), preslika unitaren operator U podprostor $\mathcal{P}^2(\mu)$ izometrično na $\mathcal{H}$. Zožitev $V = U|\mathcal{P}^2(\mu)$ je zato unitaren operator iz $\mathcal{P}^2(\mu)$ na $\mathcal{H}$. Iz dejstva, da posreduje U ekvivalenco med M_χ in N, torej iz $U M_\chi = N U$, sledi $V S_\chi = S V$ oziroma $S = V S_\chi V^{-1}$. Tako smo prispeli do naslednje trditve.

TRDITEV 2. Za vsak cikličen subnormalen operator S obstaja taka pozitivna (končna, regularna, Borelova) mera μ na $\sigma(S)$, da je S unitarno ekvivalenten operatorju S_χ množenja s funkcijo $\chi(z) = z$ na prostoru $\mathcal{P}^2(\mu)$. Pri tem je $\mathcal{P}^2(\mu)$ najmanjši podprostor v $\mathcal{L}^2(\mu)$, ki vsebuje vse polinome spremenljivke z.

V zgornjem premisleku še nismo pokazali celotne trditve: mera μ, ki smo jo pridelali, je bila definirana na $\sigma(N)$, trditev pa pravi, da je definirana na $\sigma(S)$. Sedaj bi se morali sklicati na izrek o spektralni inkluziji, ki pove, da je $\sigma(N) \subseteq \sigma(S)$; ker pa definicijska množica mere μ v naših tukajšnjih razmišljanjih ne bo pomembna, bomo dokaz spektralne inkluzije opustili (glejte na primer [6]).

Kljub temu, da je Bram dokazal trditev 2 že pred več kot 30 leti, je ostal obstoj invariantnih podprostorov za subnormalne operatorje vprašljiv do leta 1978, ko ga je potrdil S. Brown v [4]. Brownov dokaz, ki ni prav enostaven, uporablja Sarasonovo karakterizacijo zaprtja algebre polinomov v algebri $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ v šibki-* topologiji, ki jo nosi $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ kot dual Banachovega prostora $\mathcal{L}^1(\mu)$. Že formulacija Sarasonovega izreka je precej zapletena, dokaz pa uporablja sredstva iz teorije funkcijskih algeber in harmoničnih mer. C. Pearcy, C. Foias, C. Apostol, H. Bercovici, B. Chevreau, J. Agler in drugi

so kasneje posplošili Brownovo tehniko na širše razrede operatorjev. Pred nedavnim pa je J. E. Thomsonu uspelo z uporabo Brownove ideje osupljivo preprosto dokazati eksistenco hiperinvariantnih podprostorov za neskalarne ciklične subnormalne operatorje. Od tod sledi Brownov izrek kot trivialna posledica. Thomsonov dokaz je dovolj kratek, da si ga bomo poskusili ogledati v prihodnjem razdelku.

Oglejmo si še konkreten zgled za trditev 2.

Primer. Naj bo $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ naravna ortonormirana baza prostora $l^2 = l^2(\mathbb{N})$, torej $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Desni premik S na l^2 je določen z relacijami $S e_n = e_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$ Iz prvega primera v tem razdelku že vemo, da je S subnormalen operator; njegova normalna razširitev je premik N na prostoru $l^2(\mathbb{Z})$. S je cikličen operator s cikličnim vektorjem e_0, N pa je *-cikličen operator.

Naj bo sedaj μ normalizirana Lebesgueova mera na enotski krožnici v kompleksni ravnini s središčem v izhodišču (ločna dolžina deljena z 2π). Funkcije $\chi_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, sestavljajo ortonormirano bazo prostora $\mathscr{L}^2(\mu)$. Operator M_χ množenja s funkcijo $\chi = \chi_1$ očitno premakne to bazo za eno mesto proti desni: $M_\chi(\chi_n) = \chi_{n+1}$. To pove, da je M_χ unitarno ekvivalenten premiku N na $l^2(\mathbb{Z})$. Podprostor v $\mathscr{L}^2(\mu)$, ki ga generirajo funkcije χ_n za $n \in \mathbb{N}$, imenujemo Hardyjev prostor in označimo s $\mathscr{H}^2$. Zožitev množenja M_χ na $\mathscr{H}^2$ je očitno unitarno ekvivalentna premiku S na prostoru l^2. Tako smo premik S predstavili kot množenje z identično funkcijo na Hardyjevem prostoru $\mathscr{H}^2$. Prednost te predstavitve je v dejstvu, da lahko funkcije iz $\mathscr{H}^2$ holomorfno razširimo v notranjost enotskega kroga in uporabljamo teorijo analitičnih funkcij. Taka predstavitev nam omogoči opisati vse invariantne podprostore operatorja S.

Notranja funkcija $\varphi \in \mathscr{H}^2$ je funkcija, katere absolutna vrednost na enotski krožnici je (skoraj) povsod enaka 1. (Na primer vse potence z^n in funkcije $\varphi_\alpha(z) = (z - \alpha)(1 - \alpha\bar{z})^{-1}$, $|\alpha| < 1$ so notranje.) Za vsako notranjo funkcijo φ je množenje s φ izometrija in zato $\varphi\mathscr{H}^2$ zaprt podprostor v $\mathscr{H}^2$, ki je očitno invarianten za S (natančneje, invarianten za množenje s funkcijo χ na prostoru $\mathscr{H}^2$). Beurling je že pred skoraj 40 leti dokazal, da so vsi neničelni invariantni podprostori premika take oblike (glejte na primer [7] ali [10]). Ta rezultat se je pokazal kot pomemben v teoriji kompleksnih funkcij.

4. Invariantni podprostori za subnormalne operatorje

V tem razdelku naj označuje μ končno pozitivno mero, definirano na sigma algebri Borelovih množic v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$. Nosilec $\mathscr{C}$ mere μ naj bo kompakten. (Nosilec mere μ je najmanjša zaprta množica $\mathscr{C}$, ki zadošča pogoju $\mu(\mathbb{C} - \mathscr{C}) = 0$.)

Že v prejšnjem razdelku smo povedali, kako elementi algebre $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ delujejo kot operatorji na prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$: vsaki funkciji $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ pripada operator M_φ na prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$, definiran s predpisom $M_\varphi(f) = \varphi f$. Za poljubno podalgebro $\mathscr{A}$ algebre $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ in poljuben podprostor $\mathscr{H}$ v $\mathscr{L}^2(\mu)$ označimo $\mathscr{A}\mathscr{H} = \{\varphi f\colon \varphi \in \mathscr{A}, f \in \mathscr{H}\}$. Dejstvo, da je $\mathscr{H}$ invarianten podprostor za vse operatorje množenja s funkcijami iz $\mathscr{A}$, lahko potem simbolično zapišemo kot $\mathscr{A}\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}$. Za poljuben $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ bomo množico $\{\varphi f\colon f \in \mathscr{H}\}$ označili kar s $\varphi\mathscr{H}$.

Eksistenca invariantnih podprostorov za subnormalne operatorje bo posledica naslednjega izreka.

IZREK 3. (J. E. Thomson, [15]) Naj bo $\mathscr{H}$ neskončno razsežen podprostor v $\mathscr{L}^2(\mu)$, ki vsebuje konstantne funkcije. Nadalje naj bo $\mathscr{A}$ podalgebra v $\mathscr{L}^\infty(\mu)$, ki vsebuje konstante in identično funkcijo χ na množici $\mathscr{C}$ ter zadošča pogoju $\mathscr{A}\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}$. Potem obstaja tak netrivialen podprostor $\mathscr{K}$ prostora $\mathscr{H}$, da je $\mathscr{A}\mathscr{K} \subseteq \mathscr{K}$.

Če vzamemo v tem izreku $\mathscr{H} = \mathscr{P}^2(\mu)$ in za $\mathscr{A}$ algebro vseh polinomov spremenljivke z ter upoštevamo trditev 2 iz prejšnjega razdelka, vidimo, da ima vsak cikličen (in s tem vsak) subnormalen operator netrivialen invarianten podprostor. V resnici pa sledi iz izreka 3 še več: vsak cikličen subnormalen operator ima netrivialen hiperinvarianten podprostor. Da bi to videli, se moramo seveda najprej vprašati, kateri operatorji na prostoru $\mathscr{P}^2(\mu)$ komutirajo z operatorjem množenja S_χ.

TRDITEV 3. Z operatorjem S_χ na prostoru $\mathscr{P}^2(\mu)$ komutirajo natanko operatorji množenja s funkcijami iz $\mathscr{P}^2(\mu) \cap \mathscr{L}^\infty(\mu)$.

Dokaz. Za poljuben $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ je operator množenja M_φ na prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$ očitno omejen. Če je pri tem še $\varphi \in \mathscr{P}^2(\mu)$, je $\varphi\,\mathscr{P}^2(\mu) \subseteq \mathscr{P}^2(\mu)$. (Ker je namreč φ limita polinomov, je $\varphi\, p \in \mathscr{P}^2(\mu)$ za vsak polinom p, od tod pa sledi zgornja inkluzija.) Torej je zožitev $S_\varphi = M_\varphi|\mathscr{P}^2(\mu)$ operator prostora $\mathscr{P}^2(\mu)$ vase, ki očitno komutira z operatorjem S_χ.

Naj bo sedaj T poljuben omejen operator na $\mathscr{P}^2(\mu)$, ki komutira z operatorjem S_χ. Označimo $\varphi = T1$, kjer je $1 \in \mathscr{P}^2(\mu)$ konstantna funkcija z vrednostjo 1. Očitno je $\varphi \in \mathscr{P}^2(\mu)$. Ker za vsak polinom p operator T komutira z operatorjem $p(S_\chi) = S_p$, imamo

$$T\,p = T(S_p 1) = S_p(T1) = p\,\varphi = S_\varphi\, p$$

Sedaj bomo pokazali, da velja enakost $T f = S_\varphi f$ za vsak $f \in \mathscr{P}^2(\mu)$ in ne samo za polinome. Za vsak $f \in \mathscr{P}^2(\mu)$ obstaja zaporedje polinomov p_n, ki konvergirajo po normi proti f. Po prehodu na podzaporedje lahko privzamemo, da konvergirajo polinomi p_n proti f skoraj povsod glede na mero μ. Potem konvergirajo funkcije $\varphi\, p_n$ proti φf skoraj povsod glede na μ. Ker je T zvezen operator, konvergirajo elementi $\varphi\, p_n = T\, p_n$ proti $T f$ po normi prostora $\mathscr{P}^2(\mu)$. S ponovnim prehodom na podzaporedje lahko vzamemo, da konvergirajo funkcije $\varphi\, p_n$ proti $T f$ skoraj povsod glede na mero μ. Od tod sledi $T f = \varphi f = S_\varphi f$.

Pokazati moramo še, da je $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$, z drugimi besedami, da je φ v bistvu omejena funkcija. Brez škode za splošnost naj bo $\|T\| = 1$. Potem imamo za vsak $n = 1, 2, \ldots$

$$T^n(1) = T^{n-1}(T1) = T^{n-1}(\varphi) = T^{n-2}(T\,\varphi) = T^{n-2}(\varphi^2) = \ldots = \varphi^n$$

Od tod sledi $\|\varphi^n\| = \|T^n(1)\| \leqq \|T^n\|\,\|1\| \leqq 1$ oziroma $\int |\varphi|^{2n}\, d\mu \leqq \|1\|^2$. V tej oceni je pomembno samo, da so integrali omejeni:

$$\int |\varphi|^{2n}\, d\mu \leqq \text{konst.} < \infty$$

Če bi bila funkcija $|\varphi|$ večja od 1 na množici s pozitivno mero, bi integral na levi strani gornje ocene konvergiral proti neskončnosti, ko gre n proti neskončnosti. Torej je $|\varphi| \leqq 1$ skoraj povsod glede na mero μ. ///

Postavimo sedaj v izreku 3 $\mathscr{H} = \mathscr{P}^2(\mu)$ in $\mathscr{A} = \mathscr{P}^2(\mu) \cap \mathscr{L}^\infty(\mu)$ ter upoštevajmo trditvi 2 in 3, pa dobimo

KOROLAR. Za vsak cikličen subnormalen operator na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru obstaja netrivialen hiperinvarianten podprostor.

Preden začnemo dokazovati izrek 3, se spomnimo na nekaj dejstev o $\mathscr{L}^p$-prostorih. Za poljubno pozitivno mero μ (na kakršnemkoli merljivem prostoru) ter poljubna elementa $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ velja Hölderjeva neenačba

$$\int |f|\,|g|\,d\mu \leqq (\int |f|^p\,d\mu)^{1/p} (\int |g|^q\,d\mu)^{1/q} = \|f\|_p\,\|g\|_q$$

pri čemer sta p in q lahko poljubni realni števili večji od 1, povezani z relacijo $1/p + 1/q = 1$. Enakost velja v Hölderjevi neenačbi samo takrat, ko je $|f|^p = a|g|^q$, kjer je a pozitivna konstanta. Če je μ končna mera in $s > r \geqq 1$, potem je $\mathscr{L}^s(\mu) \subseteq \mathscr{L}^r(\mu)$. To sledi iz ocene $\|\varphi\|_r \leqq$ konst. $\|\varphi\|_s$, ki jo lahko hitro dokažemo s Hölderjevo neenačbo. (V Hölderjevo neenačbo vstavimo $f = |\varphi|^r$, $g = 1$, $p = s/r$ in $q = s/(s-r)$.) Iz Hölderjeve neenačbe sledi tudi, da je za vsak $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ prireditev $f \to \int f g\,d\mu$ omejen linearne funkcional na $\mathscr{L}^p(\mu)$. Znano je, da je ta prireditev dejansko izometričen izomorfizem prostora $\mathscr{L}^q(\mu)$ na dual od $\mathscr{L}^p(\mu)$.

Po hipotezi izreka 3 je $\mathscr{A}\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}$ in $1 \in \mathscr{H}$, torej $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{H}$. Za vsak $p \geqq 1$ naj bo $\mathscr{A}^p(\mu)$ zaprtje algebre $\mathscr{A}$ v prostoru $\mathscr{L}^p(\mu)$. Potem je seveda $\mathscr{A}^2(\mu) \subseteq \mathscr{H}$. Za $p \geqq 2$ pa je $\mathscr{A}^p(\mu) \subseteq \mathscr{A}^2(\mu)$ (to sledi takoj iz ocene $\|.\|_2 \leqq$ konst. $\|.\|_p$), torej tudi $\mathscr{A}^p(\mu) \subseteq \mathscr{H}$.

V dokazu izreka 3 bomo potrebovali naslednjo pomožno

TRDITEV 4. Naj bo μ končna pozitivna mera s kompaktnim nosilcem $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{C}$ in g od nič različen element prostora $\mathscr{L}^q(\mu)$, kjer je $1 \leqq q < 2$. (i) Za skoraj vsak $w \in \mathbb{C}$ glede na običajno dvodimenzionalno Lebesgueovo mero m je funkcija $g_w(z) = g(z)\,(z - w)^{-1}$ v prostoru $\mathscr{L}^q(\mu)$.

(ii) Obstaja taka točka $w \in \mathbb{C}$, da je $g_w \in \mathscr{L}^q(\mu)$, $\mu(\{w\}) = 0$ in

$$\hat{g}(w) \overset{\text{def.}}{=} \int g(z)\,(z - w)^{-1}\,d\mu(z) \neq 0$$

Pred dokazom trditve 4 pa moramo dodati še neko pojasnilo v zvezi z Greenovo formulo. Naj bo φ gladka funkcija s kompaktnim nosilcem v $\mathbb{C}$ ter $z \in \mathbb{C}$ poljubna (toda fiksna) točka. Spremenljivko v kompleksni ravnini označimo sedaj kot w ter pišimo $w = x + iy$, $\overline{w} = x - iy$. Izraz $\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ je smiselno označiti z $\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{w}}$. (To vidimo, če formalno računamo odvod $\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{w}}$ po pravilu za posredno odvajanje.) Iz Greenove formule je mogoče izpeljati naslednjo zvezo

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z - w}\,\frac{\partial\varphi(w)}{\partial\overline{w}}\,dm(w) \qquad (*)$$

kjer pomeni $dm(w)$ diferencial po dvorazsežni Lebesgueovi meri. Izpeljavo te zveze lahko najde bralec na primer v [6].

Dokaz trditve 4. Naj bo $E = \{w \in \mathbb{C}: g_w \notin \mathcal{L}^q(\mu)\}$.

(i) Za vsak $z \in \mathbb{C}$ in $R > 0$ naj pomeni $D(z, R)$ krog s središčem z in polmerom R. Za dokaz dejstva, da je $m(E) = 0$, je dovolj pokazati, da je $m(E \cap D(o, R)) = 0$ za vsak $R > 0$ (ker je mogoče E napisati kot številno unijo takih presekov). Pokazali pa bomo še več, da je

$$\int_{D(0,R)} \|g_w\|_q^q \, dm(w) < \infty$$

Izberemo torej $R > 0$ in naj bo ϱ tako veliko pozitivno število da je $D(z, \varrho) \supseteq D(0, R)$ za vsak $z \in \mathscr{C}$ (tak ϱ obstaja saj je $\mathscr{C}$ omejena množica). Potem je

$$\int_{D(0,R)} \|g_w\|_q^q \, dm(w) = \int_{D(0,R)} \int_{\mathbb{C}} |g_w(z)|^q \, d\mu(z) \, dm(w) = \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^q \int_{D(0,R)} \frac{dm(w)}{|z-w|^q} \, d\mu(z) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^q \int_{D(z,\varrho)} \frac{dm(w)}{|z-w|^q} \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^q \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho} r^{1-q} \, dr \, d\Theta \, d\mu(z) = 2\pi \frac{\varrho^{2-q}}{2-q} \|g\|_q^q < \infty$$

(po Fubiniju)

(ii) Naj bo $F = \{w \in \mathbb{C} : \mu(\{w\}) \neq 0\}$. Ker je mera μ končna, je F številna množica; zato je $m(F) = 0$ in po (i) še $m(E \cup F) = 0$. Za vsak $w \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ je $\mu(\{w\}) = 0$ in $g_w \in \mathcal{L}^q(\mu)$, pokazati moramo le še, da je $\hat{g}(w) \neq 0$ za vsaj en $w \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$. Če taka točka w ne bi obstajala, potem bi bilo $\hat{g}(w) = 0$ skoraj povsod glede na mero m. Za vsako gladko funkcijo φ s kompaktnim nosilcem v $\mathbb{C}$ bi tedaj veljalo

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \hat{g}(w) \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{w}} \, dm(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathscr{C}} \frac{g(z) \, d\mu(z)}{z-w} \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \overline{w}} \, dm(w) =$$

$$= \int_{\mathscr{C}} g(z) \left[\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-w} \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \overline{w}} \, dm(w) \right] d\mu(z) = \int_{\mathscr{C}} g(z) \, \varphi(z) \, d\mu(z)$$

V zadnji enakosti smo uporabili formulo (*). Mera $g \, d\mu$ bi bila potemtakem ortogonalna na vse gladke funkcije s kompaktnim nosilcem, torej ničelna, kar pa ni mogoče, saj je g neničelni elemet prostora $\mathcal{L}^q(\mu)$. ///

Dokaz izreka 3. Če je $\mathscr{H} = \mathcal{L}^2(\mu)$, lahko vzamemo $\mathscr{K} = f\mathscr{H}$, kjer je f karakteristična funkcija poljubne take podmnožice $\mathscr{C}_1$ nosilca $\mathscr{C}$ mere μ, da je $0 < \mu(\mathscr{C}_1) < \mu(\mathscr{C})$. Privzemimo torej, da je $\mathscr{H} \neq \mathcal{L}^2(\mu)$ in naj bo $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $g \neq 0$, taka funkcija, da je konjugirana funkcija $\overline{g}$ ortogonalna na $\mathscr{H}$, torej $\int f g \, d\mu = 0$ za vsak $f \in \mathscr{H}$. Naj bo $p = 3$ in $q = 3/2$. Ker je $q < 2$, je $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Po trditvi 4 obstaja taka točka $w \in \mathbb{C}$, da je $\mu(\{w\}) = 0$, funkcija $g_w(z) = g(z)\,(z-w)^{-1}$ v prostoru $\mathcal{L}^q(\mu)$ in

$$\hat{g}(w) = \int g_w \, d\mu \neq 0$$

Ker je $g_w \in \mathcal{L}^q(\mu)$, definirana enačba

$$L(f) = \int f \, g_w \, d\mu \tag{4}$$

omejen linearen funkcional na prostoru $\mathscr{A}^p(\mu)$ (dejansko definira omejen funkcional na vsem prostoru $\mathscr{L}^p(\mu)$). Po Hahn-Banachovem izreku lahko razširimo L do linearnega funkcionala $\tilde{L}$ na prostoru $\mathscr{L}^p(\mu)$, ne da bi mu pri tem povečali normo (torej $\|\tilde{L}\| = \|L\|$). $\tilde{L}$ ni nujno določen s formulo (4), pač pa gotovo obstaja taka funkcija $h \in \mathscr{L}^q(\mu)$, da je

$$\tilde{L}(f) = \int f h \, d\mu$$

za vsak $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, pri čemer je $\|h\|_q = \|\tilde{L}\| = \|L\|$. (Tukaj smo upoštevali identifikacijo prostora $\mathscr{L}^q(\mu)$ z dualom od $\mathscr{L}^p(\mu)$.) Ker je zaprta enotska krogla prostora $\mathscr{A}^p(\mu)$ šibko kompaktna (saj je zaprta podmnožica enotske krogle refleksivnega prostora $\mathscr{L}^p(\mu)$), doseže funkcional L na njej maksimum v neki točki u, $\|u\|_p = 1$. Sedaj imamo

$$\|h\|_q = \|L\| = L(u) = \tilde{L}(u) = \int u h \, d\mu \leq \|u\|_p \, \|h\|_q = \|h\|_q$$

Ker velja v tej Hölderjevi neenačbi enakost, sledi

$$|u|^p = a|h|^q \quad \mu\text{ — skoraj povsod}$$

kjer je a pozitivna konstanta. Z upoštevanjem dejstev $p = 3$ in $q = 3/2$ razberemo od tod

$$|u|^2 = b|h| \quad \mu\text{ — skoraj povsod} \tag{5}$$

kjer je b neka druga pozitivna konstanta.

Definirajmo $e(z) = h(z)/u(z)$ tam, kjer je $u(z) \neq 0$ in $e(z) = 0$ drugod. Potem je $e \in \mathscr{L}^2(\mu)$, saj sledi iz (5)

$$\int |e|^2 \, d\mu = b^{-1} \int |h| \, d\mu = b^{-1} \|h\|_1 \leq \text{konst.} \, \|h\|_q < \infty$$

Končno naj bo $\mathscr{K}$ zaprtje linearnega prostora $(\chi - w)\mathscr{A}u$ v prostoru $\mathscr{L}^2(\mu)$. Ker $u \in \mathscr{A}^p(\mu) \subseteq \mathscr{H}$ in $\mathscr{A}\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}$, je $\mathscr{A}u \subseteq \mathscr{H}$. Ker algebra $\mathscr{A}$ vsebuje konstante in identično funkcijo χ, je $(\chi - w)\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}$, torej $(\chi - w)\mathscr{A}u \subseteq \mathscr{H}$ in zato tudi $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$. Očitno je $\mathscr{A}\mathscr{K} \subseteq \mathscr{K}$. Podprostor $\mathscr{K}$ je različen od 0, saj je $(\chi - w)u \in \mathscr{K}$ in $(\chi - w)u \neq 0$. (Edina ničla funkcije $\chi - w$ je namreč w, toda $\mu(\{w\}) = 0$.)

Pokazati moramo samo še, da je $\mathscr{K} \neq \mathscr{H}$. V ta namen bomo preverili, da je vektor $\bar{e}$ ortogonalen na $\mathscr{K}$ in ni ortogonalen na $u \in \mathscr{H}$. Za vsak $f \in \mathscr{A}$ je

$$\begin{aligned} \int (\chi - w) f u e \, d\mu &= \int (\chi - w) f h \, d\mu = L((\chi - w) f) = \\ &= \int (\chi - w) f g_w \, d\mu = \int f g \, d\mu = 0 \end{aligned} \qquad \text{(po (4))}$$

To pove, da je vektor $\bar{e}$ ortogonalen na $\mathscr{K}$. Preverimo še, da ni ortogonalen na u

$$\int u e \, d\mu = \int h \, d\mu = L(1) = \int g_w \, d\mu \neq 0 \quad \text{(po izbiri točke } w\text{)}$$

S tem je dokaz končan. ///

Za poljuben $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ naj označuje $\mathscr{W}(T)$ v šibki operatorski topologiji zaprto algebro, generirao s T in identičnim operatorjem. (Šibka operatorska topologija na $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ je po definiciji najšibkejša lokalno konveksna topologija, za katero so zvezni vsi funkcionali $T \to \langle Tx, y\rangle$, $x, y \in \mathscr{H}$.) Vsak invarianten podprostor za T je invarianten tudi za algebro $\mathscr{W}(T)$. Operator T imenujemo

refleksiven, če velja obratno: za poljuben $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ iz $Lat\, S \supseteq Lat\, T$ sledi $S \in \mathcal{W}(T)$. Za vsak refleksiven operator gotovo obstaja netrivialen invarianten podprostor. Vzemimo namreč, da T nima netrivialnega invariantnega podprostora, torej, da je $Lat\, T = \{0, \mathcal{H}\}$. Potem je $Lat\, T \subseteq Lat\, S$ za vsak $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Če bi bil T refleksiven, bi sledilo $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{W}(T)$, kar pa je nemogoče, saj algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ni komutativna, $\mathcal{W}(T)$ pa je. Mreža $Lat\, T$ refleksivnega operatorja T mora biti dovolj velika, da je algebra vseh operatorjev S, ki zadoščajo pogoju $Lat\, T \subseteq Lat\, S$, komutativna. Brez dokaza povejmo, da je vsak subnormalen operator refleksiven [9]. V tem smislu imajo subnormalni operatorji mnogo invariantnih prostorov.

5. Tri »poenostavitve« problema invariantnih podprostorov

Za konec si oglejmo še tri ekvivalentne formulacije problema invariantnih podprostorov.

I. Problem reduktivnih operatorjev. Operator T na separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ imenujemo **reduktiven**, če je vsak njegov invariantni podprostor reducirajoč. Med normalnimi operatorji je karakterizacija reduktivnih znana [6] (na primer vsak kompakten normalen operator je reduktiven), ni pa znano, ali mora biti vsak reduktiven operator normalen. Če je vsak reduktiven operator res normalen, potem ima problem invariantnih podprostorov pozitivno rešitev. Kar vzemimo, da obstaja kak tranzitiven operator. Tak operator je gotovo reduktiven (saj sta njegova edina invariantna podprostora O in $\mathcal{H}$ očitno reducirajoča), torej je normalen. Ker vemo, da ima vsak normalen operator netrivialen invarianten podprostor, smo prišli v potislovje. Dyer, Pedersen in Porcelli so dokazali, da je problem reduktivnih operatorjev v resnici ekvivalenten problemu invariantnih podprostorov: vsak reduktiven operator je normalen, če ne obstajajo tranzitivni operatorji (na separabilnem Hilbertovem prostoru). Dokaz pa ni elementaren, uporablja reduktivno teorijo von Neumannovih algeber.

II. **Kvazitrikotni operatorji.** Naj bo $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormirana baza Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Za vsak n naj označuje P_n ortogonalni projektor na linearno lupino množice $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Če danemu operatorju $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pripada v bazi $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ zgornje trikotna matrika, potem je $(I - P_n)\, T\, P_n = 0$ za vsak n.

Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ imenujemo **trikoten,** če obstaja tako proti I naraščajoče zaporedje $P_1 \leqq P_2 \leqq \ldots \leqq P_n \leqq \ldots$ ortogonalnih projektorjev končnega ranga, da je

$$(I - P_n)\, T\, P_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Pri tem lahko rangi projektorjev P_n naraščajo poljubno hitro. Ker pa so končni, lahko z uporabo konvencionalne linearne algebre poiščemo novo, finejše, naraščajoče zaporedje projektorjev $\{P_{m'}\} \supseteq \{P_n\}$, tako da je rang $P_{m'} = m$ za vsak m. Od tod vidimo, da je operator trikoten natanko tedaj, ko ga je mogoče v kaki ortonormirani bazi predstaviti z zgornje trikotno (neskončno) matriko.

Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ imenujemo **kvazitrikoten,** če obstaja tako proti I naraščajoče zaporedje ortogonalnih projektorjev končnega ranga P_n, da je

$$\lim_{n \to \infty} \|(I - P_n)\, T\, P_n\| = 0$$

Ekvivalentna definicija je naslednja: operator T je kvazitrikoten natanko tedaj, ko se da izraziti kot vsota trikotnega in kompaktnega operatorja [2]. Obstaja pa še tretja, romunska karakterizacija kvazitrikotnih operatorjev, ki zreducira problem invariantnih podprostorov. Preden jo povemo, moramo vpeljati pojem indeksa.

Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je **semi-Fredholmov**, če je njegova zaloga vrednosti zaprta in vsaj eden od podprostorov

$$\mathcal{N}(T),\ \mathcal{N}(T^*)$$

končno razsežen. ($\mathcal{N}$ označuje jedro.) V tem primeru definiramo **indeks operatorja** T z enačbo

$$\textit{indeks}\ T = \dim \mathcal{N}(T) - \dim \mathcal{N}(T^*)$$

Kvazitrikotne operatorje je vpeljal Halmos leta 1968. R. Douglas in C. Pearcy sta dokazala, da je za kvazitrikoten operator T vedno *indeks* $(T - \lambda I) \geq 0$ za vse $\lambda \in \mathbb{C}$, kjer je $T - \lambda I$ semi-Fredholmov operator. Nekaj let kasneje so trije Romuni: Apostol, Foias in Voiculescu dokazali še obratno trditev. Romunska karakterizacija pravi, da je T kvazitrikoten operator natanko tedaj, ko je *indeks* $(T - \lambda I) \geq 0$ za vse $\lambda \in \mathbb{C}$, kjer je $T - \lambda I$ semi-Fredholmov operator.

Če je pri kakem $\lambda \in \mathbb{C}$ *indeks* $(T - \lambda I) > 0$, potem je $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ neničelni invarianten podprostor za T. Podobno ima T netrivialen invarianten podprostor, kakor hitro je *indeks* $(T - \lambda I) < 0$ za kak $\lambda \in \mathbb{C}$. Problem invariantnih podprostorov ostane nerešen le za operatorje, pri katerih je *indeks* $(T - \lambda I) = 0$ za vse $\lambda \in \mathbb{C}$, kjer je indeks definiran. Po romunski karakterizaciji sta tedaj T in T^* kvazitrikotna operatorja; takim operatorjem pravimo **bi-kvazitrikotni.** Po drugi strani pa že vemo, da je problem rešen tudi za določene bi-kvazitrikotne operatorje (na primer kompaktne in normalne).

III. **Zaprtje množice tranzitivnih operatorjev.** Označimo z $Nil(\mathcal{H})$ množico vseh nilpotentnih operatorjev na prostoru $\mathcal{H}$. (Operator T imenujemo nilpotenten, če je $T^n = 0$ za kako naravno število n.) Iz teorije aproksimacij operatorjev na Hilbertovem prostoru je znana naslednja trditev [1, str. 136]: če obstaja kak tranzitiven operator na prostoru $\mathcal{H}$, potem je zaprtje množice vseh tranzitivnih operatorjev enako množici $\{\lambda I + N\colon \lambda \in \mathbb{C},\ N \in \overline{Nil(\mathcal{H})}\}$. Če torej obstaja kak tranzitiven operator, potem jih obstaja mnogo.

LITERATURA

[1] C. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero, D. Voiculescu, *Approximation of Hilbert space operators*, Vol. II, Research Notes in Math. **102**, Pitman, Boston 1984.

[2] W. Arveson, *Ten lectures on operator algebras*, Regional Conf. Series in Math. **55**, AMS, Providence, R. I. 1984.

[3] A. Atzmon, *An operator without invariant subspaces on a nuclear Frechet space*, Annals of Math. **117** (1983) 669—694.

[4] S. W. Brown, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, Integral Eq. Op. Th. **1** (1978) 310—333.

[5] B. Beauzamy, *Un operateur sans sous-espace invariant : simplification de l'example de P. Enflo*, Integral Eq. Operator Th. **8** (1985) 314—384.

[6] J. B. Conway, *Subnormal operators*, Research Notes in Math. **51**, Pitman, Boston 1981.

[7] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, GTM **19**, Springer, New York 1982.

[8] V. I. Lomonosov, *Ob invariantnih podprostranstvah semejstva operatorov, komutirujuščih s vpolne neprerivnim,* Funkc. Anal. i Prilož. **7/3** (1973) 55—56.
[9] R. F. Olin, J. E. Thomson, *Algebras of subnormal operators,* J. Funct. Anal. **37** (1980) 271—301.
[10] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces,* Ergebnisse der Math. **77**, Springer, Berlin 1973.
[11] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem,* Bull. London Math. Soc. **16** (1984) 337—401.
[12] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem on the space l^1,* Bull. London Math. Soc. **17** (1985) 305—317.
[13] J. R. Ringrose, *Compact non-self-adjoint operators,* Van Nostrand Reinhold Math. Studies **35**, London 1971.
[14] W. Rudin, *Real and complex analysis,* McGraw-Hill, London 1970.
[15] J. E. Thomson, *Invariant subspaces for algebras of subnormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986) 462—464.
[16] I. Vidav, *Linearni operatorji v Banachovih prostorih,* Postdiplomski seminar iz matematike **14**, DMFA, Ljubljana 1982.

NOVE KNJIGE

LA SALLE, J. P., The stability and control of discrete processes, New York, Springer Verlag 1986. 150 str. — (Applied mathematical science; 62)

Zadnje delo profesorja La Salla je postumno pripravil eden njegovih učencev Kenneth R. Meyer. Glavna tema tega dela so diskretni dinamični sistemi, to so sistemi diferenčnih enačb, ki pa v splošnem lahko vsebujejo še proste parametre, s katerimi sistem upravljamo oziroma vodimo. Poleg upravljivosti takih sistemov se avtor še najbolj posveča problemom njihove stabilnosti. Delo je napisano na dokaj elementarnem nivoju, tako da je razumljivo širokemu krogu matematikov, v njem pa bo tudi raziskovalno usmerjeni uporabni matematik lahko našel kaj novega.

Matjaž Omladič

HIJAB, O., Stabilization of control systems, New York, Springer Verlag 1987. 129 str. — (Applications of mathematics; 20)

Problemi upravljanja ali stabiliziranja sistemov diferencialnih enačb so ena glavnih tem teorije sistemov. Kadar pa dovoljujemo tudi stohastične vplive na te sisteme, postanejo tovrstni problemi navadno še težji; v tem primeru jih združujemo pod nekoliko ohlapnim naslovom »stohastično upravljanje«. Problemi pa se nekoliko poenostavijo, če so sistemi linearni, zato ni čudno, da ima linearna teorija sistemov častno mesto v deterministčnem in je celo še bolj pomembna v stohastičnem primeru.

Pričujoče delo se loteva enega preprostejših problemov linearnega stohastičnega sistema diferencialnih enačb s predpisanim kriterijskim funkcionalom. Napisano je na podiplomskem nivoju in predpostavlja dokaj široko znanje analize, pa tudi nekaj znanja iz teorije verjetnosti. Nekatera podrobnejša orožja iz teorije sistemov in teorije slučajnih procesov izpelje avtor sam, tako da je delo zaključena celota.

Matjaž Omladič

TODOROV, I. T., Conformal Description of Spinning Particles, Trieste Notes in Physics, Springer Verlag, Berlin 1986, 74 str.

Knjiga obravnava tvistorski račun fizikalnih količin za delce in polja s spinom.

V teoriji tvistorjev točke prostora časa niso primarni geometrijski objekti, temveč sekundarni, izpeljani. Primarni objekti so premice na plaščih svetlobnih stožcev v prostoru Minkowskega M, t. i. svetlobni žarki. S takimi nelokalnimi objekti ni lahko računati, zato je bil vpeljan projicirani tvistorski prostor $\mathbb{PT}$ $(= \mathbb{CP}^3)$. Točke v $\mathbb{PT}$ ustrezajo svetlobnim žarkom v kompaktificiranem prostoru Minkowskega M^1 $(= S^1 \times S^3)$, točkam v M^1 pa ustrezajo krožnice v $\mathbb{PT}$. Ena od lastnosti prehoda iz M^1 v $\mathbb{PT}$, presenetljiva zaradi njegove nelokalnosti, je, da je rešitve fizikalno zanimivih, v M lokalnih diferencialnih enačb za polja z ničelno mirovno maso mogoče izraziti v $\mathbb{PT}$ s preprostimi krivuljnimi integrali.

Knjiga vpelje tvistorje s stališča konformnih transformacij prostora Minkowskega. Ker ta prostor ni najbolj primeren za nošenje konformnih transformacij, saj so med njimi tudi singularne, vsaki konformni transformaciji priredi linearno transformacijo $O(4,2)$ v $\mathbb{R}^6$. Grupa ortohronih konformnih transformacij $C\uparrow$ (3,1) ima krovno grupo $O\uparrow$ (4,2), ki je unija dveh od štirih enostavno povezanih komponent grupe $O(4,2)$. Tej krovni grupi prirejena algebra so(4,2) je izomorfna algebri su(2,2). Tvistorji so ena od dveh vernih nerazcepnih upodobitev najnižjega reda te algebre. Tvistorski prostor, ki nosi to upodobitev, ima kot mnogoterost štiri izomorfne razrede podmnogoterosti. Te imajo glede na konformne transformacije lastnosti, kakršne imajo fazni prostori naslednjih fizikalnih sistemov: 1) klasični delec z maso nič in spinom s, 2) brezspinski konformni delec s pozitivno energijo (konformni delec pomeni, da vrednost masnega operatorja ni fiksna), 3) delec s spinom s in pozitivno energijo, 4) konformni delec s spremenljivim spinom. Vsa razprava temelji na izreku, ki v knjigi ni dokazan, da eksistira enolična korespondenca med unitarnimi upodobitvami Liejeve grupe in njenimi orbitami v prostoru, dualnem k Liejevi algebri, pridruženi tej grupi. Na koncu knjiga obravnava kvantizacijo brezmasnih polj v tvistorski sliki na primeru elektromagnetnega in nevtrinskega polja.

Knjiga pokaže, da je mogoče spinsko naravo delcev in polj enostavno kodirati v tvistorskem prostoru, vendar daje, po mojem mnenju, kljub celemu razdelku vodiča po literaturi o drugih uspešnih uporabah tvistorjev, dokaj ozek, če ne celo pristranski pogled na teorijo, ki je omogočila med drugim dokazati pozitivnost Bondijeve mase v splošni teoriji relativnosti in konstruirati vse instantonske rešitve klasičnih Yang-Millsovih enačb.

Matjaž Poljšak

GRAVITACIJSKI ZAKON JE STAR TRISTO LET — ALI ŠE VELJA?

JANEZ STRNAD

PACS 04.90.+e

Ob tristoletnici Newtonovih *Principov* opiše prispevek domnevo, da gravitacijski zakon ne velja natančno.

THE GRAVITATIONAL LAW IS 300 YEARS OLD — IS IT STILL VALID?

On the occasion of the 300th anniversary of Newton's *Principia* the hypothesis is described that the gravitational law is not valid exactly.

Leta 1687 je izšla knjiga Isaaca Newtona *Principia mathematica philosophiae naturalis* z osnovami klasične mehanike kot prve uspešne fizikalne teorije. V uvodu je Newton navedel tri osnovne zakone mehanike in v tretjem delu *gravitacijski zakon.* Slednji trdi, da drobni telesi delujeta drugo na drugo s privlačno silo, ki je sorazmerna z maso prvega telesa in maso drugega in obratno sorazmerna s kvadratom njune razdalje. Z njim je pojasnil Keplerjev približek za gibanje planetov okoli Sonca, gibanje Lune okoli Zemlje, plimo ter nutacijo in precesijo zemeljske osi, torej domala vse tedaj znane pojave v Osončju.

V gravitacijskem zakonu nastopa ista masa kot v drugem Newtonovem zakonu. Prva, *gravitacijska masa* meri odziv telesa na drugo telo, a druga, *vztrajnostna masa* to, kako se telo upira pospeševanju. Tej ugotovitvi pravimo *ekvivalentnost gravitacijske in vztrajnostne mase.* Newton jo je utemeljil z merjenjem frekvence enako dolgih nitnih nihal z utežmi iz različnih snovi. V izrazu za frekvenco nitnega nihala nastopa namreč kvocient gravitacijske in vztrajnostne mase m_g/m_v. Kolikor je frekvenca nihala neodvisna od snovi, je neodvisen od snovi kvocient obeh mas. Relativno natančnost, s katero merjenja zagotavljajo, da sta obe masi ekvivalentni, izrazimo kot $\delta = (m_{g2}/m_{v2} - m_{g1}/m_{v1})/\frac{1}{2}(m_{g2}/m_{v2} + m_{g1}/m_{v1})$. Pri tem zadeva indeks 2 drugo telo in indeks 1 prvo.

> ... Enakost časa lahko z veliko natančnostjo ugotovimo z nihaloma. Poskusil sem z zlatom, s srebrom, svincem, steklom, kuhinjsko soljo, z lesom, vodo in s pšenico. Priskrbel sem si leseni škatli, okrogli in enaki. Eno sem napolnil z lesom in dal enako težo zlata (tako natančno, kot sem mogel) v središče druge. Škatli sta viseli na enakih nitih, dolgih 11 sežnjev, in sta tvorili par nihal, popolnoma enakih po teži in obliki in enako podvrženih uporu zraka. Dal sem eno k drugemu in ju opazoval, kako sta se gibali skupaj sem in tja, dolgo, z enakimi nihaji. In zato je količina snovi zlata bila proti količini snovi lesa v enakem razmerju kot delovanje gibalne sile (ali vis motrix) na vse zlato proti delovanju te sile na ves les, to je kot teža enega proti teži drugega. In enako se je primerilo tudi z drugimi telesi.
>
> Sir Isaac Newton, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Translated into English by Andrew Motte 1729, Proposition VI, Theorem VI, Dawsons of Pall Mall, London 1968, Vol. 2, str. 220.

Newton je dosegel relativno natančnost 10^{-3}. F. W. Bessel jo je pri enakih poskusih na začetku prejšnjega stoletja izboljšal na 10^{-5}. Na začetku našega stoletja je R. Eötvös s sodelavcema dosegel 10^{-8}. Izkoristili so dejstvo, da je

na vrteči se Zemlji teža sorazmerna z gravitacijsko, centrifugalna sila pa z vztrajnostno maso. Na krajišči enakoročnega vzvoda so pritrdili enako težki telesi iz različnih snovi in obesili vzvod na torzijsko nitko, tako da je kazal v smeri vzhod-zahod. Določali so ravnovesno lego vzvoda glede na ogrodje. Nato so ogrodje zasukali za 180° okoli navpične osi in znova določili ravnovesno lego. Ugotavljali so zasuk ene ravnovesne lege glede na ogrodje proti drugi. Najmanjši zasuk, ki bi ga pri merjenju še lahko spregledali, je dal zgornjo mejo za navor, ki bi izviral iz različnega kvocienta gravitacijske in vztrajnostne mase za obe telesi, in — v naslednjem koraku — natančnost δ.

Leta 1964 so R. H. Dicke in sodelavca namesto gravitacijske sile Zemlje izkoristili gravitacijsko silo Sonca. Druga je sicer precej manjša kot prva, a morebitni dodatni navor bi se pojavljal zaradi vrtenja Zemlje s periodo 24 ur. Zato trikotniškega ogrodja na torzijski nitki z dvema aluminijevima in eno zlato utežjo v ogliščih ni bilo treba vrteti. Samo z občutljivo elektronsko napravo so zasledovali njegovo ravnovesno lego. Tako so dosegli natančnost okoli 10^{-11}. Naposled sta V. B. Braginskij in V. I. Panov leta 1971 izboljšala natančnost δ na 10^{-12}. Merila sta podobno kot Dicke in sodelavca, le da nista zasledovala ravnovesne lege, ampak sta v nihanju torzijskega nihala s štirimi aluminijevimi in štirimi platinovimi utežmi ugotavljala sinusno sestavino s periodo 24 ur.

Gravitacijske konstante G, splošnega sorazmernostnega koeficienta v gravitacijskem zakonu, I. Newton ni izmeril. S precejšnjo mero sreče pa bi bil lahko v *Principih* določil njeno vrednost. Za povprečno gostoto Zemlje je namreč uganil pet do šestkrat več od gostote vode. Gravitacijsko konstanto bi bil lahko izračunal iz enačbe $G = g_0 r_0^2/m_0 = g_0 r_0^2/(\varrho \cdot 4\pi r_0^3/3) = 3g_0/4\pi \varrho r_0$, v kateri je g_0 težni pospešek na površju Zemlje, m_0 njena masa, r_0 radij in ϱ povprečna gostota. Srednja vrednost gravitacijske konstante za obe gostoti, $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, leži presenetljivo blizu današnje vrednosti.

Prvi je izmeril gravitacijsko konstanto Henry Cavendish šele leta 1798, tako da je s torzijsko tehtnico določil gravitacijsko silo med laboratorijskima telesoma. Pozneje so jo drugi merili natančneje [1], a še dandanes je gravitacijska konstanta ena izmed najmanj natančno določenih splošnih konstant. Nazadnje sta jo premerila G. G. Luther in W. R. Towler s prilagojenim Cavendishovim načinom. Drobno volframovo prečko z utežema na krajiščih s skupno maso 7 gramov sta v vakuumu obesila na tanko kremenovo nitko in merila nihajni čas (okoli 6 minut) torzijskega nihala. Nato sta dala v bližino dve desetkilogramski volframovi krogli in ponovno izmerila nihajni čas, ki je bil za nekaj odstotkov spremenjen. Tako sta dobila naposled za gravitacijsko konstanto $(6{,}6726 \pm 0{,}0005) \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 [2].

Na opisani način določijo gravitacijsko konstanto v laboratoriju pri razdalji teles z velikostno stopnjo deset centimetrov. Merijo pa jo tudi pri večjih razdaljah — pri tako imenovanih geofizikalnih poskusih. V notranjosti homogene krogelne lupine na telo ne deluje gravitacijska sila. Iz tega izhaja, da je teža telesa z maso m v razdalji r od središča Zemlje $m g = G m m(r)/r^2$, če je $m g_0 = G m m_0/r_0^2$ teža tega telesa na zemeljskem površju. Pri tem je $m(r)$ masa v Zemlji v notranjosti krogle z radijem r. Prvo enačbo odštejemo od druge in izračunamo gravitacijsko konstanto

$$G = (r_0^2 g_0 - r^2 g)/4\pi r_0^2 (r_0 - r) \varrho$$

V imenovalcu nastopa masa krogelne plasti $m_0 - m(r)$ z debelino $r_0 - r$. Če izmerimo težni pospešek g v globini $r_0 - r$, lahko z znano povprečno gostoto ϱ na površju Zemlje določimo gravitacijsko konstanto. Pri natančnejšem merjenju moramo upoštevati še vpliv centrifugalnega pospeška, ki je odvisen od geografske širine in ki zmanjša vrednost težnega pospeška. Geofizikalna merjenja v rudnikih ali pod vodo so manj natančna od laboratorijskih merjenj, a precej nedvoumno dajo večjo gravitacijsko konstanto. F. D. Stacey in sodelavci so na primer merili v globini od 0 do 950 metrov v navpičnem jašku rudnika in dobili za gravitacijsko konstanto $(6{,}71 \pm 0{,}13) \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² [3]. Kot povprečje čez več geofizikalnih merjenj pa navajajo $(6{,}734 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² [4], [5]. Pri tem se laboratorijsko in geofizikalno izmerjena gravitacijska konstanta razlikujeta za več kot tri efektivne odmike. Mogoče se je postaviti na stališče, da so pač geofizikalna merjenja po naravi manj natančna in obremenjena s sistematično napako ter se ne ozirati nanje. Mogoče pa jih je sprejeti in poskušati ugotoviti, kaj se za njimi skriva.

Ob načrtovanju raziskovalnega dela fizik zavedno ali podzavestno razmišlja o njegovi pomembnosti. Delo, ki bo zelo verjetno uspelo, bo prineslo v fiziko malo vznemirjenja in raziskovalcu malo slave. Delo, ki po splošnem mnenju verjetno ne bo uspelo, pa uspe, prinese v fiziko veliko vznemirjenja in raziskovalcu veliko slave. Nekateri priredijo verjetnosti za uspeh in vznemirljivosti številska koeficienta in trdijo, da njun produkt pove nekaj o tem, ali se kaže dela lotiti ali ne. V obeh navedenih primerih je odgovor pritrdilen, le da v drugem primeru raziskovalec veliko več tvega. Slaven postane raziskovalec, ki tvega, da bo delal zaman, pa uspe. Prav uspehi pri delih, za katera se spočetka zdi, da ne bodo uspela, poganjajo razvoj fizike. Seveda jih od velikega števila takih raziskovanj le malo uspe. Za zglede nismo v zadregi: odkritje T. D. Leeja in C. N. Yanga, da se parnost pri šibki interakciji ne ohrani, odkritje R. Mössbauerja o brezodrivnem sevanju fotonov itd.

Razmišljanje naj rabi kot izgovor, zakaj se zanimamo za domnevo, da Newtonov gravitacijski zakon ne velja natančno v znani obliki. Takih domnev je bilo že veliko — tudi pri Coulombovem zakonu [6] — a nobena doslej ni rodila uspeha. Morda bo tudi ta kmalu pozabljena. Če pa bi jo potrdili, bi to imelo daljnosežne posledice. Fizikalno javnost je že doslej precej vznemirila.

E. Fischbach, D. Sudarsky, A. Szafer, C. Talmadge in S. H. Aronson so poskusili pojasniti geofizikalno izmerjeno gravitacijsko konstanto s *»peto silo«* — poleg gravitacije, elektromagnetne, močne in šibke sile [7]. Njen doseg l naj bi meril okoli 200 metrov, tako da bi imel delec njenega polja — *hiperfoton* — lastno energijo okoli $m c^2 = \hbar c/l = 10^{-9}$ eV. Napoved izhaja iz Heisenbergove neenačbe. Vanjo vstavimo za nedoločenost koordinate doseg l in za nedoločenost gibalne količine $m c$. Statični potencial je v tem primeru sorazmeren z $e^{-r/l}/r$. Tako ustreza popravljenemu gravitacijskemu zakonu potencial

$$V(r) = -G_0 m_1 m_2/r - G' B_1 B_2 e^{-r/l}/r = -(G_0 m_1 m_2/r)(1 + \alpha e^{-r/l})$$

V njem je G_0 gravitacijska konstanta pri razdaljah, ki so velike v primeru z dosegom l. Geofizikalna merjenja dopuščajo oceni $\alpha = -(7{,}2 \pm 3{,}6) \cdot 10^{-3}$ in $l = (200 \pm 50)\, m$ in kažejo da je »peta sila« odbojna. V nasprotju z gravitacijo, za katero je odločilna masa, naj bi bilo za »peto silo« odločilno barionsko število B. Pri čudnih delcih moramo namesto njega upoštevati hipernaboj.

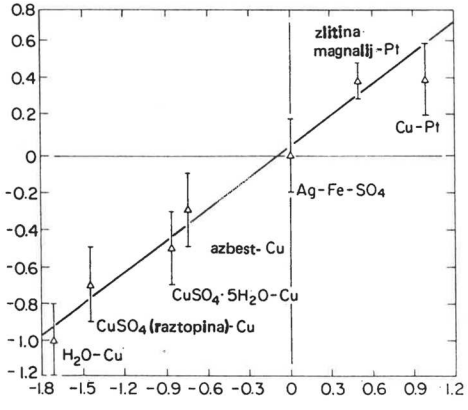
Popravljeni gravitacijski zakon naj bi prišel do veljave še pri nevtralnih kaonih K^0 in $\overline{K^0}$ pri visoki energiji, pri katerih dobijo nekatere nenavadne merske izide. Pokazal naj bi se pri primerjavi težnega pospeška na Zemlji in v višini, v kateri se gibljejo umetni sateliti, in pri Eötvösovih poskusih. Na merjenja Dickeja in sodelavcev ter Braginskega in Panova pa ne bi vplival, ker je pri gravitacijski sili Sonca na Zemlji razdalja mnogo večja od dosega nove sile.

Pri težnem pospešku na površju Zemlje bi bilo treba upoštevati manjšo gravitacijsko silo bližnjih plasti. Nekoliko daljši račun da za homogeno Zemljo relativno razliko težnega pospeška za dve telesi

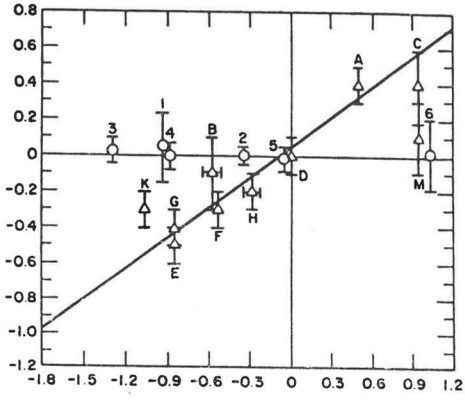
$$\delta g/g_0 = \tfrac{3}{2}\,(l/r_0)\,(G'/G_0\,m_H{}^2)\,(B_1/\mu_1 - B_2/\mu_2)$$

Pri tem je m_H masa vodikovega atoma in μ masa telesa, merjena z maso vodikovega atoma.

E. Fischbach in sodelavci so obdelovali Eötvösova merjenja in — po lastnem mnenju — našli potrditve za svojo domnevo (Sl. 1). Znano je, da ta merjenja niso tako natančna, kakor so zagotavljali njihovi avtorji. Majhni odmiki, ki jih kažejo, naj bi potrjevali domnevo, da je vpleteno barionsko število. To število se ujema s številom nukleonov, to je protonov in nevtronov, v jedrih. Vezavna energija jedra, preračunana na nuklen, je po absolutni vrednosti največja pri železu. Na začetku in na koncu periodne preglednice pa je manjša. Zato je razmerje B/μ nekoliko večje za železo kot za elemente na začetku in na koncu preglednice.



Sl. 1. Diagram E. Fischbacha in sodelavcev [7] z merjenji R. Eötvösa in sodelavcev. Na navpično os je nanesena z 10^8 pomnožena relativna razlika $\delta g/g_0$ za pare teles iz različnih snovi na osnovi Eötvösovih merjenj, na vodoravno os pa z 10^5 pomnožena razlika ustreznih razmerij B/μ. Premica kaže teorijsko napoved po navedeni enačbi. Merski podatki dokaj prepričljivo ležijo na premici



Sl. 2. Diagram P. T. Keyserja in sodelavcev [16] z vsemi merskimi podatki R. Eötvösa in sodelavcev in J. Rennerja. Primerjaj s sl. 1, ki je narisana na enak način. Merski podatki se znatno slabše ujemajo s teorijsko napovedjo

Že prej je kdaj pa kdaj kdo podvomil v gravitacijski zakon. Pred desetimi leti je na primer D. R. Long izmeril gravitacijsko silo med 50-gramsko kroglico in skoraj šestkilogramskim bakrenim obročem z notranjim radijem 21,6 cm ter kroglico in kilogramskim tantalovim obročem z notranjim radijem 2,8 cm. Gravitacijska konstanta naj bi se v obeh primerih razlikovala [8].

Vendar Longovih ugotovitev niso mogli potrditi. V. I. Panov in V. N. Frontov sta merila spremembo frekvence sučnega nihala, ko sta mu približala 60-kilogramsko telo v razdaljo 3 m in 600-kilogramsko telo v razdaljo 10 m [9]. R. Spero in sodelavci so preverili gravitacijski zakon na razdalji od 2 do 5 cm. Merili so gravitacijsko silo votlega desetkilogramskega jeklenega valja na 20-gramski bakreni valj, ki so ga premikali po osi v notranjosti votlega valja. Za α so določili na območju od 1 cm do 1 m zgornjo mejo od 10^{-3} do 10^{-2} [10]. Y. Ogawa in sodelavca so merili na razdalji od 2,6 do 10,7 m. Kvazistatično gravitacijsko polje jeklenega kvadra z maso 401 kg, ki se je vrtel s frekvenco 30,4 s^{-1}, so otipali z gravitacijsko anteno. Pri razdalji okoli 1 m so postavili za α mejo okoli 10^{-2} [11]. H. A. Chan in sodelavca sta z občutljivim superprevodnim merilnikom otipali gravitacijsko polje 1600-kilogramskega svinčenega nihala v razdalji okoli 2,3 m in določila njegov gradient. Za α so dobili podobno mejo [12].

D. R. Mikkelsen in M. J. Newman sta zbrala podatke o morebitnem spreminjanju gravitacijske konstante na razdalji od 10^3 do 10^8 km. Upoštevala sta gibanje planetov Merkurja in Marsa in asteroida Ikara, gibanje vesoljskih sond mimo planetov in težo na Luni. Pri razdalji okoli 10^4 km sta postavila za α zgornjo mejo 10^{-3} [13]. C. Riveros in H. Vucetich sta obdelala podatke za odklon elektromagnetnega valovanja pri prehodu mimo Sonca, ki ga napove splošna teorija relativnosti. Na razdaljah od $7 \cdot 10^8$ do 10^{11} km sta tako dobila za α zgornjo mejo okoli 10^{-2} [14].

Članek E. Fischbacha in sodelavcev je izzval veliko ugovorov. Voda ima razmerje B/μ manjše kakor baker, zato jo Zemlja manj odbija. Po Fischbachu ima tedaj voda večjo efektivno gravitacijsko maso kot baker. Toda iz Eötvösovih merjenj izhaja nasprotno, da pada voda za malenkost počasneje kot baker. Če imajo prav E. Fischbach in sodelavci, obstaja dodatna šibka privlačna — ne odbojna — sila, sorazmerna z barionskim številom. Vendar to nasprotuje geofizikalnim merjenjem [15].

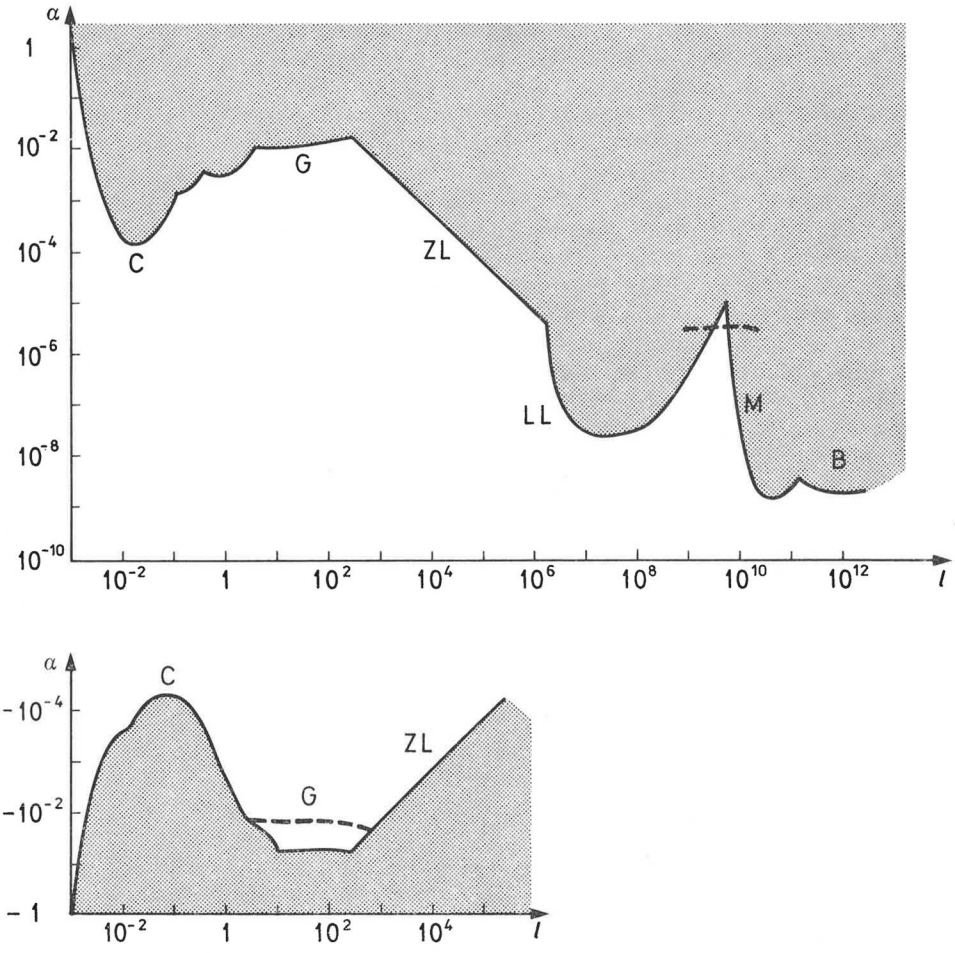
E. Fischbachu in sodelavcem očitajo, da niso upoštevali niti vseh Eötvösovih rezultatov niti merjenj J. Rennerja iz leta 1935. Vsa dosegljiva merjenja pa nikakor ne potrjujejo domneve o »peti sili« tako jasno (Sl. 2) [16]. E. Fischbach in sodelavci se sicer branijo, a ne morejo prepričljivo zavrniti obeh očitkov [17].

Opozorili so tudi na Kreuzerjeva merjenja [18], ki komaj dopuščajo Fischbachovo vrednost za α. Predlagajo, da bi ponovili Eötvösov poskus na sredi navpične skalne stene. Tako bi lahko dokaj prepričljivo potrdili ali zavrnili domnevo [19] — [21], [22].

L. B. Kreuzer je meril nihajoči gravitacijski navor na prečko z utežema na torzijski nitki. Navor je povzročil tako, da je v valju s kapljevino vzporedno s prečko počasi nihal utež. Kot kapljevino je uporabil mešanico spojin s 74 % broma po masi in za utež teflon s 76 % fluora. Kapljevina in utež sta se po gostoti malo razlikovali. Ker sta imeli različna temperaturna koeficienta prostorninskega raztezka, je bilo mogoče s segrevanjem spremi-

njati razliko gostot. Ugotovil je, da torzijska tehtnica ni zaznala gravitacijskega polja nihajoče uteži prav pri temperaturi, pri kateri sta se izenačili gostoti kapljevine in uteži. Po njegovem mnenju je izid potrdil ekvivalentnost pasivne in aktivne gravitacijske mase z relativno natančnostjo $5 \cdot 10^{-5}$. Dotlej so poskusi zagotavljali to s slabšo natančostjo 10^{-3}.

Aktivna je gravitacijska masa, ki povzroča gravitacijsko polje, *pasivna* pa tista, ki se nanj odzove. V zakonu za gravitacijsko silo drugega telesa na prvo telo $F = m_1 g = G m_1 m_2/r^2$ je m_1 pasivna, m_2 pa aktivna gravitacijska masa. Medtem so z opazovanjem Lune izboljšali natančnost, s katero je mogoče



Sl. 3. Odvisnost z merjenji določene zgornje meje za koeficient α v popravljenem gravitacijskem zakonu od dosega l [25]. Podatke za majhen doseg so dobili s tehtanjem gravitacijske sile med laboratorijskima telesoma (C), za srednji doseg z geofizikalnimi merjenji (G), za še večji doseg z merjenji z umetnim satelitom LAGEOS glede na Zemljo (ZL) in glede na Luno (LL), z merjenjem vrtenja Merkurjevega perihelija (M) in merjenjem Braginskega in Panova (B). S črtkami so nakazani v diagramu za negativni koeficient α (spodaj) izidi geofizikalnih merjenj in v diagramu za pozitivni koeficient α popravljeni Eötvösovi izidi (zgoraj)

trditi, da sta pasivna in aktivna gravitacijska masa ekvivalentni, na $4 \cdot 10^{-12}$ [23]. Kreuzerjevi poskusi opozarjajo, da bi isti merski izid pojasnili, če ne bi bili ekvivalentni vztrajnostna in pasivna gravitacijska masa ali aktivna in pasivna gravitacijska masa. V gravitacijskem zakonu je namreč mogoče majhne odmike prirediti vsakemu od treh faktorjev G, m_1 ali m_2.

Na enajsti mednarodni konferenci o splošni relativnosti in gravitaciji julija 1986 v Stockholu sta poročala tudi E. Fischbach in F. Stacey. Fischbach je navedel še nekaj novih ugotovitev o Eötvösovih merjenjih, do katerih so se dokopali, ko so upoštevali sestavo uporabljenih teles in bližino nekaterih stavb. Nekateri udeleženci so za dva dni podaljšali konferenco, da bi se podrobneje pogovorili o poskusih, ki bi jih kazalo narediti [24].

Navdušenje zagovornikov pete sile je nekoliko ohladil A. de Rujula, ki je prepričan, da geofizikalnih merjenj in Eötvösovih merjenj ni mogoče pojasniti na enaki osnovi [25]. Najprej je opozoril na to, da bi moral biti koeficient α odvisen od snovi in da je neodvisen koeficient lahko le približek. Po njegovem mnenju bi bilo mogoče pojasniti geofizikalna merjenja z dodatno odbojno silo s koeficientom α okoli — 0,007 na območju l med 1 metrom in okoli 500 metri. Napaka pri merjenju pa je precejšnja in določa koeficient α le med — 0,004 in — 0,011. Dodatna sila z dosegom, precej manjšim od radija Zemlje, na idealnem ravnem ozemlju sploh ne bi prizadela izida Eötvösovih poskusov. Nanje pa bi vplivala sila z mnogo večjim dosegom. Popravljene izide R. Eötvösa in sodelavcev bi bilo mogoče pojasniti le s privlačno silo s koeficientom $\alpha = 5{,}6 \cdot 10^{-6}$ na območju l okoli $4 \cdot 10^9$ m (Sl. 3). Popravki so preprosto odvisni od razlik barionskega števila (Sl. 1), ne pa od razlik vrstnega števila. Že R. H. Dicke je opozoril, da je kvocient B/μ za nekatere od Eötvösovih snovi približno sorazmeren z obratno vrednostjo gostote. Zaradi tega bi odmike utegnil povzročiti temperaturni gradient v telesih z različno gostoto. Ker je sila pivlačna, delec njenega polja ne more imeti spina 1, tak delec polja posreduje lahko le odbojno silo med enakima delcema. Tak delec z lastno energijo $5 \cdot 10^{-17}$ eV bi lahko pojasnil, zakaj proton ne razpade z razpadnim časom, ki ga napoveduje najpreprostejša inačica velike enotne teorije. Toda delec s spinom 0 ali 2, ki posreduje privlačno silo, nima te lastnosti.

S. Y. Chu in R. H. Dicke sta podrobneje raziskala možnost, da je Eötvösova merjenja motilo naraščanje temperature v vodoravni smeri [26]. To naj bi povzročilo zelo rahel veter. Ker valjasti uteži nista imeli enakega osnega preseka, je nanju deloval v toku zraka različen upor. Tako naj bi nastal zelo majhen dodatni navor, ki naj bi bil sorazmeren z razliko osnih pesekov. Pri enakem premeru uteži bi bil dodatni navor sorazmeren z razliko obratnih vrednosti gostote uteži. Tako so razmeroma dobro pojasnili Eötvösove merske izide, na katerih so osnovali svojo zamisel Fischbah in sodelavci [7] (Sl. 1). V resnici so že oni pomislili na to možnost, a so jo zavrgli.

V odzivu na Chujevo in Dickejevo pripombo so priznali, da gre »za edini resni ugovor« njihovi zamisli [27]. Vendar so ob tem omenili njegovo slabost. Težko je pojasniti, da je ves čas zelo dolgotrajnih merjenj temperatura v sobi, kjer so merili, naraščala v isti smeri.

Tako vidimo, da tečejo ob tristoletnici Newtonovega gravitacijskega zakona živahne razprave o veljavnosti zakona. Prav nenehno preverjanje osnovnih zakonov je značilno za fiziko. Za zdaj so namigi o tem, da zakon v znani obliki ne velja natančno, še megleni. Vendar ne smemo pozabiti, da se razli-

kujeta laboratorijsko in geofizikalno izmerjena gravitacijska konstanta, da je več nejasnosti pri Eötvösovih poskusih in da so opazili nekaj nenavadnih merskih izidov pri poskusih z nevtralnimi kaoni. Taka nerešena vprašanja so že večkrat pognala fiziko za korak naprej, čeprav ne vedno v predvideni smeri.

LITERATURA

[1] P. Prelovšek, *Nov način za merjenje gravitacijske konstante.* Obzornik mat. fiz. **17** (1970) 20.

[2] G. G. Luther, W. R. Towler, *Redetermination of the Newtonian gravitational constant,* Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 121.

[3] F. D. Stacey, G. J. Tuck, S. C. Holding, A. R. Maher, D. Morris, *Constraint on the planetary scale value of the Newtonian gravitational constant from the gravity profile within a mine,* Phys. Rev. D **23** (1981) 1683.

[4] S. C. Holding, G. J. Tuck, *A new mine determination of the newtonian gravitational constant,* Nature 307 (1984) 714.

[5] A. P. French, *Is there a fifth fundamental force?* Phys. Teacher **24** (1986) 270.

[6] J. Strnad, *Lastna masa fotona,* Obzornik mat. fiz. **19** (1972) 169.

[7] E. Fischbach, D. Sudarsky, A. Szafer, C. Talmadge, S. H. Aronson, *Reanalysis of the Eötvös experiment,* Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 3.

[8] D. R. Long, *Experimental examination of the gravitational inverse square law,* Nature **260** (1976) 417.

[9] V. I. Panov, V. N. Frontov, *Eksperiment Kavendiša na bol'ših rasstojanijah,* ŽETF **77** (1979) 1701.

[10] R. Spero, J. K. Hoskins, R. Newman, J. Pellam, J. Schultz, *Test of the gravitational inverse-square law at laboratory distances,* Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1645.

[11] Y. Ogawa, K. Tsubono, H. Hirakawa, *Experimental test of the law of gravitation,* Phys. Rev. D **26** (1982) 729.

[12] H. A. Chan, M. V. Moody, H. J. Paik, *Null test of the gravitational inverse square law,* Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1745.

[13] D. R. Mikkelsen, M. J. Newman, *Constraints on the gravitational constant at large distances,* Phys. Rev. D **16** (1977) 919.

[14] C. Riveros, H. Vucetich, *Bounds on the validity of Newton's law from electromagnetic solar deflection,* Phys. Rev. D **34** (1986) 321.

[15] H. H. Thodberg, *Comment on the sign in the reanalysis of the Eötvös experiment,* Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2423.

[16] P. T. Keyser, T. Niebauer, J. E. Faller, *Comment on »Reanalysis of the Eötvös experiment«,* Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2425.

[17] E. Fischbach, D. Sudarsky, A. Szafer, C. Talmadge S. H. Aronson, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2424; 2426.

[18] L. B. Kreuzer, *Experimental measurement of the equivalence of active and passive gravitational mass,* Phys. Rev. **169** (1968) 1007.

[19] D. A. Neufeld, *Upper limit on any intermediate-range force associated with barion number,* Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2344.

[20] P. Thieberger, *Hypercharge fields and Eötvös-type experiments* Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2347.

[21] S. Nussinov, *Further tests and possible interpretations of a suggested new vectorial interaction,* Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2350.

[22] J. Maddox, *Looking for gravitational errors,* Nature **322** (1986) 109.

[23] D. F. Bartlett, D. van Buren, *Equivalence of active and passive gravitational mass using the moon,* Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 21.

[24] M. MacCallum, *Fifth force gains credibility,* New Scientist **111** (1986) 28 (1527).

[25] A. de Rújula, *On weaker forces than gravity,* Phys. Lett. B **180** (1986) 213.

[26] S. Y. Chu, R. H. Dicke, *New force or thermal gradient in the Eötvös experiment,* Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1823.

[27] E. Fischbach, D. Sudarsky, A. Szafer, C. Talmadge, S. H. Aronson, *Alternative explanations of the Eötvös results,* Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1959.

UTRINEK

KAKO DOSEŽETE, DA POSTANE FIZIKA SAMOUNIČEVALNA?

Pravila za univerzitetnega učitelja fizike:

1. Dajte vedeti študentom, da je samo osnovno raziskovanje upoštevanja vredna dejavnost.
2. Posmehujte se industrijskemu ali uporabnemu delu.
3. Posmehujte se izobraževalnim tečajem.
4. Uporabljajte samo najbolj elegantno matematiko, ko razlagate karkoli.
5. Uporabljajte najzahtevnejše strokovno izrazje in si za vsak poseben primer izmislite novo besedo.
6. Izogibajte se onesnaženju s srednješolsko fiziko, a pritožujte se nad nezmožnostjo srednješolskih učiteljev.

Pravila za srednješolskega učitelja:

1. Nehajte poučevati fiziko: več lahko zaslužite kot ravnatelj ali vodja bifeja.
2. Bodite kar se da zahtevni, nazadnje ste tukaj zato, da izberete najboljše.
3. Nikdar ne priznajte, da česa v fiziki ne razumete.
4. Nikdar ne dovolite učencem, da bi uporabili laboratorijsko opremo; le polomili jo bodo.
5. Posmehujte se dekletom, ki se ukvarjajo s fiziko.
6. Izogibajte se tega, da bi pokazali, kako je mogoče fiziko uporabiti. Kar učenci potrebujejo, je teorija, da bodo naredili izpit na univerzi, ko bodo prišli tja.

Iz GIREP Newsletter za junij 1986 prevedel *Janez Strnad*

VABILO

Na osnovi Pravil o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi (Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 160), vabimo podružnice DMFA in aktive matematikov in fizikov na šolah, da do 15. septembra 1987 predlagajo kandidate. Kandidati morajo biti člani društva. Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: DMFA SRS, Komisija za pedagoško dejavnost, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 64.

Milena Kožar

NOVE KNJIGE

Oscillation theory, computation, and methods of compensated compactness. Ed. C. Dafermos et all. The IMA volumes in mathematics and its applications, vol. 2. Springer Verlag, New York 1986. 395 + X str.

Knjiga je zbirka predavanj z delovne konference o mehaniki kontinuov in parcialnih diferencialnih enačbah. Predmet obravnave so nelinearni hiperbolični sistemi parcialnih diferencialnih enačb, ki izvirajo iz ohranitvenih zakonov fizike. Primeri takih sistemov so enačbe gibanja tekočin, enačbe elastomehanike, nelinearna Schrödingerjeva enačba, enačbe poteka kemičnih reakcij, strjevanja snovi iz raztopin itd. Mnogi problemi s tega področja so v uporabi zelo zanimivi, npr. študij turbulence v tekočinah, potek detonacije v elastični snovi itd. Opisano področje je matematično zelo zahtevno in o vedenju rešitev takih parcialnih diferencialnih enačb vemo sila malo. Konferenca je obravnavala predvsem naslednje aspekte področja: 1. Ideje za dokaze eksistence rešitve nelinearnih hiperboličnih sistemov, študij pojavov kot neenoličnost rešitve, pojav nezveznosti v rešitvi, nestabilnost rešitve. 2. Razvijanje perturbacijskih metod za izračun analitičnih aproksimacij k rešitvam, teorija nelinearnih oscilacij. 3. Uporaba metode »kompenzirane kompaktnosti« pri študiju pogostega in pomembnega problema: naj bo $f(u, u_x, u_t) = \varepsilon u_{xx}$ nelinearna parcialna enačba, kjer je ε majhen parameter (npr. viskoznost tekočine). Pri kakšnih pogojih in v kakšnem smislu konvergirajo rešitve $u_\varepsilon(x, t)$ te enačbe k rešitvi enačbe $f(u, u_x, u_t) = 0$? 4. Numerično reševanje zgornjih enačb. Razvijanje diferenčnih shem, s katerimi prevedemo reševanje parcialne diferencialne enačbe na reševanje diferenčnih enačb. Možnost uporabe teoretičnih izsledkov pri študiju stabilnosti diferenčnih shem in pri zelo težkem problemu konvergence izračunanih približkov k rešitvi parcialne diferencialne enačbe. Študij lastnosti rešitev na osnovi numeričnih poskusov.

Avtorji prispevkov so specialisti na tem področju, poročali so o svojih najnovejših odkritjih. Zato je razumljivo, da je branje knjige matematično zahtevno. *Anton Suhadolc*

JAVOR P., Matematička Analiza. Zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb 1986.

Knjiga predstavlja še en poseg na področje osnov klasične analize. Treba je takoj priznati, da je v pričujoči knjigi najti izvirnosti, kar glede na množico obstoječih učbenikov s tega področja ni trivialno. Kot zbirka nalog ne preseneča z njihovo zanimivostjo ali težavnostjo, tudi število je prej skromno kot ne. Knjiga daje vtis premišljenega izbora nalog, ki so uglašene predvsem na razumevanje definicij in izrekov, kar tudi ni pravilo na tem področju. Poglavja dovolj natančno obravnavajo snov od osnovnih pojmov o številih pa tja do uporabe določenega integrala. Skoraj polovica vsakega poglavja je namenjena ponovitvi osnovnih pojmov, definicij in izrekov (včasih tudi primerom). Drugi del poglavja sestavljajo naloge. Vsaki nalogi sledi rešitev z bolj ali manj sugestivnim namigom.

Splošni vtis: Knjiga je nekakšen (uspel) kompromis med učbenikom, zbirko vaj in priročnikom. Kot taka je lahko koristna tako boljšim srednješolcem kot tudi vsem študentom, ki se kakorkoli srečajo z matematiko. Težko pa bi natančneje opredelil, za koga je bila zbirka pisana. Temu se je izognil tudi avtor, ki niti z besedo ne omenja, komu knjigo namenja. *Damjan Kobal*

O BREWSTROVEM ZAKONU

PETER GOSAR

PACS 42.10 Fa

Predstavljena je nenavadna izpeljava Brewstrovega zakona.

ON BREWSTER'S LAW

An unusual derivation of Brewster's law is presented.

V Obzorniku za matematiko in fiziko **33** (1986) 175—181 je J. Strnad priobčil zanimiv članek o nazornih razlagah Brewstrovega pojava. Članek me je vzpodbudil k iskanju še drugačnih nazornih izpeljav Brewstrove enačbe. Morda se bo našel bralec, ki se mu bo zdela poučna in privlačna naslednja izpeljava.

Na ravno mejo med dvema dielektričnima območjema, ki ju bomo označevali z 1 in 2, pada iz območja 1 curek svetlobe z jakostjo I_1. Curek je linearno polariziran z jakostjo električnega polja v vpadni ravnini. Del curka z jakostjo $R\,I_1$ se odbije, del $T\,I_1$ pa preide v območje 2. Koeficienta odboja R in prepustnosti T sta povezana z enačbo $R + T = 1$, ki jo dobimo iz zakona o ohranitvi energije. Vpadli curek oklepa z normalo na mejno ploskev kot α, prepuščeni pa kot β. Zanju velja lomni zakon $\sin\alpha/\sin\beta = n$, kjer je n lomni kvocient, ki je enak razmerju svetlobnih hitrosti c_1/c_2 na obeh območjih. Najprej nas bo zanimalo, kakšno je razmerje u_2/u_1 med gostotama elektromagnetne energije v prepuščenem in vpadajočem curku. Gostoto energije u, presek curka S, svetlobno hitrost c in svetlobno jakost I povezuje enačba $I = S\,c\,u$. Pri lomu curka se v splošnem spremenijo vse te količine. Enostaven geometrijski razmislek pokaže, da je

$$S_2/S_1 = \cos\beta/\cos\alpha \tag{1}$$

Z upoštevanjem tega dobimo naslednji izraz za razmerje gostot elektromagnetne energije v obeh curkih

$$u_2/u_1 = T\,n\cos\alpha/\cos\beta = T\sin 2\alpha/\sin 2\beta \tag{2}$$

Tu smo v zadnjem koraku upoštevali lomni zakon.

Gostota energije elektromagnetnega valovanja v dielektriku je sorazmerna kvadratu jakosti magnetnega polja. Pri tem je seveda mišljen kvadrat amplitude. Sorazmernostni koeficient je sorazmeren permeabilnosti μ dielektrika in zato v splošnem različen v obeh območjih. Večina za uporabo zanimivih dielektrikov ima permeabilnost praktično natančno 1 in bi zato lahko privzeli isti sorazmernostni koeficient za obe območji. Vendar bomo za zdaj ostali pri izpeljavah brez približkov. Enačba (2) nam torej omogoča, da izrazimo jakost magnetnega polja H_2 v prepuščenem curku z jakostjo magnetnega polja H_1 v vpadajočem curku kot

$$H_2 = (T\,\mu_1 \sin 2\alpha/\mu_2 \sin 2\beta)^{1/2}\,H_1 \tag{3}$$

Zaradi korenjenja ostaja tu še nerešeno vprašanje predznaka na desni strani enačbe.

Magnetno polje je pri svetlobi, ki je polarizirana v vpadni ravnini, pravokotno na to ravnino in zato vzporedno z mejno ravnino, ki loči dielektrični

območji. Na meji zahtevamo, da jakost magnetnega polja zvezno preide iz enega dielektrika v drugega. Iz zahteve

$$H_2 = H_1 + H_R \tag{4}$$

kjer je H_R jakost magnetnega polja odbitega valovanja, najprej ugotovimo, da imata H_2 in H_1 isti predznak, ker je H_R po velikosti vedno manjši od H_1. Vpadno in prepuščeno valovanje sta vedno v fazi. Do Brewstrovega pojava pride pri vpadnem kotu α_B, ki omogoča izenačenje jakosti magnetnega polja H_2 v prepuščenem curku z magnetnim poljem H_1 v vpadajočem curku. Tedaj se odbito valovanje ne pojavi in velja $T = 1$. Brewstrov pogoj se torej glasi

$$\mu_1 \sin 2\alpha_B = \mu_2 \sin 2\beta_B \tag{5}$$

Če sedaj privzamemo še $\mu_1 = \mu_2$, je ta enakost izpolnjena pri $\alpha_B + \beta_B = \frac{1}{2}\pi$, kar je v skladu z znano Brewstrovo enačbo.

Ali je opisana razlaga Brewstrovega zakona nazorna in poučna? Zdi se, da je odgovor pritrdilen. Pri formalni izpeljavi Brewstrovega zakona v okviru elektrodinamike pridemo najprej do Fresnelovih enačb, iz katerih razberemo, da pri Brewstrovem kotu in polarizaciji v vpadni ravnini ni odbitega valovanja. Fresnelove enačbe so izpeljane iz zahteve o zveznosti tangentne komponente jakosti električnega polja in zahteve o zveznosti tangentne komponente jakosti magnetnega polja na meji med dielektrikoma. Pri tem moramo še vedeti, kako se pri elektromagnetnem valovanju izraža na primer jakost magnetnega polja z jakostjo električnega polja. Kar dobro moramo torej poznati kvantitativne lastnosti elektromagnetnega valovanja. Pri predlagani razlagi se eni izmed navedenih zahtev na meji med dielektrikoma odpovemo in jo nadomestimo s splošno veljavnim zakonom o ohranitvi energije. Zato smo tu govorili le o magnetnem polju, električnega sploh ni treba omenjati. To je le deloma res. Zavedati se moramo, da je energija elektromagnetnega valovanja sestavljena iz energije električnega in energije magnetnega polja. Privzeli pa smo, da je celotna gostota elektromagnetne energije v svetlobnem curku sorazmerna permeabilnosti in kvadratu jakosti magnetnega polja. To je seveda res, ker sta gostoti energij električnega in magnetnega polja pri elektromagnetnem valovaju enaki.

Povzemimo, kaj vse moramo privzeti pri razlagi Brewstrovega pojava: lomni zakon, ohranitev energije, sorazmernost gostote energije svetlobnega curka s permeabilnostjo in kvadratom jakosti magnetnega polja in zveznost jakosti magnetnega polja na meji med dielektrikoma. Zaradi teh dokaj splošnih zahtev lahko uvidimo, da Brewstrov pojav ni specifičen le za elektromagnetno valovanje. Oglejmo si Brewstrov pojav pri lomu in odboju strižnega elastičnega valovanja na meji med dvema elastičnima telesoma. Valovanje naj bo polarizirano tako, da deli snovi nihajo pravokotno na vpadno ravnino. Tu velja poleg lomnega zakona in ohranitve energije tudi pravilo o zveznosti odmikov na meji. Nadalje je gostota energije valovanja v elastični snovi sorazmerna kvadratu odmika in gostoti snovi ϱ. Da je gostota energije sorazmerna z gostoto snovi, je razvidno iz izraza za gostoto kinetične energije $\frac{1}{2}\varrho v^2$, pri čemer podaja hitrost v časovni odvod odmika. Tudi tu je energija valovanja sestavljena iz dveh delov, kinetične in deformacijske. Obe sta po velikosti enaki. Brewstrov pogoj za brezodbojni lom elastičnih valov dobimo neposredno iz enačbe (5) z zamenjavo permeabilnosti μ z gostoto

$$\varrho_1 \sin 2\alpha_B = \mu_2 \sin 2\beta_B \tag{6}$$

Opozoriti pa je treba, da ta enačba nima rešitve za poljuben par snovi. Zapišimo enačbo (6) takole

$$(\varrho_1 c_1/\varrho_2 c_2) \cos \alpha_B/\cos \beta_B = 1 \qquad (7)$$

Če je $c_1 > c_2$, kvocient $\cos \alpha/\cos \beta$ z rastočim α na intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ monotono pada od 1 do 0. Enačba je tedaj rešljiva le, če je $\varrho_1 c_1 > \varrho_2 c_2$. Podoben kriterij velja za primer $c_1 < c_2$. Sedaj $\cos \alpha/\cos \beta$ lahko zavzame le vrednosti med 1 in ∞ in enačba (7) je rešljiva samo, če je $\varrho_1 c_1 < \varrho_2 c_2$.

Gornja razlaga Brewstrovega pojava je enostavna in poučna. Obenem nas navda z dvomom o utemeljenosti nazornega mikroskopskega tolmačenja, ki ga pogosto uporabljajo učbeniki in ki izvira iz predstave o sevanju induciranih dipolov v dielektriku. Ugotovili smo namreč, da je strogo vzeto vsota $\alpha_B + \beta_B$ različna od $\frac{1}{2}\pi$. V optičnem primeru je razlika zares zanemarljivo majhna. Tega pa ne moremo trditi pri Brewstrovem pojavu v elastičnih telesih. Pri odboju in lomu elastičnih valov si tudi ni mogoče zamisliti mikroskopske razlage, ki bi bila analogna razlagi s sevajočimi dipoli v optičnem primeru.

NOVE KNJIGE

PATERSON A. R., A first course in fluid dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne 1985, 528 str.

Učbenik *Prvi tečaj iz dinamike tekočin* predstavlja prijetno osvežitev med precejšnjim številom učbenikov v hidrodinamiki. Odlikuje ga skrben izbor snovi in večji poudarek na fizikalnih predstavah kot na golem matematičnem formalizmu. Obravnavana snov znatno presega to, kar se naši študenti fizike lahko naučijo v kratkem tečaju iz hidromehanike v okviru predmeta Mehanika kontinuumov. Študij po tem učbeniku ne zahteva mnogo predznanja. Študent mora biti seznanjen z osnovnimi pojmi iz Newtonove mehanike, z naravo in fiziko valovanj ter z osnovami atomske strukture snovi. Pričakuje se tudi obvladanje osnovnih metod višje matematike. Učbenik je razdeljen na 17 poglavij. Navier-Stokesova gibalna enačba je izpeljana šele v osmem poglavju. Prejšnja poglavja so namenjena matematičnemu in fizikalnemu uvodu, kinematiki tekočin in hidrostatiki. V devetem poglavju se seznanimo z nekaterimi enostavnimi primeri tokov, pri katerih ima pomembno vlogo viskoznost. Tu so obravnavane tudi zahtevnejše teme, kot na primer dušenje in difuzija vrtincev, tok v mejni plasti in tok pri velikih Reynoldsovih številih. Sledijo poglavja o neviskoznem toku tekočin, o teoriji hitrostnega potenciala, o zvočnih valovanjih in o gravitacijskih valovanjih. Štirinajsto poglavje je edino poglavje, ki se dotakne problema hidrodinamike stisljivih tekočin. Govori o podzvočnem in nadzvočnem toku v plinih. Tu se prvič srečamo z nelinearnimi pojavi v hidrodinamiki. Podobno matematiko uporablja naslednje poglavje, ki je namenjeno razlagi valovanj velikih amplitud in opisu hidravličnega skoka v kanalih. Zadnji dve poglavji o kompleksnem potencialu in konformnih preslikavah rabita predvsem kot osnova za razlago in razumevanje dinamike letalskega krila. Obilica skrbno izbranih nalog in komentirani seznami literature na koncu poglavij naredijo učbenik še bolj uporaben. Študentom in učiteljem ga priporočam.

Peter Gosar

PERELOMOV A., Generalized Coherent States and Their Applications, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1986, XI + 320 str.

Leta 1926 je Schrödinger pokazal, da obstajajo rešitve valovne enačbe za kvantni harmonski oscilator v obliki valovnih paketov, ki so časovno stabilni in se ne razlezejo. V šestdesetih letih je Glauber uporabil tovrstne rešitve Schrödingerjeve enačbe za kvantni opis oscilacij električnega polja v laserskem žarku in jih poimenoval koherentna stanja. V zadnjih dveh desetletjih so postala koherentna stanja pomembno orodje v rokah teorijskih fizikov na raznih področjih od optike do kvantne elektrodinamike, nelinearnih teorij polja, jedrske fizike in v najrazličnejših vejah fizike trdnih snovi. Časovni potek koherentnega stanja opisuje gibanje, ki je zelo podobno klasičnemu gibanju. Odtod velika nazornost in uporabnost koherentnih stanj. Narava in lastnosti koherentnih stanj so tesno povezane z dinamično simetrijo fizikalnega sistema. Možna je vpeljava generaliziranih koherentnih stanj za fizikalne sisteme, katerih dinamično simetrijo opisuje poljubna Liejeva grupa. Monografija profesorja Perelomova z Inštituta za teorijsko in eksperimentalno fiziko v Moskvi obravnava teorijo generaliziranih koherentnih stanj. Delo je razdeljeno na tri dele. V prvem delu je predstavljen formalizem generalizacije koherentnih stanj. Tu so obravnavana koherentna stanja za nekatere enostavne tipske grupe, na primer za tridimenzionalno rotacijsko grupo ali n-dimenzionalno Lorentzovo grupo. V drugem delu, ki je matematično zahtevnejši, avtor raziskuje lastnosti generaliziranih koherentnih stanj za poljubno Liejeve grupe. V tretjem delu pa so predstavljeni številni primeri za uporabo metode koherentnih stanj v teorijski in matematični fiziki. Monografija je namenjena predvsem profesionalnim matematikom in teorijskim fizikom.

Peter Gosar

JAVOR Petar, Uvod u matematičku analizu. Školska knjiga, Zagreb 1986, 274 str.

Knjiga vsebuje osnovni tečaj analize za študente prvega letnika, še posebej za nematematike. Učbenik je dostopen tudi srednješolcem, saj zahteva le nekaj temeljnega predznanja, npr. poznavanje koordinatnega sistema na premici in v ravnini.

Realna števila so vpeljana aksiomatično. Nato so obdelana zaporedja in vrste ter funkcije ene spremenljivke (posebej limita, zveznost, pregled elementarnih funkcij). Diferencialnemu računu, njegovim izrekom in uporabi sledijo še nedoločeni in določeni integral ter njegova uporaba v geometriji.

Knjigo odlikuje posrečeno ravnotežje med matematično širino in konkretno uporabnostjo. — Nove pojme in izreke spremlja njihova motivacija, dokazi so jedrnati in jasni. K razumljivosti prispevajo tudi številne slike in pregledna ureditev besedila. (Le tu in tam bi si začetnik morda želel še nekaj več komentarja.) Poleg običajnih nalog je v knjigi veliko podrobno rešenih primerov; ob njih se bralec uči matematičnega mišljenja, postavljanja in reševanja problemov. Nekateri primeri so bolj teoretični, npr. razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto, številni pa so vzeti iz geometrije, fizike ali iz vsakdanjega življenja.

Janez Rakovec

MERJENJE IN KRMILJENJE FIZIKALNIH PROCESOV Z MIKRORAČUNALNIKOM

SLAVKO KOCIJANČIČ

PACS 10.50.Ht

Članek navaja funkcije in lastnosti mikroračunalniškega vmesnika, ki je uporaben v merilni tehniki kot del eksperimentalne opreme in kot učni pripomoček za fiziko, ter navede nekaj zgledov za uporabo.

MEASUREMENT AND REGULATION OF PHYSICAL PROCESSES WITH A MICROCOMPUTER

In the article the functions and characteristics of a microcomputer interface aplicable in measurement technique as a part of experimental equipment and didactic device are described and a few examples quoted.

Uvod

O uporabi mikroračunalnika kot merilnega instrumenta je Obzornik že poročal [1]. Ta sestavek pa opisuje mikroračunalniški *vmesnik*, ki smo ga razvili za uporabo na različnih ravneh merjenja, eksperimentiranja in poučevanja fizike [2]. Sestavek razčlenjuje delovanje vmesnika, njegove tehnične lastnosti in možnost programiranja. Potrjuje, da je mogoče v šoli preprosto in poceni izvesti poskuse in laboratorijske vaje, ki jih zaradi zapletenosti in cene brez vmesnikov ne bi mogli. Na to temo smo letos junija v Kranju pripravili seminar za učitelje fizike in fizikalnih merjenj. Del sestavka izvira s tega seminarja.

Tehnične lastnosti in funkcije vmesnika

Vmesnik omogoča neposreden stik računalnika z zunanjim svetom na osnovi digitalnih in analognih napetostnih signalov tako pri zajemanju informacij (INPUT) kot pri krmiljenju fizikalnih procesov (OUTPUT). Zato smo ga poimenovali *merilno-krmilni vmesnik za ZX Spectrum* ali krajše *MKV*. Z zasnovo vmesnika smo želeli nadomestiti čim več standardne laboratorijske opreme in omogočiti vključitev računalnika tudi v zahtevnejše delo.

Vzporedno z MKV smo razvili tudi precej obširen strojni program, ki poenostavi programiranje v basicu in omogoča večjo hitrost delovanja, kjer je to potrebno [3].

Tehnične lastnosti vmesnika:

— osembitni digitalni vhod,
— osembitni digitalni izhod,
— osem analognih osembitnih vhodov,
— dva analogna osembitna izhoda (2,55 V in 5 V).

Uporaba analognih vhodov na osnovi osembitnega analogno digitalnega pretvornika je preprosta. Vmesnik ima namreč vgrajenih osem različnih napetostnih ojačevalnikov, tako da za vsakega od osmih vhodov lahko izberemo eno izmed osmih merilnih območij. Najnižje napetostno območje je med 0 in 10 mV in najvišje med 0 in 5 V. Poseben dodatek predstavljata vhod za merjenje jakosti električnega toka (ampermeter) in diferencialni vhod. Slednji omogoči, da spremljamo izmenične signale ali odštejemo konstanti del, kar je zlasti pomembno pri merilnih mostičih, saj tako ojačujemo le spremenljivi del merjene količine.

Preden preidemo na posamične aplikacije, opišimo nekaj splošnih funkcij, ki jih zmore računalnik s posredovanjem vmesnika in strojnega programa.

a) Digitalni vhod rabi kot stoparica na osmih neodvisnih mestih. S primernim proženjem in ustavljanjem merimo celo milisekunde. Preizkusili smo stoparico s svetlobnim prekinjalom, lahko pa uporabimo indukcijsko tipalo, mehanično proženje in podobno.

S strojnim programom smo nadomestili merilnik frekvenc. Na izbranem bitu digitalnega vhoda štejemo prehode iz logične 1 v logično 0 v naprej določenem času (okoli 0,8 sek). Izmerjeno frekvenco za sinusni in pravokotni generator smo kontrolirali z Iskrinim generatorjem *RC* (MA 3605) in ugotovili na območju od 1 kHz do 25 kHz največje odstopanje 0,3 %. Za višje frekvence smo uporabili binarni števec (7493) kot delitelj frekvence, ne da bi relativno napako povečali.

b) Digitalni izhod omogoča krmiljenje diskretnih regulacijskih sistemov. S primernimi izvršilnimi členi (rele, tiristor, triak) lahko usmerjamo tudi naprave z večjo močjo. Posamezni bit digitalnega izhoda uporabimo tudi kot nastavljiv generator pravokotnih napetostnih sunkov, za pogon koračnih motorjev (risalnik $x - y$, roboti) ...

c) Analogna izhoda sta uporabna v analognih regulacijskih procesih in za oblikovanje poljubnih napetostnih signalov.

d) Analogne vhode rabimo pri voltmetru z avtomatično nastavljivim merilnim območjem in kot (osemkanalni) osciloskop s spominom in možnostjo enkratnega proženja. Časovna os računalniškega osciloskopa je navzgor neomejena, s strojnim programom pa lahko merimo največ 22 000-krat na sekundo, kar pomeni, da lahko spremljamo sinusne signale s frekvenco do približno 2 kHz.

Poleg vsega ne smemo pozabiti na to, da z računalnikom lahko obdelamo merske podatke, grafično in tabelarično predstavimo meritve itd. Uporabno stran vmesnika si oglejmo na naslednjih primerih.

Analiza premega gibanja

Pri analizi gibanja merimo dve osnovni količini: pot in čas. Merjenje časa imajo računalniki izvedeno že interno (CLOCK), za merjenje položaja telesa pa smo uporabili kar potenciometer kot napetostni delilnik. Vlogo potenciometra prevzame dolga žica (najbolje iz cekasa), ob kateri drsi kovinska paličica vozička. Položaj vozička dobimo z merjenjem električne napetosti med paličico in negativnim priključkom žice.

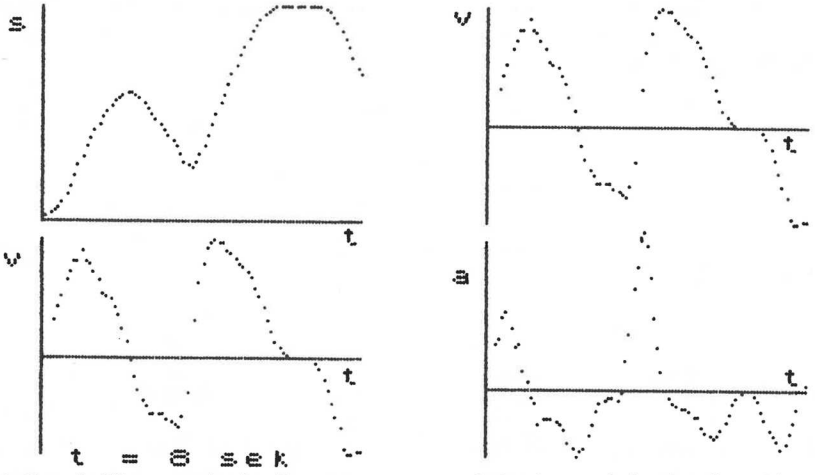
Trenutno hitrost dobimo z odvajanjem izhodnega signala. Drugo odvajanje da časovni potek pospeška. Odstopanje zaradi merilnih napak in šuma signala smo izločili z numeričnim računanjem povprečja petih zaporednih meritev (Sl. 1). Vso računsko obdelavo osemdesetih meritev opravi Spectrum kljub relativni počasnosti v pičlih petnajstih sekundah. Rezultate lahko dobimo tudi s tabelo.

Poleg premega gibanja lahko podobno obdelamo tudi nihanje nitnega nihala.

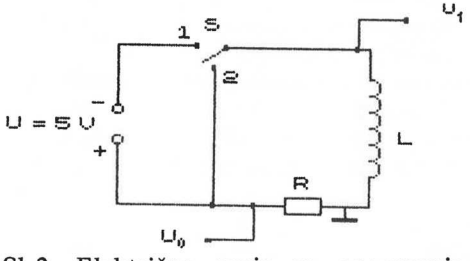
Lastna indukcija

Pojav lastne indukcije srednješolci dokaj težko obvladajo. Na preprostem vezju (Sl. 2) spremljamo naraščanje in padanje električnega toka skozi upor R ob vklopu (1) in izklopu (2) stikala (S) in merimo časovno spreminjanje napetosti U_0.

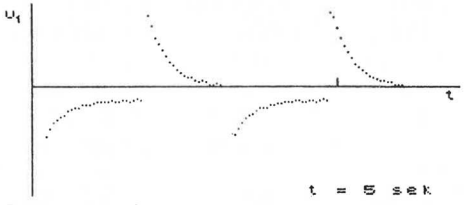
Še zanimivejša je inducirana napetost na tuljavi: ob vklopu se inducira negativna napetost, ob izklopu pa pozitivna zaradi Lenzovega pravila (Sl. 3). Pri vklopljenem stikalu napetost U_1 tudi po daljšem času ne pade na nič zaradi ohmskega upora tuljave. S spreminjanjem napetosti U ob vklopljenem stikalu pokažemo, da velja indukcijski zakon. Uporabili smo tuljavo z visoko induktivnostjo (UNILAB) in upor $R \approx 40\ \mathrm{k}\Omega$.



Sl. 1. Računalniško merjenje časovnega spreminjanja poti in izračun hitrosti in pospeška z odvajanjem



Sl. 2. Električno vezje za opazovanje lastne indukcije



Sl. 3. Inducirana napetost na tuljavi ob izklopu in vklopu stikala

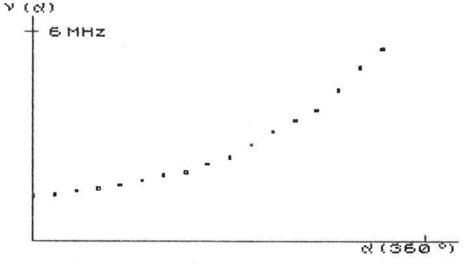
Kapacitetni pretvornik zasukov

Do kapacitetnega pretvornika zasukov smo prišli, ko smo proučevali možnosti te računalniško merjene kapacitete kondenzatorja. Zaradi zapletenosti smo se odpovedali različnim mostičnim vezavam. Izkoristili smo odvisnost frekvence oscilatorja RC [4] od kapacitete kondenzatorja. Frekvenca pravokotnih sunkov je namreč obratno sorazmerna s kapaciteto kondenzatorja. Meritev kapacitet različnih kondenzatorjev z Iskrinim mostičem *RLC* je pokazala, da iz izmerjene frekvence oscilatorja izračunane kapacitete odstopajo največ za 3 %, kar je zadovoljivo glede na natančnost samega mostiča (2 do 3 %). Ker za kondenzatorje z manjšo kapaciteto dobimo frekvence, večje od 25 kHz, smo kot dodatek uporabili omenjene binarne števce. Tako lahko merimo kapacitete, večje od nekaj pikofaradov, neelektrolitičnih kondenzatorjev.

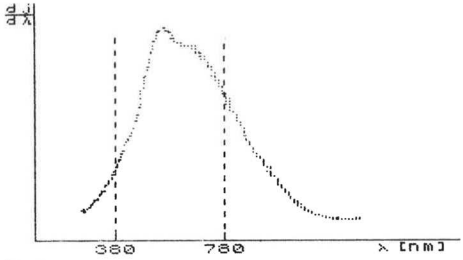
Od tod do kapacitetnega pretvornika zaukov je le še korak, saj smo uporabili preprost vrtljiv kondenzator in ga vezali v oscilator. Z zasukom kapaciteta kondenzatorja pada, frekvenca generatorja *RC* pa raste (Sl. 4).

Merjenje zveznega spektra

Spekter bele svetlobe lahko računalniško izmerimo tako, da optični senzor pomikamo čez spekter, ki ga da uklonska mrežica. Gostoto svetlobnega toka meri senzor, položaj — in s tem valovno dolžino — pa dobimo enako kot pri gibanju (Sl. 5).



Sl. 4. Odvisnost frekvence oscilatorja *RC* od zasuka vrtljivega kondenzatorja



Sl. 5. Zvezni spekter bele svetlobe (kvalitativno)

Kot senzor smo uporabili fotoupornik, čeprav naletimo pri njem na težave v zvezi z nelinearnostjo glede na gostoto svetlobnega toka in spektralno občutljivostjo, za umerjanje pa potrebujemo zahtevno merilno opremo. Te težave bomo zato poskusili odpraviti z uporabo svetlobnega senzorja, integriranim vezjem — TFA 1001 W [5], pri katerem je elektronsko zagotovljena linearnost in je spektralna občutljivost natančno določena s tabelo.

Poleg opisanih primerov uporabe merimo z računalnikom še karakteristiko diode in tranzistorja, opazujemo nihanje toka v električnem nihajnem krogu, polnjenje in praznjenje kondenzatorja, spreminjanje temperature pri kalorimetriji, krmilimo temperaturo sistema, umerjamo temperaturne senzorje (diodni termometer, termistor) ...

Zaključek

Navedeni primeri kažejo, da je v srednjih šolah smotrno in zaželeno uporabljati mikroračunalnike za merjenje in krmiljenje. Sestavek še zdaleč ne izčrpa možnosti, nasprotno, v njem bi morali videti šele začetek. Naša naloga ni namreč le v tem, da pouk popestrimo in izboljšamo, ampak tudi v tem, da približamo učencem sodobno tehniko, kakor pogosto slišimo ugotavljati.

LITERATURA

[1] A. Likar, *Mikroračunalnik kot elektronski instrument*, Obzornik mat. fiz. **32** (1986) 161.

[2] Slavko Kocijančič, *Merilno krmilni vmesnik pri pouku fizike in fizikalnih merjenj*, poročilo za Občinsko raziskovalno skupnost Kranj, Kranj 1986.

[3] Strojni program je napisal Mičo Mrkaič.

[4] C. Standeker, *Krmilna in regulacijska tehnika*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 1983, str. 62.

[5] *Si-Fotodetektoren und IR-Lumineszenzdioden*, Siemens Datenbuch 1985/86, München 1985, str. 315.

VZTRAJNOSTNI MOMENT HOMOGENE TRIKOTNE PLOŠČE

NADA RAZPET

PACS 03.20.+i

V prispevku izračunamo vztrajnostni moment homogene trikotne plošče glede na pravokotnico skozi težišče.

MOMENT OF INERTIA OF A TRIANGULAR SLAB

In the contribution the moment of inertia of a homogeneous triangular slab with respect to the perpendicular axis through the center of mass is calculated.

Pogovor z udeleženci poletne šole mladih fizikov na Bledu v juniju 1986 je nanesel med drugim tudi na vprašanje, kako izračunamo vztrajnostni moment homogene trikotne plošče glede na pravokotnico skozi težišče. Odgovora nismo našli v nobeni šolski knjigi niti v univerzitetni ne. Zato smo si ga poiskali sami. Večina udeležencev je vsaj za silo že poznala pojem dvojnega integrala. Odgovor utegne biti zanimiv tudi za bralce Obzornika.

Naj bo dana homogena ravna tanka trikotna plošča s ploskovno gostoto $\sigma = dm/dS$. Zaznamujmo z A, B, C oglišča trikotnika, z a, b, c pa dolžine stranic. Postavimo koordinatni sistem tako, da je njegovo izhodišče O oglišče C, os x pravokotno na stranico c in s tem os y vzporedna s stranico c (Sl. 1). Oglišči A in B imata pozitivni abscisi. Uvedemo koordinate oglišč: $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, y_2)$ in $C(0, 0)$. Pri tem je $x_1 > 0$ in $y_2 > y_1$. Velja:

$$a^2 = x_1^2 + y_2^2, \quad b^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad c^2 = (y_2 - y_1)^2 \tag{1}$$

Enačba premice skozi točki C in A je $y = (y_1/x_1)\, x$, skozi točki C in B pa $y = (y_2/x_1)\, x$.

Izračunajmo najprej vztrajnostni moment plošče glede na os, ki je pravokotna na ploščo v oglišču C. Naj bo Δ trikotno območje, po katerem bomo integrirali

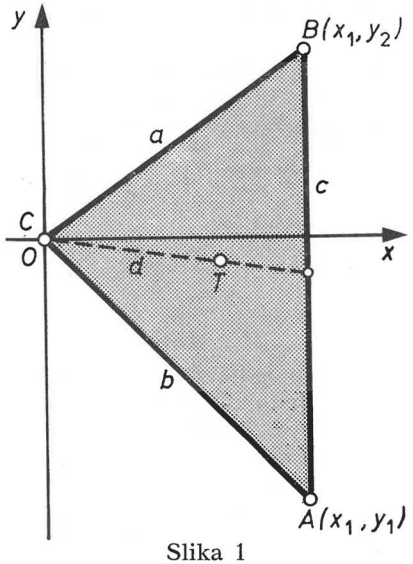
$$\Delta = \{(x, y), 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ (y_1/x_1)\, x \leqslant y \leqslant (y_2/x_1)\, x\}$$

Za vztrajnostni moment J_C dobimo

$$J_C = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int_{\Delta} (x^2 + y^2)\, \sigma\, dS = \\ = \sigma \int_0^{x_1} dx \int_{(y_1/x_1)x}^{(y_2/x_1)x} (x^2 + y^2)\, dy$$

Po integriranju preostane

$$J_C = \\ = \sigma(y_2 - y_1)\, x_1(3x_1^2 + y_1^2 + y_1\, y_2 + y_2^2)/12$$



Slika 1

Masa plošče m je dana z izrazom

$$m = \int dm = \int_{\Delta} \sigma \, dS = \sigma \int_{0}^{x_1} dx \int_{(y_1/x_1)x}^{(y_2/x_1)x} dy = \sigma(y_2 - y_1)\, x_1/2$$

in zapišemo lahko

$$J_C = m(3x_1^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)/6 =$$
$$= m(3(x_1^2 + y_2^2) + 3(x_1^2 + y_1^2) - (y_2 - y_1)^2)/12$$

Končno zaradi (1) izrazimo vztrajnostni moment J_C s stranicami trikotnika

$$J_C = m(3a^2 + 3b^2 - c^2)/12 \tag{2}$$

Težišče T trikotnika ABC ima koordinati: $T(2x_1/3, (y_1 + y_2)/3)$. Razdalja d od točke C do točke T je dana z izrazom

$$d^2 = (4x_1^2 + (y_1 + y_2)^2)/9 = (2(x_1^2 + y_2^2) + 2(x_1^2 + y_1^2) - (y_2 - y_1)^2)/9$$

Iz (1) sledi

$$d^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/9 \tag{3}$$

Vztrajnostni moment glede na pravokotnico skozi težišče T J_T dobimo po Steinerjevem izreku: $J_C = J_T + m\, d^2$. Po krajšem računu iz (2) in (3) imamo končno

$$J_T = m(a^2 + b^2 + c^2)/36 \tag{4}$$

Izračunajmo še vztrajnostni moment homogene tanke ravne plošče, ki ima obliko pravilnega n-kotnika z maso m in polmerom očrtanega kroga r, in to glede na pravokotnico skozi težišče mnogokotnika. Pravilni n-kotnik razdelimo na n skladnih enakokrakih trikotnikov s kraki dolžine r in osnovnico $a = 2r \sin(\pi/n)$. Masa takega trikotnika je m/n, vztrajnostni moment glede na os, pravokotno skozi vrh, pa je po (2)

$$J_1 = (m/n)\,(6r^2 - 4r^2 \sin^2(\pi/n))/12 = (m\, r^2/n)\,(3 - 2\sin^2(\pi/n))/6$$

Vztrajnostni moment J celega mnogokotnika je

$$J = n\, J_1 = m\, r^2(3 - 2\sin^2(\pi/n))/6 = (m\, r^2/2)\,(1 - (2/3)\sin^2(\pi/n)) \tag{5}$$

Če število n raste preko vseh meja, dobimo vztrajnostni moment krožne plošče glede na pravokotnico skozi središče

$$J = m\, r^2/2 \tag{6}$$

Vztrajnostne momente pokončnih prizem, ki jih zgradimo nad trikotnikom, pravilnim n-kotnikom ali krogom, dobimo s formulami (2), (4), (5), (6), v katerih se količine a, b, c, r nanašajo na osnovne ploskve, višina prizme pa se skrije v maso m. Pri tem mislimo na vztrajnostne momente glede na osi, ki so vzporedne tvorilkam prizem, vsakokrat skozi ustrezne točke na osnovni ploskvi: v (2) skozi oglišče C osnovne ploskve, v (4) skozi težišče osnovne ploskve, v (5) in (6) skozi središče osnovne ploskve.

POLETNA ŠOLA OPAZOVALNE ASTRONOMIJE IN ASTROFIZIKE VATIKANSKEGA OBSERVATORIJA

TOMAŽ ZWITTER

PACS A 95.55.Cs
A 98.60.Km

Po kratkem opisu poteka šole govori članek o dveh obravnavanih temah. Prva obravnava astronomski teleskop MMT, ki je začetnik generacije večzrcalnih teleskopov. Druga govori o rezultatih merjenj porazdelitve galaksij, ki kažejo na mehurčasto strukturo vesolja.

VATICAN OBSERVATORY SUMMER SCHOOL IN OBSERVATIONAL ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

After a short description of the school two topics discussed there are mentioned. The first theme is the properties of the Multiple Mirror Telescope (MMT). The second is the evidence for the bubble structure of the Universe, discovered by recent measurements of the distribution of galaxies.

Uvod

Med 10. junijem in 10. julijem 1986 je bila v Castel Gandolfu blizu Rima poletna šola astrofizike z udeležbo 25 študentov podiplomcev iz šestnajstih držav. Verjetno bo Vatikanski observatorij organiziral naslednjo podobno šolo čez dve leti. Glavne teme šole so bile novi teleskopi in detektorji v astronomiji, zvezdna spektralna klasifikacija in problematika galaksij. Predstavili bomo pomembna prispevka k razvoju prvega in zadnjega področja v zadnjih letih.

Večzrcalni teleskop MMT

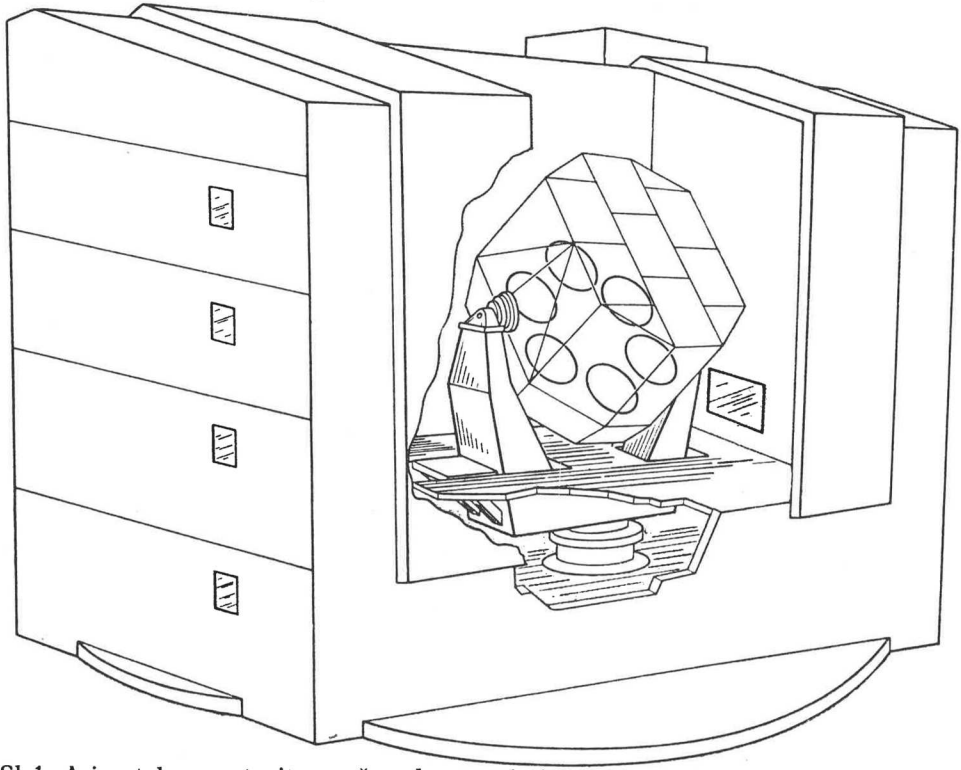
Pomembnejši severnoameriški teleskopi so postavljeni ob meji z Mehiko blizu pacifiške obale. Število jasnih noči je tam največje, svetlobno onesnaževanje pa je pod državnim nadzorom. Najbolj znan je teleskop s premerom zrcala 5 metrov; stoji na gori Palomar. Od leta 1979 pa je na sosednjem, 2600 metrov visokem Mt. Hopkinsu večzrcalni teleskop (Multiple Mirror Telescope — MMT), ki je zaradi mnogih izvirnih rešitev prvi predstavnik nove generacije teleskopov, kakršne sedaj gradijo tudi v Čilu in v Sovjetski zvezi.

Dober astronomski teleskop mora imeti predvsem tri lastnosti. Objekti, ki jih opazujemo, so zelo temni, zato mora teleskop zbrati čimveč njihove svetlobe. Ker so astronomski objekti pogosto blizu skupaj, mora imeti teleskop veliko kotno ločljivost. Končno mora biti slika astronomskega objekta nepopačena. Zato se oblika zrcal zaradi obremenitev ali temperaturnih sprememb ne sme spreminjati.

Pri klasičnih teleskopih so rešili prvi dve zahtevi s čimvečjim primarnim zrcalom. Vendar je tako velikemu zrcalu težko držati pravilno parabolično obliko. Zato so v MMT vgradili šest manjših vzporedno postavljenih zrcal. Pravzaprav je MMT sestavljen iz šestih teleskopov, ki stojijo na istem podstavku, svetlobo pa po odboju na prizmi zbirajo v skupno sliko.

Zrcala so narejena po novi tehnologiji. Klasično so masivni blok stekla z dolgotrajnim brušenjem oblikovali v želeno obliko. Sedaj steklo stalijo v vrteči se peči in ko se ohladi, ima parabolično obliko. Plast stekla na ulitem zrcalu je lahko mnogo tanjša kot pri brušenem zrcalu. Zato je tako zrcalo okrog dvajsetkrat lažje od brušenega z enakim premerom. Če upoštevamo,

da je cena teleskopa vsaj sorazmerna s težo zrcala, je prihranek očiten. Mehansko trdnost daje zrcalu votlo podporno satovje, skozi katero zrcalo tudi temperaturno stabilizirajo. Steklo je prevlečeno z aluminijem, ki dobro odbija tudi bližnji UV del spektra.



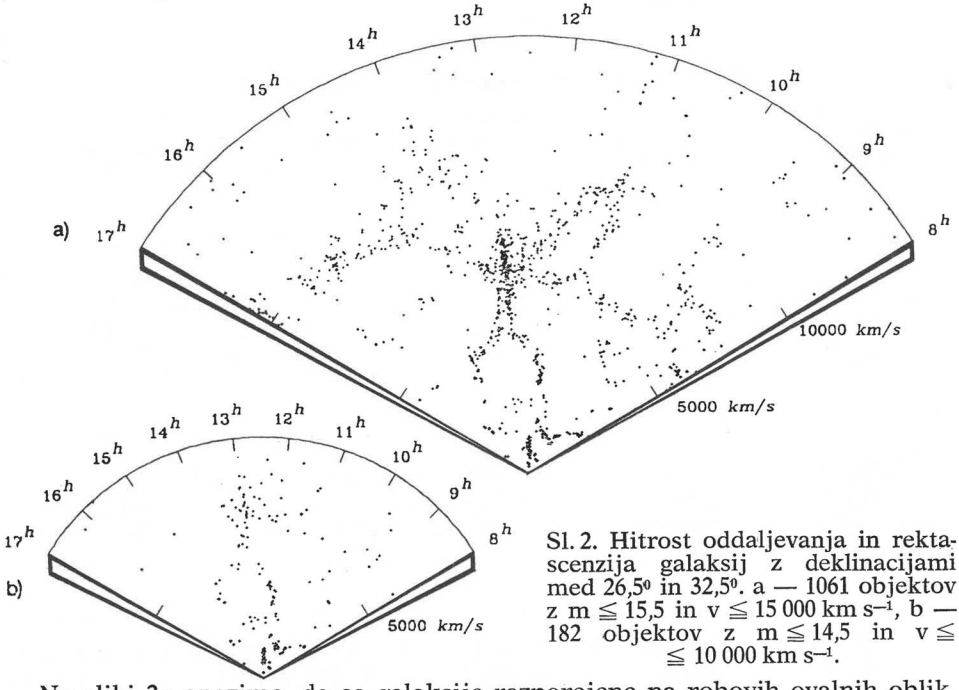
Sl. 1. Azimutalna postavitev večzrcalnega teleskopa MMT [1]. Stavba, v kateri so tudi spremljajoči laboratoriji, se vrti skupaj z njim.

Zrak, ki je ujet v kupoli teleskopa, nima iste temperature kot okolica. Zato se razvije konvekcija, migotanje slike pa močno zmanjša ločljivost teleskopa. Problem so rešili tako, da so teleskop zaprli v zgradbo, ki se mu tesno prilega in je zato v njej mnogo manj zraka kot v klasični kupoli. Teleskop je montiran azimutalno, stavba pa se vrti skupaj z njim. Upravljanje teleskopa je popolnoma avtomatizirano. V večini primerov astronomom sploh ni potrebno biti na gori, ampak lahko opazujejo iz kontrolnega centra v dolini. V zadnjih letih je bil MMT vključen v veliko opazovalnih projektov. Izstopajo raziskave kinematike galaksij in zvezdnih kopic ter odkritje gravitacijskih leč.

Mehurčasta struktura vesolja

Na isti gori kot MMT stoji tudi manjši 1,5-metrski teleskop. Več kot pol brezmesečnih noči v zadnjih osmih letih so z njim merili rdeče premike galaksij. Rezultat je doslej najpopolnejši pregled hitrosti oddaljevanja 1100 galaksij v 117^0 dolgem in 6^0 širokem pasu s središčem v smeri, pravokotni na disk naše galaksije [2]. Lege galaksij, ki se oddaljujejo s hitrostmi, manjšimi

od 15 000 km s^{-1}, in ki so svetlejše od 15,5. magnitude* (Sl. 2a), so vrisali v polarni diagram. Koordinati sta hitrost oddaljevanja in rektascenzija. Po Hubblovem zakonu** je oddaljenost galaksije sorazmerna s hitrostjo oddaljevanja. Zato predstavljata diagrama na sliki 2 tudi ravninski presek prostorske porazdelitve galaksij.



Sl. 2. Hitrost oddaljevanja in rektascenzija galaksij z deklinacijami med 26,5° in 32,5°. a — 1061 objektov z m $\leqq$ 15,5 in v $\leqq$ 15 000 km s^{-1}, b — 182 objektov z m $\leqq$ 14,5 in v $\leqq$ $\leqq$ 10 000 km s^{-1}.

Na sliki 2a opazimo, da so galaksije razporejene na robovih ovalnih oblik. Gledano prostorsko, so galaksije na robovih mehurčkov. Mehurčasto strukturo opazimo tudi na sliki 2b, kjer so vrisane le svetlejše galaksije (do 14,5. magnitude). Tipičen mehurček je okoli tisočkrat večji od povprečne galaksije.

Mehurčasta struktura pomeni, da galaksije v vesolju niso porazdeljene homogeno in izotropno. To so trdili že prej [5], vendar s precej manj opazovanji. Teh rezultatov še ne znamo teoretično pojasniti.

LITERATURA

[1] N. P. Carleton, T. E. Hoffman, *The MMT Observatory on Mount Hopkins,* Sky and Telescope **52** (1976) 14.

[2] V. de Lapparent, M. J. Geller, J. P. Huchra, *A Slice of the Universe,* Astrophysical Journal **302** (1986) L 1.

[3] M. Prosen, *Nekaj o osnovnih fotometričnih količinah v astronomiji,* Obzornik Mat. fiz. **16** (1969) 33.

[4] J. Strnad, *Vesolje,* Obzornik Mat. fiz. **24** (1977) 123.

[5] R. P. Kirshner, A. Oemler, P. L. Schechter, S. A. Schectman, *A Million Cubic Megaparsec Void in Bootes?* Astrophysical Journal **248** (1981) L 57.

* Z navideznimi magnitudami izražamo navidezni sij astronomskih objektov. Najtemnejše zvezde, ki jih vidimo s prostimi očmi, so 6. magnitude. Objekti 14,5. oziroma 15,5. magnitude so 4000 oziroma 10 000-krat temnejši. Glej tudi [3].

** Sorazmernostni faktor je Hubblova konstanta [4]. Njena vrednost je med 50 in 100 km s^{-1} Mpc^{-1}.

FIZIKALNA OLIMPIADA V VELIKI BRITANIJI

BOJAN GOLLI

PACS 0190

Zapis poroča o 17. mednarodni fizikalni olimpiadi leta 1986 v Harrowu. Omeni neuradno razvrstitev držav in poskuša poiskati vzroke za našo slabo uvrstitev. Nazadnje navede besedilo teoretičnih in eksperimentalnih nalog.

THE PHYSICS OLYMPIAD IN GREAT BRITAIN

In the contribution the 17th International Physics Olympiad 1986 in Harrow is reported. The unofficial score is mentioned and possible causes for the failure on the Yugoslav delegation are discussed. Finally, the translation of the text of the theoretical and experimental exercises is reproduced.

17. mednarodna fizikalna olimpiada je bila od 13. 7. do 10. 7. 1986 v Harrowu, predmestju Londona. Harrow je med angleškimi srednjimi šolami pojem elitne privatne šole, podobno kot Oxford in Cambridge med univerzami. Tu so se šolali mnogi znameniti Angleži in tujci, med njimi W. Churchill in Jawaharlal Nehru. Tradicijo smo opazili na vsakem koraku; žal tudi v prostorih, kjer so bili nastanjeni tekmovalci, saj je bila oprema nekako iz srede preteklega stoletja.

Udeležba na olimpiadi je bila rekordna. Prišlo je 21 delegacij. Prvič sta se tekmovanja udeležili Kitajska in ZDA, od lanskih udeležencev pa ni bilo Vietnamcev. Opazovalci so prišli iz Avstralije in Kuvajta. Našo delegacijo so sestavljali učenci Grega Cigler (Ljubljana), Donko Donjerković (Split), Petar Maksimović (Beograd), Pavle Popović (Ljubljana) in Ivan Ristić (Beograd). Spremljevalca sva bila Draško Grujić in Bojan Golli.

Za nas je bila letošnja olimpiada še posebej zanimiva zaradi primerjave z lansko v Portorožu. Glede namestitve, izletov in aktivnosti v prostem času smo bili seveda v veliki prednosti pred Angleži. Vsi udeleženci lanske olimpiade so z navdušenjem obujali spomine na izjemno prijetno razpoloženje v Portorožu. Po organizacijski strani je angleška olimpiada potekala podobno kot naša, saj so Angleži skoraj popolnoma prevzeli naš urnik, pa tudi nekaj naših spodrsljajev. Strokovno je bila prireditev neoporečna; teoretični in praktični del tekmovanja sta tekla brez zastojev, naloge so bile na visoki strokovni ravni, popravljalci in ocenjevalci so svoje delo opravili resno in odgovorno. Pripombe so letele v glavnem na izbiro tem, saj je bila večina nalog iz optike ter nihanja in valovanja. Razprava o nalogah se je zavlekla precej bolj kot pri nas; bilo je veliko pripomb zaradi pretirano zapletene formulacije. To po svoje priča, da so sestavljalci naših nalog zares skrbno opravili svoje delo in pomeni priznanje za ljubljansko in zagrebško univerzo.

Na tekmovanju so bili ponovno najuspešnejši učenci iz Sovjetske zveze. Zanimivo je, da so bili letos najboljši tudi pri eksperimentalnem delu, pri katerem so bili lani le četrti, čeprav je bila ena naloga s področja računalniške simulacije. Zdi se, da so se ob lanski računalniški nalogi zavedeli svojega relativnega zaostanka na tem področju in letos že nadomestili zamujeno, vsaj pri pripravi najboljših učencev. Izjemno uspešno so začeli Kitajci. Dve leti, ko so se olimpiad udeleževali kot opazovalci, so dodobra izkoristili za nabiranje izkušenj. Videlo se je tudi, da njihovo znanje ne izvira le iz priprav, temveč da prihajajo iz dobrih šol, saj so vsi trije dobro govorili angleško.

Žal pa ne moremo govoriti o uspešnem nastopu naših učencev. Pristali smo skoraj na dnu preglednice. Prehitele so nas celo države, ki v fizikalnih tekmovanjih nimajo še nikakršne tradicije: Avstrija, Kanada, Finska in Turčija. Jugoslovanska delegacija je prejela le »priznanje« za najpočasnejše prevajanje nalog. Neuspeh lahko delno pripišemo že omenjeni izbiri tem za naloge. Optika ter nihanje in valovanje so v naših srednješolskih programih pač skromno zastopani. Vendar ta argument velja tudi za večino drugih udeležencev. Glavni razlog za naš neuspeh je slabo eksperimentalno znanje in pomanjkanje eksperimentalnih spretnosti naših; to pa se ne da nadomestiti na nekajdnevnih pripravah. Zvezno in republiška tekmovanja v eksperimentalnem znanju bi zagotovo povečala zanimanje za eksperimentalno delo med dobrimi učenci in pripomogla k izboljšanju razmer. Izvedba takih tekmovanj je povezana s precejšnjimi stroški in brez podpore širše družbene skupnosti ni uresničljiva.

Slovenski tekmovalci se pri eksperimentalnem delu na splošno precej bolje odrežejo kot tekmovalci iz drugih republik. To je najbrž posledica dejstva, da v naši republiki v zadnjih letih posvečamo večjo skrb eksperimentalni izobrazbi. V drugih republikah pa je v večini šol stanje resnično porazno, saj učenci ne napravijo niti enega samega eksperimenta.

Vse tri teoretične naloge so tipično angleške. Reševalca vodijo postopoma skozi razmeroma zahtevno snov. Pri težjih korakih ponudijo rešitev, ki jo je treba dokazati ali le preveriti. Ponujeno formulo lahko uporabimo pri naslednjih korakih, tudi če nam dokaza ni uspelo izpeljati. Prav tu so naši tekmovalci največ izgubili, saj reševanja niso nadaljevali, brž ko določenega koraka niso rešili.

Neuradna razvrstitev držav po uspehu

Država	Teoretične naloge točke (mesto)	Eksperimentalni nalogi točke (mesto)	Točke skupaj
1. ZSSR	106,82 (1)	56,60 (1)	163,42
2. Romunija	98,45 (2)	38,50 (6)	136,95
3. Kitajska (3 uč.)	52,93 (3)	26,00 (3)	78,93
4. V. Britanija	84,81 (5)	40,50 (4)	125,31
5. Madžarska	84,32 (6)	39,60 (5)	123,92
6. ZR Nemčija	87,06 (4)	34,60 (10—11)	121,66
7. Nizozemska	81,20 (7)	37,20 (8)	118,40
8. Poljska	80,30 (8)	34,60 (10—11)	114,90
9. ZDA	71,87 (10)	37,70 (7)	109,57
10. Češkoslovaška	72,24 (9)	37,10 (9)	109,34
11. DR Nemčija	62,58 (12)	44,00 (2)	106,58
12. Bolgarija	68,07 (11)	24,30 (17)	92,37
13. Švedska	45,41 (14)	34,40 (12)	79,81
14. Turčija	47,00 (13)	31,00 (15)	78,00
15. Finska	41,74 (17)	32,90 (13)	74,64
16. Avstrija	43,52 (16)	26,39 (16)	69,82
17. Kanada	35,00 (18)	32,20 (14)	67,20
18. Jugoslavija	44,15 (15)	18,10 (19)	62,25
19. Norveška	32,69 (20)	22,00 (18)	54,69
20. Kuba	33,41 (19)	17,30 (20)	50,71
21. Islandija (4)	19,32 (21)	12,40 (21)	31,72

Besedilo eksperimentalnih nalog je bistveno skrajšano; v originalu obsega prva naloga 4 tipkane strani, druga pa kar 9. Naloga z mavrico se je izkazala za zahtevnejšo. Velik del tekmovalcev, med njimi žal tudi vsi naši, spektra sploh ni našel. Druga naloga je med vodji delegacij vzbudila številne komentarje. Velika večina je bila odločno proti računalniški simulaciji fizikalnih eksperimentov in zahtevali so, da se take naloge v bodoče s statutom prepovedo. Manjšina, v kateri je bil tudi pisec tega zapisa, pa se s tako ostrim stališčem ni strinjala. Računalniška simulacija je v zadnjih letih pač postala pomembno in koristno orodje v teoretični in eksperimentalni fiziki. Seveda bi bilo zgrešeno, da bi odslej eksperimentalni del olimpiade potekal za računalnikom. Vendar, če želimo, da olimpiada spremlja in odraža sodobne tokove v fiziki, moramo biti pripravljeni sprejeti tudi tako nalogo, še posebej, če je dobra in od tekmovalca zahteva fizikalno znanje in razmišljanje. Angleška naloga je brez dvoma bila take vrste, škoda le, da avtorji niso posvetili dovolj pozornosti preprosti in razumljivi formulaciji navodil in vprašanj. Na sestanku mednarodne komisije smo porabili več ur, da smo dali besedilu sprejemljivo obliko. Na koncu se je izkazalo, da računalniške naloge učencem ne delajo večjih težav, saj so vsi nalogo razmeroma uspešno reševali.

Teoretične naloge

1. Curek svetlobe z valovno dolžino λ in frekvenco f pada pravokotno na dve enaki ozki reži v razmiku d (Sl. 1). Valovanje, ki izhaja iz ene reže, v razdalji x ($x \gg d$) in pod kotom ϑ, zapišemo kot $y = a \cos [2\pi(f t - x/\lambda)]$. Amplituda a je enaka za obe reži.

(i) Pokaži, da lahko skupno amplitudo A valovanj iz obeh rež dobimo tako, da seštejemo dva vektorja; dolžino vektorja pri tem določa amplituda, smer pa faza valovanja. Iz diagrama za seštevanje vektorjev preveri, da velja $A = 2a \cos \beta$, če je $\beta = (\pi d/\lambda) \sin \vartheta$.

(ii) Reži nadomestimo z uklonsko mrežico z N enako razmaknjenimi režami v medsebojni razdalji d. Z vektorsko metodo za seštevanje valovanj pokaži, da amplitude posameznih valovanj tvorijo stranice pravilnega mnogokotnika, katerega oglišča leže na krogu z radijem $R = [a/(2 \sin \beta)]$. Dokaži, da je rezultanta enaka $a \sin N\beta / \sin \beta$, in izpelji izraz za fazo vsote valovanj, merjeno glede na fazo valovanja iz reže na krajišču mrežice.

(iii) Skiciraj $\sin N\beta$ in $1/\sin \beta$ kot funkciji kota β. Pokaži, kako se jakost vsote valovanj spreminja s kotom β.

(iv) Določi jakosti glavnih uklonskih vrhov.

(v) Pokaži, da število glavnih uklonskih vrhov ni večje kot $2d/\lambda + 1$.

(vi) Pokaži, da so glavni vrhovi za dve valovanji z valovnima dolžinama λ in $\lambda + \Delta\lambda$ razmaknjeni za kot $\Delta\vartheta = n \Delta\lambda/(d \cos \vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Izračunaj ta kot za svetlobo iz natrijeve svetilke z $\lambda = 589{,}0$ nm, $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm, $n = 2$ in $d = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ m.

2. Na začetku stoletja so predlagali model, po katerem je Zemlja sestavljena iz kapljevinske sredice z radijem R_c in homogenega plašča do površja Zemlje. V plašču se longitudinalni potresni valovi širijo s hitrostjo v_p, transverzalni pa z v_s. V sredici imajo longitudinalni valovi hitrost v_{cp} ($v_{cp} < v_p$), transverzalni pa se ne morejo širiti.

Potres v točki E na zemeljskem površju povzroči potresni val, ki potuje skozi Zemljo do opazovalca v točki X na zemeljskem površju. Vpeljimo kotno razdaljo med točko E in X: $2\vartheta = \sphericalangle EOX$, če je O središče Zemlje.

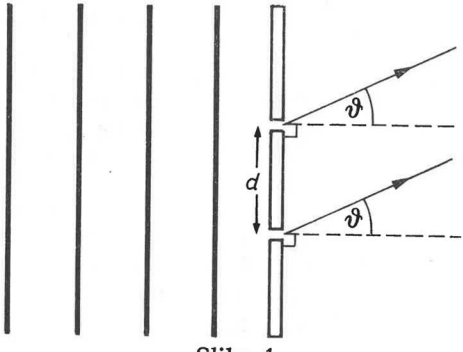
(i) Pokaži, da val, ki potuje v ravni črti, prispe do opazovalca po času $t = 2R \sin \vartheta / v$, če je $v = v_p$ za longitudinalne in $v = v_s$ za transverzalne valove, R pa je radij Zemlje.

(ii) Pri kotnih razdaljah $\vartheta > \arccos (R_c/R)$ prispe potresni val do opazovalca po dveh lomih na meji med sredico in plaščem. Nariši pot takega vala in poišči zvezo med ϑ in vpadnim kotom na mejo.

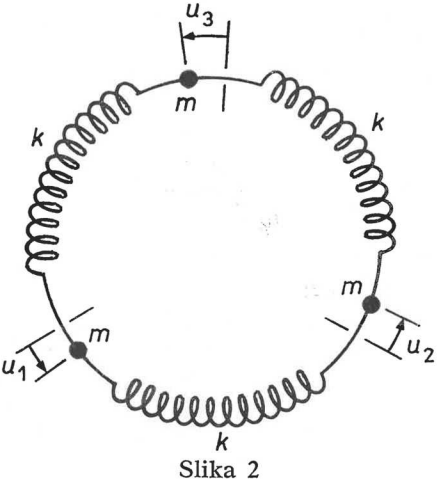
(iii) Nariši graf odvisnosti kota ϑ od vpadnega kota za naslednje podatke: $R = 6370$ km, $R_c = 3470$ km, $v_p = 10{,}85$ km/s, $v_s = 6{,}31$ km/s, $v_{cp} = 9{,}02$ km/s. Razloži, kako opazovalec na različnih mestih na zemeljskem površju zazna potres. Skiciraj, kako se spreminja čas potovanja longitudinalnih in transverzalnih valov v odvisnosti od ϑ, za $0 \leqslant \vartheta \leqslant 90^0$.

(iv) S podatki iz (iii) izračunaj kotno razdaljo, če opazovalec zabeleži časovno razliko 2 minuti in 11 sekund med prihodom longitudinalnega in prihodom transverzalnega vala.

(v) Po določenem času zabeleži opazovalec enak dogodek kot (iv), le da je časovna razlika sedaj enaka 6 minut in 37 sekund. Pojasni meritev in preveri, da je rezultat povezan s kotno razdaljo, ki si jo določil pri (iv).



Slika 1



Slika 2

3. Trije delci z masami po m so v ravnovesju povezani z lahkimi neraztegnjenimi vzmetmi s konstanto k (Sl. 2). Delci se lahko gibljejo le po krogu.

(i) Delce premaknemo iz ravnovesja. Zapiši enačbo gibanja za vsakega od delcev.

(ii) Preveri, da je harmonično nihanje $u_n = a_n \cos \omega t$ rešitev zgornjih enačb, če je u_n odmik delca n, a_n poljubna konstanta, frekvenca ω pa lahko zavzame tri vrednosti $\omega_0\sqrt{3}$, $\omega_0\sqrt{3}$ in 0, $\omega_0^2 = k/m$.

(iii) Zapiši enačbe gibanja, če verigo povečamo na N delcev in N vzmeti. Preveri, da rešitev lahko zapišemo v obliki $u_n(t) = a_s \sin (2\pi\, s\, n/N + \varphi) \cos \omega_s t$, če je φ poljubna faza, $s, n = 1, 2, \ldots, N$, frekvenca pa $\omega_s = 2\omega_0 \sin (s\,\pi/N)$. Določi interval mogočih frekvenc, če N povečamo čez vse meje.

(iv) Določi koeficient u_n/u_{n+1} za zelo velik N v dveh primerih:
a) pri majhnih frekvencah,
b) pri največji mogoči frekvenci.
Skiciraj odmik delca v odvisnosti od njegove zaporedne številke v verigi ob izbranem času za primera a) in b).

(v) Kakšno spremembo v porazdelitvi frekvenc pričakuješ, če enega od delcev nadomestimo z delcem z maso m', $m' \ll m$. Na podlagi tega rezultata kvalitativno opiši obliko frekvenčnega spektra v verigi dvoatomnih molekul, če sta masi atomov m in m'.

Eksperimentalni nalogi

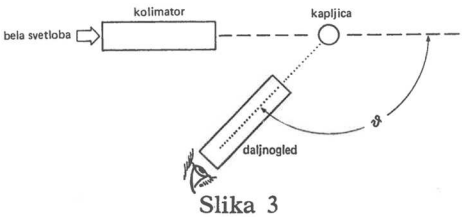
1. Mavrica

A Na voljo imaš:

a) spektrometer s kolimatorjem in daljnogledom (Sl. 3),
b) tri plastične kapalke za tri različne kapljevine,
c) izvir bele svetlobe,
d) stojala z držali, črn zaslon, posodice za različne kapljevine.

B Pojasnilo:

Mavrica nastane po dveh lomih bele svetlobe na površini kapljice in po k ($k = 1, 2, \ldots$) notranjih odbojih; k imenujemo red mavrice. Kot, pod katerim bela svetloba vpade na kapljico, je različen za različne rede. Mavrico prvega reda prepoznamo po največji jakosti, mavrico drugega reda najdemo na drugi strani vpadnega curka (Sl. 3), mavrico petega reda pa opazimo približno na sredi med modrima deloma spektra mavric prvega in drugega reda.



Slika 3

C Naloge:

(i) Curek bele svetlobe preko kolimatorja usmeri na kapljico vode, ki visi na kapalki. Najprej s prostim očesom opazuj mavrici prvega in drugega reda. Nato z daljnogledom izmeri kot, pod katerim dobimo rdečo svetlobo na skrajnem robu vidnega spektra za mavrice prvega, drugega in petega reda.

Za vse tri rede izmeri uklonski kot φ, za katerega se zasuče smer vpadne svetlobe. Nariši uklonski kot v odvisnosti od reda mavrice.

(ii) Določi uklonski kot za mavrico drugega reda za drugi dve kapljevini.

Nariši $\cos(\varphi/6)$ v odvisnosti od $1/n$, če je n lomni kvocient kapljevine. Upoštevaj še teoritično vrednost za $n = 1$. Iz naklona premice določi uklonski kot za kapljevino z $n = 2$. (Lomni kvocienti kapljevin so 1,333, 1,467 in 1,534.)

2. Računalniška simulacija

A Na voljo imaš mikroračunalnik NIMBUS.

B Pojasnila:

Mikroračunalnik rešuje enačbe gibanja 25 delcev, ki so omejeni na ravnino. S pritiskom na ustrezno tipko dobiš na zaslonu različne informacije o legah in hitrostih delcev.

Delci se nahajajo v kvadratni posodi in so na začetku postavljeni v oglišča kvadratne mreže. Delci so enaki; barve ti le omogočajo spremljati njihovo gibanje. Če delec zapusti posodo, program generira nov delec, ki vstopi z enako hitrostjo na nasprotni strani posode; število delcev v posodi se tako ohranja.

Med pari delcev deluje točno določen potencial.*

V računu nastopajo naslednje brezdimenzijske količine: lega, hitrost in masa delcev, kinetična in potencialna energija delcev ter čas.

C Naloge:

(i) Preveri za šest izbranih časov, da se ohranja skupna gibalna količina delcev. Oceni natančnost, s katero računa računalnik.

(ii) Nariši, kako se s časom spreminja kinetična energija.

(iii) Nariši časovni potek potencialne energije za isto izbiro časov kot pri (ii).

(iv) Preveri, da se ohranja polna energija delcev. Oceni natančnost računanja.

(v) Oceni čas, v katerem sistem doseže termodinamično ravnovesje, in določi povprečno vrednost kinetične energije.

(vi) Ko sistem doseže termodinamično ravnovesje, poženi program, ki ti pokaže porazdelitev delcev po hitrostih. Preveri, da porazdelitev ustreza formuli $\Delta N = A \exp\{-v^2/\alpha\}$, če je ΔN število delcev s hitrostjo na določenem intervalu okoli hitrosti v, A in α pa sta konstanti. Določi vrednost za α.

(vii) Za sistem v termodinamičnem ravnovesju odčitaj povprečne vrednosti kvadrata odmika delcev in nariši, kako se to povprečje spreminja s časom. Izračunaj strmino grafa na linearnem področju in določi časovni interval, v katerem je odvisnost še linearna. Je sistem v termodinamičnem ravnovesju kapljevina ali trdna snov? Odgovor utemelji.

RAYLEIGH-JEANSOV PRIBLIŽEK

MARIJAN PROSEN

PACS 97.10.Ri

Članek opiše uporabo Rayleigh-Jeansovega približka Planckovega zakona za zvezde z visoko temperaturo.

THE RAYLEIGH-JEANS APPROXIMATION

In the article the application of the Rayleigh-Jeans approximation of Planck's radiation law for stars of high temperature is described.

V astronomski fotometriji pogosto shajamo z Wienovim približkom Planckovega zakona [1]. Pri visoki temperaturi nad 30 000 K pa lahko uporabimo Rayleigh-Jeansov približek. Tedaj postavimo približno $e^{c_2/\lambda T} = 1 + c_2/\lambda T$ in spektralno gostoto zapišemo z

$$dj^*/d\lambda = (c_1/c_2)\, T\, \lambda^{-4} \qquad (1)$$

λ je valovna dolžina svetlobe, T absolutna temperatura, $c_1 = 2\pi h c_0^2 = 3{,}74 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{Wm^2}$ in $c_2 = h c_0/k = 1{,}44 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mK}$ (Sl. 1).

* Oblika potenciala ustreza van der Waalsovi sili (op. prev.)

S približkom (1) lahko zapišemo enačbe za sij, barvni indeks $B - V$ in bolometrični popravek BK za vroče zvezde.

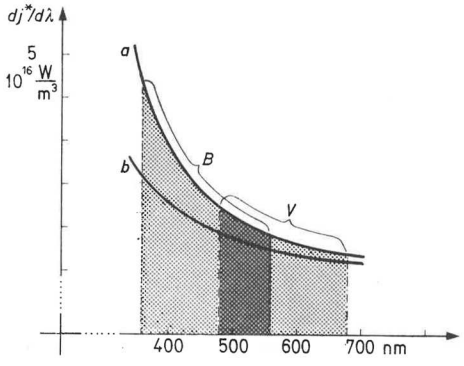
Sij zvezde v določenem spektralnem pasu približno izrazimo s sijem $m(\lambda)$ pri valovni dolžini λ, pri kateri je sprejemnik (na primer oko) najobčutljivejši [1]

$$m(\lambda) = -2{,}5 \log (dj/d\lambda) + C(\lambda) \qquad (2)$$

$dj/d\lambda = \varphi^2 \cdot dj^*/d\lambda$ je spektralna gostota na vrhu zemeljskega ozračja pri valovni dolžini λ, φ pa je polovica zornega kota zvezde [1]. Za $dj^*/d\lambda$ uporabimo (1) in dobimo $m(\lambda) = 10 \log \lambda - 2{,}5 \log T - 2{,}5 \log (c_1/c_2) - 5 \log \varphi + C(\lambda)$. Če za valovno dolžino λ vstavimo valovni dolžini $\lambda_B = 440$ nm in $\lambda_V = 550$ nm, dobimo za *modri sij* $B = m(\lambda_B) = -2{,}5 \log (T/\mathrm{K}) + C_B$ in za *vizualni sij* $V = m(\lambda_V) = -2{,}5 \log (T/\mathrm{K}) + C_V$. Pri tem sta

$$C_B = -2{,}5 \log (c_1/c_2) + 10 \log \lambda_B - 5 \log \varphi - 20{,}43 \quad \text{in}$$
$$C_V = -2{,}5 \log (c_1/c_2) + 10 \log \lambda_V - 5 \log \varphi - 21{,}07.$$

Sledi, da je za vroče zvezde barvni indeks $B - V = C_B - C_V = 10 \log (\lambda_B/\lambda_V) + 0{,}64 \approx -0{,}3$ neodvisen od temperature, kar se ujema z merjenimi vrednostmi barvnega indeksa (Sl. 3 v [1]).



Sl. 1. Rayleigh-Jeansov približek (a) Planckove spektralne gostote (b) v vidnem delu spektra za zvezde, ki sevajo kot črno telo pri temperaturi 30 000 K. Zaznamovali smo spektralna pasova, na katerih merimo modri sij B in vizualni sij V. Velja $B - V < 0$.

Kako se bolometrični popravek izraža z Rayleigh-Jeansovim približkom? Po definiciji je *bolometrični* — ali polni — *sij* $m_{bol} = -10 \log (T/\mathrm{K}) + C_{bol}$, če je $C_{bol} = -5 \log \varphi - 2{,}5 \log \sigma - 19{,}01$ (σ je Stefanova konstanta) [1]. Bolometrični popravek za vroče zvezde je $BK = V - m_{bol} = 7{,}5 \log (T/\mathrm{K}) - 45{,}67$. S to enačbo dobimo oceno za razliko konstant $C_V - C_{bol} = -45{,}67$. Natančnejšo vrednost za to razliko pa ugotovimo iz definicije, da je $BK = 0$ za zvezde s temperaturo okoli 6500 K. Če to upoštevamo, sledi za vroče zvezde $BK \approx 5$. Ocena se ujema z izmerjenimi povprečnimi vrednostmi BK za zvezde zgodnjega spektralnega tipa glavne veje in vroče nadorjakinje [2] (Sl. 4 v [1]).

LITERATURA

[1] M. Prosen, *Uporaba Planckovega zakona v astronomski fotometriji*, Obzornik mat. fiz. **28** (1981) 51.

[2] K. Y. Allen, *Astrofizičeskie veličiny*, Moskva, Mir 1977, 156, 291.

DOMAČE VESTI

PREŠERNOVE NAGRADE ŠTUDENTOV MATEMATIKE IN FIZIKE

Od prihodnjega leta bomo v seznamu diplomantov prve, druge in tretje stopnje na koncu objavljali tudi imena študentov, ki so za minulo leto prejeli Prešernove nagrade na fakulteti oz. na univerzi v Ljubljani. Letos, ko objavljamo ta seznam prvič, smo dodali imena vseh dosedanjih nagrajencev.

Maja Bleiweis, Ciril Velkovrh

Matematika

1957	1. Bohte, Zvonimir	Dvoparametrične grupe matrik
	2. Suhadolc, Anton	Problem momentov s stališča funkcionalne analize
	3. Vencelj, Marija, Vrabec, Jože, Zakrajšek, Egon	Prispevek k zbirki osnovnih podprogramov za elektronski računalnik ZUSE Z-23
1969	4. Kozak, Jernej	Uporaba splinov v numerični analizi
	5. Kramar, Edvard	Fredholmove integralske enačbe prve vrste
1970	6. Hladnik, Milan	Robni problemi za nelinearne diferencialne enačbe drugega reda
1971	7. Rakovec, Janez	Poliedrski Schoenfliesov izrek v trirazsežnem evklidskem prostoru
1972	8. Omladič, Matjaž	Kvadraturne formule po povprečjih
	9. Kranjc, Marko	Singularna homološka teorija
1976	10. Lozej, Miro	Analiza nekaterih direktnih metod za reševanje sistemov linearnih enačb
1984	11. Kovačič, Gregor, Simončič, Aleksander	Dvakrat stohastične matrike
1985	12. Šemrl, Peter	Funkcijske enačbe na Banachovih algebrah
1986	13. Košir, Tomaž	Skupni lastni vektorji matrik

Fizika

1956	1. Pahor, Sergej, Strnad, Janez	Laminarni pretok tekočine skozi okroglo cev
1957	2. Rosina, Mitja	Računska analiza brezstenskega proporcionalnega števca
	3. Blinc, Robert, Pintar, Milan	Aproksimativno potencialno polje furanovega obroča
1959	4. Cvelbar, Franc	Predelava nevtronskega generatorja in umeritev pridelka nevtronov
1960	5. Kregar, Mitja	Fotonuklearna absorpcija v fosforu
	6. Rosina, Mitja	Meritev fotonuklearne absorpcije v kalciju. Ločljivost comptonskega spektrometra
1967	7. Mankoč-Borštnik, Norma	Kako pojema svetlost sten okroglega jaška z globino
1968	8. Jamšek, Marija	Devterijeva resonanca in relaksacija v rochellski soli
1969	9. Stare, Gojko	Gibljivost elektronov v kristalih z ozkimi energijskimi pasovi
	10. Prelovšek, Peter	Fredholmove enačbe prve vrste v fiziki
1970	11. Likar, Andrej	Laminarno gibanje viskozne tekočine ob polravnini
	12. Lončar, Franc	Meritev spinskih temperatur toplotnih rezervoarjev H^1 in N^{14} v monokristalu TGS

1971	13. Kodre, Alojz	Oslabitev rentgenske svetlobe v nehomogenih sredstvih
	14. Mali, Miha	Kvadrupolna sklopitev Rb^{87}, Cs^{173}, As^{75} v feroelektrikih vrste KH_2AsO_4
	15. Seliger, Janez	Analiza razmerja signal-šum pri jedrski dvojni resonanci
	16. Prešern, Janez	Merjenje preseka za radiativno zajetje nevtronov v indiju
	17. Hribar, Marjan	Določitev ekstinkcijskega koeficienta germanija in kriptona v okolici roba K
1972	18. Vedlin, Boris	Difuzija v tekočih kristalih
1973	19. Golli, Bojan	Približek za zvezo med entropijo in dvodelčno gostotno matriko
1974	20. Cevc, Gregor	Proučevanje strukturnih sprememb v kristalu $NH_4H_2AsO_4$ pri prehodu v antiferoelektrično fazo z EPR
	21. Kranjc, Tomaž	Prehodi med nivoji Li* centra v kristalu KCl
	22. Poljšak, Matjaž	Ocena vezavne energije tritona z metodo gostotnih matrik
	23. Rutar, Venceslav	NMR študij absorbirane vode na proteinih
1975	24. Starc, Vito	Študij frekvenčnega odziva s tekočino polnega merilnega sistema za določevanje intrakardialnega pritiska
	25. Javornik, Miroslav	Upogib opne nad tekočino v valjasti posodi
1976	26. Sever, Franc	Protonske valovne funkcije v jedrskem kontinuumu po optičnem modelu
	27. Zgonik, Marko	Dinamika magnetnih mehurčkov
1977	28. Petek, Branko	Prenos toplote v plinu med površinama s poljubno akomodacijo
	29. Robnik, Marko	Razširjanje valovanja v sredstvu s plastovito strukturo — analiza s teorijo grup
1979	30. Križan, Peter	Vpliv absorpcije na odboj zvoka
1981	31. Cvetič, Gorazd	Izkoristek in ločljivost magnetnega spektrometra za meritev reakcije $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$
1982	32. Pleško, Mark	Simulacija nekaterih fizikalnih poskusov z računalnikom
1985	33. Boštjančič, Bojan	Ocena parametrov aparature za pozitronsko tomografijo

Prešernove nagrade podeljene na VDO FNT

Matematika

1986	1. Kukavica, Igor	Pasovno simetrična jedra

Fizika

1984	1. Bedenk, Saša	Magnetometer II. reda s SQUID
	2. Bonča, Janez	Vpliv defektov na fazni prehod med inkomenzurabilno in komenzurabilno strukturo
1985	3. Padežnik-Gomilšek, Jana	Braggov monokromator z ukrivljenim kristalom za meritve rentgenskih Ramanovih spektrov
	4. Lorenčič, Neja	Vpliv mrežnih nihanj na tunelske prehode elektronov v molekulskih kristalih
	5. Bajc, Borut	Maksimalne hiperploskve v Schwarzschildovem prostor-času
	6. Verbovšek, Anton	Stabilnost sistema šestih kvarkov, ki sodelujejo s Hookovo silo
	7. Arčon, Iztok	Podaljšana fina struktura absorpcijskih robov (EXAFS) v Braggovem sipanju rentgenske svetlobe

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORANDOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1986*

Pedagoška fakulteta — Maribor

Matematika — fizika

358. Bek, Irena
359. Cotar, Lidija
360. Drenovec, Breda
361. Emeršič, Ivan
362. Finkšt, Metoda
363. Gašpar, Drago
364. Golob, Marija
365. Gosak, Boris
366. Horvat, Ladislav
367. Hrovat, Marica
368. Kolarič, Lilijana
369. Mlakar, Valentina
370. Mlinarič, Vladimir
371. Pažek, Veronika
372. Planinc, Zmago
373. Šprah, Darja
374. Štelcer, Brigita
375. Vrhovnik, Darja
376. Zalokar, Darinka

Fizika — tehnična vzgoja

274. Bratina, Tomaž
275. Car, Slavko
276. Frank, Jožica
277. Gumzej, Gorazd
278. Jurgec, Rajko
279. Kramer, Marija
280. Premzl, Primož
281. Šalamon, Karel
282. Ul, Jasna

Pedagoška akademija — Ljubljana

Matematika — fizika

760. Jakob, Melita — Merjenje fizikalnih količin z voltmetrom
761. Jordan, Marija — Eksperimenti v zvezi z magnetnim poljem
762. Novak, Darja — Multivibrator pri šolskem pouku
763. Podboj, Helena — Eksperimenti v zvezi z magnetnim poljem
764. Tegelj, Sonja — Digitalna elektrika za osnovno šolo
765. Sedovnik, Damjana — O merjenju dolžine
766. Tekalec, Bojana — Nekaj o tenzorjih
767. Birk, Angela — Vzorci priprav za pouk fizike
768. Krivec, Branka — Poskusi in opazovanje iz astronomije
769. Primožič, Marija — Hladilne naprave
770. Štrajhar, Jožica — Vzorci priprav za pouk fizike
771. Erjavec, Mojca — Dodatni pouk iz matematike v 6. razredu O. Š.
772. Grahek, Mateja — Obravnava veččlenov v osnovni šoli
773. Pšenica, Saška — Dopolnilni pouk v 8. razredu osnovne šole
774. Možina, Stojan — Sončni zbiralnik
775. Košenina, Marija — Osnove sferne geometrije in astronomije
776. Šneljer, Sonja — Grupe in ornamenti
777. Topler, Silva — O enačbah v zgodovini matematike
778. Brecelj, Klavdija — Analiza napak pri testih znanja za 6. razred O. Š.
779. Jeraj, Majda — Obravnava kroga v osnovni šoli
780. Koca, Erika — Dodatni pouk iz matematike v 8. razredu O. Š.
781. Kozina, Andreja — Linearno programiranje
782. Meško, Darinka — Osnovni problemi pri sprehodu v vesolje
783. Bevk, Marija — O linearnih preslikavah
784. Stariha, Marjan — Uvod v teorijo grafov

Matematika — tehnična vzgoja

19. Cencelj, Marinka — Oblikovanje učne teme LITJE z vidika specialne didaktike
20. Zimic, Ljudmila — Različni pogledi na ocenjevanje pri tehnični vzgoji
21. Černigoj, Milena — Boolove mreže
22. Godnič, Evgenija — Uporaba nalog objektivnega tipa
23. Gutnik, Jožica — Motivacija pri pouku tehnične vzgoje
24. Papež, Irena — Industrijski postopki žaganja lesa
25. Albreht, Mojca — Transformacija v ravnini in posebni primeri
26. Školč, Zvonka — Oblikovanje učne teme preizkušanje kovinskih gradiv
27. Mozetič, Vlasta — Obravnava kroga in okroglih teles v osnovni šoli
28. Koprivnikar, Nina — Uporaba lesne — kopirne stružnice na osnovni šoli
29. Weisseisen, Alenka — Izdelava in oblikovanje izdelkov iz umetnih snovi
30. Mikuž, Sonja — Uvod v geometrijo — metrični pristop z modeli
31. Samardžija, Stojanka — Simplicialne homološke grupe sfere in Kleinove steklenice

* Seznam diplomantov iz leta 1985 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **33** (1986) 186—190.

Fizika — tehnična vzgoja

725. Kos, Marija	Izdelava ulitkov v Litostrojski livarni
726. Balas, Polona	Termoelektrarna — toplarna Ljubljana kot vir toplote in električne energije
727. Gregorc, Helena	Optična spektroskopija
728. Vojvoda, Helena	Analiza proizvodnega postopka v DO LIP Bled

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

1. stopnja

Matematika — pedagoška smer **

126. Solomun, Hilda	—
127. Marzidovšek, Vanja	Produkti in vrste za število π
128. Bogatič, Cirila	Fibonaccijeva števila
129. Leskovec, Mateja	Indukcija in barvanje kart

Matematika — uporabna smer**

190. Čas, Alenka	Riemannov izrek o konformnih upodobitvah
191. Jevtić, Branko	—
192. Lukšić, Ivan	Hitra diskretna Fourierova transformacija
193. Rogelj, Janez	Program za prenos podatkov iz centralnega računalnika na osebni računalnik

2. stopnja

Matematika — pedagoška smer

430. Rozman, Vesna	Gibanje v ravnini
431. Kovač-Gregorčič, Irena	Različni načini vpeljave realnih števil
432. Marek, Leila	Zakon dvakratnega logaritma
433. Klopčič, Jože	Računanje števila π
434. Pavletič, Marino	Neevklidične geometrije in relativnost
435. Dolenc-Pintar, Milena	Geometrija krožnice v $\mathbb{R}_2$ in njihova predstavitev v $\mathbb{R}_3$

Matematika — uporabna smer

335. Kržič, Jožica	Časovne vrste in Marguardtova metoda za ocenjevanje parametrov
336. Likon, Tomaž	Aposteriorne ocene za napake pri Gaussovi eliminaciji
337. Fajfer, Dušan	Simuliranje časovnih vrst z intervencijskimi modeli in modeli ARIMA
338. Fabič, Irena	Mere podobnosti grafov
339. Teran, Barbara	Kvalitativna teorija za sisteme diferencialnih enačb
340. Pustovrh, Nevenka	Vsota kvadratov ostankov posplošenih ARMA modelov kot funkcija parametrov modela
341. Spiller-Muys, Maja	Predhodno ocenjevanje nelinearnih parametrov ARMA modelov nesezonskih časovnih vrst
342. Krek, Terezija	Rezanje in celoštevilski nahrbtnik
343. Ribanović, Ozren	Dinamika smuških poletov Planica 85
344. Zupančič, Marta	Grafovski postopki razvrščanja v skupine
345. Dolenc, Tomi	Uporaba zlepkov pri interpolaciji geodetskih meritev
346. Rojko, Cvetka	Optimizacija transporta mineralne vode
347. Istenič, Mojca	Normalizacija zbirk podatkov
348. Eržen, Mojca	Prilagodljive interpolacijske metode
349. Kralj, Ester	Analiza podobnostnih transformacij matrik

Matematika — teoretična smer

13. Hvala, Bojan	Konci grup in simplicitnih kompleksov
14. Saksida, Pavle	Topološka teorija homotopskih metod numerične analize
15. Košir, Tomaž	Skupni lastni vektorji matrik
16. Kukovica, Igor	Pasovno simetrična jedra
17. Bakula, Robert	Matrični zakladi operatorjev

** V teh dveh skupinah navajamo imena samo tistih študentov, ki so izpolnili pogoje in tudi prosili za podelitev diplome.

Fizika — pedagoška smer

98. Perhavec, Suzana — Opazovanje ledenih kristalov v naravi
99. Potokar, Maruša — Vpliv elektrolita na stabilnost milničnih plasti
100. Kranjc, Božidar — Prikaz pojavov v atmosferskem električnem polju

Fizika — tehniška smer

425. Krejan, Alena — Računalniška simulacija gostih plinov
426. Godina, Magda — Razpad vrzeli v podlupinah L pri ksenonu
427. Lebez, Maja — Izboljšava lokalnega modela seizmičnih hitrosti
428. Kobold, Mira — Toplotna prepustnost oken z dvojnimi stekli
429. Kos, Miha — Selektivna magnetizacija pri slikanju s spini
430. Bajc, Borut — Maksimalne hiperploskve v Schwarzschildovem prostorčasu
431. Železnikar, Andrej — Merjenje lastnosti plazme z emisijsko sondo
432. Bahovec, Igor — Meritev meje enorodnosti optičnega vlakna
433. Gomišček, Gregor — Merjenje fluorescence 1-anilinonaftelen-8-sulfonata
434. Jazbinšek, Vojko — Magnetoradiometer III. reda s SQUID
435. Arčon, Iztok — Podaljšana fina struktura absorpcijskih robov (EXAFS) v Braggovem sipanju rentgenske svetlobe
436. Megušar, Franc — Mali hladilni sistem trilingovega tipa z dodatno Joule-Thomsonovo stopnjo
437. Golič, Simona — Izračun NMR spin-spin sklopitvenih konstant z uporabo semiempirične MO metode SCPT-INDO
438. Grdadolnik, Jože — Dekonvolucija karbonilnega traku

Meteorologija

47. Pivec, Irena — Nastanek in značilnosti slane v Sloveniji

3. stopnja

Matematika

41. Bončina, Robert — Funkcionalno-analitični problemi teorije sistemov
42. Bižaca, Žarko — Gladke strukture na R^4

Fizika

79. Topič, Bogdan — Študij psevdo-enodimenzionalnega feroelektrika RbD_2PO_4
80. Korbar, Darko — Simulacija procesov pri interakcijah pionov z nukleoni
81. Dolinšek, Janez — Študij inkomenzurabilnih in komenzurabilnih faznih prehodov v $[N(CH_3)_4]_2ZnCl_4$ z metodo jedrske magnetne resonance dušika 14N
82. Bonča, Janez — Inkomenzurabilne strukture v modelu nasprotujočih se sklopov
83. Ajlec, Bojan — Študij sipanja rentgenske svetlobe na uranu v bližini pragov za fotoabsorpcijo v podlupinah L_2 in L_3: Raman-Coster-Kronigov pojav
84. Ramšak, Anton — Študij reakcije (γ, N_0) v semidirektnih modelih

Doktorske disertacije

Matematika

29. Mohar, Bojan — Grafi v kombinatorični topologiji
30. Batagelj, Vladimir — Induktivni razredi grafov

Fizika

86. Kranjc, Tomaž — Kinetika tunelskih paraelastičnih in paraelektričnih centrov
87. Podgornik, Rudi — Prispevek strukture vode k interakcijam med biološkimi makromolekulami
88. Lukač, Matjaž — Optična detekcija resonančne dipolne interakcije med redkimi spini in spinskim rezervoarjem v $Pr^{+3}:LaF_3$

Zbrala in uredila *Maja Bleiweis* in *Ciril Velkovrh*

Društvo matematikov, fizikov in astronomov sta zadeli dve hudi izgubi: 25. 1. 1987 je umrl njegov častni član profesor dr. Alojzij Vadnal in 22. 2. 1987 njegov častni član profesor dr. Franjo Dominko. V spomin na častna člana prinaša Obzornik nagovora predsednika društva profesorja dr. Franceta Križaniča ob slovesih na žalah.

PROFESORJU ALOJZIJU VADNALU

Društvo matematikov fizikov in astronomov SRS se poslavlja od Vas, od svojega dolgoletnega predsednika in častnega člana.

Zvezde so nam, ko ste stali ob našem krmilu, različno sijale. Zdaj smo se znašli v brezvetrju, zdaj spet smo mogli s polnimi jadri naprej. V poletu in v zastoju se je društvo lahko oprlo na Vaš neusahljivi optimizem, na Vašo vedno trezno presojo. »Nobena dobro zasnovana akcija ne more propasti« ste verjeli, in res nam ni. Bil je v razvoju društva trenutek, ko smo že skoraj vsi dvignili roke. Takrat ste rekli: »Bom pa jaz sam«, vso pezo ste si naložili in društvo varno spravili mimo notranjih čeri.

Največjo pozornost ste v društvu posvečali nastajanju in razvoju matematičnega tiska. Da je to naloga za slovenske matematike, Vas je opozoril tudi Boris Kidrič. In v to naše kolektivno delo ste prispevali lep, pomemben delež.

Ni dobrega matematičnega pisanja brez lepega in skrbnega jezika. Z Vami izgublja slovenščina gorečega poznavalca. V društvu ste od vsega začetka vodili terminološko sekcijo. Skrbno ste zbirali, urejali in sejali slovensko matematično besedišče. Žal Vam ni bilo dano dočakati prenovljene izdaje Matematične terminologije in osemjezičnega Matematičnega slovarja, ki ste ju pripravljali v zadnjih letih.

Kjerkoli se je lahko matematika v naši družbi uveljavila, v raziskovalnem delu, v stikih z gospodarstvom, v šolah vseh stopenj in smeri, v spisih, namenjenih branju zunaj šolskih klopi, povsod ste zapustili sled in z njo bo ostal spomin na človeka, ki je imel matematiko rad, jo zvesto spoznaval in se z njo vred nesebično razdajal.

Za vse, kar ste prispevali matematični kulturi v Sloveniji, hvala.

PROFESORJU FRANJU DOMINKU

Čas je prišel, ko Vam moram, dragemu učitelju in prijatelju, v imenu Društva matematikov, fizikov in astronomov govoriti besede slovesa. S človekom, ki odide od nas, neponovljiv in nenadomestljiv, ugasne tudi njegovo — enkratno in samo njegovo — videnje sveta. Vaš pogled je hotel objeti vse, vso naravo, vsega človeka. Svoje delo astronoma ste poskušali podrejati širokemu, enotnemu naravoslovju, naravoslovje pa Vam je bilo le del splošnočloveškega, humanističnega iskanja. Zato tudi najboljša človekova prijateljica, knjiga, med nami ni imela boljšega prijatelja, kot ste ji bili Vi. Zato ste radi hodili med ljudi, jim pripovedovali in jim prisluhnili. Zato so Vam bili vsi narodi bratje, zato ste bili povsod v svoji deželi, pa naj sta Vas življenje in pot zanesla v Bologno ali v Beograd, v Ljubljano ali v Moskvo.

Delo Vaše pa je bilo vse posvečeno Sloveniji, v njej je našlo pobude in cilje, njej ste na trdno skalo postavili astronomski in geofizikalni observatorij, njej ste odpirali poglede v vsemirje.

Živeli ste z odprtimi očmi in z odprtim srcem. Kljub temu ali pa prav zato ste morali nemalokrat v boj. Bili ste prvi antifašist v Italiji, v naš, jugoslovanski, narodnoosvobodilni boj ste posegli z dušo in s pestjo, saj ste njegovo zmago dočakali na fronti.

In — ali ni bilo tudi Vaše povojno bivanje med nami boj? Za zunanjega opazovalca se je mediteranski temperament spoprijemal z ljubljansko meglo, za nas pa je bilo veliko več. Zvesto ste nam držali ogledalo, svarili ste nas in opozarjali, kadar smo podlegali potrošništvu, biznisu in birokratskim vabam, vzpodbujali ste nas, še več, hujskali ste nas k samostojnemu razmišljanju in k državljanski kreposti. Bojevali ste se proti lažiznanosti in proti lažem o znanosti, pa naj jih je predel ozki akademizem ali ozki pragmatizem. V tem boju ste znali tudi potrpeti, mirno prenesti nasilje vsakršnih meril.

Hvala vam za vse, kar ste naredili, za vse, kar ste nam z življenjem, z delom in z besedo povedali.

RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V L. 1986*

V letu 1986 je oddelek za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani prijavil pri Raziskovalni skupnosti Slovenije 22 raziskovalnih nalog z 23 nosilci in prav toliko sodelavci. V nadaljevanju objavljamo kratke izvlečke vseh del.

Zbral in uredil *Ciril Velkovrh*

Matematična analiza

156. Povsem realne vložitve. Nosilec Franc Forstnerič, sodelavca Emil Beloglavec in Mitja Lakner.

Delo obravnava povsem realne vložitve realnih n-dimenzionalnih mnogoterosti v kompleksen prostor $\mathbb{C}^n$. Glavni rezultat je: Če je $f : M^n \to \mathbb{C}^n$ povsem realna imerzija, ki je regularno homotopna neki vložitvi M^n v $\mathbb{C}^n$, potem je f tudi regularno homotopna neki povsem realni vložitvi M^n v $\mathbb{C}^n$. Vsaka orientabilna kompaktna tridimenzionalna mnogoterost se da povsem realno vložiti v $\mathbb{C}^3$. Obstajajo povsem realne tridimenzionalne sfere v $\mathbb{C}^3$, ki vsebujejo robove analitičnih diskov.

157. Konci diskov. Nosilec Josip Globevnik. Sodelavci: Edgar L. Stout, Aleš Založnik in Anton Cedilnik.

V delu je obravnavano Obnašanje na robu holomorfnih preslikav f z enotnega diska $U \subset \mathbb{C}$ v $\mathbb{C}^N$. Pri nekaterih dodatnih predpostavkah dokažemo naslednje: če je f injektivna na U in če jo je mogoče zvezno razširiti na U, tedaj je f injektivna na $b\,U$. Dalje, če sta f, g pravi holomorfni preslikavi z U v B_2, odprto enotno kroglo v $\mathbb{C}^2$, ki ju je mogoče zvezno razširiti na $\tilde{U}$, tedaj pri nekaterih dodatnih predpostavkah velja naslednje: če ima $f(b\,U) \cap g(b\,U)$ pozitivno dolžino, tedaj je $f(U) = g(U)$.

158. Projekcijske lastnosti Arhimedovih f-algeber. Nosilec Boris Lavrič, sodelavec Mirko Dobovišek.

Freudenthalov spektralni izrek je moč v splošnem Arhimedovem Rieszovem prostoru formulirati na dva različna načina. Karakterizirani so Rieszovi prostori, v katerih velja ena ali druga oblika Feudenthalovega spektralnega izreka. Podobno so pisani Rieszovi prostori, ki imajo dovolj projektorjev, prav tako tudi U-algebre in urejenostno o-polne Arhimedove f-algebre z enoto. Kot aplikacija je podana posplošitev Hahn-Banachovega izreka na module nad U-algebro in nad kompleksifikacijo Dedekindovo polne f-algebre z enoto. Omenjene projekcijske lastnosti so v prostorih tipa $\varphi(X)$ opisane tudi s topološkimi lastnostmi prostora X.

159. Posplošitve pojma ekstremne točke. Nosilec Gorazd Lešnjak, sodelavec Milan Hladnik.

Naloga definira posplošitve pojmov ekstremne točke, točke gladkosti in šibke diferenciabilnosti norme. Obravnava odnose z znanimi pojmi geometrije normiranih prostorov. Pokaže, da tudi za posplošene pojme veljajo rezultati, ki so analogni klasičnim. Podana je krepka oblika izreka o maksi-

* Izvlečki raziskovalnih nalog iz leta 1985 so bili objavljeni v Obzornik mat. fiz. **33** (1986) 121.

mumu norme za holomorfne preslikave z vrednostmi v normiranih prostorih. Izpelje kriterij za kompleksno enakomerno konveksnost prostora končno aditivnih vektorskih mer. Karakterizira kompleksne ekstremne točke nekaterih prostorov operatorjev oziroma njihovih dualov.

160. Operatorji ohranjevalci. Nosilec Matjaž Omladič, sodelavec Janko Gravner.

Naj bo $L(X)$ algebra omejenih operatorjev na netrivialnem kompleksnem Banachovem prostoru X in $F : L(X) \to L(X)$ neka linearna preslikava. V delu so obravnavane lastnosti takih preslikav F, ki ohranjajo nekatere lastnosti operatorjev iz $L(X)$. Ključen je rezultat, da so preslikave F, ki ohranjajo rang operatorjev, bodisi oblike $F(A) = U A U^{-1}$ bodisi oblike $F(A) = U A' U^{-1}$, kjer je A' adjungirani operator k operatorju A. Iz tega dejstva sledi najprej, da je vsaka preslikava F, ki ohranja komutiranje poljubnih parov operatorjev, specifične oblike, nato pa še, da je tudi vsaka preslikava, ki ohranja numerični rang reda k, specifične oblike. Zadnji rezultat je izdelan le za primer Hilbertovega prostora.

161. Nekatere funkcionalne enačbe v Banachovih algebrah in sorodni problemi. Nosilec Edvard Kramar, sodelavec Bojan Magajna.

Raziskava obravnav nekatere funkcionalne enačbe v kompleksnih Banachovih algebrah. Ena teh funkcionalnih enačb je v tesni zvezi z odvajanji na Banachovih algebrah. Dokazana je posplošitev klasične Jordan-Neumannove karakterizacije prehilbertovega prostora.

Topologija

162. Geometrijska topologija 3-mnogoterosti. Nosilec Dušan Repovš, sodelavec Janez Rakovec.

V prvem delu naloge obravnavamo celičaste dekompozicije topoloških 3-mnogoterosti, ki imajo vložitveno dimenzijo največ 1. Izpeljemo nov kriterij skrčljivosti za takšne dekompozicije in dokažemo nov izrek o prepoznavanju topoloških 3-mnogoterosti v razredu posplošenih 3-mnogoterosti.

V drugem delu naloge obravnavamo regularne okolice homotopsko kosoma-linearno vloženih kompaktnih poliedrov v topoloških 3-mnogoterostih. Med drugim dokažemo, da obstajajo vozli, ki imajo skupno hrbtenico, čeprav njihovi komplementi v 3-sferi niso homeomorfni prostori.

163. Topologija splošne algebraične enačbe. Nosilec Jože Vrabec, sodelavca Matija Cencelj in Zlatan Magajna.

Naj bo polinom $D_n(t_1, \ldots, t_n)$ diskriminanta splošne algebraične enačbe stopnje n z realnimi ali kompleksnimi koeficienti $1, t_1, \ldots, t_n$. Glavni rezultati tega dela podajajo opis globalne topološke strukture diskriminantne množice $D_n^{-1}(0)$. Dokazano je, da obstajata taka končna CW kompleksa X_n (dimenzije $n-3$) in Z_n (dimenzije $2n-5$), da je realna (oziroma kompleksna) diskriminantna množica homeomorfna produktu realne premice (oziroma kompleksne ravnine) z neskončnim stožcem nad kompleksom X_n (oziroma Z_n). Nizko dimenzionalni kompleksi $X_3, X_4 X_5$ in Z_3 so določeni povsem eksplicitno, za druge pa je podan principialni kombinatorni opis.

Numerična in računalniška matematika

164. Analiza podobnostnih transformacij matrik. Nosilec Zvonimir Bohte, sodelavec Marko Petkovšek.

V prvem poglavju je najprej obdelana splošna analiza zaporedja ortogonalnih podobnostnih transformacij, nato pa analiza zaokrožitvenih napak pri Givensovi metodi za redukcijo simetrične matrike na tridiagonalno obliko in nesimetrične matrike na zgornjo Hessenbergovo obliko. V drugem poglavju je obdelana splošna analiza zaporedja neortogonalnih podobnostnih transformacij, nato pa analiza zaokrožitvenih napak pri redukciji nesimetrične matrike na zgornjo Hessenbergovo obliko z eliminacijami. Tretje poglavje vsebuje članek, ki povzema rezultate iz drugega poglavja.

165. Računalniško orientirane matematične metode, 11. del. Nosilec Janez Grad, sodelavec Janez Barle.

V raziskavi so opisani nekateri algoritmi za določanje začetne rešitve linearnega programa. Klasični postopki so prva faza dvofazne Dantzigove metode in hevristični postopki vključeni v podprogram CRASH. Med sodobnejše pristope k reševanju tega problema spadata Karmarkarjev algoritem in postopek dualen Fourier-Motzkinovi metodi. Poudarjeni so tudi problemi računalniške realizacije opisanih algoritmov. Za Karmarkarjev algoritem je napisan in testiran program na APL.

166. Numerične metode za stabilno reševanje nekaterih navadnih in parcialnih diferencialnih enačb. Nosilec Andrej Kmet, sodelavec Bojan Orel.

V prvem delu je opisanih več metod za numerično reševanje robnega problema za navadne diferencialne enačbe drugega reda z majhnim parametrom. Pokazana je eksistenca in ocenjena napaka numerične rešitve. Podan je primer. V drugem delu sta analizirana stabilnost in red eksplicitnih in semi-implicitnih diferenčnih metod za reševanje nekaterih parcialnih diferencialnih enačb. V tretjem delu je predstavljen postopek za konstrukcijo krožno-eksaktnih metod s pomočjo ustreznih »normalnih« metod za reševanje začetnih problemov. Na koncu so dobljene krožno-eksaktne metode na konkretnih numeričnih primerih primerjane z ustreznimi »normalnimi« metodami.

167. Interpolacija in Schoenberg-Whitneyevi pogoji v več dimenzijah. Nosilec Jernej Kózak, sodelavec Matija Lokar.

V prvem delu raziskovalne naloge je podan podroben pregled lastnosti kvadratičnih zvezno odvedljivih zlepkov v dveh dimenzijah. Študirani so učinkoviti postopki za njihovo uporabo in pogoji za korektnost interpolacijskih shem. Drugi del naloge vsebuje razpravo o interpolaciji v dveh dimenzijah, ki ohranja konveksnost podatkov v dveh smereh. Podan je algoritem, ki določi iskano interpolacijsko funkcijo kot C^2 odsekoma hiperbolično funkcijo.

168. Prve tri lastne vrednosti operatorja Laplacea na trikotniku. Nosilec Peter Petek.

Naloga obravnava problem lastnih vrednosti operatorja Laplacea z Dirichletovim robnim pogojem na območju trikotne oblike. Navedeni so analitični rezultati, ki so znani za enakostranični trikotnik, njegovo polovico in pravokotni enakokraki trikotnik. Nadalje so predstavljene tri metode ocenjevanja lastnih vrednosti za poljubno območje, uporabljene so za trikotnik, pri čemer je upoštevana posebna oblika območja.

169. Numerično reševanje hiperboličnih sistemov parcialnih diferencialnih enačb teorije linij. Nosilec Tomaž Slivnik, sodelavec Gabrijel Tomšič.

Prenašanje signalov vzdolž električnih linij se lahko opiše s hiperboličnim sistemom parcialnih diferencialnih enačb. Glede na precejšnjo raznolikost robnih pogojev pride v poštev le numerično reševanje problema. V delu so rešene enačbe z metodo karakteristik. Ob upoštevanju robnih in začetnih pogojev je problem preveden na sistem navadnih diferencialnih enačb. Po tej metodi so obravnavane brezizgubne linije in tudi linije z izgubami.

170. Študij operatorjev pri dušenem nihanju. Nosilec Anton Suhadolc.

Delo obravnava prosta nihanja dušenih sistemov. Za matrični problem je definirano, kaj pomeni delno predušen sistem, in izpeljanih je nekaj posledic predušenja na podmnožici in na vsem prostoru. Za primer enačbe dušenega nihanja, kjer sta dušenje in prožnost opisana s sebi adjungiranimi omejenimi pozitivnimi operatorji, je izpeljana konstrukcija rešitve z uporabo krepko zveznih operatorskih polgrup. Glavni rezultat naloge je dokaz eksistence šibke rešitve za primer, ko sta dušenje in prožnost opisani z neomejenimi realnimi pozitivno definiranimi sesquilinearnimi formami.

Osnove. Algebra

171. Kompleksnost logičnih programov. Nosilec Izidor Hafner.

Obravnavan je problem kompleksnosti logičnih programov za algoritem unifikacije in popolnostni izrek za ekvivalentnostni račun. Za unifikacijo sta obravnavana dva algoritma, eden je realiziran kot program v prologu. Tudi popolnostni izrek za ekvivalentnostni račun je realiziran kot pogram.

172. Algoritmi v predikatnem računu. Nosilec Borut Jurčič-Zlobec.

V tem delu smo opisali algoritem sistematične tabele za določevanje resničnosti formul v predikatnem računu in ga pripravili za programiranje.

173. Deformacije graduiranih algeber. Nosilec Dušan Pagon.

Nilpotentne Liejeve algebre nad določenim obsegom tvorijo večparameterske družine. Za proučevanje slednjih je bil vpeljan pojem deformacije algebre, ki temelji na teoriji formalnih potenčnih vrst. Začetek vsake deformacije (lokalna deformacija) je podan z nekim elementom druge grupe kohomologij algebre s koeficienti v sami algebri. Omenjene grupe so najbolj dostopne za proučevanje v primeru graduiranih Liejevih algeber: maksimalnih nilpotentnih delov klasičnih algeber in skoraj svobodnih algeber.

174. Intenzionalna logika — izhodišče formalne semantike. Nosilka Andreja Prijatelj.

V prvem poglavju je prikazan intenzionalni vidik naravnega jezika. Podanih je nekaj zgledov iz slovenskega jezika, ki porajajo nejasen kontekst. Opredeljen je Montaguejev formalni sistem intenzionalne logike in predvsem podrobno predstavljena prirejena modelsko teoretična indeksna semantika. V drugem poglavju pa so dokazani meta izreki o veljavnih formulskih shemah ter o pomensko invariantnih operacijah v IL.

Teorija grafov

175. Kombinatorična optimizacija. Nosilec Vladimir Batagelj, sodelavca Sandi Klavžar in Marko Petkovšek.

Naloga se ukvarja s tremi problemskimi sklopi: razvrščanje v skupine, algebrajski pristopi k optimizacijskim problemom in javnim sistemom za izmenjavo šifriranih sporočil. Dan je pregled lastnosti hierarhičnih razvrstitev in zveza le-teh z ultrametrikami; narejen je pregled grafovskih metod razvrščanja; podan in razdelan je nov kriterij za dodajanje enot v razvrstitve; vpeljan je pojem konveksnosti razvrstitev za dano urejenost in prikazan pomen konveksnosti za uporabo dinamičnega programiranja pri problemih razvrščanja. Narejena sta pregleda teorije in postopkov za reševanje problema poti in minimizacije celoštevilskih kvadratnih form. Razdelan je problem varnosti in realizacije javnega sistema RSA za izmenjavo šifriranih sporočil.

176. Lastnosti simetričnih grafov. Nosilec Dragan Marušič.

V tem delu se avtor ukvarja s simetričnimi in krepko regularnimi grafi ter z lastnostmi enostavno primitivnih grup stopnje $2p$, kjer je p praštevilo. Na koncu se obravnavajo še permutacijski grafi, ki naravno izhajajo iz simetričnih grafov.

177. Topološka teorija grafov in invariante grafov, 4. del. Nosilca Bojan Mohar in Tomaž Pisanski, sodelavci: Zlatan Magajna, John Shawe-Taylor, Aleksander Malnič, T. D. Parsons, Rok Sosič, Janko Herga, Sandi Klavžar, Marko Petkovšek.

Delo obravnava različne probleme teorije grafov. Sestavljeno je iz osmih prispevkov. Od tega sta dva posvečena topološki teoriji grafov, vložitvam grafov in grup v neorientabilne ploskve. Trije prispevki obravnavajo razvejane krove, eden presečne grafe, zadnja dva pa sodita v algebrsko teorijo grafov.

NOVI ČLANI DMFA SRS V LETU 1986

V letu 1986 se je na novo naročilo na Obzornik za matematiko in fiziko 42 matematikov in fizikov. Poleg teh pa je oddalo prijavnico za članstvo v našem društvu tudi 19 študentov matematike in fizike v višjih letnikih. V prihodnjem letu bodo postali enakopravni člani društva. Med novimi naročniki Obzornika je tudi 6 študentov matematike v prvem letniku.

Iz seznama članov društva, s tem pa tudi iz seznama naročnikov Obzornika smo ob koncu lanskega leta črtali 52 dosedanjih naročnikov, ki so revijo odpovedali (7), umrli (2) ali kljub trem vabilom, da poravnajo svoje obveznosti, ostali dolžniki za vse leto (17) ali celo za dve leti (26). Ob tem se kljub vsemu veselimo, da je novih članov več kot črtanih. *Ciril Velkovrh*

1422. Antolovič, Jože
1423. Apat, Jože
1424. Bakula, Robert
1425. Bračič, Janko
1426. Delač, Darko
1427. Draginc, Terezija
1428. Grabec, Igor
1429. Horzelenberg, Mirjam
1430. Jereb, Danica
1431. Klavžar, Sandi
1432. Kobal, Damjan
1433. Kocjan, Marko
1434. Kolman, Ludvik
1435. Košak, Milena
1436. Kresol, Marija
1437. Kržič, Jožica
1438. Kuzma, Jožica
1439. Lokar, Matija
1440. Marinc, Darinka
1441. Milenkovič, Nives
1442. Močnik, Mojca
1443. Možina, Janez
1444. Mula, Tatjana
1445. Müller, Vera
1446. Nerad, Jože
1447. Noč, Gorazd
1448. Novak, Marjeta
1449. Podgornik, Rudi
1450. Radež, Milena
1451. Ravnik, Fredi
1452. Robnik, Alojz
1453. Rojko, Cvetka
1454. Sirk-Šenica, Vida
1455. Sirovatka, Goran
1456. Šemrl, Peter
1457. Uršič, Erika
1458. Verčnik, Frančiška
1459. Vraničar, Jože
1460. Zgrablič, Boris
1461. Zupančič, Marta
1462. Zupet, Katarina
1463. Žigon, Borut

VISOKOŠOLSKA MATEMATIKA V ZDA

V letih 1978—1986 sem bil šestkrat v ZDA — vsega skupaj sem na ameriških univerzah prebil tri leta, sprva kot podiplomski študent in nato kot gostujoči predavatelj. V prispevku želim na kratko strniti svoje vtise o visokošolski matematiki v ZDA.

Za povprečnega absolventa srednje šole v ZDA je običajno poglavitna ovira za nadaljevanje študija na univerzi šolnina, ki znaša od nekaj tisoč pa vse do dvajset tisoč dolarjev letno, odvisno od tega, če je ustanova državna ali privatna ter kakšen ugled ima. Formalni sprejemni pogoji niso pretirano zahtevni — zadošča spodobna ocena pri zaključnem izpitu. Prav zato morajo vsi študentje (vseh smeri) v prvem letu poslušati semestrski tečaj iz uvoda v matematiko (precalculus), razen če so ga sposobni z diferencialnim izpitom preskočiti. Šele potem se začne višja matematika, kot jo poznamo pri nas. Traja dva semestra in je po obsegu precej skromnejša kot naša. Dokazi so pogosto izpuščeni, sprašujejo jih pa skoraj nikoli. Nasploh se zdi, da študentje v prvih dveh letnikih porabijo več časa za opravljanje splošnega (skupnega) programa, ki obsega marsikaj takega, česar pri nas ne poslušamo (več) na univerzi, ker so v splošnem naše srednje šole zahtevnejše in kvalitetnejše od ameriških.

V tretjem letniku se študent dokončno opredeli za glavni predmet (major) — matematiko in stranski predmet (minor) — ponavadi je to računalništvo ali fizika. V naslednjih dveh letih potem posluša program, ki je močno podoben našemu za 2. in 3. letnik. Odvisno od šole mora študent napisati zaključno nalogo ali pa tudi ne. Diplomskega izpita, kot ga poznamo pri nas, ni.

Organizacija študija je v marsičem precej drugačna kot pri nas. Ameriške univerze so grajene kot samostojna naselja — campusi in imajo zato tudi centralno upravo, ki jo krmili vsemogočni računski center. Prav tako je centralizirana matematika — vsi učitelji matematike so zbrani v Oddelku za matematiko, ki izvaja pouk za vse fakultete. Računalniški program vsak semester že več mesecev naprej študentom ponudi pisano paleto tečajev; med njimi izbirajo po svojih željah celo ustrezne sekcije (glede na ure predavanj). S tem si vsaj načeloma lahko vsakdo sestavi optimalen urnik, kar omogoča velikemu številu študentov, da se honorarno zaposlijo in tako laže krijejo visoke stroške študija. Večina predmetov se predava ob ponedeljkih, sredah in petkih, po eno šolsko uro vsakokrat, so pa tudi sekcije, ki se sestajajo le vsak torek in četrtek. Neprijetno pri vsem tem je predvsem to, da morajo študentje pogosto med dvema predavanjema v 10 minutah priti iz ene predavalnice v drugo — včasih sta tudi po kilometer narazen. Ista nadloga seveda pogosto zadene tudi učitelje.

Odnos med študenti in učitelji je močno odvisen od šole, vendar je značilno, da se študentje izredno zavedajo svojih pravic in da jih neutrudno uveljavljajo, brž ko jim kaj ne ustreza. Učitelj mora vselej skrbno izbirati besede, ko na začetku semestra razredu pojasnjuje režim dela in ocenjevanja — če bo kasneje med letom le za ped odstopil od deklariranih načel, bo zelo verjetno slišal protest preko ustreznega urada za pritožbe na Oddelku za matematiko. Na številnih šolah mora vsak učitelj napraviti med študenti vsako leto vsaj eno anketo, zato takšne pritožbe hitro naletijo na pozitiven odgovor. Nasploh je seveda veliko teže učiti uvodne tečaje, ki jih poslušajo prav vsi,

kot pa specialne tečaje za višje letnike. Pri slednjih je ne le manj sitnosti z nergavimi študenti, marveč je predvsem veliko več sodelovanja z razredom, več vprašanj in celo zanimivih idej, lepih rešitev nalog ipd. Pravzaprav tako kot pri nas.

Preverjanje znanja je precej togo. Med semestrom učitelj pripravi dva ali tri kolokvije, ki jih pišejo študentje kar med predavanji. Poleg tega se običajno pobira tudi domača naloga, ki na koncu tudi prispeva k zaključni oceni. Glavni delež pa pride od zaključnega izpita, ki je za vse predmete na koncu semestra. Kdor pade, nima popravnega izpita — ponovno se mora vpisati v ta tečaj — in ponovno plačati ustrezno šolnino. Tak način sprotnega študija je pripomogel, da je npr. pri uvodnih tečajih osip med 20 in 30 odstotki, kar je bistveno boljše kot pri nas.

Američani imajo seveda še kup posebnosti, ki jih na tem mestu ne kaže naštevati. Morda za drobiž povem le dve: končne ocene se študentom pošljejo domov. Ne le zato, ker se že naslednji dan po zaključnih izpitih univerzitetno naselje praktično izprazni, marveč tudi zato, ker bi javno objavljene ocene kratile študentom ustavno pravico do zasebnosti. In dalje — če datum izpita slučajno pade na katerikoli religiozni praznik in če študent prinese uradno potrdilo, da ga bo praznoval, je učitelj dolžan za tega študenta pripraviti poseben test na kak drug dan.

Sekcije so običajno dveh različnih velikosti: majhne štejejo od 30 do 40 slušateljev, velike pa od 140 dalje. Učitelj v majhni sekciji nima pomoči asistenta, morda dobi le pomoč študenta višjega letnika pri popravljanju domačih nalog. V velikih sekcijah pa eden ali več asistentov v skupinah vodi vaje, ki dopolnjujejo predavanja. Učna obveznost je običajno ena majhna in ena velika sekcija. Na vodilnih univerzah vsak učitelj praviloma vsaj en semester predava podiplomski tečaj iz svojega področja (to potem šteje kot majhna sekcija). Tedensko je torej v razredu 6 ur.

Moj splošni vtis je, da se naš dodiplomski program študija matematike lahko kosa s katerimkoli programom v ZDA. Popolnoma drugačna pa je situacija na podiplomskem študiju, ki je na vodilnih ameriških univerzah izdelan do podrobnosti in bi mu težko našli primero pri nas.

Začne se že pri sprejemu, ki je posebej za tujce zelo selektiven. Poleg odličnih ocen in priporočil posebej skrbno preverijo znanje angleškega jezika — ne le zaradi zahtev samega študija, marveč tudi zato, ker si večina podiplomcev pomaga skozi šolo s poučevanjem (teaching assistantship).

Podiplomski programi posameznih šol se seveda razlikujejo med seboj, a imajo vseeno nekaj osnovnih skupnih značilnosti: prvo leto poslušajo uvod v osnovne 4 predmete — algebro, realno in kompleksno analizo ter topologijo. Po uspešno opravljenem magistrskem izpitu potem v drugem letu nadaljujejo študij omenjenih 4 področij, nato pa pride najtežji izpit od vseh — preliminarni doktorski izpit (rigoroz). Kdor ga naredi, postane doktorski kandidat in odslej dela disertacijo, posluša specialne tečaje in sodeluje na seminarjih. Običajno mora kandidat v določenem roku doktorirati (od 4 do 5 let), sicer mora bodisi ponoviti rigoroz bodisi zapustiti šolo. Disertacija mora biti ne le originalen prispevek, marveč (pogosto) biti sprejeta v objavo v mednarodni periodiki že pred obrambo naloge.

Režim dela je silno naporen. Poleg 12 ur predavanj tedensko mora podiplomski študent tudi sam predavati ali voditi vaje 4—6 ur, seveda pa ima še kup običajnih administrativnih obveznosti. Pri vsakem predmetu so običajno vsak teden predpisane domače naloge, ki jih je treba izdelati čez nedeljo. Zato je na Oddelku tudi med vikendom pozno v noč vselej mogoče najti številne zamišljene obraze. Tudi učitelji, posebej mlajši, pogosto prihajajo ob večerih nazaj v pisarne in tako se na oddelku ustvari prijetna atmosfera domačnosti in delavnosti. Ko sem se po opravljenem doktoratu vrnil iz ZDA, sem najbolj pogrešal prav to razpoloženje — ko sem ob sobotah in nedeljah sameval v ogromnem poslopju fakultete za strojništvo.

Moj zapis ne bo popoln, če ne omenim nekaj podatkov o učiteljski problematiki. Po doktoratu se težko takoj najde stalna služba. Najboljši dobijo za leto ali dve research fellowship, drugi pa nastopijo tenure track položaj, kar pomeni, da bodo v prihodnjih 6—7 letih bodisi za stalno nastavljeni bodisi odslovljeni. Redko se zgodi, da je prvo učiteljsko mesto tudi že zadnje, vendar je preseljevanje Američanom že v krvi in to ne štejejo za takšno zlo kot mi, saj so tudi druge razmere tam drugačne (stanovanje, itd.). Običajno imajo na vsaki šoli 3 ali 4 nazive: lecturer, assistant professor, associate professor in professor. Napredovanje je povsem individualno — zelo obetajoči mladi kadri lahko v zelo kratkem času napredujejo do najvišjega naziva. Tudi osebni dohodki so prikrojeni kvaliteti posamičnega kandidata in niso togo vezani za akademski naziv.

Učitelje običajno ocenjujejo sproti — vsako leto. Pri tem se zanimajo predvsem za naslednje podatke: (1) znanstveno-raziskovalno delo, (2) pedagoško delo, (3) administrativno delo na univerzi, (4) družbeno-politično delo zunaj šole, (5) priznanja. Na podlagi vsakoletne ocene lahko osebni dohodek zvišajo ali pa tudi ne. Veliko bolj zahtevna pa je odločitev, če naj kandidatu podelijo tenure, tj. stalno delovno razmerje. V proces odločanja pritegnejo vodilne strokovnjake iz kandidatovega ožjega področja. Končno besedo ima vselej predsednik univerze.

Učitelji so plačani le za 9 mesecev in od njih se pričakuje, da si bodo sami priskrbeli sredstva za poletne 3 mesece. Najboljši si pridobijo raziskovalne naloge (največkrat je to National Science Foundation, včasih pa tudi ameriška armada), drugi spet učijo poletne tečaje. Na splošno velja, da tisti, ki malo raziskuje, ne dobi nobenih sredstev za potovanja in se tako polagoma čedalje bolj izolira od kolegov. Zato se bije predvsem na vodilnih univerzah ognjevita bitka za kvaliteto raziskovalnega dela (publish or perish).

Omenim naj tudi odnos do tega, kar mi imenujemo sodelovanje z združenim delom. Veliko univerz je odločno prepovedalo svojim učiteljem, da se na svojo roko povezujejo z industrijo (kot strokovni svetovalci), ampak morajo za to dobiti dovoljenje. S tem hočejo preprečiti, da bi učitelji zanemarjali svoje lastno raziskovalno delo na račun zaslužkarstva.

Morda bi za konec omenil le še to: v katerokoli knjižnico me je zanesla pot, vedno znova sem se lahko prepričal, kakšno izvrstno delo opravljajo knjižničarji na našem inštitutu in kako modro so odločali starejši, ko so sklenili, da ustanove Matematično knjižnico in ne dopuste, da se matematična periodika in knjige izgubljajo v kakšni centralizirani ustanovi.

Dušan Repovš

LOVASZ L., Plummer M. D. Matching Theory, Akademiai Kiado, Budapest 1986, xxxiii, 544 str.

Prirejanje in nekateri podobni postopki modelirajo precejšnjo skupino zanimivih problemov. Kot pravita avtorja te monografije, so problemi prirejanja »ravno prav« težki; večina je rešljivih, toda njihovo reševanje zahteva uporabo netrivialnih metod.

Monografija je razdeljena na dvanajst poglavij. Začetni del je posvečen najpomembnejšim rezultatom prirejanja v dvodelnem grafu, kot so Königov izrek, Frobeniusov izrek o porokah in Hallov izrek o različnih predstavnikih. Pokazano je, kako lahko te rezultate dobimo tudi iz teorije pretokov. Obravnavan je tudi algoritem dvodelnega prirejanja, znan kot madžarska metoda. Tretje poglavje obravnava osnovne rezultate v nedvodelnih primerih, kot sta Tuttov izrek in Bergejeva formula. Poleg tega je vpeljana Gallai-Edmondsova strukturna teorija, s katero rešujemo problem maksimalnega prirejanja. V naslednjih poglavjih so obravnavani elementarni grafi s popolnim prirejanjem, podana je zveza med nekaterimi problemi iz teorije grafov in prirejanjem ter prirejanjem in linearnim programiranjem.

Prve raziskave popolnih prirejanj so vzpodbudili podobni problemi, ki so nastopali v zvezi z determinantami. Tako je osmo poglavje posvečeno prav tem problemom. Definiran je pojem polinoma prirejanja, katerega uporaba je prikazana na dveh področjih iz teoretične kemije in fizike. Deveto poglavje predstavi Edmondsov algoritem za prirejanje in še tri druge algoritmične pristope.

Klasično vprašanje teorije grafov se glasi: kdaj lahko zaporedje nenegativnih celih števil realiziramo kot zaporedje stopenj v grafu? To vprašanje lahko obravnavamo kot poseben primer problema f-faktorja, ki mu je posvečeno deseto poglavje. V zadnjih dveh poglavjih pa srečamo dve posplošitvi teorije prirejanja; posplošitev v teorijo matroidov in prirejanje v hipergrafu.

Knjiga bo dobrodošlo čtivo vsakemu, ki se zanima za teorijo prirejanja. Novincem na tem področju pa bodo v pomoč posebej označeni deli teksta z dodatno informacijo o temi, ki jo obravnava poglavje; ti omogočajo lažje razumevanje obravnavane snovi. *Matija Lokar*

Proceedings of the 4th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Volume A : Probability and Statistical Decision Theory, Edited by F. Konecny, J. Magyorodi, W. Wertz; Volume B : Mathematical Statistics and applications, Edited by W. Grossmann, G. Ch. Pflug, I. Vincze, W. Wertz; Akadémiai Kiadó, Budapest 1985.

Četrti Panonski simpozij iz matematične statistike je bil spet v Bad Tatzmannsdorfu v Avstriji, tako kot prva dva, le tretji je bil na Madžarskem. Tokrat se je simpozija udeležilo kar 130 matematikov iz 17 držav in pripravilo 92 referatov. Recenzirane pismene prispevke udeležencev so izdali v dveh zvezkih zbornika. V prvem je 24 del; med njimi je večina posvečena slučajnim procesom, limitnim izrekom, teoriji odločitev in neparametričnemu ocenjevanju. V drugem zvezku, ki je po vsebini bolj homogen, pa je zbranih 21 del, ki bi jih v grobem lahko razdelili v tri skupine: neposredna uporaba teorije verjetnosti, matematična statistika na veliki količini podatkov in uporaba metod Monte Carlo. Med avtorji prispevkov zasledimo mnoga znana imena iz Avstrije, Nemčije, Madžarske in drugih evropskih dežel, od Jugoslovanov pa najdemo le profesorja Z. A. Ivkovića iz Beograda. Ta zbornik del bo brez dvoma zanimal predvsem raziskovalce s tega področja matematike. *Matjaž Omladič*

Øksendal B., Stochastic Differential Equations, Springer Verlag, Berlin 1985

Večina obstoječe literature iz stohastičnih diferencialnih enačb je izredno zahtevna in ji uspe pošteno prestrašiti morebitnega začetnika na tem področju, ki se v zadnjem času živo razvija, ima mnogotero neposredno uporabo in celo vrsto plodnih povezav z mnogimi drugimi matematičnimi disciplinami. Øksendalov učbenik se problema loteva z druge strani. Predpostavlja le osnovno znanje iz teorije mere in poskuša približati zahtevno snov nepoučenemu bralcu kar se da razumljivo. Pri tem pogosto ne navaja dokazov v največji splošnosti, tu in tam pa moramo katerega od bazičnih rezultatov vzeti celo na vero. Tako avtorju uspe prodreti zelo globoko v to teorijo, preko znamenite Itôve formule in problema filtriranja vse do dokaj podrobne obravnave difuzijskih procesov in nekaterih zanimivih aplikacij. Knjiga je nastala po avtorjevih podiplomskih predavanjih na Univerzi v Edinburghu in je namenjena razmeroma širokemu krogu matematikov, ki jih zanima to pomembno področje uporabne matematike.

Matjaž Omladič

PUBLIKACIJE KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1986

		Cena v din
1.— 4.	**Obzornik za matematiko in fiziko 33** (1986) 1 2, 3 4, 5, 6 (783, 795, 817, 818)	3.000.—
5.—10.	**Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome 13** (1985 86) 3, 4, 6; **14** (1986 87) 1, 2, 3 (785, 790, 797, 800, 826, 831)	800.—
	Presekova knjižnica	
11.	8a. Ranzinger P., Presekova zvezdna karta (796)	400.—
12.	11a. Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja — Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol (836)	400.—
13.	25. Ranzinger P. in dr., Naše nebo in zemlja 1987 (836)	1.000.—
	Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo	
14.	Žabkar J., Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov... (807) (20. natis)	55.—
15.	Štalec I., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 4. razred srednjih šol (5. natis) (821)	1.200.—
16.	Avsec F. in dr., Zbirka rešenih vaj iz aritmetike, algebre in analize za 3. razred srednjih šol (5. natis) (827)	1.600.—
	Knjižnica Sigma	
17.	8b. Bohte Z., Numerično reševanje enačb (822)	1.000.—
18.	20n. Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele (787)	600.—
19.	27a. Struik D. K., Kratka zgodovina matematike (791)	1.600.—
20.	28a. Strnad J., Posebna teorija relativnosti (809)	1.600.—
21.	41. Mohar B., Zakrajšek E., Programski jezik pascal (793)	1.400.—
22.	42. Ševarlić B. M., Kratka zgodovina astronomije, 2. del Od Newtona do današnjih dni (837)	1.000.—

Matematični rokopisi

23.	1a.	Petkovšek M., Pisanski T., Izbrana poglavja iz računalništva, 1. del, Izračunljivost in rešljivost. Jeziki. NP-polnost. (784)	1.000.—
24.	2b.	Kramar E., Nekaj nalog iz linearne algebre (798)	4.800.—
25.	8a.	Omladič M., Končno razsežni vektorski prostori (789)	1.000.—
26.	14.	Batagelj V., Lokar M., Mohar B., Uporaba računalnika partner (799)	500.—
27.	15.	Izbrana poglavja iz računalništva, 2. del, Klavžar S. in dr., Diskretna optimizacija (823)	1.200.—

Izbrana poglavja iz matematike in računalništva

28.	12d.	Wirth N., Računalniško programiranje, 1. del (801)	4.000.—
29.	20b.	Dobovišek M., Magajna B., Naloge iz algebre I (840)	1.200.—
30.	21b.	Wirth N., Računalniško programiranje, 2. del (802)	4.000.—

Zbirka izbranih poglavij iz mehanike

31.	2.	Muršič M., Osnove tehniške mehanike, 2. del, Kinematika (815))	4.000.—

Zbirka izbranih poglavij iz fizike

32.	9d.	Naloge iz fizike (830)	1.600.—
33.	17c.	Stepišnik J., Fizikalni praktikum I. (829)	2.000.—
34.	22.	Strnad J., Na pot v kvantno elektrodinamiko (835)	1.600.—

Postdiplomski seminar iz matematike

35.	16.	Ušan J., Uvod v teorijo kvazigrup, 1. del (814)	1.600.—

Matematika-Fizika : Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

36.	17a.	Strnad J., Fizika, 4. del, Molekule. Kristali. Jedra. Delci (786)	2.200.—
37.	23.	Grasselli J., Linearna algebra Vadnal A., Linearno programiranje (803)	2.800.—
38.	24.	Jamnik R., Trigonometrijske vrste. Stieltjesov integral. Lebesguov integral (804)	2.000.—
39.	25.	Krušič B., Dvojni in mnogoterni integral Vidav I., Diferencialna geometrija v prostoru Vencelj M., Vektorska analiza (805)	2.000.—
40.	26.	Jamnik R., Verjetnostni račun in statistika (806)	2.400.—
41.	27.	Kozak J., Podatkovne strukture in algoritmi (816)	5.000.—
42.		**IMFM** : Letno poročilo 1985 (794)	—
43.		5. Seminar iz uporabne matematike. Program (824)	—
44.		5. Conference on applied mathematics (825)	3.000.—

DMFA SRS:

44.		38. občni zbor, Novo mesto (828)	—
45.		Tekmovanja: 30. republiško iz matematike za srednje šole, Maribor (832)	—
46.		10. republiško iz računalništva (834)	—
47.		6. republiško iz fizike za osnovne šole (811)	—
48.		27. zvezno iz matematike za srednje šole: Bilten Postojna (808)	—
49.		27. zvezno iz matematike za srednje šole z rešitvami nalog iz matematičnih olimpiad, Postojna (833)	—
50.		Področno iz fizike za osnovne šole, Koper (810)	—
51.		4. Poletna šola iz računalništva, Ljubljana (819)	—

Ciril Velkovrh

Na desni strani seznama so navedene znižane cene, ki veljajo za člane društva, študente in naročnike Preseka.

Na koncu naslovov so v oklepajih vpisane zaporedne številke izdaj DMFA SRS od leta 1951 do danes.