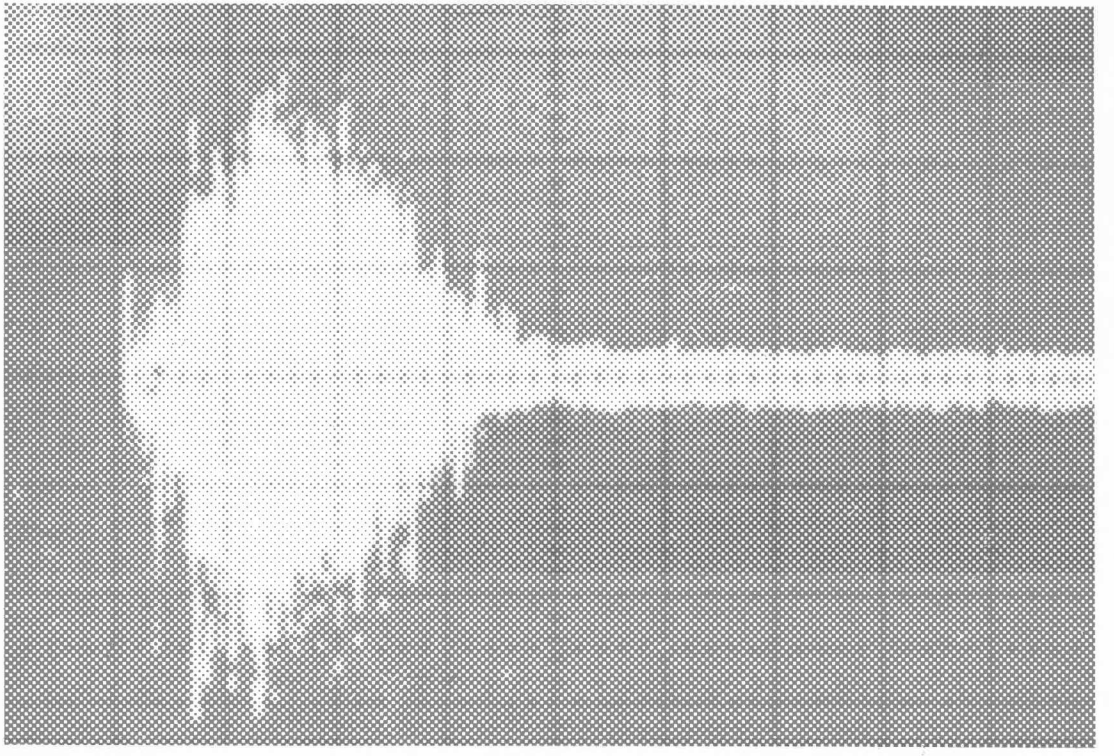
R-177/87
ODPISANO

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

1987
Letnik 34
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 34 — ŠTEVILKA 3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1987

Uredniški odbor: Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Milan Hladnik — urednik za matematiko, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 3000.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 1500.— din, za ustanove in podjetja 6000.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 1000.— din, dvojna številka 2000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1600 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1987 DMFA SRS — 846

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str. — Page

Članki — Articles

O Borsukovem antipodnem izreku — On Borsuk's antipodal theorem (Neža Mramor-Kosta) . . . . . 65—72

Euler-Poissonov integral na geometrijski način — The Euler-Poisson integral in a geometrical way (Marko Razpet) . . . . . 73—74

D'Alembertova funkcionalna enačba — The D'Alambert functional equations (Joso Vukman) . . . . . 75—77

Fluktuacijski interferometer — A fluctuation interferometer (Ivo Verovnik, Andrej Likar) . . . . . 79—86

Interferenčni poskus s curkom atomov na svetlobi — Diffraction of atoms by light (Janez Strnad) . . . . . 87—91

Nove knjige — New Books

(Boris Lavrič, Janez Strnad) . . . . . 72, 92—93

Domače vesti — Home news

Obvestilo naročnikom (Janez Strnad, Ciril Velkovrh) 77

Poletna šola Intertrade-IBM (Izidor Hafner) 78

Podiplomski študij matematike — Področje izobraževanje (Peter Petek) 78

Mednarodno tekmovanje študentov matematike 1986 (Peter Šemrl) . . . 94—96

Profesor dr. Ivan Kuščer — častni član društva (Zbral Janez Strnad) . . . III

38. občni zbor DMFA SRS (Dušan Modic) IV

Na ovitku: Fluktuacijski interferometer (glej članek na str. 79)

O BORSUKOVEM ANTIPODNEM IZREKU

NEŽA MRAMOR KOSTA

Math. Subj. Class. 55M20, 54H25

V članku podajamo lahko razumljiv konstruktiven dokaz izreka, nekaj njemu enakovrednih trditev iz topologije in kratek opis uporabe v raznih vejah matematike.

ON BORSUK'S ANTIPODAL THEOREM

The article contains a simple constructive proof of the theorem, some equivalent statements from topology, and a short description of applications to various mathematical domains.

1. Uvod

Pred več kot 50 leti je znani poljski matematik Karol Borsuk dokazal izrek o preslikavah med sferami, ki je še danes zanimiv, saj je uporaben v raznih vejah matematike pa tudi zunaj nje. S posplošitvami tega izreka in njihovo uporabo se ukvarja cela vrsta matematikov. Pred kratkim napisan pregledni članek z naslovom *Borsukov antipodni izrek in njegove posplošitve in uporaba* navaja v bibliografiji kar 446 publikacij o tem izreku [12].

Ena možnih ekvivalentnih formulacij izreka, ki se v matematični literaturi pogosto navaja z imenom *Borsuk-Ulamov izrek*, je tale:

1.1. Izrek. *Vsaka zvezna preslikava f iz n-dimenzionalne sfere S^n v evklidski prostor R^k dimezije $k \leqq n$ preslika vsaj en par antipodnih točk $\{x, -x\} \in S^n$ v isto točko.*

Ta izrek je ekvivalenten Borsukovemu antipodnemu izreku in še vrsti trditev o preslikavah med sferami, topoloških lastnostih sfer pa tudi o pojmih, ki na videz nimajo nobene zveze s končno razsežnimi sferami. O tem bomo spregovorili v drugem razdelku.

Borsuk-Ulamov izrek je vključen v marsikatero knjigo o algebraični topologiji, to pa zato, ker ga običajno dokazujemo s sredstvi algebraične topologije. Pravzaprav je izrek posledica strukture kohomološkega kolobarja *realnega projektivnega prostora* RP^n, to je kvocientnega prostora, ki ga dobimo iz sfere S^n z identifikacijo antipodnih točk. Tak dokaz najdemo na primer v [5] ali [11]. Izrek pa je mogoče dokazati tudi s precej bolj elementarnimi sredstvi, ki so geometrično toliko bolj nazorna.

Dokaz, ki ga bomo opisali v tem prispevku, ima prednost, da je konstruktiven, torej nam omogoča, da z numeričnimi metodami odkrijemo točko $x \in S^n$, za katero je $f(x) = f(-x)$. Žal bomo z njim izgubili nekaj splošnosti, saj deluje samo za diferenciabilne oziroma gladke (ali z manjšimi popravki za kosoma linearne) in ne za popolnoma splošne zvezne preslikave. Leta 1963 je Hirsch podal kratek in znamenit dokaz Brouwerjevega izreka o negibni točki, ki je osnova raznih numeričnih metod za iskanje negibnih točk [6]. Alexander in Yorke [1] sta njegovo zamisel izpopolnila in posplošila še na nekatere druge probleme, med katerimi je tudi Borsuk-Ulamov izrek.

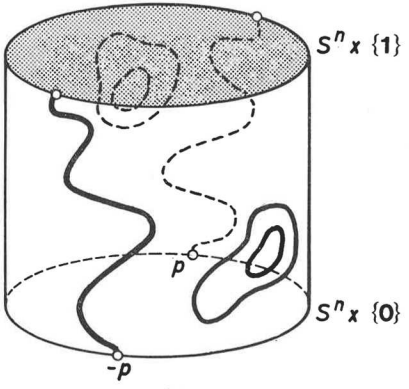
Opis dokaza:

Dovolj bo, če izrek dokažemo za $k = n$, saj lahko vsako preslikavo v R^k, $k < n$, naravno obravnavamo kot preslikavo v R^n, tako da R^k vložimo v R^n.

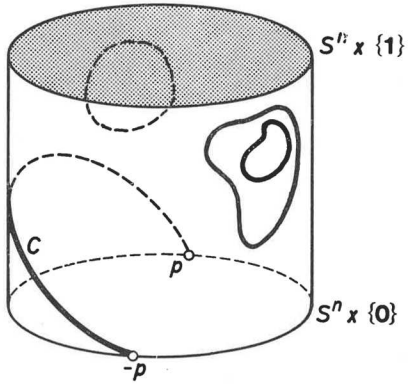
Pokazali bomo, da ima vsaka gladka *liha* preslikava (tj. taka, ki preslika antipodne točke v antipodne točke) iz S^n v R^n vsaj eno ničlo. Potem ima tudi

$h(x) = f(x) - f(-x)$ ničlo, recimo x_0, torej je $f(x_0) = f(-x_0)$ in izrek bo dokazan. Zamisel, na kateri temelji dokaz, je tale: če primerno izberemo liho preslikavo z znanimi ničlami, jo deformiramo v dano preslikavo h in pri tem zasledujemo množico ničel, bomo na koncu nekaj vedeli o ničlah preslikave h.

Vzemimo projekcijo φ sfere $S^n \subset R^{n+1}$ na prostor R^n, ki ga identificiramo s podprostorom $\{(x_1, \ldots, x_n, 0)\} \subset R^{n+1}$. Očitno je φ gladka liha preslikava, ki preslika v 0 samo severni in južni pol sfere. Preslikavo φ lahko deformiramo v h skozi enoparametrično družino preslikav h_t: $S^n \to R^n$, $0 \leq t \leq 1$, definiranih s predpisom $h_t(x) = (1 - t)\,\varphi(x) + t\,h(x)$. Opišimo to deformacijo malo drugače, tako da bomo laže zasledovali množico ničel. Družina h_t določa gladko preslikavo H: $S^n \times [0, 1] \to R^n$ z lastnostjo $H(x, t) = h_t(x)$, torej je $H(x, 0) = \varphi(x)$ in $H(x, 1) = h(x)$. Tako preslikavo običajno imenujemo *homotopija* med preslikavama φ in h. Praslika $Q = H^{-1}(0)$ točke 0 predstavlja pot, ki jo med deformacijo opiše množica ničel. V večini primerov (kadar je 0 regularna vrednost preslikave H) je to gladka krivulja v $S^n \times [0, 1]$, ki je lahko nepovezana. Njen presek z $S^n \times \{0\}$ je množica ničel preslikave φ, torej severni pol p in južni pol $-p$ sfere S^n, njen presek z $S^n \times \{1\}$ pa je množica ničel preslikave h, torej je treba pokazati, da je ta presek neprazen (Sl. 1).



Slika 1

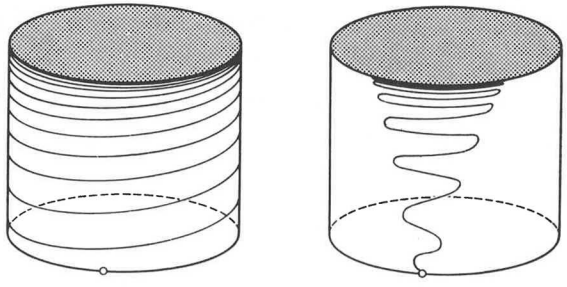


Slika 2

Recimo, da je Q gladka krivulja, ki ne seka $S^n \times \{1\}$. Kratek premislek nam pove, da mora v tem primeru neka komponenta krivulje Q, na primer C, povezovati točki p in $-p$, saj sta to edini presečišči krivulje Q z robom mnogoterosti $S^n \times [0, 1]$ (Slika 2). Parametrizirajmo krivuljo C z ločno dolžino in označimo točke na njej s $(p(s), t(s))$, kjer je $p(s) \in S^n$, $t(s) \in [0, 1]$ in $0 \leq s \leq L$. Homotopija H je liha glede na prvo spremenljivko, zato je C simetrična krivulja (tj. točka (x, t) leži na C natanko takrat kot točka $(-x, t)$) z začetkom v točki $p(0) = p$ in koncem v očki $p(1) = -p$. Ker je parametrizirana z ločno dolžino, sledi $p(s) = -p(L - s)$, torej $p(L/2) = -p(L/2)$, kar je nemogoče. S tem smo dokazali, da množica Q povezuje $S^n \times \{0\}$ in $S^n \times \{1\}$ in izrek je dokazan za preslikave f, pri katerih je krivulja Q gladka.

Če Q ni gladka krivulja (torej če 0 ni regularna vrednost preslikave H), nadomestimo projekcijo φ s preslikavo $\varphi_\alpha = \varphi \circ \alpha$, kjer je α primerno izbrana rotacija sfere (torej ortogonalna transformacija prostora R^{n+1} z determinanto 1) in homotopijo H s homotopijo H_α med preslikavama φ_α in h, torej $H_\alpha(x, t) =$

$= (1 - t)\,\varphi_a(x) + t\,h(x)$. Rotacijo α izberemo tako, da je $Q_a \cap (S^n \times (0,1))$, kjer je $Q_a = (H_a)^{-1}(0)$, gladka krivulja (to lastnost ima celo večina transformacij α). V splošnem α ne moremo izbrati tako, da bo Q_a gladka krivulja v $S^n \times [0,1]$, ker morda 0 ni regularna vrednost preslikave h. S podobnim sklepanjem kot zgoraj se prepričamo, da ima krivulja $Q_a \cap (S^n \times [0,1))$ stekališča v $S^n \times \{1\}$ in ta stekališča so ničle preslikave h (Sl. 3).



Slika 3

Omenili smo, da nam ta dokaz omogoča določiti točko x, za katero je $f(x) = f(-x)$. Pa poglejmo, kako. Če poznamo pot Q_a in je ta gladka, je očitno dovolj, da potujemo po njej od točke $(p(0), t(0))$ in prej ali slej bomo prišli v točko $(p(L), t(L))$, ki je iskana rešitev našega problema. Če 0 ni regularna vrednost preslikave h, torej pot Q_a ni gladka, bomo na ta način prišli poljubno blizu množice ničel in ne do ničel samih. Kako bomo potovali po poti Q_a, pa je odvisno od izbrane numerične metode.

2. Še nekaj oblik Borsukovega izreka

Z imenom *Borsukov antipodni izrek* se običajno označuje trditev (ii) naslednjega izreka. Trditev (iii) je prav tako pomembni *Ljusternik-Schnirelmann-Borsukov izrek*, ki je povezan s pojmom *Ljusternik-Schnirelmannove kategorije* topološkega prostora. Več o njej najdemo na primer v [7].

2.1. Izrek. *Vse naslednje trditve so posledice izreka 1.1.*

i) *Nobena preslikava* $f\colon S^n \to S^{n-1}$ *ni liha.*

ii) *Liha preslikava* $f\colon S^n \to S^n$ *ne more biti homotopna konstanti.*

iii) *V vsaki družini* $n+1$ *zaprtih množic* $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\}$, *ki pokrivajo sfero* S^n, *vsebuje vsaj ena množica* M_i *par antipodnih točk.*

Dokaz. Z $a\colon S^n \to S^n$ bomo označevali antipodno preslikavo na sferi, torej $a(x) = -x$.

Pokažimo najprej, da iz izreka 1.1 sledi (iii).

Recimo, da je družina $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\}$ zaprto pokritje sfere S^n in da nobena izmed množic M_i ne vsebuje para antipodnih točk, torej $M_i \cap a(M_i) = \emptyset$ za vsak i. Definirajmo k vsaki množici M_i zvezno »Urysohnovo« funkcijo $g_i\colon S^n \to [0,1]$, ki množico M_i preslika v 0, množico $a(M_i)$ pa v 1. Tako se katerakoli točka z iz unije $\cup \{M_i, i = 1, \ldots, n\}$ s preslikavo $g = (g_1, \ldots, g_n)\colon S^n \to R^n$ preslika drugam kot njen antipod $a(z)$. Po izreku 1.1 obstaja točka $z \in S^n$, za katero je $g(z) = g(-z)$. Točka z mora očitno biti

v množici M_{n+1}, saj je družina $\{M_i,\ i = 1, \ldots, n+1\}$ pokritje sfere S^n. Isti premislek nam pove, da mora biti točka z tudi v $a(M_{n+1})$, kajti tudi družina $\{a(M_i),\ i = 1, \ldots, n+1\}$ je pokritje sfere S^n. To pa je v nasprotju s predpostavko, da nobena množica M_i ne vsebuje antipodnega para.

Iz (iii) sledi (i):

Recimo, da je neka zvezna preslikava $f: S^n \to S^{n-1}$ liha, da je torej $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in S^n$. Sfero S^{n-1} razbijmo na $n+1$ zaprtih množic $A_1, \ldots, A_{n+1}$ tako, da nobena med njimi ne vsebuje antipodnega para (na primer tako, da rob poljubnega n-dimenzionalnga simpleksa s težiščem v izhodišču projiciramo radialno na sfero in za množice A_i vzamemo slike robnih $(n-1)$ — dimenzionalnih simpleksov). Družina $\{M_i = f^{-1}(A_i),\ i = 1, \ldots, n+1\}$ je zaprto pokritje sfere S_n in po trditvi (iii) v eni izmed množic M_i, na primer v M_1, leži par antipodnih točk $\{x, -x\}$. Vendar je potem $\{f(x), f(-x)\}$ par antipodnih točk v množici A_1, kar je v nasprotju s predpostavko, da nobena množica A_i ne vsebuje antipodnega para.

V naslednjem koraku bomo potrebovali preprost kriterij, ki določa, katere preslikave sfere so homotopne konstantni preslikavi.

2.2. Lema. Naj bo B^{n+1} $(n+1)$-dimenzionalna krogla z robom S^n in X poljuben topološki prostor. Zvezna preslikava $f: S^n \to X$ je homotopna konstanti natanko takrat, kadar jo je mogoče razširiti do zvezne preslikave $F: B^{n+1} \to X$.

Dokaz. Recimo, da obstaja homotopija $H: S^n \times [0,1] \to X$ med konstantno preslikavo in preslikavo f. Razširitev F lahko definiramo s predpisom

$$F(y) = \begin{cases} H(S^n \times \{0\}), \text{ če je } 0 \leq \|y\| \leq 1/2 \\ H(y/\|y\|,\ 2\|y\| - 1), \text{ če je } 1/2 \leq \|y\| \leq 1 \end{cases}$$

Hitro se vidi, da je F nedvoumno definirana zvezna preslikava in da je zožitev $F|S^n$ ravno preslikava f.

V obratno smer gre dokaz prav tako preprosto. Homotopijo $H: S^n \times [0,1] \to X$ med konstanto in preslikavo f lahko definiramo s predpisom

$$H(x, t) = \begin{cases} F(0);\ 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(2t-1)\,x);\ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dokažimo zdaj, da iz (i) v izreku 2.1 sledi (ii):

Tudi ta korak bomo dokazovali s protislovjem. Recimo, da je $g: S^n \to S^n$ liha zvezna preslikava, ki je homotopna konstanti, in $G: B^{n+1} \to S^n$ njena zvezna razširitev. Naj bo φ projekcija zgornje hemisfere $S_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geq 0\}$ sfere $S^{n+1} \subset R^{n+2}$ na kroglo B^{n+1}, torej $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+2}) = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Preslikava $h: S^{n+1} \to S^n$

$$h(x) = \begin{cases} G(\varphi(x));\ x \text{ na zgornji hemisferi} \\ -G(\varphi(-x));\ x \text{ na spodnji hemisferi} \end{cases}$$

je liha, kar je v nasprotju z (i).

Izrek 2.1 smo s tem dokazali. Velja pa celo več: vse trditve izreka 2.1 so ekvivalentne izreku 1.1. Sklenimo ekvivalenčni krog z dokazom, da iz trditve (ii) sledi izrek 1.1.

Recimo, da zvezna preslikava f: $S^n \to R^n$ nobenega para antipodnih točk $\{x, -x\} \in S^n$ ne preslika v isto točko. V tem primeru je s prepisom

$$F(x) = (f(x) - f(-x))/\|f(x) - f(-x)\|$$

nedvoumno definirana liha zvezna preslikava F: $S^n \to S^{n-1}$. Zožitev $F|S^{n-1}$: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ je liha in ima zvezno razširitev na zgornjo hemisfero, torej iz leme 2.2 sledi, da je homotopna konstanti, kar je v nasprotju z (ii).

Trditev (ii) izreka 2.1 nam med drugim zagotavlja:

2.3 Izrek. *Identična preslikava sfere i*: $S^n \to S^n$ *ni homotopna konstanti.*

Z drugimi besedami to pomeni, da sfera ni *kontraktibilen* prostor. Ta rezultat je pomemben sam po sebi, je pa tudi osrednjega pomena v teoriji negibnih ali fiksnih točk, saj je, kot bomo dokazali, ekvivalenten Brouwerjevemu izreku o negibni točki.

2.4. Izrek. *Naslednji trditvi sta posledici izreka 2.3.*

(i) *Brouwerjev izrek o negibni točki: Vsaka zvezna preslikava* G: $B^{n+1} \to B^{n+1}$ *ima vsaj eno negibno točko.*

(ii) *Sfera* S^n *ni retrakt krogle* B^{n+1}.

Zadnja trditev pomeni, da ni *retrakcije* iz B^{n+1} v S^n, tj. zvezne preslikave, ki bi bila na S_n identiteta.

Dokaz. Pokažimo najprej, da iz izreka 2.3 sledi (i).

Recimo, da je $G(x) \neq x$ za vsak $x \in B^{n+1}$. Za $x \in R^{n+1} - \{0\}$ naj bo $s(x) = x/\|x\|$. Preslikava H: $S^n \times [0, 1] \to S^n$, definirana s predpisom

$$H(y, t) = \begin{cases} s(y - 2t\,G(y)); & 0 \leq t \leq 1/2 \\ s((2-2t)\,y - G((2-2t)\,y)); & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

je nedvoumno definirana homotopija med identiteto na sferi in konstantno preslikavo.

Iz (i) sledi (ii):

Če bi obstajala retrakcija r: $B^{n+1} \to S^n$, bi bila $x \to -r(x)$ preslikava iz B^{n+1} v B^{n+1} brez negibnih točk.

Tako kot zgoraj bomo sklenili ekvivalenčni krog z dokazom, da iz trditve (ii) izreka 2.4 sledi izrek 2.3:

Recimo, da je H: $S^n \times [0, 1] \to S^n$ homotopija med konstantno preslikavo $S^n \to \{x_0\}$ in identiteto. Retrakcija r bi bila dana s predpisom

$$r(x) = \begin{cases} x_0; & \|x\| \leq 1/2 \\ H(x/\|x\|, 2\,\|x\| - 1); & \|x\| \geq 1/2 \end{cases}$$

3. Nekaj primerov uporabe Borsukovega izreka

Območje uporabe Borsukovega izreka ni omejeno na topologijo, ampak sega v razne veje matematike. Pokažimo to z nekaj primeri. Pri tem se bomo omejili na uporabo Borsukovega antipodnega izreka in se izognili širokemu in pomembnemu območju uporabe Brouwerjevega izreka o negibni točki.

Za ogrevanje si oglejmo, kako izrek 1.1 vpliva na naše vreme. Vzemimo zemeljsko površino za model sfere S^2 in preslikavo v R^2, ki v danem trenutku vsaki točki na zemlji priredi temperaturo in pritisk v tej točki. Izrek 1.1 nam pove, da vsak trenutek obstajata na zemeljski površini dve antipodni točki

z enakim pritiskom in enako temperaturo. (To, da površina zemlje ni prava sfera, nič ne moti, ker obstaja homeomorfizem zemeljske površine na enotsko sfero S^2, ki ohranja antipodnost.)

Naslednji primer uporabe Borsukovega izreka sega v teorijo mere.

3.1. Izrek. *$M_1, \ldots, M_n$ naj bodo omejene merljive podmnožice R^n. Potem obstaja $(n-1)$ — dimenzionalna ravnina, ki hkrati razpolavlja vse množice M_i, $i = i = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Identificirajmo R^n s podprostorom vseh točk v R^{n+1}, ki imajo zadnjo koordinato 0. Za vsak $x \in S^n$ naj bo L_x $(n-1)$ — dimenzionalna ravnina skozi točko $(0, \ldots, 0, 1)$, pravokotna na x. Očtno je $L_x = L_{-x}$. Definirajmo preslikavo $f = (f_1, \ldots, f_n)$ iz S^n v R^n takole: za vsak $x \in S^n$ naj bo $f_i(x)$ mera tistega dela množice M_i, ki leži na isti strani ravnine L_x kot točka $x + (0, \ldots, 0, 1)$. Brez večjih težav se vidi, da je preslikava f zvezna, torej po izreku 1.1 obstajata antipodni točki y in $-y$ z isto sliko $f(y) = f(-y)$. Točki $y + (0, \ldots, 0, 1)$ in $-y + (0, \ldots, 0, 1)$ ležita na različnih straneh ravnine L_y, torej ravnina L_y razpolavlja vse množice M_i. Iskana ravnina v R^n je $L_y \cap R^n$.

V posebnem primeru $n = 3$ nam izrek 3.1 zagotavlja, da lahko vsak sendvič s šunko in sirom razrežemo z enim samim ravnim rezom na pol, tako da vsebujeta obe polovici enako količino kruha, šunke in sira. Zato v angleški literaturi izrek 3.1 pogosto navajajo kot »*ham sandwich theorem*«.

Zanimiva posledica Borsukovega izreka je *Krein-Krasnoselskij-Milmanov* izrek. Ta izrek o »ortogonalnih« vektorjih v Banachovem prostoru je celo ekvivalenten Borsukovemu izreku [2].

3.2. izrek (Krein-Krasnoselskij-Milmanov). *M in N naj bosta linearna podprostora končno dimenzionalnega Banachovega prostora E. Če je $\dim N < \dim M$, obstaja točka $x_0 \in M$, za katero velja: $dist(x_0, N) = \|x_0\| > 0$.*

Dokaz. Recimo, da je norma v prostoru E strogo konveksna, torej $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ za vsak par točk x in y, ki sta linearno neodvisni. V tem primeru se brez težav pokaže, da vsaki točki $x \in E$ pripada natanko določena najbližja točka $y \in N$, preslikava $f: x \to y$ pa je zvezna preslikava iz E v N. Poleg tega je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in E$. Izrek 1.1 nam zagotavlja, da obstaja točka x_0 na enotski sferi S_M prostora M, v kateri je $f(x_0) = f(-x) = 0$. Očitno je to iskana točka.

Če norma v prostoru E ni strogo konveksna, vzemimo neko bazo $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ prostora E^* in definirajmo za vsako naravno število m normo

$$\|x\|_m = (\|x\|^2 + (\varphi^1(x)^2 + \ldots + \varphi_n(x)^2)/m)^{1/2}$$

Ta norma je strogo konveksna, torej obstaja za vsak $m = 1, 2, \ldots$ točka $x_m \in M$, za katero je $dist_m(x_m, M) = \|x_m\|_m = 1$. Ker je $\|x_m\| \leq \|x_m\|_m = 1$, je zaporedje $\|x_m\|$ omejeno, torej vsebuje konvergentno podzaporedje z limito x_0. To pa je iskana točka.

3.3. Posledica. *Linearna podprostora M in N končno dimenzionalnega Banachovega prostora E, za katera velja*

$$sup\,\{dist(x, N), \|x\| \leq 1,\ x \in M\} < 1 \quad \text{in}$$
$$sup\,\{dist(y, M), \|y\| \leq 1, y \in N\} < 1$$

imata enaki dimenziji.

Oglejmo si še zanimiv primer uporabe Borsukovega izreka v algebri. *Raven* (v angleščini *level*) komutativnega kolobarja z enoto je najmanjše tako naravno število n, da lahko -1 izrazimo kot vsoto n kvadratov elementov iz kolobarja. Znano je, da je raven vsakega obsega potenca števila 2. Z uporabo Borsukovega izreka se da dokazati, da za kolobarje to ni res [3].

3.4. Izrek. *Za vsako naravno število n je raven kvocientnega kolobarja $R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ enaka n, kjer je $R[x_1, \ldots, x_n]$ kolobar polinomov n spremenljivk z realnimi koeficienti in $(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ ideal, generiran s polinomom $P(x) = 1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$.*

Najobširnejše področje uporabe Borsukovega izreka predstavljajo vsekakor *diferencialne* in *integralske enačbe*. Z Borsukovim izrekom lahko dokazujemo eksistenco rešitev za določene tipe diferencialnih in integralskih enačb, obstoj periodičnih rešitev navadnih diferencialnih enačb in še kaj (obširen pregled takih aplikacij najdemo v [4]. Ljusternik-Schnirelmann-Borsukov izrek pa je uporaben pri neposrednem reševanju *variacijskih problemov*.

Poglejmo še primer iz teorije grafov in kombinatorike. Z uporabo Borsukovega izreka se da izračunati kromatično število določenih grafov in s tem dokazati *Kneserjeva domneva* [10]: družino vseh podmnožic z n elementi končne množice z $2n + k$ elementi razbijemo v $k + 1$ razredov. Potem vsaj en razred vsebuje dve disjunktni podmnožici.

4. Posplošitve izreka

Za konec si oglejmo izrek 1.1 še z drugega zornega kota. Vsaka zvezna involucija, definirana na danem topološkem prostoru X, predstavlja zvezno delovanje grupe Z_2 na ta prostor. Tako nosi Evklidski prostor R^n naravno delovanje grupe Z_2, ki je določeno s standardno involucijo $i: x \to -x$, restrikcija te involucije na sfero S^{n-1}, torej antipodna preslikava, pa določa naravno delovanje grupe Z_2 na sfero. Izrek 1.1 lahko z drugimi besedami povemo (oziroma zapletemo) takole:

4.1. Izrek: *Za vsako zvezno preslikavo $f: S^n \to R^n$ obstaja taka točka $x \in S^n$, da je povprečna vrednost preslikave f na orbiti točke x enaka 0 glede na standardno delovanje grupe Z_2 na prostora S^n in R^n.*

Ta oblika nam nakaže, kako bi lahko izrek posplošili. Prvo vprašanje, ki se zastavi samo po sebi, je: ali velja podoben izrek za sfero S^n z zveznim prostim delovanjem kakšne kompaktne Liejeve grupe G, različne od Z_2? Drugo vprašanje je: ali velja podoben izrek še za kakšen drug prostor X z zveznim delovanjem kakšne kompaktne Liejeve grupe G?

Odgovor na prvo vprašanje je pozitiven, najdemo ga v [9]. Na drugo vprašanje pa seveda ne moremo odgovoriti z enim samim izrekom. Vsekakor obstajajo razni topološki prostori s prostim delovanjem kakšne kompaktne Liejeve grupe, za katere izrek velja. Že v dokazu, ki smo ga tu navedli, bi lahko sfero nadomestili s kakšnim drugim prostorom. Obstajajo pa tudi takšni prostori, za katere izrek ne velja. Če ostanemo pri grupi Z_2, je odgovor odvisen od topološke invariante prostora, ki jo imenujemo *indeks* in je povezana s strukturo kohomološkega kolobarja prostora [8].

LITERATURA

[1] J. C. Alexander, J. A. Yorke, *The homotopy continuation method: Numerically implementable topological procedures*, Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978), 271—284.

[2] A. L. Brown, *The Borsuk-Ulam theorem and orthogonality in normed linear spaces*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 766—767.

[3] Z. D. Dai, T. Y. Lam, C. K. Peng. *Levels in algebra and topology*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S) 3 (1980), 845—848.

[4] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed point theory, I.* Pänstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.

[5] M. J. Greenberg, *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, Reading, Mass., 1967.

[6] M. Hirsch, *A proof of the non-retractibility of a cell onto its boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 364—365.

[7] I. M. James, *On Category in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Top. 17 (1978), 331—348.

[8] J. Jaworowski, *The set of balanced orbits of maps of S^1 and S^3 actions*, Preprint.

[9] A. Liulevicius, *Borsuk-Ulam theorems for spherical space forms*, Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, III., 1982), Contemp. Math. 19 (1983), 189—192.

[10] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Theory Ser. A 25 (1978), 319—324.

[11] Spanier, E. H.: *Algebraic topology*. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1966.

[12] Steinlein, H.: *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey*. Preprint.

NOVE KNJIGE

KLINC T., Zapiski predavanj iz matematike (Prvi letnik), Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1986, 446 strani

Obsežno gradivo, ki ga avtor knjige predava prvemu letniku na Fakulteti za strojništvo, je v njej sistematično zbrano in predstavlja standarden osnovni tečaj višje matematike.

Za merilo in vzor si je avtor izbral učbenik *‚Analyse 1, 2'* avtorjev R. Coutyja in J. Ezre, izdan leta 1972 v Parizu.

Tekst je napisan v matematičnem slogu s podrobnimi dokazi navedenih trditev. Izjema je le uvodno poglavje, ki seznani bralca z elementarnimi lastnostmi številskih obsegov $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, a se (brez škode) izogne njuni aksiomatski graditvi. Sledita dve poglavji iz linearne algebre; sistemi linearnih enačb (povzeti iz Kuroševega učbenika višje algebre) in vektorji v $\mathbb{R}^3$ (napisano na osnovi nekaterih tečajev analitične geometrije). V običajnem pregledu teorije realnih funkcij realne spremenljivke (zveznost, diferenciabilnost, integracija, uporaba . . .) so zaporedja vključena le implicitno (kot funkcije), osnovni pojmi teorije vrst pa so obdelani posebej. Bežen geometrijski pogled na vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ omogoča lažji dostop do elementov teorije realnih funkcij več realnih spremenljivk v zadnjem poglavju. Diferenciabilnost je obravnavana v tem okviru, lokalni ekstremi in izrek o implicitni funkciji pa le za funkcije dveh spremenljivk.

Knjiga je po avtorjevi uvodni opombi namenjena študentom, ki poslušajo njegova predavanja na Fakulteti za strojništvo, prav gotovo pa bo koristna tudi širšemu krogu bralcev, predvsem študentom tehničnih in naravoslovnih fakultet.

Boris Lavrič

EULER-POISSONOV INTEGRAL NA GEOMETRIJSKI NAČIN

MARKO RAZPET

Math. Subj. Class. (1980) 26 B 15, 40 C 10

Znani Poisson-Eulerjev integral je izračunan na preprost geometrijski način.

THE EULER-POISSON INTEGRAL IN A GEOMETRICAL WAY

The known Euler-Poisson integral is computed by a simple geometrical argument.

Na predavanjih in vajah iz matematike na tehničnih fakultetah v prvih letnikih navadno pri posplošenih integralih omenjamo tudi integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

ki se imenuje v matematični literaturi *Euler-Poissonov integral.* Običajno ugotavljamo le, da je konvergenten. To ni težko videti, kajti za vsako realno število x, ki je večje od 1, velja, da je $x^2 > x$, iz česar pa takoj sledi neenakost $e^{-x^2} < e^{-x}$. Iz konvergence integrala $\int_1^{\infty} e^{-x}\, dx$ potem sledi konvergenca integrala $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ in tudi konvergenca integrala I. Nekje tukaj se ustavimo, povemo še, da je $I = \sqrt{\pi}$, nato pa rečemo, da bo treba počakati na teorijo o dvojnih in dvakratnih integralih. V knjigi [2] res najdemo tri izračune integrala I. Eden je narejen na podlagi teorije navadnega Riemannovega integrala, poleg tega je pri tem računu uporabljena tudi Wallisova formula. Drugi dve varianti se naslanjata na teorijo dvojnega in dvakratnega integrala.

Lahko pa poskusimo izračunati Euler-Poissonov integral tudi na preprost geometrijski način. Na stopnji, ko študent že dobro pozna določeni integral, ni težko izračunati prostornine telesa, za katero poznamo vse ploščine presekov, ki so pravokotni na izbrano os v prostoru. Recimo, da je to kar os x pravokotnega koordinatnega sistema xyz, v katerem je telo. Ploščina preseka v točki x naj bo $S(x)$, vsi preseki pa naj se vrstijo od točke $x = a$ do točke $x = b$. Če je funkcija $x \to S(x)$ zvezna na $[a, b]$, tedaj je prostornina V telesa dana s formulo

$$V = \int_a^b S(x)\, dx \tag{1}$$

Da bi izračunali integral I, si oglejmo funkcijo $(x, y) \to e^{-(x^2+y^2)}$. Ta funkcija je definirana povsod na $\mathbb{R}^2$, je pozitivna, njena največja vrednost je 1, in sicer v točki $(0, 0)$. Graf te funkcije je ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$. V pravokotnem sistemu xyz ima ploskev enačbo $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$. Poleg tega je ploskev rotacijska, dobimo jo z rotacijo krivulje $z = e^{-x^2}$ (v ravnini xz) okrog osi z. Vsa ploskev leži nad ravnino xy in se razteza na vse strani v neskončnost. Izračunali bomo na dva načina prostornino telesa med ravnino xy in to ploskvijo.

Prvič presekajmo telo z ravnino, ki stoji pravokotno na os y v točki $(0, y, 0)$. Če presečni lik projiciramo pravokotno na ravnino xz, dobimo lik, ki je zgoraj

omejen s krivuljo, ki ima v tej ravnini enačbo $z = e^{-y^2} e^{-x^2}$, spodaj pa z osjo x. Ploščino tega lika označimo s $P(y)$ in po znani formuli je

$$P(y) = e^{-y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = I e^{-y^2} \tag{2}$$

S tem imamo izračunano ploščino pravokotnega preseka za vsak realen y. Po formuli (1) je prostornina V telesa enaka integralu

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y)\, dy = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = I^2 \tag{3}$$

Drugič presekajmo telo z ravnino, pravokotno na os z skozi točko $(0, 0, z)$. Za koordinato z velja pogoj $0 < z \leq 1$. Pri takem izbranem z je presečni lik krog s polmerom $r = \sqrt{(-\log z)}$. Tukaj pomeni log naravni logaritem. Ploščina presečnega kroga naj bo $S(z)$. Seveda je

$$S(z) = \pi r^2 = -\pi \log z \tag{4}$$

Po formuli (1) pa je prostornina telesa enaka integralu

$$\int_0^1 S(z)\, dz = -\pi \int_0^1 \log z\, dz \tag{5}$$

Ta integral izračunamo na elementaren način ali s primerno substitucijo ali pa z metodo »per partes«. Po drugi metodi dobimo

$$\int_0^1 S(z)\, dz = \pi(z - z \log z)\,\Big|_0^1 = \pi \tag{6}$$

Ker moramo obakrat dobiti isti rezultat, imamo končno $I^2 = \pi$ oziroma $I = \sqrt{\pi}$.

V knjigi [1] najdemo tole zanimivo anekdoto. Lord Kelvin (William Thomson) je nekoč vprašal svoje poslušalce: »Ali veste, kdo je pravi matematik?« Stopil je pred tablo in nanjo s kredo napisal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Nato je uprl prst v tisto, kar je bil pravkar napisal, se obrnil proti občinstvu in rekel: »*Pravi matematik je tisti, kateremu je to ravno tako jasno, kakor je vam to, da je dva krat dve enako štiri.*«

LITERATURA

[1] E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972, (prevod iz angleščine).

[2] G. M. Fihtengol'c, *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija*, tom II, Nauka, Moskva 1969.

[3] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana 1968.

D'ALEMBERTOVA FUNKCIONALNA ENAČBA

JOSO VUKMAN

Math. Subj. Class. (1980) 39 B 05

V članku obravnavamo funkcionalno enačbo

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

v obsegu realnih števil.

THE D'ALEMBERT FUNCTIONAL EQUATION

In this article the functional equation

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

in the real field is considered.

D'Alembertova funkcionalna enačba, to je funkcionalna enačba

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{1}$$

ki spominja na znano formulo iz trigonometrije

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

ima dolgo zgodovino. S to funkcionalno enačbo so se ukvarjali D'Alembert [3], Cauchy [2], Poisson [7], Pickard [6] in še mnogi. V pričujočem članku obravnavamo funkcionalno enačbo (1) v obsegu realnih števil $\mathbf{R}$. Rešitev funkcionalne enačbe (1) je vsaka funkcija $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ki za vsak par $x, y\in\mathbf{R}$ zadošča pogoju (1). Najprej nas bodo zanimale vse zvezne rešitve funkcionalne enačbe (1). Dokazali bomo naslednji rezultat.

IZREK 1. *Funkcije* $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 1$, $f(x)=\cos kx$, $f(x)=\cosh kx$, *kjer je* $k\in\mathbf{R}$ *konstanta, so edine zvezne rešitve funkcionalne enačbe* (1).

Klasičen dokaz trditve, ki smo jo pravkar zapisali, lahko poiščemo v monografiji [1]. Bistvo tega dokaza je v tem, da najprej poiščemo rešitev funkcionalne enačbe (1) na neki množici, ki je povsod gosta v $\mathbf{R}$, nato pa si pomagamo z zveznostjo rešitve in preidemo na vso množico $\mathbf{R}$. Mi si bomo ogledali dokaz, ki je nedavno izšel v članku [5].

DOKAZ IZREKA 1. Reševanje funkcionalne enačbe (1) bomo prevedli na reševanje diferencialne enačbe drugega reda. Naj bo torej f zvezna rešitev funkcionalne enačbe (1). Če v (1) pišemo $x=y=0$, dobimo

$$(f(0))^2=f(0)$$

torej imamo

$$f(0)=0 \tag{2}$$

ali pa

$$f(0)=1 \tag{3}$$

Iz (2) sledi $f(x)=0$ za vsak $x\in\mathbf{R}$, saj imamo

$$0=2f(x)f(0)=f(x+0)+f(x-0)=2f(x)$$

Z drugimi besedami, če je $f(0)=0$, potem je $f(x)=0$ za vsak $x\in\mathbf{R}$. S tem je del izreka že dokazan.

Odslej bomo privzeli, da velja (3). Dokažimo, da je f soda funkcija. Iz (1) in (3) dobimo

$$f(x) + f(-x) = f(0 + x) + f(0 - x) = 2f(0)\, f(x) = 2f(x)$$

oziroma

$$f(x) = f(-x)$$

Vsa dosedanja dognanja veljajo za poljubno rešitev funkcionalne enačbe (1), kajti zveznosti funkcije nismo še nikjer uporabili. V nadaljevanju bomo dokazali, da iz zveznosti funkcije f sledi, da je funkcija f dvakrat odvedljiva. Ker je funkcija f zvezna na vsej realni osi, je integrabilna na vsakem končnem intervalu, zato lahko za vsako realno število $t > 0$ zapišemo

$$\int_{-t}^{t} f(x + y)\, dy + \int_{-t}^{t} f(x - y)\, dy = \int_{-t}^{t} 2f(x)\, f(y)\, dy$$

oziroma

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)\, dy = f(x) \int_{-t}^{t} f(y)\, dy \tag{4}$$

Iz (3) in iz zveznosti funkcije f sledi, da obstaja tako realno število $t > 0$, da je

$$\int_{-t}^{t} f(y)\, dy > 0 \tag{5}$$

Ker je funkcija f zvezna, je leva stran enačbe (4) odvedljiva funkcija spremenljivke x, zato velja isto tudi za desno stran enačbe. Obe strani enačbe (4) smemo torej odvajati na x in s tem dobimo

$$f(x + t) - f(x - t) = f'(x) \int_{-t}^{t} f(y)\, dy \tag{6}$$

Funkcija f je torej odvedljiva, iz enačbe, ki smo jo pravkar zapisali, pa je razvidno, da obstaja tudi f'' za vsak $x \in \mathbf{R}$. Če sedaj v (6) pišemo $x = 0$, dobimo

$$f(t) - f(-t) = f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)\, dy$$

iz tega pa sledi zaradi (5) in dejstva, da je f soda funkcija

$$f'(0) = 0 \tag{7}$$

Odvajajmo obe strani enačbe (1) dvakrat na y, da dobimo

$$f''(x + y) + f''(x - y) = 2f(x)\, f''(y) \tag{8}$$

Če v (8) pišemo $y = 0$, dobimo diferencialno enačbo

$$f''(x) = Kf(x) \tag{9}$$

kjer smo s K označili $f''(0)$. Reševanje funkcionalne enačbe (1) smo torej prevedli na reševanje diferencialne enačbe (9) pri pogojih (3) in (7). Za konstanto K imamo tri možnosti. Če je $K = 0$, je rešitev diferencialne enačbe (9)

$$f(x) = C_1 x + C_2$$

v primeru, ko je $K > 0$, imamo

$$f(x) = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx$$

kjer je $k = K^{1/2}$, če pa je $K < 0$, dobimo

$$f(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

kjer je $k = (-K)^{1/2}$. V vseh treh primerih dobimo iz pogojev (3) in (7) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Dokaz izreka je s tem končan.

Dokazali smo torej, da so funkcije $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$, $f(x) = \cos kx$, $f(x) = \cosh kx$ edine zvezne rešitve funkcionalne enačbe (1). Funkcionalna enačba (1) pa ima tudi nezvezne rešitve. Če namreč vzamemo nezvezno aditivno funkcijo $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, potem je funkcija g, ki je definirana z enačbo

$$g(x) = \tfrac{1}{2}(\exp f(x) + \exp(-f(x)))$$

tudi nezvezna, preprost račun pa nas prepriča, da je ta funkcija rešitev enačbe (1). Dokaz eksistence nezveznih aditivnih funkcij si lahko ogledamo v [1].

Za konec povejmo še to, da je Kaczmarz leta 1924 v članku [4] dokazal, da lahko v izreku 1 zveznost nadomestimo z merljivostjo funkcije.

LITERATURA

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York and London 1966.

[2] A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse*, Paris 1821; Oeuvres Complètes (2), 3 (1897) 106—113.

[3] J. D'Alembert, *Mémoire sur les principes de mécanique*, Hist. Acad. Sci. Paris 1769, pp. 278—286.

[4] S. Kaczmarz, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x) + f(x + y) = \Phi(y) f(x + \frac{1}{2} y)$, Fund. Math., 6 (1924), 122—129.

[5] F. J. Papp, *The D'Alembert functional equation*, Amer. Math. Mon. 92, 273—275 (1985).

[6] C. Pickard, *Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la géometrie non-euclidienne*, Bull. Soc. Math., XLVI (1922) 404—416, 425—432.

[7] S. Poisson, *Du parallélogramme des forces*, Correspondance sur l'École Polytechnique, I (1804) 356—360.

OBVESTILO NAROČNIKOM

S tretjo številko Obzornika za matematiko in fiziko smo izdali že polovico letnega obsega. Zato prosimo tiste naročnike, ki s položnico, priloženo v prvi dvojni številki, še niso poravnali letošnje naročnine, da to store čimprej. Znesek 3.000.— din lahko vplačate osebno v pisarni Komisije za tisk DMFA SRS, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, soba 316, ali pa nam ga nakažete na ŽR številka 50101-678-47233 DMFA SRS — Ljubljana.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

DOMAČE VESTI

POLETNA ŠOLA INTERTRADE — IBM

Poletna šola Intertrade — IBM je nova oblika izobraževanja za boljše študente prvega letnika računalništva in matematike. Njen namen je, da jim dajemo dodatne možnosti, predvsem več možnosti za delo ob računalniku, kot jo imajo med študijem. Letos je na šoli sodelovalo osem študentov računalništva in dva študenta matematike. Glavna tema šole je bila Operacijski sistem PC-DOS. Podrobnejše teme so bile: pregled osnovnih ukazov, uporaba paketnih datotek, preusmerjanje filtriranje, instaliranje aplikacij, pregled zbirnika in DEBUG ter uvod v mreže. Šolo so vodili Roman Dorn, Drago Kralj in Izidor Hafner. Šola je trajala od 1. 9. do 5. 9. Študenti so stanovali v Plemljevem domu na Bledu, predavanja in vaje pa so imeli v Intertradovem šolskem centru v Radovljici.

Ob zaključku šole smo imeli ob kosilu razgovor s predstavniki Intertrada. Šolo sta finančno omogočila Intertrade, TOZD zastopstvo IBM in Izobraževalna skupnost — PIS za elektrotehniko in računalništvo.

Upajmo, da bo ta šola postala redna oblika izobraževanja in da bo družba tudi na drugih področjih omogočila boljšim študentom dodatno izobraževanje in vsaj za najboljše ustvarila razmere, kakršne imajo študenti v razvitih družbah.

Izidor Hafner

OBVESTILO

PODIPLOMSKI ŠTUDIJ MATEMATIKE — PODROČJE IZOBRAŽEVANJE

Na VTOZD Matematika in mehanika smo začeli s podiplomskim študijem za učitelje matematike v šolskem letu 1985/86. Prijavilo se je 16 kandidatov, diplomantov pedagoške smeri matematike.

Prvo leto smo imeli na sporedu predavanje

I. VIDAV: *Izbrana poglavja iz teorije mere*

in seminar

M. HLADNIK: *Funkcionalna analiza*

Zdaj, drugo leto, tečejo tri predavanja

J. GRASSELLI: *Binarne kvadratne forme*

N. PRIJATELJ: *Izbrana poglavja iz osnov matematike*

I. VIDAV: *Diferencialna geometrija*

in seminar

M. HLADNIK: *Izbrane teme iz realne, kompleksne in abstraktne analize*

V tretjem letu bo še eno predavanje in seminar, ki bo namenjen magistrskim delom.

Za novi ciklus tega podiplomskega študija še ne vemo, kdaj ga bomo začeli. Na vse srednje šole v Sloveniji smo poslali anketne liste, da ugotovimo, ali je zanimanja dovolj, da pričnemo že v šolskem letu 1987/88.

Če želite kaj zvedeti v zvezi z načrtovanim študijem, nam pišite na Jadransko 19, 61111 Ljubljana, p. p. 64, ali nas pokličite po telefonu na številko (061) 265-061.

Vodja podiplomskega študija
prof. dr. *Peter Petek*

FLUKTUACIJSKI INTERFEROMETER

IVO VEROVNIK IN ANDREJ LIKAR

PACS 01.50.My

Članek opiše način za opazovanje interference iz dveh neodvisnih svetil. Namesto merjenja korelacije med signaloma iz dveh merilnikov opazujemo fluktuacije sestavljenega signala iz obeh merilnikov v odvisnosti od njune medsebojne lege. Poskus se posreči v šolskem laboratoriju.

A FLUCTUATION INTERFEROMETER

The article describes a possibility of observing the interference of light from two independent sources. Instead of measuring the correlation between signals from two light sensors, the fluctuation of the composite signal from the sensors was observed as a function of their distance. The experiment can be demonstrated in a classroom.

Uvod

Interferenco svetlobe začnemo obravnavati z Youngovim poskusom, pri katerem vidimo interferenčne proge na zaslonu le, če sta valovanji iz rež koherentni. To dosežemo tako, da posvetimo na reži z enim svetilom. Z neodvisnima termičnima svetiloma nikoli ne dobimo interferenčnih prog. Na tej osnovi je P. A. M. Dirac trdil, da lahko foton interferira le s samim seboj in da ni interference fotonov iz različnih svetil. Po tej trditvi je tedaj v povprečju vseeno, če svetili svetita skupaj s polovično močjo, ali pa sveti najprej eno in drugo zastremo, nato pa enak čas sveti drugo, ko smo zastrli prvega.

Poskusi z dvema merilnikoma, ki vidita obe svetili, so prepričljivo pokazali, da trditev ne drži. S poskusi te vrste sta začela leta 1956 Hanbury Brown in Twiss [1]. Opazovala sta korelacijo signalov iz obeh merilnikov in pokazala, da izgine, ko zastremo eno od svetil. Klasično gledano tak rezultat ni presenetljiv, saj vemo, da valovanja vedno interferirajo, če pri tem mislimo na sestavljanje polj, ne glede na to, ali zaznamo interferenčne proge ali ne. Radijske postaje, na primer, se med seboj motijo zaradi mešanja elektromagnetnih polj.

Interferenčne proge iz dveh nepovezanih laserjev sta prvič opazila Magyar in Mandel leta 1963. Uporabila sta laserja, ki sta oddajala svetlobo v časovno in frekvenčno nepovezanih sunkih. Včasih se je zgodilo, da sta sunka iz obeh laserjev sočasno osvetlila elektronsko slikovno cev. Takrat je elektronsko vezje sprožilo cev, sliko pa posnela običajna fotografska kamera. Čas slikanja z elektronsko slikovno cevjo je bil tako kratek, da sta v ugodnem primeru, ko se sunka frekvenčno nista dosti razlikovala, dobila lepo vidno interferenčno sliko. Že leto dni prej so opazovali interferenco svetlobe iz dveh frekvenčno stabiliziranih laserjev tako, da so merili frekvenco utripanja (Javan, Ballik in Bond, 1962). Merjenje frekvence utripanja dveh neodvisnih laserjev sodi danes med nepogrešljive poskuse v vrhunski metrologiji.

Uspeli so tudi poskusi z dvema zelo šibkima neodvisnima izviroma, kjer pričakujemo odstopanje od klasične napovedi zaradi kvantnih pojavov [1]. Izidi se popolnoma skladajo s pričakovanji.

V članku bova opisala, kako je mogoče pokazati interferenco dveh neodvisnih laserskih curkov tudi v šoli. To se posreči z opazovanjem fluktuacij

signala, ki ga dobimo s seštevanjem signalov iz dveh neodvisnih svetlobnih merilnikov. Izkaže se, da je velikost fluktuacij odvisna od medsebojne lege merilnikov, ki tipata interferenčno svetlobno polje dveh laserjev. Merjenje lahko izvedemo tudi z enim merilnikom, pred katerega postavimo široki reži in zbiralno lečo [2].

Najprej opiševa fluktuacijski intenzitetni interferometer z dvema merilnikoma in nato še poskuse in rezultate meritev, ki sva jih opravila.

Delovanje interferometra

Najprej opišimo običajni intenzitetni interferometer, pri katerem merimo povprečno korelacijo med signaloma iz dveh merilnikov. Nekoherentni svetili 1 in 2 dasta svetlobno polje, ki ga tipata popolnoma enaka merilnika a in b. Korelator tvori povprečje produkta svetlobnih tokov, ki ju namerita merilnika:

$$K_{ab} \propto \overline{j_a j_b}$$

Množenje in časovno povprečevanje opravimo elektronsko. Gostota svetlobnega toka, ki jo nameri prvi merilnik, je sestavljena iz dela, ki ga prispeva prvo svetilo, in prispevka drugega svetila. Če uporabimo kompleksno pisavo za električno poljsko jakost v valovanju, zapišemo gostoto svetlobnega toka j_a takole

$$j_a \propto |E_1 \, e^{i(\mathbf{k}_{1a}\mathbf{r}_{1a}+\delta_1)} + E_2 \, e^{i(\mathbf{k}_{2a}\mathbf{r}_{2a}+\delta_2)}|^2$$

Z E_1 in E_2 smo zaznamovali realno amplitudo električne poljske jakosti ustreznega svetila na mestu merilnika. Ker je razdalja merilnikov majhna v primeri z razdaljama svetil od merilnikov in sta svetili skoraj točkasti, zanemarimo krajevno odvisnost amplitud električne poljske jakosti. Fazni razliki δ_1 in δ_2 sta naključni spremenljivki, saj sta svetili nekoherentni in nepovezani. Podobno zapišemo gostoto svetlobnega toka j_b, le da nadomestimo indeks a, ki zaznamuje prvi merilnik, z indeksom b, ki zaznamuje drugega. Valovni vektor in radijvektor sta vselej vzporedna. Pri simetrični razvrstitvi merilnikov in svetil (Sl. 1) lahko poenostavimo

$$\mathbf{k}_{1a}\mathbf{r}_{1a} - \mathbf{k}_{2a}\mathbf{r}_{2a} = \mathbf{k}_{2b}\mathbf{r}_{2b} - \mathbf{k}_{1b}\mathbf{r}_{1b} = \Delta$$

Pri časovnem povprečevanju produkta $j_a \, j_b$ odpadejo vsi členi, ki vsebujejo fazni razliki δ_1 ali δ_2, saj je zaradi njunega kaotičnega spreminjanja $\overline{e^{i\delta_1}} = \overline{e^{i\delta_2}} = \overline{e^{i(\delta_1 \pm \delta_2)}} = 0$. Po nekaj korakih dobimo

$$K_{ab} \propto (E_1^2 + E_2^2)^2 + 2E_1^2 E_2^2 \cos(2\Delta)$$

Velikost korelacije je torej odvisna od fazne razlike Δ ter se spreminja, ko merilnika razmikamo. Ta zaključek velja tudi, ko sta svetili tako šibki, da merilnika zaznavata že posamezne fotone. V tem primeru namesto korelatorja uporabimo koincidenčno vezje, ki da na izhodu sunek le takrat, ko se merilnika odzoveta sočasno. Število izhodnih sunkov je spet odvisno od medsebojne lege merilnikov a in b. Izid tega poskusa odločno ovrže naivno sliko o fotonih kot kroglicah. Fotonu pač ni mogoče slediti od emisije do absorpcije, tudi načelno ne.

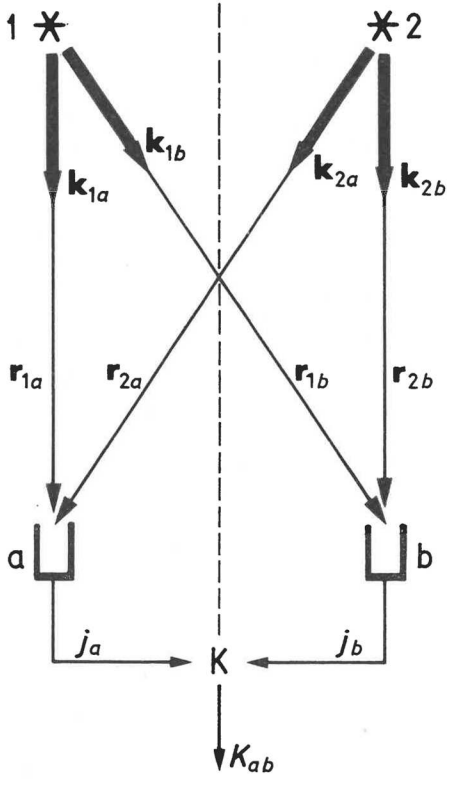
Tovrstno merjenje je za šolski laboratorij prezahtevno. Poenostavimo ga lahko tako, da *seštejemo* signala iz obeh merilnikov ter opazujemo *velikost fluktuacij* vsotnega signala:

$$S_{ab} \propto j_a + j_b$$

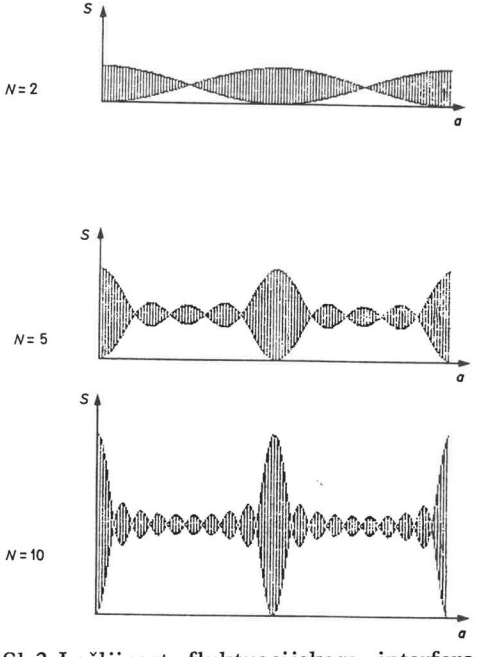
Računamo podobno kot prej, le da sedaj ne povprečimo po času:

$$S_{ab} \propto 2(E_1^2 + E_2^2) + 4E_1E_2 \cos \Delta \cos (\delta_1 - \delta_2)$$

Fazna razlika $\delta_1 - \delta_2$ je naključna, zato podaja drugi člen fluktuacije, ki jih v našem poskusu opazujemo. Največje fluktuacije dobimo, ko je $|\cos \Delta| = 1$, izginejo pa takrat, ko je $\cos \Delta = 0$. Rezultat lahko tudi nazorno razložimo. Predstavljajmo si, da interferenčne proge, ki ju da svetloba iz obeh svetil, hitro begajo po namišljenem zaslonu, razdalja med njimi pa se ne spreminja. Ko sta merilnika, ki ležita v zaslonu, v taki medsebojni razdalji, da meri v nekem trenutku eden od njiju interferenčni vrh, drugi pa dolino, vsotni signal ne bo fluktuiral, tudi ko se bo lega interferenčne slike na zaslonu spremenila. Če pa merita v nekem hipu oba detektorja interferenčna vrhova, bosta trenutek pozneje oba v interferenčnih dolinah in bo vsotni signal maksi-



Sl. 1. Lega svetil in merilnikov pri korelacijskem interferometru. Z 1 in 2 zaznamujemo svetili, z a in b pa merilnika. K je korelator



Sl. 2 Ločljivost fluktuacijskega interferometra narašča s številom merilnikov, ki so v medsebojnem razmiku *a*. Risbe kažejo razmere pri dveh, petih in desetih merilnikih. Z navpičnimi črtami so nakazane velikosti fluktuacij v vsotnem signalu *S*

malno fluktuiral. Pri enakih svetilih je interferenčni fluktuacijski kontrast največji. Tedaj se spreminja vsotni signal od vrednosti 0 do vrednosti $8E^2$, kar je za opazovanja ugodno.

Z več merilniki, ki jim seštejemo signale, lahko povečamo ločljivost interferometra, podobno, kot smo vajeni pri običajnem spektroskopu na mrežico, kjer povečamo ločljivost z večjim številom rež [5]. V tem primeru ugotovimo, da je fluktuacijski del vsotnega signala N merilnikov kar

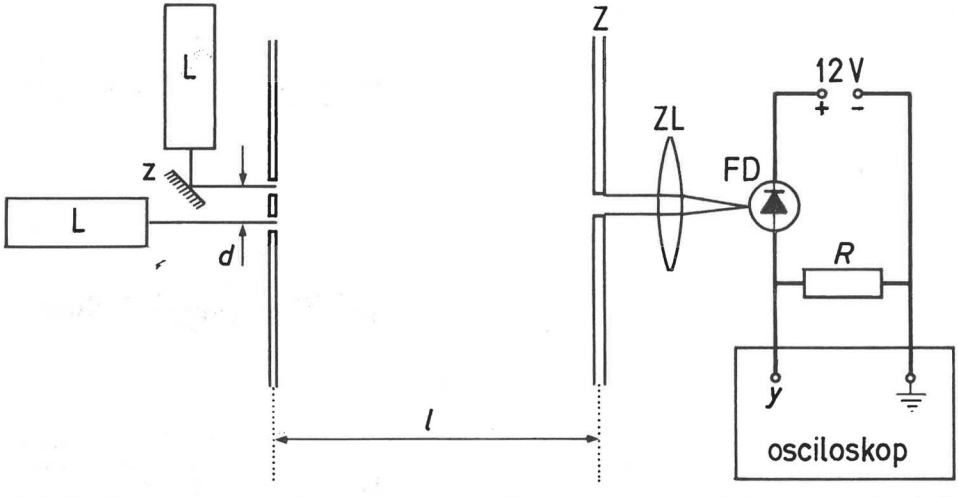
$$2E^2 (\sin N\Delta/\sin \Delta) \cos (\delta_1 - \delta_2)$$

Fluktuacije je tako laže opazovati, seveda pa je poskus bolj zamotan (Sl. 2).

S preprosto opremo, ki je na voljo v šolah, lahko opazujemo le fluktuacije, katerih frekvenca ne presega nekaj 10 MHz. Poskus se torej posreči s čim bolj enobarvnima izviroma z enakima frekvencama.

Poskus

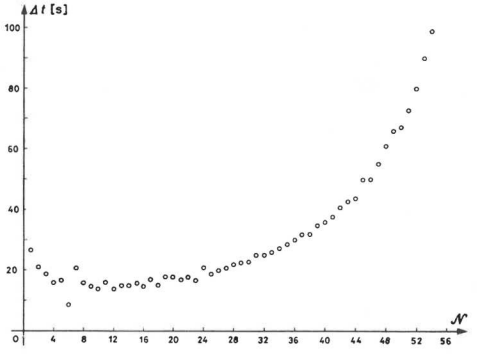
Poskus sva naredila z dvema laserjema Iskra He-Ne z močjo 1 mW. Šole uporabljajo take laserje za učila. Laser oddaja svetlobo, katere frekvenca se ujema z eno od lastnih frekvenc resonatorja. Sosednji lastni frekvenci se razlikujeta za okrog 300 MHz, širina spektralne črte pa je pod enim MHz (okrog 100 kHz). Lastna frekvenca resonatorja je odvisna od dolžine resonatorja, ki se spreminja v glavnem zaradi lezenja temperature naprave. Če je lezenje pri obeh laserjih različno, pričakujemo, da se bosta spektralni črti obeh laserjev za hip prekrili, potem spet oddaljili in po določenem času ponovno prekrili. V primeru, ko sta črti prekriti, dobimo v spektru fluktuacij za hip znaten delež pri frekvencah pod 1 MHz, kar bomo razločno videli. Pri tem ne moti, če elektromagnetno polje v resonatorju ne vztraja v enem samem načinu nihanja. Preskakovanje med sosednjimi načini nihanja je hitro (2 ms) v primerjavi s časom, ko sta črti prekriti znotraj svoje naravne širine [3].



Sl. 3 Merilna naprava, s katero sva izmerila pogostnost prekrivanja spektralnih črt dveh laserjev
L laser, z zrcalo, d razdalja med uklonskima režama, Z zaslon z odprtino, l razdalja med uklonskima režama in zaslonom, FD fotodioda, ZL zbiralna leča, R upornik

Poskus, s katerim sva izmerila pogostost prekrivanja spektralnih črt ter preskusila vso napravo, kaže sl. 3. Svetlobna curka iz dveh laserjev sta usmerjena ločeno skozi ozki reži v majhnem razmiku *d*. V razdalji *l*, nekaj metrov od rež, imamo zaslonko z 1 mm široko in 20 mm visoko režo, ki se po smeri ujema z uklonskima režama in zato tudi interferenčnimi progami. Razdalja *l* je tolikšna, da je širina reže majhna v primeri z razdaljo med sosednjima interferenčnima progama na zaslonu. Statično interferenčno sliko dobimo, ko svetimo skozi prvi dve reži z enim samim laserjem. Za režo je zbiralna leča, ki zbere svetlobo na fotodiodi. V elektronskem merilnem delu sva uporabila upornik za 560 kΩ, osciloskop Iskra MA 4049 (0—20 MHz) in hitro fotodiodo z dvižnim časom 3 ns [4].

V določenih presledkih sva videla fluktuacije v obliki kratkotrajnega šuma na osciloskopu. Fluktuacije so izginile, če sva zaslon z režo zasukala za pravi kot, da je bila reža postavljena pravokotno na interferenčne proge, ki so begale po zaslonu. V tem primeru je zajela reža hkrati več svetlih in temnih prog in se je svetlobni tok skozi režo izpovprečil. Fluktuacije so izginile tudi takrat, ko sva zastrla svetlobo iz enega od laserjev. Merila sva čase med opaženimi fluktuacijami. Pričakovati je bilo, da bodo ti časi tem krajši, čim večja bo razlika hitrosti, s katerima se spreminja dolžina laserjev. Največjo razliko dosežemo tako, da pustimo en laser dalj časa vključen in segret na delovno temperaturo, drugega pa vključimo hladnega. Na ordinatno os nanesemo čase med zaporednimi fuktuacijami, potem ko je bi eden od laserjev 15 minut izključen (sl. 4). Vidimo, da čas narašča. To se sklada z naraščanjem dolžine telesa, ki ga počasi segrevamo. Temperatura najprej narašča, nato pa je naraščanje vedno počasnejše. Presledki med fluktuacijami naraščajo čez vsako mejo. Neenakomernost na začetku diagrama lahko razložimo s tem, da je laser kot celota nehomogeno telo, zato dolžina resonatorja ne narašča enakomerno, ampak skokovito.



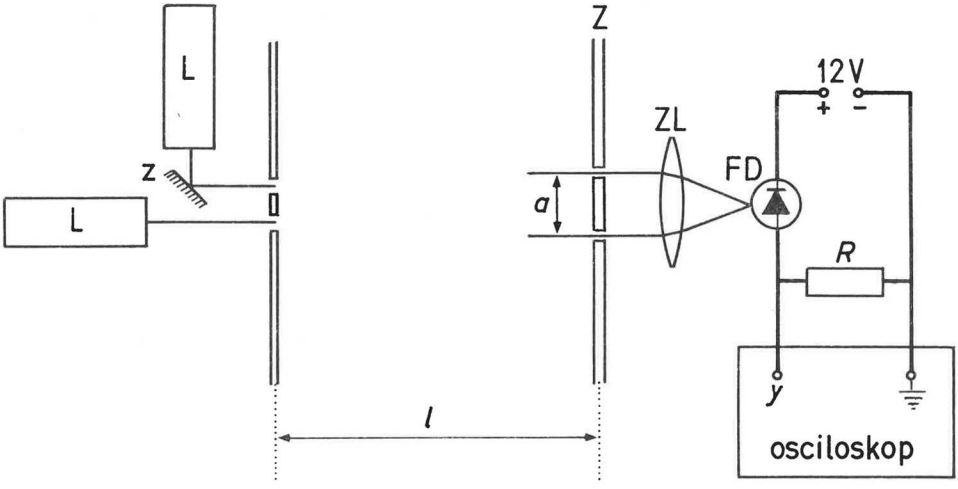
Sl. 4 Naraščanje časovnih intervalov med dvema zaporedno izmerjenima fluktuacijama po prehodu svetlobe skozi ozko režo, vzporedno z interferenčnimi progami na zaslonu. Eden od laserjev je bil pred tem 15 minut izključen. N pomeni zaporedno številko fluktuacije

Meritve z dvema režama v zaslonu

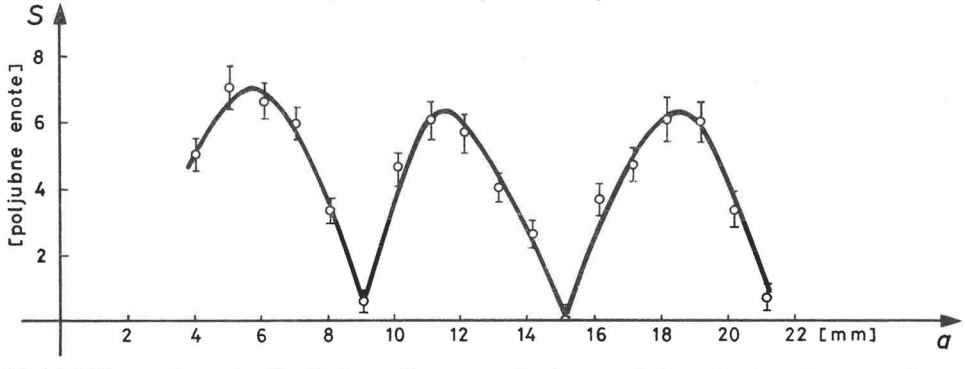
V zaslonu imamo sedaj dve zaslonki, ki jima lahko spreminjamo medsebojno razdaljo (sl. 5). Zbiralna leča zbere svetlobo iz obeh rež na fotodiodo, tako da je napetostni signal, ki ga izmerimo z osciloskopom, sorazmeren vsoti obeh svetlobnih tokov skozi reži. To je dodatna poenostavitev, saj namesto dveh merilnikov potrebujemo le enega. Če zberemo zares vso svetlobo na fotodiodi, ni treba upoštevati dodatnih interferenčnih pojavov na njej.

Merila sva povprečno amplitudo fluktuacij v odvisnosti od razdalje med režama v zaslonu. Ker se te fluktuacije pokažejo le za hip, relativna napaka

pri teh merjenjih ni majhna. Ocenila sva, da je tako nemogoče meriti bolje kot na 10 % natančno. Vidimo, da fluktuacije pri danih medsebojnih razdaljah med režama v zaslonu popolnoma izginejo, pri vmesnih legah pa so največje (sl. 6). Interferenčne proge, ki begajo sem in tja po zaslonu, so v razmiku 6 mm.



Sl. 5 Skica fluktuacijskega interferometra z dvema režama na zaslonu s spremenljivo medsebojno razdaljo *a*



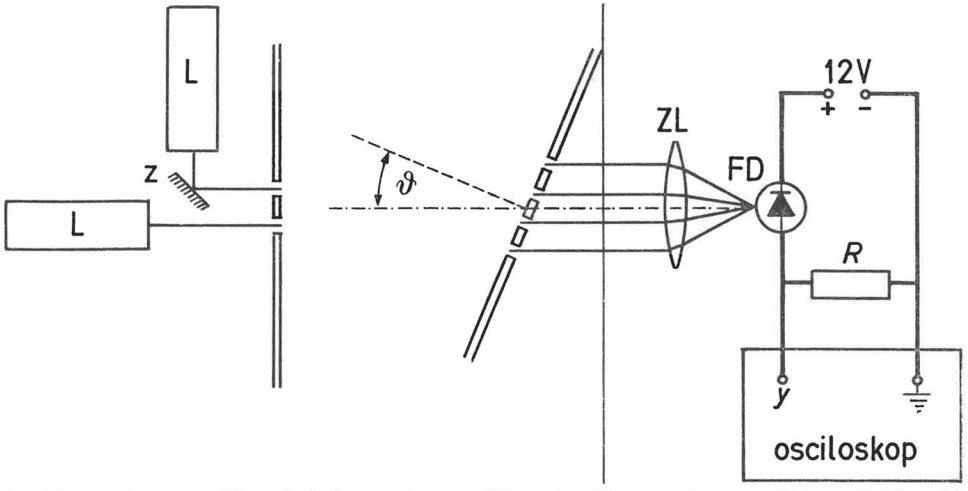
Sl. 6 Velikost izmerjenih fluktuacij po prehodu svetlobe skozi režo v zaslonu v odvisnosti od razdalje *a* med režama

Meritev sva preverila tako, da sva opazovala stacionarno interferenčno sliko, ki jo da en sam laser. Koherentna curka, ki ju je dal en laser, sva vsakega posebej usmerila skozi začetni uklonski reži. Razdalja med sosednjima svetlima programa na zaslonu je bila znotraj 5 % enaka, kot sva jo izmerila z opazovanjem fluktuacij.

Meritve z več režami

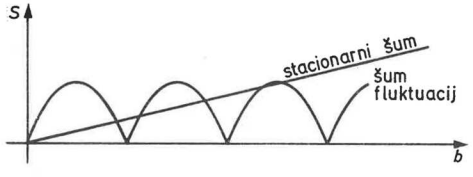
Kot rečeno, povečamo ločljivost interferometra, če merimo z več merilniki ali v našem primeru — z več režami [5]. Pri tem pa naletimo na težave z režami. Meritve sva izvedla tako, da sva zaslonki s stalno medrežno razdaljo spre-

minjala naklonski kot vpadne svetlobe. Merila sva kot, pri katerem nisva več videla fluktuacij. Razdalja med režami v zaslonki je bila tolikšna, da sva pri kotu 0° dobila največje fluktuacije. Prvi kot, pri katerem so fluktuacije izginile, je meril pri štirih režah 40°, pri petih pa 35° z ocenjeno napako 5 %. Ta kota se v okviru natančnosti ujemata z izračunanima 41,5° in 37° (Sl. 7).



Sl. 7 Merjenje velikosti fluktuacij z večjim številom rež v zaslonu. Naklonski kot ϑ večamo, dokler fluktuacije ne izginejo

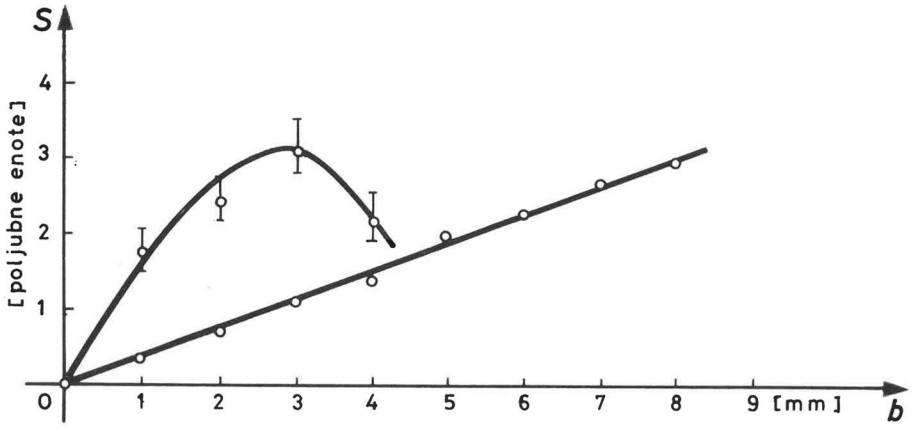
Podatek o razdalji med begajočimi interferenčnimi progami lahko dobimo tudi z merjenjem fluktuacij z eno samo režo v zaslonu, ki ji spreminjamo širino. Velikost fluktuacij je odvisna od širine reže (Sl. 8). Žal nastanejo pri takem merjenju težave, ker z naraščanjem širine reže narašča tudi povprečni svetlobni tok skozi režo. Laserska svetloba iz posameznega laserja nima popolnoma konstantne gostote svetlobnega toka, tako da izmerimo s fotodiodo stacionarni šum, ki se veča z merjenim setlobnim tokom. Pr določeni širini reže postane stacionarni šum večji kot velikost fluktuacij. Od te širine dalje meritve niso več mogoče. Rezultati meritve se spet skladajo s tem, kar pričakujemo (Sl. 9).



Sl. 8 Z večanjem širine reže b enakomerno narašča stacionarni šum, velikost fluktuacij zaradi inerference svetlobe pa je periodična funkcija širine reže. Zaradi šuma lahko merimo le pri majhnih širinah reže

Zaključek

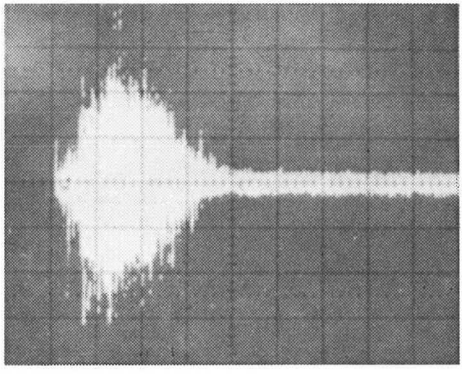
Z opisanimi poskusi sva pokazala, da se da opazovati interferenco dveh laserjev tudi s preprostimi napravami, brez posebnih laserjev in zahtevnih korelacijskih meritev. Bistvena novost pri teh poskusih je ta, da opazujemo fluktuacije vsotnega signala, kar lahko opravimo z enim samim svetlobnim merilnikom. Poskus ima pomembno pedagoško vrednost, saj neposredno dokazuje, da se pri sestavljanju dveh svetlobnih tokov seštevajo poljske jakosti,



Sl. 9 Izmerjena velikost fluktuacij svetlobnega toka skozi široko režo v odvisnosti od njene širine *b*. Točke na premici ustrezajo stacionarnemu šumu laserske svetlobe

ne pa gostote energijskih tokov. Poskus nudi odskočno desko za trditev, da je tako tudi takrat, ko opazujemo zelo šibke svetlobne izvire in sodeluje pri interferenci le nekaj fotonov. Dejstvo, da interferirajo tudi različni fotoni, odvrne učence od navne slike o fotonih kot delcih, ki bi jim, vsaj v načelu, lahko sledili od rojstva do smrti.

Merjenje lahko naredimo kot demonstracijski poskus v šoli, čeprav terja postavitev nekaj časa. Neugodno je predvsem to, da se fluktuacije pojavijo le hipoma, vmes pa so daljši časovni presledki brez njih. Meniva pa, da njegova mikavnost zagotovo odtehta te pomanjkljivosti.



Sl. 10. Kolebanja napetosti iz fotodiode, ki sva jih opazovala na osciloskopu s spominom, trajajo od nekaj milisekund do več deset sekund, odvisno od časa med sosednjima fluktuacijama. Občutljivost na vodoravni časovni osi je tukaj 200 ms/razdelek.

LITERATURA

[1] H. Paul, *Interference between independent photons*, Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 209. Tu najde bralec tudi reference za poskuse, ki so omenjeni v uvodu.

[2] I. Verovnik, *Fluktuacijski intenzitetni interferometer*, magistrsko delo, Oddelek za fiziko FNT, Ljubljana 1986.

[3] M. Čopič, privatno sporočilo.

[4] Diodo je izdelala družba RCA, Solid State Detectors, Si pin C 30831; zadošča tudi počasnejša.

[5] J. Strnad, *Fizika*, 2. del, str. 554, DMFA in ZOTK SRS, Ljubljana 1985.

INTERFERENČNI POSKUS S CURKOM ATOMOV NA SVETLOBI

JANEZ STRNAD

PACS 34.40. + n

Sestavek opisuje poskus, pri katerem so nedavno opazovali interferenco curka atomov na stoječem elektromagnetnem valovanju.

DIFFRACTION OF ATOMS BY LIGHT

A recent experiment is described in which the diffraction of atoms on standing electromagnetic waves was observed.

Vemo, da se svetloba uklanja na snovi in uklonjeni delni curki interferirajo; spomnimo se samo interferenčnih poskusov z vidno svetlobo na mrežicah in z rentgensko svetlobo na kristalih. Ali bi morda lahko naredili obrnjeni poskus, pri katerem bi se elektroni ali atomi uklonili na svetlobi in interferirali? Tak posku z elektroni sta predlagala pred dobrimi petdesetimi leti P. L. Kapica in P. A. M. Dirac [1].

Mislimo si stoječe elektromagnetno valovanje, ki nastane iz vpadnega in odbitega vzporednega curka enobarvne svetlobe pri pravokotnem vpadu na ravno zrcalo. S takšnim valovanjem v učbenikih včasih utemeljijo valovno naravo svetlobe. Med sosednjima hrbtnima ravninama je razmik $\frac{1}{2}\lambda$, če je λ valovna dolžina. Hrbte lahko opazimo v fotografski emulziji pod mikroskopom kot gruče počrnjenih zrnc. Na nizu vzporednih hrbtnih ravnin naj bi se v prostoru brez snovi odbilo »valovanje«, ki ga priredimo curku elektronov z določeno hitrostjo v, kakor se »odbije« rentgenska svetloba na nizu sosednjih mrežnih ravnin v kristalu. Z »valovanjem« mislimo na valovno funkcijo, s katero v kvantni mehaniki opišemo stacionarni curek delcev in v kateri ima vlogo valovne dolžine *de Brogliejeva dolžina*

$$\lambda_B = h/mv$$

Rentgenska svetloba se v resnici ne odbije, ampak se sipa na atomih; fazne razmere v sipanih delnih valovanjih pa so take, kot da bi se vpadno valovanje odbilo na mrežnih ravninah. Valovanje se ojači v smereh, ki jih določa *Braggova enačba*

$$2a \cos \alpha = N\lambda$$

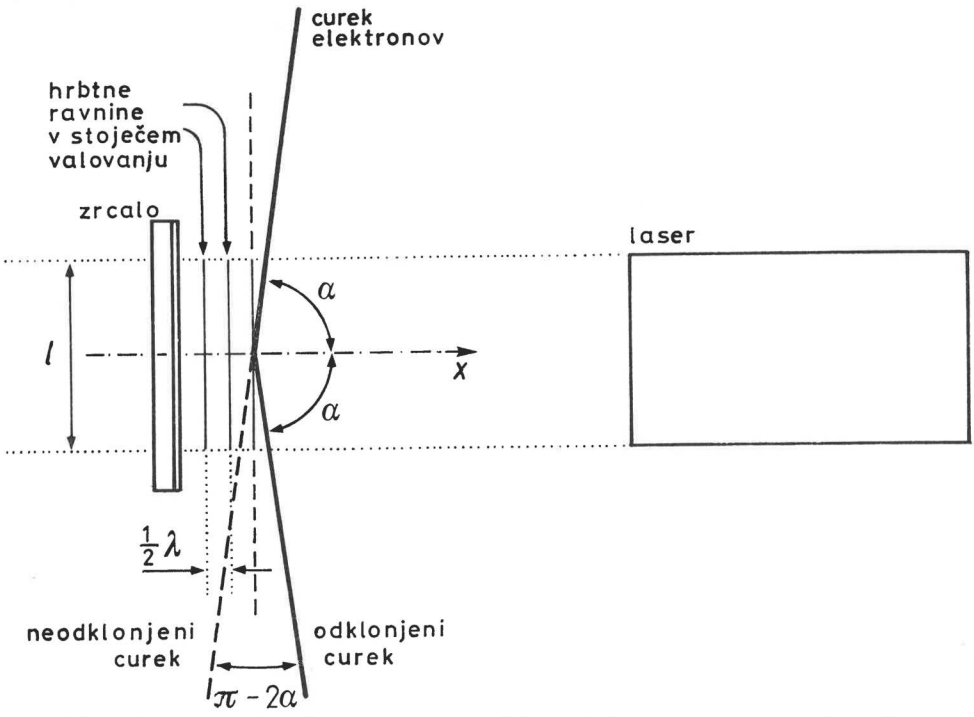
a je razmik med sosednjima mrežnima ravninama in α vpadni kot. Predelajmo to enačbo za sipanje curka elektronov na svetlobi. Za a na levi strani vstavimo $\frac{1}{2}\lambda$ in za λ na desni λ_B:

$$\lambda \cos \alpha = \lambda_B \qquad (1)$$

Pri sinusni mrežici, katere prepustnost je sorazmerna s $\sin^2(2\pi x/\lambda)$, dobimo poleg prepuščenega curka samo prva ojačena curka na obeh straneh. Ker ustreza stoječe valovanje taki sinusni »mrežici«, smo v enačbo (1) postavili za red interference $N = 1$.

Za elektrone velja $\lambda_B = K/U^{1/2}$ in $K = 1{,}23\ \mathrm{nm} \cdot \mathrm{V}^{1/2}$, če je U pospeševalna napetost. Pri napetosti 25 V je na primer $\lambda_B = 0{,}25$ nm. Na stoječem valovanju,

ki ga dobimo z rumenozeleno živosrebrno svetlobo z valovno dolžino 546 nm, se ojačeni curek elektronov odkloni glede na vpadnega za kot $\pi - 2\alpha = 0{,}05^0$ (Sl. 1).



Sl. 1. Sipanje curka elektronov na stoječem elektromagnetnem valovanju

Poglejmo pojav še z druge strani. Elektronu, ki preide iz vpadnega curka v ojačeni curek, se spremeni gibalna količina za $2mv \cos \alpha$. Ker se gibalna količina ohrani, mora biti sprememba gibalne količine elektromagnetnega valovanja nasprotno enaka:

$$2mv \cos \alpha = (mv/h)\, h \cos \alpha = 2h \cos \alpha/\lambda_B = 2h/\lambda = 2h\, \nu/c \qquad (2)$$

Mislimo na dve enaki potujoči valovanji v nasprotnih smereh, iz katerih nastane stoječe valovanje, in pojasnimo pojav takole: elektron absorbira foton z gibalno količino $h\,\nu/c$ iz vpadnega valovanja in izsesava foton z enako energijo v odbito valovanje. Drugi korak opišemo kot stimulirano sevanje. Gre pravzaprav za *stimulirani Comptonov pojav*, v nasprotju z navadnim, pri katerem elektron absorbira foton in spontano izseva foton z manjšo energijo v drugi smeri. Verjetnost za spontani pojav je sorazmerna z gostoto vpadnega energijskega toka, verjetnost za stimulirani pojav pa je sorazmerna s kvadratom te gostote.

P. L. Kapica in P. A. M. Dirac sta za elektrone s kinetično energijo 25 eV in živosrebrno svetlobo z gostoto energijskega toka 10^4 W/m^2 ocenila, da bi se stimulirano sipal le vsak 10^{14}-ti elektron (za $0{,}05^0$) [1]. Tega ni mogoče opazovati. Šele z uvedbo laserjev je postal poskus izvedljiv. V sunku rubinskega

laserja z gostoto energijskega toka 10^{11} W/m^2 bi verjetnost za stimulirano sipanje narasla $(10^{11}/10^4)^2$, to je 10^{14}-krat [2].

Med prvimi so poskusili meriti H. Schwarz [3] in L. S. Bartell s sodelavcema [4]. Prvi je uporabil laser na neodimsko steklo z valovno dolžino 1060 nm in elektrone s kinetično energijo 10 eV, za katere je kot $\pi - 2\alpha = 0{,}042^0$. Drugi so uporabili rubinski laser z valovno dolžino 694 nm in elektrone s kinetično energijo 1,64 keV, za katere je kot $\pi - 2\alpha = 0{,}005^0$. Pozorni bralec se je morda že prej vprašal, zakaj merijo pri tako majhnih odklonskih kotih. Pri elektronih s kinetično energijo nekaj elektronvoltov meri kot največ kako desetino stopinje, toda motijo naboji, ki se naberejo na zrcalu v močnem laserskem curku, in pare, ki nastanejo zaradi segrevanja. Pri elektronih z večjo kinetično energijo je manj teh nevšečnosti, a kot postane tako majhen, da ga je težko izmeriti. Tako je treba skleniti pač nekakšen kompromis in meriti pri kotu od nekaj tisočin do nekaj stotin stopinje. Čeprav so oboji eksperimentatorji trdili, da so opazili stimulirani Comptonov pojav z elektroni, je to zaradi navedenih razlogov dvomljivo. Po mnenju H. Chr. Pfeiferja ga najbrž niso opazili, ker se elektroni pojavijo kako mikrosekundo pozneje kot laserski sunek [5].

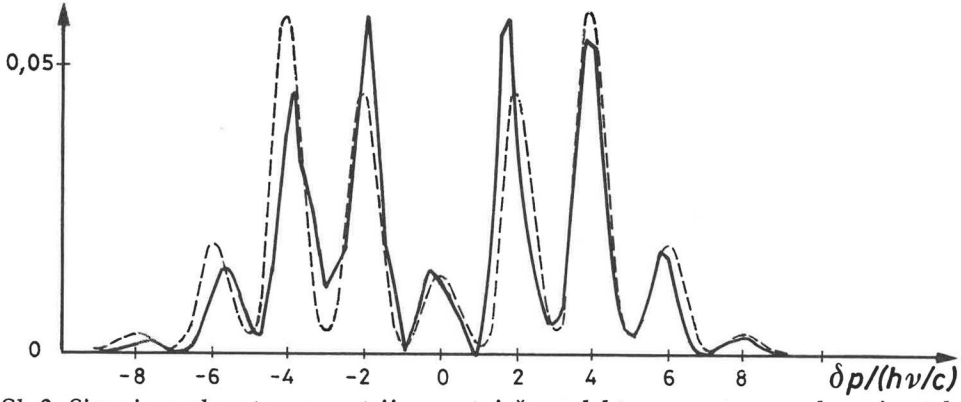
Zaradi težav z elektroni se je pozornost obrnila k curku nevtralnih atomov. Že H. Schwarz se je lotil računa v okviru kvantne mehanike [3]. V prvem redu teorije motenj je dodal Schrödingerjevi enačbi člen $e_0^2 \cdot 2A_0^2 \cos^2 (mvx/\hbar) \cdot \Psi/2m$ s kvadratom vektorskega potenciala v stoječem valovanju. Po tej poti je potrdil Kapičev in Diracov rezultat. Misel, da je mogoče pojasniti pojav popolnoma klasično z gibanjem elektrona v elektromagnetnem polju [6], ni naletela na ugoden odziv. Pač pa so račune nadaljevali v kvantni mehaniki v teoriji časovno odvisnih motenj, le da so namesto elektronov vključili vanje atome z dvema stanjema [7].

Tu gre za *posplošeni stimulirani Comptonov pojav,* pri katerem atom absorbira foton s pravo energijo iz vpadnega valovanja in preide iz osnovnega stanja v prvo vzbujeno stanje ter nato stimulirano izseva foton v odbito valovanje in preide v osnovno stanje Verjetnost za tak pojav je velika blizu resonance, ko je frekvenca svetlobe ν blizu frekvence ν_0, ki ustreza prehodu iz vzbujenega stanja v osnovno. Zaradi tega je mogoče uporabiti laser s konstantnim šibkim energijskim tokom samo nekaj deset miliwattov. Kljub temu lahko atom večkrat zaporedoma absorbira in stimulirano izseva fotone. Tako lahko pridobi ali odda gibalno količino, ki je večkratnik $2h\nu/c$, in ne le gibalno količino $2h\nu/c$ kot elektron (2).

Po dokaj zamotani poti so izračunali verjetnost za posplošeno stimulirano Comptonovo sipanje, po katerem ostane atom v osnovnem stanju. Verjetnost za tako sipanje, po katerem ostane atom v vzbujenem stanju, je zanemarljivo majhna. Verjetnost za sipanje je odvisna še od profila laserskega curka. Za curek z Gaussovim profilom $e^{-(x/v\tau)^2}$ jo določa parameter $z = (\pi/8)^{1/2} \mu E_0/h(\nu - \nu_0)$, v katerem nastopata tudi matrični element električnega dipolnega momenta atoma μ in amplituda jakosti električnega polja v vpadni laserski svetlobi E_0. Čim večji je parameter z, tem učinkovitejša je motnja: v njegovem številcu je namreč največja energija dipolnega momenta v električnem polju μE_0 in v imenovalcu razlika energije fotona v vpadni svetlobi in energije fotona, ki ustreza prehodu iz vzbujenega stanja v osnovno.

Poskuse so delali s curkom atomov natrija [8], [9]. Hitrost okoli 1 km/s so jim dali tako, da so jih posejali v nadzvočni curek argona. S tem so dosegli, da so imeli vsi atomi natrija v curku kolikor mogoče enako hitrost. Stoječe elektromagnetno valovanje so ustvarili z laserjem na organsko barvilo. Njegova frekvenca se je nekoliko razlikovala od frekvence prehoda $\nu_0 = 5{,}09 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$. Namenoma so merili razmeroma daleč od resonance, ker so blizu resonance razmere bolj zapletene in ni mogoče merskeh izidov preprosto primerjati z rezultati računov. (V resonanci bi narasel parameter z preko vsake meje.) Zato govorijo o *pojavu Kapice in Diraca blizu resonance* [9].

Po prehodu skozi stoječe valovanje so otipali curek atomov z merilnikom na vročo žičko. Atom natrija, ki zadene pozitivno tanko žičko, odda elektron in odleti kot ion na negativno lovilno elektrodo, tako da je treba meriti le tok med žičko in lovilno elektrodo. V curku so zasledili več vrhov, ki so ustrezali različnim večkratnikom prenesene gibalne količine $2h\nu/c$. Dobljena odvisnost jakosti sipanega curka od kota ustreza interferenčni sliki (Sl. 2). Premerjene odvisnosti so se dobro ujemale z napovedmi, če so parameter z dodatno delili z 2, ne da bi znali ta korak pojasniti.* Od tega parametra ni odvisna lega vrhov, pač pa njihova višina. Ozadje poskusa tako v podrobnostih še ni do kraja razčiščeno.



Sl. 2. Sipanje curka atomov natrija na stoječem elektromagnetnem valovanju: tok v merilniku na vročo žičko v odvisnosti od odklona. Odklon so podali s preneseno gibalno količino δp, deljeno z gibalno količino fotona $h\nu/c$. Teorijska napoved je narisana črtkano, izmerjena krivulja pa sklenjeno. Merilnik je meril po 1 sekundo v razmikih po 10 μm, kar je ustrezalo 0,24 $h\nu/c$, in naštel do okoli milijon atomov. Moč laserja je merila 9 mW, drugi podatki pa so bili: $\mu E_0/h = 1{,}35 \cdot 10^8\ s^{-1}$, $\nu - \nu_0 = -9{,}22 \cdot 10^8\ s^{-1}$, čas, ki ga je atom prebil v laserskem curku, $\tau = 72$ ns. Parameter $z = 2{,}84$ so dobili z dodatnim deljenjem z 2 [9]

Vseeno je poskus zanimiv. Kvantizirano preneseno gibalno količino v curku atomov lahko zares pojasnimo kot uklon in interferenco curka delcev, ki ga opišemo z valovno funkcijo, na hrbtnih ravninah elektromagnetnega valovanja. Ker je razmik med sosednjima $\frac{1}{2}\lambda$, se spremeni lahko gibalna količina

* Medtem so se z natančnim računom prepričali, da so sprejeti približki umestni (A. Dulčić, J. H. Eberly, H. Huang, J. Javanainen, L. Roso-Franco, *Arbitrary pulse shapes in the near-resonance Kapitza-Dirac effect*, Phys. Rev. Letters **56** (1986) 2109). Kaže, da bo faktor 2 teže pojasniti, kakor so mislili spočetka.

atoma za večkratnik $h/\frac{1}{2}\lambda = 2h\nu/c$. Na drugi strani lahko pojav pojasnimo kot absorpcijo in stimulirano sevanje v nasprotnih potujočih valovanjih, iz katerih sestavimo stoječe valovanje. Eno in drugo sodi v kvantno fiziko: ali moramo atome opisati z valovno funkcijo ali pa obravnavati v svetlobi obroke energije in gibalne količine.

Ob tem se je vredno spomniti na podrobnost v razvoju fizike. Enačbo za spremembo gibalne količine v obrokih $\Delta p = nh/a$ je prvi zapisal W. Duane [10]. A. Einstein je vpeljal svetlobni kvant (1905) po zamisli M. Plancka o kvantih pri izmenjavanju energije med oscilatorji v steni votline in elektromagnetnim sevanjem (1900). Čeprav sodi zveza $W = cp$ med energijo elektromagnetnega valovanja in njegovo gibalno količino v Maxwellovo elektrodinamiko, je gibalno količino kvanta $p = h\nu/c = h/\lambda$ vpeljal dokaj pozno J. Stark. Po domnevi o svetlobnih kvantih »je polna gibalna količina, ki jo izseva pospešeni elektron, različna od nič in ima velikost $h\nu/c$« (1909) [11]. A. Einstein je prvič uporabil gibalno količino $h\nu/c$ v letih 1916/17: »Če šop sevanja povzroči, da molekula izseva ali absorbira energijo $h\nu$, se prenese nanjo gibalna količina $h\nu/c$ v smeri šopa pri absorpciji in v nasprotni smeri pri (stimuliranem) sevanju« [11]. Po tem ni težko razumeti, da je W. Duane šele leta 1923, a pred zamislijo L. de Broglieja, predelal Braggovo enačbo iz leta 1913. Mnogo pozneje je A. Landé nasprotoval »dualizmu« v kvantni mehaniki in se zavzemal za »delčno« teorijo elektronov in »valovno« teorijo elektromagnetnega sevanja. Trdil je, da do dualizma sploh ne bi bilo prišlo, če bi W. Duane enačbo za spremembo gibalne količine $\Delta p = nh/a$ uporabil tudi za elektrone, s katerimi obstreljujemo kristal. S tem bi postalo de Brogliejevo »snovno« valovanje odveč. Po Landéjevem mnenju bi lahko tedaj po čisto delčni poti, ne da bi se bilo treba sklicevati na kako valovanje, in nerelativistično preko zveze $\Delta p = 2mv\cos\alpha$ in Braggove enačbe $2a\cos\alpha = n\lambda$ prišli do enačbe $\lambda_B = h/mv$ [12].

LITERATURA

[1] P. L. Kapitza, P. A. M. Dirac, *The reflection of electrons from standing light waves*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **29** (1933) 297.

[2] I. R. Gatland, L. Gold, J. W. Moffat, *Laser beam detection of electron-photon interaction*, Phys. Letters **12** (1964) 105.

[3] H. Schwarz, *The reflection of electrons from standing light waves*, Z. Phys. **204** (1967) 276.

[4] L. S. Bartell, R. R. Roskos, H. B. Thompson, *Reflection of electrons by standing light waves: Experimental study*, Phys. Rev. **166** (1968) 1494.

[5] H. Chr. Pfeifer, *Experimentelle Prüfung der Streuwahrscheinlichkeit für Elektronen beim Kapitza-Dirac-Effekt*, Phys. Letters **26 A** (1968) 362.

[6] Y. W. Chan, W. L. Tsui, *Classical theory of scattering of an electron beam by a laser standing wave*, Phys. Rev. A **20** (1979) 294.

[7] E. A. Coutsias, J. K. McIver, *Nonrelativistic Kapitza-Dirac scattering*, Phys. Rev. A **31** (1985) 3155.

[8] P. E. Moskowitz, P. L. Gould, S. R. Atlas, D. E. Pritchard, *Diffraction of an atomic beam by standing-wave radiation*, Phys. Rev. Letters **51** (1983) 370.

[9] P. L. Gould, G. A. Ruff, D. E. Pritchard, *Diffraction of atoms by light: The near-resonant Kapitza-Dirac Effect*, Phys. Rev. Letters **56** (1986) 827.

[10] W. Duane, *The transfer in quanta of radiation momentum in matter*, Proc. Natl. Acad. Sci. **9** (1923) 158.

[11] J. Stark, Phys. Zeitschr. **10** (1909) 902; A. Pais, *Einstein and the quantum theory*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 863.

[12] M. Born, W. Biem, *Dualism in quantum theory*, Phys. Today **21** (1968) 51 (8); A. Landé, M. Born, W. Biem, *Dialog on dualism*, Phys. Today **21** (1968) 55 (8).

NOVE KNJIGE

FEYNMAN R. P., QED The Strange Theory of Light and Matter, Princeton, New Jersey, Princeton University Press 1985, 158 str., Alix G. Mautner memorial lectures, 18,5 $.

Od Richarda P. Feynmana, Nobelovega nagrajenca in enega izmed najimenitnejših teorijskih fizikov, smo vajeni presenečenj. Po knjigi življenjskih zgodb je zdaj izdal knjižico *Kvantna elektrodinamika, nenavadna teorija o svetlobi in snovi.* Medtem je sodeloval tudi v predsedniški komisiji, ki je raziskovala nesrečo vesoljskega letala. Vsekakor je R. P. Feynman eden od redkih vrhunskih fizikov, ki poskuša pokazati, da je fizika del našega življenja in kulture in da zna biti zanimiva tudi za nefizike. Knjižica je predelan zapis štirih predavanj na kalifornijski univerzi v Los Angelesu v spomin prezgodaj umrle profesorice angleščine Alix Mautner. Za predelavo je poskrbel Ralph Leighton, ki je sodeloval s Feynmanom že pri knjigi življenjskih zgodb. Predavanja so bila namenjena nefizikom in niso zahtevala znanja matematike ali fizike. Feynman je nekdaj začel prebirati učbenik s posvetilom: »Kar zmore en neumnež, zmore tudi drugi.« Zdaj pa posveča knjigo bralcem z motom: »Kar lahko razume en neumnež, lahko razume tudi drugi.«

Knjižica predstavlja dobro premišljen originalen poskus, kako nefizikom približati kvantno fiziko. Zagotovo bo vplivala na nadaljnja prizadevanja v tej smeri, tudi v šoli. *Uvod* nakaže pot. »Ne, ne boste mogli razumeti. Zakaj naj bi sedeli tu ves ta čas, če ne boste mogli razumeti, kar nameravam povedati? Moj namen je, prepričati vas, da se ne odvrnite, ker ne boste razumeli. Vidite, tudi moji študenti fizike tega ne razumejo. To je zato, ker tudi jaz sam ne razumem. Nihče ne razume.« Sledi značilna prispodoba z računanjem Majev. Če ne bi znali odštevati, bi lahko dobili rezultat s fižolčki ali tako, da bi se naučili zapletenega načina s črticami in pikami, kakor so računali majevski svečeniki. Računanja, ki ga obvladajo šele študenti v tretjem letniku podiplomskega študija, se v nekaj urah ni mogoče naučiti. Povedati pa je mogoče, kaj počnejo pri računanju, ne da bi mogli s tako pridobljenim »znanjem« kaj izračunati.

Svetlobo zazna merilnik v obliki fotonov. Na steklu se od stotih v povprečju odbijejo štirje fotoni. Tega ni mogoče opisati drugače kot z verjetnostjo. Toda na tanki stekleni ploščici se odbije več ali manj fotonov kot 4 %. Izid poskusa opišemo tako, da narišemo puščico z dolžino 0,2, verjetnostno amplitudo, in njen kvadrat pove, kolikšen delež fotonov se odbije pri enem odboju. Pri odboju na tanki ploščici moramo sestaviti dve taki puščici. Z uro, ki pokaže, kolikšen čas potuje foton, določimo smer puščice. Pri fotonih različne svetlobe se puščica zasuče na enaki poti za različen kot.

Drugo poglavje *Fotoni, delci svetlobe* na začetku povzame glavno načelo: verjetnost dobimo kot kvadrat dolžine puščice in splošno pravilo: nariši vse mogoče puščice, če se lahko pojav dogodi na različne načine, stakni vse in poveži začetek prve s koncem zadnje; tako dobiš puščico, s katero izračunaš verjetnost za pojav. Pri odboju na debeli stekleni plošči potujejo fotoni po vseh mogočih poteh. Vsaki ustreza določena puščica. Ko sestaviš vse puščice, se pokaže, da se svetloba odbije po odbojnem zakonu. Če nekatere puščice izpustimo, dobimo izrazit odboj v drugih smereh. Tako deluje

uklonska mrežica. Podobno pojasnimo lom, ko imajo fotoni tostran in onstran meje različno hitrost, pa tudi prehod svetlobe skozi ozko in široko režo in skozi lečo. Pri več zaporednih pojavih dobimo končno puščico tako, da začetno zasučemo in skrajšamo. (Puščice ustrezajo kompleksnim številom.) Vsak pojav s svetlobo sestavimo iz preprostih pojavov, za katere si ni težko zapomniti, kako se zasuče in/ali skrajša puščica. Potem pa puščice sestavimo.

Tretje poglavje *Elektroni in njihove interakcije* začne z interferenčnim poskusom s svetlobo pri prehodu skozi dve reži. Da pojasni nekatere trditve iz prejšnjih poglavij, vpelje po preprosti poti Feynmanove diagrame. Vsak pojav namreč lahko razdelimo na tri osnovne: foton gre iz ene točke v drugo, elektron gre iz ene točke v drugo, elektron izseva ali absorbira foton. Pravila za risanje Feynmanovih diagramov niso zapletena in njihovega pomena ni težko razumeti. Zdaj je mogoče podrobneje pojasniti sodelovanje svetlobe s snovjo in to, kako pridemo do lomnega kvocienta. Kako je kak Feynmanov diagram zapleten, določajo dodatne sklopitve. Če upoštevamo šest dodatnih sklopitev, pridemo do 10 000 diagramov, od katerih vsebuje vsak po 500 členov. Ko računalnik upošteva vse te, da za magnetni moment elektrona v Bohrovih magnetonih 1,00115965246 z negotovostjo 20 na zadnjih dveh mestih. Izmerili pa so 1,00115965221 z negotovostjo 4 na zadnjem mestu. Kot da bi izmerili razdaljo med Los Angelesom in New Yorkom, okoli 4800 kilometrov, na las natanko.

Četrto poglavje *Nestaknjeni konci* govori o težavah kvantne elektrodinamike pri računanju mase in naboja elektrona in o tem, da je kvantna elektrodinamika zgled za druge teorije. Toda te teorije, na primer kvantna kromodinamika za kvarke in gluone, še niso tako dobro izdelane kot kvantna elektrodinamika.

Zaradi navdušenja nad nenavadnim prijemom se je poročilo že preveč zavleklo. Zato opozorimo samo še na glavne prednosti. Kvantna fizika je obdelana enotno in ne elektroni posebej, svetloba posebej. Nobenih težav ni ne s Heisenbergovim načelom ne z redukcijo valovnega paketa ne z dvojnostjo delcev in valovanja. Vse izhaja čisto naravno iz sestavljanja puščic. Če zožimo šop mogočih poti, naraste verjetnost, da zaznamo foton nekje na strani. Ne glede na to, kako zapleten je pojav in koliko vmesnih korakov moramo upoštevati, končno verjetnost izračunamo vselej z eno samo puščico. Ni kaj razumeti. Narava deluje v najmanjših razsežnostih pač na poseben način. Le če ga presojamo z vsakdanjimi izkušnjami, se nam utegne zdeti nenavaden.

Na hitro bi lahko načelno opisali Feynmanov prijem takole: izračunajmo iz teorije (ali uganimo, če ni teorije) rezultat za kak pojav, potem pa poskušajmo račun razčleniti in si predstavljati nastopajoče količine in računske korake. Marsikdo od tistih, ki si želijo nazornih predstav od vsega začetka, utegne negodovati. Feynman morda tudi ne loči dovolj fotonov v računih s hitrostjo, večjo ali manjšo od fotonov, ki jih zazna merilnik. Piscu poročila pa se zdi to edina pot, ki nas brez nepotrebnih ovinkov privede do cilja in na kateri je mogoče odvreči precej nepotrebne zgodovinske navlake. Nobenega dvoma ni, da pot ni zložna in mogoče se da kateri od strmih klancev še kako obiti. Vsekakor pa knjižica zadošča Franckovi maksimi, da mora imeti dobro besedilo za širok krog bralcev povedati kaj tudi raziskovalcu. Zato je mogoče knjižico toplo priporočiti vsem fizikom, posebno tistim, ki se ukvarjajo s kvantno fiziko ali njenim poučevanjem. *Janez Strnad*

DOMAČE VESTI

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE 1986

4. april je praznik študentov beograjske Univerze. V njegovo počastitev so študentje matematike Prirodoslovno-matematične fakultete PMF v Beogradu tudi letos povabili svoje kolege z jugoslovanskih in nekaterih tujih univerz na mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM 86. Žal so se tekmovanja iz tujine udeležile le dve ekipi iz Prage (ČSSR) in ena iz Leipziga (NDR).

Naš Oddelek za matematiko Fakultete FNT v Ljubljani so zastopali:

Jure Škarabot iz 1. letnika,

Igor Kukavica iz 4. letnika in

Robert Bakula iz 4. letnika.

Študentje 1. in 2. letnika so reševali iste naloge, medtem ko so študentje 3. in 4. letnika izbirali po dve nalogi iz dveh področij. Izbiranje predmetov ni bilo čisto poljubno, vendar ga tu ne bi navajali.

Naši tekmovalci so dosegli izreden uspeh. V konkurenci študentov 3. in 4. letnika je zmagal Robert Bakula, ki je zbral 51 od 100 možnih točk. Takoj za njim je bil uvrščen Igor Kukavica s 50 točkami. Jure Škarabot pa se je v skupini študentov 1. in 2. letnika uvrstil na 4. mesto. V tej kategoriji je zmagal Jiři Witzany iz Prage. Tudi ekipno je bila Ljubljana prva pred ekipami Praga 1 in Sarajevo 1.

Za izziv bodočim tekmovalcem, študentom in tudi že diplomiranim matematikom podajamo še naloge s tega tekmovanja.

Naloge za 1. in 2. letnik

1. Naj bo f realna funkcija, za katero velja

$$(f(x))^2 \leqq 1, \quad (f''(x))^2 + (f'(x))^2 \leqq 1, \text{ za vsak } x.$$

Dokaži, da za vsak x velja

$$(f'(x))^2 + (f(x))^2 \leqq 1.$$

2. Naj bosta f in g taki zvezni realni funkciji na $[0, 1]$, da velja $(f(x))^2 + (g(x))^2 \neq 0$ za vsak $x \in [0, 1]$. Dokaži, da obstajata nenegativni števili p, q ter števili $a, b \in [0, 1]$, da je:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = p\, f(a) + q\, f(b)$$

$$\int_0^1 g(x)\, dx = p\, g(a) + q\, g(b).$$

3. Naj bo zaporedje (x_n) definirano z

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + 2^{-n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Pokaži, da ima to zaporedje limito v intervalu (2·1; 2·2).

4. Naj bo m naravno število in $S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Nadalje naj bo (x_j) zaporedje s členi iz množice S in za vsak n naj velja

$$c_k x_{n+k} + c_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots c_0 x_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$$

kjer so $c_0, c_1, \ldots, c_k$ elementi množice S in je največji skupni delitelj števil $c_1, \ldots, c_k$, m enak 1. Pokaži, da je zaporedje (x_j) periodično. Ali je trditev pravilna, če je največji skupni delitelj števil $c_1, \ldots, c_k$, m večji od 1?

Funkcionalna analiza

1. Naj bo A taka linearna preslikava prostora C na C_0, da je $A^2 = A$.

a) Dokaži, da je $\|A\| \geq \sqrt{3}$

b) Ali je A zvezna?

2. Naj bo X realen Hilbertov prostor s skalarnim produktom $(,)$, $G \subset X$ poljubna podmnožica in $g_0 \in X - \overline{G}$. Za poljuben x definirajmo

$$x_t = g_0 + t(x - g_0) \qquad (t \geq 0)$$

Dokaži, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

a) Za vsak $t \geq 1$ velja $d(x_t, g_0) \leq d(x_t, G)$

b) Za vsak $g \in G$ velja $(g - g_0, x - g_0) \leq 0$.

Realna analiza

1. Naj bo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka neskončnokrat odvedljiva funkcija, da je

(i) $|f(x)| \leq 1$ za vse $x \in \mathbb{R}$

(ii) $f^{(n)}(x) \rightrightarrows 0$ na celi realni osi

Dokaži, da za vse realne x velja $|f'(x)| \leq 1$.

2. Ali obstaja taka množica $S \subset \mathbb{R}$, da je $m(S) > 0$ in

$$\int_S \sin x \, d\, m = \int_S \sin(x^2)\, d\, m = \int_S \sin(\sqrt[3]{x})\, d\, m$$

(m je Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$)?

Topologija

1. Naj M pomeni Möbiusov trak in C prostor $S^1 \times I$. Označimo s $C(X)$ stožec nad prostorom X. Ali sta homeomorfna prostora

a) $C(C)$ in $C(M)$

b) $C \times I$ in $M \times I$

2. Dokaži, da se kompakten, povezan, Hausdorffov prostor ne more predstaviti kot unija števne družine svojih nepraznih zaprtih, paroma disjunktnih podmnožic.

Algebra

1. Dokaži ali ovrži:

Če je A algebra in $X \subset A$ taka podmnožica, da za vsako preslikavo $f: X \to A$ obstaja natanko en homomorfizem, ki je razširitev f, potem X generira A.

2. Urejena grupa G je Arhimedova natanko tedaj, ko je ureditev linearna in $(\forall x, y \in G)\ (x \neq 1 \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}\ x^m \geq y)$.

Dokaži ali ovrži:

Vsaka Arhimedova grupa je Abelova.

Programiranje

1. Dana je kvadratna matrika 3×3, ki vsebuje števila $1, 2, \ldots, 8$, ki so razporejena na slučajen način. En element je prazen. Napiši program za preureditev dane matrike v urejeno matriko:

1	2	3
4	5	6
7	8	—

Dovoljena operacija je premik elementa na prazno mesto v smereh levo, desno, navzgor ali navzdol.

2. Iz vhodne datoteke včitaj koeficiente polinoma P_1 stopnje 4 in polinoma P_2 stopnje 6, nato pa še naravno število N in N-krat vrednost spremenljivke x. Za vsak včitani x je treba tako izračunati $T(x) = P_1(x)\, P_2(x)$, da se pri izračunavanju polinoma 4. stopnje ne uporabi več kot tri množenja in ne več kot 4 množenja pri izračunavanju polinoma 6. stopnje.

Numerična analiza

1. Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h = \max h_i$ in naj bo $\varphi_i(x)$ karakteristična funkcija intervala (x_{i-1}, x_i). Označimo s H linearno lupino elementov $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dokaži, da za vsak u iz $W_p{}^1(a, b)$ obstaja tak $u^*(x) \in H_n$, da velja

$$\|u - u^*\|_{L^p(a,\,b)} \leq C\, h\, \|u\|_{W_p{}^1(a,\,b)} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

kjer je C konstanta, ki ni odvisna od h_i in u, norma na $W_p{}^1$ pa je definirana s predpisom

$$\|u\|_{W_p{}^1(a,\,b)} = \|u\|_{L^p(a,\,b)} + \|d\,u/d\,x\|_{L^p(a,\,b)}$$

2. Naj bo $u \in C^\infty[a, b]$. Poišči korak h, s katerim je potrebno tabelirati funkcijo $u(x)$ na $[a, b]$, da bi bila pri računanju drugega odvoda s formulo

$$u''(x_i) \approx (1/h^2)\, u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))$$

napaka čim manjša.

Geometrija

1. Naj bo $A\,B\,C$ trikotnik v ravnini E^2, M in N taki točki poltrakov $[B\,A)$ in $[C\,A)$, da sta razdalji $B\,M$ in $C\,N$ enaki polovici obsega tega trikotnika, S središče včrtanega trikotnika in K točka na očrtanem krogu, ki je diametralno nasprotna točki A. Dokaži, da sta premici $M\,N$ in $S\,K$ pravokotni.

2. Dokaži, da prostorski petkotnik v tri-dimenzionalnem hiperboličnem prostoru ne more biti hkrati eqvilateralen in eqviongularen.

Kompleksna analiza

1. Naj bo K kompaktna podmnožica kompleksne ravnine s pozitivno Lebesgueovo mero. Dokaži, da obstaja funkcija f, ki je analitična na $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K$ in zvezna na K.

2. Naj bo f biholomorfna preslikava enotskega odprtega diska na omejeno območje D, katerega rob je krivulja z dolžino s. Dokaži, da ima slika poljubnega diametra iz enotskega diska dolžino manjšo ali enako $(1/2)\, s$.

Peter Šemrl

PROFESOR DR. IVAN KUŠČER — ČASTNI ČLAN DRUŠTVA

Profesor Ivan Kuščer je eden od najbolj vsestranskih slovenskih fizikov, če s trditvijo, da je najbolj vsestranski nočemo zbuditi njegovega negodovanja. Kuščerjevo delo sega od poučevanja preko pisanja učbenikov, organizacijske in popularizatorske dejavnosti do vrhunskih raziskovalnih dosežkov.

Ivan Kuščer je bil rojen na Dunaju 17. junija 1918. V šolo je hodil v Ljubljani, kjer je leta 1941 končal študij. Leta 1945 je postal asistent, 1951 docent, 1959 izredni profesor in 1963 redni profesor. Leta 1984 se je upokojil, a ni popolnoma nehal delati s študenti. Kolikor prihrani časa, ga vloži v raziskovalno delo. Leta 1986 mu je Fakulteta za naravoslovje podelila naziv zaslužni profesor.

Takoj po vojni je v tedanjih skromnih razmerah z veliko domiselnosti pomagal postaviti poskuse v študentskem laboratoriju in demonstracijski zbirki. Ko je postal docent, je prevzel predmete toplota in matematična fizika I in II in jih predaval vrsto let. Poleg tega je večkrat predaval še fiziko I in II ter druge predmete. Znan je kot odličen predavatelj z obsežnim in vsestranskim znanjem fizike. Delu s študenti posveča veliko pozornosti in žanje pri tem lepe uspehe. Kot mentor je do diplome, magisterija ali doktorata vodil številne kandidate.

Skupaj z A. Moljkom je izdal srednješolski učbenik *Fizika* v več izdajah. Poleg tega je napisal vrsto skript za univerzo: *Matematične naloge iz fizike* I. in II. del, *Termodinamika* (s S. Žumrom), *Statistična mehanika* (s S. Žumrom), če ne omenjamo prejšnjih izdaj in manj pomembnih skript. Upamo, da bodo ta dela v okviru Komisije za tisk ugledale luč sveta kot tiskane knjige.

Profesor Kuščer je sodeloval pri snovanju Oddelka za fiziko in bil med idejnimi očeti Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Opravljal je razne funkcije na oddelku, na fakulteti in na univerzi. Skupaj z A. Moljkom si je prizadeval, da so osnovali magistrski študij za srednješolske učitelje fizike in je pozneje vložil vanj veliko truda. Sodeloval je tudi pri posodabljanju pouka fizike na srednjih šolah in izboljšanju učnega načrta.

Neposredno po vojni je v okviru Prirodoslovnega društva skrbel za delo prirodoslovnih krožkov na srednjih šolah. Tedaj je s članki v Proteusu in z javnimi predavanji populariziral fiziko. Bil je med ustanovitelji društva in član uredniškega odbora Obzornika za matematiko in fiziko od ustanovitve leta 1951 do leta 1963.

Težišče raziskovalnega dela profesorja Kuščerja je v transportni teoriji. Na svetu je eden od vodilnih strokovnjakov s tega področja. Druga njegova raziskovalna področja so kinetična teorija plinov, interakcija plinov s površinami in kinetične teorije kapljevin. Velik del raziskovalnega dela je opravil v znanih raziskovalnih središčih v tujini. Tam je imel blizu sto predavanj.

Profesor Kuščer ima tudi nekaj konjičkov. Zelo rad se potaplja in raziskuje morje. Lahko rečemo, da je bil pionir te dejavnosti na Slovenskem.

Leta 1963 je dobil Kidričevo nagrado. Leta 1965 je bil odlikovan z Redom dela z zlatim vencem in 1974 z Redom zaslug za narod s srebrnimi žarki.

Profesorja Kuščerja odlikuje velika predanost delu. Ne samo od sebe, ampak tudi od drugih zahteva raje preveč kot premalo. Kljub temu ali prav zato je med kolegi in med študenti zelo priljubljen.

Zbral *Janez Strnad*

38. OBČNI ZBOR DMFA SRS

V petek, 24. in soboto, 25. oktobra 1986 je bil v Novem mestu občni zbor DMFA SRS, na katerem se je zbralo skoraj sto članov.

Popoldne prvega dne smo poslušali predavanji iz uporabne fizike. Marin Bajd in Boris Velenšek z Inštituta za turbinske stroje sta poročala o raziskovanju in razvoju vodnih turbin. Inštitut je izdelal načrte za tipizirano turbino za niz elektrarn na Savi in Muri. To bo občutno pocenilo gradnjo. Aleš Jereb iz Iskrinega centra za elektrooptiko nas je seznanil z optičnimi vlakni in njihovo uporabo za prenos informacij. Predvajan je bil še film o Nielsu Bohru.

Večerji je sledil družabni večer, ki je tudi pomemben del naših srečanj. Na njem izmenjamo izkušnje in ob spoznanju, da se tudi kolegi srečujejo s podobnimi težavami, ohrabreni nadaljujemo delo.

V soboto so kolegi s srednje šole tehničnih in zdravstvene usmeritve v Šmihelu organizirali ogled svoje nove šole, zlasti delavnic in kabinetov. Videli smo, da je šola zelo dobro opremljena. Zlasti velja to za delavnice za praktični pouk, tako da je v njih zares užitek poučevati.

Občni zbor je vodil Gabrijel Tomšič. Zbor je pozdravil tudi Boštjan Kovačič, predsednik skupščine novomeške občine. Po njegovem mnenju se je občni zbor posrečeno vključil v program prireditev ob 29. oktobru, prazniku novomeške občine. Problemi, o katerih je razpravljal, zlasti vzgoja učiteljev in prenova učnih načrtov, so pomembni tudi za novomeško občino, ker za nadaljnji razvoj potrebuje predvsem šolane strokovnjake vseh stopenj.

Za zasluge pri razvoju fizike in za delo v društvu je bil za častnega člana izvoljen Ivan Kuščer. V svoji zahvali je poudaril, da je rad delal v društvu in da se bo tega vedno rad spominjal.

Občni zbor je pregledal delo v preteklem letu. Poročila je prinesel bilten, ki je izšel ob tej priliki. Tokrat je vseboval tudi pogled nazaj do občnega zbora v Šmarjeških Toplicah pred petnajstimi leti. Še zdaj obstajajo podobne težave, a nekatere reči so se vendarle popravile.

Najobsežnejši dejavnosti sta bili tekmovanja učencev osnovnih in srednjih šol v matematiki in fiziki ter izdajateljska dejavnost. Priložnostna razstava je pokazala bero publikacij v preteklem letu. Posebej so bili razstavljeni tudi vsi bilteni občnih zborov.

Po razrešitvi dosedanjega odbora je bil izvoljen nov s predsednikom Francetom Križaničem.

Občni zbor je novemu odboru naložil niz nalog. Število članov moramo povečati, ker je zlasti zelo malo matematikov in fizikov na osnovnih šolah včlanjenih v društvo. Obnoviti je treba aktive matematikov in fizikov. V zvezi s prenovo pouka v srednjem izobraževanju bo treba bolj sodelovati z drugimi strokovnimi društvi, da bodo prizadevanja za izboljšanje usklajena med seboj. Za učitelje, ki jih nove naloge vedno bolj obremenjujejo, bo treba končno določiti mejo njihovih obveznosti in jim omogočiti strokovno in materialno napredovanje. Zaskrbljujoče je dejstvo, da se premalo študentov odloča za študij matematike in fizike, zlasti v pedagoški smeri.

Ob zahvali vsem, ki podpirajo dejavnost društva, pa je bilo izrečeno mnenje, da bi morali finansiranje našega dela bolje urediti. Zbiranje denarja pobere namreč veliko časa, ki bi ga lahko porabili za drugo delo.

Po kosilu so si zborovalci ogledali še nekaj novomeških znamenitosti. Na sprehodu preko Kapitlja so počastili spomin žrtev NOB v Dolenjskem muzeju in si ogledali Jakčevo galerijo.

Dušan Modic