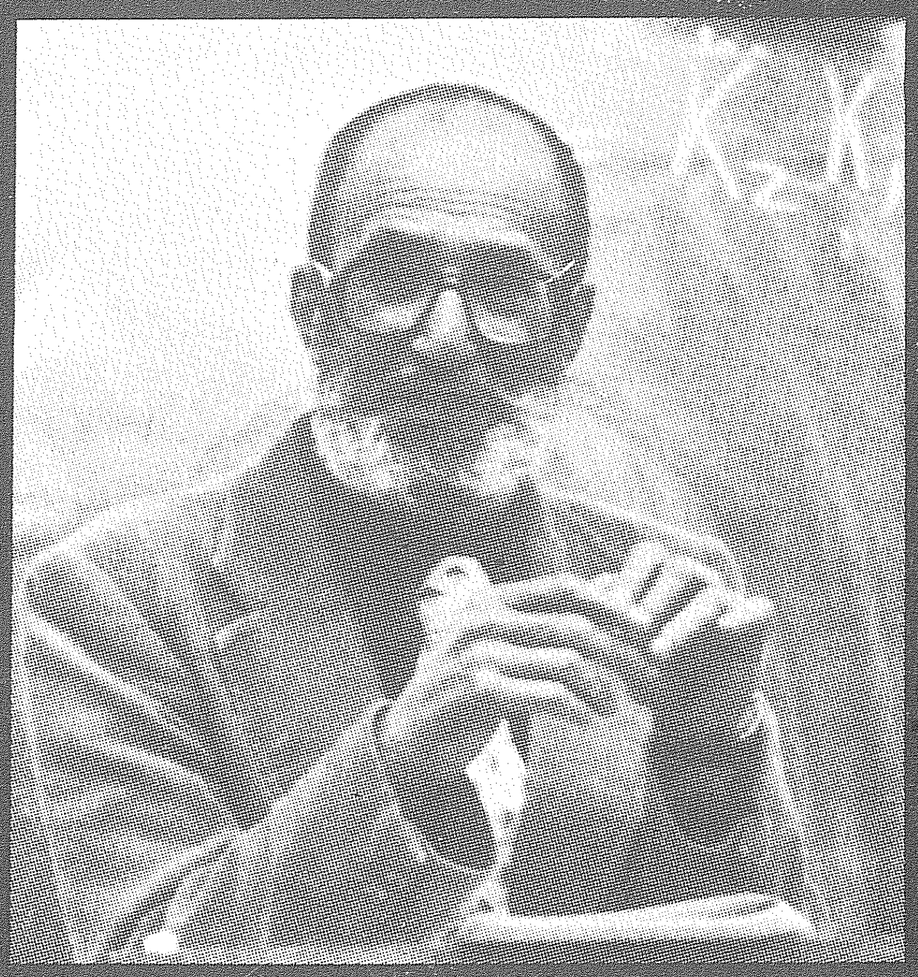
ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

U ISSN 0473-7466

1986
Letnik 33
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Paul R. Halmos



I WANT TO BE A MATHEMATICIAN

An Automathography

LETNIK 33 — ŠTEVILKA 3/5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1986

Uredniški odbor: Peter Petek — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Matjaž Omladič — urednik za matematiko, Ciril Velkovrh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 1500.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 750.— din, za ustanove in podjetja 3000.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 500.— din, dvojna številka 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p. p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1986 DMFA FRF — 817 Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

Izumiranje populacij — On extinction of populations (Jože Andrej Čibej) . . 129

Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije — An example of using the computer in the analysis of an implicitly given function (France Avsec) 137

Temperaturno raztezanje trdnin — Thermal expansion of solids (Janez Strnad) 145

Domače vesti — Home news

Nagrade Sklada Borisa Kidriča (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 148

Obvestilo naročnikom (Janez Strnad, Ciril Velkovrh) 149

Delo Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1985 150

Nove knjige — New books

(Janez Rakovec, Anton Suhadolc, France Križanič) 147, 153, 154, 156, 157

Seznam revij, ki smo jih prejeli v letu 1985 v zameno za Presek ter Obzornik za matematiko in fiziko (Ciril Velkovrh) . . . . . III, IV

Utrinki. Tri mnenja o matematiki (Izbral in prev. Janez Strnad) 160

Na ovitku: Naslovna stran knjige, katere recenzijo objavljamo na str. 157—160.

IZUMIRANJE POPULACIJ

JOŽE ANDREJ ČIBEJ

Math. Subj. Class. (1980) 60 J 80, 92 A 15

V sestavku prikažemo preprost verjetnostni model iz populacijske dinamike.

ON EXTINCTION OF POPULATIONS

A simple probabilistic model in population dynamics is presented.

Ideja za ta članek je stara. S sedaj že pokojnim profesorjem Rajkom Jamnikom sva se pred leti pogovarjala o monografiji [10], posebej o zanimivem poglavju, ki se ukvarja z verjetnostjo izumrtja kake družine oziroma družinskega priimka. Realizacija profesorjevega predloga, naj problem predstavim širšemu krogu bralcev, se je dovolj zavlekla, da je medtem pod njegovim mentorstvom nastalo diplomsko delo B. Hmelaka. Diplomske naloge so dobršnemu delu bralcev Obzornika približno tako (ne)dostopne kot originalni viri, navedeni v spisku literature, zato sem tudi po odkritju [4] nadaljeval s pisanjem, omenjeno diplomsko delo pa predlagam bralcem kot most med tem člankom in zahtevnejšimi monografijami.

Angleški naravoslovec Francis Galton (1822—1911) je leta 1873 v reviji Educational Times zastavil tako vprašanje:

»Velik narod, od katerega nas bodo zanimali samo odrasli moški, ki jih je N po številu (vsak z drugačnim priimkom), naseli neko območje. Populacija se razvija tako, da je v vsaki generaciji a_0 odstotkov odraslih moških brez moških naslednikov, ki bi dočakali zrelo dobo, a_1 odstotkov jih ima po enega takega moškega naslednika, a_2 odstotkov po dva, ... in tako dalje do a_5 odstotkov tistih, ki imajo po pet takšnih naslednikov. Izračunaj

a) kolikšen delež priimkov izgine po r generacijah;

b) kolikšna je verjetnost, da je v neki generaciji natanko m moških z istim priimkom.

Edini odgovor, ki ga je Galton dobil na zastavljeni problem, je bil popolnoma nesmiseln, zato je za pomoč zaprosil matematika (teologa in alpinista) Henryja Williama Watsona (1827—1903). Ta je z matematičnim orodjem, ki ga danes imenujemo rodovna funkcija, problem v bistvu rešil, vendar je zaradi banalne napake dobil napačen rezultat, da vse družine izumrejo oziroma vsi priimki izginejo. Kasneje se je pokazalo, da gre za delno rešitev problema, ki velja, ko povprečno število sinov v posameznih generacijah ni večje od ena. Kakorkoli že, s člankom *On the probability of extinction of families* (Journal of the Anthropological Institute VI (1874), 138—144) sta Galton in Watson začela novo vejo verjetnostnega računa, teorijo *vejitvenih procesov* (tudi *razvejenih procesov*, originalno *branching processes*); ustrezne slučajne procese zato imenujemo *Galton-Watsonovi procesi.**

---

* J. H. Pollard ([10], str. 98—99) sicer meni, da bi bilo pravilneje reči Bienayméjev proces (po I. J. Bienayméju, avtorju članka *De la loi de multiplication et de la durée des familles*, ki je izšel že leta 1845), vendar se bomo držali ustaljenega imena.

V članku nas bo zanimal predvsem odgovor na prvi del Galtonovega problema, ki ga bomo (da se izognemo očitkom o moškem šovinizmu) zastavili takole:

Naj bo dana množica objektov, ki lahko porajajo istovrstne naslednike. Število naslednikov, ki jih ima posamezen objekt, je odvisno od slučajnih vplivov. Predpostavljamo, da je ta odvisnost relativno preprosta:

1. Objekti, ki imajo različne prednike, se neodvisno razvijajo. Število naslednikov, ki jih ima posamezen objekt, je neodvisno od skupnega števila objektov v njegovi generaciji.

2. Skupno število objektov v naslednji generaciji je odvisno samo od števila objektov v sedanji generaciji, prav nič pa od moči prejšnjih generacij.

Označimo z Z_0, Z_1, Z_2, ... števila objektov v posameznih generacijah. Za ničelno generacijo bomo predpostavili, da premore en sam objekt, $Z_0 = 1$. Zaradi predpostavke o neodvisnem razvoju družin, ki imajo različne začetne objekte, to ni posebna omejitev splošnosti. Iz druge predpostavke o razmnoževaju pa sledi, da je slučajni proces $\{Z_k;\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *markovska veriga* (glej [6], str. 340 in dalje): porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke Z_{n+1} je odvisen samo od vrednosti, ki jo je zavzela njena predhodnica Z_n, nič pa od zgodovine, ki jo predstavljajo vrednosti slučajnih spremenljivk Z_{n-1}, Z_{n-2}, ..., Z_1, Z_0. Zato bomo obnašanje procesa opisali s prehodnimi verjetnostmi

$$P_{ij} = P(Z_{n+1} = j/Z_n = i) \qquad (i, j, n = 0,1, \ldots) \tag{1}$$

Zaradi enostavnosti bomo privzeli, da so prehodne verjetnosti (1) neodvisne od tega, za kateri sosednji generaciji gre. To v bistvu pomeni, da je verjetnostna porazdelitev slučajne spremenljivke X, s katero bomo opisali število naslednikov objekta, neodvisna od tega, iz katere generacije je objekt. Omenjeno verjetnostno porazdelitev bomo predstavili z verjetnostno funkcijo

$$p_k = P(X = k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Vrednosti verjetnostne funkcije (2) so torej verjetnosti, da ima objekt iz neke generacije natanko k naslednikov v naslednji generaciji. Za pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Z_{n+1} pri pogoju $Z_n = i$ lahko zaradi predpostavke o neodvisnem razvoju posameznih družin rečemo, da je to verjetnostna porazdelitev vsote i neodvisnih slučajnih spremenljivk X_m, ki so vse porazdeljene enako, namreč tako kot slučajna spremenljivka X. Zato je

$$P_{ij} = P(Z_{n+1} = j/Z_n = i) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_i = j) \tag{3}$$

Slučajne spremenljivke X_m $(m = 1, 2, \ldots, i)$ so enako porazdeljene in imajo rodovno funkcijo ([6], str. 204 in dalje)

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \qquad , \qquad s \in [0,1] \tag{4}$$

Kot je znano ([6], str. 207, izrek 31.2), je rodovna funkcija vsote neodvisnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk enaka produktu rodovnih funkcij vseh členov dane končne vsote. Za vsoto z desne strani (3), v kateri so vse slučajne spremenljivke enako porazdeljene, je potemtakem rodovna funkcija preprosto enaka f^i. Skupaj z definicijo rodovne funkcije in ugotovitvijo (3) to pomeni, da je

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_i = j)\, s^j = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}\, s^j = (f(s))^i \tag{5}$$

Desna stran (5) pove, da je pri naših predpostavkah prehodna verjetnost P_{ij} ravno j-ti koeficient v razvoju funkcije f^i v potenčno vrsto. To ugotovitev bomo koristno uporabili kasneje, takoj pa pokažimo, da je rodovna funkcija slučajne spremenljivke Z_n kar kompozitum n rodovnih funkcij (4). Naj bo torej

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)\, s^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

rodovna funkcija slučajne spremenljivke Z_n. Predpostavili smo, da je $Z_0 = 1$, zato je

$$f_0(s) = P(Z_0 = 0)\, s^0 + P(Z_0 = 1) s^1 + P(Z_0 = 2)\, s^2 + \ldots = s \tag{7}$$

Poleg tega je

$$f_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k = f(s) \tag{8}$$

kajti $P(Z_1 = k)$ je verjetnost, da ima začetni objekt natanko k naslednikov, ta verjetnost pa je za katerokoli generacijo po predpostavki enaka $P(X = k) = p_k$.

Lahko bi pokazali, da dobimo rodovno funkcijo za naslednjo generacijo tako, da rodovno funkcijo, ki ustreza predhodni generaciji, spet komponiramo s funkcijo f, na primer $f_2(s) = f(f_1(s)) = f(f(s))$, $f_3(s) = f(f_2(s)) = f(f(f(s)))$ ... Nalogo raje rešimo z eno potezo takole:

Po definiciji rodovne funkcije je

$$f_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k)\, s^k \tag{9}$$

Uporabimo obrazec za popolno verjetnost ([6], str. 42) in verjetnosti stanj $Z_{n+1} = k$ zapišimo kot vsoto verjetnosti med seboj nezdružljivih načinov, ki privedejo do teh stanj, torej

$$f_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j)\, P(Z_{n=1} = k/Z_n = j) \right\} s^k \tag{10}$$

Vrstni red seštevanja v (10) lahko zamenjamo. Če upoštevamo dejstvo, da so pogojne verjetnosti v (10) ravno prehodne verjetnosti P_{jk}, lahko pišemo

$$f_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}\, s^k \right\} \tag{11}$$

Za izraz v oklepaju na desni strani (11) lahko iz primerjave s (5) ugotovimo, da je natanko enak $f(s))^j$, tako da lahko (11) prepišemo v

$$f_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j)\, (f(s))^j \tag{12}$$

Vrsta na desni bi predstavljala rodovno funkcijo f_n slučajne spremenljivke Z_n, če bi bile ustrezne verjetnosti pomnožene z s^j, tako pa je to $f_n(f(s))$. S tem smo dognali, da velja

$$f_{n+1}(s) = f_n(f(s)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

Od tod sledi ([4], str. 8, [7], str. 289), da pri naših predpostavkah velja tudi

$$f_{n+1}(s) = f(f_n(s)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

Zanimivo je, da nadomestitev predpostavke $Z_0 = 1$ s splošnejšo $Z_0 = N$ povzroči, da enačba (14) ne velja več, še vedno pa je pravilna enačba (13) [7].

Relacija (14) nam daje konkretno pravilo za računanje rodovnih funkcij slučajnih spremenljivk Z_n. Iz teh rodovnih funkcij lahko izračunamo osnove številske karakteristike proučevanih slučajnih spremenljivk, na primer matematično upanje in disperzijo (glej [6], str. 205, izrek 31.1). Pri računanju se bomo držali še nekaterih dodatnih predpostavk, ki so izpolnjene pri praktično zanimivih problemih:

a) Matematično upanje $m = E(Z_1) = E(X)$ in disperzija $D(Z_1) = D(X) = \sigma^2$ sta končna. (V praksi ima X končno zalogo vrednosti.)

b) Vse verjetnosti $p_0, p_1, p_2, \ldots$ so strogo manjše od 1. (V nasprotnem primeru proces praktično ne bi bil več slučajen.)

c) Verjetnost dogodka, da ima objekt več kot enega naslednika, je strogo pozitivna, ali drugače, $p_0 + p_1 < 1$.

Najprej si pripravimo konkretno obliko že omenjenega izreka 31.1 iz [6] o zvezi med rodovno funkcijo dane slučajne spremenljivke in njenima momentoma, matematičnim upanjem in disperzijo. V našem primeru je

$$E(Z_n) = f_n'(1) \tag{15}$$

$$D(Z_n) = f_n''(1) + f_n'(1) - f_n'^2(1) = f_n''(1) + E(Z_n) - E^2(Z_n) \tag{16}$$

Pri vseh odvodih gre za leve odvode v točki $s = 1$, z $E^2(Z_n)$ pa smo krajše označili $(E(Z_n))^2$. Relacijo (13) odvajajmo po pravilu za odvajanje posrednih funkcij na neodvisno spremenljivko s ter upoštevajmo, da je $f_1(s) = f(s)$ in $f(1) = 1$. Tako dobimo

$$f_{n+1}'(1) = f_n'(f(1)) \,.\, f'(1) = f_n'(1)\, f'(1) \tag{17}$$

Podobno lahko $f_n'(1)$ izrazimo kot $f_{n-1}'(1)\, f'(1)$; z nadaljevanjem tega postopka končno dobimo iz (17) in (15) rezultat

$$f_{n+1}'(1) = (f'(1))^{n+1} = (E(Z_1))^{n+1} = m^{n+1} \tag{18}$$

Če pa dvakrat odvajamo relacijo (14) in vstavimo $s = 1$, dobimo

$$f_{n+1}''(1) = f''(1)\, (f_n'(1))^2 + f'(1)\, f_n''(1) \tag{19}$$

Drugi odvod $f''(1)$ izrazimo iz (16), $f''(1) = D(Z_1) - E(Z_1) + E^2(Z_1) = \sigma^2 - m + m^2$. V skladu z (18) je $f_n'(1) = m^n$, tako da iz (19) dobimo naslednji izraz:

$$f_{n+1}''(1) = (\sigma^2 - m + m^2)\, m^{2n} + m\, f_n''(1) \tag{20}$$

Podobno kot vrednost prvega odvoda rodovne funkcije f_{n+1} se v točki $s = 1$ potemtakem tudi vrednost njenega drugega odvoda v isti točki izraža z ustrezno vrednostjo funkcije f_n. Postopek nadaljujemo in z upoštevanjem (20) končno pridemo do izražave

$$f_{n+1}''(1) = (\sigma^2 - m + m^2)\, (m^{2n} + m^{2n-1} + \ldots + m^n) \tag{21}$$

Disperzija slučajne spremenljivke Z_{n+1} je zato v skladu s (16) enaka

$$\begin{aligned} D(Z_{n+1}) &= f_{n+1}''(1) + f_{n+1}'(1) - (f_{n+1}'(1))^2 = \\ &= (\sigma^2 - m + m^2)(m^{2n} + \ldots + m^n) + m^{n+1} - (m^{n+1})^2 = \\ &= \sigma^2(m^{2n} + m^{2n-1} + \ldots + m^n) \end{aligned}$$

Če je $E(Z_1) = m = 1$, je torej disperzija enaka $(n+1)\,\sigma^2$, pri $m \neq 1$ pa iz obrazca za vsoto geometrijskega zaporedja ugotovimo, da je disperzija enaka $(m^n(m^{n+1} - 1)/(m - 1))\,\sigma^2$.

Računanje lahko sklenemo z ugotovitvijo, da velja

$$E(Z_n) = m^n, \quad D(Z_n) = \begin{cases} n\,\sigma^2 & (m = 1) \\ m^{n-1}\dfrac{m^n - 1}{m - 1}\,\sigma^2 & (m \neq 1) \end{cases} \tag{22}$$

Disperzija slučajne spremenljivke, ki je mera za razpršenost velikosti n-te generacije, z naraščanjem števila n pri $m = 1$ narašča premo sorazmerno, pri $m > 1$ je naraščanje disperzije še dosti hitrejše, pri $m < 1$ pa pada proti 0.

Ko smo tako izračunali najpomembnejša parametra verjetnostne porazdelitve slučajnih spremenljivk Z_n, se zdaj lotimo odgovora na osnovno vprašanje, kakšna je verjetnost za izumrtje populacije. Pri razmišljanju bomo vsaj v glavnih črtah sledili [7] oziroma [10]. Obravnavali bomo samo tiste populacije, kjer je $0 < p_0 < 1$. Zgornjo mejo intervala smo izključili že z eno od prejšnjih predpostavk, spodnjo mejo odvrže preprost premislek: če je $p_0 = 0$, ima vsak objekt (z verjetnostjo 1) vsaj enega naslednika, izumrtje je (praktično) nemogoče.

Kdaj sploh populacija izumre? To se zgodi, ko za neki $n \in \mathbb{N}$ nastopi dogodek $(Z_n = 0)$. Očitno je pri tem pogoju $(Z_k = 0)$ gotov dogodek za vsak $k > n$.

Označimo s q_n verjetnost dogodka $(Z_n = 0)$. Zaradi (6) je

$$q_n = P(Z_n = 0) = f_n(0) \tag{23}$$

Verjetnost za izumrtje populacije je enaka verjetnosti vsote dogodkov, da se to zgodi v prvi, drugi, ... generaciji, torej

$$\lim_{n\to\infty} P((Z_1 = 0) \cup (Z_2 = 0) \cup \ldots \cup (Z_n = 0))$$

Ker je vsak dogodek v zapisani vsoti način naslednjih, je to kar

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} q_n$$

Pokazali bomo, da je pri naših predpostavkah zaporedje $\{q_n\}$ vedno konvergentno.

Iz rekurzijske relacije (14) lahko dobimo naslednjo zvezo med zaporednimi členi zaporedja $\{q_n\}$:

$$q_{n+1} = f_{n+1}(0) = f(f_n(0)) = f(q_n) \tag{24}$$

Rodovna funkcija f — glej (4) je naraščajoča, saj gre za potenčno vrsto z negativnimi koeficienti; ker smo izključili možnost $p_0 = 1$, je

celo strogo naraščajoča. Zato iz $q_1 = f_1(0) = p_0 > 0$ in iz (24) sledi, da je $q_2 = f(q_1) > f(0) = q_1$. Predpostavimo, da je tudi $q_n > q_{n-1}$. Tedaj sledi $q_{n+1} = f(q_n) > f(q_{n-1}) = q_n$. Tako smo z indukcijo pokazali, da je $\{q_n\}$ monotono naraščajoče zaporedje pozitivnih števil. Ker so njegovi členi verjetnosti, je od zgoraj omejeno, torej konvergentno. Za njegovo limito

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n \tag{25}$$

iz povedanega sledi ocena $0 < q \leqslant 1$. Funkcija f je zvezna na zaprtem intervalu $[0,1]$ (da trditev velja tudi za desni rob, je posledica Abelovega izreka, glej npr. [7], str. 46), to dejstvo pa nam omogoča naslednji sklep (glej tudi (24)):

$$\lim_{n\to\infty} q_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \tag{26}$$

ali drugače

$$q = f(q) \tag{27}$$

Verjetnost za izumrtje populacije moramo torej iskati med rešitvami enačbe

$$f(s) = s \tag{28}$$

Eno rešitev ima ta enačba zagotovo, namreč $s = 1$ (glej (4)), zato iskanje nikoli ni zaman. Seveda pa nas dosti bolj zanimajo koreni, ki so strogo manjši od 1 in dajejo populaciji pozitivno verjetnost za preživetje.

Najprej lahko ugotovimo, da je limitna verjetnost q najmanjši pozitivni koren enačbe (28). Trditev bomo spet dokazali s popolno indukcijo. Naj bo s^* najmanjši pozitivni koren te enačbe. Ker je funkcija f strogo naraščajoča, je prvi člen zaporedja $q_1 = f(0)$ pod vrednostjo $f(s^*) = s^*$. Naj bo zdaj $q_n < s^*$ za poljuben $n > 1$. Potem je tudi $q_{n+1} = f_{n+1}(0) = f(f_n(0)) = f(q_n) < f(s^*) = s^*$. Zaporedje $\{q_n\}$ je potemtakem omejeno s konstanto s^*, zato tudi njegova limita q ne more biti večja od nje in je res najmanjši pozitivni koren enačbe (28), kot smo želeli pokazati. Odgovor na vprašanje, ali je to število manjše od 1, pa je pri naših predpostavkah odvisen še od vrednosti $m = E(Z_1) = E(X)$.

Predpostavili smo, da je $p_0 + p_1 < 1$, zato je vsaj ena od verjetnosti p_2, p_3, ... strogo pozitivna. To pomeni, da je za $s \in [0,1]$ tak tudi drugi odvod rodovne funkcije

$$f''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, p_k\, s^{k-2}$$

Rodovna funkcija f je na intervalu $[0, 1]$ — od spodaj — konveksna. Ker poteka njen graf skozi točko $(1, 1)$, ima enačba $f(s) = s$ na intervalu $(0, 1)$ natanko eno (slika 1) ali pa nobene (slika 2) rešitve. Prva možnost nastopi, če je $f'(1) > 1$, druga pa takrat, ko $f'(1)$ ne presega 1. Ker je po (15) $f_1'(1) = f'(1) = E(Z_1) = E(X) = m$, smo tako dokazali naslednji

IZREK: Če povprečno število naslednikov ($m = E(X)$) ni večje od 1, je $q = 1$ najmanjša pozitivna rešitev enačbe (28), populacija z verjetnostjo 1 izumre. Kadar je $m > 1$, je verjetnost za izumrtje $q < 1$.

Ni težko pokazati, da ne velja le za $s = 0$

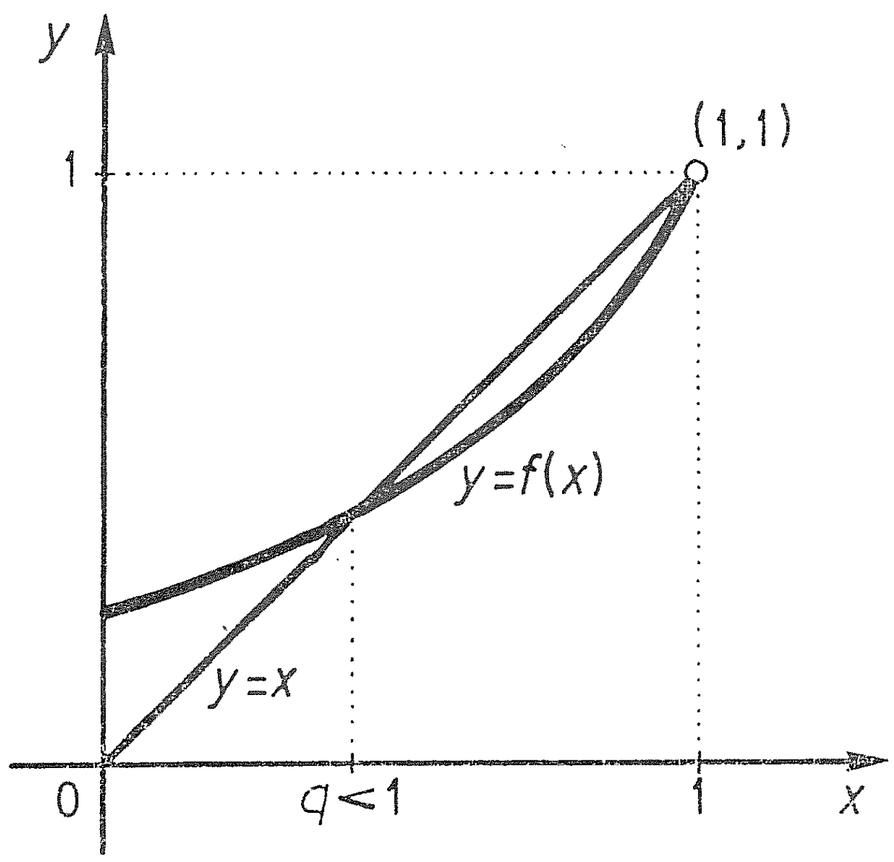
$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = q \tag{29}$$

ampak je natanko takšna relacija izpolnjena tudi za vsako drugo točko $s \in [0, 1)$; dokaz najdemo na primer v [7], str. 291—293, ali kar v [4], str. 13—14. Iz dejstva, da za vsak $s \in [0, 1)$ velja

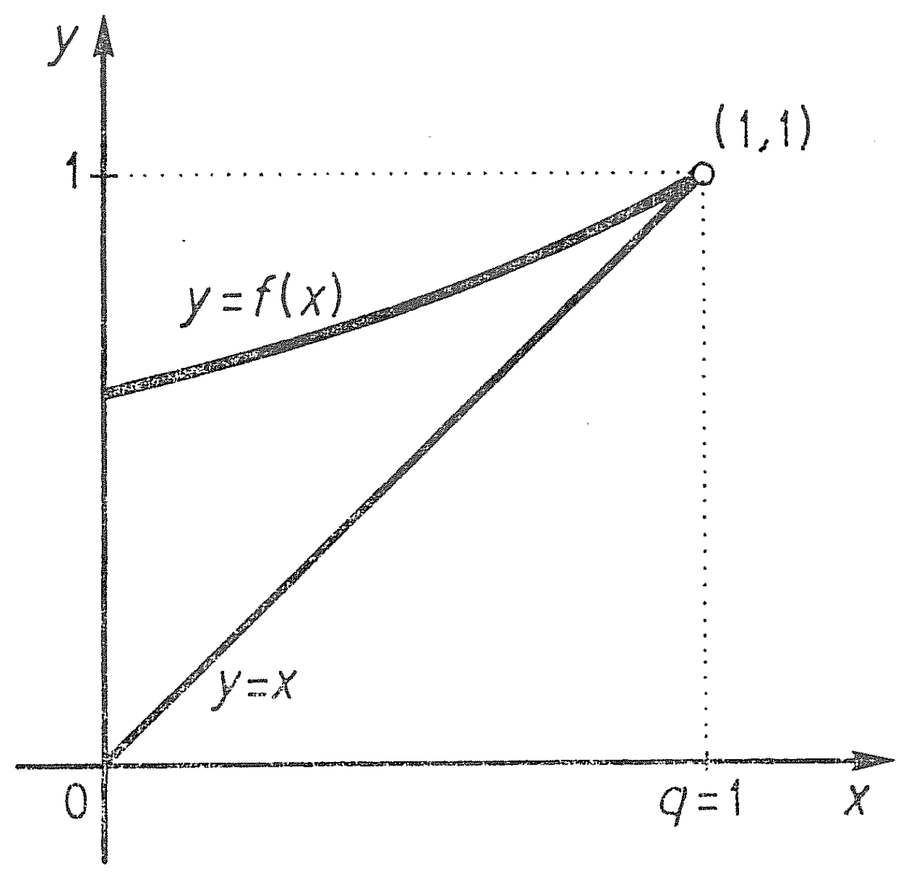
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)\, s^k = q \tag{30}$$

pa sledi, da mora k tej konstanti konvergirati prvi koeficient potenčne vrste, to je $P(Z_n = 0)$, vsi drugi koeficienti pa konvergirajo k 0,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{31}$$



Sl. 1. Rodovna funkcija f, ko je $m > 1$



Sl. 2. Rodovna funkcija f, ko je $m \leq 1$

Ne glede na konkretno vrednost matematičnega upanja $m = E(X)$ torej z naraščajočim n verjetnost za to, da ima populacija kako (beri: katerokoli) končno pozitivno število elementov, pada proti 0. Verjetnost izumrtja je q, zato velikost populacije z verjetnostjo $1 - q$ preraste vsako končno mejo.

Watsonov rezultat ($q = 1$) je torej odgovor na zastavljeno vprašanje, ki užene le primer $m \leq 1$. Od tega poskusa do ugotovitev, ki smo jih srečali v tem članku, je bila relativno dolga pot, ki je lepo opisana v [8]. K razvoju so (predvsem v letih 1922—1932) največ prispevali R. A. Fisher, J. B. S. Haldane, A. K. Erlang, W. P. Elderton in J. F. Steffensen. Za uporabo so morda posebej zanimive Fisherjeve raziskave (1922) iz genetike (gre za verjetnost izumrtja populacije, katere začetnik je mutiran gen, glej [7], str. 287 in 294—295 ter [2], str. 295, [10], str. 110—111), za nestrokovnjaka pa so verjetno najbolj »otipljivi« poskusi matematika in demografa A. J. Lotke (1931), da bi se dokopal do verjetnosti za izumrtje »moške linije« pri ameriških belcih. Verjetnosti p_k za posamezno število sinov so bile ocenjene iz podatkov za leto 1920 in so bile naslednje:

$$p_0 = 0{,}4982 \quad , \quad p_1 = 0{,}2103 \quad , \quad p_2 = 0{,}1270 \quad , \quad p_3 = 0{,}0730 \quad ,$$
$$p_4 = 0{,}0418 \quad , \quad p_5 = 0{,}0241 \quad , \quad p_6 = 0{,}0132 \quad , \quad p_7 = 0{,}0069 \quad ,$$
$$p_8 = 0{,}0035 \quad , \quad p_9 = 0{,}0015 \quad , \quad p_{10} = 0{,}0005 \quad , \quad p_k < 0{,}0001 \ (k > 10) \tag{32}$$

V skladu z našimi ugotovitvami o verjetnosti za izumrtje populacije je treba rešiti enačbo $f(s) = s$, pri čemer je $f(s)$ določena s predpisom (4) in verjetnostmi (32), torej

$$0{,}4982 + 0{,}2103\, s + 0{,}1270\, s^2 + \ \ldots \ + 0{,}0005\, s^{10} = s \tag{33}$$

Ko enačbo, v kateri je upoštevanih prvih enajst členov funkcije f, tako ali drugače uženemo, dobimo za najmanjši pozitivni koren (verjetnost izumrtja populacije) vrednost $q = 0{,}88$ (zaokroženo na dve decimalni mesti). Lotka je kasneje objavil popravljen rezultat, $q = 0{,}82$, ki ga je dobil tako, da je verjetnosti p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ generiral po t. i. Eldertonovem pravilu

$$p_0 = a \quad , \quad p_k = (1 - a)\,(1 - b)\, b^{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{34}$$

Pri $a = 0{,}4825$ in $b = 0{,}5893$ se tako generirane vrednosti dobro ujemajo z empiričnimi verjetnostmi (32), oblika zaporedja (34) pa je takšna, da je rodovna funkcija (4) ulomljena linearna funkcija, za katero lahko eksplicitno izračunamo zaporedje $\{f_r\}$ (v potu svojega obraza!) in rešitev enačbe $f(s) = s$. Komur ni do numeričnega igranja z enačbami oblike (33), si lahko v [4] ogleda recepte za to pot.

Kolikor nam je znano, za Slovenijo ali Jugoslavijo empiričnih podatkov (32) oziroma parametrov a in b iz (34) ni na voljo, tako da ne moremo poseči z vrednostjo q za naše razmere. Zato pa je natanko znano, kako se je treba boriti proti $q = 1$: poskrbeti je pač treba, da bo $m > 1$ ...

LITERATURA

[1] G. Feichtinger, *Demographische Analyse und populationsdynamische Modelle (Grundzüge der Bevölkerungsmathematik)*, Wien—New York, Springer Verlag 1979.

[2] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1*, New York, John Wiley 1957.

[3] T. E. Harris, *The theory of branching processes*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag 1963.

[4] B. Hmelak, *Razvejeni procesi* (diplomsko delo), Ljubljana, samozaložba 1981.

[5] F. Hoppenstadt, *Mathematical theories of populations*, Philadelphia, Society for industrial and applied mathematics 1975.

[6] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Ljubljana, Mladinska knjiga 1971.

[7] S. Karlin, *A first course in stochastic processes*, New York—London, Academic Press 1966.

[8] D. G. Kendall, *Branching processes since 1873*, J. London Math. Soc. **41** (1966) 385—406.

[9] N. Keyfitz, *Introduction to the mathematics of population*, Reading (Mass.), Addison-Wesley 1968.

[10] J. H. Pollard, *Mathematical models for growth of human populations*, Cambridge, Cambridge University Press 1973.

[11] I. Vidav, *Višja matematika I* (tretja izdaja), Ljubljana, Državna založba Slovenije 1968.

PRIMER UPORABE RAČUNALNIKA PRI ANALIZI NEKE IMPLICITNO PODANE FUNKCIJE

FRANCE AVSEC

Math. Subj. Class 26 B 10

V članku je opisana metoda tabeliranja implicitno podane funkcije dveh spremenljivk s tangentno metodo, ko poznamo njeno vrednost v vsaj eni notranji točki definicijskega območja. Metoda je prikazana s konkretnim primerom tabeliranja in popolno analizo implicitno podane algebrske funkcije 4. reda, na katero naletimo pri reševanju znanega problema iz geometrije.

AN EXAMPLE OF USING THE COMPUTER IN THE ANALYSIS OF AN IMPLICITLY GIVEN FUNCTION

A table of an implicitely defined function of two variables, the value of the function being known at least at one point in the domain, is constructed using Newton's tangent method. As an example an implicitely defined algebraic function of the fourth order is analysed, met in connection with a well-known geometrical problem.

Pri reševanju raznih matematičnih nalog nam lahko računalnik opravi gore težaškega dela. Tako postanejo nekateri matematični postopki, ki brez računalnika ne pomenijo »praktične« rešitve problema, še kako uporabni. Namen naslednjega sestavka je, pokazati to na konkretnem primeru, čeprav so pota, ki jih bomo ubirali, popolnoma splošna.

Za spremljavo našim razmišljanjem si vzemimo reševanje znanega problema: Med vsemi trikotniki z dano ploščino poišči tistega, ki ima najmanjši obseg. Da odgovorimo na to vprašanje, je potrebno raziskati potek algebrske funkcije $z(x, y)$, ki je implicitno dana z naslednjo enačbo:

$$f(x, y, z) = z^4 - 2(x + y)\, z^3 + (x^2 + y^2 + 3x\, y)\, z^2 - x\, y(x + y)\, z + 1 = 0 \quad (1)$$

kjer smo vpeljali za $s/\sqrt{p}$, $a/\sqrt{p}$ in $b/\sqrt{p}$ spremenljivke z, x in y; pri tem sta a in b stranici trikotnika, s polovični obseg, p pa njegova ploščina.

V primerih kot je zgornji, ko je funkcijo $z(x, y)$ težko ali pa je sploh ni mogoče zapisati v eksplicitni obliki in jo raziskati analitično, nam preostanejo le še numerični postopki, katerim pa bomo kos le z izdatno pomočjo računalnika.

V tem sestavku bom ubiral podobno pot kot v sestavku z enakim naslovom v [1]. Zanimivo je sedaj prepletanje klasičnih metod analize z izsledki numeričnih postopkov z računalnikom. Z razširitvijo naloge v dvodimenzionalen prostor se odpirajo kvalitetno drugačni problemi.

Eksistenco funkcije $z(x, y)$ nam v zgornjem primeru zagotavlja že narava problema samega, v splošnem pa zagotavlja njen obstoj izrek o implicitnih funkcijah (glej [3], str. 252). Ta pravi: Vzemimo, da so izpolnjeni tile pogoji: $f(x, y, z)$ naj bo odvedljiva funkcija z zveznimi prvimi odvodi in v točki (a, b, c) naj bo $f(a, b, c) = 0$ in $f_z'(a, b, c) \neq 0$. Potem obstaja natanko določena zvezna funkcija $z(x, y)$, ki je definirana v neki okolici (a, b) ter zadošča enačbi $f(x, y, z(x, y)) = 0$ in za katero je $z(a, b) = c$. Definicijsko območje implicitne funkcije $z(x, y)$ pa je mogoče razširjati, dokler je $f_z'(x, y, z) \neq 0$. V okolici točke (x, y, z), kjer je $f_z'(x, y, z) = 0$, pa lahko implicitna funkcija eksistira ali pa ne (glej [2], str. 4). Če ne eksistira, smo pri razširjanju prispeli na rob definicij-

skega območja implicitne funkcije $z(x, y)$, če pa eksistira, je mogoče onkraj takih točk nadaljevati z razširjanjem definicijskega območja.

Implicitna funkcija $z(x, y)$, ki je določena z enačbo (1), pa je algebrska in je v splošnem štirilična, ali z besedami v jeziku geometrije: graf funkcije $z(x, y)$ v prostoru je ploskev, ki jo lahko tvorijo štirje listi. Za začetek nas zanimajo samo tisti listi algebrske ploskve $z(x, y)$, ki leže v prvem oktantu koordinatnega sistema $x\,y\,z$. Za predstavitev lista implicitne funkcije $z(x, y)$ pa moramo po izreku o implicitnih funkcijah poznati lego kakšne točke na tem listu. To pa v gornjem primeru ni posebno težka naloga. Enakostraničnemu trikotniku z dano ploščino ustreza točka $E(2/\sqrt[4]{3},\ 2/\sqrt[4]{3},\ 3/\sqrt[4]{3}) = (x_0, y_0, z_0)$. List algebrske funkcije, ki poteka skozi E, imenujmo prvi list te funkcije v prvem kvadrantu ravnine $x\,y$. Pri enakih vrednostih (x_0, y_0) pa je vrednost algebrske funkcije $z(x, y)$ lahko tudi $(2 + \sqrt{3})/\sqrt[4]{3} = z_t$. Točka $T(x_0, y_0, z_t)$ pripada tedaj drugemu listu algebrske funkcije $z(x, y)$ v prvem kvadrantu ravnine $x\,y$, ki je ravno tako povezan z našim problemom. Točka T namreč ustreza enakokrakemu topokotnemu trikotniku ($\alpha = 120^0$) z dano ploščino. Enačba (1) ima pri (x_0, y_0) poleg z_0 in z_t še dva korena: $1/\sqrt[4]{3} = z_r$ in $(2 - \sqrt{3})/\sqrt[4]{3} = z_s$. Točki $R(x_0, y_0, z_r)$ in $S(x_0, y_0, z_s)$ pripadata tedaj 3. in 4. listu algebrske funkcije $z(x, y)$ v prvem kvadrantu ravnine $x\,y$.

Raziščimo najprej tisti list algebrske funkcije $z(x, y)$, ki poteka skozi točko E! Po izreku o implicitnih funkcijah eksistira ena sama taka funkcija, ki gre skozi E. Funkcija (1) je namreč zvezna in odvedljiva, z zveznimi prvimi odvodi; v točki $E(x_0, y_0, z_0)$ je njena vrednost $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ odvod $f_z'(x_0, y_0, z_0)$ pa $\neq 0$.

Kako izračunati vrednosti funkcije $z(x, y)$ v okolici (x_0, y_0)?

Uporabili bomo Newtonovo metodo, prirejeno za primer, ko je treba izračunati vrednost implicitne funkcije, pa že poznamo njeno približno vrednost (glej [1] str. 102).

Pri (x_0, y_0) je vrednost funkcije $z(x_0, y_0) = z_0$. Da bi izračunali vrednost implicitne funkcije $z(x, y)$ v kakšni dovolj bližnji točki (x, y), bomo vzeli za začetni približek nove vrednosti funkcije $z(x, y)$ kar z_0, saj je zaradi zveznosti funkcije $z(x, y)$, z_0 zelo blizu novi vrednosti $z(x, y)$. Vse nadaljnje približke $z_1, z_2, \ldots$ pa dobimo z iterativno uporabo obrazca:

$$z_{r+1} = z_r - f(x, y, z_r)/f_z'(x, y, z_r) \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Zaporedje $z_0, z_1, z_2 \ldots$ konvergira k $z(x, y)$, saj so izpolnjeni pogoji iz [1]. Tako lahko postopoma tabeliramo funkcijo $z(x, y)$, saj novoizračunano vrednost funkcije lahko zopet zaradi zveznosti funkcije $z(x, y)$ smatramo za dober začetni približek funkcije v sosednji točki. Proces tabeliranja lahko nadaljujemo, vse dokler ni $f_z'(x, y, z) = 0$. V okolici točke (x, y, z), kjer je $f_z'(x, y, z) = 0$, pa sta dve možnosti za našo funkcijo: eksistira, ali pa ne. Če ne obstaja, potem gre za mejo definicijskega območja funkcije, če pa obstaja, potem tako točko pri tabeliranju preskočimo in nadaljujemo s tabeliranjem na novem področju. Tako je mogoče tabelirati funkcijo povsod, kjer obstaja, razen na meji definicijskega območja, če smo le izbrali primerno velikost koraka tabeliranja. Pri tem je pametno izbrati tako majhen korak, da bomo z njim lahko shajali po celem področju, kjer raziskujemo potek funkcije.

Še nekaj opazk v zvezi z realizacijo tega postopka pri delu z računalnikom. Zaradi narave dela tiskalnika računalnika je najprimerneje tabelirati funkcijo v smeri vzporedni z osjo x in v smeri vzporedni z osjo y. Tabelirajmo v smeri osi y! Pri velikosti koraka dy in danih začetnih vrednostih $x_0, y_0 + dy$ ter približka z_0 za vrednost funkcije v $(x_0, y_0 + dy)$ dobimo nadaljnje približke za $z(x_0, y_0 + dy)$ po obrazcu:

$$z_{K+1} = z_K - f(x_0, y_0 + dy, z_K)/f_z'(x_0, y_0 + dy, z_K) \qquad K = 0, 1, 2 \ldots$$

z iterativnim postopkom, ki ga ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti. Naseldnjo vrednost funkcije $z(x_0, y_0 + 2\,dy)$ dobimo po isti poti, če pravkar izračunano vrednost $z(x_0, y_0 + dy)$ smatramo za njen prvi približek itd. Podobno postopamo, ko tabeliramo v smeri vzporedno z osjo x.

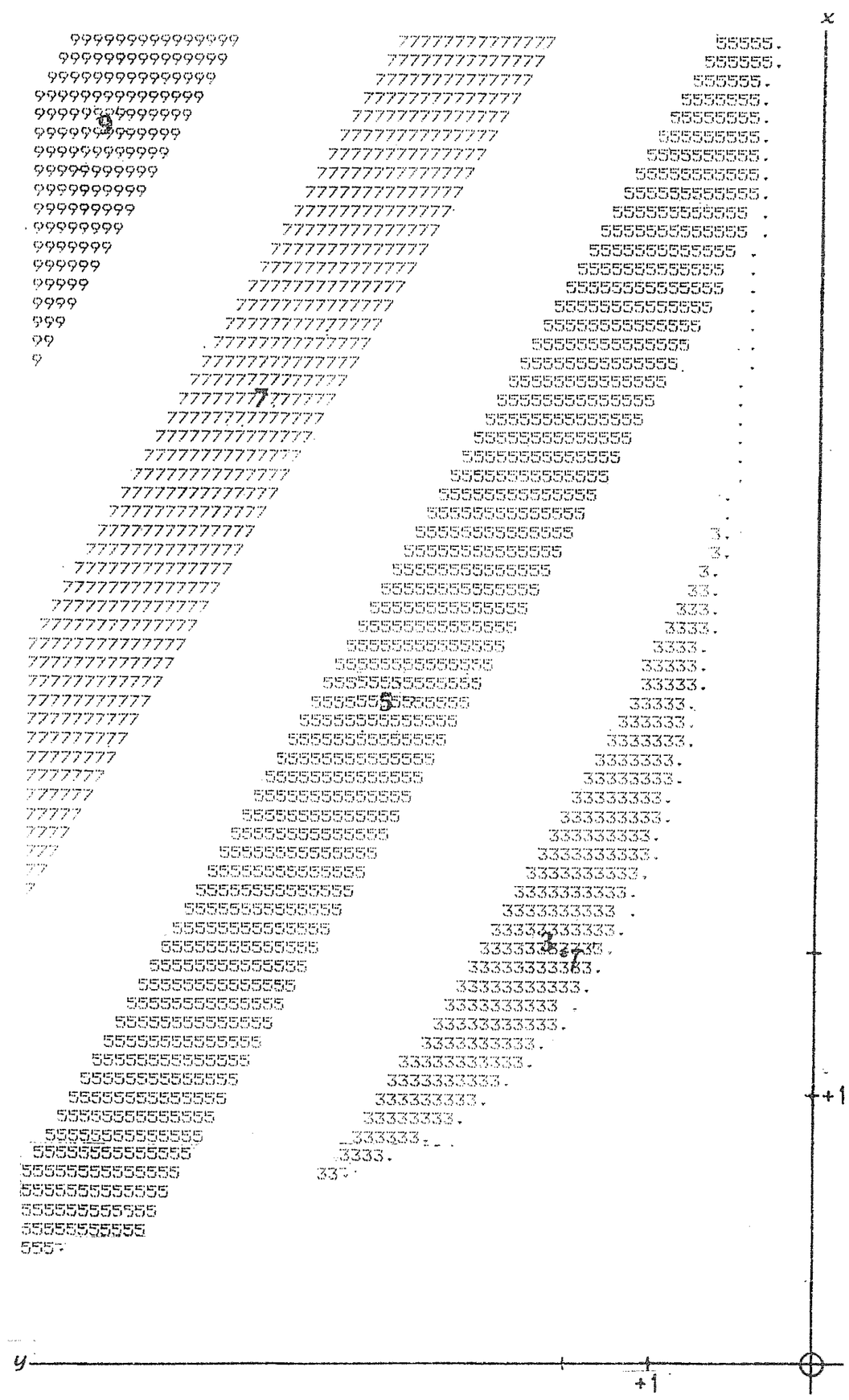
V primeru, da želimo tabelirati funkcijo vzdolž neke krivulje $y = y(x)$ v ravnini $x\,y$ (kar bo tudi potrebno), pa računamo približke za $z(x, y(x))$ po

$$z_{K+1} = z_K - f(x, y(x), z_K)/(f_z'(x, y(x), z_K) \qquad K = 0, 1, 2, \ldots$$

če poznamo približek z_0 za $z(x, y(x)$. Naslednjo vrednost funkcije $z(x + dx, y(x + dx))$ pa dobimo na enak način kot prej.

Pa tabelirajmo funkcijo $z(x, y)$ začenši v točki E po simetrali prvega kvadranta v smeri proč od izhodišča do primerno oddaljene točke B (glej sl. 1).

Slika 1



Slika 2

Od tod lahko s tabeliranjem v smeri vzporedni z osjo y ter s preskoki v novo vrsto (v smeri vzporedni z osjo x), prečešemo ves del prvega kvadranta, ki ga omejujeta vzporednici z osema x in y, ki potekata skozi B.

Slika 1 prikazuje potek izohips prvega lista, ki poteka skozi E. »Izohipsa« z oznako 3 je področje na ravnini $x\,y$, kjer je $2.5 \leqq z(x, y) < 3.5$. Nadalje spoznamo iz sl. 1 (s podrobnejšim tabeliranjem pa se tudi prepričamo), da imajo koordinate vseh točk, v katerih se proces tabeliranja konča, obliko $(x, 2/x)$. Gre za mejo definicijskega območja funkcije $z(x, y)$. Če preskočimo točko $(x, 2/x)$, s tabeliranjem ne moremo nadaljevati! Vzdolž krivulje $y = 2/x$ je torej na ploskvi $z = z(x, y)$, odvod $f_z'(x, y, z) = 0$ (glej enačbo (4)). Množica $\{(x, y);\ x > 0,\ y \geqq 2/x\}$ je torej definicijsko območje funkcije $z(x, y)$ v prvem kvadrantu. To pa smo tudi pričakovali. Če govorimo v jeziku našega problema, ki išče funkcijo $z(x, y)$, lahko rečemo: ko sta x in y, tj. stranici trikotnika dovolj majhni, ni mogoč trikotnik z dano ploščino.

Rob lista ploskve $z(x, y)$, ki poteka skozi E, pa je določen z enačbama $f(x, y, z) = 0$ in $f_z'(x, y, z) = 0$. Poznavanje projekcije tega robu na ravnino $x\,y$ $(y = 2/x)$ daje za krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, ki omejuje prvi list v prostoru, naslednje enačbe:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2/t, \quad z(t) = \tfrac{1}{2}\left(t + 2/t + \sqrt{t^2 + 4/t^2}\right) \qquad 0 < t < +\infty \qquad (2)$$

Analogno, kot smo tabelirali list, ki poteka skozi E, lahko tabeliramo tudi drugi list (glej sl. 2), ki poteka skozi T. Očitno se oba lista stikata vzdolž roba $\mathbf{r}(t)$ in tvorita proti osema zaprto, v preostali prostor pa zevajočo školjko. Lista se vzdolž roba stikata v gladko ploskev. Parcialni odvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ so zvezne funkcije, zato vektor na normali zvezno menja svojo lego. Vzdolž roba $\mathbf{r}(t)$ pa je $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$; tako stoji tangencialna ravnina ploskve vzdolž roba $\mathbf{r}(t)$ povsod pravokotno na ravnino $x\,y$.

Za predah še kratka razlaga dobljenih rezultatov. V enačbah (2) pomeni z polovičen obseg trikotnika s stranicama x in y, torej je $\sqrt{t^2 + 4/t^2}$ tretja stranica tega trikotnika; to pa je Pitagorov izrek za trikotnik s stranicama x in y. Rob lista pripada torej pravokotnim trikotnikom, kar bi lahko že intuitivno slutili. Pri danih x, y in ploščini sta v splošnem možna dva trikotnika, ostrokoten in topokoten. Topokoten ima vedno večji obseg od prirejenega ostrokotnega. List funkcije, ki poteka skozi E, pripada torej ostrokotnim, list, ki poteka skozi T pa topokotnim trikotnikom.

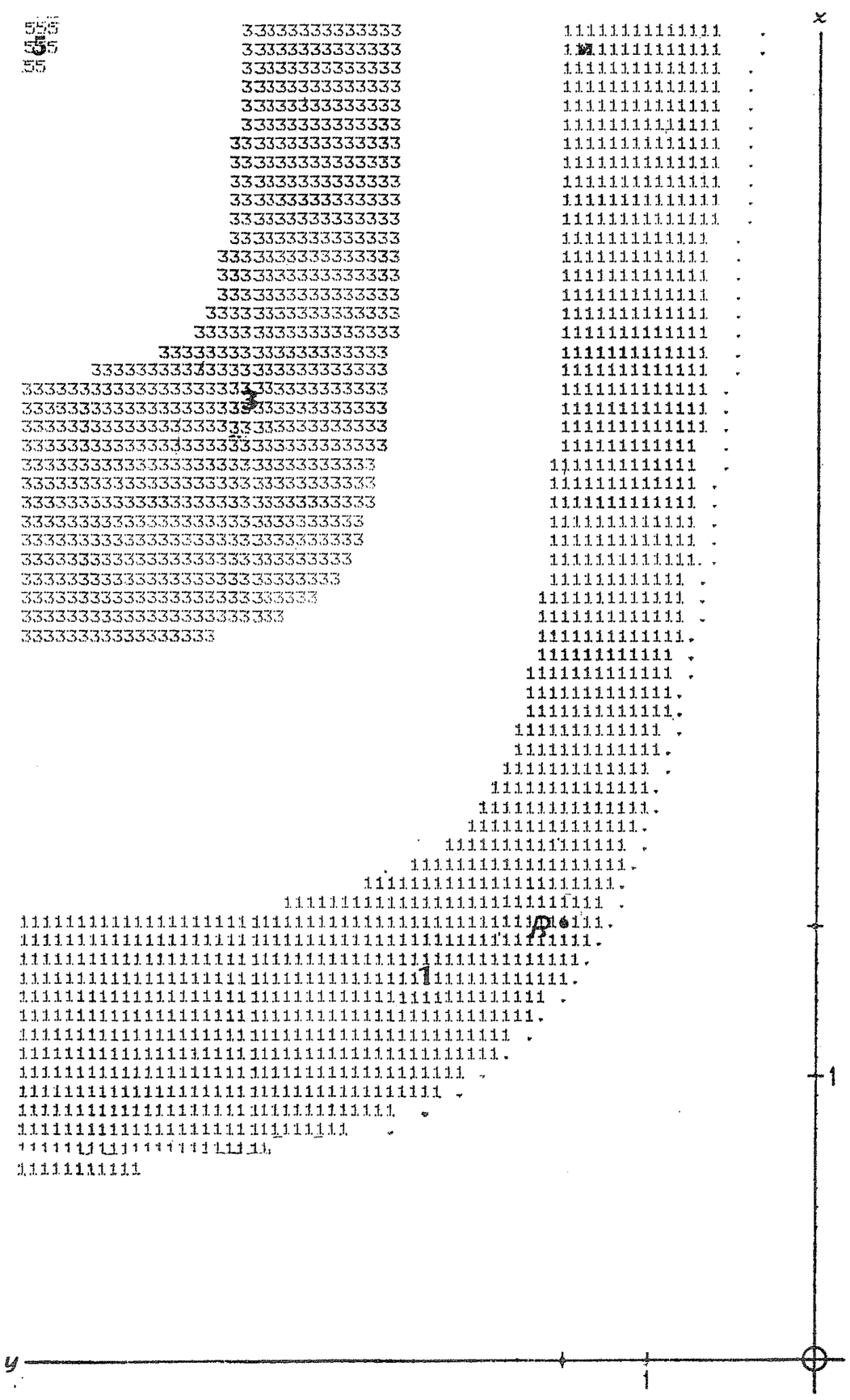
Sedaj že lahko odgovorimo na vprašanje, postavljeno na samem začetku: kje ima funkcija $z(x, y)$ v prvem kvadrantu svoj minimum? Če ga ima, ga ima na listu, ki poteka skozi E, saj ta ves leži pod drugim listom, ki poteka skozi T. Iz poteka izohips na sl. 1, pa tudi s podrobnejšim tabeliranjem funkcije je razvidno, da ima funkcija $z(x, y)$ minimum pri (x_0, y_0). Do tega spoznanja lahko pridemo tudi takole: Če v enačbi (1) x in y zamenjamo, se enačba za $z(x, y)$ nič ne spremeni. Iz tega sledi: graf funkcije $z(x, y)$ je simetričen glede na ravnino $x - y = 0$. Očitno je ekstrem na simetrali $y = x$. Zato je dovolj, da funkcijo $z(x, y)$ tabeliramo le vzdolž simetrale $y = x$ (glej tabelo 1). Torej ima med vsemi trikotniki z dano ploščino enakostranični najmanjši obseg. Ta rešitev je sicer znana. Med drugim bi jo lahko našli tudi z rešitvijo enačb

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ in $f(x, y, z) = 0$. Rešiti ta sistem pa ni tako kratka naloga. Na dlani je, da je pot, ki smo jo ubirali v tem članku, v mnogih primerih celo krajša, včasih tudi edina, ki pa nam do sedaj ni bila dostopna.

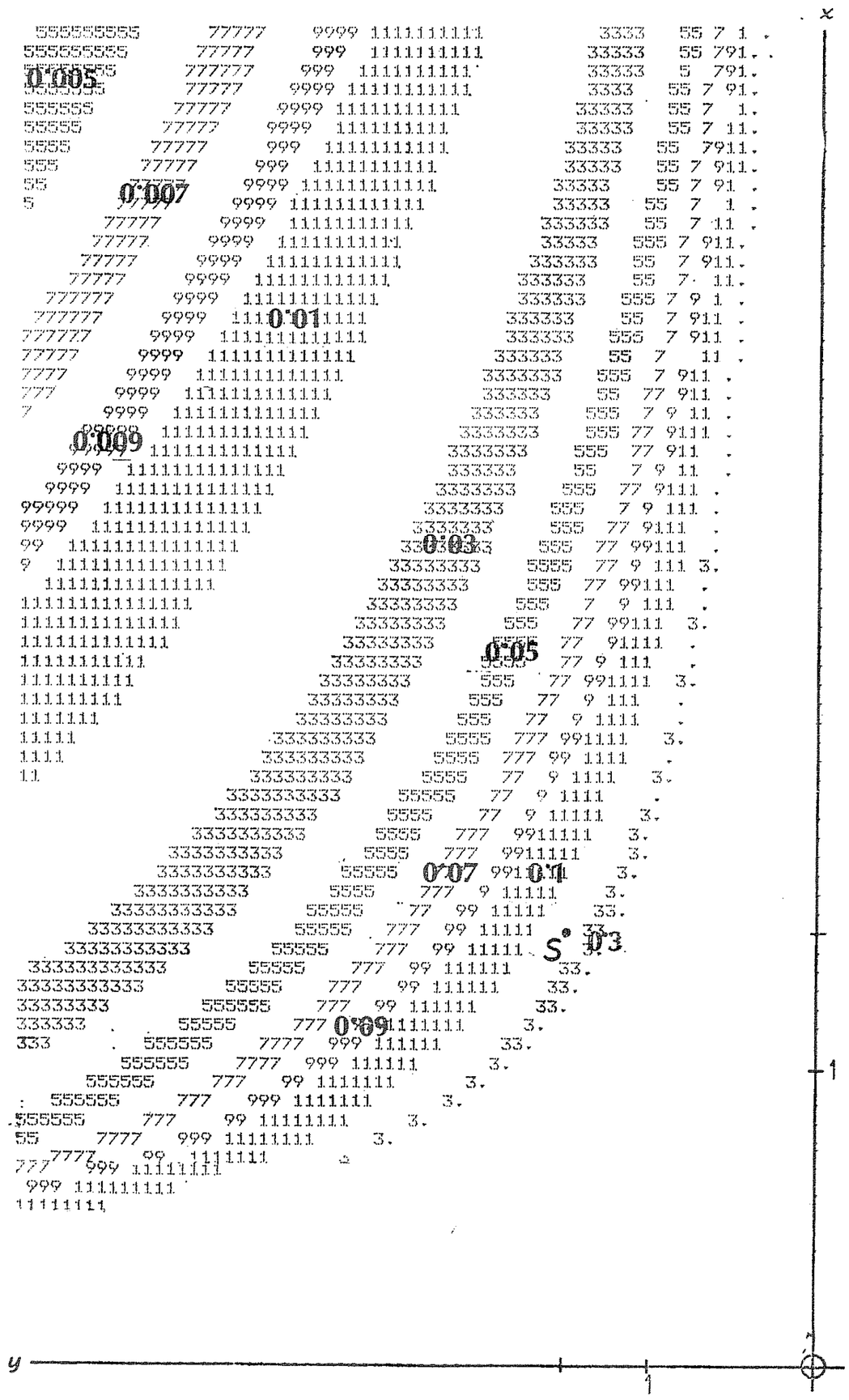
Tabela 1

x	$z(x, x)$
1.515	2.2795731
1.516	2.2795476
1.517	2.2795284
1.518	2.2795153
1.519	2.2795083
1.520	2.2795073
1.521	2.2795122
1.522	2.2795229
1.523	2.2795393
1.524	2.2795614
1.525	2.2795890

Naš osnovni namen pa ni bil reševati zgornji problem, ta nam je bil le v oporo pri računalniški analizi implicitne funkcije $z(x, y)$ v prvem kvadrantu.



Slika 3



Slika 4

Raziščimo še potek listov funkcije $z(x, y)$, ki potekata skozi $R(x_0, y_0, z_r)$ in $S(x_0, y_0, z_s)$. (Glej sl. 3 in 4). Očitno nimata ta dva lista nobene geometrijske zveze z zastavljenim problemom. Podobno kot pri prejšnjih dveh listih tudi sedaj spoznamo, da ju v prostoru omejuje krivulja $\mathbf{r}(t)$:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2/t, \quad z(t) = t + 2/t - \sqrt{t^2 + 4/t^2} \qquad 0 < t < +\infty$$

vzdolž katere se lista zlepita v povsod gladko ploskev. List R (odslej namesto: list skozi R) se ob robu $\mathbf{r}(t)$ približuje ravnini $x\,y$, drugod pa se od ravnine $x\,y$ oddaljuje. Povsod pa leži pod listom E. Popolnoma drugače pa se obnaša list S. Ta se od omejitvene krivulje $\mathbf{r}(t)$ v vseh smereh asimptotično približuje ravnini $x\,y$. Povsod pa leži pod listom R. V prostoru ležijo listi T, E, R in S drug pod drugim. Po dva in dva ($T\,E, R\,S$) tvorita samostojni ploskvi. Ploskev $T\,E$ je podobna bolj napihnjeni, ploskev $R\,S$ pa potlačeni školjki, obe pa se raztezata v neskončnost.

Raziščimo še potek funkcije $z(x, y)$ v ostalih kvadrantih! Vemo že, da je graf funkcije simetričen glede na ravnino $x - y = 0$. Iz enačbe (1) pa je razvidno še naslednje: Če je (x, y, z) točka grafa funkcije $z(x, y)$, je $(-x, -y, -z)$ tudi točka tega grafa. Graf funkcije $z(x, y)$ je torej središčno simetričen s središčem simetrije v izhodišču koordinatnega sistema. Iz tega sledi: potek funkcije $z(x, y)$ moramo raziskati le še v drugem kvadrantu.

V drugem kvadrantu nimamo nobene geometrijske intuicije o poteku grafa, podobno, kot je nismo imeli o poteku listov R in S. Od prej pa vemo, da če poznamo le eno točko grafa te funkcije, lahko s postopnim tabeliranjem razkrijemo cel list funkcije, če so le koraki pri tabeliranju dovolj majhni. Poiskati le eno točko grafa pa ni posebno težek problem. Najti je treba le trojico števil, ki zadoščajo enačbi (1). Najenostavneje je, da izbiramo med točkami na simetrali $y = -x$. Vzemimo kako celo vrednost za z. 0 in 1 ne prideta v poštev, saj funkcija $z(x, y)$ vrednosti 0 nikjer ne zavzame, če pa vzamemo $z = 1$ pa naletimo na tako točko, kjer je $f_z' = 0$! Preostane nam $z = 2$. Funkcija $z(x, y)$ zavzame vrednost 2 pri $(-\sqrt{17}/2, \sqrt{17}/2) = (x_1, y_1)$. Enačba (1) pa nam da pri (x_1, y_1) tele vrednosti za $z(x_1, y_1)$: 2, 1/2, $-1/2$, -2. Funkcija $z(x, y)$ je v (x_1, y_1) štirilična.

Tabelirajmo funkcijo $z(x, y)$ iz točke $T_1(x_1, y_1, 2)$ v smeri proti izhodišču koordinatnega sistema. Zagotovo bomo naleteli na mejo definicijskega območja lista, saj pri $(0, 0)$ funkcija $z(x, y)$ ni definirana. Podobno kot v prvem kvadrantu spoznamo, da se proces tabeliranja konča vzdolž krivulje $y = -2/x$ (glej sl. 5), v ostalih smereh pa poteka neomejeno. Množica $\{(x, y);\ x < 0,\ y \geqq -2/x\}$ je torej definicijsko območje tega lista. Za enačbo krivulje $\mathbf{r}(t)$ v prostoru, ki omejuje ta list, pa dobimo naslednje enačbe:

$$x(t) = t, \quad y(t) = -2/t, \quad z(t) = \tfrac{1}{2}\left(t - 2/t + \sqrt{t^2 + 4/t^2}\right) \qquad -\infty < t < 0$$

Prav enako, kot smo ugotovili za list T_1 spoznamo iz sl. 6 tudi za list, ki poteka skozi $T_2(x_1, y_1, 1/2)$. Sliki 5 in 6 nam pričata, da se tudi ta dva lista zlepita vzdolž krivulje $\mathbf{r}(t)$ v samostojno ploskev. Očitno gre tudi v tem primeru, kot pri ploskvah v prvem kvadrantu, za povsod gladko ploskev. Ploskev v katero sta se zlepila lista T_1 in T_2, pa ni taka, kot oni iz prvega kvadranta. (Glej sl. 5 in 6.) Spodnji list se asimptotično približuje ravnini $x\,y$ v smeri negativne osi x, v smeri osi y pa se od ravnine $x\,y$ oddaljuje. Zgornji list pa se le s svojim robom $\mathbf{r}(t)$ približuje osi x, v preostalem delu pa se od ravnine $x\,y$ oddaljuje.

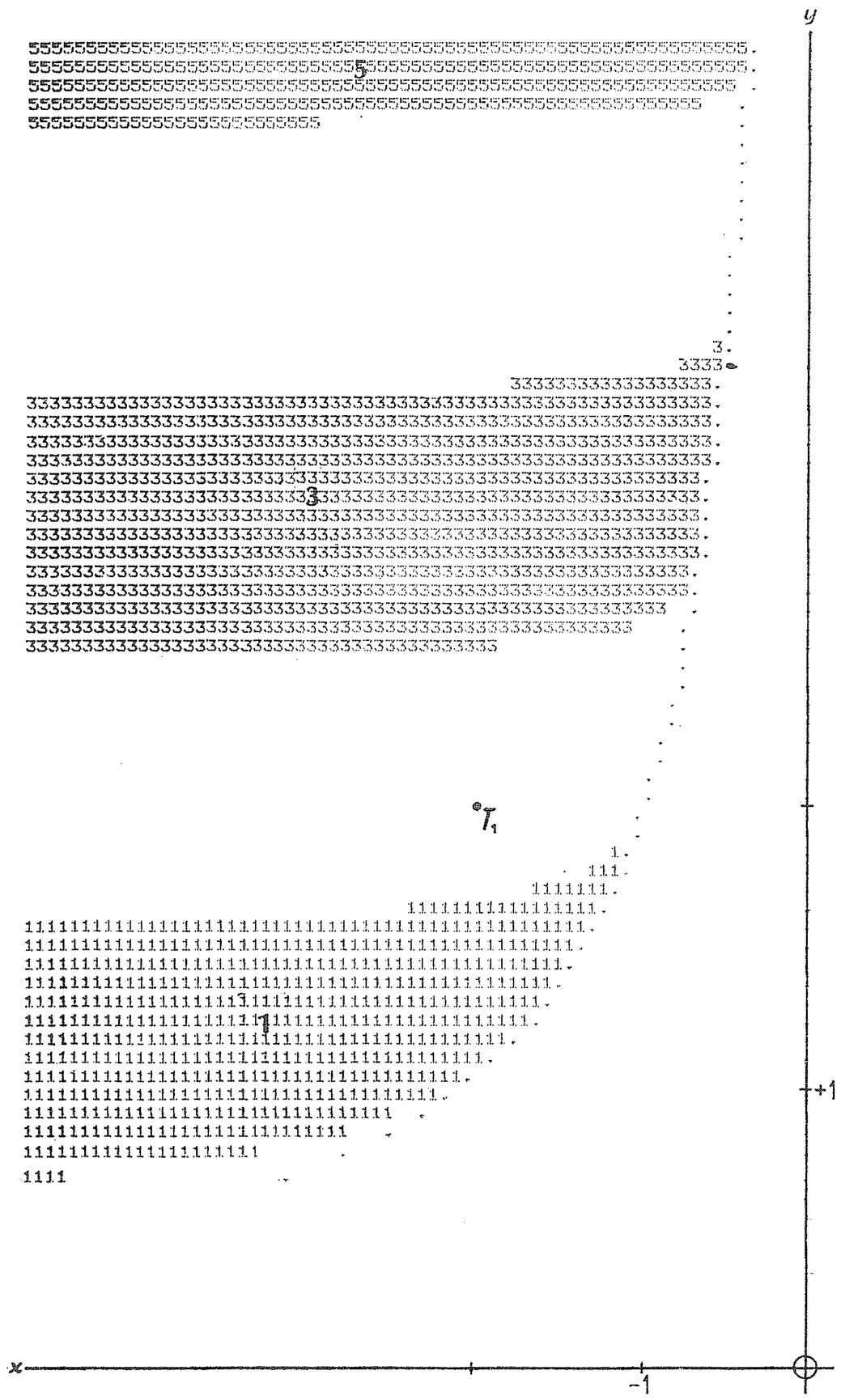
Analogno kot lista T_1 in T_2 se tudi lista, ki potekata skozi $T_3(x_1, y_1, -2)$ in $T_4(x_1, y_1 - 1/2)$ zlepita vzdolž $\mathbf{r}(t)$:

$$x(t) = t, \quad y(t) = -2/t, \quad z(t) = \tfrac{1}{2}\left(t - 2/t - \sqrt{t^2 + 4/t^2}\right) \qquad -\infty < t < 0$$

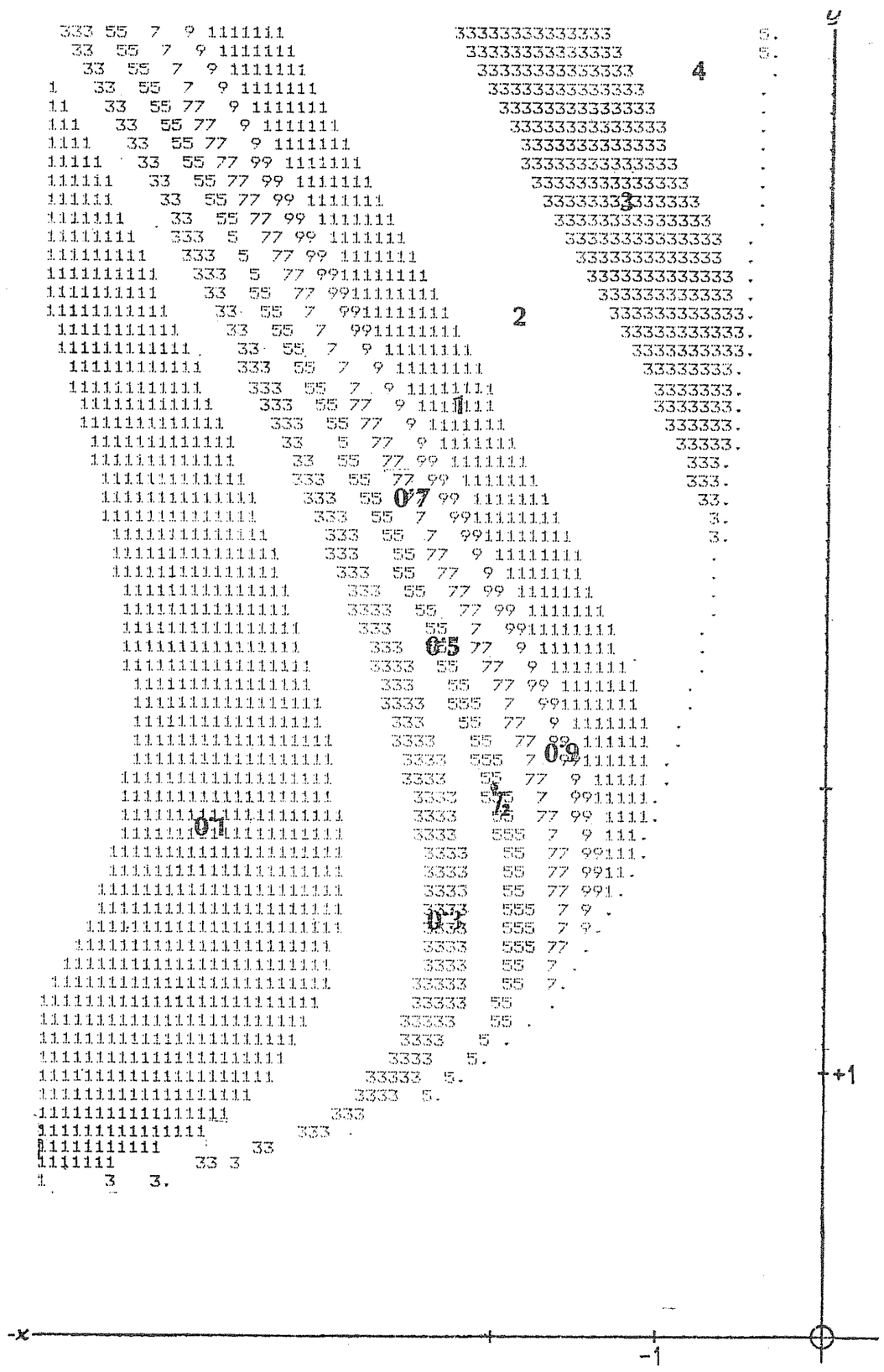
v gladko ploskev, ki z razliko od dosedanjih vsa poteka pod ravnino $x\,y$. Teh listov pa ni potrebno tabelirati, ker je graf funkcije $z(x, y)$ simetričen glede na premico $y = -x$ (tj. simetralo drugega kvadranta). Iz enačbe (1) je namreč razvidno: Če je (x, y, z) točka grafa, je $(-y, -x, -z)$ tudi na grafu funkcije $z(x, y)$. List T_4 je zrcalna slika lista T_2 in analogno je list, ki poteka skozi T_3, zrcalna slika lista T_1 glede na premico $y = -x$.

Povzetek. Graf funkcije $z(x, y)$ ima v vsakem kvadrantu po 4 liste (skupno 16), ki se paroma zlepijo vzdolž krivulj $\mathbf{r}(t)$ v samostojne, povsod gladke ploskve. V prvem in tretjem sta ploskvi na isti strani ravnine $x\,y$, v 2. in 4. kvadrantu pa je ena nad ravnino $x\,y$, druga pa pod njo. Med vsemi temi pa so le 3 geometrijsko povsem različne.

Še enkrat se povrnimo k problemu ekstrema funkcije $z(x, y)$. Po izohipsah sodeč (glej sl. 1 . . 6) ni nikjer nobenega ekstrema razen v (x_0, y_0, z_0), kjer, kot že vemo, ima funkcija lokalni minimum, ter v središčno simetrično ležeči točki $(-x_0, -y_0, -z_0)$, kjer ima funkcija $z(x, y)$ lokalni maksimum. To potrjujejo tudi enačbe za ekstrem funkcije $z(x, y)$, ki imajo le dve realni rešitvi x_0, y_0, z_0 in $-x_0, -y_0, -z_0$.



Slika 5



Slika 6

Zelo nazorno predstavo o ploskvah funkcije $z(x, y)$ bi dobili tudi, če bi te ploskve sekali z ravninami, ki stoje pravokotno na premici $y = x$ (v 1. kvadrantu) in $y = -x$ (v 2. kvadrantu). Presečne krivulje so zaključene krivulje. Z njihovo pomočjo bi lahko ploskve predstavili na zaslonskem terminalu računalnika ali pa na tiskalniku v bolj naravni obliki. Potrebno je le tabelirati funkcijo $z(x, y)$ vzdolž družine premic $y = -x + c$ (v 1. kvadrantu), oziroma $y = x + c$ (v 2. kvadrantu). Omenjeni postopek tabeliranja omogoča opraviti to delo na zelo eleganten in hiter način.

Tabeliranje funkcije $z(x, y)$ nam razkriva, da funkcija $z(x, y)$ ni definirana za $|x\,y| < 2$. To pa nam potrjuje tudi tale premislek: Preuredimo funkcijo (1) v naslednjo obliko:

$$f(x, y, z) = (z^2 - (x + y)\,z)^2 + x\,y\,(z^2 - (x + y)\,z) + 1 \tag{3}$$

To je kvadratna funkcija argumenta $z^2 - (x + y)\,z$! Ta pa ne more biti nič, kadar je njena diskriminanta $D = (x\,y)^2 - 4 < 0$. Torej, če je $|x\,y| < 2$, funkcija $f(x, y, z)$ ne more biti enaka nič pri nobenem realnem z. Od tod sledi: za $|x\,y| < 2$ implicitna funkcija $z(x, y)$ ne eksistira! Za $|x\,y| \geqq 2$ pa obstajata vedno dve (v primeru enakosti dvojna) realni vrednosti za $z^2 - (x + y)\,z$: $\frac{1}{2}(-x\,y + \sqrt{(x\,y)^2 - 4})$ in $\frac{1}{2}(-x\,y - \sqrt{(x\,y)^2 - 4})$, pri katerih je $f(x, y, z) = 0$. Prirejeni kvadratni enačbi za z

$$2\,z^2 - 2\,(x + y)\,z + \sqrt{(x\,y)^2 - 4} + x\,y = 0$$
$$2\,z^2 - 2\,(x + y)\,z - \sqrt{(x\,y)^2 - 4} + x\,y = 0$$

pa imata za $|x\,y| \geqq 2$ samo realne rešitve, saj sta njuni diskriminanti

$$D_1 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x\,y)^2 - 4} > 0$$
$$D_2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{(x\,y)^2 - 4} > (|x| - |y|)^2 \geqq 0$$

Za $|x\,y| > 2$ je funkcija $z(x, y)$ štirilična, za $|x\,y| = 2$ pa dvolična.

Proces tabeliranja funkcije $z(x, y)$ je obstal na meji $|x\,y| = 2$. Torej je vzdolž $|x\,y| = 2$ na ploskvi $z(x, y)$, $f_z' = 0$. To pa nam potrjuje tudi tale račun: Odvajajmo (3) na z! Z upoštevanjem že izračunane vrednosti za $z^2 - (x + y)\,z$ dobimo

$$f_z'(x, y, z) = \pm\sqrt{(x\,y)^2 - 4}\,(2\,z - x - y) \tag{4}$$

Torej je res: za $|x\,y| = 2$ je $f_z'(x, y, z) = 0$. Iz (4) pa še sledi: samo za $|x\,y| = 2$ je $f_z'(x, y, z) = 0$!

Z nadaljnjo analizo funkcije $z(x, y)$ po klasični poti lahko preverimo popolno skladje z rezultati, dobljenimi z numeričnimi postopki s pomočjo računalnika. Na dlani je, da so numerična pota, ki smo jih ubirali, taka, po katerih se v vsakem primeru dokopljemo do rešitev. V kolikor so rešitve enostavne, kot je bilo to v zgornjem primeru, pa nam pomagajo do preprostejših poti za diskusijo poteka implicitne funkcije.

LITERATURA

[1] F. Avsec, *Primer uporabe računalnika pri analizi neke implicitno podane funkcije,* Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 101—105.

[2] J. Plemelj, *Diferencialne in integralne enačbe,* SAZU, Ljubljana 1960.

[3] I. Vidav, *Višja matematika I,* DZS, Ljubljana 1985.

TEMPERATURNO RAZTEZANJE TRDNIN

JANEZ STRNAD

PACS 65.70+y

Prispevek obravnava preprosto pot do temperaturnega koeficienta linearnega raztezka v duhu »kvalitativne fizike« V. F. Weisskopfa.

THERMAL EXPANSION OF SOLIDS

In the contribution a simple way to the thermal expansion coefficient of solids is described in the spirit of V. F. Weisskopf's "qualitative physics".

V zadnjem času prevladuje misel, da kaže atome vključiti v poučevanje fizike že od vsega začetka [1]. Iz navade je prišlo, da so osnovni podatki o atomih zbrani na koncu srednješolske fizike ali uvodnega predavanja na univerzi v posebnem poglavju. Atomi so tako globoko prodrli v našo zavest, da ne kaže odlašati z njihovo vključitvijo v poučevanje. Pretiravati s tem sicer ne kaže, saj ima tudi makroskopski način opazovanja svoje prednosti. Pri pretakanju tekočin po ceveh je na primer bolje misliti na zvezno snov. Brez haska si je od vsega začetka predstavljati molekule. Koristno pa je potem, ko obvladamo makroskopski opis, ta opis dopolniti z molekulsko sliko, na primer tako, da pojasnimo viskoznost plina z lastnostmi molekul v preprostem približku kinetične teorije.

Podobno obravnavamo temperaturno raztezanje trdnin najprej makroskopsko in temperaturni koeficient linearnega raztezka

$$a = d\,l/l\,d\,T$$

za kak primer izmerimo. Pozneje pojasnimo pojav tako, da si predstavljamo nihajoče atome v kristalu. Storimo to nekoliko podrobneje, kot je navada v uvodnih učbenikih [2], [3].

V nizu atomov opazujmo dva sosednja atoma. Vzemimo, da deluje na vsakega od njiju sila, ki je sorazmerna z odmikom od srednje lege in kaže proti njej. Potencialna energija je v tem primeru $W_p = \frac{1}{2} K x^2$, če je K sorazmernostni koeficient med silo in odmikom x od srednje lege. Energijo atomov sestavljata kinetična in potencialna energija. Po ekviparticijskem izreku ustreza v povprečju vsaki od njiju energija $\frac{1}{2} k T$, če je k Boltzmannova konstanta in T absolutna temperatura. Povprečna energija atomov je tako $\langle W \rangle = k T$.

Pri skrajnem odmiku je hitrost in z njo kinetična energija enaka nič in velja ocena $k T = \frac{1}{2} K x^2$. Za skrajni odmik v eno in v drugo stran dobimo

$$x_{0-} = -(2k\,T/K)^{1/2} \qquad x_{0+} = (2k\,T/K)^{1/2} \tag{1}$$

Povprečna vrednost skrajnih odmikov $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x_0 + x_{0-})$ je enaka nič. Po tem sklepamo, da v uporabljenem modelu srednja razdalja med sosednjima atomoma ni odvisna od temperature.

Da bi dobili temperaturno odvisnost, moramo uporabiti boljši model. Tak model je hitro pri roki. Privlačna sila naj bo nekoliko večja, če je odmik manjši, in nekoliko manjša, če je odmik večji. Potencialna energija je tedaj nekoliko večja, če je odmik manjši, in nekoliko manjša, če je odmik večji. To približno opišemo z majhnim kubičnim dodatkom k potencialni energiji

$$W_p = \frac{1}{2} K x^2 - K' x^3$$

Zopet je pri skrajnem odmiku hitrost enaka nič, tako da velja ocena $k T = \frac{1}{2} K x^2 - K' x^3$. Kubični dodatek je tako majhen, da smemo v njem upoštevati odmika (1). Iz enačb

$$k T = \frac{1}{2} K x_{0-}^2 + K'(2k T/K)^{3/2} \qquad k T = \frac{1}{2} K x_{0+}^2 - K'(2k T/K)^{3/2}$$

dobimo

$$x_{0-} = -(2k T/K)^{1/2} + 2k K' T/K^2 \qquad x_{0+} = (2k T/K)^{1/2} + 2k K' T/K^2$$

Ker je kubični dodatek majhen, smo upoštevali približek $(1 \pm z)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} z$.

Povprečna vrednost je zdaj različna od nič in sorazmerna s temperaturo:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x_{0-} + x_{0+}) = 2k K' T/K^2$$

Po tem sklepamo, da je srednja razdalja med sosednjima atomoma tem večja, čim višja je temperatura. Če temperatura naraste za $d T$, se poveča srednja razdalja za $d\langle x \rangle = 2k K' d T/K^2$.

Vzemimo, da je povečanje srednje razdalje s srednjo razdaljo a med atomoma v enakem razmerju kot sprememba dolžine telesa z dolžino:

$$d \langle x \rangle / a = d l / l$$

Tedaj ocenimo temperaturni koeficient dolžinskega raztezka z

$$\alpha = 2k K'/K^2 a$$

Račun lahko izkoristimo le, če preprosto ocenimo konstanti K in K' iz izraza za potencialno energijo. Privzemimo, da postane potencialna energija enaka nič, ko doseže odmik srednjo razdaljo med atomoma: $0 = \frac{1}{2} K a^2 - K' a^3$. Tedaj atomi zagotovo niso več vezani med seboj. Tako pridemo na misel, da potencialno energijo v najnižjem približku izenačimo z vezavno energijo atoma v kristalu, to je na atom preračunano sublimacijsko energijo W_s; torej $\frac{1}{2} K a^2 = W_s$. Takoj sledita oceni

$$K = 2W_s/a^2 \qquad K' = W_s/a^3$$

in z njima ocena za temperaturni koeficient linearnega raztezka

$$\alpha = \frac{1}{2} k/W_s \tag{2}$$

Preglednica podaja dobljene ocene in izmerjene temperaturne koeficiente linearnega raztezka. Razmeroma dobro ujemanje kaže, da sta privzetka bolj upravičena, kakor se zdita na prvi pogled.

Snov	W_s	α izmerjen	α iz enačbe (2)
železo	4,3 eV	$1{,}0 \,.\, 10^{-5}\ K^{-1}$	$1{,}2 \,.\, 10^{-5}\ K^{-1}$
baker	3,5	1,2	1,6
aluminij	3,4	1,3	2,3
svinec	2,0	2,2	2,9

Misli in podatki so sposojeni pri V. F. Weisskopfu, ki si že nekaj časa prizadeva pojasniti snovne lastnosti čim preprosteje z lastnostmi atomov [4],

[5], [6]. V reviji *American Journal of Physics* ima stalno rubriko z naslovom *Iskanje preprostosti,* v kateri poroča o teh za pouk fizike pomembnih računih.* Dobljeni rezultati so samo približni — pogosto ne dajo kaj več kot velikostno stopnjo. Vendar nas navedejo na preprosto sliko iz atomskega sveta. Do njih se ne bi mogli dokopati, če ne bi poznali in dobro razumeli osnovnih zakonov. Zato je treba vzdevek »kvalitativna fizika« v tem primeru razumeti nekoliko drugače kot pri začetnem obravnavanju pojavov, ko še ne poznamo osnovnih zakonov in pogosto še nismo vpeljali potrebnih količin.

LITERATURA

[1] I. Kuščer, *Kaj se zadaj skriva?* Obzornik mat. fiz. **30** (1983) 13.
[2] R. Kladnik, *Visokošolska fizika,* DZS, Ljubljana 1985, str. 198.
[3] J. Strnad, *Fizika,* 1. del, DMFA, Ljubljana 1984, str. 272.
[4] W. F. Weisskopf, *Modern Physics from an Elementary Point of View,* CERN, Geneva 1969.
[5] W. F. Weisskopf, *Of Atoms, Mountains, and Stars,* Science **187** (1975) 605.
[6] W. F. Weisskopf, H. Bernstein, *Search for Simplicity: Thermal Expansion,* Am. J. Phys. **53** (1985) 1140.

* Naslovi dosedanjih prispevkov se glasijo: *Iskanje preprostosti* (velikost molekul iz površinske napetosti), *Kvantna mehanika in Paulijevo načelo* (prožnostni modul alkalijskih kovin), *Kvantna mehanika atomov, Atomi z več elektroni* (velikost atomov), *Molekulska vez, Kemijska energija* (sežigne toplote goriv), *Ponovno o velikosti molekul, Kohezijska energija trdnin, Kovinska vez, Temperaturno raztezanje* in *Maxwell, Rayleigh in Mt. Everest* (sipanje svetlobe in nebesna modrina).

NOVE KNJIGE

PALMAN D., Projektivna geometrija. Školska knjiga, Zagreb 1984, 343 str.

Ta obsežni učbenik projektivne geometrije je nastal na osnovi avtorjevih predavanj na zagrebški univerzi. — Prvo poglavje govori o osnovah trirazsežne projektivne geometrije. Navedbi in razlagi aksiomov sledi izpeljava številnih izrekov, med njimi znamenitega Desarguesovega. Seznanimo se med drugim s končnimi projektivnimi ravninami, slednjič pa pridemo do koordinatizacije projektivne premice in ravnine. Drugo poglavje obravnava analitično geometrijo realne projektivne ravnine in podrobno govori o projektivnih transformacijah premice in ravnine. Nanj se navezuje tretje poglavje, o stožernicah in njihovi klasifikaciji. Četrto poglavje, o linearni algebri, je priprava na peto poglavje, ki govori o n-razsežnem projektivnem prostoru. (Njegovi elementi so vpeljani kot podprostori $(n + 1)$-razsežnega vektorskega prostora nad poljubnim komutativnim obsegom.)

Pristop je najprej dlje časa čisto geometrijski, zatem algebraičen; le-ta se začne z analitično obravnavo realne projektivne ravnine, šele na koncu pa je popolnoma splošen. Tako je precejšen del knjige dostopen širšemu krogu bralcev, k čemur poleg razumljive in podrobne razlage pripomorejo številne slike in naloge. Knjiga bo zelo koristila študentom matematike in vsem, ki jih zanima geometrija, pa tudi matematikom, ki pri svojem delu potrebujejo znanje projektivne geometrije.

Janez Rakovec

DOMAČE VESTI

NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1986

Sklad Borisa Kidriča pri Raziskovalni skupnosti Slovenije je letos podelil 6 Kidričevih nagrad, 15 nagrad Sklada Borisa Kidriča, 1 nagrado za vrhunske dosežke na področju izumov in tehniških izboljšav ter 20 nagrad za izume in tehniške izboljšave. Med 166 nagrajenci je tudi 10 članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, ki so udeleženi pri sedmih nagradah. Imena članov društva so tiskana polkrepko.

Zbral in uredil *Ciril Velkovrh*

Kidričevo nagrado sta prejela:

1. Dr. Bosiljka Tadić in prof. dr. **Raša Pirc** za vrhunske dosežke na področju teorije faznih prehodov.

B. Tadić in R. Pirc sta uvedla moderne teoretske metode za študij fizikalnih sistemov v bližini faznih prehodov. Uporabila sta metode renormalizacijske grupe, ki so v minulih desetletjih omogočile bistven napredek pri razumevanju kritičnih pojavov. V zadnjih dveh letih sta v najuglednejših časopisih za fiziko objavila osem znanstvenih del, v katerih sta obravnavala kritične pojave v neurejenih kristalnih sistemih. V njih sta raziskala vpliv nečistoč in defektov na obnašanje magnetnih in feroelektričnih sistemov v bližini faznih prehodov. V dveh delih sta analizirala Isingov model z nečistočami pri mejni prostorski dimenziji. Avtorja sta dokazala, da pod določeno temperaturo v bližini faznega prehoda ta sistem ne kaže univerzalnega obnašanja in so kritični eksponenti odvisni od koncentracije nečistoč. To je pripeljalo do sklepa, da eksperimenti navadno ne podajajo neuniverzalnega obnašanja.

V treh delih sta obravnavala mikroskopske modele za fazne prehode s prostorsko koreliranimi slučajnimi polji, na primer polarnimi nečistočami. Pokazala sta, da ima sistem blizu prehoda kritične eksponente, značilne za neurejene sisteme, medtem ko se značilnosti čistih sistemov kažejo daleč od prehoda. Njuna dela so bistven prispevek k teoriji neurejenih sistemov. Omogočajo boljše razumevanje meritev in dajejo novo usmeritev eksperimentalnemu delu. Odlikujejo se po izrednem obvladanju modernih metod statistične mehanike in se odmevno vključujejo v eno najpomembnejših področij fizike trdne snovi.

Nagrade Sklada Borisa Kidriča so prejeli:

1. Dr. Boris Navinšek, Anton Žabkar, dipl. ing. in **Peter Panjan,** dipl. ing. za raziskovalne dosežke s področja interakcij ionov in plazme s površinami trdnih snovi.

V zadnjih dveh letih so objavili 13 člankov v mednarodnih revijah in v njih zaokrožili večletne raziskave površinskih procesov pri interakciji ionov Ar^+ in He^+ z energijo do 20 keV na tehnološko pomembnih materialih, na primer inkonelih, nerjavečih jeklih in grafitih. Izkušnje tega dela so bile podlaga za razvoj in izdelavo prvega mednarodnega standarda za analizo površin v obliki večplastne strukture Ni/Cr.

2. Prof. dr. **Janez Strnad** za raziskave v fizikalni didaktiki.

V zadnjih dveh letih je objavil 12 člankov, večidel v znanih mednarodnih revijah s področja fizikalne didaktike in zgodovine fizike, s poudarkom na

pouku kvantne mehanike in kvantne elektrodinamike. Za nove pedagoške rešitve je našel v fiziki znanstveno podlago. Uspelo mu je kritično združiti zgodovinski razvoj in moderna pojmovanja in dvigniti iskanja v didaktiki na raven raziskovalnega dela.

3. Prof. dr. Ivan Bratko, mag. **Nada Lavrač**, mag. Igor Mozetič, mag. Bojan Čerček, dr. Anton Grad, prof. dr. Matija Horvat in dr. Primož Rode za sintezo znanja s kvalitativnim modeliranjem.

Uvedli so metodo za avtomatsko sintezo baz znanja na osnovi kvalitativnega modeliranja realnih fizioloških procesov. Pri tem so si pomagali s simboličnimi opisi kvalitativnih pojavov in njihovih vzročnih povezav, ki so jih doslej uporabljali zgolj za šolske probleme. S tem so razširili vrsto metodoloških pristopov na realne probleme in dokazali, da je mogoče uporabiti metode kvalitativnega modeliranja za uspešno orodje za avtomatsko sintezo baz ekspertnega znanja.

Nagrade za izume in tehniške izboljšave so prejeli:

1. Vital Eržen, prof. dr. **Janez Stepišnik**, **Damir Zajc**, dipl. ing. in doc. dr. **Andrijan Levstik** za tehniško izboljšavo *Ultrazvočni defektoskop.*

Izboljšave omogočajo zanesljivejše delovanje ultrazvočnega defektoskopa, ki ga uporabljajo za ugotavljanje notranjih in površinskih napak kovinskih in nekovinskih izdelkov, in enostavnejši pristop do elektronskih podsklopov ter zaščito pred mehanskimi poškodbami.

2. Stojan Trošt, dipl. ing., mag. **Boris Vedlin**, Marko Kažič, dipl. ing., **Jurij Nahtigal**, dipl. ing. in mag. Jože Žakelj za izum *Okulistični Nd — YAG sunkovni laser.*

Izum je uspešen prispevek k uvajanju laserjev v medicino. Najpomembnejši dosežek je originalna rešitev laserskega resonatorja in delno konstrukcija napajalnika.

3. Dr. Rudolf Murn, mag. Borut Kastelic, Dušan Pečko, dipl. ing., Davor Miljan, dipl. ing., prof. dr. **Jože Pahor** in Tomaž Lunder, dipl. ing. za tehnično izboljšavo *Sistem računalniško vodenih radiometričnih vrat — RV 3.*

Sistem so uspešno vključili v delovni proces Rudnika urana Žirovski vrh in ga uporabili za evidenco količine in kakovosti izkopane rude in za končno ločevanje rude od jalovine. Z njim so izboljšali delovne razmere in zmanjšali onesnaževanje okolja.

OBVESTILO NAROČNIKOM

V teh dneh smo poslali opomine vsem naročnikom, ki še niso poravnali naročnine za Obzornik za matematiko in fiziko. Poleg položnice v prvi dvojni številki Obzornika ter splošnega opozorila v tretji je to zadnji letošnji opomin. Vljudno vas prosimo, da znesek nakažete vsaj do občnega zbora, 24. 10. 1986. Preden bomo razposlali prvo številko, ki naj bi izšla že v začetku januarja 1986, bomo naslove vseh dolžnikov v računalniškem spominu črtali. Želimo, da ostanete tudi v prihodnje naš naročnik in z rednimi vplačili naročnine omogočite izhajanje in manjši primanjkljaj Obzornika za matematiko in fiziko.

Ciril Velkovrh, Janez Strnad

DELO KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1985

Pri Komisiji za tisk DMFA SRS smo v letu 1985 nadaljevali prizadevanja iz leta 1984 in prejšnjih let. Redno delo in redno izhajanje publikacij se je močno obrestovalo pri periodičnem tisku (Preseku, Obzorniku za matematiko in fiziko ter Sigmi), pri prizadevanjih za subvencije in pri končnem finančnem obračunu. Hude težave nam še vedno povzročajo nizke naklade velike večine izdaj in prilagajanje maloprodajnih cen kupni moči mladine, ki skoraj edina kupuje naše publikacije.

Obzornik za matematiko in fiziko je po začetnih težavah zaradi pomanjkanja rokopisov izšel v celoti že pred koncem koledarskega leta. Poleg člankov iz matematike in fizike, domačih vesti, recenzij in obvestil o novih knjigah je prinesel zapise predavanj s seminarja *O osnovnih delcih* za učitelje fizike. Nekoliko povečana redna subvencija RSS in ISS ter pomoč strokovnih ustanov (IMFM, IJS, DZS, Oddelek za matematiko in mehaniko, Oddelek za fiziko, ZŠ, DDU, TZ in Iskra) ob organizaciji 16. mednarodne fizikalne olimpiade, fizikalnega seminarja ter posvetovanja o fizikalnih učbenikih ob 40. obletnici Državne založbe Slovenije je prispevala k ugodnemu finančnemu položaju. Dohodke za revije, ki jih prejemamo v zameno, in 215.875.— din še ne nakazane naročnine smo uporabili za plačilo obeh dvojnih številk, ki sta izšli na začetku letošnjega leta.

Tudi Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome ter računalnikarje je koledarsko leto uspešno zaključil. Dosegli smo, da skupnosti obravnavajo Presek enakopravno z drugimi mladinskimi časopisi. RSS in ISS sta mu nakazali potrebno subvencijo. Ob povečani naročnini in hudi inflaciji je sicer število naročnikov padlo za več kot 3000, preostali pa so do konca leta nakazali sorazmerno velik del naročnine. Tako smo ob sodelovanju IJS lahko izdali tudi 5. številko, za katero je Janez Strnad pripravil daljši zapis o življenju in delu največjega slovenskega fizika Jožefa Stefana ob stopetdesetletnici njegovega rojstva. K ugodnemu finančnemu zaključku so prispevali tudi v Presekovi knjižnici izdani štirje priročniki s področja računalništva, namenjeni mladim uporabnikom hišnih mikroračunalnikov. Odslej bo Presek skušal izhajati redno s po tremi številkami v vsakem polletju.

V Knjižnici Sigma sta izšli dve redni deli in štirje ponatisi, od katerih je enega po daljšem času izdala DZS. S 30 % prodajo zaloge v enem letu in z izdajo zanimivih naslovov knjige veliko pomagajo pri popularizaciji matematike in fizike med srednješolsko mladino. Učitelji naših strok dobivajo v zadnjih letih po eno knjigo iz te zbirke v zahvalo za posredovanje Preseka in brošur iz Presekove knjižnice. V prihodnje si želimo še novih dobrih prevodov in originalnih del v zbirki Sigma.

Učbenike v Zbirki izbranih poglavij iz matematike, fizike in računalništva lahko izdajamo le še zato, ker tudi pri stari zalogi vsako leto prilagajamo prodajno ceno realni vrednosti. To je bolj pravično do kupcev v prvem letu izida knjige, ko ji ne določimo previsoke prodajne cene, in do kupcev v zadnjem letu prodaje stare zaloge, ko ne dobivajo skript skoraj zastonj.

Najteže pa je bilo v minulih letih izdajati knjige v zbirki Matematika-Fizika. Zbirko smo pričeli izdajati pri Mladinski knjigi, kasneje smo jo izdajali nekaj let pri Državni založbi Slovenije, v zadnjih letih pa smo bili prepu-

ščeni sami sebi. Manjše število interesentov, velik obseg posameznih knjig, visoka cena in nezanimanje profesionalnih založb je bilo do pred kratkim skoraj nerešljiv problem. Po nekaj letih životarjenja smo ob izdaji štirih knjig iz računalništva v Presekovi knjižnici ob sodelovanju z Zvezo organizacij za tehnično kulturo Slovenije (ZOTKS) pridobili novega založnika. Poleg teh knjig smo skupaj z ZOTKS izdali še šest ponatisov.

Pri vseh knjižnih izdajah in pri periodičnem tisku smo se trudili za primerne avtorske honorarje, tako da smo imeli v lanskem letu celo višje kot pri založbah.

Prodaja knjig z 20 % popustom za člane društva, študente in naročnike Preseka je tekla po ustaljenih tirih. V letu dni smo prodali

v **zbirkah**	**število knjig**	v **vrednosti**
Obzornik za matematiko in fiziko	1.500	1,045.449
Presek	17.500	5,211.085
Presekova knjižnica	3.394	4,350.186
Značke	21.520	860.800
Vegova priznanja in drugo	10.630	866.428
Razne knjige drugih založb	3.045	831.994
Štirimestni logaritmi in druge tabele	13.066	2,767.760
Knjižnica Sigma	3.182	972.374
Matematični rokopisi	855	197.480
Izbrana poglavja iz matematike in računalništva	2.313	1,669.920
Zbirka izbranih poglavij iz mehanike	85	68.000
Zbirka izbranih poglavij iz fizike	636	194.900
Postdiplomski seminar iz matematike	62	16.720
Matematika-Fizika	1.769	2,087.008
Skupaj	79.557	21,140.104

Dolžniki iz leta 1985 so skoraj vse svoje obveznosti v višini 244.617.— din poravnali v letošnjem januarju. V kartoteki smo zabeležili manjše število odpovedi in naslednjih 30 novih članov:

1392. Borštnar Vera
1393. Ban Anica
1394. Cedilnik Branko
1395. Cvetkovič Alenka
1396. Čop Bogomila
1397. Godina Magda
1398. Grohar Alojz, Emilija
1399. Frece Vinko, Zdenka
1400. Golob Zlatka
1401. Grohar Marija
1402. Hudeček Boris
1403. Janežič Rina
1404. Jošt Dragica
1405. Kocijančič Slavko
1406. Kosec Darinka
1407. Krauthaker Marija
1408. Lebez Maja
1409. Lipovšek Boris, Cvetka
1410. Malačič Vlado
1411. Marolt Majda
1412. Mihocek Bojana
1413. Podvršič Borut
1414. Poklar Branko
1415. Prašnikar Janja
1416. Prelec Branko
1417. Prinčič Alica
1418. Prpar Lojzka
1419. Rupnik Metka
1420. Toni Boža
1421. Trplan Franc

Podajamo podrobni finančni obračun za leto 1985:

	Dohodki	Izdatki	Saldo
Obzornik mat. fiz.	2,863.137	2,863.137	
Poslovni sklad	668.014	40.688	627.326
Presek	9,194.009	9,194.009	
Presekova knjižnica	1,325.363	1,409.755	— 84.392
Vega	5,050.054	4,343.498	706.556
Sigma	2,269.096	2,559.598	— 290.052
Mat. rokopisi	172.795	122.061	50.734
IP mat. rač.	2,512.914	1,770.617	742.297
ZIP Mehanika	59.500	272.516	— 213.016
ZIP Fizika	693.058	644.341	48.717
Postdipl. sem. mat.	—	95.460	— 95.460
IMFM	779.776	603.190	176.586
Matematika	2,566.920	708.125	1,858.795
Fizika	990.767	197.580	793.187
Zbirka vaj AAA I.	486.240	486.240	
DMFA občni zbor	30.860	30.860	
Seminar v Dubrovniku	345.000	379.500	— 34.500
Olimpiada	7,861.616	7,549.322	312.294
Prodaja knjig	15,129.205	13,279.209	1,849.996
Režija	5,207.978	3,943.353	1,264.625
Skupaj	58,206.302	50,493.059	7,713.243

Obzornik za matematiko in fiziko 32 (1985) številke 1—6

Dohodki skupaj	2,863.137	Izdatki skupaj	2,863.137
Subvencije: RSS	683.282	Tisk	1,887.700
ISS	500.000	Av. honorarji	720.852
Razne	82.688	Članarina 1984	30.000
DZS	80.000	10 % režija	224.585
IMFM	70.000		
VTO Mat.	60.000		
Naročnina	1,045.290		
Kotizacija	52.896		
ZŠ	50.000		
VTO Fiz.	48.981		
Iskra	30.000		
Oglasi: DZS, IJŠ, TZ	160.000	Saldo 31. 12. 1985	0

Presek 12 (1984/85) 3, 4, 5, 6; 13 (1985/86) 1, 2, 5

Dohodki skupaj	9,194.009	Izdatki skupaj	9,194.009
Subvencije: RSS	2,417.613	Tisk	6,256.922
ISS	1,153.000	Av. honorarji	1,631.401
Druge	185.084	Režija	886.006
Oglasi	227.000	Rabat	419.680
Naročnine	5,211.312	Saldo 31. 12. 1985	0

Režija

Dohodki skupaj	5,207.978	Izdatki skupaj	3,943.353
Saldo 1984	358.777	OD — refundacija	1,335.227
Izdajanje knjig	949.083	Av. honorarji — refundacija	1,126.500
Prodaja knjig	1,402.943	PTT za P in OMF	288.441
Presek	888.006	SDK provizija	57.662
Obzornik mat. fiz.	224.585	Mat. str. pisarne	575.155
Drugi dohodki	1,384.584	Drugi izdatki	560.368
		Saldo 31. 12. 1985	+ 1,264.625

Edvard Kramar, Janez Markelj, Janez Strnad, Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

LEINDLER L., Strong approximation by Fourier series. Akademiai Kiado, Budapest 1985, 210 str.

Monografija je posvečena teoriji aproksimacij periodičnih funkcij s periodo 2π z delnimi vsotami njene Fourierove vrste ali z delnimi vsotami vrst po Cezarovi, de la Vallee Poussinovi in drugih metodah seštevanja vrst. Funkciji f priredimo njeno Fourierovo vrsto $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x) + \frac{1}{2} a_0$, $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\,x\, d\,x/2\pi$, $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\,x\, d\,x/2\pi$. Označimo z $s_n(x)$ n-to delno vsoto zgornje vrste in s $\sigma_n(x)$ njihovo aritmetično sredino $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s_k(x)/(n+1)$. V knjigi je največji del pozornosti posvečen vedenju količine $h_n(f, \beta, p, x) = \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta-1} |f(x) - s_k(x)|^p/(n+1)^\beta \right)^{1/p}$ kjer sta β in p poljubni pozitivni števili. Količina $h_n(f)$ je neko merilo za hitrost konvergence delnih vsot Fourierove vrste po neki metodi seštevanja proti funkciji f.

Prvo poglavje obravnava tale problem: Če vemo, da je funkcija f nekajkrat zvezno odvedljiva ali drugače gladka, kaj moremo potem povedati o velikosti količine $h_n(f)$? Tipičen izrek je npr.: če je f r-krat zvezno odvedljiva, potem velja $h_n(f, \beta, p, x) \leqq M \,.\, n^{-r-1}$, če je le $\beta > (r+1)\,p$.

Drugo poglavje študira nasproten problem. Kaj se da sklepati o gladkosti funkcije f, če vemo npr., kako hitro konvergira proti 0 količina $h_n(f)$?

Tretje poglavje obravnava relacije med posameznimi razredi funkcij, četrto pa dodaja nekaj izrekov o aproksimaciji, ki ne sodijo v okvir prvih treh poglavij.

Knjiga je namenjena specialistom s področja teorije aproksimacij funkcij s Fourierovimi vrstami. Če jo merimo z merili za take vrste monografij, moramo reči, da je napisana pregledno in skrbno.

Anton Suhadolc

SANDERS J. A., VERHULST F., Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems; Applied Mathematical Sciences 59; Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985, X + 247 strani.

Knjigo nizozemskih matematikov J. A. Sandersa in F. Verhulsta *Metode povprečenja za nelinearne dinamične sisteme* sestavlja sedem poglavij in nekaj dodatkov. Poskusimo posloveniti naslove poglavij: 1. *Osnovna snov*, 2. *Asimptotika počasnih procesov, prvi koraki*, 3. *Teorija povprečenja*, 4. *Privlak*, 5. *Povprečenje po prostorskih spremenljivkah. Sistemi s počasi se spreminjajočo frekvenco in prehod čez resonanco*, 6. *Normalne oblike*, 7. *Hamiltonovi sistemi.*

Knjiga se zelo lepo bere, ne zahteva pretiranega predznanja, dostopna bo študentu matematike in fizike pa tudi kakemu bolj razgledanemu tehniku, obravnavana snov je na vso moč uporabna. Zato je morda le prav, da bralcu Obzornika vsaj nakažemo, za kaj gre.

Mehanika je kaj kmalu, že v klasičnih svojih stoletjih, spoznala, da se ne dá vsakega problema »rešiti« z natančno analitično formulo. Obravnavo takega problema je morala nasloniti na kak drug, dostopnejši problem, ki je bil prvotnemu v tem ali v onem pomenu besede blizu. Pod to streho sodijo tudi asimptotične metode, ki jim je posvečena knjiga Sandersa in Verhulsta. Metoda povprečenja in njena teorija izhajata iz sovjetske šole mehanikov. Leta 1934 je v Kijevu izšel *Uvod v nelinearno mehaniko* M. M. Krilova in M. M. Bogoljubova (M. M. je zaradi ukrajinščine, v ruskem in v angleškem prevodu je prvič N. M., drugič N. N.), leta 1954 prva, leta 1958 pa druga izdaja obširnejše monografije N. N. Bogoljubova in J. A. Mitropoljskega *Asimptotične metode v teoriji nelinearnih nihanj.*

Nalogo si oglejmo le v skopih in površnih obrisih. V n-razsežnem prostoru leži območje D, nad D je definirano vektorsko polje, ki se spreminja s časom

$$f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n \qquad f : (t, x) \mapsto f(t, x) \tag{1}$$

Preslikava (1) naj bo zvezna. Za vsak $T > 0$ obstaja tedaj povprečje

$$f_T(x) = T^{-1} \int_0^T f(t, x)\, dt \tag{2}$$

Povprašajmo po limiti

$$f^0(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x) \tag{3}$$

Brž ko limita (3) obstoja, pravijo (v angleščini, pri nas je tako izražanje manj v navadi), da je polje (1) KBM (po onih treh). Polju KBM smo priredili povprečje (3), povprečili smo ga.

Preprosteje ravnamo, če je polje (1) periodično odvisno od časa. Tedaj izberemo za povprečje kar $f_T(x)$, kjer je T osnovna perioda polja.

Vprašajmo po smernici polja (1), ki gre v začetnem trenutku skozi izbrano točko $x_0 \in D$. Smernica je krivulja (slika vektorske funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \to x(t)$), ki se v vsakem hipu v vsaki točki dotika polja. Analitično: vektor na tangenti, $\dot{x}(t)$ (odvod vektorske funkcije) je sorazmeren polju f

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) \qquad x(0) = x_0 \tag{4}$$

Z drugimi besedami: rešili bi radi nalogo, ki jo sestavljata (vektorska) navadna diferencialna enačba in začetni pogoj. Pozitivnemu faktorju na desni

strani enačbe pravimo mali parameter. Mali parameter pač zato, ker bomo z metodo, ki nas čaka, o rešitvi naloge zvedeli tem več, čim manjši bo ε.

Polje (3) naj bo KBM, tedaj enačbo (4) povprečimo, priredimo ji avtonomno enačbo (enačbo z desno stranjo, ki je neodvisna od časa)

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) \qquad y(0) = x_0 \tag{5}$$

Teorija mora povedati, kako vsaksebi sta si rešitvi obeh nalog. Obe rešitvi, x in y, sta razen od t odvisni še od malega parametra ε, ta bo dobil besedo tudi v odgovoru na zastavljeno vprašanje. Z δ označimo funkcijo $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$, ki gre proti 0, ko gre tja ε. Izrek je tedaj zgrajen takole:

Po časovni lestvici $\delta_1^{-1}(\varepsilon)$ je

$$y - x = O(\delta_2(\varepsilon)) \tag{6}$$

V vsakem posamičnem primeru (ko polju f naloži še kake pogoje) izračuna ali vsaj oceni funkciji δ_1 in δ_2. Pomeni pa vse skupaj tole: Kakorkoli že izberemo pozitivno konstanto L, najdemo pozitivno konstanto K, da

$$0 < t < L\,\delta_1^{-1}(\varepsilon) \Rightarrow \|y(t) - x(t)\| < K\,\delta_2(\varepsilon) \tag{7}$$

To je značilen zgled za asimptotično aproksimacijo. Naloga aproksimacijske teorije pa ni samo računska, najti približek in oceniti napako. Teorija je nekaj vredna šele takrat, ko nam pomaga razumeti dogajanje. Enačbi (4) pravimo tudi dinamični sistem, enačbi (5) pa avtonomni dinamični sistem. Dinamični sistemi imajo bogato teorijo, njena naloga je za vsak sistem narisati množico vseh rešitev — fazni portret — in se razgledati po njeni topološki zgradbi. V avtonomnem primeru je taka naloga lažja kot v splošnem. Posebno privlačni so v tej teoriji atraktorji. Predstavljajmo si slike rešitev kot reke, tedaj so atraktorji (privlačne množice) reke, v katere se poskušajo zliti vse druge. Vsak atraktor ima v faznem prostoru svoje porečje. Klasična ravninska zgleda sta točka mirovanja in limitni cikel.

Asimptotična ocena s povprečenjem pomaga do takih kvalitativnih sklepov o vedenju sistema. O tem nam zgovorno pričajo naslovi poglavij.

Kako metoda deluje, si oglejmo ob preprostem zgledu. Vzemimo moteni (perturbirani) harmonični oscilator

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x) \tag{8}$$

Enačbi (8) priredimo dinamični sistem na ravnini, tako pač, da uvedemo fazni spremenljivki x in $y = \dot{x}$

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -x + \varepsilon f(x) \tag{9}$$

Motnja je sorazmerna malemu parametru ε. Ko je $\varepsilon = 0$, je oscilator nemoten, sistem je linearen in znamo ga rešiti

$$x = r\cos(t + \psi) \qquad y = -r\sin(t + \psi) \tag{10}$$

Amplituda r in fazni premik ψ sta konstantna. Brž ko je $\varepsilon \neq 0$, pa naj bo še tako majhen, je oscilator moten, sistem (9) pa nelinearen (če le ni f linearna funkcija). Tudi rešitev motenega sistema (9) poiščimo z nastavkom (10), le da sta sedaj amplituda r in premik ψ funkciji časa. (10) zadosti (9), brž ko r in ψ rešita sistem

$$\dot{r} = -\varepsilon f(r \cos(t + \psi)) \sin(t + \psi)$$
$$\dot{\psi} = -\varepsilon r^{-1} f(r \cos(t + \psi)) \cos(t + \psi) \tag{11}$$

Desni strani sta odvisni od krajevnih spremenljivk r, ψ in od časa t. Obe sta periodični funkciji časa s periodo 2π. Zato ju povprečimo le po intervalu z dolžino 2π. Spremenljivki v povprečenem sistemu označimo z velikima črkama

$$\dot{R} = 0 \qquad \dot{\Psi} = \varepsilon F(R, \Psi)$$

Oscilator z majhno motnjo »v prvem približku« niha s konstantno amplitudo, motnja prizadene le fazo, ta ni več linearna funkcija časa in še postane odvisna od amplitude. Tako smo tudi po tej, približni metodi odkrili pojav, ki je tako značilen za nelinearna nihanja.

V knjigi je še veliko takih zgledov iz mehanike in iz ekologije. Zgledi so izbrani z okusom, med njimi ne bomo našli strašno dolgih računov, ki so običajni v člankih s tega področja, računanje nikjer ne preglasi vsebine. Knjiga upošteva, kar se je zanimivega zgodilo v teoriji in v uporabi, odkar je izšla monografija Bogoljubova in Mitropoljskega.

Povzemimo: Knjiga Sandersa in Verhulsta je lep, sodoben, potreben in dostopen učbenik za ta del nelinearne mehanike.

France Križanič

Representations of Lie Groups and Lie algebras. Edited by A. A. Kirillov. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985, 226 str.

Leta 1971 se je v Budimpešti zbrala letna šola, posvečena teoriji upodobitev. Delovala je v dveh sekcijah: A (advanced) in B (beginners). Prispevke prve sekcije je uredil I. M. Gelfand, izšli so leta 1975 (glej OMF **23**, str. 186).

Predavanja za drugo sekcijo so zbrana v obravnavani knjigi. Uredil jih je A. A. Kirillov. Črko B bi morali posloveniti z Z (za začetnike z veliko začetnico), zakaj lahkega branja si ne smemo obetati. Sestavlja jo sedem prispevkov: A. A. Kirillov, *Uvod v teorijo upodobitev končnih in kompaktnih grup*; B. L. Feigin in A. V. Zelevinskij, *Upodobitve kontragredientnih Liejevih algebr in Kac-MacDonaldova indentiteta*; D. P. Želobenko, *O Gelfand-Cetlinovih bazah za klasične Liejeve algebre*; S. Tanaka, *Upodobitve* $SL(2, \mathbf{F}_q)$; I. M. Gelfand, M. I. Grajev, A. M. Veršik, *Modeli upodobitev tokovnih grup*; G. I. Olšanskij, *Unitarne upodobitve neskončnih simetričnih grup, pristop čez semigrupe*; G. W. Mackey, *O uporabi induciranih upodobitev v kvantni mehaniki.*

Ni, da bi v OMF vsa poglavja podrobno razčlenjevali. Povejmo le kako bolj površno zanimivost ali pojasnilo. A. A. Kirillov je izčrpni uvod strnil na vsega 16 strani. Drugi prispevek se je od predavanja do knjige temeljito spremenil, nov je naslov (prej: Končno razsežne upodobitve polenostavnih Liejevih algeber), nova sta avtorja (prej: J. N. Bernstein in S. I. Gelfand). Ostala je le metoda (naslonitev na Vargove module), ki se je pač od šole do knjige razmahnila tako, da zmore več. Ime tokovne grupe (current groups) je sposojeno pri fizikih, pomeni pa Liejevo grupo, ki jo sestavljajo funkcije (preslikave) iz mnogoterosti v Liejevo grupo.

Knjiga nam lepo pokaže, kako matematika prekipeva od mladosti in kako z novostmi niti začetnikom ne prizanaša.

France Križanič

HALMOS, P. R., I want to be a mathematician, An automathography, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985. XVI + 422 strani.

Halmosa smo brali, odkar smo se začeli ozirati po matematiki, bil je sinonim zdaj za teorijo mere, zdaj za KRVP (končno razsežne vektorske prostore), kasneje spet za Hilbertov prostor. In ko smo že znali pisati, smo še vedno poslušali njegove modre nasvete, kako je treba pisati matematiko. In tudi za halmos vemo, marsikak naš dijak ga je že videl, to je tisti kvadratek, ki pove, da je dokaza konec: □.

Zdaj je pred nami nov Halmos, knjiga o življenju in delu Paula R. Halmosa, kakor ga je sam doživel in videl. Naslov zgovorno nasprotuje Wienerjevemu: »I am a mathematician«. Z njim, se mi zdi, je hotel poudariti, da ni padel kar z morjá na ples, v matematiko sta ga vodila trdo delo in vztrajno hotenje. Notranje vodilo pa nam izpove že s prvim stavkom:

> Besede imam raje kot števila, vedno sem jih imel. str. 3

Kar je povedal, podpre z zgledom:

> ... v matematiki mi je pojmovno bolj všeč kot računsko. Zame je definicija grupe jasnejša, pomembnejša in lepša kot Cauchyjeva integralska formula. Ni lepo primerjati pojem z dejstvom? Tudi prav: da se dá enkrat odvedljiva kompleksna funkcija odvajati poljubno mnogokrat, za moj okus po lepoti in globini daleč prekaša znamenito Campbell-Baker-Hausdorffovo formulo za nekomutativno eksponentno preslikavo. str. 3

In še enkrat pojasni:

> Začetni stavek pove tudi, da matematiko rad razumevam, jo pojasnjujem sebi in svetu, celo raje kot jo odkrivam. str. 3

To pojasnilo nas za hip začudi, saj je P. R. Halmos vendarle znamenit ustvarjalec, ljubitelj težkih problemov. A tu in še marsikje kaže, da je na vse strani odprt, včasih mu postane celo matematika pretesna:

> S šoferjem avtobusa imava veliko skupnega, če sva oba, ko nama je bilo dvanajst let, slišala za Falstaffa, in ni razloga, da bi ne imela. Glasba in poezija sta pomembnejši od vplinjača in odvoda, saj bova voznik in jaz boljša človeka, če naju bo družilo več stvari, ki nama bodo pomagale živeti bolje v bolj zdravem svetu. str. 30

Pot spominov začenja Halmos v Budimpešti, kjer je kovance podstavljal tramvaju pod kolesa[1] in končal kak razred gimnazije. Tu je priložnost, da ameriškemu bralcu razloži, kaj je to gimnazija, od tega, da se G v Gymnasium izgovarja tako kot v Give, do »mature«.

Trinajstleten je prejadral lužo in od tod dalje se lahko evropski bralec seznanja z ameriškim usmerjenim izobraževanjem tridesetih let. Mi pa lahko njihovo, stohastično UI, primerjamo s svojim, determinističnim. Naj bo tako ali drugače, leta so tekla, izbiral je predmete, dokler mu ni nekega dne pro-

---

[1] Ko smo mi hodili v šolo, je tudi pri nas še vozil tramvaj (pa smo vseeno ...). Podenj nismo polagali novcev, 25 par je pomenilo žemljo ali Mirim-čokolado. Pač pa se je v žepu našel kak žebelj, veselje ga je bilo pogledati, ko je šel tramvaj čezenj, tako lepo se je sploščil in zasvetil, le pobrati ga nismo smeli takoj, prevroč je bil.

fesor filozofije očetovsko namignil: »Well, Halmos, poglejva resnici v oči, človeštvo pozna še druge dejavnosti razen intelektualnih.« Po tem je bila odločitev lahka, pot je vodila le še v matematiko.

Tako se odpre Halmosev lastnoročni matematikopis in se razpre v tri dele: *Študent. Učenjak. Senior.* Nekaj zanimivih izdelkov:

Iz prvega dela: Učim se študirati, Učim se misliti, Inštitut (mišljen je tisti v Princetonu).

Iz drugega dela: Velika univerza (Chicago), Montevideo, Pravljična petdeseta.

Iz tretjega dela: Kako učiti, V Sydney, v Moskvo in nazaj, Kako početi skoraj vse.

Knjiga spremlja velik del povojnega razvoja matematike v ZDA. Halmos se nam predstavi v vseh vlogah, ki lahko doletijo matematika, predava, vodi doktorska dela, piše ocene in prikaze knjig in razprav, ureja znanstvene revije in knjižne zbirke, sodeluje pri vodenju AMS (American Mathematical Society) in pri organizaciji mednarodnih srečanj (le za kongres v Edinburghu ni dobil potnega lista, ker je bil tisto leto v zameri). Iz bogatih izkušenj, ki jih razdaja, iztrgajmo drobec o knjigah in o razpravah:

> Mislim, da utegne biti, s prav redkimi izjemami, celo najslabša matematična knjiga zadosti korektna, dovolj dobro sestavljena in napisana, da vas njeno branje obogati. Članki so pogosto napačni in še pogosteje tako slabo napisani, da imate z njihovim branjem več dela kot koristi. Morajo biti — ne razumite me napak — nikogar ne nagovarjam, naj preneha objavljati tekoče raziskovalne prispevke in se vrne v čase, ko je »objaviti« pomenilo »objaviti knjigo«. Ne, članki so absolutno potrebni, toda knjige so boljše. str. 234

In, ko smo že vzeli matematično knjigo v roke, kako naj jo beremo?

> Jezika ne spoznavamo tako kot kako matematično poglavje, prvič nam gre za pridobivanje navad, drugič za razumevanje zgradbe... Jezika se učimo iz vadnice, skoznjo gremo po vrsti, od vaje do vaje... Kdor pa se želi poglobiti v teorijo grup, ne odpre knjige na prvi strani in ne predela zapored vseh nalog, dokler ne pride do zadnje strani. To bi ne bila kaj prida pot. Snov je v knjigi urejena tako, da teče linearno branje neoporečno, na to se lahko zanesemo, toda bralci smo ljudje, ločimo se eden od drugega in vsi skupaj od avtorja, vsak bo našel kaj težkega, kar je drugemu lahko. Svetujem vam, berite do definicije, ki vam je nova, in se ustavite, poskusite najti zglede in ne-zglede, postojte ob vsakem novem izreku, poskusite ga razumeti in sami dokazati, in še, kar je najpomembneje, če naletite na oviro ali na skrivnosten odstavek, preskočite ju. Pojdite naprej, spoprimite se z naslednjo nalogo, obrnite stran, lotite se prihodnjega poglavja ali pa kar odložite knjigo in posezite po drugi. Knjige so lahko linearno urejene, naš razum pa ni. str. 70

Zamolčali smo še eno, osnovno dejavnost Halmosa, ustvarjalno delo v matematiki. Poglavitne postaje njegovega ubadanja samo naštejmo (vsakih sedem let mora matematik spremeniti smer, pravi). Prvi korak ga je vodil v statistiko, potem pa so se zvrstile:

teorija mere,
ergodijska teorija,
teorija Hilbertovih prostorov,
algebrska logika,
operatorska teorija.

V vsakega od svojih svetov odpre okence, posveti mu drobcen esej, pove ga za pokušino. In za zgled, kako lepo pisati.

... jezik razlage se ne sme odmikati od splošno sprejete standardne angleščine, niti besedne igre, niti drugi poskusi humorja, še manj pa očitne vulgarnosti nimajo v njem kaj iskati. Zakaj? Zato, ker so nepomembne, ker rušijo, ker motijo jasen sprejem sporočila. Razlaga ne sme biti zanikrna ne po obliki ne po vsebini in, seveda, ne sme zavajati, biti mora dostojanstvena, brezhibna in jasna. Ob vseh teh smernicah pa naj teče v živem, razgovornem stilu, da bralca ne odbije, biti mora prijateljska in informativna. Naloga pisanja je sporočanje, stil pa je pripomoček sporočanja. Izbran mora biti tako, da branje olajša, da bo predmet razlage za bralca prav tako lahak, kot je za avtorja. str. 113

Matematik ne ustvarja osamljen, ob Halmosovi poti se kar gnetejo imena iz ameriške in sploh iz svetovne matematike (od naših sta omenjena Sibe Mardešić in Svetozar Kurepa). Pri marsikom zvemo, ne le s čim se ukvarja, ampak še, kakšne rasti in las je, kako rad ga srkne in koliko jih pokadi. Ob učenjakih so njihovi učenci, marsikako bodoče svetilo pa tudi slučajni sopotniki. Bila je med njimi, imenujmo jo, pravi Halmos, Wilhelmina. Rada bi zvedela, kaj je to vektor, Halmos pa je na predavanjih našteval le zglede, kaj vektor ni: Vektor ni n-terica števil, vektor ni usmerjena daljica, in še kaj. O vektorju je znal povedati le, da je to element vektorskega prostora. (»Vektorski prostor pa je, kar sem pravkar definiral.«) Wilhelmina ni bila zadovoljna, prebrala je, kaj pravi o vektorju Encyclopedia Britanica, in Halmosa zatožila dekanu. Dekan je bil uvideven mož in Halmos je smel »še naprej učiti svoje perverzne osebne poglede«.

Učiteljevanje ga vodi skozi Chicago, Michigan, Bloomington, gostovanja ga zanesejo še na druge univerze, doma in na tujem. Popotovanje in matematikovanje (touring and mathematicking) ga vodita po južni in severni Ameriki, po Avstraliji in po Aziji, po zahodni in po vzhodni Evropi. Za železno zaveso (ta izraz je Halmosu pri srcu) se Amerikanec giblje samozavestno in stereotipno (ni svobode — hotel ima ena sama vrata, ni postrežbe — vratar me sploh ne opazi), na koncu se Halmos nad stereotipom vendarle zamisli, a žal spet stereotipno. Matematikovanje v Moskvi sodi med najbolj živo napisane strani, saj se mu je tu smela ironija svobodno razigrati.

Polomili bi ga, če bi Halmosa ne pospremili v Oberwolfach, kjer se v črnjavi gozdov zbirajo matematiki ob stohastičnih prtičkih. H kosilom in k večerjam sedajo strogo slučajno, vsak mora k mizi, kjer ga čaka prtiček z njegovim imenom. Pred vsakim obrokom prtičke temeljito premešajo, da so omizja vsakokrat druga. Tako, pravi Halmos, se izognejo nevarnosti, da bi med matematiki nastajale klike.

Slučaj ne počiva ne ob prtičih ne ob rojstnih dnevih. Koliko mora biti zbranih ljudi, da bo verjetnost dogodka »dva v družbi hkrati praznujeta rojstni dan« enaka najmanj $\frac{1}{2}$? Odgovor je: vsaj 23. Halmos ob tej nalogi (str. 103) pokaže premoč analize nad računstvom. Analitična pot terja premislek, a je krajša od slepega računanja. Na to nalogo se je Halmos spomnil, ko je pisal o H. Samelsonu. Kakšen slučaj, pravi, naloga za astrologe! Rojena sta bila istega dne in še več: na isti dan v letu kot Georg Cantor in Emil Artin.[2]

Od rojstnega dneva do rojstnega dne tečejo Halmosu leta, vsa posvečena matematiki, vsa polna sprememb:

---

[2] In jaz. S pripombama pod črto je izčrpana vsa analogija med menoj in matematiki.

Matematika je enotna, vsi njeni deli se prepletajo med seboj in vplivajo eden na drugega. Vse, kar se naučimo, spremeni vse, kar že znamo, in nam pomaga, da se kasneje naučimo še več. str. 71

Matematika, naj bo še tako poduhovljena, potrebuje tla pod nogami, materialno bazo, knjige in revije:

Knjižnica je matematikov laboratorij. Učitelj in njegovi učenci, raziskovalec in njegovi sodelavci, morajo imeti tako dobro matematično knjižnico, kolikor le univerza zmore, in do nje ne sme biti več kot nekaj korakov. str. 355

Matematika ima svoje organizacijske oblike, na primer oddelke (departmente) na univerzah, te je treba voditi, upravljati. Zanimivi obliki vodenja se je Halmos kmalu po vojni čudil v Montevideu, tam je fakulteto upravljal troedini svet, en del so volili učitelji, enega uporabniki in tretjega študenti. Na Havajih pa se je sam poskusil v vlogi predstojnika. Njegovemu prihodu je bo- troval zanimiv pripetljaj. Pomanjkanje učiteljev in obilje tehnike sta prejšnjega predstojnika navdahnila, da je dal predavanja posneti, naj si jih študentje predvajajo po televiziji kolikor hočejo in kadar hočejo. Študentje pa so kmalu dvignili hrup in zahtevali živ stik z živim učiteljem. Zato so pač privabili več novih predavateljev. Ob predstojnikovanju razmišlja Halmos takole:

Odločanje o programih se dostikrat prekriva z odločanjem o kadrih in unija obeh je precej bolj zamotana kot vsako zase. Nekdo — običajni začetni približek je predstojnik — mora odločiti, ali sodi statistika na oddelek za matematiko (verjetno ne), ali naj na oddelek za matematiko pripeljemo tudi računalništvo (prav gotovo ne). Nekdo — predstojnik? — mora odločiti, do kod naj gre oddelek s svojimi trenutnimi predavanji in raziskovanji. Ali naj infinitezimalni račun nadomestimo z diskretno matematiko? Naj damo teoriji minimalnih ploskev prednost pred topologijo majhnih razsežnosti. Predstojnik je dolžan taka vprašanja vsaj zastavljati, včasih pa mora tudi sam odgovarjati nanje. str 356

Lepo, ustvarjalno, živi P. R. Halmos z matematiko, do zadnje vrstice zvest:

Hotel sem biti matematik. Še vedno hočem. str. 403

Dovolj! Iz Halmosovih izkušenj in spoznanj sem morda izbiral preveč po svojem okusu. Knjiga pa je obsežna in drug bralec se bo raje ustavil ob drugih dogodkih, ob pogledih, ki mu bodo bliže. Navsezadnje utegne biti čisto drugačna, kot sem jo predstavil. Ali vas tedaj ne mika še bolj, da bi jo sami prebrali?

France Križanič

UTRINKI

TRI MNENJA O MATEMATIKI

Matematika je napisana za matematike.

Nikolaj Kopernik

Zdravilo naredi ljudi bolne, matematika žalostne in teologija grešne.

Martin Luther

Napredek in izpopolnitev matematike sta tesno povezana z dobrobitjo države.

Napoleon Bonaparte

Scientific Quotations: The Harvest of a Quiet Eye,
Selected by A. L. Mackay, Crane, Russel & Co, New York 1977.

Izbral in prevedel *Janez Strnad*

SEZNAM REVIJ, KI SMO JIH PREJELI V LETU 1985 V ZAMENO ZA PRESEK TER OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1. Abstract Amer. Math. Soc. — Providence
2. Acta Arith. — Warszawa
3. Acta Math. Sinica — Peking
4. Acta Phys. Univ. Comenianae — Bratislava
5. Acta Stereol. — Ljubljana
6. Acta Univ. Carolinae Math. Phys. — Praha
7. Acta Univ. Oulu : Astr. — Oulu
8. Acta Univ. Oulu : Phys. — Oulu
9. Acta Univ. Palackianae Olomuciensis FRN : Math. — Praga
10. Algebra Logika — Novosibirsk
11. An. Univ. Bucaresti : Fiz. — Bucaresti
12. An. Univ. Bucaresti : Mat. — Bucaresti
13. An. Univ. Timisoara : Fiz. — Timisoara
14. An. Univ. Timisoara : Mat. — Timisoara
15. Ann. Acad. Sci. Fenn. : Math. — Helsinki
16. Ann. Acad. Sci. Fenn. : Math. Dissertationes — Helsinki
17. Ann. Polon. Math. — Warszawa
    Ann. Scoula Nor. Sup. — Pisa
18. Anthropos — Ljubljana
19. Bol. Soc. Math. Mexicana — Mexico
20. Bolid : Astr. Glasnik — Zagreb
21. Bonn. Math. Schr. — Bonn
22. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica — Taipei
23. Bull. Polish Acad. Sci. : Math. — Warszawa
24. Bull. Sci. : Natur. Techn. Med. — Zagreb
25. Celovški Zvon — Celovec
26. Chemical Commun. — Stockholm
27. Ciciban — Ljubljana
28. Colloq. Math. — Warszawa
29. Comment. Math. Univ. Carolinae — Praha
30. CWI Newsletters — Amsterdam
31. CWI Report : Num. Math. — Amsterdam
32. Časopis Kritika Znanosti — Ljubljana
33. Českoslov. Čas. Pyz. : A — Praha
34. Čovjek Vsemir — Zagreb
35. Differencialnye Uravnenija — Minsk
36. Dokl. A. N. Bssr — Minsk
37. Dokl. Bolg. A. N. — Sofia
38. Econom. Comp. Econom. Cybernet. Stud. Res. — Bucarest
39. Elektrotehn. Vestnik — Ljubljana
40. Estudos Comun. IM UFRJ — Rio de Janeiro
41. Farmacevt. Vestnik — Ljubljana
42. Fiz. Mat. Spisanie — Sofija
43. Fizika : J. Exper. Theor. Phys. — Zagreb
44. Funct. Approx. — Poznan
45. Fund. Univ. Brasilia — Brasilia
46. Glasbena Mladina — Ljubljana
47. Glasnik Mat. — Zagreb
48. Godišen Zbor. Mat. Fak. — Skopje
49. Godišnik Vysš. Učebni : Priložna Mat. — Sofia
50. Hiroshima Math. J. — Hiroshima
51. IJS : Poročila — Ljubljana
52. Impuls : Spis. Popul. Fiz. — Skopje
53. Indag. Math. — Amsterdam
54. Informatica — Ljubljana
55. Internat. Centre Theor. Phys. — Trieste
56. Internat. Math. News. — Wien
57. Izv. A. N. Armjan. SSR : Mat. — Erevan
58. Izv. A. N. Kazah. SSR : Fiz. Mat. — Alma-Ata
59. Izv. A. N. Moldav. SSR : Fiz. Teh. Mat. — Kišinev
60. J. Chinese Inst. Engrs. — Taipei
61. J. Math. Kyoto Univ. — Kyoto
62. Kobe J. Math. — Nada
63. Križem Kražem — Trebnje
64. Kulturni Poroč. — Ljubljana
65. Kurirček — Ljubljana
66. Kvant — Moskva
67. Mat. Bilten — Skopje
68. Mat. : Stručno Metod. Čas. — Zagreb
69. Mat. Fiz. List Uč. Sred. Škola — Zagreb
70. Mat. Fyz. Škole — Olomuc
71. Mat. Issledovanija — Kišinev
72. Mat. List Uč. Osn. Škole — Beograd
73. Mat. Vesnik — Beograd
74. Math. Gazette — London
75. Math. Reports — Gofuku
76. Math. Schule — Berlin
77. Math. Slovaca — Bratislava
78. Math. Teaching — Debry
79. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. : Math. — Kochi
80. Mem. Mat. Univ. Fed. — Rio De Janeiro
81. Mladi Mat. — Valjevo
82. Moj Mikro — Ljubljana
83. Naučni Trudove : Fiz. — Plovdiv
84. Naučni Trudove : Mat. — Plovdiv
85. Nauka Žizn — Moskva

86. Notices Amer. Math. Soc. — Providence
87. Notiziario Un. Mat. Italiana — Bologna
88. Nova Revija — Ljubljana
89. Osaka J. Math. — Osaka
90. Pionir — Ljubljana
91. Preprint — Cluj
92. Preprint — Warszawa
93. Prilozi — Skopje
94. Proc. Amer. Math. Soc. — Menasha
95. Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. — Tokio
96. Prosvetni Delavec — Ljubljana
97. Proteus — Ljubljana
98. Publ. Inst. Math. — Beograd
99. Publ. Sem. Mat. Gancia Goldeano — Zaragoza
100. Quaderno — Milano
101. Quaderni Mat. — Trst
102. Radiotehnika — Har'kov
103. Radovi Mat. — Sarajevo
104. Rapports Rec. Dep. Math. Stat. — Montreal
105. Razprave : Društvo Meteor. Slov. — Ljubljana
106. Rep. Invest. — Havana
107. Rep. Dept. Math. : A — Helsinki
108. Rep. Dept Nuclear Tech. — Oulu
109. Rep. Dept. Phys. — Oulu
110. Rev. Cienc. Mat. — Habana
111. Rev. Mat. Hisp. Amer. — Madrid
112. Rev. Roumane Math. Pures Appl. — Bucarest
113. Rev. Tecnica — Maracaibo
114. Rev. Un. Mat. Argentina — Buenos Aires
115. Riv. Mat. Univ. Parma — Parma
116. Rozhledy Mat. Fiz. — Praha
117. Rudarsko-Metal. Zbornik — Ljubljana
118. Sci. Yu. — Zagreb
119. Scripta F. S. N. U. P. Brunesis : Math. Phys. — Brno
120. Sem. Ecuatii Func. — Timisoara
121. Sem. Geom. Topologie — Timisoara
122. Sem. Infor. Anal. Numer. — Timisoara
123. Sem. Operat. Lin. Anal. Armonica — Timisoara
124. Sem. Teor. Probab. Apl. : Sti. Natur. — Timisoara
125. Serdika — Sofia
126. Sitzungsberichte — München
127. Sodobna Pedagog. — Ljubljana
128. Strojni Vestnik — Ljubljana
129. Studia Univ. Babes Bolyai : Math. — Cluj
130. Studia Univ. Babes Bolyai : Phys. — Cluj
131. Studii Cerc. Mat. — Bucarest
132. Tamkang J. Math. — Tamsui
133. Teor. Funk. Funkc. Anal. Pril. — Har'kov
134. Teor. Prim. Meh. — Beograd
135. Tim — Ljubljana
136. Trabalho Math. — Brasilia
137. Tribuna — Ljubljana
138. Trudy Mat. Inst. Steklova — Moskva
139. Učen. Zap. Tartu. Gos. Univ. : Mat. Meh. — Tartu
140. Ukrain. Mat. Ž. — Kiev
141. Uspehi Mat. Nauk — Moskva
142. Varilna Tehnika — Ljubljana
143. Vasiona — Beograd
144. Vesci A. N. BSSR : Fiz. Mat. — Minsk
145. Vestnik Belorus. Gos. Univ. : Fiz. Mat. Meh. — Minsk
146. Vestnik Leningr. Univ. : Fiz. Him. — Leningrad
147. Vestnik Moskov. Univ. : Mat. Meh. — Moskva
148. Vestnik Moskov. Univ. : Vyčisl. Mat. Kibernet. — Moskva
149. Vzgoja Izobr. — Ljubljana
150. Wissen. Nachr. — Wien
151. Zastos. Mat. — Warszawa
152. Zbornik Radova : Prim. Mat. Fak. — Kragujevac
153. Zdravstv. Vestnik — Ljubljana
154. Zvezna Gim. Slov. : Letno Poročilo — Celovec
155. Življenje Tehn. — Ljubljana

Ciril Velkovrh

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnim razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake.