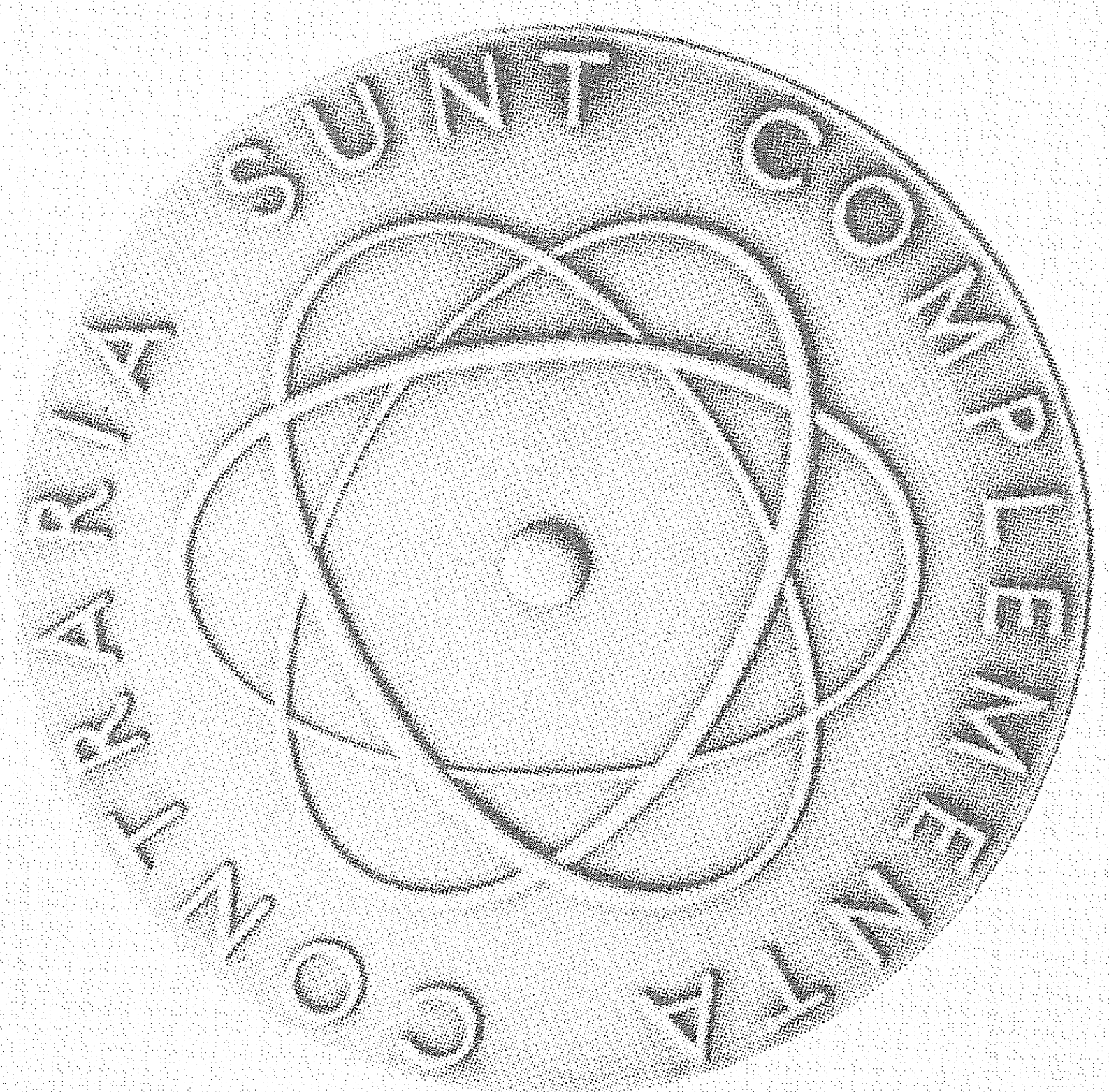
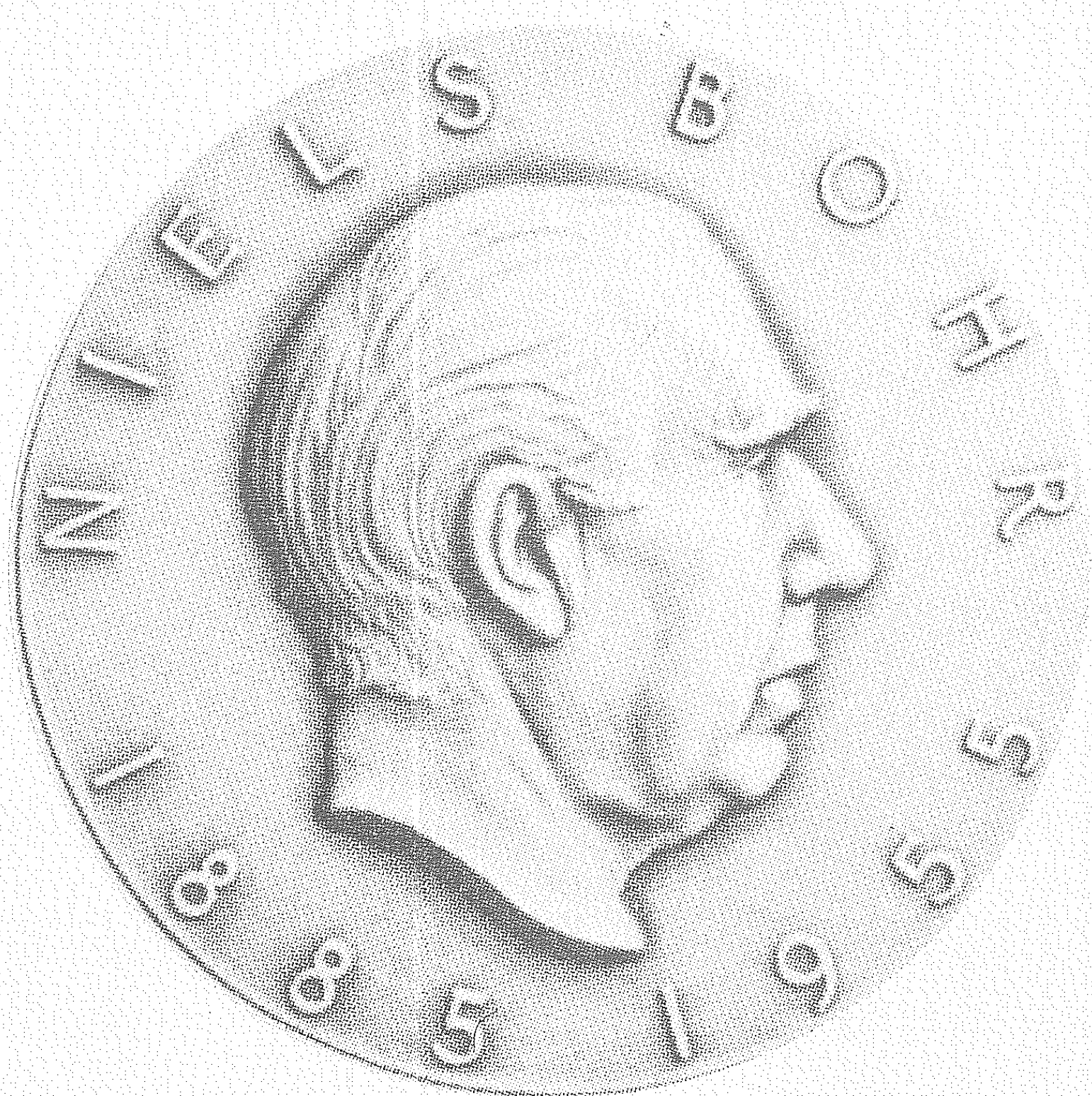


1986

Letnik 33

3/4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1986

Uredniški odbor: Peter Petek — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko in odgovorni urednik, Matjaž Omladič — urednik za matematiko, Ciril Velkoverh — urednik.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 1500.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 750.— din, za ustanove in podjetja 3000.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 500.— din, dvojna številka 1000.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska cesta 19, p.p. 64, telefon št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1986 DMFA SRS — 795

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

	Str.-Page
Članki — Articles	
O nekaterih funkcionalnih enačbah — On some functional equations (Joso Vukman)	65
Barvanje grafov — Colouring of graphs (Bojan Mohar)	75
Novejši rezultati večparametričnih problemov — Recent results for multiparameter problems (Gabrijel Tomšič)	81
Elementarni operatorji na matrični algebri — Elementary operators on algebras of matrices (Janko Gravner)	87
Transfinitne ploskve — interpolacija na pravokotnikih — Transfinite surfaces — interpolation over rectangles (Miro Germ)	93
Stirlingovi stolpci prve vrste — Stirling columns of the first kind (Alojzij Vadnal)	99
Kaj je množica — What is a set (Izidor Hafner)	104
Atomski model Nielsa Bohra — Niels Bohr's model of the atom (Janez Strnad)	109
Določanje zvezdnih mas — Determination of star masses (Marijan Prosen)	118
Domače vesti — Home news	
Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMF v l. 1985 (Zbral in uredil Ciril Velkoverh)	121
Obisk Bolgarske akademije znanosti (Dušan Repovš)	124
Utrinek — Bohrova razprava z Einsteinom (Janez Strnad)	126
Nove knjige — New books (P. Gosar, S. Klavžar, A. Suhadolc, P. Gosar, M. Hribar, F. Cvelbar)	74, 86, 103, 120, 127
Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1985 (Ciril Velkoverh)	III

Na ovitku: Medalja v čast Nielsa Bohra (7. 10. 1885—18. 11. 1962), ki jo podeljuje Dansko društvo inženirjev za izjemne dosežke v znanosti o atomih. Geslo »contraria sunt complementa« (nasprotja se dopolnjujejo) opozarja na načelo komplementarnosti. Bohr je postavil v svoj grb še kitajska simbola za jin in jang, elementa, ki si nasprotujeta, a hkrati dopolnjujeta drug drugega

O NEKATERIH FUNKCIONALNIH ENAČBAH

JOSO VUKMAN

Math. Subj. Class. (1980) 39 B 05

V članku obravnavamo nekatere funkcionalne enačbe v obsegu realnih števil. Glavna pozornost je posvečena funkcionalni enačbi $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

ON SOME FUNCTIONAL EQUATIONS

In this article some functional equations in the real field are considered. The main attention is devoted to the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Z $\mathbf{R}$ bomo označevali množico realnih, s $\mathbf{Q}$ pa množico racionalnih števil. Vse funkcije, ki jih bomo obravnavali, bodo definirane na vsej množici $\mathbf{R}$ in tudi zalogo vrednosti bodo imele v tej množici. V članku obravnavamo le nekatere najpreprostejše funkcionalne enačbe, več o funkcionalnih enačbah pa lahko bralec izve iz monografije J. Aczéla [1].

Začnimo s funkcionalno enačbo

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

ki jo je obravnaval že A. L. Cauchy leta 1821 (glej [1]). Rešitev funkcionalne enačbe (1) — enako bomo razumeli tudi pojem rešitve pri vseh drugih funkcionalnih enačbah — je vsaka funkcija $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ki za vsak par $x, y \in \mathbf{R}$ zadošča pogoju (1). Zapišimo naslednjo trditev, ki jo bomo, čeprav je zelo znana, zaradi popolnosti vseeno dokazali.

IZREK 1. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (1). Za vsak $x \in \mathbf{R}$ je pri poljubnem $r \in \mathbf{Q}$ izpolnjeno*

$$f(rx) = rf(x)$$

DOKAZ. Iz (1) dobimo $f(0) = 0$, potem pa še $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbf{R}$, zato bo dovolj, če dokažemo trditev za primer, ko je $r > 0$. Iz (1) dobimo z indukcijo

$$f(nx) = nf(x) \quad (2)$$

kjer je x poljubno realno, n pa poljubno naravno število. Če v (2) x nadomestimo z $\frac{m}{n}x$, dobimo

$$f(mx) = nf\left(\frac{m}{n}x\right)$$

in dalje

$$mf(x) = nf\left(\frac{m}{n}x\right)$$

kar nam da končno

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

in trditev je dokazana.

Izrek 1 nam da skupaj z dejstvom, da moremo vsako realno število zapisati kot limito zaporedja z racionalnimi členi, naslednji rezultat.

IZREK 2. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (1). Če je funkcija f zvezna, potem je $f(x) = f(1)x$ za vsak $x \in \mathbf{R}$.*

W. Sierpinski je leta 1920 v članku [6] izrek 2 izostril, in sicer tako, da je zveznost nadomestil z merljivostjo funkcije.

Izrek 2 pove, da je funkcija $f(x) = ax$ edina zvezna rešitev funkcionalne enačbe (1). Ali obstajajo nezvezne rešitve funkcionalne enačbe (1)? Na to vprašanje je pritrdilno odgovoril G. Hamel leta 1905 v članku [2]. Pri konstrukciji nezveznih rešitev funkcionalne enačbe (1) si je G. Hamel pomagal s posebno podmnožico množice realnih števil (Hamelova baza), katere eksistenco je ravno za ta primer dokazal z uporabo aksioma o izboru. Spomnimo se, za kakšno množico gre. Množica $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}$ je Hamelova baza, če moremo vsako realno število x na enoličen način zapisati v obliki

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n$$

kjer so števila $b_1, b_2, \dots, b_n$ iz množice $\mathbf{B}$, koeficienti $r_1, r_2, \dots, r_n$ pa so racionalna števila. Pri tem so seveda koeficienti, izbor elementov iz baze in število členov v vsoti odvisni od števila x . Sedaj je vse pripravljeno za naslednji izrek.

IZREK 3. *Splošna rešitev funkcionalne enačbe (1) je funkcija f , definirana z*

$$\begin{aligned} f(x) &= r_1 f(b_1) + r_2 f(b_2) + \dots + r_n f(b_n) \\ x &= r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n \end{aligned}$$

Pri tem so števila $b_1, b_2, \dots, b_n$ elementi Hamelove baze $\mathbf{B}$, koeficienti $r_1, r_2, \dots, r_n$ so racionalna števila, vrednosti $f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)$, ki jih funkcija zavzame, na elementih iz $\mathbf{B}$, pa so poljubne. Rešitev f je zvezna natanko takrat, ko obstaja $c \in \mathbf{R}$, tako da je $f(b_k) = c b_k$ za vsak $b_k \in \mathbf{B}$.

V podrobno dokazovanje izreka, ki smo ga pravkar zapisali, se ne bomo spuščali, saj je dokaz skoraj na dlani, če seveda privzamemo, da imamo dokaz eksistence Hamelove baze že za seboj. Izrek 3 nam med drugim pove, kako dobimo nezvezne rešitve funkcionalne enačbe (1).

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj rezultatov, ki govorijo o rešitvi funkcionalne enačbe (1), pri čemer bomo zveznost funkcije nadomestili z ustreznim algebraičnim pogojem.

IZREK 4. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (1). Če je za vsak par $x, y \in \mathbf{R}$ izpolnjeno*

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

potem je za vsak $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = 0$ ali pa $f(x) = x$.

DOKAZ. Ker je $f(0) = 0$ in $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathbf{R}$, se smemo omejiti na pozitivne vrednosti argumenta. Iz (3) dobimo

$$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0 \tag{4}$$

za vsak pozitiven $x \in \mathbf{R}$. Iz (1) in (4) sledi, da je funkcija f za pozitivne vrednosti argumenta naraščajoča, saj je

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geq f(x)$$

Iz izreka 1 sledi, da za vsak $r \in \mathbf{Q}$ velja

$$f(r) = f(1)r \tag{5}$$

Naj bo $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ naraščajoče, $\{R_n\} \subset \mathbb{Q}$ padajoče zaporedje, pri čemer obe zaporedji konvergirata k x , kjer je x poljubno pozitivno realno število. Za vsako naravno število n imamo torej

$$r_n < x < R_n \quad (6)$$

Če upoštevamo (5), (6) in pa dejstvo, da je funkcija f naraščajoča, dobimo

$$f(1) r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = f(1) R_n$$

Dobili smo torej $f(1) r_n \leq f(x) \leq f(1) R_n$ za vsako naravno število n , iz tega pa takoj sledi

$$f(x) = f(1) x \quad (7)$$

Če (7) upoštevamo v (3), dobimo $f(1) x y = f(1)^2 x y$, kar nam pove, da je $f(1) = 0$ ali pa $f(1) = 1$. Dokaz izreka je s tem končan.

Iz izreka 4 razberemo, da v obsegu realnih števil ni nezveznih avtomorfizmov. V tem pogledu se obseg realnih števil bistveno razlikuje od obsega kompleksnih števil. Z uporabo aksioma o izboru moremo namreč dokazati, da obstajajo v obsegu kompleksnih števil tudi nezvezni avtomorfizmi (glej [7]).

Nadaljevali bomo z rezultatom, ki sta ga leta 1965 objavila neodvisno drug od drugega S. Kurepa v članku [5] in W. B. Jurkat v članku [3].

IZREK 5. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (1). Če je za vsak od nič različen $x \in \mathbb{R}$ izpolnjeno*

$$f(x) = x^2 f(x^{-1}) \quad (8)$$

potem je $f(x) = f(1) x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

DOKAZ. Najprej bomo dokazali, da iz

$$f(1) = 0 \quad (9)$$

sledi $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker je $f(-x) = -f(x)$, sledi iz (9) $f(-1) = 0$. Vemo, da je $f(0) = 0$. Omejimo se lahko torej na primer, ko je $x \neq 0$ in $x \neq -1$. Z upoštevanjem (1), (8) in (9) dobimo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+x) = (1+x)^2 f((1+x)^{-1}) = \\ &= (1+x)^2 f(1-x(1+x)^{-1}) = -(1+x)^2 f(x(1+x)^{-1}) = \\ &= -(1+x)^2 x^2 (1+x)^{-2} f(x^{-1}(1+x)) = -x^2 f(x^{-1}+1) = \\ &= -x^2 f(x^{-1}) = -f(x) \end{aligned}$$

Dobili smo torej $f(x) = -f(x)$ in s tem je dokazano, da je $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Ker je funkcija f rešitev funkcionalne enačbe (1), velja to tudi za funkcijo g , ki je definirana z relacijo $g(x) = f(1)x - f(x)$. Z upoštevanjem (8) dobimo

$$g(x) = f(1)x - f(x) = x^2(f(1)x^{-1} - f(x^{-1})) = x^2 g(x^{-1})$$

Za vsak od nič različen $x \in \mathbb{R}$ velja torej $g(x) = x^2 g(x^{-1})$. Za funkcijo g so torej izpolnjeni vsi pogoji izreka 5 in ker je očitno $g(1) = 0$, sledi iz pravkar dokazanega $g(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ oziroma $f(x) = f(1)x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, kar je bilo treba dokazati.

Izrek 5 karakterizira funkcijo $f(x) = ax$ med vsemi funkcijami, ki so definirane na $\mathbb{R}$ in imajo v tej množici tudi zalogo vrednosti.

Preden nadaljujemo z naslednjim rezultatom, si oglejmo nov pojem. Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (1). Rekli bomo, da je f derivacija, če je za vsak par $x, y \in \mathbf{R}$ izpolnjeno

$$f(x, y) = f(x) y + x f(y) \quad (10)$$

Hitro se vidi, da derivacija preslika v nič vsa racionalna števila. Še več, preprost račun pokaže, da derivacija preslika v nič vsa algebraična števila (glej [5]). Od nič različne vrednosti zavzame torej kvečjemu na transcendentnih številih. Iz (10) dobimo brez težav, da derivacija f za vsak od nič različen $x \in \mathbf{R}$ zadošča pogoju

$$f(x) = -x^2 f(x^{-1}) \quad (11)$$

Naslednji izrek, ki smo ga vzeli iz članka [5] S. Kurepe, zatrjuje, da pogoj (11) karakterizira derivacije med vsemi reištvami funkcionalne enačbe (1).

IZREK 6. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (1). Če je za vsak od nič različen $x \in \mathbf{R}$ izpolnjeno*

$$f(x) = -x^2 f(x^{-1})$$

potem je f derivacija.

DOKAZ. Dokazali bomo, da je za vsak $x \in \mathbf{R}$ izpolnjeno

$$f(x^2) = 2x f(x) \quad (12)$$

Očitno je, da iz (11) sledi $f(1) = 0$. Privzemimo, da je $x \neq 0$, $x \neq 1$, in $x \neq -1$, saj je za te tri vrednosti veljavnost enakosti (12) očitna. Z upoštevanjem (1), (11) in $f(1) = 0$ dobimo

$$\begin{aligned} f(x) + x^{-2} f(x) &= f(x - x^{-1}) = f((x^2 - 1) x^{-1}) = \\ &= -(x^2 - 1)^2 x^{-2} f(x(x^2 - 1)^{-1}) = -(x^2 - 1)^2 x^{-2} f((x - 1)^{-1} - (x^2 - 1)^{-1}) = \\ &= (x^2 - 1)^2 x^{-2} (x - 1)^{-2} f(x - 1) - (x^2 - 1)^2 x^{-2} (x^2 - 1)^{-2} f(x^2 - 1) = \\ &= (x + 1)^2 x^{-2} f(x) - x^{-2} f(x^2) \end{aligned}$$

Dobili smo torej

$$f(x) + x^{-2} f(x) = (x + 1)^2 x^{-2} f(x) - x^{-2} f(x^2)$$

kar nam da (12). Če v (12) nadomestimo x z $x + y$, dobimo $f(x y) = f(x) y + x f(y)$ za vsak par $x, y \in \mathbf{R}$, kar je bilo treba dokazati.

Tudi naslednji izrek smo vzeli iz članka [5]. Pravzaprav gre za nekoliko dopolnjen izrek 4 iz [5].

IZREK 7. *Naj bosta $f \neq 0$ in $g \neq 0$ rešitvi funkcionalne enačbe (1). Denimo, da je za vsak od nič različen $x \in \mathbf{R}$ izpolnjeno*

$$g(x) = p(x) f(x^{-1}) \quad (13)$$

kjer je p zvezna funkcija z lastnostjo $p(1) = 1$. V tem primeru velja naslednje

1^o $p(x) = x^2$ za vsak $x \in \mathbf{R}$;

2^o funkciji F in G , definirani z $F(x) = f(x) - f(1) x$,

$G(x) = g(x) - g(1) x$ sta derivaciji;

3^o za vsak $x \in \mathbf{R}$ velja $f(x) = f(1) x + h(x)$, $g(x) = g(1) x - h(x)$,

kjer je h derivacija.

DOKAZ. Dokažimo najprej 1^o. Vzemimo od nič različni števili $x \in \mathbf{R}$ in $r \in \mathbf{Q}$. Iz $g(r x) = p(r x) f((r x)^{-1})$, $g(r x) = r g(x)$ in $f((r x)^{-1}) = r^{-1} f(x^{-1})$ dobimo

$$(r^{-2} p(r x) - p(x)) f(x^{-1}) = 0 \quad (14)$$

Naj bo y poljubno od nič različno realno število in $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ zaporedje, ki konvergira k y . Ker smo privzeli, da je funkcija p zvezna, dobimo iz (14)

$$(y^{-2} p(yx) - p(x)) f(x^{-1}) = 0 \quad (15)$$

Privzeli smo, da je $f \neq 0$, zato iz (15) sledi

$$p(yx) = y^2 p(x) \quad (16)$$

za vsaj en od nič različen $x \in \mathbb{R}$ in pri poljubnem od nič različnem $y \in \mathbb{R}$. Če v (16) nadomestimo y z x^{-1} , dobimo $p(x) = p(1) x^2$ in dalje $p(x) = x^2$, saj smo privzeli, da je $p(1) = 1$. Iz (16) dobimo $p(yx) = (yx)^2$. Če v tej relaciji nadomestimo y z yx^{-1} , dobimo končno $p(y) = y^2$, kjer je y poljubno od nič različno realno število, ker pa je funkcija p zvezna, imamo tudi $p(0) = 0$ in trditev 1^o je s tem v celoti dokazana. Iz pogoja (13) torej dobimo

$$g(x) = x^2 f(x^{-1}) \quad (17)$$

za vsak od nič različen $x \in \mathbb{R}$.

Dokažimo trditev 2^o. Iz (17) dobimo brez težav

$$G(x) = x^2 F(x^{-1}) \quad (18)$$

za vsak od nič različen $x \in \mathbb{R}$. Očitno je $F(1) = G(1) = 0$. Če poleg tega upoštevamo (18) in pa dejstvo, da sta funkciji F in G rešitvi funkcionalne enačbe (1), dobimo

$$\begin{aligned} G(x) &= G(1+x) = (1+x)^2 F((1+x)^{-1}) = \\ &= (1+x)^2 F(1 - x(1+x)^{-1}) = - (1+x)^2 F(x(1+x)^{-1}) = \\ &= - (1+x)^2 x^2 (1+x)^{-2} G((1+x)x^{-1}) = -x^2 G(x^{-1}) = -F(x) \end{aligned}$$

Imamo torej

$$F(x) = -G(x) \quad (19)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$, kar nam da skupaj z (18)

$$F(x) = -x^2 F(x^{-1})$$

za poljuben od nič različen $x \in \mathbb{R}$. Za funkcijo F so torej izpolnjeni vsi pogoji izreka 6, zato je F derivacija. Isto velja seveda za funkcijo G . Trditev 2^o je s tem v celoti dokazana.

Dokažimo trditev 3^o. Naj bosta h in k funkciji, definirani z

$$2h(x) = f(x) - g(x), \quad 2k(x) = f(x) + g(x) \quad (20)$$

Preprost račun nas prepriča, da iz (17) sledi

$$h(x) = -x^2 h(x^{-1}), \quad k(x) = x^2 k(x^{-1})$$

za vsak od nič različen $x \in \mathbb{R}$. Očitno je torej, da so izpolnjeni vsi pogoji izrekov 5 in 6, zato je funkcija h derivacija, za funkcijo k pa velja

$$k(x) = k(1)x \quad (21)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če v (20) upoštevamo poleg (21) še $f(1) = g(1)$, dobimo $f(x) = f(1)x + h(x)$, $g(x) = g(1)x - h(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker vemo, da je funkcija h derivacija, je trditev 3^o dokazana. Dokaz je s tem končan.

Nadaljevali bomo s funkcionalno enačbo

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (22)$$

Na dlani je, da je funkcija $f(x) = ax^2$ rešitev pravkar zapisane funkcionalne enačbe. Vendar to ni edina rešitev, saj se hitro vidi, da je rešitev tudi vsaka funkcija f , definirana z $f(x) = (g(x))^2$, kjer je g rešitev funkcionalne enačbe (1). Še več, naslednji račun nas bo prepričal, da reši funkcionalno enačbo (22) tudi vsaka funkcija f , ki jo moremo zapisati v obliki $f(x) = H(x, x)$, kjer je $H(., .): \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija, za katero je

$$\begin{aligned} H(x + y, z) &= H(x, z) + H(y, z), & x, y, z \in \mathbf{R} \\ H(x, y + z) &= H(x, y) + H(x, z), & x, y, z \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + f(x - y) &= H(x + y, x + y) + \\ &+ H(x - y, x - y) = H(x, x + y) + H(y, x + y) + \\ &+ H(x, x - y) - H(y, x - y) = H(x, x) + H(x, y) + H(y, x) + \\ &+ H(y, y) + H(x, x) - H(x, y) - H(y, x) + H(y, y) = \\ &= 2H(x, x) + 2H(y, y) = 2f(x) + 2f(y) \end{aligned}$$

S problemom, kako poiskati splošno rešitev funkcionalne enačbe (22), se bomo ukvarjali pozneje, sedaj si bomo ogledali rezultat, ki smo ga vzeli iz članka [4].

IZREK 8. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (22). Če je funkcija f zvezna, potem je $f(x) = f(1)x^2$ za vsak $x \in \mathbf{R}$.*

DOKAZ. Dokažimo, da velja za vsak $x \in \mathbf{R}$ pri poljubnem $r \in \mathbf{Q}$

$$f(rx) = r^2 f(x) \quad (23)$$

Iz (22) dobimo za $x = y = 0$ $f(0) = 0$, za $x = 0$ pa imamo $f(-y) = f(y)$ pri poljubnem $y \in \mathbf{R}$ — funkcija f je torej soda. Če v (22) pišemo $x = y$, dobimo $f(2x) = 2^2 f(x)$ in z indukcijo

$$f(nx) = n^2 f(x) \quad (24)$$

za vsako naravno število n in vsako realno število x . Če v (24) nadomestimo x z $\frac{x}{n}$, dobimo

$$f(x) = n^2 f\left(\frac{x}{n}\right) \quad (25)$$

Iz (24) in (25) sledi

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = n^2 f\left(\frac{x}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)^2 f(x)$$

kar dokazuje (23) za primer, ko je $r > 0$. Ker vemo, da je funkcija f soda in ker je $f(0) = 0$, je (23) dokazano za vsak $r \in \mathbf{Q}$. Iz (23), zveznosti funkcije f in iz dejstva, da moremo vsako realno število zapisati kot limito zaporedja z racionalnimi členi, dobimo

$$f(x) = f(1)x^2$$

za vsak $x \in \mathbf{R}$, kar je bilo treba dokazati.

Samo po sebi se vsiljuje vprašanje, ali moremo tudi v izreku 8 zveznost nadomestiti z merljivostjo funkcije. Odgovor je pritrdilen. Dokaz si lahko ogledamo v članku [4].

Nadaljevali bomo z rezultatom, ki pove, kakšna je splošna rešitev funkcionalne enačbe (22). Dokaz smo vzeli iz članka [8].

IZREK 9. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (22). Obstaja taka enolično določena funkcija $H(.,.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da je*

$$1^0 f(x) = H(x, x) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}$$

$$2^0 H(x, y) = H(y, x) \text{ za vsak par } x, y \in \mathbb{R}$$

$$3^0 H(x + y, z) = H(x, z) + H(y, z), \quad H(x, y + z) = H(x, y) + H(x, z)$$

za poljubne elemente $x, y, z \in \mathbb{R}$

DOKAZ. Naj bo torej f rešitev funkcionalne enačbe (22). Omenili smo že, da je

$$f(0) = 0 \tag{26}$$

in

$$f(-x) = f(x) \tag{27}$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Definirajmo funkcijo $H(.,.)$ z relacijo

$$H(x, y) = \frac{1}{4} (f(x + y) - f(x - y))$$

Enoličnosti funkcije $H(.,.)$ ni potrebno dokazovati, ker je očitna. Iz $f(2x) = 4f(x)$ in iz (26) sledi $f(x) = H(x, x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Iz (27) dobimo, da je za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$ izpolnjeno

$$H(x, y) = H(y, x) \tag{28}$$

S tem smo dokazali trditvi 1^0 in 2^0 . Preostane nam še dokaz trditve 3^0 . Dokazati moramo torej, da je funkcija $H(.,.)$ aditivna v obeh argumentih. Zaradi (28) bo dovolj, če dokažemo aditivnost v enem argumentu. Za poljubne elemente $x, y, u \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} 4H(x + y, 2u) &= f(x + y + 2u) - f(x + y - 2u) = \\ &= f((x + u) + (y + u)) + f((x + u) - (y + u)) - \\ &\quad - f((x - u) + (y - u)) - f((x - u) - (y - u)) \end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo (22), dobimo

$$\begin{aligned} 4H(x + y, 2u) &= (2f(x + u) + 2f(y + u)) - (2f(x - u) + 2f(y - u)) = \\ &= 8H(x, u) + 8H(y, u) \end{aligned}$$

Dobili smo torej

$$H(x + y, 2u) = 2H(x, u) + 2H(y, u) \tag{29}$$

Če v (29) pišemo $y = 0$, $x = z$ in upoštevamo (27), dobimo

$$H(z, 2u) = 2H(z, u) \tag{30}$$

Če v (30) nadomestimo z z $x + y$ in upoštevamo (29), dobimo končno

$$2H(x + y, u) = H(x + y, 2u) = 2H(x, u) + 2H(y, u)$$

kar dokazuje, da je funkcija $H(.,.)$ aditivna v prvem argumentu. Dokaz izreka je s tem končan.

V nadaljevanju bomo obravnavali nekatere funkcionalne enačbe, ki jih moremo brez posebnih težav prevesti na funkcionalno enačbo (1). Začnimo s funkcionalno enačbo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (31)$$

Hitro se prepričamo, da je funkcija $f(x) = ax + b$ rešitev pravkar zapisane funkcionalne enačbe, seveda pa s tem nismo zapisali vseh rešitev. Naslednji rezultat smo vzeli iz [1].

IZREK 10. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (31). Če je funkcija f zvezna, potem je*

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

za vsak $x \in \mathbf{R}$.

DOKAZ. Če v (31) pišemo $y = 0$, dobimo

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + f(0)}{2}$$

zato je

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + f(0)}{2}$$

oziroma

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0) \quad (32)$$

Ker smo privzeli, da je funkcija f zvezna, velja isto za funkcijo g , ki je definirana z relacijo $g(x) = f(x) - f(0)$. Iz (32) dobimo $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Za funkcijo g so torej izpolnjeni vsi pogoji izreka 2, zato imamo $g(x) = g(1)x$ za vsak $x \in \mathbf{R}$ in s tem je izrek dokazan.

Enačba (31) spominja na znano neenačbo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

ki jo srečujemo pri obravnavanju konveksnih funkcij. S tega stališča gledano moremo izrek 10 strniti v: zvezna funkcija, ki je konveksna in hkrati konkavna, je linearna.

Na osnovi rezultata W. Sierpinskega [6] smemo v izreku 10 zveznost nadomestiti z merljivostjo funkcije. Iz dokaza izreka 10 je tudi razvidno, da ima splošna rešitev funkcionalne enačbe (31) obliko $f(x) = g(x) + f(0)$, kjer je g splošna rešitev funkcionalne enačbe (1).

Naslednji rezultat karakterizira linearno funkcijo med vsemi funkcijami, ki so definirane na $\mathbf{R}$ in imajo v tej množici tudi zalogo vrednosti.

IZREK 11. *Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (31). Če je za vsak od nič različen $x \in \mathbf{R}$ izpolnjeno*

$$x^2 f(x^{-1}) = f(x) + (x^2 - 1)f(0) \quad (33)$$

potem je $f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ za vsak $x \in \mathbf{R}$.

DOKAZ. Ker je funkcija f rešitev funkcionalne enačbe (31), je funkcija g , ki je definirana z $g(x) = f(x) - f(0)$, rešitev funkcionalne enačbe (1) (glej dokaz prejšnjega izreka). Iz (33) dobimo

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - f(0) = x^2 f(x^{-1}) - (x^2 - 1) f(0) - f(0) = \\ &= x^2(f(x^{-1}) - f(0)) = x^2 g(x^{-1}) \end{aligned}$$

Dobili smo, da je za vsak od nič različen $x \in \mathbb{R}$ izpolnjeno $g(x) = x^2 g(x^{-1})$. Za funkcijo g so torej izpolnjeni vsi pogoji izreka 5, zato imamo $g(x) = g(1)x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in s tem je dokaz končan.

Za konec pa še funkcionalna enačba

$$f(x + y) = f(x) f(y) \quad (34)$$

ki jo narekuje eksponentna funkcija.

IZREK 12. Naj bo f rešitev funkcionalne enačbe (34). Če je funkcija f zvezna, potem je za vsak $x \in \mathbb{R}$ izpolnjeno $f(x) = 0$ ali pa $f(x) = f(1)x$, kjer je $f(1) > 0$.

DOKAZ. Iz (34) dobimo

$$f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0) f(x_0) \quad (35)$$

kar pomeni: če obstaja tak $x_0 \in \mathbb{R}$, da je $f(x_0) = 0$, potem je $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Del izreka je s tem dokazan. Sedaj privzemimo, da je funkcija f povsod različna od nič. Iz (34) dobimo

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$$

Funkcija f je torej povsod pozitivna, zato moremo vpeljati funkcijo g z relacijo $g(x) = \ln f(x)$. Iz (34) dobimo $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Ker je funkcija f zvezna, velja isto za funkcijo g . Funkcija g torej zadošča vsem pogojem izreka 2, zato je $g(x) = g(1)x$ oziroma $f(x) = f(1)x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Dokaz izreka je s tem končan.

LITERATURA

- [1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York and London 1966.
- [2] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$* , Math. Ann. 60 (1905) 459—462.
- [3] W. B. Jurkat, *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) 683—686.
- [4] S. Kurepa, *On the quadratic functional*, Publ. Inst. Acad. Serbe Sci. 13 (1959) 58—72.
- [5] S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. 19 (1964) 23—36.
- [6] W. Sierpinski, *Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$* , Fund. Math. 1 (1920) 116—122.
- [7] W. Sierpinski, *Cardinal and ordinal numbers*. (Monografie Mat. ; 34), Warszawa 1958.
- [8] J. Vukman, *O bilinearnih in kvadratnih funkcionalih*, Obzornik mat. fiz. 30 (1983) 80—85.

NOVE KNJIGE

LUDWIG G., Foundations of Quantum Mechanics I, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin 193, XII + 426 str.

Obsežna monografija o osnovah kvantne mehanike v dveh delih je razširjena in izpopolnjena izdaja avtorjeve knjige *Die Grundlagen der Quantenmechanik* iz leta 1954. Delo sistematično matematično in pojmovno formulira interpretacijo kvantne mehanike Nielsa Bohra na osnovi klasičnega opisa procesov merjenja. Prvi zvezek obravnava osnovne koncepte kvantne mehanike, izhajajoč iz nekaterih principov, ki omogočajo aksiomatično formulacijo le-te. Osrednjo vlogo ima pri tem teorija merjenja. Avtor vpelje koncept »efekta« oziroma »da-ne« merjenja, ki se izkaže za pomembno vez med eksperimentom in teorijo. Prvi zvezek je razdeljen na osem poglavij z naslovi: I. Problem: aksiomska baza kvantne mehanike, II. Mikrosistemi, postopki preparacije in registracije, III. Ensembli in efekti, IV. Koeksistirajoči efekti in koeksistirajoče razstavitve, V. Transformacije procesov in preparacije. Transformacije efektov in ensemblov, VI. Reprezentacija grup s pomočjo efektov. Avtomorfizmi in avtomorfizmi mešanic, VII. Galilejeva grupa, VIII. Sestavljeni sistemi.

Avtor knjige je v času več kot treh desetletij objavil vrsto tehtnih razprav o osnovah kvantne mehanike. Pričujoča knjiga je prvi učbenik, v katerem je predstavljen njegov pojmovni in teorijski pogled nanjo. Delo je primerno za poglobljen študij osnov kvantne mehanike in bo gotovo našlo bralce med študenti in raziskovalci.

LUDWIG G., Foundations of Quantum Mechanics II, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo 1985, XVI + 416 str.

V tem drugem delu obsežne monografije o osnovah kvantne mehanike avtor pokaže, kako izpeljemo kvantnomehanske zakone iz teorije o preparacijskih in registracijskih postopkih, ki jih opisuje na makroskopski klasični način (zvezek I). Tu se seznanimo s temeljito obravnavo atomskih in molekulskih spektrov in s teorijo sipanja. Poseben poudarek je dan teoriji sipanja kot pripomočku pri interpretiranju in reševanju konkretnih primerov merjenja v kvantni mehaniki. Delo je namenjeno obravnavi strukture mikrosistemov in ne tehničnim podrobnostim naprav za preparacijo in registracijo. V desetih poglavjih (IX.—XVIII.) so obravnavane naslednje teme: IX. Reprezentacija Hilbertovih prostorov s funkcijskimi prostori, X. Enačbe gibanja, XI. Spektri enoelektronskih sistemov, XII. Spektri dvoelektronskih sistemov, XIII. Izbirna pravila in intenziteta spektralnih črt, XIV. Spektri večelektronskih sistemov, XV. Molekulski spektri in kemijska vez, XVI. Teorija sipanja, XVII. Proces merjenja in proces preparacije, XVIII. Kvantna mehanika, makrofizika in fizikalni pogled na svet.

Ta del knjige o osnovah kvantne mehanike je za fizika dosti lažje berljiv v primerjavi s prvim, ker se v pristopu ne razlikuje bistveno od množice tovrstnih učbenikov. Vendar so tu poglavja o eno- in večelektronskih spektrih temeljiteje obdelana, kot je običaj v fizikalnih učbenikih. V dodatku tudi najdemo obsežno poglavje o grupah in njihovih reprezentacijah. Delo bo našlo hvaležne bralce med študenti in raziskovalci.

Peter Gosar

BARVANJE GRAFOV*

BOJAN MOHAR

Math. Subj. Class. (1980) 05 C 15

Danih je več ocen za kromatično število grafa in opisan je Welsh-Powellov postopek za barvanje grafa. Sledi karakterizacija dvodelnih grafov in krajša diskusija o izreku štirih barv.

COLOURING OF GRAPHS

Basic theorems on the colourability of graphs are given.

1. Grafi

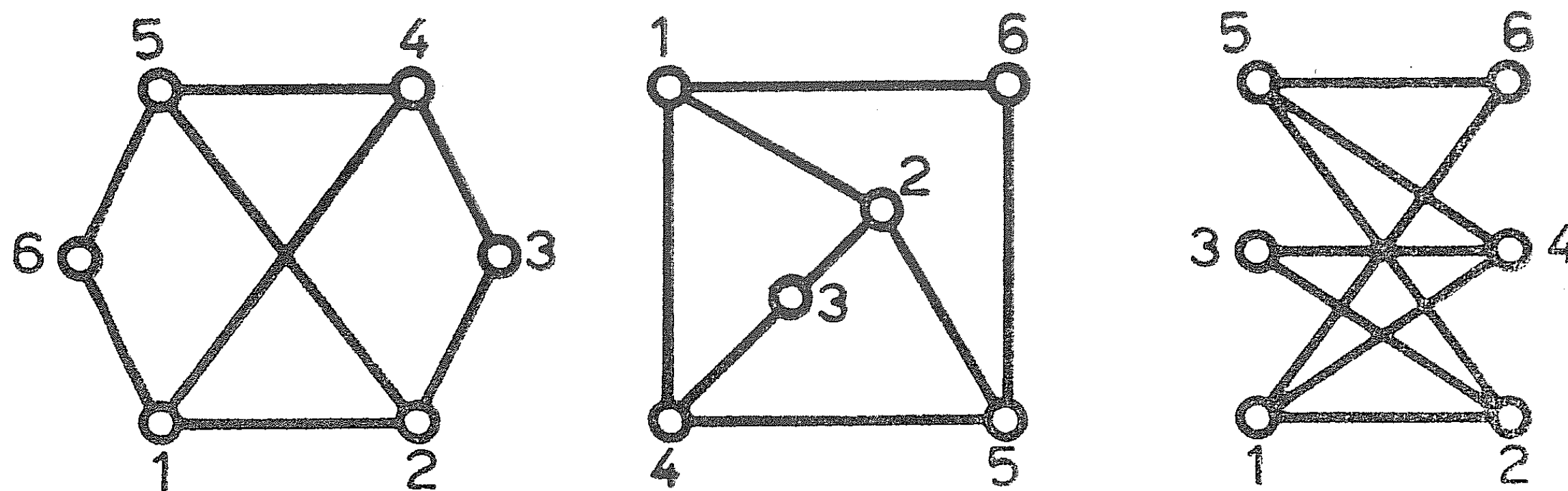
Graf je kombinatorični objekt, ki ga sestavljata dve množici:

- a) neprazna množica *točk* V in
- b) množica *povezav* E .

Vsaka povezava $e \in E$ *povezuje* dve točki grafa, ki ju imenujemo *robni točki* ali *krajišči* povezave e . Če sta točki $a, b \in V$ robni točki kake povezave, pravimo, da sta *sosedni*, in če je ta povezava e , to zapišemo kot $\partial e = \{a, b\}$. Če je $\partial e = \{a, a\} = \{a\}$, povezavi e pravimo tudi *zanka v točki* a . Lahko se zgodi, da sta v grafu povezavi, ki imata isti robni točki. Pravimo, da imamo *vzporedni povezavi*. Nas bodo zanimali le t.i. *enostavni grafi*, to je taki grafi, ki nimajo zank in nimajo vzporednih povezav. V nadaljevanju bomo z besedo graf vedno mislili na enostavni graf.

Formalno je graf urejena trojka $G = (V, E, \partial)$, kjer je V množica točk, E množica povezav in $\partial: E \rightarrow \{\{a, b\}; a, b \in V\}$ robna preslikava grafa G . Če za dani graf G množic V in E ne bomo posebej imenovali, ju bomo označili z $V(G)$ in $E(G)$.

Vsak končen graf je abstrakten objekt, ki ga lahko *geometrijsko realiziramo* v prostoru R^3 . To pomeni, da za vsak (enostaven) graf G lahko v R^3 najdemo množico točk U in bijektivno zvezo $\varphi: V(G) \rightarrow U$, zatem pa za vsako povezavo $e \in E(G)$, ki povezuje točki a in b , dodamo daljico med točkama $\varphi(a)$ in $\varphi(b)$ v R^3 . Pri tem se nobeni daljici ne smeta sekati, razen seveda v skupnih krajiščih. Če graf ne bi bil enostaven, bi morali razen daljic dovoliti tudi krive črte.



Slika 1

* Članek je nastal po predavanju na Seminarju sekcije za uporabno matematiko DMFA v Ljubljani, 20. in 21. septembra 1984.

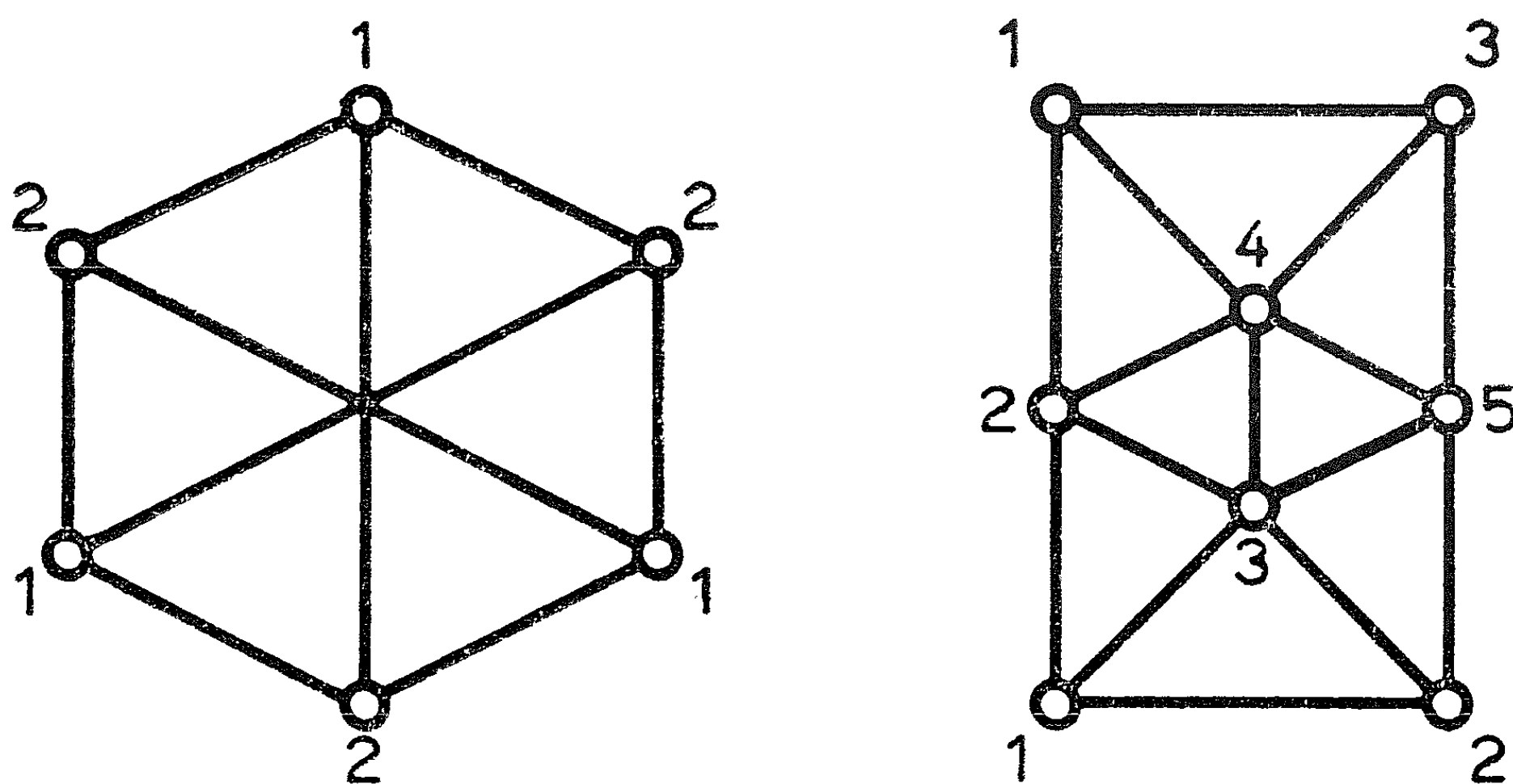
Ker sta glavno matematikovo orožje svinčnik in papir, nam geometrijska realizacija v prostoru ne pomaga mnogo. Ugodnejša je *ravninska realizacija*, ki je »slika grafa na papirju«. Točke predstavimo s krožci, povezave pa z daljicami (ali tudi z loki) med ustreznimi krožci. Pri tem se povezave lahko sekajo, ne smejo pa potekati čez krožce. Za primer so na sliki 1 prikazane tri različne realizacije istega grafa.

Zaporedje točk $x_1, x_2, \dots, x_n$ v grafu G imenujemo *sprehod* od x_1 do x_n , če sta za $i = 1, 2, \dots, n-1$ točki x_i in x_{i+1} sosedni. Če pa je začetna točka sprehoda enaka končni, je to *obhod*. V grafu sta dve točki, recimo x in y , *povezani s potjo*, če obstaja sprehod od x do y . Graf G je *povezan*, če sta vsaki dve točki v G povezani s potjo. Vsak graf je »sestavljjen« iz povezanih »koso-
sov«, ki jim pravimo *komponente* tega grafa. Graf je povezan natanko tedaj, ko ima eno samo komponento.

Za konec tega kratkega uvoda v izrazoslovje omenimo še dve družini grafov. Za vsako naravno število $n \geq 1$ označimo s K_n enostavni graf na n točkah in z vsemi možnimi povezavami. To so *polni grafi*. Drugo družino pa sestavljajo *cikli* C_n dolžine n , $n \geq 3$. To so grafi, ki jih lahko geometrijsko realiziramo kot n -kotnike (prvi graf na sliki 3 je na primer C_5).

2. Barvanje grafa

Naj bo G graf in k naravno število. *Barvanje s k barvami* ali *k -barvanje* grafa G je tako razbitje množice točk $V(G)$ na k razredov, $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ (nekateri razredi so lahko tudi prazni), da nobeni točki v istem razredu nista sosedni. Ime »barvanje« poteka od tod, ker si lahko mislimo, da vse točke istega razreda obarvamo z neko barvo. Točke grafa torej obarvamo s k barvami tako, da nobeni sosedni točki nista iste barve. Dano k -barvanje grafa predočimo na njegovi realizaciji na primer tako, da vse točke iz i -tega razreda ($1 \leq i \leq k$) označimo s številom i , ki pomeni i -to barvo. Dva primera najdemo na sliki 2.



Slika 2

Če ima graf k -barvanje, pravimo, da je *k -obarvljiv*. Najmanjše število k , za katerega je graf G k -obarvljiv, imenujemo *kromatično število* ali *barvnost* grafa G in ga označimo s $\chi(G)$. Kromatično število grafa s slike 2a je enako 2, grafa s slike 2b pa 4.

3. Nekaj problemov

Problem barvanja grafov sodi med najpomembnejše kombinatorične probleme, saj nanj lahko prevedemo celo vrsto (na videz popolnoma različnih) nalog, ki jih srečamo v vsakdanjem življenju. Oglejmo si nekaj primerov, ki jih povzemamo iz [3, 9].

3.1. Radijska oddajnika, ki oddajata na isti frekvenci, motita drug drugega, če sta si preblizu. Kako razdeliti valovne dolžine oddajnikom, tako da se medsebojno ne bodo motili? Če je število valovnih dolžin, ki so na razpolago, enako k , je problem ekvivalenten k -barvanju »grafa motečih se postaj«. Ta graf ima za točke oddajnike in dve točki sta sosedni, če sta si oddajnika preblizu (ne smeta imeti iste frekvence, ker bi se motila). Barve ustrezajo frekvencam.

3.2. Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ spremenljivke, ki nastopajo v istem računalniškem programu. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da so vse istega tipa (vsaka zavzame isto količino pomnilnika). Včasih je nujno optimizirati porabo pomnilnika tako, da na isto mesto shranimo več spremenljivk. Le-te seveda v programu nikoli ne smejo nastopati hkrati, da ne bi bilo kaj narobe. Koliko najmanj prostora potrebujemo za spremenljivke $x_1, x_2, \dots, x_n$? Problem je ekvivalenten iskanju minimalnega barvanja grafa istočasno nastopajočih spremenljivk. Ta ima točke $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s povezavami med vsakima dvema točkama (spremenljivkama), ki ne smeta v programu istočasno nastopati in morata biti zato različno obarvani. Točke iste barve ustrezajo spremenljivkam, ki so lahko shranjene v istem delu pomnilnika.

3.3. Urnik: študentje opravljajo izpite. Radi bi sestavili dnevni razpored izpitov, tako da nobenemu študentu ne bo treba v istem dnevu iti k dvema izpitoma. Tudi za ta problem lahko uporabimo algoritme za barvanje grafov. Sestavimo graf, katerega točke ustrezajo posameznim izpitom, in dve točki povežemo, če obstaja študent, ki mora opravljati oba izpita. Izpiti, ki ustrezajo enako obarvanim točkam, so lahko istega dne.

3.4 Oddelek za snago nekega mesta je postavil naslednji problem. Smetarski voz (kamion za odvoz smeti) lahko v enem dnevu obide nekaj mest. Zaporedje mest, ki jih kamion obide v enem dnevu, imenujemo *dnevna naloga* tega vozila. Sestaviti je treba dnevne naloge za tedenski odvoz smeti. Pri tem moramo upoštevati naslednje:

1. Mesto i je v enem tednu obiskano k_i -krat, $k_i \leq 6$.
2. Vsako mesto je obiskano največ enkrat dnevno.
3. Vsak dan imamo največ m dnevnih nalog (m je število vseh vozil).
4. Skupni stroški prevoza naj bodo čim manjši.

V milijonskem mestu je praktično nemogoče preiskati vse možnosti, da bi tako našli optimalno rešitev. Problem je težak in treba je poseči po iskanju približnih rešitev. Kot ena boljših metod se izkaže lokalna optimizacija. Začnemo z družino dnevnih nalog, ki jo z manjšimi medsebojnimi zamenjavami odjemnih mest želimo čimbolj izboljšati. Na vsakem koraku moramo testirati, če lahko dnevne naloge razporedimo na 6 delovnih dni v tednu tako, da bosta izpolnjeni zahtevi (2) in (3). Ta test je ekvivalenten barvanju grafov. Sestavimo namreč takle graf: točke grafa so dnevne naloge in dve nalogi povežemo s povezavo, če imata isto odjemno mesto (ker v tem primeru ne smeta biti obe nalogi istega dne). Dobljeni graf želimo obarvati s 6 barvami (dnevi). Da bo izpolnjen še pogoj (3), zahtevamo, da je z vsako od barv obarvanih največ

m točk. Čeprav je problem barvanja grafov NP-težak, se dajo v tem primeru težave nekako obiti. Pri manjši zamenjavi dnevnih nalog si lahko pomagamo z barvanjem grafa, ki smo ga imeli pred tem. Več podrobnosti najdemo v [9].

4. Osnovni izreki o barvanju grafov

V praksi srečamo v zvezi z barvanjem grafov predvsem probleme, kako obarvati dani graf s čim manj barvami. Pri tem je navadno zelo koristno, če znamo določiti kromatično število grafa. Načelno to lahko storimo tako, da pregledamo vsa možna barvanja, vendar je taka metoda v praksi neuporabna zaradi velikega števila možnosti — problem je NP-težak [7]. Navadno skušamo s pomočjo lokalnih lastnosti grafa oceniti njegovo kromatično število. Omenimo, da nobena od znanih ocen v splošnem primeru ni posebno dobra, čeprav navadno dobimo kar dobre rezultate (primerjaj izrek 2). Oglejmo si nekaj enostavnih ocen kromatičnega števila grafa.

Naj bo K podmnožica točk grafa G , ki v G določa poln podgraf, tj., vsaka točka iz K je sosedna z vsako drugo točko iz K . Pravimo, da točke iz K določajo *kliko* v G . Če označimo z $\omega(G)$ velikost maksimalne klike v G , velja:

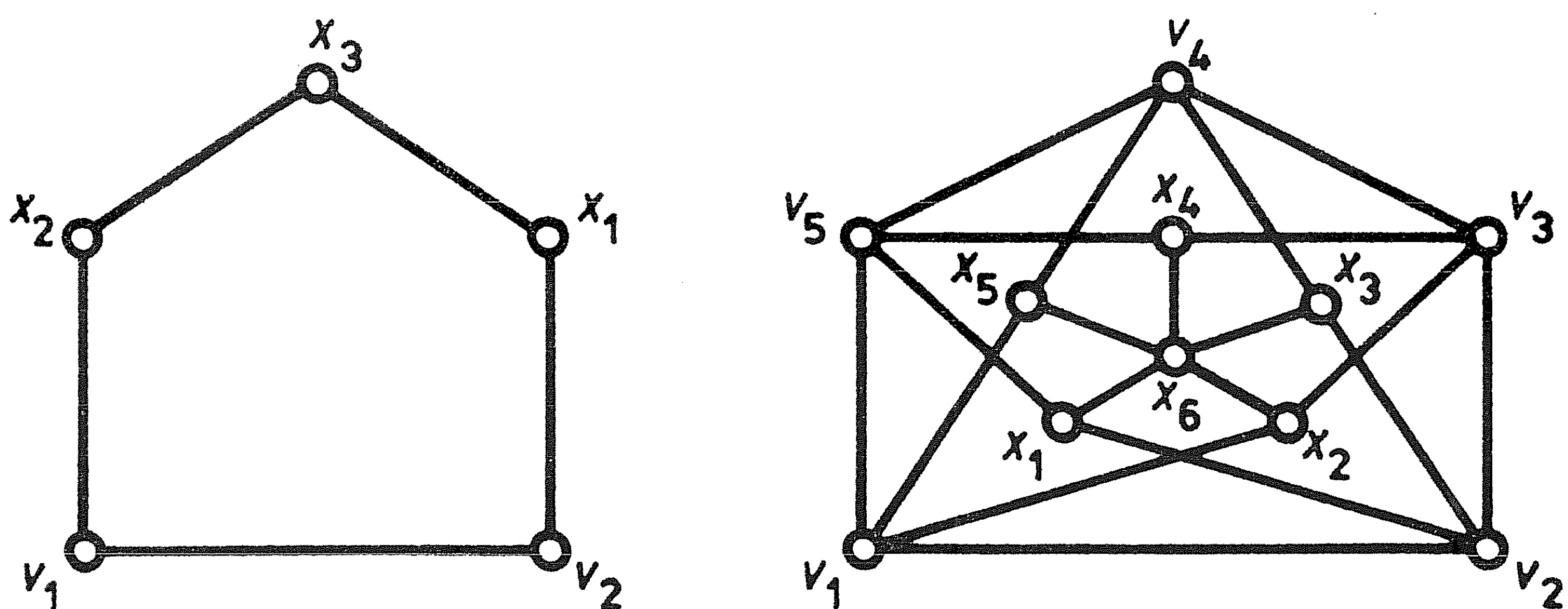
Izrek 1. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Dokaz. Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_\omega$ točke, ki sestavljajo maksimalno kliko v G . Pri poljubnem barvanju so te točke obarvane različno, zato je jasno, da potrebujemo vsaj $\omega(G)$ barv.

Za mnoge pomembne družine grafov je znano, da zanje velja enakost v izreku 1. Pri praktičnem določanju $\chi(G)$ nam to ne pomaga mnogo, saj je tudi problem določitve $\omega(G)$ NP-težak [7]. Presenetljivo pa je, da je ocena izreka 1 v splošnem lahko poljubno slaba. To nam kaže na primer že naslednji izrek:

Izrek 2. Za poljubno naravno število n obstaja graf G_n , ki nima trikotnikov ($\omega(G) = 2$) in je $\chi(G_n) = n$.

Dokaz. Uporabili bomo induktivno konstrukcijo Mycielskega. Naj bo $G_1 = K_1$ in $G_2 = K_2$. Za vsak $n \geq 2$ pa dobimo G_{n+1} iz G_n takole: če je $V(G_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, potem grafu G_n dodamo $k + 1$ točk $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ in za $i = 1, 2, \dots, k$ povežemo x_i z x_{k+1} in z vsemi točkami v G_n , ki so sosedne z v_i (glej sliko 3 za $n = 2, 3$). Očitno je, da tako dobljeni graf G_{n+1} nima trikotni-



Slika 3

kov. Če njegove točke $v_1, v_2, \dots, v_k$ obarvamo z n barvami (uporabimo kako n -barvanje grafa G_n), zatem za $i = 1, 2, \dots, k$ obarvamo x_i z isto barvo kot v_i in x_{k+1} z barvo $n + 1$, dobimo $(n + 1)$ -barvanje. Torej je $\chi(G_{n+1}) \leq n + 1$. Bralcu pa prepuščamo dokaz, da grafa G_{n+1} ne moremo obarvati le z n ali manj barvami.

Opomba: za vsaki naravni števili n in ω , $n \geq \omega \geq 2$, bi lahko napravili podobno konstrukcijo grafov s kromatičnim številom n in velikostjo maksimalne klike ω .

Precej enostavnejšo zgornjo mejo pa nam daje naslednji izrek:

Izrek 3. (Brooks). Naj bo $\Delta(G)$ maksimalna stopnja točk grafa G . Potem je

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Če je G povezan in ni niti poln graf niti cikel lihe dolžine, je celo $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Dokaz. Dokazali bomo le prvo, slabšo oceno, ker drugi del zahteva več dela.

Naj bo G poljuben graf in $k = \Delta(G) + 1$. Kako bi obarvali točke grafa G s k barvami? Najlažje bi bilo kar s *požrešno metodo* [6]. Naj bodo $v_1, v_2, \dots, v_n$ točke grafa G . Obarvajmo v_1 z barvo 1, zatem v_2 z barvo 1, če v_2 ni sosedna z v_1 , sicer pa z barvo 2. Točke v_3, v_4 itd. barvamo po vrsti na podoben način: uporabimo najmanjšo barvo, ki jo lahko ima glede na to, da so nekateri njeni sosedje že obarvani. Ker je stopnja vsake točke manjša od k , lahko njeni sosedje porabijo največ $k-1$ barv, zato z opisano požrešno metodo gotovo pridemo do konca.

Izboljšavo ocene in postopka iz izreka 3 predstavlja *Welsh-Powellov postopek*, ki je v svojem bistvu le dopolnjena požrešna metoda. Najprej uredimo točke grafa G po padajočih stopnjah, tako da je: $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \dots \geq \deg(v_n)$. (Če imata kakšni dve točki isto stopnjo, seveda ta razvrstitev ni enolična.) Zatem pa barvamo: točko v_1 z barvo 1, točke $v_2, v_3, \dots, v_n$ pa po vrsti z najmanjšo prosto barvo. Na enak način kot v dokazu izreka 3 vidimo, da pri tem za barvanje celega grafa porabimo kvečjemu toliko barv, kot je število

$$wp(G) = \max \{i; i \leq \deg(v_i) + 1\}$$

Oceno si oglejmo še na primeru. Če ima graf G stopnje točk 8, 6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 1, potem je $\chi(G) \leq wp(G) = 5$. Oceno torej dobimo že iz stopenj točk in grafa samega ni treba poznati.

Brez dokaza omenimo še dve oceni kromatičnega števila. Če je G graf, ki ima n točk in m povezav, potem je:

$$n^2/(n^2 - 2m) \leq \chi(G) \leq 1 + (2m(n-1)/n)^{1/2}$$

Če je e dolžina najdaljše poti (pot je sprehod iz samih različnih točk) v grafu G , potem je:

$$\chi(G) \leq e + 1$$

Problem barvanja grafov je NP-težak. Natančneje povedano: za vsako naravno število $k \geq 3$ je odločitveni problem, ali je za dani graf G $\chi(G) \leq k$, NP-poln. Primer $k = 2$ je izjema. Omeniti moramo, da grafom, ki imajo kromatično število manjše ali enako 2, pravimo *dvodelni* (ali *bipartitni*). Tako jih imenujemo zato, ker lahko narišemo točke prve barve na levi, točke druge barve na desni strani, povezave pa potekajo le med levim in desnim delom grafa (glej npr. tretjo skico na sliki 1). Naslednji izrek, ki karakterizira dvodelne grafe, nam pove, da vsak povezan dvodelni graf lahko obarvamo s požrešno metodo tako, da poljubno točko obarvamo s prvo barvo, vse njene sosedje z drugo, vse njihove sosedje zopet z barvo 1 itd.

Izrek 4. (König). Graf je dvodelen natanko tedaj, ko v njem ni nobenega obhoda lihe dolžine.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Če je G obarvan z dvema barvama, gotovo ne more vsebovati obhoda lihe dolžine, ker bi že na tem obhodu morali porabiti vsaj tri barve.

($\Leftarrow$) Če v G nimamo nobenega obhoda lihe dolžine, potem vsako komponento grafa G obarvamo po opisanem postopku. Če bi pri tem prišli do »protislovja«, je jasno, da bi imeli v G obhod lihe dolžine.

Za konec si oglejmo še enega najbolj znanih in najtežjih matematičnih problemov, ki ima zvezo z barvanjem grafov — *problem štirih barv* (več o tem problemu lahko najdemo v [8]). Problem je leta 1852 pokazal Francis Guthrie svojemu bratu, ta pa ga je povedal svojemu profesorju Augustu De Morganu. Sprašuje naslednje: ali se dajo države na poljubnem zemljevidu obarvati s štirimi barvami? Natančneje: recimo, da imamo zemljevid in da želimo pobarvati ozemlja, ki pripadajo posameznim državam tako, da bosta vsaki dve deželi s skupno mejo pobarvani različno. Pri tem predpostavljamo, da je ozemlje vsake države povezano. Ali nam za to zadostujejo že štiri barve, ne glede na to, koliko dežel je in kako so razmeščene? Zemljevidu lahko priredimo (dualni) graf: za točke izberemo »glavna mesta« držav in dve točki sta sosedni, če imata deželi skupen kos meje. Tako dobljeni graf je *planaren*, kar pomeni, da ima tako ravninsko realizacijo, da se sliki nobenih dveh povezav ne sekata. Problem štirih barv lahko formuliramo tudi takole: ali je vsak planaren graf 4-obarvljiv?

Problem štirih barv je bil nerešen do pred nekaj leti. Leta 1976 pa sta Appel in Haken objavila njegovo rešitev [1, 2].

Izrek 5. Vsak planarni graf se da obarvati s štirimi barvami.

Dokaz je izredno zapleten in se v končni fazi reducira na skoraj 2000 posebnih primerov. Ti primeri so bili obdelani z računalnikom, zato nekateri matematiki še vedno mislijo, da izrek štirih barv le ni popolnoma dokazan. Tu ne gre toliko za dvom, ampak za filozofsko vprašanje: kaj je dokaz? Nekateri so mnenja, da je to razmislek, ki smo ga sposobni doumeti in ki nas prepriča, da neka stvar velja. Obstoječi dokaz je predolg in delo računalnika je preveč ločeno od nas, da bi bili z njim popolnoma zadovoljni.

LITERATURA

[1] K. Appel, W. Haken, *The existence of unavoidable sets of geographically good configurations*, Illinois J. Math. **20** (1976) 218—297.

[2] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976) 711—712.

[3] V. Batagelj, *Barvanje grafov*, Informatika (1984).

[4] B. Bollobas, *Graph Theory — An Introductory Course*, Springer, New York 1979.

[5] D. M. Cvetković, M. Milić, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd 1977.

[6] J. Kozak, *Podatkovne strukture in algoritmi*, DMFA SRS, Ljubljana 1984.

[7] M. Petkovšek, T. Pisanski, *Jeziki. NP-polnost. Naloge*, Matematični rokopisi 1, DMFA SRS, Ljubljana 1982.

[8] T. Pisanski, *Problem štirih barv*, Presek **9** (1981/82) 68—70.

[9] F. S. Roberts, *Discrete Mathematical Models*, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N. J., 1976.

NOVEJŠI REZULTATI VEČPARAMETRIČNIH PROBLEMOV

GABRIJEL TOMŠIČ

Math. Subj. Class. (1980): 47 A 70

V sestavku je podana informacija o reševanju večparametričnih problemov v zadnjem času.

RECENT RESULTS FOR MULTIPARAMETER PROBLEMS

In the article the information about recent results for multiparameter problems is given.

Zadnjih nekaj let se je področje, ki se ukvarja z večparametričnimi problemi, obogatilo s številnimi novimi rezultati (gl. [8]). Napredek je dosežen pri obravnavanju večparametričnih problemov v zvezi z diferencialnimi enačbami, matrikami, z integralskimi enačbami, v splošni teoriji, v spektralni teoriji itd. Tudi nelinearni večparametrični problemi so bili deležni prvih obravnav, nekaj pa je bilo storjenega tudi na področju numeričnega reševanja večparametričnih problemov. Brez izpeljav bomo navedli nekaj osnovnih problemov in rezultatov s tega področja matematike.

O definiciji večparametričnega problema, o klasifikaciji in nekih osnovnih pojmi smo brali v članku [16]. Vseeno ponovimo tipičen problem in zato na kratko opišimo običajen večparametrični problem, ki je v zvezi z diferencialnimi enačbami. Vzemimo sistem navadnih diferencialnih enačb z neznanimi funkcijami $y_r(x_r)$, $x_r \in [a_r, b_r]$, $r = 1, 2, \dots, n$

$$y_r''(x_r) + \sum_{s=1}^n [\lambda_s a_{rs}(x_r) - q_r(x_r)] y_r(x_r) = 0 \quad (1)$$

Tu so $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ spektralni parametri in koeficienti $a_{rs}(x_r)$, $q_r(x_r)$ zvezne funkcije na intervalih $[a_r, b_r]$.

Če postavimo v krajiščih posameznih intervalov še robne pogoje tele oblike

$$\begin{aligned} y_r(a_r) \cos \alpha_r - y_r'(a_r) \sin \alpha_r &= 0, & 0 \leq \alpha_r \leq \pi \\ y_r(b_r) \cos \beta_r - y_r'(b_r) \sin \beta_r &= 0, & 0 \leq \beta_r \leq \pi \\ r &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

imamo splošen Sturm-Liouvillov sistem enačb, vsaka enačba ima n parametrov, ki te enačbe povezujejo.

Da si lažje predstavljamo pravkar zapisani sistem, si oglejmo le dvoparametričen primer, ki se glasi

$$\begin{aligned} y_1''(x_1) + [\lambda_1 a_{11}(x_1) + \lambda_2 a_{12}(x_1) - q_1(x_1)] y_1(x_1) &= 0 \\ y_2''(x_2) + [\lambda_1 a_{21}(x_2) + \lambda_2 a_{22}(x_2) - q_2(x_2)] y_2(x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1^*)$$

Naj bo $a_1 = a_2 = 0$ in $b_1 = b_2 = 1$, koeficienti $a_{rs}(x_r)$, $q_r(x_r)$, $r, s = 1, 2$ pa naj bodo realne in zvezne funkcije na intervalu $[0, 1]$. Spektralna parametra sta λ_1 in λ_2 . Zapišimo še za ta dvoparametrični primer robne pogoje

$$\begin{aligned}
y_1(0) \cos \alpha_1 - y_1'(0) \sin \alpha_1 &= 0 & 0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq \pi \\
y_1(1) \cos \beta_1 - y_1'(1) \sin \beta_1 &= 0 \\
y_2(0) \cos \alpha_2 - y_2'(0) \sin \alpha_2 &= 0 & 0 \leq \alpha_2, \beta_2 \leq \pi \\
y_2(1) \cos \beta_2 - y_2'(1) \sin \beta_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2*}$$

To je Sturm-Liouvillov sistem dveh enačb, vsaka pa vsebuje dva parametra. Za ta sistem formuliramo dvoparametrični problem takole: iščemo tak par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, da sta obe enačbi netrivialno rešljivi. Če sta torej $y_1(x_1, \lambda)$ in $y_2(x_2, \lambda)$ ustrezni netrivialni rešitvi sistema (1*), ki izpolnjujeta pogoje (2*), potem imenujemo produkt

$$y_1(x_1, \lambda) \cdot y_2(x_2, \lambda)$$

lastna funkcija sistema, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Postavljeni problem zapišimo še v splošni (abstraktni) obliki. Naj bodo $H_1, H_2, \dots, H_n$ Hilbertovi prostori. V vsakem prostoru H_r , $r = 1, 2, \dots, n$, naj delujejo operatorji A_r, B_{rs} , $r, s = 1, 2, \dots, n$, in sicer naj bodo operatorji

$$A_r: D(A_r) \subset H_r \rightarrow H_r$$

sebi adjungirani in operatorji

$$B_{rs}: H_r \rightarrow H_r$$

sebi adjungirani in zvezni. Splošen linearen n -parametričen problem lahko zapišemo v obliki

$$M_r(\lambda) u_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

kjer je

$$M_r(\lambda) = A_r + \sum_{s=1}^n \lambda_s B_{rs} \tag{4}$$

Take naloge rešujemo v tenzorskem produktu prostorov (gl. npr. [12] pogl. II)

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n$$

in pravimo, da je $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ lastna vrednost, če ima sistem (3) netrivialno rešitev $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n$, $u_r \neq 0$, $r = 1, 2, \dots, n$, ki jo imenujemo lastni vektor.

Zveza med prvotno postavljenim problemom in temle splošnim je očitna, vzemimo le $H_r = L_2(a_r, b_r)$, $B_{rs} y_r(x_r) = a_{rs}(x_r) y_r(x_r)$ in $A_r y_r(x_r) = y_r''(x_r) - q_r(x_r) y_r(x_r)$. Definijsko območje operatorja A_r sestavljajo tiste funkcije $y_r(x_r)$ iz $C_2(a_r, b_r)$, ki zadoščajo še pogojem (2).

Eno od težjih in pomembnih vprašanj pri reševanju večparametričnih problemov je tole: kakšne dodatne pogoje moramo zahtevati, da obstaja rešitev postavljenih nalog?

Pri običajnem Sturm-Liouvillovem problemu

$$y'' + q(x) y' + r(x) y = 0$$

predpostavljamo, da je $r(x) > 0$. Ustrezen pogoj pri dvoparametričnem problemu (1*) se glasi

$$\det [a_{rs}(x_r)]_{r,s=1,2} = \begin{vmatrix} a_{11}(x_1) & a_{12}(x_1) \\ a_{21}(x_2) & a_{22}(x_2) \end{vmatrix} > 0$$

za vsak $x = (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Pri splošnem n -parametričnem problemu pa naj bo

$$\det [a_{rs}(x_r)] > 0, \quad r, s = 1, 2, \dots, n$$

za vsak $x \in [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Take vrste pogoji se imenujejo *definitni pogoji*. V teoriji obstajajo različne variante teh definitnih pogojev. Oglejmo si nekaj primerov teh pogojev pri abstraktnem večparametričnem problemu (3), (4). Problem izpolnjuje pogoj tako imenovane stroge desne skalarne definitnosti, če je

$$\det [(B_{rs} u_r, u_r)] \geq \gamma > 0, \quad r, s = 1, 2, \dots, n$$

za vsak $u_r \in H_r$ in $\|u_r\| = 1$. Tu je $(B_{rs} u_r, u_r)$ skalarni produkt v prostoru H_r . Če zahtevamo le

$$\det [(B_{rs} u_r, u_r)] > 0$$

za vsak $u_r \in H_r$, $\|u_r\| = 1$, je pogoj milejši in pravimo, da je izpolnjen pogoj desne skalarne definitnosti. No, ta pogoj se da še omiliti. Podobno sta definirana leva definitna pogoja.

Kadar rešujemo problem (3), (4) v tenzorskem produktu prostorov, imamo opraviti z induciranimi operatorji. Vsak operator B_{rs} namreč inducira operator $\tilde{B}_{rs}$ v tenzorskem produktu prostorov H , ki ga definiramo s predpisom

$$\tilde{B}_{rs}(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = I_1 u_1 \otimes \dots \otimes B_{rs} u_r \otimes \dots \otimes I_n u_n$$

Tu je I_r identični operator v prostoru H_r . Iz induciranih operatorjev lahko sestavimo determinantni operator Δ_0 takole

$$\Delta_0 = \det [B_{rs}], \quad r, s = 1, 2, \dots, n$$

Za primer navedimo operator Δ_0 za $n = 2$

$$\Delta_0 = \tilde{B}_{11} \tilde{B}_{22} - \tilde{B}_{12} \tilde{B}_{21}$$

Ta definicija ima pomen, ker operatorji $\tilde{B}_{rs}$ komutirajo.

Potrebujemo še pojem: za vektorja $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$ in $y = y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_n$, to sta tako imenovana razstavljiva, definiramo takle skalarni produkt ([12])

$$(\Delta_0 x, y) = \det [(B_{rs} x_r, y_r)], \quad r, s = 1, 2, \dots, n$$

Sedaj lahko prej omenjeni strogi desni definitni pogoj zapišemo takole

$$(\Delta_0 x, x) \geq \gamma > 0$$

za vsak $x \in H$, $\|x\| = 1$. Definitni pogoj torej pomeni, da je skalarni produkt pozitivno definiten. S temi definitnimi pogoji se mnogo ukvarjajo ([1]). V delu [2] so detajlneje obdelane razne oblike definitnih pogojev, zveze med njimi in povedano je tudi, v kakšnih primerih ti pogoji sovpadajo. Nasploh lahko rečemo, da se obravnava definitnih pogojev sedaj intenzivno študira.

Znano je, da lastne funkcije večparametričnega Sturm-Liouvillovega problema sestavljajo poln sistem v danem Hilbertovem prostoru. Torej lahko element f tega prostora razvijemo po lastnih funkcijah v Fourierovo vrsto

tako, da vrsta konvergira k elementu f po normi prostora. Ta vprašanja — razvoj po lastnih funkcijah večparametričnih problemov in polnost sistema lastnih funkcij — zadnje čase zaposlujejo nekatere matematike. Ob teh problemih pa pride do povezave z oscilacijskim izrekom ([5], [10], [11], [13]).

Eden takih zanimivih rezultatov, ki povezuje razvoj po lastnih funkcijah, Kleinov oscilacijski izrek za sistem diferencialnih enačb (1) z robnimi pogoji (2) in še omenjeni strogi desni skalarni definitni pogoj je ([10]): Za vsako n -terico nenegativnih celih števil $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ obstaja taka lastna vrednost λ^p problema (1) z ustrezno lastno funkcijo $y^p(x) = \prod_{r=1}^n y_r^{p_r}(x_r)$, da ima $y_r^{p_r}$ v notranjosti intervala (a_r, b_r) ravno p_r ničel.

Zelo dobro je bila v zadnjem desetletju obdelana *spektralna teorija večparametričnih problemov*. Večina osnovnih rezultatov je zbranih v odlični monografiji B. D. Sleeman, Multiparameter spectral theory in Hilbert space. Nekateri rezultati spektralne teorije so potrebni pri numeričnem reševanju večparametričnih problemov. Pri privzetku o definitnosti (npr. strogi desni definitnosti) se da videti, da eksistira operator Δ_0^{-1} . Potem imajo smisel tile operatorji

$$G_s = \Delta_0^{-1} \Delta_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

kjer so operatorji Δ_s določeni z identiteto

$$\sum_{s=0}^n \alpha_s \Delta_s = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \tilde{A}_1 & \tilde{B}_{11} & \dots & \tilde{B}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{A}_n & \tilde{B}_{n1} & \dots & \tilde{B}_{nn} \end{vmatrix}$$

Tu so $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ poljubna števila. Pri dvoparametričnem problemu se determinanta skrči na trovrstno determinanto.

V tenzorskem produktu prostorov H imamo, kot smo omenili, takole definiran skalarni produkt

$$[x, y] = (\Delta_0 x, y), \quad x, y \in H$$

Glede na ta skalarni produkt so operatorji G_s , $s = 1, 2, \dots, n$ sebi adjungirani. Pokazati se da, da operatorji G_s komutirajo. Na osnovi teh rezultatov je mogoče abstrakten večparametrični problem (3), (4) prevesti na sistem enoparametričnih problemov

$$G_s u = \lambda_s u, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

kjer je $u \in H$, tj. $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n$.

Eden novejših rezultatov s področja spektralne analize je naslednji: če poleg desne definitnosti v problemu (3) zahtevamo še, da so operatorji A_r , $r = 1, 2, \dots, n$ omejeni in imajo kompaktno resolvento, potem se da za $M_r(\lambda)$, $r = 1, 2, \dots, n$ ugotoviti, da ima spekter, ki sestoji le iz lastnih vrednosti, te imajo končno večkratnost in lastne vrednosti se goste le v neskončnosti ([3]). Glavno sredstvo pri iskanju lastnih vrednosti in njihovih lastnosti ob omenjenih predpostavkah so variacijske metode (princip minimaksa). Prvi rezultati te vrste so bili spet povezani s študijem oscilacijskega izreka.

Že iz teh skupih informacij lahko opazimo, da je teorija večparametričnih problemov v zadnjih desetih letih močno napredovala in obstaja zanj dovolj

literature. Res pa je, da ni veliko člankov, ki bi obravnavali *numerično reševanje večparametričnih problemov*. V glavnem je princip numeričnega reševanja konkretnih problemov prevedba na končnorazsežen algebraični problem. Tam so operatorji A_r in B_{rs} kvadratne matrike. V članku [4] je algebraični problem reševan z variacijskimi metodami, v članku [6] sta avtorja uporabila posplošitev Rayleigheve kvocientne iterativne metode, v prispevku [9] pa gradientno metodo.

Eden od mogočih pristopov k numeričnemu reševanju teh problemov je prej omenjena prevedba večparametričnega problema na sistem enoparametričnih problemov v tenzorskem produktu prostorov, da dobimo torej sistem (5), zatem pa ga rešujemo numerično. Po tej poti je uspelo dobiti dokaj enostaven algoritem za določanje lastnih vrednosti ([15]). Ta algoritem ima prednost, da ohranja vrstni red lastnih vrednosti. Metoda se izkaže za praktično, če matrike niso prevelikih redov.

Prav tako se dajo numerično reševati večparametrični problemi za integralne enačbe. Za ilustracijo zapišimo tak dvoparametrični problem

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda_1 \int_a^b J(x, y) u(y) dy + \lambda_2 \int_a^b K(x, y) u(y) dy \\ v(x) &= \lambda_1 \int_a^b L(x, y) v(y) dy + \lambda_2 \int_a^b M(x, y) v(y) dy \end{aligned}$$

Tu je (λ_1, λ_2) par lastnih vrednosti, $(u(x), v(x))$ ustrezen par lastnih funkcij in $J(x, y)$, $K(x, y)$, $L(x, y)$, $M(x, y)$ jedra štirih integralnih operatorjev, za katera običajno zahtevamo, da so zvezne in gladke funkcije na nekem pravokotniku $[a, b] \times [a, b]$. Za diskretizacijo, to je prevedbo na algebraični problem, so navadno uporabljene te numerične metode: metoda kvadrature, metoda aproksimacije jeder z degeneriranimi jedri in Galerkinova metoda. Dobljeni algebraični problem rešujemo z eno od prej omenjenih metod ([7]). Seveda nastanejo pri diskretizaciji napake, vendar se dajo te napake v določenih primerih analizirati in konstruirati asimptotične vrste za lastne vrednosti ([14]).

Za reševanje konkretnih večparametričnih problemov je numerično reševanje navadno edina možnost. S to ugotovitvijo končajmo informacijo o trenutnem stanju reševanja večparametričnih problemov lastnih vrednosti.

LITERATURA

- [1] Binding P. A., *Multiparameter definiteness conditions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **89 A** (1981) 319—332.
- [2] Binding P. A., *Multiparameter definiteness conditions II*, izide ib.
- [3] Binding P. A., Browne P. J., *A variational approach to multiparameter eigenvalue problems in Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal. **9** (1978) 1054—1067.
- [4] Binding P. A., Browne P. J., *Spectral properties of two-parameter eigenvalue problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **89 A** (1981) 157—173.
- [5] Binding P. A., *Abstract oscillation theorems for multiparameter eigenvalue problems*, J. Diff. Eq. **49** (1983) 331—343.
- [6] Blum E. K., Chang A. F., *A numerical method for solution of double eigenvalue problem*, J. Inst. Math. Appl. **22** (1978) 29—42.
- [7] Bohte Z., *Numerical solution of some two-parameter eigenvalue problems*, Spom. zb. A. Kuhlja SAZU (1982) 17—28.

- [8] Browne P. J., *Multiparameter problems: The last decade*, Lect. Notes Math. 964 (1983) 95—109.
- [9] Browne P. J., Sleeman B. D., *A numerical technique for multiparameter eigenvalue problems*, IMA J. of Num. Anal. 2 (1982) 451—457.
- [10] Faierman M., *The completeness and expansion theorems associated with the multiparameter eigenvalue problem in ordinary differential equations*, J. Diff. Eq. 5 (1969) 179—213.
- [11] Faierman M., *An oscillation theorem for two-parameter system of differential equations*, Quaestiones Math. 3 (1979) 313—321.
- [12] Prugovečki E., *Quantum mechanics in Hilbert space*, Ac. Press 1981.
- [13] Sleeman B. D., *Klein oscillation theorems for multiparameter eigenvalue problems in ordinary differential equations*, Nieuw Arch. v. Wisk. (3), XXVII (1979) 341—362.
- [14] Slivnik T., Tomšič G., *Numerical solution of two-parameter problems in integral equations*, III. Conf. Appl. Math., Novi sad (1982) 83—93.
- [15] Slivnik T., Tomšič G., *A numerical method for the solution of two-parameter eigenvalue problems*, izide J. Camp. and Appl. Math.
- [16] Slivnik T., Tomšič G., *O večparametričnih problemih*, Obzornik mat. fiz. 27 (1980) 163—167.

NOVE KNJIGE

ŽILJAK V., Simulacija računalom, Školska knjiga, Zagreb 1982, 245 str.

Pojav elektronskih računalnikov je povzročil, da so iz zaprašenih predalov prišle na svetlo mnoge že skoraj pozabljene ideje (npr. Laguerrova metoda za reševanje algebraskih enačb), obenem pa so zaradi njih nastala nova samostojna znanstvena področja. Med slednje lahko prištevamo tudi računalniško simulacijo. Knjiga je pri nas eden prvih poskusov celovite predstavitve osnov te teorije. Računalniška simulacija je po svoji naravi eksperimentalna znanost in bi ji zato lahko v nekem smislu očitati matematično nestrogost. Uporabimo jo na problemih, za katere je matematična ali statistična analiza preobsežna ali pa sploh ne da rezultata. Po drugi strani bi si pogosto želeli bolje spoznati mehanizme delovanja v obsežnih realnih procesih.

Prvo poglavje nas seznani z osnovnimi pojmi teorije: sistem, model, program, simulacija. Drugo poglavje obravnava statistične osnove simulacije, pri čemer ima osnovno vlogo slučajno generiranje števil in slučajnih spremenljivk. Ob tem je potrebna tudi analiza podatkov in celotnega eksperimenta. Naslednje poglavje je posvečeno simulacijskim jezikom. V kratki zgodovini simulacije jih je bilo razvito kar lepo število, vendar jih je le peščica ostala pri življenju. Med njimi je GPSS (General Purpose Simulation System), ki je precej razširjen tudi na naših računalnikih, zato mu je posvečena večina poglavja. Zadnja tri poglavja obravnavajo konkretne primere simulacij, ki so vse realizirane s pomočjo jezika GPSS. Med njimi zavzemata posebno mesto simulacija računalnika in čakalnih vrst. Knjiga ni pretežka in je tako dobrodošel pripomoček vsem uporabnikom (inženirjem, ekonomistom, sociologom, psihologom), ki se s simulacijo srečujejo v vsakdanji praksi, tistim, ki se s tem področjem šele seznajajo, pa je primerna tudi kot učbenik. Na koncu vsakega poglavja je navedena obsežna bibliografija, tako da radovedni bralec ne bo v zadregi, kje iskati dodatno znanje.

Sandi Klavžar

ELEMENTARNI OPERATORJI NA MATRIČNIH ALGEBRAH

JANKO GRAVNER

Math. Subj. Class. (1980) 15 A 18, 15 A 24

V tem članku so izpeljane nekatere izmed osnovnih lastnosti združenega spektra za operatorje na končnorazsežnih Hilbertovih prostorih. Nato je izračunan spekter elementarnega operatorja v primeru, da je vsaj ena od večteric, ki ga definirajo, komutativna.

ELEMENTARY OPERATORS ON ALGEBRAS OF MATRICES

In this article, some basic properties of the joint spectrum of operators on finite-dimensional Hilbert spaces are considered. As an application, spectrum of an elementary operator is characterised, when one of the defining n -tuples is commutative.

0. Uvod

Ogledali si bomo lastne vrednosti operatorja, ki matriki X priredi vsoto $A_1 X B_1 + \dots + A_n X B_n$. Teh operatorjev se je prijel vzdevek »elementarni«. Prva sta jih obravnavala G. Lumer in M. Rosenblum v članku [5], pozneje so doživeli še obširno matematično publiciteto (omenimo morda članke [1], [2] in [4]). Da bi poenostavili pisavo, bomo najprej uvedli nekaj okrajšav.

0.1. DOGOVORI IN DEFINICIJE. Naj bo $\mathcal{H}$ končnorazsežen Hilbertov prostor z običajnim skalarnim produktom. Z $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bomo označili množico linearnih operatorjev na $\mathcal{H}$. Direktno vsoto n primerkov prostora $\mathcal{H}$ bomo označili s $\mathcal{H}^n$, torej $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}$. Operatorje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bomo združevali v n -terice, te pa bomo označevali polkrepko, npr. $A = (A_1, \dots, A_n)$. Množico vseh n -teric operatorjev na $\mathcal{H}$ označimo z $\mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. Rekli bomo, da je n -terica komutativna, če je $A_i A_j = A_j A_i$ za $i, j = 1, \dots, n$. Dve večterici A in B komutirata, če je $A_i B_j = B_j A_i$ za poljubna i in j .

Večterice kompleksnih števil bodo nastopale v dveh vlogah, enkrat pač kot elementi $\mathcal{H}$, drugič pa kot točke v združenem spektru (katerega definicija sledi), zato jih bomo v drugem primeru podčrtovali, na primer $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

Za poljubni n -terici $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ uvedemo okrajšavo $A \cdot B = A_1 B_1 + \dots + A_n B_n$. Za $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^n$ definiramo analogno $\lambda \cdot \mu$ in $\lambda \cdot A$. Za operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ in vektor $x \in \mathcal{H}$ lahko definiramo $A X = (A_1 X, \dots, A_n X) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$, $X A = (X A_1, \dots, X A_n)$ in $A x = (A_1 x, \dots, A_n x) \in \mathcal{H}^n$. Vsota n -teric in množenje n -terice s skalarjem sta definirana na običajen način. K dani n -terici A adjungirana n -terica A^* je seveda sestavljena iz adjungiranih operatorjev iz A . Ker bomo tudi konjugiranje v $\mathbb{C}$ označili z $*$, bo za množico $S \subset \mathbb{C}^n$ $S^* = \{\lambda^*, \lambda \in S\}$.

Fiksirajmo končnorazsežna Hilbertova prostora $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ ter n -terici $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)^n$ in $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)^n$. Elementarni operator $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A, B)$ potem operatorju $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ priredi operator $A X \cdot B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Torej je $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1))$.

(Tukaj smo na primer oznako $A X$ uporabili v nekoliko bolj splošnem pomenu, ker imamo pač dva prostora.)

Eno od najbolj zanimivih vprašanj v zvezi z elementarnimi operatorji je naslednje. Kako lastne vrednosti operatorja $\mathcal{R}(A, B)$ izraziti z lastnimi vrednostmi operatorjev, ki ga definirajo? Popoln odgovor še ni znan, za zdaj je treba predpostaviti, da je vsaj ena od n -teric, ki določajo omenjeni operator, komutativna. Ta primer je prvi razrešil R. Harte ([3]) in njegove metode so tesno povezane s pojmom, ki ga bomo uvedli v naslednjem razdelku.

I. Združeni spekter

I.1. DEFINICIJA. Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. Potem je n -terica $\lambda \in \mathbb{C}^n$ združena lastna vrednost n -terice A , če obstaja tak neničeln vektor $x \in \mathcal{H}$, da je $(A - \lambda)x = 0$. Takemu vektorju rečemo združeni lastni vektor n -terice A . Množici vseh združenih lastnih vrednosti rečemo spekter A in jo označimo s $\sigma(A)$.

Če je $n = 1$ in torej $A = (A_1)$, se seveda $\sigma(A)$ ujema z množico (običajnih) lastnih vrednosti operatorja A_1 .

I.2. IZREK. Naj bo $\lambda \in \mathbb{C}^n$ in $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$. Naslednje trditve so ekvivalentne.

- (a) $\lambda \notin \sigma(A)$.
- (b) Obstaja taka n -terica $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$, da je $B \cdot (A - \lambda) = I$.
- (c) Operator $A^\sim: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^n$, definiran z enačbo $A^\sim x = ((A_1 - \lambda_1)x, \dots, (A_n - \lambda_n)x)$, je injektiven.
- (č) Operator $(A - \lambda)^* \cdot (A - \lambda)$ je neizrojen.

DOKAZ. Trditvi (a) in (c) sta očitno ekvivalentni. Iz (b) jasno sledi (a). Iz (a) sledi, da je operator iz (č) injektiven. Res, če je $(A - \lambda)^* \cdot (A - \lambda)x = 0$, potem velja

$$0 = \langle (A - \lambda)^* \cdot (A - \lambda)x, x \rangle = \langle (A - \lambda)x, x \rangle \\ \langle (A - \lambda)x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \|(A_i - \lambda_i)x\|^2$$

Torej je $(A - \lambda)x = 0$ in po (a) je $x = 0$. Ker je operator $(A - \lambda)^* \cdot (A - \lambda)$ injektiven, je obrnljiv, torej velja (č).

Iz (č) sledi (b), kajti če je C inverz za $(A - \lambda)^* \cdot (A - \lambda)$, lahko definiramo $B = C(A - \lambda)^*$, ki očitno ustreza (b). $\square$

Za večterici $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n)$ in $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^m$ je $\sigma(A, B)$ seveda spekter $(n + m)$ -terice $(A, B) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{n+m}$. Ker je lahko videti, da je $\sigma(A, B) \subset \sigma(A) \times \sigma(B)$ in zato $\sigma(A) \subset \sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n)$, je $\sigma(A)$ vedno končna množica. Naslednja primera pa bosta pokazala, da spekter n -terice vendar nima istih lastnosti kot spekter operatorja.

Vse matrične predstavitve operatorjev na $\mathbb{C}^r$ bodo vedno mišljene glede na naravno bazo.

I.3. PRIMER. Naj bo $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $A = (A_1, A_2)$. Edina točka, ki bi lahko bila v združenem spektru $\sigma(A)$, je $(0, 0)$, toda enačba $A_2 A_1 + A_1 A_2 = I$ jo izloči, torej je $\sigma(A) = \emptyset$. $\square$

I.4. PRIMER. Naj bo $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, tokrat pa $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $A = (A_1, A_2)$. Lahko je videti, da je $(0, 0) \in \sigma(A^*)$, toda $(0, 0) \notin \sigma(A)$. $\square$

Kot bomo videli, je razlog za »čudno obnašanje« spektrov v zgornjih dveh primerih to, da n -terici nista komutativni.

Naj bo f polinom in $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Izrek o preslikavi spektra pove, da je $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$, torej je množica lastnih vrednosti operatorja $f(A)$ točno $\{f(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$. Ali velja kaj podobnega za združeni spekter? Za komutativne n -terice je odgovor pozitiven in to je najbrž najpomembnejši *raison d'être* združenega spektra.

Označimo s $P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^m$ množico m -teric $f = (f_1, \dots, f_m)$, kjer so f_j polinomi v n nekomutativnih spremenljivkah in je za $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $f(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$.

I.5. LEMA. Naj bo $f \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^m$ in $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Potem obstaja taka n -terica polinomov $f^\vee \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^n$, da je $f(A) - f(\lambda) = f^\vee(A) \cdot (A - \lambda)$.

DOKAZ. Če je f konstanta, lema velja, saj lahko vzamemo $f^\vee = 0$. Če je f koordinatna funkcija z_j za kak j , to pač pomeni $z_j((A_1, \dots, A_n)) = A_j$, potem je $f^\vee = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Naj lema velja za polinoma $g, h \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^m$. Potem velja tudi za $f = g + h$, vzamemo pač $f^\vee = g^\vee + h^\vee$. Prav tako velja za $f = g \cdot h$, v tem primeru je namreč

$$\begin{aligned} f(A) - f(\lambda) &= h(\lambda) (g(A) - g(\lambda)) + g(A) (h(A) - h(\lambda)) = \\ &= h(\lambda) g^\vee(A) \cdot (A - \lambda) + g(A) h^\vee(A) \cdot (A - \lambda) \end{aligned}$$

tedaj $f(A)^\vee = h(\lambda) g^\vee(A) + g(A) h^\vee(A)$.

S tem je lema dokazana, saj koordinatne funkcije in konstante generirajo algebro $P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)$. $\square$

Iz tega že lahko dokažemo »enosmerni« izrek o preslikavi spektra.

I.6. TRDITEV. Za poljubni večterici $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ in $f \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^m$ velja $f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A))$.

DOKAZ. Naj bo $\lambda \in \sigma(A)$, x ustrezeni združeni lastni vektor in fiksirajmo j , $1 \leq j \leq m$. Po I.5 obstaja taka n -terica $f_j^\vee \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^n$, da je $f_j(A) - f_j(\lambda) = f_j^\vee(A) \cdot (A - \lambda)$. Torej je $(f_j(A) - f_j(\lambda))x = 0$.

Ker to velja za vsak j , je $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$. $\square$

I.7. POSLEDICA. Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ in $g \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^m$. Potem za $(n+m)$ -terico polinomov $f \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^{n+m}$, ki je definirana z enačbo $f(z) = (z, g(z))$, velja enačba $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Skratka, če večterica polinomov vsebuje tudi vse koordinatne funkcije, izrek o preslikavi spektra velja.

DOKAZ. Po prejšnji trditvi je

$$f(\sigma(A)) = \{(\lambda, g(\lambda)), \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(A, g(A))$$

Predpostavimo, da je $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, g(A))$. Treba je videti, da je $\mu = g(\lambda)$. V ta namen vzemimo polinom $h \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^{n+m})^m$, definiran z enačbo $h(X, Y) = Y - g(X)$ za $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ in $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^m$. Če prejšnjo trditev še enkrat uporabimo, dobimo

$$\mu - g(\lambda) = h(\lambda, \mu) \in h(\sigma(A, g(A))) \subset \sigma(h(A, g(A))) = \sigma(0, \dots, 0) = \{(0, \dots, 0)\}$$

torej je $\mu - g(\lambda) = 0$. $\square$

Čisto v splošnem izrek o preslikavi spektra seveda ne drži. Če je na primer $\sigma(A) = \emptyset$ in $f = z_1$ koordinatna funkcija, je $\sigma(z_1(A)) \neq \emptyset$, čeprav je $z_1(\sigma(A)) = \emptyset$.

I.8. LEMA. Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ komutativna n -terica in naj komutira z n -terico $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^m$. Potem je

$$\sigma(B) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \{ \mu \in \mathbb{C}^m, (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B) \}$$

DOKAZ. Čim je $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$, je $\mu \in \sigma(B)$, torej je desna stran zgornje enačbe vsebovana v levi.

Naj bo $\mu \in \sigma(B)$ in $\mathcal{J}$ netrivialen podprostor, sestavljen iz združenih lastnih vektorjev za to lastno vrednost. Ker A_1 komutira z vsemi operatorji iz B , je $\mathcal{J}$ invarianten za operator A_1 . Vzemimo poljubno število $\lambda_1 \in \sigma(A_1|_{\mathcal{J}})$ ($\sigma(A_1|_{\mathcal{J}})$ je neprazna množica). Tedaj je $(\lambda_1, \mu) \in \sigma(A_1, B)$. Z indukcijo lahko na očitni način sestavimo n -terico λ , za katero velja $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$. $\square$

I.9. IZREK. Če je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ komutativna n -terica, je $\sigma(A) \neq \emptyset$ in za vsako n -terico polinomov $f \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^n)^m$ je $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

DOKAZ. Vzemimo $\mu \in \sigma(f(A))$. Po I.8 obstaja taka n -terica $\lambda \in \mathbb{C}^n$, da je $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, f(A))$. Po I.7 pa je $\lambda \in \sigma(A)$ in $\mu = f(\lambda)$, torej je $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$. Obratna inkluzija sledi iz I.6. Iz tega je očitno $\sigma(A) \neq \emptyset$. $\square$

Med drugim je torej združeni spekter komutativne n -terice $(A_1, \dots, A_n)$ dovolj velik, da prve komponente točk v njem tvorijo točno $\sigma(A_1)$. Isto seveda velja tudi za vse druge operatorje v n -terici.

Oglejmo si nekaj (najbrž znanih) posledic.

I.10. POSLEDICA. Če operatorja $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ komutirata, je $\sigma(A + B) \subset \sigma(A) + \sigma(B)$ in $\sigma(AB) \subset \sigma(A)\sigma(B)$.

Opomba. Seveda je $\sigma(A) + \sigma(B) = \{\alpha + \beta, \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}$ in podobno velja za produkt.

DOKAZ. Vzemimo par $(A, B) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^2$ in polinom g , ki paru priredi vsoto komponent. Po I.9 je tedaj $\sigma(A + B) = \sigma(g(A, B)) = g(\sigma(A, B)) \subset g(\sigma(A) \times \sigma(B)) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Enako seveda pokažemo drugo inkluzijo. $\square$

I.11. POSLEDICA. Če operatorja A in Q iz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ komutirata in je Q nilpotenten, je $\sigma(A + Q) = \sigma(A)$. $\square$

DOKAZ. Prepuščamo bralcu.

I.12. POSLEDICA. Če operatorji $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ komutirajo, obstaja taka ortonormirana baza $\mathcal{H}$, da imajo glede na to bazo vsi operatorji zgornje trikotno matriko.

DOKAZ. Operatorje združimo v n -terico A . Potem obstaja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma(A)$. Netrivialni skupni ničelni podprostor operatorjev iz n -terice $A - \lambda$ označimo z $\mathcal{J}$. Razcepimo $\mathcal{H} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}^\perp$ in si oglejmo bločne matrike, ki pripadajo operatorjem A_i glede na ta direktni razcep:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & A_i^{(1)} \\ \lambda_i & A_i^{(2)} \end{bmatrix}$$

kjer λ_i seveda označuje skalarni operator na $\mathcal{J}$. Kratek račun pokaže, da tudi operatorji $A_i^{(2)}$ med sabo komutirajo. Torej smo problemu »znižali dimenzijo«, $\mathcal{H}$ pač lahko zamenjamo z $\mathcal{J}^\perp$ in A_i z $A_i^{(2)}$. Z očitno uporabo popolne indukcije je dokaz končan. $\square$

I.13. POSLEDICA. Za komutativno n -terico $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ velja $\sigma(A^*) = \sigma(A)^*$.

DOKAZ. Prepuščamo bralcu. $\square$

I.14. POSLEDICA. Če za komutativno n -terico $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ obstaja taka n -terica $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$, da je $A \cdot B = I$, obstaja taka n -terica $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ (ne nujno enaka B), da velja $C \cdot A = I$. (Tudi to za nekomutativne n -terice ne velja.)

DOKAZ. Prepuščamo bralcu. $\square$

V zvezi s preslikavo spektra potrebujemo še tole preprosto trditev.

I.15. TRDITEV. Imejmo večterice $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^m$, $\mu \in \mathbb{C}^m$ in $g \in P(\mathcal{L}(\mathcal{H})^{m+n})^p$. Če A in B komutirata, je

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^p, (\lambda, \mu) \in \sigma(g(A, B), B)\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^p, (\lambda, \mu) \in \sigma(g(A, \mu), B)\}$$

DOKAZ. Fiksirajmo $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Naj bo $(\lambda, \mu) \in \sigma(g(A, B), B)$ in x ustrezni združeni lastni vektor. Potem je med drugim $(B - \mu)x = 0$. Toda v tem primeru je $g(A, B)x = g(A, \mu)x$ (ker A in B komutirata). Torej je $(g(A, \mu) - \lambda)x = 0$ in $(\lambda, \mu) \in \sigma(g(A, \mu), B)$. S tem smo dokazali eno od inkluzij, obratno dokažemo prav tako. $\square$

II. Spekter elementarnih operatorjev

Za operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ naj bo $L(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1))$ operator, ki operatorju $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ priredi operator $AX \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Operatorju $L(A)$ rečemo levo množenje z operatorjem A . Če je $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, je desno množenje $R(B)$ seveda operator, definiran takole $R(B)X = XB$. Opazimo najprej tole: za poljubna A in B velja $L(A)R(B) = R(B)L(A)$. Priredimo sedaj n -terici operatorjev $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)^n$ n -terico levih množenj $L(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)^n$, n -terici $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)^n$ pa n -terico desnih množenj $R(B) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)^n$. Elementarni operator $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A, B)$ potem lahko zapišemo tudi takole: $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n L(A_i)R(B_i) = L(A) \cdot R(B)$.

II.1. LEMA. Če je A poljubna n -terica in B komutativna m -terica, velja $\sigma(L(A), R(B)) = \sigma(A) \times \sigma(B)$.

DOKAZ. Najprej pokažimo, da je $\sigma(L(A)) \subset \sigma(A)$. Iz $\lambda \in \sigma(L(A))$ sledi, da obstaja tak neničeln operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, da je za vsak i $(L(A_i) - \lambda_i)X = 0$, tedaj $A_i X = \lambda_i X$. Naj bo vektor $x \in \mathcal{H}_2$ tak, da je $Xx \neq 0$. Potem je seveda $A_i Xx = \lambda_i Xx$ in $(A - \lambda)Xx = 0$, torej je $\lambda \in \sigma(A)$. Naj bo sedaj $\lambda \in \sigma(R(B))$. Potem obstaja tak neničeln $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, da velja $XB_i = \lambda_i X$, tedaj $B_i^* X^* = \lambda_i^* X^*$. Torej je $\lambda^* \in \sigma(B^*) = \sigma(B)^*$ in $\lambda \in \sigma(B)$.

Iz doslej dokazanega sledi $\sigma(L(A), R(B)) \subset \sigma(L(A)) \times \sigma(R(B)) \subset \sigma(A) \times \sigma(B)$. Dokazati je treba še obratno inkluzijo.

Vzemimo torej $\lambda \in \sigma(A)$ in $\mu \in \sigma(B)$. Tedaj obstaja tak $x \in \mathcal{H}_1$, da je $(A - \lambda)x = 0$ in, ker je $\mu^* \in \sigma(B^*)$, tak $y \in \mathcal{H}_2$, da je $(B^* - \mu^*)y = 0$.

Označimo z $x \otimes y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ operator, ki vektorju $t \in \mathcal{H}_2$ priredi vektor $\langle t, y \rangle x \in \mathcal{H}_1$. To je seveda linearen operator. Za fiksen i in $t \in \mathcal{H}_2$ si oglejmo

$$\begin{aligned} ((L(A_i) - \lambda_i)(x \otimes y))(t) &= (A_i - \lambda_i)(\langle t, y \rangle x) = \langle t, y \rangle (A_i - \lambda_i)x = 0 \\ ((R(B_i) - \mu_i)(x \otimes y))(t) &= (x \otimes y)((B_i - \mu_i)t) = \\ &= \langle (B_i - \mu_i)t, y \rangle x = \langle t, (B_i^* - \mu_i^*)y \rangle x = 0 \end{aligned}$$

Torej je $((L(A), R(B)) - (\lambda, \mu))(x \otimes y) = 0$ in seveda je $x \otimes y \neq 0$, če sta x in y neničelna. Potem pa je $(\lambda, \mu) \in \sigma(L(A), R(B))$, $\sigma(A) \times \sigma(B) \subset \sigma(L(A), R(B))$ in lema je dokazana. $\square$

II.2. IZREK. Bodita $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)^n$ in $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)^n$ poljubni n -terici, ki definirata elementarni operator $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A, B) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1))$.

(a) V primeru, da je A komutativna, je $\sigma(\mathcal{R}) = \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \sigma(\lambda \cdot B)$ in,

(b) če je B komutativna, je $\sigma(\mathcal{R}) = \bigcup_{\lambda \in \sigma(B)} \sigma(\lambda \cdot A)$.

DOKAZ. Z g označimo polinom, ki $2n$ -terici $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ priredi $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. V primeru, da je A komutativna, je potem

$$\begin{aligned} \sigma(L(A) \cdot R(B)) &= \sigma(g(L(A), R(B))) = \\ (\text{po I.8}) \quad &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \{ \mu \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \in \sigma(L(A), g(L(A), R(B))) \} = \\ (\text{po I.15}) \quad &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \{ \mu \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \in \sigma(L(A), g(\lambda, R(B))) \} = \\ &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \{ \mu \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \in \sigma(L(A), R(g(\lambda, B))) \} = \\ (\text{po II.1}) \quad &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^n} \{ \mu \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(\lambda \cdot B) \} = \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \sigma(\lambda \cdot B) \end{aligned}$$

Če pa je komutativna B , dokaz poteka enako. $\square$

II.3. POSLEDICA. Če sta A in B komutativni n -terici, velja $\sigma(\mathcal{R}(A, B)) = \sigma(A) \cdot \sigma(B)$.

DOKAZ. To sledi iz II.2 in I.9. $\square$

II.4. POSLEDICA. Če za operatorja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ in $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ter polinoma $f \in P(\mathcal{H}_1)^n$ in $g \in P(\mathcal{H}_2)^n$ velja $A = f(A)$ in $B = g(B)$, potem je $\sigma(\mathcal{R}(A, B)) = f(\sigma(A)) \cdot g(\sigma(B))$.

DOKAZ. To pa sledi iz II.3 in I.9. $\square$

Vzemimo sedaj $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^r$ in $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^s$ z naravnima bazama. Operatorje bomo tako kar identificirali z ustreznimi matrikami. Tenzorski produkt matrik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^r)$ in $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^s)$ je matrika $A \otimes B$ reda $rs \times rs$, ki jo dobimo, če vsak element a_{ij} matrike A nadomestimo z matriko $a_{ij} B$.

Označimo z $D_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ matriko, ki ima na mestu (i, j) enojko, sicer pa same ničle. Množica $\{D_{1,1}, \dots, D_{1,s}, \dots, D_{r,1}, \dots, D_{r,s}\}$ tvori bazo prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Kratek račun pokaže, da je matrika, ki pripada operatorju $\mathcal{R}(A, B)$ v omenjeni bazi ravno tenzorski produkt matrik A in B^T . Ker je (s pomočjo I.2 in I.14) lahko videti, da je za komutirajoče operatorje $B_1, \dots, B_n$ $\sigma(B_1, \dots, B_n) = \sigma(B_1^T, \dots, B_n^T)$, smo s tem pokazali naslednjo posledico.

II.5. POSLEDICA. Če je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)^n$ komutativna n -terica matrik, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)^n$ pa poljubna n -terica, velja

$$\sigma(A_1 \otimes B_1 + \dots + A_n \otimes B_n) = \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \sigma(\lambda \cdot B)$$

Seveda analogna trditev velja, če je B komutativna.

Posebej je torej za matriki A in B $\sigma(A \otimes B) = \sigma(A) \sigma(B)$ in $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. $\square$

LITERATURA

- [1] R. Curto, *The spectra of elementary operators*. Ind. Univ. Math. J. **32** (1983) 193—197.
- [2] C. K. Fong, A. R. Sorour, *On the operator identity $\sum A_k X B_k = 0$* . Can. J. Math. **31** (1979) 845—857.
- [3] R. Harte, *Spectral mapping theorems*. Proc. R. Ir. Acad. **72 A** (1972) 89—107.
- [4] R. Harte, *Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorems*. Proc. R. Ir. Acad. **73 A** (1973) 285—302.
- [5] G. Lumer, M. Rosenblum, *Linear operator equations*. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 32—41.

TRANSFINITE PLOSKVE — INTERPOLACIJA NA PRAVOKOTNIKIH

MIRO GERM

Math. Subj. Class. (1980) 65 D 05

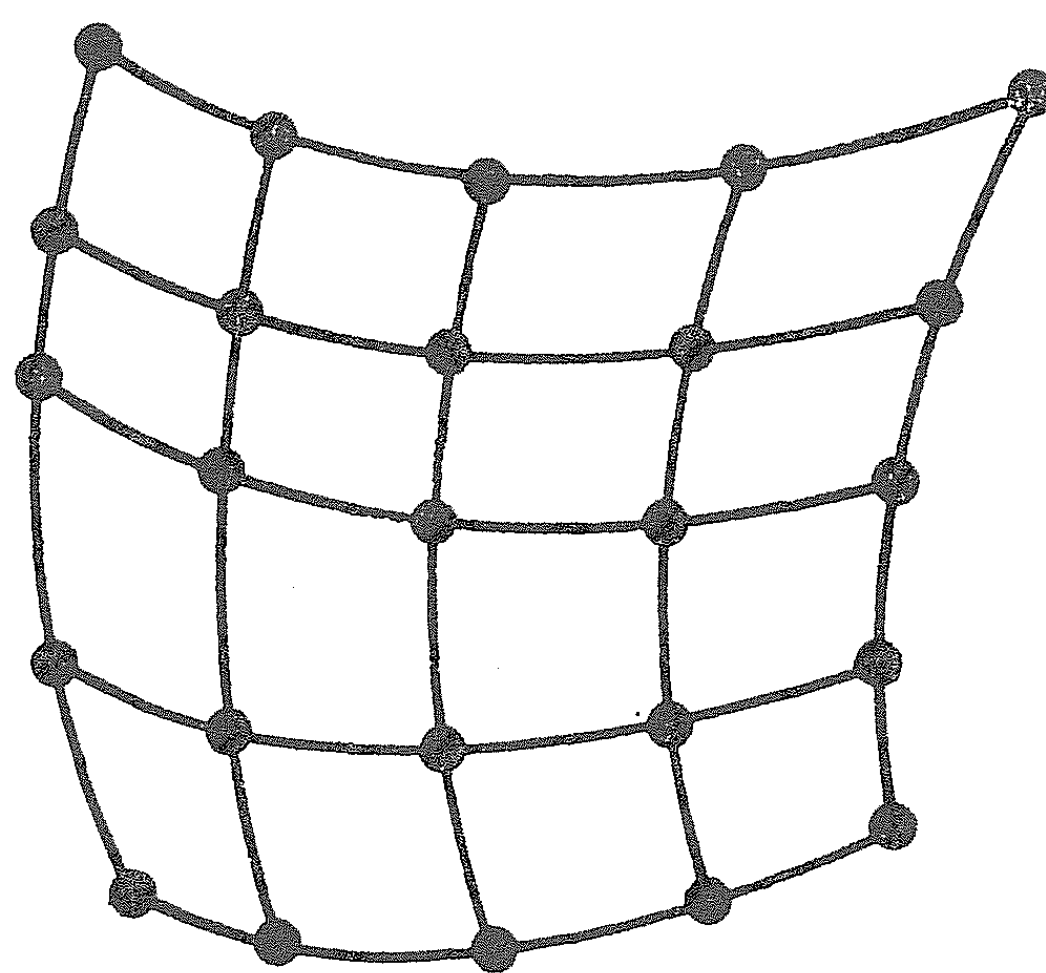
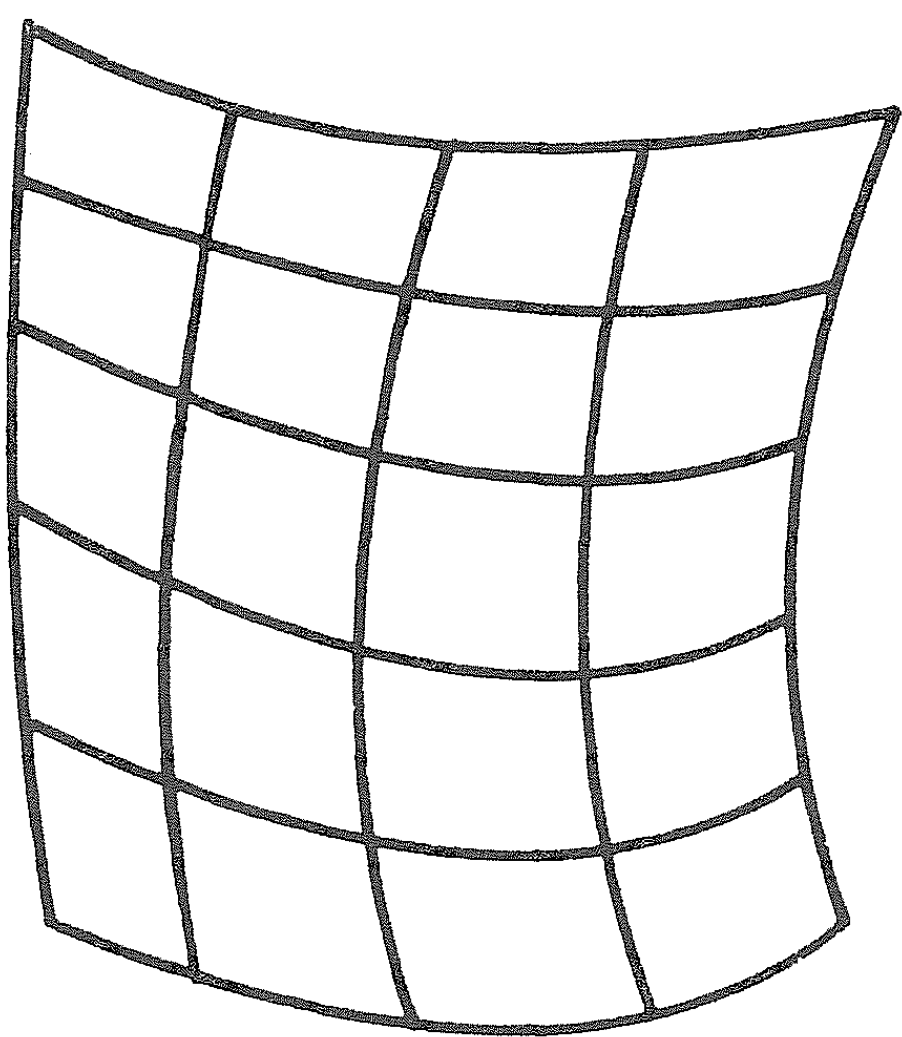
Članek poda pregled Coonsovih krp ter Gregoryjevega, Littleovega in Brownovega kvadrata. Obravnava problem zvitosti ploskve in rešitve v posameznih shemah.

TRANSFINITE SURFACES — INTERPOLATION OVER RECTANGLES

The article describes Coons' patches and Gregory's, Little's and Brown's square. The problem of twists and ways of solving it in different schemes is considered.

Uvod

Ploskve splošne oblike se uporabljajo na najrazličnejših področjih v industriji in znanosti. Sheme za definicijo ploskev temeljijo na interpolaciji ali aproksimaciji, so lahko lokalne ali globalne, odvisno od zahtev uporabe. Interpolacijske metode so lahko metode »točk« ali »krp«, odvisno od podatkov, s katerimi opišemo ploskev. Pri prvih so osnovni podatki diskretne točke, pri drugih pa robne krivulje krp, iz katerih je sestavljena ploskev.



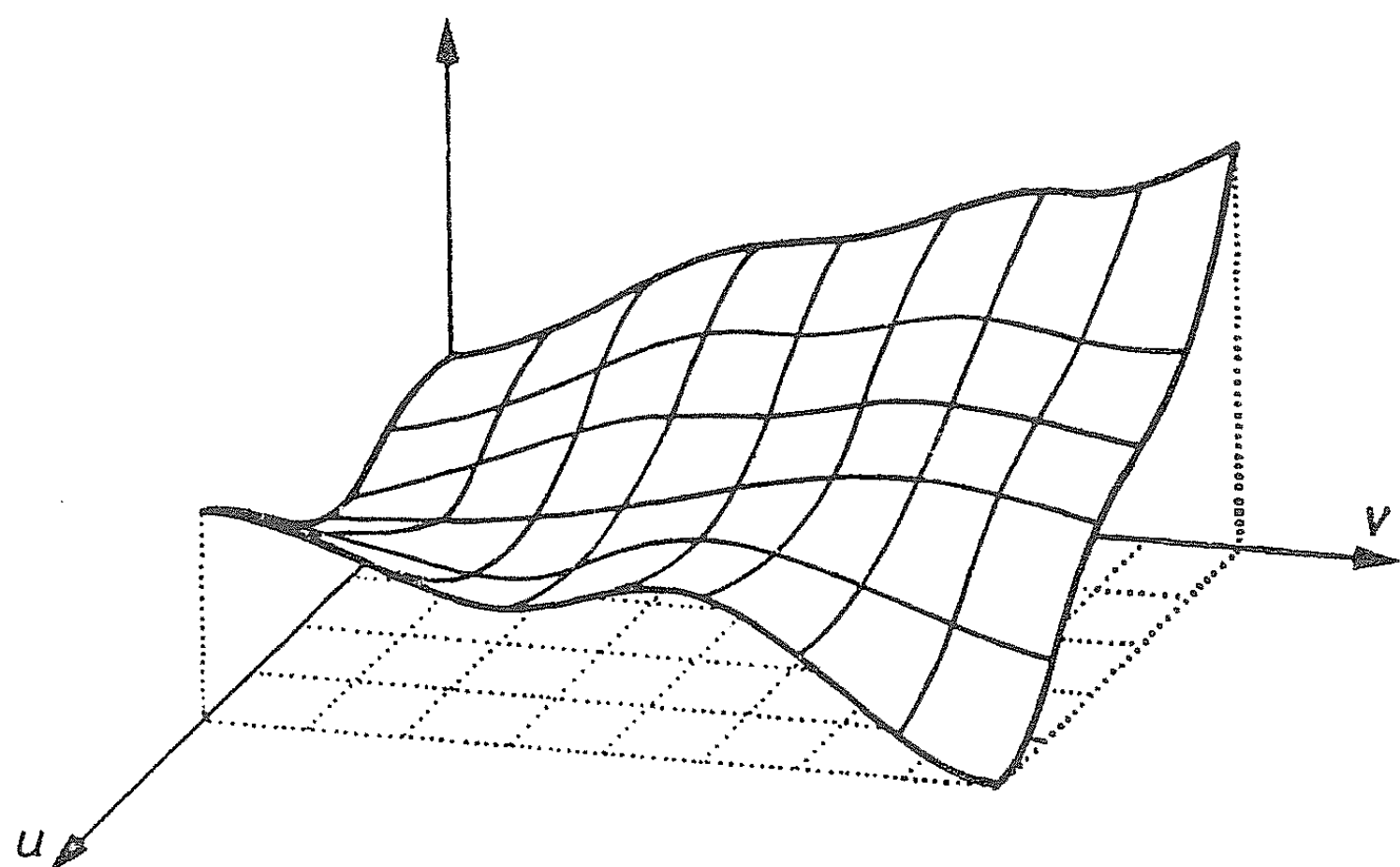
Slika 1

Podan bo pregled interpolacijskih shem »krp« za opis ploskev dveh spremenljivk.

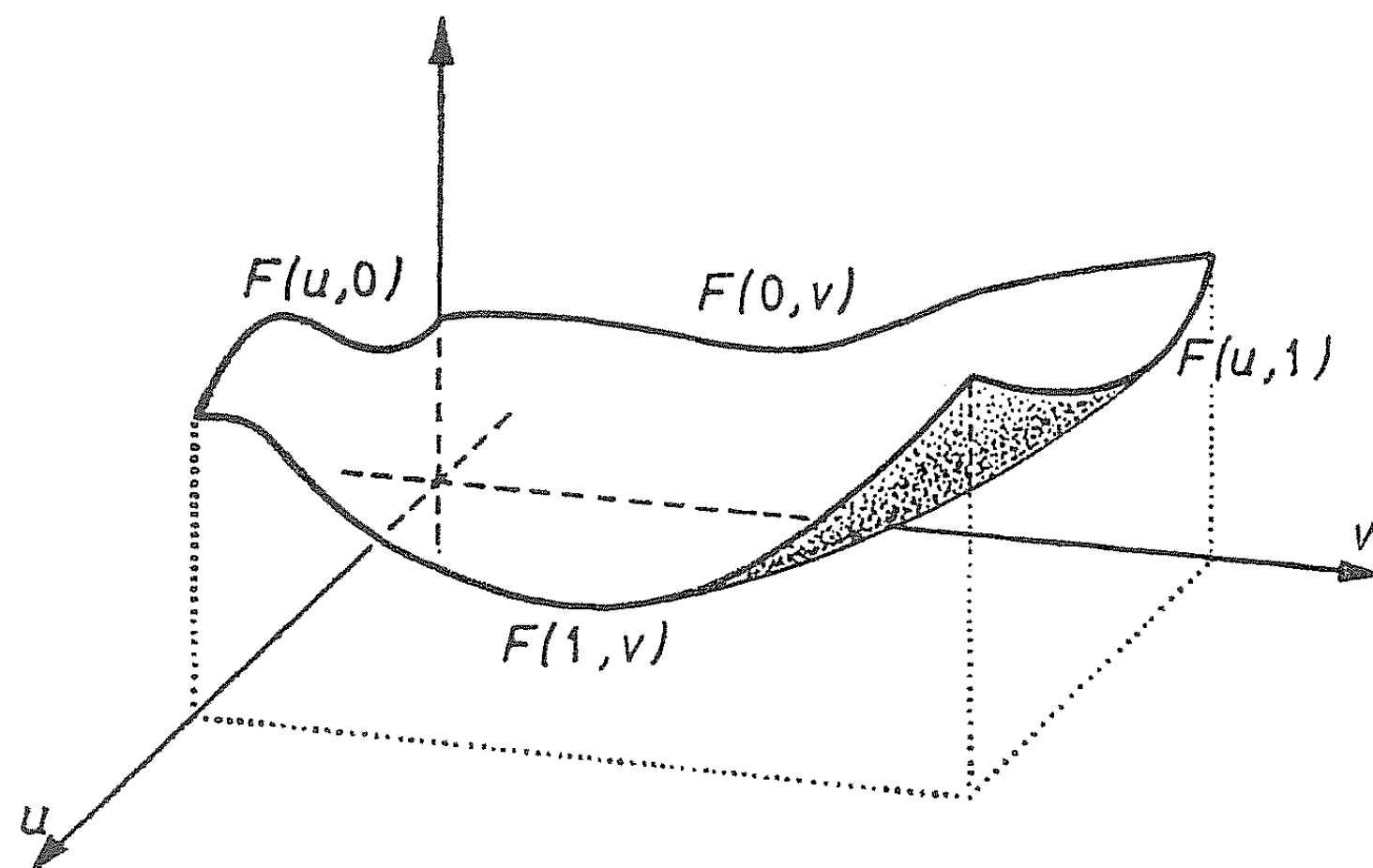
1. C^0 Coonsova krpa

V industriji običajno podamo obliko avtomobila ali letala z mrežo krivulj, skozi katere bi radi potegnili ploskve.

Leta 1964 je S. A. Coons interpoliral te podatke tako, da je razdelil ploskev na majhna območja ali krpe in tvoril interpolacijsko shemo krpe.



Slika 2



Slika 3

Bilinearno povezana Coonsova ploskev na enotnem pravokotniku $S = \{0 \leq u, v \leq 1\}$ je

$$B(u, v) = [1 - u \ u] \begin{bmatrix} F(0, v) \\ F(1, v) \end{bmatrix} + [F(u, 0) \ F(u, 1)] \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} - \\ - [1 - u \ u] \begin{bmatrix} F(0, 0) & F(0, 1) \\ F(1, 0) & F(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

Shema interpolira osnovne podatke, krivulje na robu pravokotnika S .

Poglejmo si njeno izpeljavo.

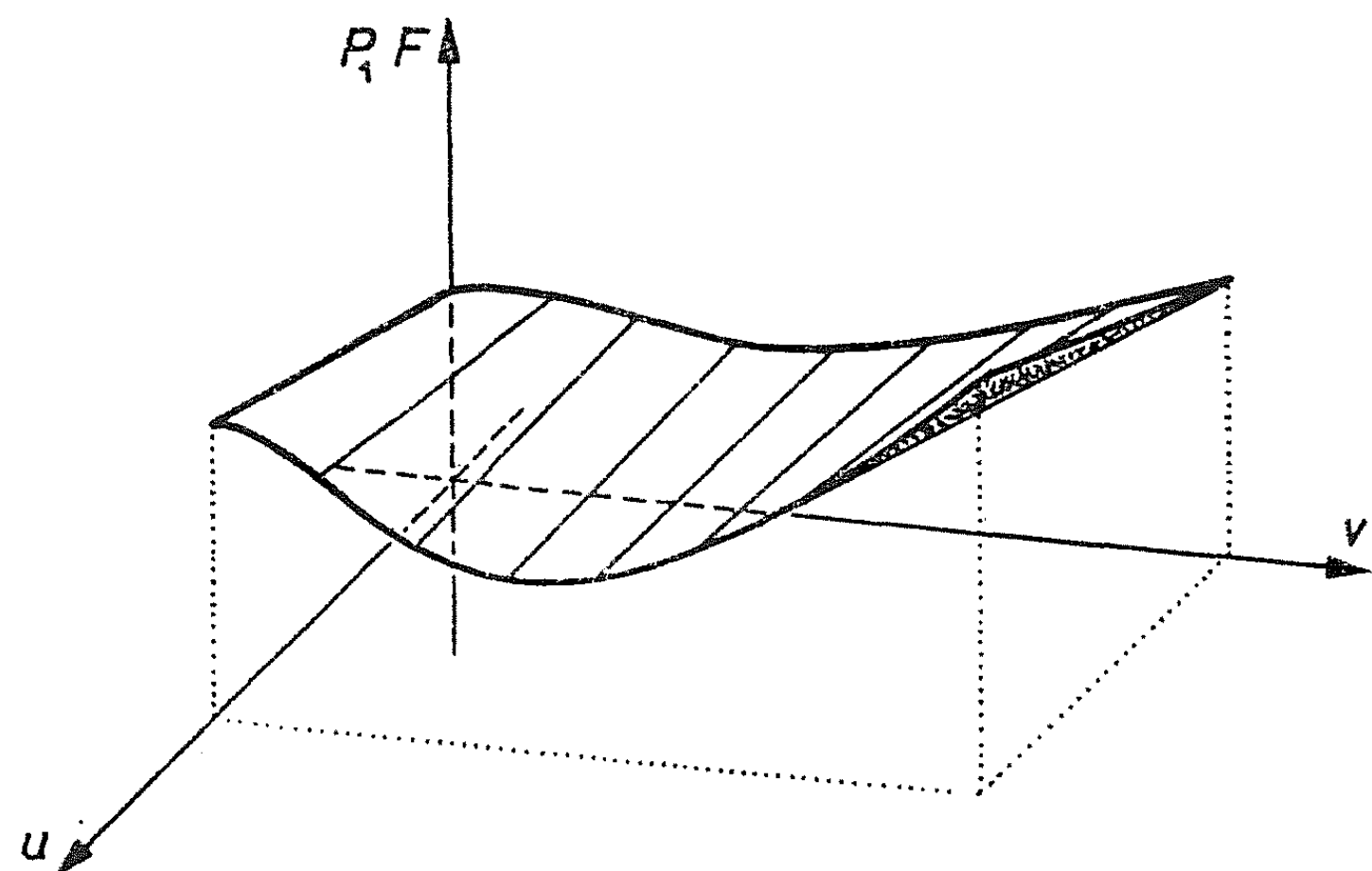
Definirajmo linearni interpolacijski operator kot preslikavo, ki funkciji $f(u)$ priredi funkcijo

$$(P_1 f)(u) = (1 - u)f(0) + uf(1)$$

Enako definirajmo operator P_1 na funkciji dveh spremenljivk $F(u, v)$; tako dobimo linearni operator povezave

$$(P_1 F)(u, v) = (1 - u)F(0, v) + uF(1, v)$$

Oglejmo si sliko funkcije $P_1 F$.



Slika 4

Za ostanek $F - P_1 F$ bi želeli, da je na robu pravokotnika S enak nič. To naredimo tako, da vpeljemo operator povezave P_2 še za drugo spremenljivko v . Funkciji g priredimo

$$(P_2 g)(v) = (1 - v)g(0) + vg(1)$$

Na ostanku $F - P_1 F$ pa deluje P_2 takole

$$(P_2(F - P_1 F))(u, v) = (1 - v)(F - P_1 F)(u, 0) + v(F - P_1 F)(u, 1)$$

Če k temu prištejemo $P_1 F$, dobimo celotno aproksimacijo

$$(P F)(u, v) = (P_1 F + P_2 F - P_1 P_2 F)(u, v) = \\ = (1 - u)F(0, v) + uF(1, v) + (1 - v)F(u, 0) + vF(u, 1) - \\ - [(1 - u)(1 - v)F(0, 0) + u(1 - v)F(1, 0) + \\ + (1 - u)vF(0, 1) + uvF(1, 1)] \quad (1)$$

V tem primeru smo zgradili aproksimacijo (1) geometrijsko, njene interpolacijske lastnosti pa lahko preverimo tudi algebraično

$$\begin{aligned} (P F)(u, 0) &= F(u, 0) & (P F)(u, 1) &= F(u, 1) \\ (P F)(0, v) &= F(0, v) & (P F)(1, v) &= F(1, v) \end{aligned}$$

Vidimo, da shema res interpolira podatke.

Gordon je opazil, da je (1) ravno Boolova vsota projektorjev $(P_1 \oplus P_2)F$; člen $P_1 P_2 F$ pa je poimenoval tenzorski produkt operatorjev P_1 in P_2 .

Utežne funkcije $(1 - v)$, $(1 - v)(1 - u)$, itd. imenujemo funkcije »povezave«, ker povezujejo skupaj podatke, zato je celotno ime za $P F$ bilarno povezana Coonsova krpa.

2. C^1 Coonsova krpa

Bikubično povezano Coonsovo krpo definiramo na sledeč način: Funkciji $f(u)$ priredimo

$$(P_1 f)(u) = h_0(u) f(0) + h_1(u) f(1) + h_{-0}(u) f'(0) + h_{-1}(u) f'(1)$$

kjer so funkcije h_i in h_{-i} kubične Hermitske bazne funkcije ene spremenljivke

$$\begin{aligned} h_0 &= (1-t)^2(2t+1) & h_{-0} &= t(1-t)^2 \\ h_1 &= t^2(3-2t) & h_{-1} &= t^2(t-1) \end{aligned}$$

operatorja povezave sta

$$(P_1 F)(u, v) = h_0(u) F(0, v) + h_1(u) F(1, v) + h_{-0}(u) F_{1,0}(0, v) + h_{-1}(u) F_{1,0}(1, v)$$

$$(P_2 F)(u, v) = h_0(v) F(u, 0) + h_1(v) F(u, 1) + h_{-0}(v) F_{0,1}(u, 0) + h_{-1}(v) F_{0,1}(u, 1)$$

Tu smo z $F_{1,0}$, $F_{0,1}$ oziroma $F_{1,1}$ označili parcialne odvode na u, v oziroma na obe spremenljivki. Celotna aproksimacija je

$$\begin{aligned} & (P_1 \oplus P_2) F(u, v) = \\ & [h_0(u) \ h_1(u) \ h_{-0}(u) \ h_{-1}(u)] \begin{bmatrix} F(0, v) \\ F(1, v) \\ F_{1,0}(0, v) \\ F_{1,0}(1, v) \end{bmatrix} + [F(u, 0) \ F(u, 1) \ F_{0,1}(u, 0) \ F_{0,1}(u, 1)] \cdot \\ & \cdot \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_{-0}(v) \\ h_{-1}(v) \end{bmatrix} - [h_0(u) \ h_1(u) \ h_{-0}(u) \ h_{-1}(u)] B \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_{-0}(v) \\ h_{-1}(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kjer je

$$B = \begin{bmatrix} F(0, 0) F(0, 1) & F_{0,1}(0, 0) F_{0,1}(0, 1) \\ F(1, 0) F(1, 1) & F_{0,1}(1, 0) F_{0,1}(1, 1) \\ F_{1,0}(0, 0) F_{1,0}(0, 1) & F_{1,1}(0, 0) F_{1,1}(0, 1) \\ F_{1,0}(1, 0) F_{1,0}(1, 1) & F_{1,1}(1, 0) F_{1,1}(1, 1) \end{bmatrix}$$

Poglejmo si podrobneje matriko B . Lahko jo razdelimo na

$$B = \begin{bmatrix} \text{vrednosti} & \text{odvodi na } v \\ \text{odvodi na } u & \text{zvitosti} \end{bmatrix}$$

ali še drugače na štiri podmatrike reda 2×2

$$B = \begin{bmatrix} F & F_{0,1} \\ F_{1,0} & F_{1,1} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (2)$$

Zvitosti so drugi mešani odvodi. Običajno smatramo, da so neodvisni od vrstnega reda odvajanja, torej da je $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$, kar pa v številnih primerih v praksi ne drži.

Bikubično povezana C^1 Coonsova krpa ima osnovno pomanjkljivost praktične uporabe, da velja

$$\frac{\partial}{\partial v} (P_1 \oplus P_2) F \Big|_{v=0} = F_{0,1}(u, 0)$$

le takrat in samo takrat, ko je

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{v=0} \bigg|_{u=0,1} = \left. \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{u=0,1} \bigg|_{v=0}$$

In podobno za $v = 1$.

Funkcija $(P_1 \oplus P_2) F$ je res zvezno odvedljiva, če jo gledamo kot odsekoma definirano ploskev, zato je trajalo nekaj časa, da so uporabniki odkrili, da ni nujno, da $(P_1 \oplus P_2) F$ interpolira tudi odvode preko robu po $v = 0$ in $v = 1$.

Torej ni nujno, da originalna bikubično povezana Coonsova ploskev interpolira vse podatke. Vse podatke interpolira le, če je zadoščeno pogoju

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$$

v vseh štirih ogliščih.

Te težave rešujejo novejša sheme kot so Gregoryjev, Brownov ter Littlov kvadrat, ki si jih bomo ogledali kasneje.

Problem so skušali rešiti tudi na enostavnejši način.

Zvitosti so izenačili tako, da so jih postavili na nič. Zaradi tega se pojavijo ravni deli na bikubični ploskvi, ki so jih imenovali »psevdo-ravnine«. Razlaga pojave ravnih delov je, da je ta aproksimacija natančna le za linearne funkcije u in v , krpa pa je bikubično povezana.

2.1. C^1 Gregoryjev kvadrat

Razlika med bikubično povezano Coonsovo krpo in Gregoryjevim kvadratom je samo v matriki B , pa še to samo v podmatriki »zvitosti« $F_{1,1}$. Tu so zvitosti zamenjane z »variabilnimi« zvitostmi

$$F_{1,1} = \begin{bmatrix} \frac{u \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(0,0) + v \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(0,0)}{u+v} & \frac{-u \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(0,1) + (v-1) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(0,1)}{-u+v-1} \\ \frac{(1-u) \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(1,0) + v \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(1,0)}{1-u+v} & \frac{(u-1) \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(1,1) + (v-1) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(1,1)}{u+v-2} \end{bmatrix}$$

2.2. C^1 Littlov kvadrat

Little je popravil podmatrike F , $F_{1,0}$, $F_{0,1}$ in $F_{1,1}$ matrike B .

Prva podmatrika je

$$F = \begin{bmatrix} \frac{u^2 P_1 F(0,0) + v^2 P_2 F(0,0)}{u^2 + v^2} & \frac{u^2 P_1 F(0,1) + (1-v)^2 P_2 F(0,1)}{u^2 + (1-v)^2} \\ \frac{(1-u)^2 P_1 F(1,0) + v^2 P_2 F(1,0)}{(1-u)^2 + v^2} & \frac{(1-u)^2 P_1 F(1,1) + (1-v)^2 P_2 F(1,1)}{(1-u)^2 + (1-v)^2} \end{bmatrix}$$

kjer je

$$P_1 F(0,0) \equiv \lim_{v \rightarrow 0} P_1 F(0,v) = \lim_{v \rightarrow 0} F(0,v), \quad \text{itd.}$$

in podobno

$$P_2 F(0, 0) \equiv \lim_{u \rightarrow 0} P_2 F(u, 0) = \lim_{u \rightarrow 0} F(u, 0), \quad \text{itd.}$$

Druga podmatrika

$$F_{1,0} = \left[\begin{array}{cc} \frac{u \frac{\partial P_1 F}{\partial u}(0, 0) + v^2 \frac{\partial P_2 F}{\partial u}(0, 0)}{u + v^2} & \frac{u \frac{\partial P_1 F}{\partial u}(0, 1) + (1 - v)^2 \frac{\partial P_2 F}{\partial u}(0, 1)}{u + (1 - v)^2} \\ \frac{(1 - u) \frac{\partial P_1 F}{\partial u}(1, 0) + v^2 \frac{\partial P_2 F}{\partial u}(1, 0)}{1 - u + v^2} & \frac{(1 - u) \frac{\partial P_1 F}{\partial u}(1, 1) + (1 - v)^2 \frac{\partial P_2 F}{\partial u}(1, 1)}{1 - u + (1 - v)^2} \end{array} \right]$$

kjer je

$$\frac{\partial P_1 F}{\partial u}(0, 0) \equiv \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial P_1 F}{\partial u}(0, v) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial u}(0, v) \quad \text{itd.}$$

in podobno

$$\frac{\partial P_2 F}{\partial u}(0, 0) \equiv \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial P_2 F}{\partial u}(u, 0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial u}(u, 0) \quad \text{itd.}$$

Tretja podmatrika

$$F_{0,1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{u^2 \frac{\partial P_1 F}{\partial v}(0, 0) + v \frac{\partial P_2 F}{\partial v}(0, 0)}{u^2 + v} & \frac{u^2 \frac{\partial P_1 F}{\partial v}(0, 1) + (1 - v) \frac{\partial P_2 F}{\partial v}(0, 1)}{u^2 + 1 - v} \\ \frac{(1 - u)^2 \frac{\partial P_1 F}{\partial v}(1, 0) + v \frac{\partial P_2 F}{\partial v}(1, 0)}{(1 - u)^2 + v} & \frac{(1 - u)^2 \frac{\partial P_1 F}{\partial v}(1, 1) + (1 - v) \frac{\partial P_2 F}{\partial v}(1, 1)}{(1 - u)^2 + 1 - v} \end{array} \right]$$

kjer je

$$\frac{\partial P_1 F}{\partial v}(0, 0) \equiv \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial P_1 F}{\partial v}(0, v) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial v}(0, v) \quad \text{itd.}$$

in podobno

$$\frac{\partial P_2 F}{\partial v}(0, 0) \equiv \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial P_2 F}{\partial v}(u, 0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial v}(u, 0) \quad \text{itd.}$$

Četrta podmatrika

$$F_{1,1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{u \frac{\partial^2 P_1 F}{\partial v \partial u}(0, 0) + v \frac{\partial^2 P_1 F}{\partial u \partial v}(0, 0)}{u + v} & \frac{-u \frac{\partial^2 P_1 F}{\partial v \partial u}(0, 1) + (v - 1) \frac{\partial^2 P_2 F}{\partial u \partial v}(0, 1)}{-u + v - 1} \\ \frac{(1 - u) \frac{\partial^2 P_1 F}{\partial v \partial u}(1, 0) + v \frac{\partial^2 P_2 F}{\partial u \partial v}(1, 0)}{1 - u + v} & \frac{(u - 1) \frac{\partial^2 P_1 F}{\partial v \partial u}(1, 1) + (v - 1) \frac{\partial^2 P_2 F}{\partial u \partial v}(1, 1)}{u + v - 2} \end{array} \right]$$

kjer je

$$\frac{\partial^2 P_1 F}{\partial v \partial u}(0, 0) \equiv \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\partial P_1 F}{\partial u}(0, v) \right\} \bigg|_{v=0} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\partial F}{\partial u}(0, v) \right\} \bigg|_{v=0} \quad \text{itd.}$$

in podobno

$$\frac{\partial^2 P_2 F}{\partial u \partial v}(0, 0) \equiv \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial P_2 F}{\partial v}(u, 0) \right\} \bigg|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial F}{\partial v}(u, 0) \right\} \bigg|_{u=0} \quad \text{itd.}$$

2.3. C^1 Brownov kvadrat

Gregory je opazil, da se skriva napaka iz Boolove vsote $P_1 \oplus P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$ v členu $P_1 P_2$. J. H. Brown je iznašel shemo za kvadrat, ki se temu problemu izogne.

Naj bo

$$B F(u, v) = \alpha(u, v) P_1 F(u, v) + \beta(u, v) P_2 F(u, v)$$

kjer je

$$\alpha(u, v) = \frac{v^2(1-u)^2}{u^2(1-u)^2 + v^2(1-v)^2} \quad \beta(u, v) = \frac{u^2(1-v)^2}{u^2(1-u)^2 + v^2(1-v)^2}$$

Brownov kvadrat je konveksna kombinacija dveh operatorjev povezave $P_1 F$ in $P_2 F$, ki interpolira funkcijo F in njene normalne odvode na robu kvadrata. Funkcija BF je simetrična, saj je $\alpha(u, v) = \beta(v, u)$, pa tudi P_1 in P_2 nastopata simetrično.

Zaključek

Primerjava Gregoryjevega in Brownovega kvadrata pri aproksimaciji sfere pokaže, da je Gregoryjev v tem primeru natančnejši. Gregoryjev preseže sfero, Brownov pa je pod njo.

Podobno bi bilo potrebno obravnavati tudi dvakrat zvezno odvedljive interpolacijske sheme ter interpolacijske sheme na trikotnikih.

LITERATURA

- [1] W. Boehm, G. Farin, *Surface Design*, Eurographics, 1983.
- [2] R. E. Barnhill, *Representation and Approximation of Surfaces*, Mathematical Software III, 69—120, Academic Press, 1977.
- [3] R. E. Barnhill, W. Boehm, *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, North — Holland, 1983.
- [4] *Double Issue — In Memory of Steven Anson Coons*, Computers in Industry, 3, 1982, num. 1/2, march/june.
- [5] I. D. Faux, M. J. Pratt, *Computational Geometry for Design and Manufacture*, John Wiley & Sons, 1979.
- [6] W. J. Gordon, *Free — Form Surface Interpolation through Curve Networks*, General Motors Research Laboratories, 1969.

STIRLINGOVI STOLPCI PRVE VRSTE

ALOJZIJ VADNAL

Math. Subj. Class. (1980) 10 A 40, 26 A 09

Stirlingova števila prve vrste so urejena v Stirlingov trikotnik prve vrste. V zaporednih stolpcih so nanizane funkcijske vrednosti diskretnih funkcij $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$, ... argumenta n . V članku je izpeljan rekurzijski obrazec (10), v katerem je izražena funkcija $y_{r+1}(n)$ s funkcijo $y_r(n)$. Po tem obrazcu so izračunane analitične izražave (11), (12) in (13) prvih treh funkcij $y_1(n)$, $y_2(n)$ in $y_3(n)$.

STIRLING COLUMNS OF THE FIRST KIND

Stirling numbers of the first kind are arranged in the Stirling triangle of the first kind. In the subsequent columns the values of discrete functions $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$, ... are threaded. In the article the recurrence formula (10) is derived with which the analytical expressions (11), (12) and (13) of the first three column functions $y_1(n)$, $y_2(n)$ and $y_3(n)$ are calculated.

Uvod

Po škotskem matematiku J. Stirlingu (1692—1770) imenovana Stirlingova števila prve vrste s_r^n so definirana z rekurzijskim obrazcem:

$$s_r^{n+1} = s_{r-1}^n - n s_r^n \quad (1)$$

pri tem je $n: \{1, 2, 3, \dots\}$,

$r: \{1, 2, 3, \dots, n\}$ in

$$s_n^n = 1 \quad (2)$$

$$s_1^{n+1} = -n s_1^n \quad (3)$$

Podobno kot so urejeni binomski koeficienti v Pascalov trikotnik, se urejajo Stirlingova števila prve vrste v Stirlingov trikotnik prve vrste:

	r					
n	1	2	3	4	5	...
	$y_1(n)$					
1	1	$y_2(n)$				
2	— 1	1	$y_3(n)$			
3	2	— 3	1	$y_4(n)$		
4	— 6	11	— 6	1	$y_5(n)$	

V zaporednih stolpcih tega trikotnika so vpisane zaporedne funkcijske vrednosti diskretnih funkcij:

$$y_1(n), y_2(n), y_3(n), \dots, y_r(n), \dots$$

argumenta $n: \{r, r+1, r+2, \dots\}$. Tem diskretnim funkcijam bomo poiskali ustrezne analitične izražave.

V ta namen omenjamo najprej nekaj simbolov in obrazcev iz analize diskretnih funkcij.

Diferenčni operator Δ

Definicija: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

Lastnosti: $\Delta (c f(x)) = c \Delta f(x)$
 $\Delta (f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$
 $\Delta^n = \Delta \Delta^{n-1}$

Antidiferenčni operator Δ^{-1}

Definicija: $\Delta F(x) = f(x)$, $\Delta^{-1} f(x) = F(x) + c$

Lastnosti: $\Delta^{-1}(c f(x)) = c \Delta^{-1} f(x)$
 $\Delta^{-1}(f(x) + g(x)) = \Delta^{-1} f(x) + \Delta^{-1} g(x)$
 $\Delta \Delta^{-1} = 1$
 $\Delta^{-n} = \Delta^{-1} \Delta^{-n+1}$

Eulerjeva funkcija ψ

Definicija: $\Delta \psi(x) = 1/x$, $\Delta^{-1} 1/x = \psi(x) + c$ (4)

Lastnosti: $\Delta^{-1} 1/x^2 = -\psi'(x)$ (5)

$\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$ (6)

Eulerjeva konstanta:

$$C = 0,577\,215\,665\dots$$
 (7)

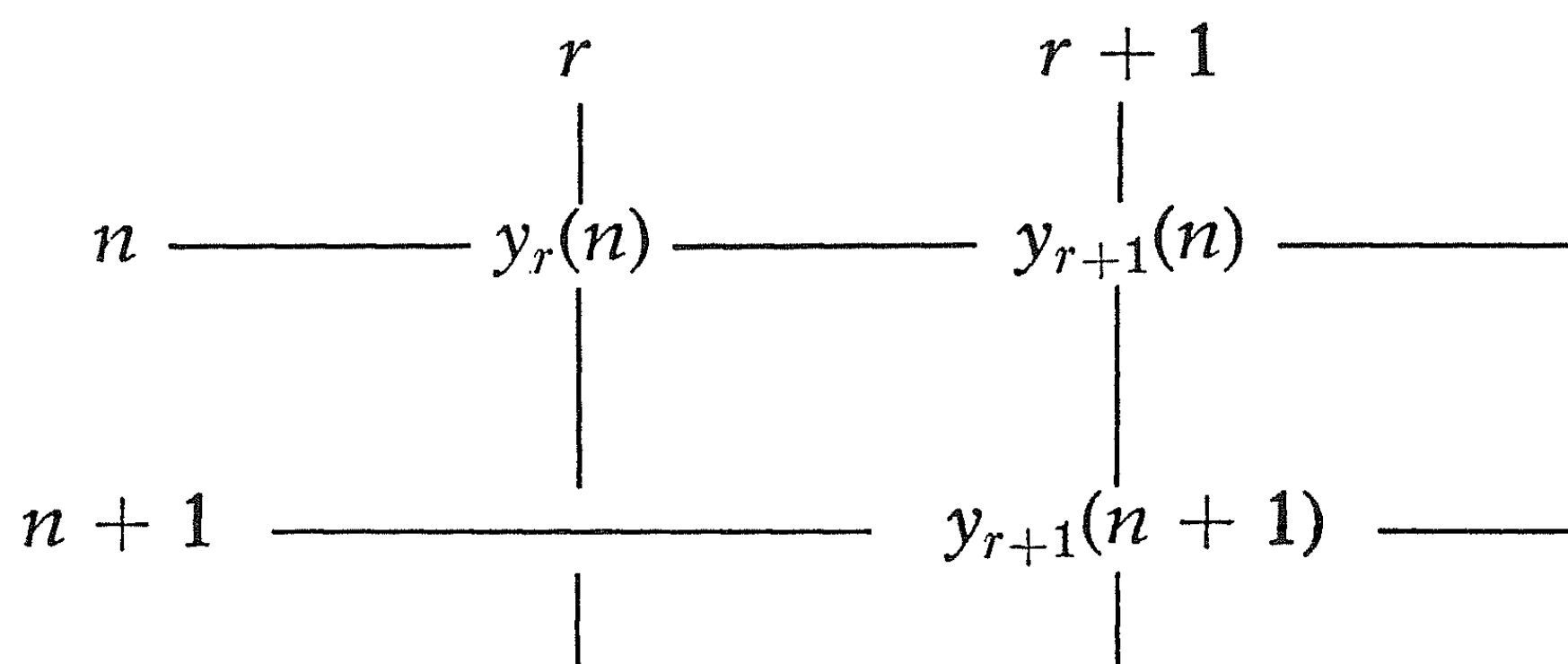
$$\psi(n+1) = -C + \sum_{k=1}^{k=n} 1/k$$
 (8)

$$n=1: \psi(2) - 1 = -C$$
 (8a)

$$\psi'(n) = \pi^2/6 - \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k^2$$
 (9)

Rekurzijska enačba

Izpeljimo rekurzijsko enačbo, s katero izrazimo funkcijo $y_{r+1}(n)$ s predhodno funkcijo $y_r(n)$. V ta namen uporabimo shemo, ki jo povzamemo iz Stirlingovega trikotnika:



Ob upoštevanju definicije (1) dobimo po tej shemi relacijo:

$$y_{r+1}(n+1) = y_r(n) - n y_{r+1}(n)$$

$$y_{r+1}(n+1) + n y_{r+1}(n) = y_r(n)$$

Če se postavimo na stališče, da je funkcija $y_r(n)$ znana, je ta relacija pravzaprav nehomogena diferenčna enačba prvega reda z neznano funkcijo $y_{r+1}(n)$. Tej diferenčni enačbi izračunamo splošno rešitev.

Splošna rešitev je enaka vsoti splošne rešitve homogene in kake posebne rešitve nehomogene diferenčne enačbe.

Homogena diferenčna enačba:

$$y_{r+1}(n+1) + n y_{r+1}(n) = 0$$

ima splošno rešitev:

$$y_{r+1}(n) = c P(n)$$

kjer je c poljubna konstanta in

$$P(n) = (-1)^{n-1} \prod_{t=1}^{t=n-1} t = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Nehomogena diferenčna enačba ima posebno rešitev

$$Y_{r+1}(n) = P(n) \Delta^{-1}(y_r(n))/P(n+1) = P(n) \Delta^{-1}(y_r(n)/(-1)^n n!)$$

Obravnavana nehomogena diferenčna enačba ima torej splošno rešitev:

$$y_{r+1}(n) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(c + \Delta^{-1} \frac{y_r(n)}{(-1)^n n!} \right) \quad (10)$$

Pri tem je c poljubna konstanta.

Ta obrazec je rekurzijski obrazec, po katerem računamo funkcijo $y_{r+1}(n)$, izhajajoč od poznane predhodne funkcije $y_r(n)$.

Stirlingovi stolpci

Analitično izražavo funkcije $y_1(n)$ v prvem stolpcu Stirlingovega trikotnika dobimo neposredno iz definicije (3):

$$\begin{aligned} y_1(n) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \quad n: \{1, 2, 3, \dots\} \\ &: \{1, -1, 2, -6, 24, -120, \dots\} \end{aligned} \quad (11)$$

Analitično izražavo funkcije $y_2(n)$ v drugem stolpcu Stirlingovega trikotnika računamo po rekurzijskem obrazcu (10):

$$y_2(n) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(c + \Delta^{-1} \frac{y_1(n)}{(-1)^n n!} \right)$$

$$(11): \quad = (-1)^n (n-1)! \quad (\Delta^{-1} 1/n - c)$$

$$(4): \quad = (-1)^n (n-1)! \quad (\psi(n) - c)$$

Konstanto c določimo ob upoštevanju začetnega pogoja $y_2(2) = 1$ in dobimo

$$1 = \psi(2) - c$$

$$(8a): \quad c = \psi(2) - 1 = -C$$

Zato je

$$y_2(n) = (-1)^n (n-1)! \quad (\psi(n) + C) \quad (12)$$

$$(8): \quad = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} n: & \{2, 3, 4, \dots\} \\ : & \{1, -3, 11, -50, 274, -1, 764, \dots\} \end{aligned}$$

Analitično izražavo funkcije $y_3(n)$ v tretjem stolpcu Stirlingovega trikotnika računamo po rekurzijskem obrazcu (10):

$$\begin{aligned} y_3(n) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \left(c + \Delta^{-1} \frac{y_2(n)}{(-1)^n n!} \right) \\ (12): \quad &= (-1)^{n-1} (n-1)! \left(c + \Delta^{-1} \frac{\psi(n)}{n} + C \Delta^{-1} \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Po pravilu za antidiferenciranje per partes izračunamo:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} \frac{\psi(n)}{n} &= \Delta^{-1} (\psi(n) \Delta \psi(n)) = \psi^2(n) - \Delta^{-1} (\psi(n+1) \Delta \psi(n)) = \\ (6\&4): \quad &= \psi^2(n) - \Delta^{-1} \left(\frac{\psi(n)}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \psi^2(n) - \Delta^{-1} \frac{\psi(n)}{n} - \Delta^{-1} \frac{1}{n^2} \\ (5): \quad &= \frac{1}{2} \psi^2(n) + \frac{1}{2} \psi'(n) \\ (9): \quad &= \frac{\psi^2(n)}{2} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k^2 \end{aligned}$$

Če vstavimo to v izraz za funkcijo $y_3(n)$, dobimo po preureditvi:

$$y_3(n) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(c - \frac{1}{2} C^2 + \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k^2 \right)$$

Konstanto c izračunamo ob upoštevanju začetnega pogoja $y_3(3) = 1$ in dobimo:

$$c = \frac{1}{2} C^2 - \frac{1}{12} \pi^2$$

Zato je:

$$y_3(n) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{2} \psi^2(n) + \frac{1}{2} \psi'(n) + C \psi(n) + \frac{1}{2} C^2 - \frac{1}{12} \pi^2 \right) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\left(\sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k \right)^2 - \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k^2 \right) \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} n: & \{3, 4, 5, \dots\} \\ : & \{1, -6, 35, -225, 1\,624, -13\,132, \dots\} \end{aligned}$$

Računanje analitičnih izražav nadaljnjih funkcij $y_4(n)$, $y_5(n)$, ... po rekurzijskem obrazcu (10) postaja vedno bolj zamudno zaradi neelementarnosti Eulerjeve funkcije ψ .

LITERATURA

- [1] L. Brand, *Differential and Difference Equations*, J. Wiley & Sons, Inc. 1966.
- [2] F. Scheid, *Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Company 1968.
- [3] M. R. Spiegel, *Finite Differences and Difference Equations*, McGraw-Hill Book Company 1971.
- [4] J. S. Gradstein, I. M. Ryžik, *Tablice integralov, summ rjadov i proizvedenij*, Moskva 1963.
- [5] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa*, Knjižnica SIGMA — 30, Ljubljana 1979.
- [6] A. Vadnal, *Stirlingove funkcije*, Raziskovalna naloga št. 114, IMFM, Ljubljana 1983.

NOVE KNJIGE

DAY W. A., Heat conduction within linear thermoelasticity, Springer tracts in natural philosophy 30, Springer Verlag, New York 1985, 82 + 8 str.

Knjižica obravnava enodimenzionalni primer prenosa toplote z upoštevanjem raztezanja telesa zaradi segrevanja. Namesto običajne enačbe prenosa toplote po palici ali plošči

$$\partial^2 T / \partial x^2 = \partial T / \partial t \quad (1)$$

se dobi sedaj parcialna diferencialna enačba 4. reda

$$(\partial^4 T / \partial x^4) + b(\partial^3 T / \partial t^3) = (1 + a)(\partial^3 T / \partial x^2 \partial t) + b(\partial^4 T / \partial x^2 \partial t^2) \quad (2)$$

Konstanta a povezuje termične in mehanske efekte in je navadno majhna v primerjavi z 1. Konstanta b je odvisna od velikosti telesa in gre proti 0, ko gredo dimenzije telesa čez vsako mejo. Obe zgornji enačbi sta že predelani v brezdimenzijsko obliko.

Avtor najprej obdela primer $b = 0$. Sedaj moremo enačbo (2) zapisati kot

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (1 + a) \frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{d}{dt} \int_0^1 T(y, t) dy \quad (3)$$

K tej integrodiferencialni enačbi dodamo seveda še robna pogoja, npr. $T(0, t) = 0$ in $T(1, t) = 0$. Z uporabo Fourierove metode avtor dokaže, da je enačba (3) z zgornjima robnima pogojema enolično rešljiva pri vsakem začetnem pogoju $T(x, 0) = f(t)$ za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo f . Enačba (3) se razlikuje od enačbe (1), zato imajo njene rešitve precej drugačne lastnosti kot rešitve enačbe (1). V posebnem — ne velja več princip maksimuma. To pomeni: čeprav je začetna temperatura $f(t) > 0$ za vse $0 < x < 1$, se more pripetiti, da je temperatura $T(x_0, t_0)$ negativna za neki x_0 in t_0 .

V poglavjih 3 in 4 avtor študira, kako rešitve enačb (1) in (3) aproksimirajo rešitve enačbe (2). V zadnjem poglavju študira vedenje rešitve enačbe (2) pri pogojih: začetna temperatura je 0, konca $x = 0$ in $x = 1$ pa držimo na predpisani temperaturi $f(t)$ oz. $g(t)$.

Knjiga je napisana zelo skrbno, razumljivo in matematično korektno. Pou-darek je bolj na matematičnih aspektih problema. Je izredno lep primer klasične analize na delu, pri obravnavanju realnega fizikalnega problema.

Anton Suhadolc

KAJ JE MNOŽICA

IZIDOR HAFNER

Math. Subj. Class. (1980): 03 E 99, 96 A 99

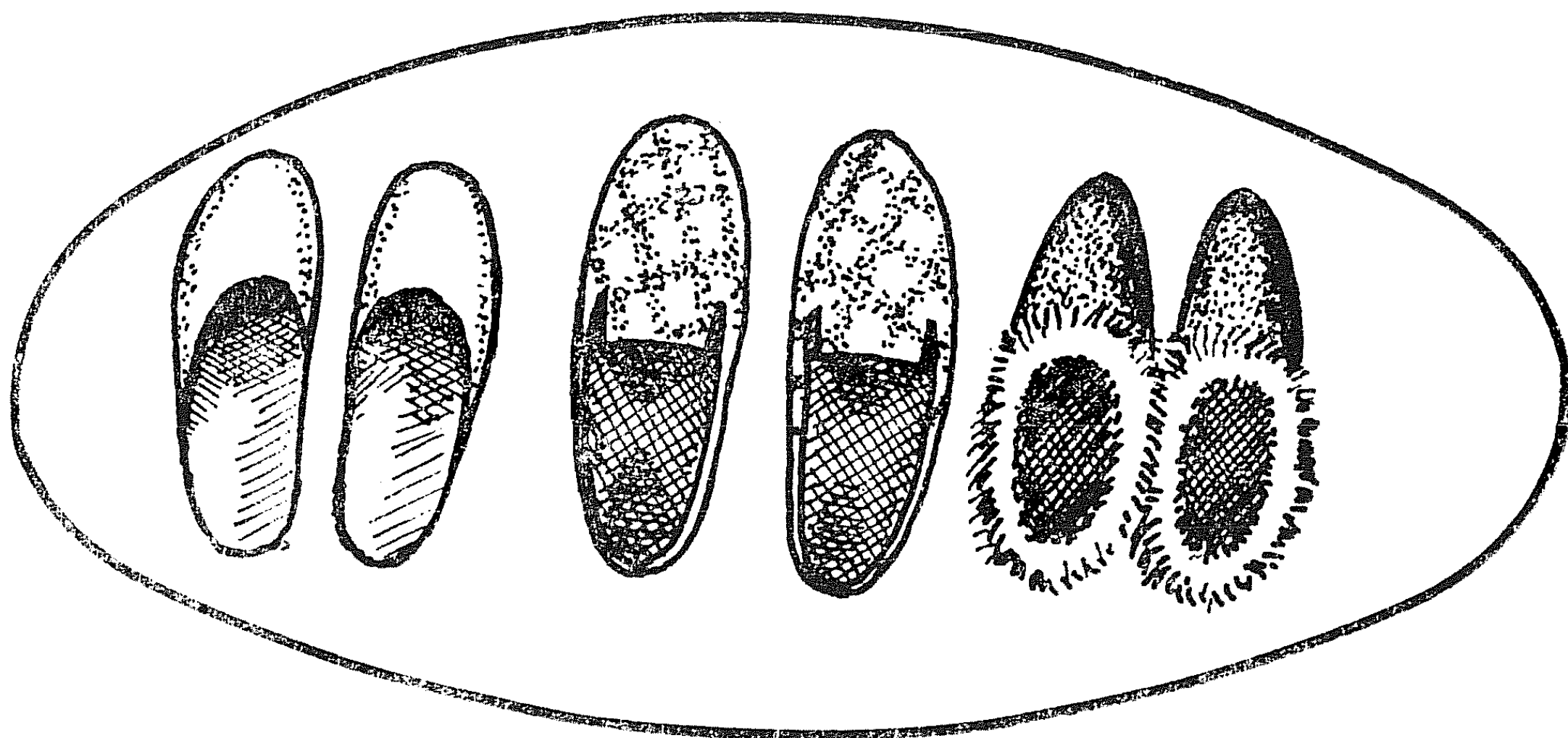
Članek obravnava pojem množice drugače, kot je opredeljen z aksiomi teorije množic. Odnos množice in njenega elementa bomo obravnavali kot odnos celote in njenega dela.

WHAT IS A SET

The article is concerned with the notion of set, which is different from the notion of set of the set theory. The relation of a set to its element is treated as a relation of a whole to its part.

V aksiomatični teoriji množic velja izrek $x \neq \{x\}$. Prenekateri učenec, dijak in celo študent, ki si množice predstavlja povsem konkretno, pa enači objekt x z množico $\{x\}$, množico treh parov čevljev z množico šestih čevljev itd. Gre torej za drugačno pojmovanje besede množica. Naloga tega sestavka je, da pokaže pot matematično korektne vpeljave pojma množice v tem novem smislu. Ena trditev že mora veljati: Reč x je isto kot množica, ki sestoji samo iz x . Teorijo, v kateri velja ta izrek, je razvil poljski logik Stanislaw Leśniewski (1886—1939).

1. Na vprašanje: »Koliko ima tale množica elementov?«



bosta najbolj pogosta odgovora »Šest« in »Tri«. Pri prvem odgovoru smo množico zaznali kot gručo čevljev, pri drugem pa kot skupino parov čevljev. Ker govorimo obakrat o istem objektu in ker v smislu teorije množic množica ne more imeti hkrati šest in tri elemente, je jasno, da gre za drugačen pomen besede *množica*. Odprto pa ostaja vprašanje: ali se da na osnovi takšnega pojmovanja množic, v katerem ima lahko množica hkrati 3 oz. 6 elementov, zgraditi osnovni pojem matematike, to je pojem *naravnega* števila. Problem je privlačen tudi zaradi dejstva, da govorimo o skupinah kot o konkretnih predmetih in ne o abstraktnih objektih, katerih eksistenco bolj ali manj prepričljivo zagotavljajo različne teorije množic.

Naša naloga bo zadovoljivo rešena, če bomo v simbolizmu matematične logike lahko zapisali izjave:

Množica čevljev je isto kot množica parov čevljev.

Pari so trije.

Čevljev je šest.

Če bomo pri tem uporabili pojme, ki niso domena logike, moramo le-te definirati ali privzeti kot nedefinirane in privzeti dodatne aksiome.

2. Preden storimo korak naprej, zaznamujemo naše čevlje z leve proti desni s črkami $A, B, C, \check{C}, D$ in E . Te črke imajo vlogo *lastnih* imen — to je, vsaka zaznamuje natanko eno stvar.

Izrazi: čevelj, levi čevelj, desni čevelj in par čevljev zaznamujejo po več stvari — prva šest, preostale tri pa po tri. Zato bomo tem izrazom rekli *obča* imena. Okrajšano zapišimo ta imena $\check{c}, l, d$ in p .

Izraz *levi in hkrati desni čevelj* ne zaznamuje nobenega objekta, zato je to *navidezno* ime. Zanj uporabimo oznako Δ . Izjavo

Reč A je levi čevelj

bomo simbolično zapisali

$$A \varepsilon l$$

in prebrali » A je l «.

Izjava

$$x \varepsilon y$$

je resnična natanko tedaj, kadar je x lastno ime, y pa lastno ali obče ime, ki pa med drugim zaznamuje tudi tisti objekt, ki ga zaznamuje ime x .*

Torej so resnične izjave $A \varepsilon \check{c}, B \varepsilon d, A \varepsilon A$, neresnične pa so izjave $A \varepsilon d, d \varepsilon d, \Delta \varepsilon \Delta$.

Če definiramo relacijo identitete

$$x = y \Leftrightarrow x \varepsilon y \wedge y \varepsilon x$$

potem so resnične izjave $A = A, B = B, C = C$, neresnične pa so izjave $\Delta = \Delta, \check{c} = \check{c}, d = d$.

Analogne pojme k operacijam z množicami nam podajajo naslednje definicije preseka, unije, navideznega imena in komplementa

$$x \varepsilon y \cap z \Leftrightarrow x \varepsilon y \wedge x \varepsilon z$$

$$x \varepsilon y \cup z \Leftrightarrow x \varepsilon y \vee x \varepsilon z$$

$$x \varepsilon \Delta \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \neg (x \varepsilon x)$$

$$x \varepsilon \mathbf{N}(y) \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \neg (x \varepsilon y)$$

Do števil lahko pridemo z naslednjimi definicijami:

$$0(x) \Leftrightarrow \forall y (\neg (y \varepsilon x))$$

$$1(x) \Leftrightarrow x \varepsilon x$$

$$2(x) \Leftrightarrow \exists y \exists z (y \varepsilon x \wedge z \varepsilon x \wedge y \neq z \wedge \forall u (u \varepsilon x \Rightarrow u = y \vee u = z))$$

Izjava $0(x)$ pomeni, da je x navidezno ime; izjava $1(x)$ je resnična, če je x lastno ime. Izjavo $1(x)$ preberemo: x je *objekt*.

Simbolično izjavo $3(d)$ bi prebrali: desni čevlji so trije. Kaj pa pomenita izjavi $2(A \cup B), 0(A \cap B)$?

Vpeljanemu simbolizmu bomo rekli *logika imen* ali *ontologija*, kot jo je imenoval njen tvorec Leśniewski.

* ε ne pomeni nič drugega kot *je* v stavku: Ljubljana je mesto. Drugače bi to zapisali: Ljubljana ε mesto.

3. Poleg posameznih čevljev so povsem konkretne tudi naslednje stvari: trije pari čevljev, skupina levih čevljev, skupina desnih čevljev, skupina vseh čevljev. Zaznamujmo te objekte, pri čemer štejemo pare od leve proti desni: F, G, H, I, J in K . Dejstvo, da je čevelj A *del* para F bomo simbolično zapisali

$$A \varepsilon \mathbf{del}(F) \quad (\text{izjava } A \varepsilon F \text{ pa ni resnična})$$

V naši teoriji je *del* osnoven, to je neopredeljen, pojem, ki zadošča štirim spodaj naštetim aksiomom.

Aksiom 1. Če je objekt X del objekta Y , potem Y ni del objekta X .

Aksiom 2. Če je X del objekta Y in je Y del objekta Z , potem je X del objekta Z .

Naslednja definicija uvaja soroden pojem:

Definicija 1. Objekt X je *element* objekta Y natanko tedaj, kadar je bodisi $X = Y$ ali pa je X del objekta Y .

Simbolično bomo to relacijo zapisovali

$$X \varepsilon \mathbf{el}(Y)$$

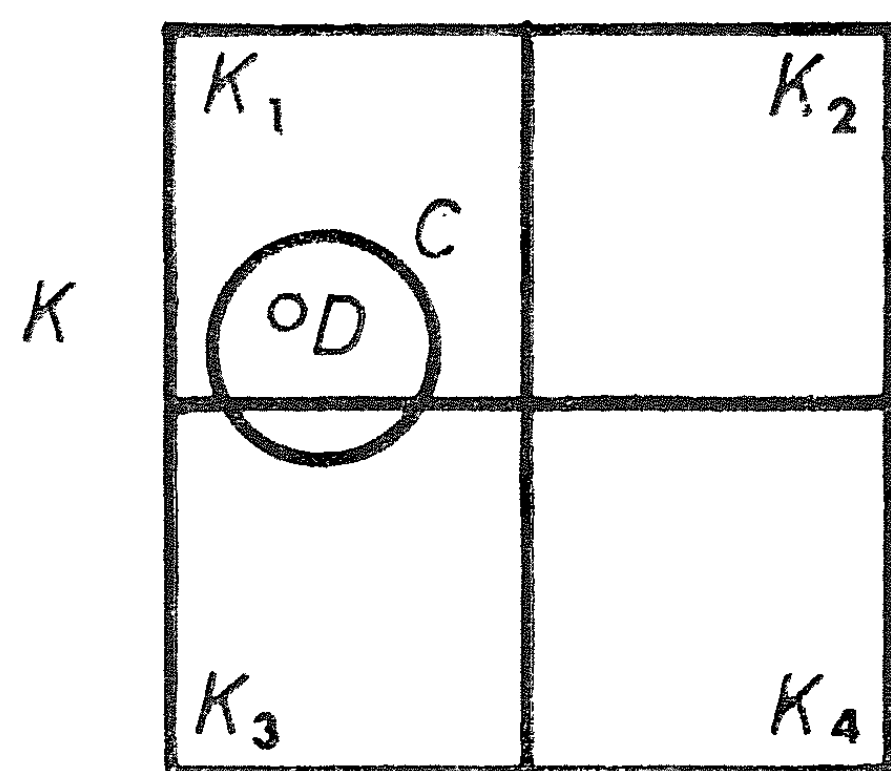
Zdaj pa želimo reči, da je objekt K množica vseh naših čevljev. To bomo zapisali

$$K \varepsilon \mathbf{Mn}(\check{c})$$

Ta pojem vpeljemo z definicijo:

Definicija 2. Objekt X je *množica vseh* stvari y natanko tedaj, kadar so izpolnjeni naslednji trije pogoji:

- vsaj en objekt je y ;
- vsak y je element objekta X ;
- za vsak element Q objekta X lahko najdemo objekta R in S tako, da velja: R je y , S je element stvari R in S je element stvari Q .



Primer. Lik K je množica kvadratov (K_1, K_2, K_3, K_4). Krog C je del (in element) lika K . Točka D je del (in element) tako kvadrata K_1 kot kroga C .

Oglejmo si še primer uporabe naših pojmov za odnose med črkami, besedami in stavkom.

Vzemimo konkreten stavek. Ta stavek je množica besed, uporabljenih pri njegovem zapisu. Množica uporabljenih samoglasnikov je del stavka. Množica uporabljenih črk a je del (element) množice uporabljenih samoglasnikov in tudi del stavka.

Naj bo S prvo nastopanje črke a v stavku, R pa beseda, kjer se a prvič pojavi. Potem je S element množice uporabljenih a -jev in tudi element R -a, ki je beseda stavka.

Dva dodatna aksioma določata popolnoma nov pojem:

Aksiom 3. Če je objekt P množica stvari y in je Q množica stvari y , potem je P isto kot Q .

Aksiom 4. Če je kakšen y , potem obstaja objekt P , ki je množica stvari y .

Te aksiome je zapisal Leśniewski leta 1916 [4].

Vprašanje, na katerega pa v tem sestavku ne bomo odgovorili, se pa na tem mestu zastavlja, je, ali vsi modeli te teorije ustrezajo našemu intuitivnemu pojmovanju *dela* ali ne.

Zdaj lahko zapišemo izjavo: »Množica naših čevljev je isto, kot množica naših parov.«

$$\mathbf{Mn}(\check{c}) = \mathbf{Mn}(p)$$

Kako bi prebrali naslednje zapise?

$$F = \mathbf{Mn}(A \cup B)$$

$$I = \mathbf{Mn}(l)$$

$$J = \mathbf{Mn}(d)$$

Če želimo zapisati, da je F par čevljev, to naredimo enostavno takole:

$$F \varepsilon p$$

Če pa želimo reči, da F sestavljata dva čevlja, moramo definirati:

Objekt X je *dvojica* objektov y natanko tedaj, kadar obstajata objekta Y in Z , $Y \neq Z$ in X je množica objektov $Y \cup Z$.

Simbolično zapisana definicija izgleda takole:

$$X \varepsilon 2(y) \Leftrightarrow (\exists Y, Z) (Y \neq Z \wedge X = \mathbf{Mn}(Y \cup Z))$$

4. Iz definicije 2 sledi, da *prazne množice* ni, saj je pogoj, da je X množica y to, da je vsaj en objekt y .

Prav tako sledi, da je vsak objekt isto kot množica, ki jo sestavlja ta objekt, npr.:

$$A = \mathbf{Mn}(A)$$

$$F = \mathbf{Mn}(F)$$

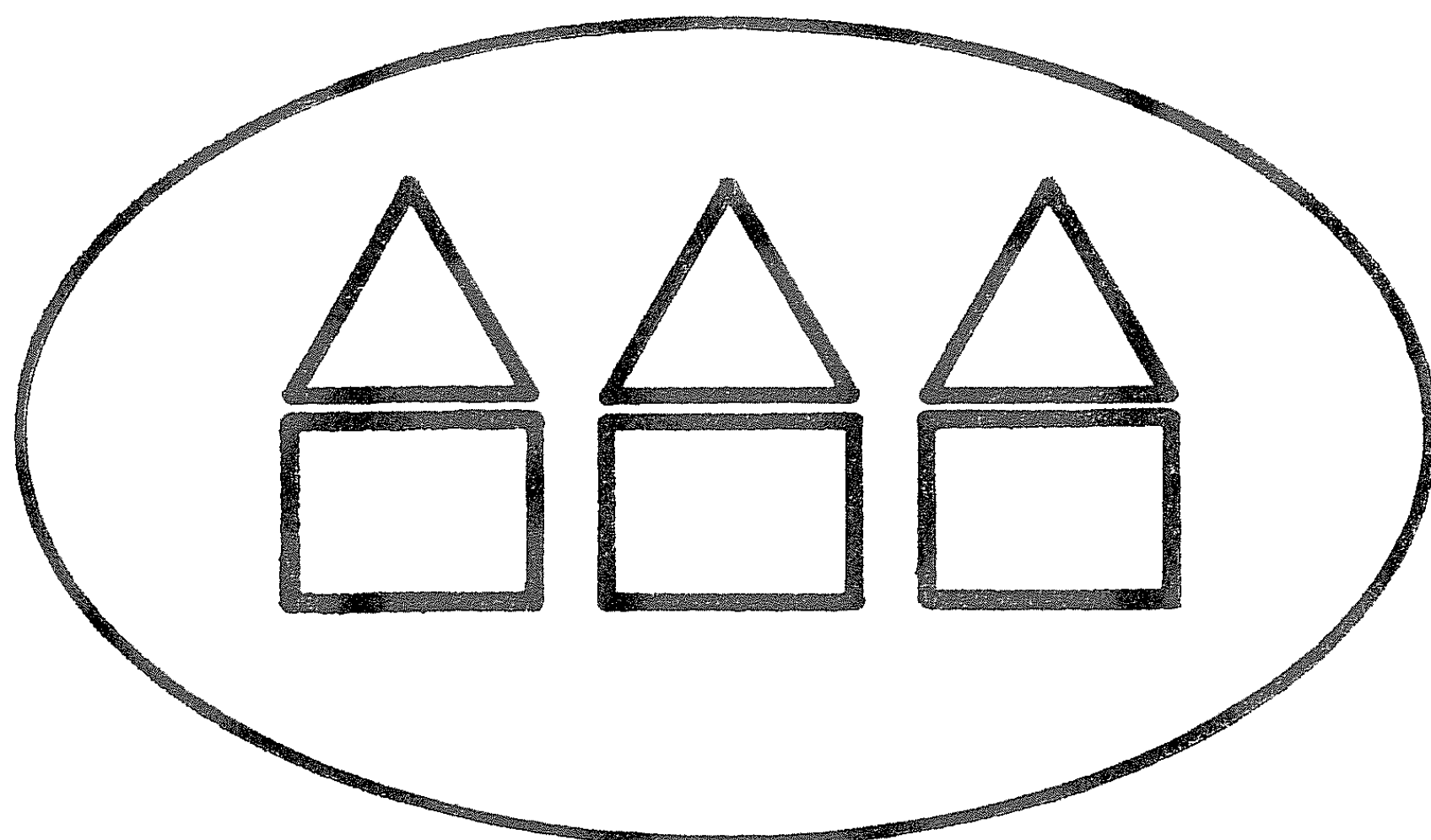
Množica vseh reči je *univerzum*. Simbolično bi ga vpeljali z dvema definicijama

$$A \varepsilon O \Leftrightarrow A \varepsilon A$$

(A je *objekt* natanko tedaj, kadar velja A je A).

$$A \varepsilon V \Leftrightarrow A \varepsilon \mathbf{Mn}(O)$$

(A je *univerzum* $\Leftrightarrow A$ je množica vseh reči).



5. Množice v našem smislu so konkretni objekti, zato lahko z njimi delamo vse tisto, kar lahko delamo z njihovimi elementi. Množico matematičnih ploščic lahko obkrožimo, vržemo ali izgubimo.

Jasno je, da se pojem množice uporablja v nižjih razredih osnovne šole v tem pomenu in ne v pomenu, ki ga opredeljuje teorija množic.

Vsi izrazi Δ , $\mathbf{Mn}(\Delta)$, $\mathbf{Mn}(\mathbf{Mn}(\Delta))$ so navidezna imena. Torej » Δ « ni ime za prazno množico. Lahko bi definirali tudi unijo, presek in komplement objektov. Komplement univerzuma pa ne obstaja.

Naloge kot »Koliko ima tale množica elementov?«, običajno ne delajo težav, ker navadno neka lastnost, na osnovi katere smo množico razbili na dele, izrazito izstopa. Če pa imamo dve taki lastnosti, kot npr. pri se stvari zataknejo. Zato bi se moralo vprašanje glasiti: »Koliko ima tale množica elementov, ki imajo lastnost« ...?

6. Za konec zapišimo aksiome *mereologije*, kot je to teorijo imenoval Leśniewski, v simbolni obliki:

Aksiom 1. $X \varepsilon \mathbf{del}(Y) \Rightarrow Y \varepsilon \mathbf{N}(\mathbf{del}(X))$

Aksiom 2. $X \varepsilon \mathbf{del}(Y) \wedge Y \varepsilon \mathbf{del}(Z) \Rightarrow X \varepsilon \mathbf{del}(Z)$

Definicija 1. $X \varepsilon \mathbf{el}(Y) \Leftrightarrow X = Y \vee X \varepsilon \mathbf{del}(Y)$

Definicija 2. $X \varepsilon \mathbf{Mn}(y) \Leftrightarrow (\exists Q) (Q \varepsilon y) \wedge (\forall Q) (Q \varepsilon y \Rightarrow Q \varepsilon \mathbf{el}(X)) \wedge$
 $(\forall Q) (Q \varepsilon \mathbf{el}(X) \Rightarrow (\exists R, S) (R \varepsilon y \wedge S \varepsilon \mathbf{el}(R) \wedge S \varepsilon \mathbf{el}(Q)))$

Aksiom 3. $P \varepsilon \mathbf{Mn}(y) \wedge Q \varepsilon \mathbf{Mn}(y) \Rightarrow P = Q$

Aksiom 4. $X \varepsilon y \Rightarrow (\exists P) (P \varepsilon \mathbf{Mn}(y))$

Omenjena teorija ima naslednjo pomanjkljivost: V aksiomih nastopata definirana pojma (element, množica). Zato ne moremo reči, da relacijo *del* opredeljujeta prva dva aksioma, temveč jo vsi štirje. To pomanjkljivost je odpravil Lejewski, ki je zasnoval mereologijo na osnovi enega samega aksioma [3].

Mereologija nima kakšne neposredne zveze s teorijo množic, če seveda izvzamemo analogijo, ki bi jo lahko vzpostavili med pojmi ene in druge teorije.

Bolj neposredna pa je zveza ontologije in teorije množic. Imenom prve teorije ustrezajo množice v drugi teoriji (navideznemu imenu npr. prazna množica).

Osnove matematike, kot jih je zasnoval Leśniewski, sestojijo iz treh aksiomatičnih teorij: prototetike, ki je neke vrste izjavni račun; ontologije (ki vključuje prototetiko) in mereologije (ki vsebuje obe drugi teoriji).

Lejewski je dokazal, da sta tako mereologija kot ontologija konsistentni glede na protetiko [3].

Pri tem je treba poudariti, da noben aksiom ontologije ali mereologije ne zagotavlja eksistence objektov. Če bi dodali k ontologiji aksiom neskončnosti in aksiom izbire, bi se znašli pred podobnimi problemi, kot jih imamo z neprotislovnostjo teorije množic.

Drug problem je Russellova antinomija. Način, kako se ji izognemo v ontologiji, je obravnavan v [1].

LITERATURA

- [1] I. Hafner, *Russellova antinomija in osnove matematike*, Anthropos (1982) 3, 11—14.
- [2] C. Lejewski, *On Leśniewski's ontology*, Ratio 1 (1958) 2, 150—176.
- [3] C. Lejewski, *Consistency of Leśniewski's mereology*, J. Symb. Logic 34 (1969) 3, 321—328.
- [4] S. Leśniewski, *Foundations of the general theory of sets*, Prace polskiego kola naukowego w moskwie, Moskva, 1916.

ATOMSKI MODEL NIELSA BOHRA

JANEZ STRNAD

A 31.10

Članek se ob stoletnici rojstva spomni dosežkov Nielsa Bohra v fiziki. Nekoliko podrobneje obdela njegovo pot do modela za vodikov atom — odločilnega odkritja stare kvantne mehanike. Posebej poskuša poudariti to, kar je Bohr dodal obstoječemu znanju. Nazadnje omeni usodo nekaterih odkritij v fiziki: kljub izrednemu pomenu za razvoj kvantne mehanike je dandanes Bohrov model zastarel.

NIELS BOHR'S MODEL OF THE ATOM

On the occasion of the centenary of his birth the achievements of Niels Bohr in physics are reviewed. Somewhat more in detail his way to the model of the hydrogen atom — the decisive discovery of the old quantum mechanics — is considered. The article intends to expose what Bohr added to existing knowledge. Finally, the fate of some discoveries in physics is mentioned: in spite of the extraordinary impact on the development of quantum mechanics Bohr's model today is outdated.

Nielsu Bohru pripisujejo tri velike zasluge v fiziki: s svojim modelom vodikovega atoma je usmeril razvoj kvantne mehanike, sodeloval pri začetnih korakih v jedrsko fiziko in osnoval šolo teorijske fizike, ki so ji pripadali fiziki iz številnih dežel in ki ji najbrž ni bilo enake. Čeprav bi bilo zanimivo

Življenjska in strokovna pot Nielsa Bohra [1]

- 1885 7. oktobra, rojen v Kopenhagenu
- 1903 vpis na univerzo v rodnem mestu
- 1907 zlata medalja Kraljeve danske akademije za delo o merjenju površinske napetosti kapljev
- 1909 magisterij z delom iz elektronske teorije kovin
- 1911 doktorat z delom, ki je nadaljevanje magistrskega
- 1911—1912 delo na univerzi v Cambridgu pri J.J. Thomsonu
- 1912 delo na univerzi v Manchesteru pri E. Rutherfordu
- 1913 objava članka v treh delih *O zgradbi atomov in molekul*; predavatelj na univerzi v Kopenhagenu
- 1914—1916 predavatelj na univerzi v Manchesteru
- 1916 profesor za teorijsko fiziko na univerzi v Kopenhagenu
- 1917 član Kraljeve danske akademije znanosti in umetnosti
- 1921 odprejo Inštitut za teorijsko fiziko na Blegdamsveju v Kopenhagenu
- 1922 osnovna razlaga periodne preglednice elementov; Nobelova nagrada iz fizike »za raziskovanje zgradbe atomov in sevanja, ki ga oddajajo«
- 1927 vprašanje merjenja v atomski fiziki, načelo komplementarnosti
- 1933 vprašanje merjenja v kvantni elektrodinamiki (skupaj z Leonom Rosenfeldom)
- 1936 model atomskega jedra kot kapljice
- 1939 predsednik Kraljeve danske akademije; teorija cepitve uranovega jedra (skupaj z Johnom Wheelerjem)
- 1940 Nemci zasedejo Dansko
- 1943 beg v ribiškem čolnu preko preliva na Švedsko
- 1943—1945 sodelovanje pri angleškem in pri ameriškem načrtu za izdelavo jedrske bombe
- 1945 vrnitev na Dansko
- 1950 odprto pismo Združenim narodom
- 1955 predsednik danske Komisije za atomsko energijo
- 1962 18. novembra, umrl v Kopenhagenu

razčleniti tudi druge Bohrove dosežke, se omejimo zgolj na njegov model atoma ali iona z enim elektronom. Pot do modela, ki mu je prinesel Nobelovo nagrado, je zanimiva tudi po fizikalni strani.

Bohra je uvedel v kvantno fiziko, kakor so jo pač pojmovali v tistem času, njegov učitelj Christian Christiansen, soodkritelj anomalne disperzije. Za magistrsko delo mu je dal temo o elektroni v kovini. Bohr je na nekaterih mestih izpopolnil teorijo, ki so jo oblikovali J. J. Thomson, Philipp Lenard in Antoon Lorentz. Tako je na primer popravil Lorentzov privzetek, da elektroni trkajo z mirujočimi ioni, in dobil izboljšano vrednost za razmerje med toplotno in električno prevodnostjo [2].

Nasprotja med napovedmi teorije in eksperimentalnimi ugotovitvami so ga izzvala, da je posvetil doktorsko delo istemu problemu. V okviru kinetične teorije plinov je uporabil enačbe klasične statistične mehanike za elektrone, namesto za molekule plina. To ga je napeljalo na misel, da utegne biti za preostala nasprotja med teorijo in poskusi kriva klasična mehanika.

Obdelal je še vprašanje, ali lahko vezani elektroni povzročijo diamagnetizem, ko ga prosti ne morejo. (Pojasnilo je že leta 1905 ponudil Paul Langevin z Larmorjevo precesijo krožečih elektronov.) Zaradi težav pri tem je začel dvomiti tudi o klasični elektrodinamiki.

Potem ko je obranil doktorsko delo, je odšel s štipendijo leta 1911 v Cambridge k J. J. Thomsonu. Le-ta pa ni pokazal veliko volje, da bi razpravljал o elektroni v kovinah. Morda je zameril Bohru, da je odklonil nekatere njegove privzetke. Tudi pri eksperimentiranju Bohr ni dosegel dosti. Pritožil se je, da je težko najti potrebni pribor, češ da vlada na Cavendishovem inštitutu nepopisen nered.

Thomsonov odziv... je bil precej manj ohrabrujoč. Thomson sploh ni verjel v novo kvantno teorijo atoma, posebej še zato ne, ker je pravkar... predstavil nov model atoma, ki je — tako je trdil — pojasnil mnogo opazovanih pojavov, celo fotoefekt, brez kvantov... Toda njegov odklonilni odnos Bohra ni zares prizadel, čeprav zaradi njega ni bil ravno srečen. »Thomson je šel iz fizike,« je pripomnil pozneje, »in se ni nikoli zares vrnil vanjo, zato ker je ugovarjal edini pozitivni poti.«

J. Mehra, H. Rechenberg [6], str. 193

Zaradi vsega tega je Niels Bohr marca 1912 prešel na univerzo v Manchesteru, kamor ga je povabil Ernest Rutherford. Tam je bilo tedaj zbranih nekaj imenitnih mladih fizikov: H. Geiger, C. G. Darwin, H. G. J. Moseley, G. de Hevesy. Poslušal je Geigerjeva predavanja in delal poskuse iz radioaktivnosti. Že čez nekaj časa pa se je odločil, da se bo ukvarjal samo s teorijo. Menda je zmanjkalo nekega radioaktivnega preparata, pa je vzel v roke članek C. G. Darwina o absorpciji in sipanju delcev α , ki je pravkar izšel [3]. Darwin je privzel, da deluje na delec α sila le v notranjosti atoma. Zato so mu radiji atomov pojemali z naraščajočim masnim številom in je dobil prevelike atome lahkih elementov in premajhne atome težkih elementov. Bohru se je zdel privzetek neupravičen in je pojav obdelal po zgledu disperzije svetlobe. Ugotovil je, da je zmanjšanje hitrosti hitrih naelektrenih delcev odvisno od frekvence nihanja elektronov v atomu. Poleg tega se je prepričal, da vsebuje vodikov atom en elektron in helijev atom dva, v težjih atomih pa je število elektronov približno enako polovici masnega števila. Članek, ki ga je

objavil [4], ni pomemben. Pomembno je, da je ta dogodek obrnil njegovo pozornost k zgradbi atomov.

N. Bohr se je poleti leta 1912, ko se je lotil zgradbe atomov, opiral na dve vrsti spoznanj in ju poskušal združiti. Na eni strani je upošteval spoznanje, do katerega je prišel M. Planck leta 1900, ko je pojasnil spekter črnega telesa. Stena votline izmenjuje s sevanjem energijo v obrokih — kvantih

$$W = h \nu \quad (1)$$

ν je frekvenca sevanja in h Planckova konstanta. Planck je pričakoval, da lahko izmenja stena s sevanjem poljubno energijo. Meritve pa so ga tako rekoč prisilile, da je sprejel enačbo (1). Pozneje je veliko časa porabil za razmišljanje o tem, kako bi se vsaj delno izognil kvantom. (Izdelal je teorijo, da stena sicer izseva energijo v obliki kvantov, a jo zvezno absorbira.) Albert Einstein pa je leta 1905 privzel, da je energija sevanja sama razdrobljena na obroke in v tej obliki tudi potuje.

Na drugi strani se je Bohr opiral na Rutherfordovo sliko atoma. Elektron kot delec z maso m in z negativnim osnovnim nabojem $-e_0$ je stopil v fiziko v glavnem po zaslugi J. J. Thomsona leta 1897. Kmalu je postalo jasno, da so elektroni sestavni deli atomov. Tedaj se je pojavilo vprašanje, kako je v navzven nevtralnem atomu porazdeljen pozitivni naboj, ki izravna negativni naboj elektronov. Leta 1902 je lord Kelvin privzel, da pozitivni naboj izpolnjuje vso prostornino atoma in da tičijo elektroni v njem kot rožine v potici. V nemotenem atomu elektroni mirujejo, eden v središču atoma, dva na premeru, trije v ogliščih enakostraničnega trikotnika, štirje v oglih tetraedra... Če jih zmotimo, zanihajo z značilno frekvenco in sevajo elektromagnetno valovanje s to frekvenco. V tem modelu je bilo težavno obravnavati atom z večjim številom elektronov. Poleg tega je bilo število značilnih frekvenc mnogo premajhno.

Leta 1904 je J. J. Thomson uvedel nekoliko spremenjeni model. Elektroni krožijo okoli središča po koncentričnih krogih v ravnini. Vsak krog sprejme določeno število elektronov. Elektroni na notranjih krogih so močnejše vezani, elektroni na zunanjem krogu pa najšibkeje. Ti, valenčni elektroni, določajo kemijske lastnosti elementa. Toda Thomson razprave ni nadaljeval in ni poskusil izračunati ionizacijske energije. Najbrž se je zavedal, da je privzetek o kroženju v ravnini preveč umeten.

Leta 1911 je Ernest Rutherford pojasnil velik kot, za katerega so se na tankih kovinskih lističih odklonili maloštevilni delci α , s čisto drugačnim modelom. Pozitivni naboj je zbran sredi atoma v zelo majhnem jedru. Seveda so v Manchestru vsi upoštevali ta model, tudi Darwin in Bohr, ko sta obravnavala zaviranje naelektrenih delcev ob prehodu skozi snov.

Rutherfordov model atoma, v katerem jedro spominja na Sonce in elektroni na planete, pa ima resno pomanjkljivost. Po Maxwellovi elektrodinamiki pospešeno se gibajoči naelektreni delec, torej tudi krožeči elektron, seva. Ob tem izgublja energijo, se bliža jedru in naposled pade vanj. V tem modelu bi moral atom sevati elektromagnetno valovanje s čedalje večjo frekvenco in sploh ne bi mogel obstajati dalj časa. Tudi Thomsonov model atoma je trpel za to pomanjkljivostjo, le da bi pri njem zaradi manjše sile pozitivnega naboja na elektron, ta krožil počasneje in bi atom počasneje izgubljal energijo s sevanjem.

Izkušnje govorijo popolnoma drugače. Atomi v plinu so obstojni in ne sevajo, če jih ne motimo. Ko jih zmotimo, pa sevajo svetlobo določenih frekvenc, se pravi, da imajo črtast spekter. Nekateri spektroskopisti so proti koncu prejšnjega stoletja obupovali nad tem, da bi sploh mogli pojasniti frekvence izsevane svetlobe. Drugi pa so atome primerjali z zvočili in si prizadevali določiti frekvence, kot določimo lastne frekvence zvočil. V letu Bohrovega rojstva je švicarski učitelj Johann Jakob Balmer, ki se sicer ni ukvarjal s fiziko, objavil dokaj preprosto enačbo za frekvenco štirih črt v vidnem delu vodikovega spektra:

$$\nu = c R_y (1/2^2 - 1/n^2) \quad n = 3, 4, 5, 6$$

Pozneje je švedski fizik Johannes Robert Rydberg s podobnimi enačbami izrazil frekvence v serijah spektralnih črt drugih elementov. Po njem ima ime konstanta R_y .

Po Ritzovem načelu iz leta 1908, da navadno opazimo v spektru tudi črto s frekvenco, ki je enaka razliki frekvenc dveh črt, je bilo mogoče dati Balmerjevi enačbi za vodik obliko

$$\nu = c R_y (1/n'^2 - 1/n^2) \quad n' < n \quad (2)$$

Niels Bohr je poleti leta 1912 končal kratek osnutek članka o zgradbi atomov. Od vsega začetka je iskal nove zakone, najbrž tudi zaradi izkušenj z elektroni v kovinah. Doseči je hotel, da bi bili atomi obstojni in bi sevali svetlobo z določeno frekvenco. Zato je dodal starim zakonom gibanja zahtevo o sorazmernosti med kinetično energijo elektrona in frekvenco kroženja ν_{kr} :

$$W_k = K \nu_{kr} \quad (3)$$

Po zgledu Planckove enačbe (1) naj bi imel sorazmernostni koeficient K velikostno stopnjo Planckove konstante. Enačbe ni poskušal utemeljiti, češ da to sploh ni mogoče.

Julija 1912 se je vrnil v Kopenhagen in jeseni začel s predavanji na univerzi. V tem času delo ni napredovalo. Decembra je prosil za dopust in se umaknil na deželo, da ga konča. Prebiral je delo Johna Williamsa Nicholsona (iz tega leta), ki je tudi izhajal od Rutherfordovega modela in privzel podobno enačbo kot (3). Šel je še dlje in je ob pojasnjevanju spektrov galaksij in sončne korone trdil, da se vrtilna količina elektrona ob sevanju spremeni za določeno vrednost. Vendar se je popolnoma zanašal na ustaljeno prepričanje, da sevajo krožeči elektroni valovanje s frekvenco kroženja. Zanimal se je tudi za prehodna (vzbujena) stanja. V nasprotju z njim se je Bohr tedaj — konec januarja — še omejil na trajno (osnovno) stanje, čeprav je omenjal spektralne črte.

Mesec dni pozneje je Bohr poslal Rutherfordu članek, ki je na začetku obravnaval pojem osnovnega stanja in zvezo med frekvenco izsevane svetlobe in energijo stacionarnih (vzbujenih) stanj. Kako je prišlo do tega preobrata? Bohr je povedal Leonu Rosenfeldu: »Brž ko sem videl Balmerjevo enačbo, mi je bilo vse jasno.« Februarja 1913 se je pogovarjal s Hansom Mariusom Hansenom, ki je delal v Göttingenu in se je razumel na spektroskopijo. Bohr se dotlej zanjo sploh ni zanimal, češ da so spektri prezapleteni, da bi kaj povedali o zgradbi atomov. Hansen mu je ugovarjal in ga opozoril na dokaj preprosto Rydbergovo enačbo za frekvence spektralnih črt. Bohr je v knjigi

Johannesa Starka našel Balmerjevo enačbo in najbrž po kratkem poskušanju prišel do svojih enačb. Iz poslanega članka je nastal prvi del tridelnega članka, ki je izšel v drugi polovici leta 1913 (Sl. 1) [5].

THE
LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN
PHILOSOPHICAL MAGAZINE
AND
JOURNAL OF SCIENCE.

[SIXTH SERIES.]

JULY 1913.

I. *On the Constitution of Atoms and Molecules.*
By N. BOHR, Dr. phil. Copenhagen*.

Introduction.

IN order to explain the results of experiments on scattering of α rays by matter Prof. Rutherford† has given a theory of the structure of atoms. According to this theory, the atoms consist of a positively charged nucleus surrounded by a system of electrons kept together by attractive forces from the nucleus; the total negative charge of the electrons is equal to the positive charge of the nucleus. Further, the nucleus is assumed to be the seat of the essential part of the mass of the atom, and to have linear dimensions exceedingly small compared with the linear dimensions of the whole atom. The number of electrons in an atom is deduced to be approximately equal to half the atomic weight. Great interest is to be attributed to this atom-model; for, as Rutherford has shown, the assumption of the existence of nuclei, as those in question, seems to be necessary in order to account for the results of the experiments on large angle scattering of the α rays‡.

In an attempt to explain some of the properties of matter on the basis of this atom-model we meet, however, with difficulties of a serious nature arising from the apparent

* Communicated by Prof. E. Rutherford, F.R.S.

† E. Rutherford, Phil. Mag. xxi. p. 669 (1911).

‡ See also Geiger and Marsden, Phil. Mag. April 1913.

Phil. Mag. S. 6. Vol. 26. No. 151. July 1913. B

Sl. 1. Prvi del Bohrovega članka *O zgradbi atomov in molekul* v Philosophical Magazine. Članek se začne takole: »Da bi pojasnil rezultate poskusov s sipanjem delcev α na snovi, je prof. Rutherford izdelal teorijo o zgradbi snovi. Po njej sestavlja atom pozitivno naelektreno jedro, ki ga obdaja sistem elektronov in ga drže skupaj privlačne sile jedra. Nadalje vzamemo, da je jedro sedež bistvenega dela mase in ima zelo majhne linearne razsežnosti v primeri z linearnimi razsežnostmi vsega atoma. Za število elektronov v atomu so ugotovili, da je približno enako polovični relativni atomski masi atoma. Temu atomskemu modelu moramo posvetiti veliko pozornost, saj je Rutherford pokazal, da se zdi privzetek o obstoju jeder potreben, da pojasnimo poskuse s sipanjem delcev α za velik kot.

V prizadevanju, da bi pojasnili nekatere lastnosti snovi na osnovi tega atomskega modela pa naletimo na težave resne narave, ki izvirajo iz dozdevne nestabilnosti sistema elektronov...«

Da mu bomo lahko sledili, zapišimo nekaj preprostih enačb. Vzemimo, da jedro z nabojem e_0 miruje in kroži elektron okoli njega po krogu z radijem r s hitrostjo v . Za centripetalno silo poskrbi električna privlačna sila

$$m v^2/r = e_0^2/4\pi \epsilon_0 r^2 = q^2/r^2$$

Vpeljali smo $q = (e_0^2/4\pi \epsilon_0)^{1/2}$, da bi se naše enačbe popolnoma ujemale z Bohrovimi, a se ne bi bilo mogoče spotikati ob enote. Za kinetično energijo elektrona sledi

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} q^2/r$$

in za frekvenco kroženja

$$\nu_{kr} = v/2\pi r = (q^2/4\pi^2 m r^3)^{1/2} = q/2\pi m^{1/2} r^{3/2}$$

Polno energijo atoma sestavljata kinetična energija elektrona in potencialna energija elektrona in jedra:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m v^2 - q^2/r = -\frac{1}{2} q^2/r = -\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} W_p = -W_k$$

Polna energija je enaka nič, če elektron in jedro mirujeta v veliki razdalji, in negativna, če sta delca vezana v atom. Iz zadnje enačbe izračunamo radij

$$r = \frac{1}{2} q^2 / (-W)$$

in ga vstavimo v enačbo za frekvenco kroženja

$$\nu_{kr} = (\sqrt{2} \pi q^2 m^{1/2}) (-W)^{3/2}$$

Doslej so bile vse enačbe klasične. Elektron se po njih lahko giblje po krogu s poljubnim radijem. Ko se radij r zvezno spreminja, se spreminjata zvezno tudi energija W in frekvenca kroženja ν_{kr} . Ker enačbe očitno ne ustrezajo temu, kar opazimo, jim dodajmo klasični fiziki tujo zvezo (3). Iz nje izračunajmo $\nu_{kr} = W_k/K = (-W)/K$, pa dobimo na desni strani zadnje enačbe po krajšanju z $-W$ zvezo $1/K = \sqrt{2}(-W)^{1/2}/\pi q^2 m^{1/2}$ in naposled

$$W = -\pi^2 q^4 m / 2K^2$$

Bohr je po vsej verjetnosti primerjal to enačbo z Balmerjevo enačbo (2) in uganil, da je

$$K = \frac{1}{2} n h$$

Na nekem mestu je utemeljil faktor $\frac{1}{2}$ takole: Elektron naj spočetka miruje v veliki razdalji od jedra in naj naposled kroži po krogu z radijem r . Spočetka je frekvenca kroženja enaka nič in naposled ν_{kr} . Zato pač upoštevamo povprečno vrednost $(0 + \nu_{kr})/2 = \frac{1}{2} \nu_{kr}$. Z zadnjo enačbo preide zveza (3) v

$$W_k = -W = \frac{1}{2} n h \nu_{kr} \quad (3b)$$

Takoj sledi

$$W = -2\pi^2 q^4 m / n^2 h^2 \quad (4)$$

in

$$\nu_{kr} = 4\pi^2 q^4 m / n^3 h^3$$

in še

$$r = n^2 h^2 / 4\pi^2 q^2 m \quad (5)$$

Najnižjo energijo in najmanjši radij dobimo za $n = 1$. Bohr je zanj s tedanjimi podatki dobil -13 eV in $0,055 \text{ nm}$.

Po zgledu Einsteinove enačbe za fotoefekt je privzel, da prevzame izsevani kvant razliko energij atoma

$$W_n - W_{n'} = h \nu \quad (6)$$

pa je dobil Balmerjevo enačbo (2). Koeficient

$$c R_y = 2\pi^2 q^4 m / h^3$$

s tedanjimi podatki $3,1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ se je v okviru natančnosti pri merjenju ujemal z izmerjenim, $3,29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Njegova današnja vrednost $3,2898 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, ni dosti drugačna.

Bohr je trdil:

— da lahko »dinamično ravnovesje atomov v stacionarnih stanjih obravnavamo v okviru navadne mehanike, prehoda med stacionarnima stanjema pa ne« in

— da »ustreza prehodu izsevano valovanje z eno samo frekvenco, ki je povezana z energijo s Planckovo zvezo«.

Pozneje je izrazil »postulata« tudi v drugačni obliki. Na kratko lahko opišemo vsebino Bohrove enačbe (6) takole: v klasični elektrodinamiki in v klasični fiziki sploh nihajoči sistemi sevajo valovanje s frekvenco, s katero nihajo ($\nu = \nu_{kr}$), za atome pa to ne velja ($\nu \neq \nu_{kr}$); pri njih je frekvenca izsevanega valovanja povezana z razliko energij.

Enačbi (2) in (6) sta se dobro skladali z merjenji. Za $n' = 2$, $n \geq 3$ sta dali črte znane *Balmerjeve serije* in za $n' = 3$, $n \geq 4$ črte znane infrardeče *Pasche-nove serije*. V spektru laboratorijskih svetil so dotlej premerili 12, v spektru vesoljskih svetil pa 33 črt Balmerjeve serije. Bohr je to pojasnil s povečanim premerom atomov v vzbujenih stanjih. Pri $n = 12$ meri premer 16 nm, kar ustreza povprečnemu razmiku med sosednjima molekulama v plinu pri tlaku 9 mbar, pri $n = 33$ pa že 120 nm, kar ustreza povprečnemu razmiku pri tlaku 0,03 mbar. Sevanje atoma pri prehodu iz visoko vzbujenih stanj opazujemo le pri zelo nizkem tlaku.

Enačbi je mogoče uporabiti tudi za druge sisteme z enim samim elektronom, če nadomestimo q^2 z $Z q^2$ in je Z število pozitivnih osnovnih nabojev v jedru. Pri helijevem ionu He^+ nastopa namesto q^4 izraz $4q^4$ in so frekvence štirikrat večje kot pri vodikovi. Bohr je uvidel, da je mogoče črti, ki ju je imel Alfred Fowler za vodikovi, pripisati heliju za $n' = 3$. Ioniziranemu heliju je pripisal za $n' = 4$ tudi serijo, ki jo je Pickering v letih 1896 in 1897 opazil v spektru neke zvezde.

Bohr je posebej pokazal, da ujemanja pri Balmerjevi seriji ni mogoče doseči drugače kot z enačbo (3) s $K = \frac{1}{2} n h$. Pri prehodu iz stanja n v stanje $n - 1$ dobimo za oklepaj $1/(n - 1)^2 - 1/n^2 = (2n - 1)/n^2(n - 1)^2$, kar preide pri velikem n v $2/n^3$: frekvenca izsevanega valovanja ν se tedaj približno ujema s frekvenco kroženja ν_{kr} . V tem lahko vidimo zasnovo *korespondenčnega načela*: pri velikem n se nove enačbe zlijejo s starimi, klasičnimi.

Bohr je zaslutil pomen vrtilne količine. Iz enačbe

$$K = W_k/\nu_{kr} = \frac{1}{2} m v^2/(\nu/2\pi r) = \pi m v r = \pi I$$

je razbral, da ima lahko vrtilna količina pri gibanju po krogih z določenim radijem samo določene vrednosti: $I = n h/2\pi$.

V nadaljevanju prvega dela članka je Bohr računal tudi energijo skupine elektronov, ki se gibljejo po krogu v enakih razmiki. V tem se je naslanjal na stare predstave. V tem nadaljevanju in tudi v drugem in tretjem delu članka [5] o atomih z več elektroni in o molekulah ni povedal česa bistveno novega.

Za uspeh kake teorije so še posebej pomembne napovedi, ki jih pozneje potrdijo z merjenji [6]. Tako je Theodore Lyman že leta 1914 odkril napovedano serijo črt z $n' = 1$, $n \geq 2$ v ultravijoličnem delu vodikovega spektra. Precej pozneje so odkrili še infrardeči seriji za $n' = 4$, $n \geq 5$ in $n = 6$, $n \geq 7$. Evan Evans iz Rutherfordovega laboratorija je na Bohrovo prošnjo potrdil napoved o črtah v helijevem spektru [7]. Na Evansovo objavo se je odzval Fowler [8] z ugovorom: »Teorija dr. Bohra po moje ne daje dosti opore misli, da izvirajo črte od helija.« Bohr je takoj spoznal, v katerem grmu tiči zajec. Upošteval je, da krožita elektron in jedro okoli skupnega težišča, in nadomestil maso elektrona m v Rydbergovi konstanti z reducirano maso $m/(1 +$

+ m/m_j) [9]. Zaradi različne mase jedra m_j se zato, natančno vzeto, Rydbergovi konstanti za vodik in helij ne ujemata. Bohrov prispevek je prepričal Fowlerja: »Veseli me, da sem vzpodbudil zanimiv prispevek dr. Bohra in rad priznam, da natančnejša oblika njegove enačbe dobro podaja opazovane črte« [10]. Vse to se je dogodilo še leta 1913.

Z natančnejšo obliko svoje enačbe je Bohr napovedal frekvence desetih helijevih črt ene serije, ki jih je Fowler poprej priredil trem različnim serijam. Fowler (1914), Evans (1915) in Paschen (1916) so tudi to napoved potrdili. Bohrova teorija je doživela kmalu še nekaj sijajnih potrditev, na primer pri merjenjih z rentgensko svetlobo (Moseley 1913) in pri opazovanju trkov počasnih elektronov z atomi (James Franck in Gustav Hertz 1914). Vsaka izmed teh bi zahtevala posebno razpravo.

Toda kljub temu ne smemo misliti, da so Bohrovo teorijo povsod nemudoma sprejeli. Znano je na primer, da jo je odklonil J. J. Thomson in da so v Göttingenu nad njo še nekaj časa vihali nos. Toda počasi je le dobila zalet. Dalje jo je pomagal razvijati predvsem Arnold Sommerfeld v Münchnu, ki je zapisal splošni pogoj kot $\oint p_i dq_i = n_i h$ ($n_i = 1, 2, 3$). Pri tem je q_i generalizirana koordinata in p_i ustrezeni impulz. Podobno, le da manj splošno, ga je zapisal Paul Ehrenfest že leta 1913. Nadaljnja zmagovita pot je znana. Leta 1923 je Louis de Broglie pripisal elektronu nekakšno valovanje z valovno dolžino h/mv [11]. Bohrov pogoj je tolmačil kot pogoj za ojačenje valovanja: $2\pi r = n(h/mv)$. Erwin Schrödinger je odkril valovno enačbo za to valovanje in s svojo *valovno mehaniko* odprl vrata kvantni mehaniki. Že prej je Werner Heisenberg uvedel *matrično mehaniko*. Schrödinger je kmalu spoznal, da sta to le dva obraza iste teorije. Tako se je leta 1926 rodila kvantna mehanika, ki ji je okoli leta 1929 Johann von Neumann dal matematično podlago v *teoriji sebiadjungiranih operatorjev v Hilbertovem prostoru*.

Kratkemu opisu nadaljnjega razvoja Bohrove zamisli je vredno dodati še nekaj pripomb. Osnovna Bohrova zamisel je doživela usodo vseh pripravljanih fizikalnih zamisli. Kvantna mehanika, ki je zrasla iz nje, jo je odpravila. V kvantni mehaniki gibanja elektrona sploh ni mogoče opisati s tirom. Tudi elektron v osnovnem stanju zaradi gibanja okoli jedra nima vrtilne količine $h/2\pi$, kakor bi sklepali po enačbi $mv r = n h/2\pi$, ampak vrtilno količino nič.

Razvoj je šel od nazornih predstav k popolnoma abstraktnim količinam. Tudi v nekaterih drugih vejah fizike je mogoče zasledovati tako pot.

V zvezi s tem ne moremo spregledati močne želje fizikov po nazornih predstavah, ki pogosto ovira nadaljnji razvoj. Omenili smo že Plancka, ki ga je njegova enačba (1) spravljala v zadrego. Vse kaže, da se Bohru ni godilo dosti bolje, čeprav imajo njega za revolucionarja, ki je od vsega začetka iskal nove zakone, Plancka pa za konservativca. V mislih imamo prehode s sevanjem, za katere je Bohr leta 1913 trdil, da jih v okviru klasične fizike ni mogoče razumeti.

Številni fiziki se niso mogli sprijazniti s to ugotovitvijo in so iskali možnosti, da bi prehode nazorno razumeli. Očitali so Bohru, da elektron ne more »vedeti«, na kateri krog naj preskoči, in imenovali njegovo teorijo »strašno«. Kaže, da je vprašanje grizlo tudi Bohra samega. Leta 1924 je objavil skupaj s svojim asistentom K. A. Kramersom in obiskovalcem iz ZDA Johnom Slaterjem članek o kvantni teoriji sevanja [12]. Atom v stacionarnem stanju naj

bi obdajalo *virtualno sevalno polje*, ki naj bi sprožilo prehod in izginilo, ko se pojavi pravo sevanje. Kako so si natančno predstavljali virtualno sevalno polje, iz članka ni mogoče razbrati. Vsekakor pa naj bi poskrbelo za nekakšen zvezen prehod iz začetnega stanja v končno. Koliko jim je bilo do take klasično ubrane slike, kaže dejstvo, da so se bili zaradi nje pripravljene odgovoriti zakonu o ohranitvi energije. Ta naj bi veljal le v povprečju čez veliko prehodov, ne pa za posamični prehod. Čeprav je Bohr trdil, da gre za sliko sevanja, ki naj da človeku zgolj občutek in ki je ne bo mogoče preveriti z merjenji, so jo ovrgla prav opazovanja. Walther Bothe in Hans Geiger sta v letih 1924 in 1925 v Berlinu pokazala, da obstaja pri Comptonovem pojavu v nasprotju s teorijo Bohra, Kramersa in Slaterja krajevna in časovna korelacija med sipanim kvantom in odrinjenim elektronom [13].*

Dolgo je trajalo, preden so fiziki uvideli, da sevanja pri prehodu atoma ni mogoče opisati tako kot sevanje velike antene. V kvantni mehaniki je mogoče podati zgolj verjetnost za prehod iz začetnega stanja v končno na časovno enoto. Pri tem naletimo na atom vedno ali v začetnem ali v končnem stanju, nikdar v kakem vmesnem stanju. Tudi N. Bohru, ne samo M. Plancku, je njegovo lastno odkritje povzročalo težave. Ni dvoma, da izvirajo te težave vsaj delno iz navezanosti na klasično fiziko z njenimi preglednimi in nazornimi opisi. Zanimivo pa je, da je drugi Bohrov privzetek o prehodih s sevanjem med stacionarnimi stanji povzročal veliko več težav kot prvi o stacionarnih stanjih z določenimi energijami.

LITERATURA

[1] *Niels Bohr, His life and work as seen by his friends and colleagues* (ur. S. Rozental), North Holland, Amsterdam 1968.

[2] U. Hoyer, *Bohrs Weg zur Atomtheorie*, Phys. Blätter **83** (1982) 345.

[3] C. G. Darwin, *A theory of the absorption and scattering of the α -rays*, Phil. Mag. **23** (1912) 900—920.

[4] N. Bohr, *On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter*, Phil. Mag. **25** (1913) 10—30.

[5] N. Bohr, *On the constitution of atoms and molecules*, Phil. Mag. **26** (1913) 1—25; *Part II, Systems containing only a single nucleus*, Phil. Mag. **26** (1913) 476—502; *Part III, Systems containing several nuclei*, Phil. Mag. **26** (1913) 857—875.

[6] J. Mehra, H. Rechenberg, *The historical development of quantum theory, Vol. I, Part I., The quantum theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its foundations and the rise of its difficulties 1900—1925*, Springer, New York 1982.

[7] E. Evans, *The spectra of helium and hydrogen*, Nature **92** (1913) 5.

[8] A. Fowler, *The spectra of helium and hydrogen*, Nature **92** (1913) 95—96.

[9] N. Bohr, *On the spectra of helium and hydrogen*, Nature **92** (1913) 231—232.

[10] A. Fowler, *The spectra of helium and hydrogen*, Nature **92** (1913) 232—233.

[11] J. Strnad, *De Brogliejevo valovanje*, Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 151.

[12] N. Bohr, H. A. Kramers, J. C. Slater, *Über die Quantentheorie der Strahlung*, Z. Phys **24** (1924) 69, prevod: *On the quantum theory of radiation*, Phil. Mag. **47** (1924) 78.

[13] A. Bents, W. Kuhn, J. Seibert, *Ausgangspunkt einer langwährenden Diskussion: Die Bohr-Kramers-Slater-Theorie* (v tisku).

* Tega s tedanjimi merilnimi napravami ni bilo lahko narediti, saj Geigerjevih števecv še ni bilo in sta uporabljala iskrna števec. Števca sta bila povezana vsak s svojim nitnim elektrometrom in koincidence sta zabeležila fotografsko. Bothe je za to delo dobil Nobelovo nagrado leta 1954.

DOLOČANJE ZVEZDNIH MAS

MARIJAN PROŠEN

A 97.10

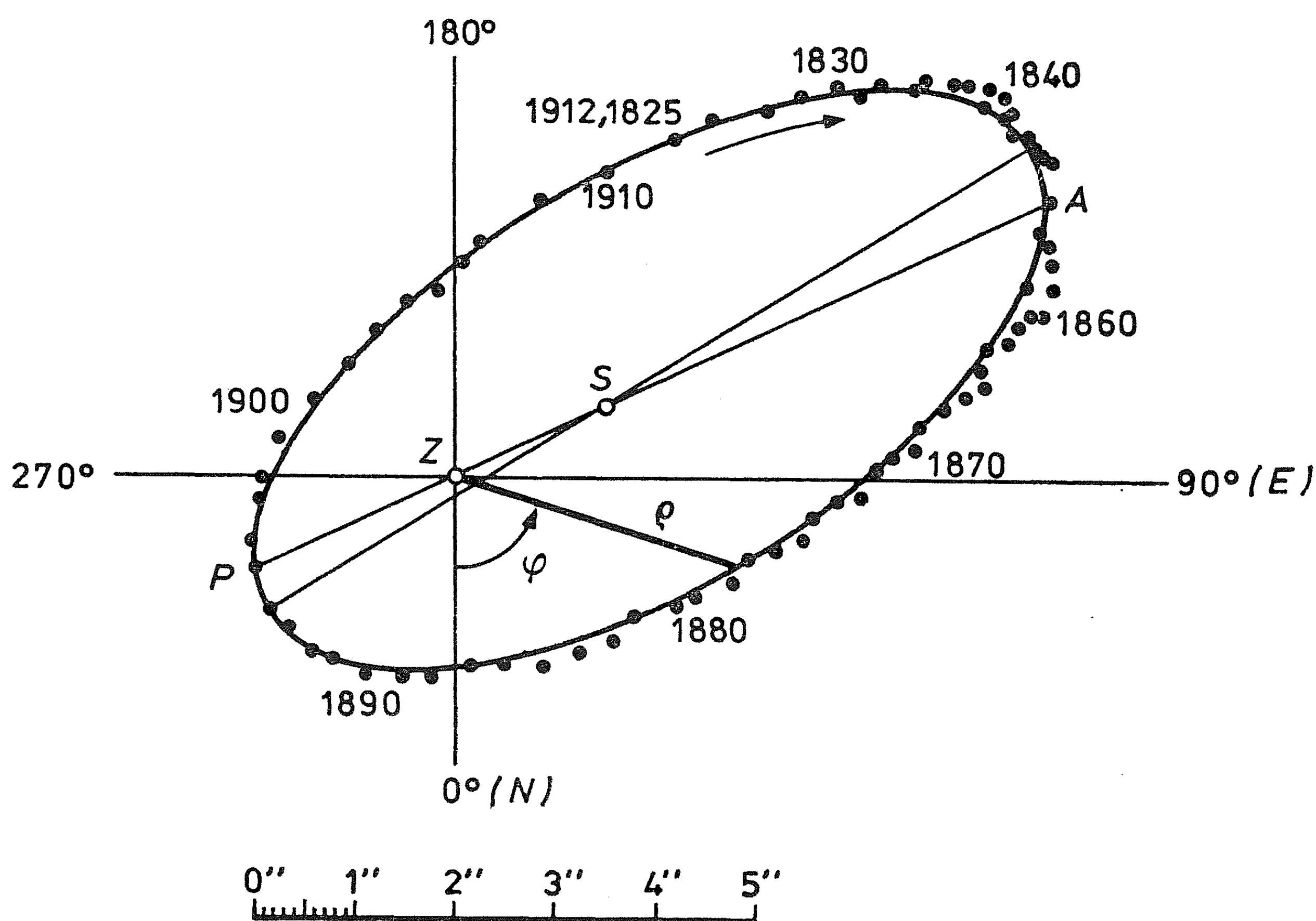
Članek opiše določanje mase zvezd na način, ki je primeren za obravnavanje pri fiziki v srednji šoli.

DETERMINATION OF STAR MASSES

A method of star mass determination is described suitable for use in secondary school.

Masa zvezde je zelo pomembna, saj je od nje odvisna razvojna pot zvezde [1]. Mase samostojnih zvezd z izjemo Sonca ne moremo naravnost določiti [2]. Osnovo za podatke o masah zvezd dobimo z opazovanjem tako imenovanih *vidnih dvojnih zvezd*, to je dvojic, v katerih zvezdi krožita okrog skupnega težišča. Obe zvezdi vidne dvojne zvezde ločimo z daljnogledom, medtem ko s prostimi očmi vidimo te zvezde enojne. Zorni kot med zvezdama namreč ni večji od nekaj deset kotnih sekund.*

V zvezdni dvojici je bolj svetla *glavna zvezda*, manj svetla pa *spremljevalka*. Lego spremljevalke glede na glavno zvezdo določimo z zornim kotom ϱ , pod katerim vidimo zvezdi, in s kotom φ med zveznico obeh zvezd in smerjo proti severu (sl. 1).



Sl. 1. Navidezni tir spremljevalke v dvojni zvezdi 70 Kačenosca po opazovanjih v letih od 1825 do 1912.

* Vidne dvojne zvezde, pri katerih ločimo zvezdi s šolskim daljnogledom, so npr.: β Laboda (zorni kot med zvezdama: $35''$), α Lovskih psov ($20''$), ζ Velikega medveda-Mizar ($15''$), γ Andromede ($10''$). Gl. *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3.

Iz meritev, ki trajajo več let ali celo več deset let, narišejo *navidezni tir* spremljevalke v obliki elipse (sl. 1). Glavna zvezda Z pa ne leži v gorišču, saj je navidezni tir le projekcija pravega eliptičnega tira na tangentno ravnino k nebesni krogli. Glavna zvezda seveda leži v enem od gorišč pravega tira, katerega središče se pokriva s svojo projekcijo. Zato je daljica AP skozi središče S elipse in glavno zvezdo Z projekcija velike osi pravega eliptičnega tira. Glavni zvezdi najbližja točka pravega tira spremljevalke se imenuje *pri-zvezdje* (periastrom) P, najoddaljenejša pa *odzvezdje* (apoastrom) A.

Iz podatkov o navideznem tiru lahko izračunamo obhodni čas t_0 zvezde spremljevalke, veliko polos a pravega tira, ekscentričnost in naklon tira k tangentni ravnini. Če poznamo razdaljo r dvojne zvezde* in zorni kot α , pod katerim vidimo a pravokotno na zorno smer, izračunamo $a = r \alpha$.

Če sta m_1 in m_2 masi zvezd, lahko zapišemo tretji izpopolnjeni Keplerjev zakon [2]:

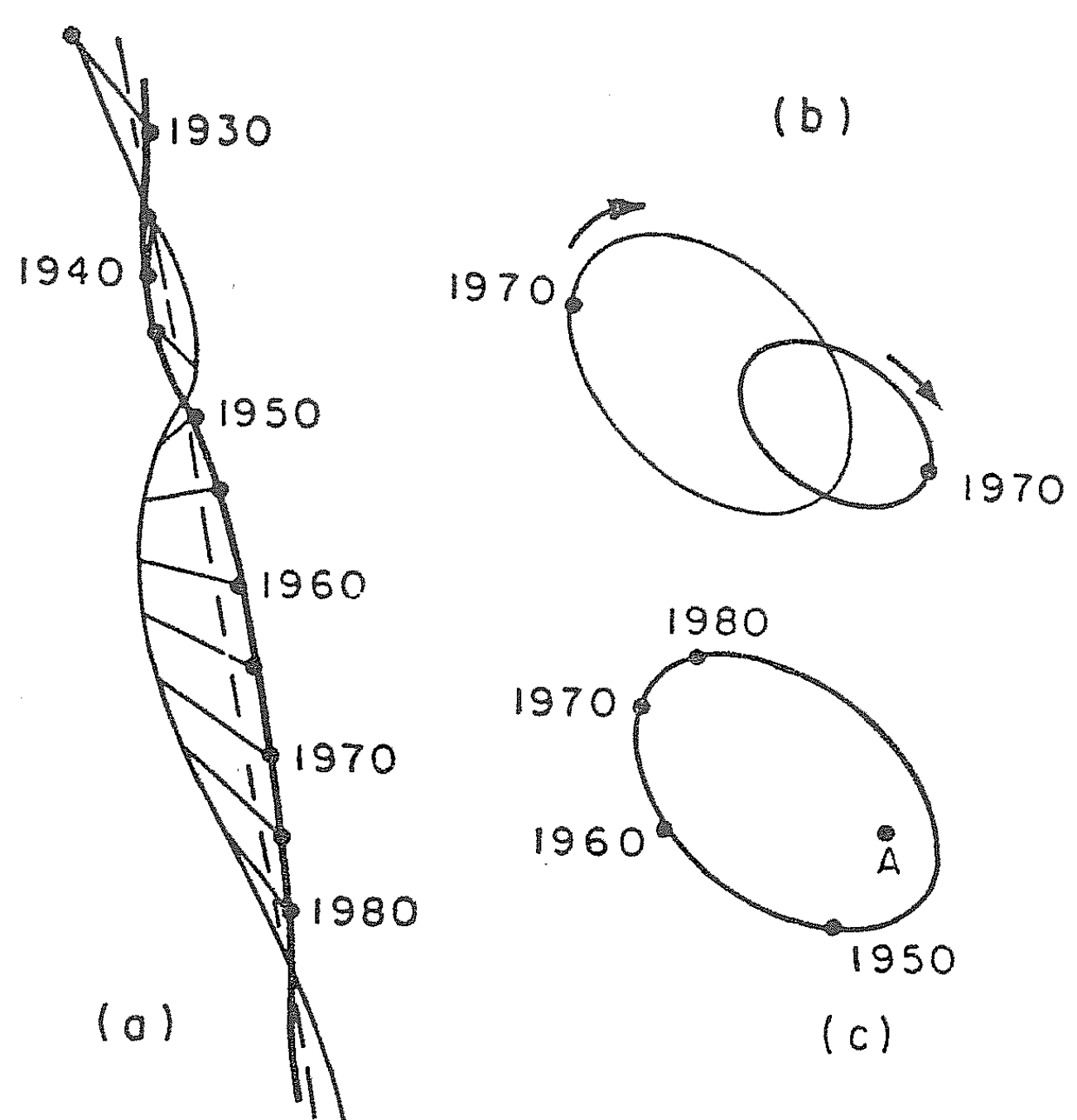
$$(m_1 + m_2) t_0^2 / a^3 = C \quad (1)$$

$C = 5,92 \cdot 10^{11} \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^2$. Če imamo možnost, da izmerimo lege vsake od obeh zvezd glede na zelo oddaljene šibke zvezde, ugotovimo še velike polosi a_1 in a_2 njunih pravih tirov glede na njuno težišče. Velja zveza [2], [3]:

$$m_1/m_2 = a_2/a_1 \quad (2)$$

Iz sistema enačb (1) in (2) pri znanih podatkih t_0 , a , a_1 in a_2 izračunamo maso posamezne zvezde.

Za zgled izračunajmo maso zvezd pri dvojni zvezdi Siriju (sl. 2). Obhodni čas t_0 meri 50 let, polos a pa je $3 \cdot 10^{12} \text{ m}$. Sledi $m_1 + m_2 = 6,4 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 3,2 m_S$, če je $m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ masa Sonca. S sl. 2 ugotovimo, da je težišče približno 2-krat bližje Siriju A kot Siriju B. Torej je $m_1/m_2 \approx 2$. Sledi $m_1 \approx 2,1 m_S$ in $m_2 \approx 1,1 m_S$.



Sl. 2. Gibanje zvezd v dvojni zvezdi Sirij; a-gibanje glavne zvezde-Sirija A (debela črta) in spremljevalke-Sirija B glede na dalnje zvezde; b-tira gibanja zvezd glede na skupno težišče; c-tir gibanja spremljevalke glede na glavno zvezdo.

* Razdaljo dobimo iz izmerjene paralakse p zvezde; $p = a_0/r$, če je a_0 astronomska enota [2].

Omenjeni način določanja mase zvezd lahko utrdimo še z dodatnimi zgledi. Bralec lahko izračuna mase zvezd za tele dvojne zvezde: α Voznika ($\alpha = 0,054''$; $p = 0,073''$; $t_0 = 105$ dni; $m_1/m_2 = 11/14$), α Dvojčkov-Kastor ($6,3''$; $0,072''$; 420 let; $8/7$), ξ Velikega medveda ($2,5''$; $0,127''$; 60 let; $49/51$), α Kentavra ($18''$; $0,751''$; 80 let; $10/9$) [4].

Po znanih masah in izsevih zvezd v dvojnih zvezdah so ugotovili statistično odvisnost med maso in izsevom. Z njo ocenimo maso enojnih zvezd iz znane izseva. Raziskave so pokazale, da meri masa zvezd od približno 0,05 do okoli 80 sončnih mas.

LITERATURA

- [1] A. Čadež, *Življenje zvezd*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 97; *Fizika zvezd* (Postdiplomski seminar iz fizike, 5), DMFA SRS, Ljubljana 1977.
- [2] F. Avsec, M. Prosén, *Astronomija*, DZS, Ljubljana 1975, 70, 128, 139.
- [3] O. Struve, *Elementary Astronomy*, Oxford Univ. Press, New York 1959, 230.
- [4] M. M. Dagaev, *Sbornik zadač po astronomii*, Prosveščenie, Moskva 1980, 97.

NOVE KNJIGE

LUDWIG G., *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics, Volume 1 — Derivation of Hilbert Space Structure*, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo 1985, VI + 243 str.

V prvem zvezku dela o osnovnih konceptih kvantne mehanike poskuša avtor zgraditi aksiomatsko osnovo za opis mikrosistemov, na primer elektronov in atomov, izključno s sistematično analizo odzivov makrosistemov, ki jih uporabljamo za njihovo detekcijo. Tak mikrosistem največkrat sestoji iz dveh delov, pripravljalnega in detekcijskega. Prvi del deluje na drugega, pri tem je mikrosistem prenašalec interakcije. Aksiomi, ki opisujejo splošno empirično strukturo interakcije med obema deloma merilne naprave, vodijo do koncepta Hilbertovega prostora in observabel v kvantni mehaniki. V delu so zelo natančno analizirani procesi preparacije in registracije ter ustrezni zakoni, med katerimi seveda zavzema pomembno mesto glavni zakon kvantizacije, čeprav se srečamo z njim šele proti koncu monografije. Knjiga je razdeljena na osem poglavij. Avtorjev originalni pristop k interpretaciji kvantne mehanike je lahko pomembno izhodišče in vzpodbuda za nadaljnje raziskave. Tisti, ki jih zanima osnovna struktura narave in vse, kar vemo o njej, bodo z zanimanjem vzeli v roke to delo, čeprav ne predstavlja lahkega branja.

Peter Gosar

RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V L. 1985*

V lanskem koledarskem letu je oddelek za matematiko na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani prijavil 20 raziskovalnih nalog. Povečano število tem kaže, da je obseg dela te ustanove porasel. V nadaljevanju objavljamo kratke izvlečke vseh del.

Zbral in uredil *Ciril Velkoverh*

137. **Enodimenzionalne analitične množice z velikimi konci.** Nosilec Josip Globevnik, sodelavci: Edgar L. Stout, Franc Forstnerič, Emil Beloglavec in Mitja Lakner.

Dokazan je naslednji IZREK. Naj bo $D \subset \mathbb{C}^N$, $N > 1$, omejeno, strogo psevdokonveksno območje z realno analitičnim robom. Naj bo $P \subset \partial D$ odprta povezana množica. Tedaj obstaja prava holomorfna preslikava f z enotnega kroga U v D , taka, da je $\overline{f(U)} - f(U) = P$, da ima $f(U)$ poljubno majhno ploščino in da je f zvezna na $\overline{U} - \{1\}$.

138. **Spektralnost elementarnih operatorjev.** Nosilec Milan Hladnik, Sodelavec Mirko Dobovišek.

Delo obravnava spektralnost elementarnih operatorjev na algebri vseh omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru ali na von Neumann-Schattenovih idealih. Izpeljan je neki geometrijski pogoj glede združenih spektrov koeficientov, ki je v primeru, da so koeficienti spektralni, potreben in zadosten za spektralnost elementarnega operatorja. Podana je tudi popolna karakterizacija spektralnosti in pedspektralnosti posplošenih odvajanj.

139. **Nekateri posebni lokalno konveksni vektorski prostori in operatorske algebre.** Nosilca Edvard Kramar in Joso Vukman.

Dokazano je več karakterizacij Hilbertovega prostora med nekaterimi lokalno konveksnimi prostori. Dokazano je, da so vsa odvajanja in avtomorfizmi na $L(X)$, kjer je X bornološki lokalno konveksen prostor, notranji. Dobljen je bil rezultat, da je vsak Fréchetov H -lokalno konveksen prostor z ortogonalno in absolutno bazo nuklearen prostor.

140. **Posplošena odvajanja in sorodni operatorji.** Nosilec Bojan Magajna, sodelavca Janko Gravner in Gorazd Lešnjak.

Naloga odgovori na nekaj vprašanj o operatorskih enačbah, elementarnih operatorjih, posplošenih odvajanjih in podobnih operatorjih. Izpelje kriterij za rešljivost nekega sistema bilinearnih operatorskih enačb, dobljeni rezultat pa uporabi pri proučevanju zalog vrednosti elementarnih operatorjev. Določi spektre elementarnih operatorjev na Calkinovi algebri ter bistvene numerične zaklade posplošenih odvajanj na Hilbert-Schmidtovem razredu. Nadalje opredeli subnormalna in kvazinormalna posplošena odvajanja na Hilbert-Schmid-

* Izvlečki raziskovalnih nalog iz leta 1984 so bili objavljeni v Obzornik mat. fiz. 32 (1985) 86.

tovem razredu ter izračuna spekter operatorja $x \rightarrow ax + (ax)^*$ na algebri $B(H)$ in na Calkinovi algebri.

141. N -spektralni operatorji. Nosilec Matjaž Omladič, sodelavca Boris Lavrič in Peter Šemrl.

Pojem n -spektralnega operatorja je naravna posplošitev pojma n -normalnega operatorja iz Hilbertovega v Banachov prostor. Izkaže se, da v reflektivnih prostorih tudi za n -spektralne operatorje velja, da imajo pravi, netrivialni invariantni podprostor. Podobno kot za spektralne, obstaja tudi zanje neka vrsta razčlenitve enote ter kanonična redukcija na skalarni del in radikal.

142. Topologija homoloških 3-mnogoterosti. Nosilec Dušan Repovš, sodelavca Janez Rakovec in Zlatan Magajna.

V prvem delu naloge je izdelana podrobna študija topologije homoloških mnogoterosti, s posebnim poudarkom na dimenziji 3, in njihova vloga pri reševanju problema geometrične karakterizacije topoloških mnogoterosti. V drugem delu je nato konstruiran primer eksotične posplošene 3-mnogoterosti X z naslednjimi lastnostmi: (1) X je homogen prostor, (2) X je faktor topološke 4-mnogoternosti, (3) X ima lastnost Dehnove lemme, (4) X ima lastnost ločevanja preslikav, (5) če je Poincaréjeva domneva nepravilna, je lahko X povsem singularen in nerazrešljiv prostor. Prikazana metoda konstrukcije je uporabna tudi drugod.

143. Analiza stabilnosti nekaterih računskih procesov. Nosilec Zvonimir Bohte, sodelavca Marko Petkovšek in Gabriel Tomšič.

V prvem poglavju te naloge so navedene predpostavke in pomožne ocene za analizo zaokrožitvenih napak v aritmetiki s premično piko. V naslednjih treh poglavjih je analizirano računanje vrednosti polinoma in reševanje linearnih diferenčnih enačb prvega in drugega reda. V zadnjem poglavju so zbrani trije novi rezultati pri analizi Gaussove eliminacije za splošne, diagonalno dominantne in pozitivno definitne matrike.

144. Računalniško orientarine matematične metode, 10. del. Nosilec Janez Grad, sodelavca Janez Barle in Viljem Rupnik.

V raziskavi so opisani nekateri algoritmi za invertiranje matrike, ki so uporabni pri reševanju linearnih programov. Njihova značilnost je specifičen način predstavitve inverzne matrike in razdelitev postopka v dve fazi. Poudarjeni so problemi računalniške realizacije algoritmov. Z občasno reinverzijo bazne matrike v okviru iteracijskega postopka reševanja linearnega programa se sprošča pomnilnik in zagotavlja večja natančnost rezultatov računalniške obdelave.

145. Analiza metod bilinearnega programiranja. Nosilec Stane Indihar.

V delu je dan pregled razvoja metod bilinearnega programiranja. Glede na osnovne značilnosti je mogoče metode razvrstiti v 4 skupine: metode odsečnih ravnin, metode pokrivanja poliedra, metode enumeracije, druge. Omenjene so nekatere posplošitve bilinearnega programiranja in nakazane so možnosti nadaljnjega raziskovanja.

146. Aproksimacija v več dimenzijah. Nosilec Jernej Kozak.

V raziskovalni nalogi so pregledani novi rezultati v večdimenzionalni aproksimaciji s poudarkom na polinomskih in odsekoma polinomskih funkcijah. Pokaže se, da so problemi aproksimacije z večdimenzionalnimi zlepkami tesno navezani na topološko naravo baznih funkcij — B -zlepkov, njihove rešitve pa netrivialne posplošitve rezultatov iz ene dimenzije. Našteti so učinkoviti numerični postopki pa tudi odprti problemi kot smernice bodočim raziskavam.

147. Numerične metode za stabilno ravnovesje določenih sistemov diferencialnih enačb. Nosilec Bojan Orel, sodelavca Vladimir V. Bobkov in Andrej Kmet.

V prvem delu naloge je opisanih več metod za reševanje problema iskanja trajektorije za sistem navadnih diferencialnih enačb. Dodan je algoritem za reševanje tega problema z avtomatskim prilagajanjem dolžine koraka. V drugem delu je obdelana prevedba linearne enačbe drugega reda na simetričen sistem linearnih enačb prvega reda.

148. Metoda končnih elementov s pomično mrežo — ocena konvergence. Nosilec Peter Petek, sodelavec George Mejak.

Naloga ocenjuje konvergenco metode končnih elementov s pomično mrežo. Pri oceni je treba upoštevati tri vzroke odstopanja od prave lastne vrednosti in funkcije: odmik središča, končno število žarkov in končno število nivojnic. Pokazano je, da je odstopanje v vseh treh primerih kvadratnega reda. Obstaja upanje, da je mogoče metodo modificirati tako, da bi bilo odstopanje glede na korak v radialni smeri četrtega reda.

149. Numerične metode reševanja parcialnih diferencialnih enačb s pomočjo prevedbe na integralske enačbe. Nosilec Tomaž Slivnik, sodelavec Gabrijel Tomšič.

V delu je opisana metoda za določanje tokovnih porazdelitev na površinah idealnih vodnikov. Tokove določamo s pomočjo magnetnega skalarnega potenciala, ki je rešitev Fredholmove integralske enačbe druge vrste. Opisana je tudi enostavna metoda, ki bazira na teoriji potenciala, za reševanje integralske enačbe.

150. Algebrajski problemi v predikatnem računu. Nosilec Izidor Hafner.

Obravnavana je rešljivost logičnih problemov predikatnega računa, kjer iščemo vrednosti za neznane individualne konstante. V primeru Smullyanovih formalnih sistemov je izdelan algoritem za iskanje vrednosti. Algoritem je zasnovan na metodi, ki se uporablja pri mehničnem dokazovanju izrekov. Dokazana je pravilnost in zadostnost te metode. Nekaj primerov teorij je predstavljenih v obliki, primerni za reševanje po izpeljanem algoritmu. Rešenih je tudi nekaj primerov.

151. Algoritmi v izjavnem računu. Nosilec Borut Jurčič.

V tem delu sta podana dva algoritma, ki povesta, ali je dana formula izjavnega računa tautologija ali ne. S pomočjo prvega algoritma se dajo reševati tudi logične enačbe.

152. Bibliografija Josipa Plemmlja in nekaterih odmevov na njegova dela v mednarodni matematični in fizikalni literaturi. Nosilec Jože Povšič, sodelavca Ciril Velkovrh in Stanislav Zorko.

Naloga obsega uvod, sezname knjig in razprav Josipa Plemmlja z odmevi nanje ter ocene, ki jih je pisal Plemelj. Z letošnjim letom je to delo zaključeno. Vsebuje vse podatke, ki jih je avtor našel v zadnjih petih letih. Osebna bibliografija Josipa Plemmlja vsebuje 55 enot, odmevov nanje pa je zbranih 1100.

153. Razvrščanje v skupine — teorija in algoritmi. Nosilec Vladimir Batagelj.

V nalogi je problem razvrščanja v skupine obravnavan kot optimizacijski problem nad množico dopustnih razvrstitev. Zaradi NP -težkosti uporabljamo običajno za reševanje problemov razvrščanja približne postopke. Izmed metod za reševanje problema razvrščanja sta podrobneje razdelani metoda oblakov in metoda združevanja. Pokazano je, da lahko Wardov in sorodne postopke združevanja, ki temelje na Lance-Williams-Jambujevem obrazcu, uporabljamo za poljubno različnost in ne samo za kvadrat evklidske razdalje. Narejeni so prvi koraki k odgovorom na vprašanje: ali je dobljena razvrstitev globalno optimalna? Izpopolnjen je splošni pristop k reševanju rekurzivne enačbe, ki jo dobimo pri analizi postopkov, osnovanih na načelu »deli in vladaj«.

154. Topološka teorija grafov in invariante grafov, 3. del. Nosilca Bojan Mohar in Tomaž Pisanski, sodelavci: John Shawe-Taylor, Aleksander Malnič, Marko Petkovšek, T. D. Parsons, Rok Sosič, Janko Herga in Helena Godec.

Delo obravnava različne probleme teorije grafov. Sestavljeno je iz dvanajstih prispevkov. Od tega se jih sedem ukvarja s topološko teorijo grafov, predvsem z vložitvami grafov v ploskve. Drugi prispevki so predvsem algebrskega značaja. Osrednji temi sta polinom prirejanja in posplošitve razdaljno reguliranih grafov.

155. Algebraična teorija grafov, 4. del. Nosilec Dragan Marušič.

V tem delu se avtor ukvarja s strukturnimi lastnostmi enostavno primitivnih grup stopnje $2p$, kjer je p praštevilo, ter z ustreznimi prirejenimi simetričnimi $2p$ -grafi. Uporabljene metode se lahko naravno posplošijo na obravnavo krepke regularnosti $(2, n)$ — krožnih grafov. Na koncu je omenjen še napredek, dosežen pri reševanju problema karakterizacije simetričnih qp -grafov.

OBISK BOLGARSKE AKADEMIJE ZNANOSTI

Balkanska matematična zveza, ki povezuje Bolgarijo, Grčijo, Jugoslavijo, Romunijo in Turčijo, že dalj časa prireja tekmovanja študentov matematike in mladih raziskovalcev (do 30 let). Na teh srečanjih, ki potekajo vsako drugo leto in vselej v drugi državi članici, smo bili jugoslovanski predstavniki pogosto uspešni — o nekaterih nagradah je poročal tudi Obzornik.

Od 27. julija do 2. avgusta 1984 je potekala v Sofiji VII. balkaniada, na kateri sva z beograjskim kolegom Radoslavom Dimitrićem zastopala našo državo — na tekmovanju mladih raziskovalcev. Pravzaprav sem sodeloval le

s svojimi deli, ker nisem imel sredstev za potne stroške. Za nagrado sem poleg diplome prejel tudi povabilo za 10-dnevni obisk bolgarske akademije znanosti v Sofiji.

Konec novembra 1985 sem to nagrado tudi izkoristil in na kratko želim poročati o svojem obisku pri bolgarskih topologih. Med bivanjem v Sofiji sem stanoval na inštitutu za matematiko in računalništvo, veliki petnadstropni stavbi, ki sestavlja ogromen kompleks blokov bolgarske akademije znanosti. Večina matematikov, članov inštituta, je deloma zaposlena tudi na tamkajšnji univerzi, kjer vodijo seminarje oziroma predavajo študentom matematike in računalništva. Neprijetno pri tem je to, da sta si stavbi inštituta in fakultete za matematiko in mehaniko precej daleč narazen. Ker sem imel daljši cikel predavanj, smo se nekajkrat sestali tudi na fakulteti, zato sem sam občutil to nevšečnost. Na inštitutu je poleg kabinetov in predavalnic tudi velik računski center in dobro založena knjižnica.

Bolgarska topologija (za druge veje matematike bi to težko ocenil ob tako kratkem obisku) je tesno navezana na sovjetsko, kar seveda ne preseneča, če se spomnimo na zgodovino minulih desetletij. Posledica je skoraj popolna specializacija na splošno topologijo, ki je v Sovjetski zvezi že tradicionalno močna disciplina. Večina bolgarskih matematikov opravi podiplomski študij v Moskvi. Temu je prilagojen tudi akademski sistem v Bolgariji: namesto magisterija in doktorata imajo tako kot sovjeti — kandidatsko in doktorsko disertacijo. Slednja je običajno izjemno kakovostno raziskovalno delo in presega naše kriterije za doktorat (podobno kot Thèse d'État v Franciji).

Bolgarska akademija znanosti izdaja dve kvalitetni matematični reviji: *Comptes rendus* in *Serdica* (ime je v davnih časih nosila Sofija), pri tem prva objavlja tudi članke iz drugih področij. V Sofiji imajo kar precej mednarodnih srečanj, ki so uspešna tudi zato, ker ponujajo priložnosti za stike med matematiki zahodnih in vzhodnih dežel. Le poredkoma pa bolgarski matematiki potujejo v dežele zahodne Evrope ali še dalj preko meja, čeprav imajo precej uradno navezanih stikov. Tako na primer topologi sodelujejo z našimi severnimi sosedi v Gradcu, z nizozemskimi topologi v Amsterdamu ter nekaterimi univerzami v ZDA. Kaže, da imajo pri teh potovanjih prednost starejši raziskovalci, predvsem pa predstojniki inštitutov in posameznih kateder ter člani vodstev mednarodnih znanstvenih organizacij.

Kot sem že omenil, sem med obiskom pripravil več predavanj o svojem raziskovalnem delu. Ker pa je področje geometrijske topologije bolgarskim kolegom praktično neznano, sem seminar razširil na kratek tečaj o najnovejših rezultatih iz te discipline. Bil sem prijetno presenečen nad zanimanjem med nekaterimi mlajšimi poslušalci (študenti podiplomci oziroma stažisti raziskovalci). Tudi predstojnik katedre za topologijo prof. D. Doičinov meni, da bodo v nekaj letih poskusili mlajše kolege usmeriti v druga področja topologije. Zato želijo izboljšati stike z nami; doslej je Sofijo obiskala le peščica jugoslovanskih topologov.

Prostega časa nisem imel veliko, le za kratek ogled mesta. Zelo sem se razveselil bogato založene knjigarne sovjetske tehnične literature, v kateri so imeli tudi večino lanskih in letošnjih matematičnih izdaj. Tako kot v drugih vzhodnoevropskih deželah so tudi v Bolgariji sovjetske knjige relativno poceni.

Dušan Repovš

BOHROVA RAZPRAVA Z EINSTEINOM

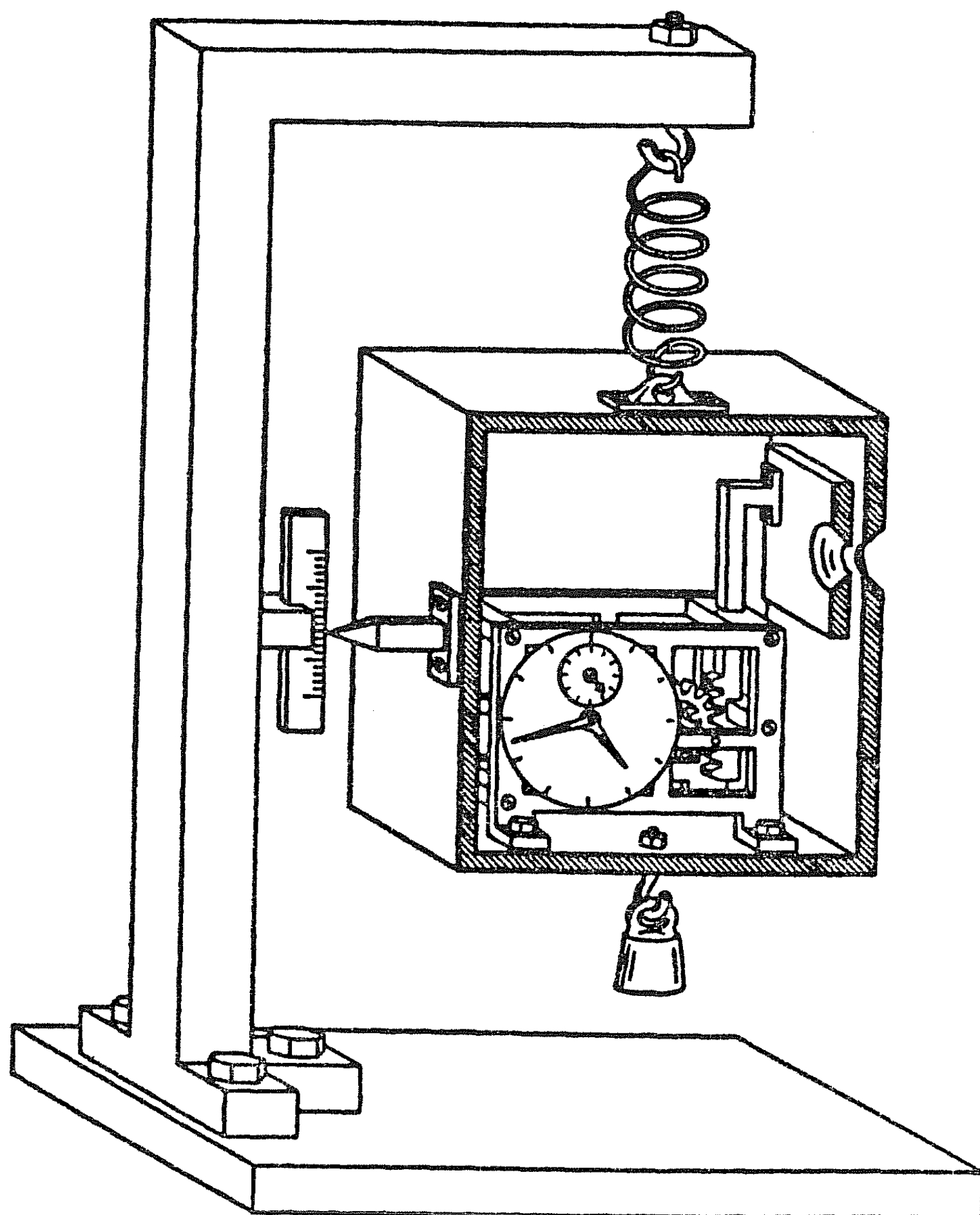
Razprava med Bohrom in Einsteinom sodi med najznamenitejše znanstvene razprave. Čeprav Bohr in Einstein v tem primeru nista bila enakega mnenja, sta se zelo spoštovala in se imela rada.

A. Einstein je bil prepričan, da kvantna mehanika ni brez notranjih nasprotij ali da vsaj ne daje popolnega opisa pojavov. Prizadeval si je najti zgled, ki bi to očitno pokazal. Na Solvayevi konferenci leta 1930 je trdil, da je mogoče krajevno in časovno določiti pojave, če upoštevamo posebno teorijo relativnosti, predvsem njeno zvezo med maso in energijo: $W = mc^2$. Vzemi-mo, da je sevanje zaprto v posodo z zrcalnimi stenami in da ob določenem času ura preko posebnega mehanizma za kratek hip odpre zaklopko, skozi katero uide foton. Ura pokaže čas, s tehtanjem posode pa lahko ugotovimo, za koliko se zmanjšata njena masa in energija, torej kolikšna je energija fotona. Po tem lahko čas in energijo določimo natančneje, kot dopušča Heisenbergova neenačba

$$\delta t \delta W > h \quad (1)$$

Kaže, da kvantna mehanika ni brez notranjega nasprotja.

N. Bohr pa je po napornem razmišljanju odkril vrzel v Einsteinovem sklepanju: Einstein je pozabil upoštevati svojo splošno teorijo relativnosti. Vzemi-mo, da visi posoda na vzmetni tehtnici. Če določimo višino posode na δz natančno, določimo njeno maso na δm natančno. To sledi namreč iz Heisenbergove neenačbe $\delta z \delta p > h$, če vstavimo za nedoločenost gibalne količine δp nedoločenost sunka teže: $\delta p = \delta(mgt) = gt \delta m$; za merjenje imamo na voljo čas t . Iz neenačbe in enačbe sledi $t \delta z > h/g \delta m$.



Sl. 1. Značilna psevdorealistična risba posode s sevanjem na vzmetni tehtnici. Zaklopko odpre mehanizem, ki ga poganja ura, v naprej določenem trenutku [1]

Po splošni teoriji relativnosti* ura prehiti za δt , če se dvigne za višino δz :

$$\delta t/t = g \delta z/c^2$$

V to enačbo vstavimo $t \delta z > h/g \delta m$ in dobimo $\delta t \cdot \delta m c^2 > h$. Po zvezi med maso in energijo je $\delta m c^2$ prav nedoločenost energije δW in se zadnja neenačba ujema z neenačbo (1). V kvantni mehaniki torej ni notranjega nasprotja.

LITERATURA

[1] N. Bohr, *Atomphysik und menschliche Erkenntnis*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1985, 4. pogl.

Janez Strnad

* Do enačbe lahko pridemo hitro po ne čisto neoporečni poti, če pripišemo fotonu z energijo $h\nu$ efektivno maso $m^* = h\nu/c^2$. V težnem polju Zemlje se polna energija fotona, ki jo sestavljata energija $h\nu$ in potencialna energija m^*gz , ohrani:

$$h\nu_2 + m^*gz_2 = h\nu_1 + m^*gz_1$$

Iz enačbe sledi za $\delta z = z_2 - z_1$ in $\delta\nu = \nu_2 - \nu_1$:

$$-\delta\nu = \delta t/t = g \delta z/c^2$$

če približno vzamemo, da se efektivna masa ne spreminja s frekvenco in da meri atomska ura čas z nihajnim časom, ki je obratna vrednost frekvence: $\delta\nu/\nu = = t\delta(1/t)$.

NOVE KNJIGE

STRNAD J., Mala kvantna fizika, Zagreb, Školska knjiga 1985, 180 str. (Moderna fizika), 690 din.

Knjižica je tretja v seriji del Janeza Strnada, ki naj bi na elementarnem nivoju predstavila kvantne pojave in kvantno mehaniko. V prvem delu — Kvantna fizika (MK, Ljubljana 1969) se avtor drži ustaljene poti v kvantno mehaniko, v drugem — Kvantna fizika za začetnike (DMFA, Ljubljana 1980) pa že poskuša z novim pristopom in ga v novem delu naprej izdela. Osnova za novo sliko so pojavi v atomu in trdni snovi ter interakcija med snovjo in elektromagnetnim poljem. Na osnovi prvih vpelje nerelativistično kvantno mehaniko, na osnovi drugega pa skuša utemeljiti kvantizacijo elektromagnetnega polja in iz nje izhajajoči pojem fotona. Pri tem polemizira z delčnimi predstavami o fotonu, ki so nastale ob razlagah fotoefekta in Comptonovega pojava. Delo pa nikakor ne zaključuje te razprave.

Za fizike bo pričujoča knjižica prijetno branje in vzpodbuda k razmišljanju o stvareh, ki jih radi odpravimo na formalnih osnovah. Manj poučeni bralec bo zlahka sledil prvemu delu knjige, drugemu pa le ob trdem delu.

Marjan Hribar

BATTESTIN J. Fizikalni praktikum prvi in drugi del, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1985, 381 in 347 str.

Pomanjkanje ustrezne literature za fizikalne praktikume se je zadnje čase nekoliko zmanjšalo. Državna založba Slovenije je izdala Fizikalni praktikum v dveh delih profesorja Jožka Battenstina.

Njegovo ime je v zvezi s praktičnimi fizikalnimi vajami dobro znano, saj že več desetletij prispeva na tem področju vedno nove rešitve. Verjetno je malo šol v Sloveniji, ki ne bi imele njegove domiselne zbirke vaj iz mehanike, ki si je utrla pot celo v širši jugoslovanski prostor.

Avtor zatrjuje že v uvodu, da sta knjigi priročnik za vse, ki so zadolženi za fizikalne praktikume ali podobne praktične vaje na šolah različnih stopenj in usmeritev. To potrdi bežen pregled vsebine, saj najdemo vaje od npr. preprostega določanja poti pri enakomernem gibanju do zahtevnega merjenja magnetne napetosti.

Knjigi pokrivata vsa poglavja klasične fizike, razen optike, ki jo avtor še pripravlja. Prva knjiga vsebuje vaje iz mehanike in toplote (na 12 straneh je 92 navodil za vaje, poleg 189 strani uvodnih poglavij). Druga knjiga je posvečena elektriki (na 207 straneh je 107 navodil za vaje, uvodna poglavja pa obsegajo 140 strani).

Zaradi že omenjene širine dajeta knjigi vtis neenotnosti, ki jo štejemо vsaj za lepoto napako. Izvira iz avtorjeve globoke želje, da bi svoje znanje v celoti posredoval naprej in se ne bi izgubilo nič, kar bi komurkoli koristilo. Zaradi tega je v uvodna poglavja vnesel tudi daljši zapis o valovanju na vodni površini, ki ga med praktikumskimi vajami navadno ne srečamo. Tudi razprava o letalskem krilu in letalskem vijaku presega okvir, ki ga določa naslov knjige. Verjetno je s te strani sporna tudi daljša razprava o balističnem galvanometru, ki ga vse bolj izpodrivajo različni elektronski instrumenti.

V celotnem delu, posebno pri vajah, zasledimo, za to vrsto knjig presenetljivo tehnično dognanost in veliko originalnih rešitev. Na drugi strani pa pogrešamo bolj enoten, širši fizikalni pristop, ki bi jasneje pokazal povezavo med posameznimi metodami merjenja in merjenimi količinami.

Pred seboj imamo torej temeljito delo s področja didaktike fizikalnih merenj, ki je tudi v svetovni literaturi razmeroma zanemarjeno. Ob prepričanju, da bodo po knjigah segli poleg vodij praktikumov in njihovih asistentov tudi inženirji in tehniki merilnih laboratorijev, pa tudi mladi amaterji, lahko pričakujemo, da bo delo J. Battestina znatno prispevalo k dvigu merilne kulture pri nas.

Franc Cvelbar

OBVESTILO NAROČNIKOM

V tem koledarskem letu nameravamo pohiteti in čimprej izdati vseh šest števil Obzornika za matematiko in fiziko, da bi tiskarski stroški nekoliko manj narasli. Zato vas lepo prosimo, da po položnici iz prejšnje številke čimprej nakažete naročnino za Obzornik v višini 1500.— din, člani pa s tem tudi članarino za Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, če tega še niste storili.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

PUBLIKACIJA KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1985

	Cena v din
1— 4. Obzornik za matematiko in fiziko , 32 (1985) št. 1, 2/3, 4/5, 6 (718, 746, 763, 777); posamezna številka	400.—
5—11. Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome , 12 (1984/85) 3, 4, 5, 6; 13 (1985/86) 1, 2, 5 (730, 731, 736, 740, 747, 762, 771); posamezna številka	100.—

Presekova knjižnica

12. 18. Curran S., Curnow R., Igre, grafika in zvoki (721)	800.—
13. 19. Curran S., Curnow R., Prvi koraki v basicu (722)	800.—
14. 20. Curran S., Curnow R., Učenje z računalnikom (723)	800.—
15. 21. Lafferty P., Uvod v računalništvo (724)	800.—
16. 22. Bajc D., Pisanski T., Najnужnejše o grafih (741)	100.—
17. 23. Ranzinger P. in dr., Naše nebo 1986 — Astronomske efemeride. Umetni sateliti. Potresi (779)	400.—
18. 24. Strnad J., Jožef Stefan — Ob stopetdesetletnici rojstva (772)	200.—

Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo

19. Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov naravnih števil od 1 do 999 ter obsegov in ploščin kroga za merska števila premera od 1 do 299 (ur. J. Žabkar) (792)	55.—
20. Strnad J., Fizika za družboslovce, 2. natis (775)	370.—

Knjižnica Sigma

21. 11. Vidav I., Števila in matematične teorije, 3. natis, (748)	300.—
22. 13. Jamnik R., Teorija iger, 3. natis (752)	600.—
23. 20. Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele, 15. natis (720)	300.—
24. 23. Prijatelj N., Matematične strukture III, 2. natis (727)	1520.—
25. 39. Rakovec J., Matematične strukture. Primeri in rešene naloge (726)	400.—
26. 40. Polya G., Kako rešujemo matematične probleme (773)	1000.—

Matematični rokopisi

27. 2. Kramar E., Nekaj nalog iz linearne algebre, 2. natis (719)	300.—
28. 9. Batagelj V., Uvod v računalništvo — fortran, 2. natis (782)	400.—
29. 12. Mohar B., Priprava besedil na računalniku partner ROFF3 (751)	160.—
30. 13. Mohar B., Pascal — prevajalniki na osebnih in hišnih računalnikih (776)	250.—

Izbrana poglavja iz matematike in računalništva

31. 3. Zakrajšek E., Fortran, 7. natis (769)	1200.—
32. 12. Wirth N., Računalniško programiranje, 1. del, 5. natis (734)	1600.—
33. 14. Nadrah N., Cobol, 5 natis (770)	1600.—
34. 15. Kramar E., Zbirka nalog iz verjetnostnega računa, 2. natis (764)	400.—
35. 16. Hladnik M., Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere, 2. natis (735)	320.—
36. 17. Vidmar R., Začni s TOPS-10, 3. natis (765)	300.—
37. 20. Dobovišek M., Magajna B., Naloge iz algebre I, 2. natis (725)	600.—
38. 21. Wirth N., Računalniško programiranje, 2 del, 2. natis (743)	1600.—

Na desni strani seznama so navedene znižane cene, ki veljajo za člane društva, študente in naročnike Preseka.

Na koncu naslovov so v oklepajih vpisane zaporedne številke izdaj DMFA SRS od leta 1951 do danes.

Zbirka izbranih poglavij iz fizike

39. 9. Naloge iz fizike, 5. natis (774) 600.—
40. 16. Kuščer I., Žumer S., Matematične naloge iz fizike, 2. natis (766) 1600.—
41. 18. Župančič I., Fizikalni praktikum II, 2. natis (744) 400.—

Matematika-Fizika — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

42. 9. Strnad J., Fizika, 1. del, Mehanika. Toplota, 3. natis (778) 1600.—
43. 6. Vidav I., Višja matematika I, 8. natis (733) 1840.—
44. 11. Strnad J., Fizika, 2. del, Električna. Optika, 2. natis (739) 2200.—
45. 10. Bohte Z., Numerične metode, 2. natis (753) 1280.—
46. 16. Jamnik R., Matematika, 2. natis (737) br. 2400.—
47. 20. Krušič B., Funkcije kompleksne spremenljivke. Specialne funkcije (754) 800.—
48. 21. Suhadolc A., Integralske transformacije. Integralske enačbe (755) 800.—
49. 22. Križanič F., Navadne diferencialne enačbe. Parcialne diferencialne enačbe; Vidav I., Variacijski račun (756) 1600.—

Seminar za numerično in računalniško matematiko

á 200.—

50. 416. Mohar B., Priprava besedil na računalniku partner ROFF3 749
51. 417. Kozak J., Priprava besedil na računalniku DEC-10 (750)
52. 421. Blatnik B., Modeliranje s Petrijevim mrežami (758)

Proceedings of the department of mathematics

53. 3. Algebraic and topological graph theory course, Dubrovnik, april 8—19, 1985 (738) —
54. Preprint series of the department of mathematics, 22 (1984) (728) —
55. IMFM — poročilo za leto 1984 (732) —
56. — Ob petindvajsetletnici (768) —
57. DMFA SRS: Občni zbor, 37., Škofja Loka (767) —
58. Mednarodna fizikalna olimpiada, 16., Portorož (757) —
59. Mednarodna fizikalna olimpiada, 16., Mednarodni bilten (781) ⊥
60. Predtekmovanje iz fizike, Koper (761) —
61. Republiško tekmovanje iz fizike za srednje šole, Nova Gorica (780) —
62. Republiško tekmovanje iz matematike za srednje šole, 29., Postojna (742) —
63. Republiško tekmovanje iz računalništva, 9., Maribor (745) —
64. Republiško tekmovanje iz fizike za osnovne šole, (759) —
65. Republiško tekmovanje iz matematike za osnovne šole, Koper (760) —

Ciril Velkoverh

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnimi razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto, besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so v Obzorniku mat. fiz. 21 (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake.