

RODPISANO
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

1984

Letnik 31

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1984

Uredniški odbor: Edvard Kramar — glavni urednik, Janez Strnad — urednik za fiziko, Gabrijel Tomšič — odgovorni urednik, Ciril Velkovrh — urednik, Jože Vrabec — urednik za matematiko.

Odbor svetovalcev: Robert Blinc, Alojz Kodre, Peter Legiša, Anton Moljk, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav.

Jezikovni pregled Marija Janežič, slike Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 450.— din (za člane društva je že vračunana člana-rina), za dijake in študente 225.— din, za ustanove in podjetja 900.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 150.— din, dvojna številka 300.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 64, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. Naklada 1500 izvodov. Izdajo revije sofinancirata ISS in RSS.

© 1984 DMFA SRS — 700

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Str.-Page

Članki — Articles

Interpolacije — Interpolations (Alojzij Vadnal)	65
Kvantni Hallov efekt — The Quantum Hall effect (Peter Gosar)	70
Uporaba Cauchyjeve neenakosti pri dokazovanju nekaterih neenakosti (Šefket Arslanagić)	78

Domače vesti — Home news

Obvestilo naročnikom Obzornika (Ciril Velkovrh)	79
Komisija za tisk v letu 1983 (Edvard Kramar, Ciril Velkovrh)	80
Finančno poročilo Komisije za tisk DMFA SRS (Janez Markelj, Ciril Velkovrh)	81
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka IMFM v letu 1983 (Gabrijel Tomšič)	83
Nagrade Sklada Borisa Kidriča v letu 1984 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh)	85
Profesor Ivan Štalec dobil Žagarjevo nagrado (Peter Petek)	85

Šola — School

Tekmovanje študentov matematike v Beogradu (Mirko Dobovišek)	86
Uresničevanje učnega načrta za matematiko v programih srednjega izobraževanja (Aleksander Cokan)	88
Mednarodno tekmovanje študentov matematike (Janko Gravner)	90
Pogovor o skupnih programskih jedrih in problemih pouka matematike in računalništva (Gabrijel Tomšič)	94

Nove knjige — News books (Peter Petek, Ivan Pucelj, Andrej Čadež, Anton Suhadolc, Janez Strnad, Zvonimir Bohte, Tomaž Pisanski)	94—IV
--	-------

Na ovitku: Inštitut Jožef Stefan opravlja raziskave na področju naravoslovnih, tehniških in drugih sorodnih ved (Foto Marjan Smerke)

INTERPOLACIJE

ALOJZ VADNAL

Math. Subj. Class. (1980) 39 A 10

Članek obravnava nekaj tipov interpolacij. Problem interpolacije prevede na reševanje ustrezne diferenčne enačbe drugega reda. Članek podaja metode, po katerih izračunamo prvi interpolirani člen; v njem se prikaže uporabnost Fibonaccijevega zaporedja.

INTERPOLATIONS

The article is devoted to some kinds of interpolations. The problem of interpolation is reduced to solving the corresponding difference equation of second order. In the article the methods for finding the first interpolated term are presented. Some applications of the Fibonacci sequence are displayed.

Uvod

V matematiki in zlasti v statistiki poznamo razne tipe interpolacij; literatura s tega področja je zelo bogata. V naslednjem bomo obravnavali nekaj tipov interpolacij med dve števili.

Dvema različnima številoma $a = y_1$ in $b = y_n$ priredimo po kakem predpisu $(n - 2)$ števil $y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ tako, da dobimo zaporedje ali diskretno funkcijo:

$$y_x: \{y_1; y_2, \dots, y_{n-1}; y_n\} \quad (1)$$

definiramo na množici $x: \{1, 2, \dots, n\}$.

Če sta števili a in b realni in če velja neenačba $y_x < y_{x+1}$, govorimo o interpolaciji $(n - 2)$ števil med števili a in b . Pri ponazoritvi števil na številski premici gre v tem primeru za razdelitev intervala $[a, b]$ na $(n - 1)$ zaporednih podintervalov.

Toda tudi ko omenjena neenačba ne velja ali ko števili a in b nista realni, si dovoljujemo še naprej uporabiti termin interpolacija, vendar v širšem smislu.

Predpis prirejevanja vmesnih členov naj bo dan v obliki diferenčne enačbe drugega reda:

$$f(y_x, y_{x+1}, y_{x+2}) = 0 \quad (2 a)$$

definirane na množici $x: \{1, 2, 3, \dots, n - 2\}$, kjer je $n: \{3, 4, 5, \dots\}$. Pri tem zahtevamo, da je mogoče razviti funkcijo na levi strani enačbe na srednji člen:

$$y_{x+1} = f_1(y_x, y_{x+2}) \quad (2 b)$$

in na tretji člen:

$$y_{x+2} = f_2(y_x, y_{x+1}) \quad (2 c)$$

Pri takem predpisu se problem interpolacije prevede v tole nalogo:

Izračunati je treba tisto posebno rešitev diferenčne enačbe drugega reda (2), definirane na množici $x: \{1, 2, 3, \dots, n - 2\}$, kjer je $n: \{3, 4, 5, \dots\}$, ki zadošča robnima pogoju:

$$y_1 = a \quad \text{in} \quad y_n = b \quad (3)$$

Metode, ki jih lahko uporabimo pri reševanju take naloge, so odvisne od tipa diferenčne enačbe. Najbolj poznana je metoda, po kateri izračunamo najprej splošno rešitev diferenčne enačbe in nato ob upoštevanju robnih pogojev obe v njej nastopajoči konstanti; tako dobimo zahtevano posebno rešitev. Ta metoda je posebno enostavna pri linearnih diferenčnih enačbah.

V naslednjem bomo obravnavali metodo, po kateri izračunamo najprej drugi člen y_2 zaporedja (1). Če namreč izračunamo tega, prav lahko — ob danosti prvega člena y_1 — izračunamo iterativno po enačbi (2 c) vse naslednje člene. Ta metoda pride prav zlasti pri interpolacijah, kjer odpovedo poznane bolj elementarne metode.

Ideja, ki vodi pri računanju drugega člena y_2 , je tale: drugi člen izrazimo kot funkcijo števila členov n , prvega člena y_1 in zadnjega člena y_n :

$$y_2 = g(n, y_1, y_n) \quad (4)$$

V nadaljnjem ne bomo obravnavali metod, po katerih najdemo to funkcijo. V posebno enostavnih primerih jo je mogoče uganiti; v manj enostavnih primerih jo je mogoče določiti po kaki metodi, npr. po metodi dinamičnega programiranja. Veljavnost te funkcije bomo v vsakem primeru dokazali; ponavadi se dokaže z matematično indukcijo, začnši z $n = 3$ takole:

Če je $n = 3$, se prepričamo neposredno iz diferenčne enačbe (2), da velja:

$$y_2 = g(3, y_1, y_3)$$

Pri prehodu od n na $n + 1$ izrazimo najprej iz diferenčne enačbe (2 b) y_2 z y_1 in y_3 :

$$y_2 = f_1(y_1, y_3)$$

Pri pogoju, da velja obrazec (4), izrazimo y_3 z y_2 in y_{n+1} :

$$y_3 = g(n, y_2, y_{n+1})$$

Če to vstavimo v prejšnjo enačbo, dobimo enačbo:

$$y_2 = f_1(y_1, g(n, y_2, y_{n+1}))$$

iz katere izrazimo y_2 z y_1 in y_{n+1} . Če dobimo:

$$y_2 = g(n + 1, y_1, y_{n+1})$$

je obrazec (4) dokazan.

Pri obravnavanih tipih interpolacije bomo srečevali Fibonaccijevo zaporedje; pri njem je vsota dveh zaporednih členov enaka prvemu naslednjemu členu. Če predpišemo prva dva člena $f_1 = 1$ in $f_2 = 1$, dobimo Fibonaccijevo zaporedje:

$$f_x: \{1, 1; 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\} \quad (5)$$

V primerih, s katerimi bomo ilustrirali posamezne tipe interpolacij, bomo vzeli tele numerične podatke:

$$n = 8, a = y_1 = 3, b = y_8 = 5 \quad (6)$$

Posebni tipi interpolacij

Fibonaccijeva interpolacija

Pri tej interpolaciji je vsota dveh zaporednih členov enaka prvemu naslednjemu členu; pri njej je treba poiskati posebno rešitev diferenčne enačbe:

$$y_{x+2} - y_{x+1} - y_x = 0 \quad (7)$$

pri robnih pogojih (3).

Ker je diferenčna enačba homogena, linearna, drugega reda in ima konstantne koeficiente, je nalogo mogoče rešiti na več načinov. Rešimo jo lahko tako, da najdemo najprej splošno rešitev diferenčne enačbe in nato posebno rešitev ob upoštevanju robnih pogojev. Rešimo jo tudi lahko s sistemom enačb. Če namreč postavimo v diferenčno enačbo za x zaporedoma $1, 2, 3, \dots, n-2$, dobimo sistem $(n-2)$ enačb z istim številom neznank. Ta sistem je Cramerjev z determinanto, ki jo je zaradi njene preproste strukture prav lahko izračunati.

Lotimo se naloge tako, da najprej izračunamo drugi člen y_2 ! Tega računamo po obrazcu:

$$y_2 = \frac{y_n - f_{n-2} y_1}{f_{n-1}} \quad (8)$$

tu sta f_{n-2} in f_{n-1} zaporedni števili v Fibonaccijevem zaporedju (5). Obrazec dokažemo z matematično indukcijo, začnši z $n = 3$. Obrazec velja za $n = 3$; o tem se prepričamo neposredno iz diferenčne enačbe (7), ker je:

$$y_2 = y_3 - y_1 = \frac{y_3 - f_1 y_1}{f_2}$$

Pri prehodu od n na $n + 1$ izrazimo najprej y_2 iz diferenčne enačbe z y_1 in y_3 :

$$y_2 = y_3 - y_1$$

Pri predpostavki, da velja obrazec (8), izrazimo y_3 z y_2 in y_{n+1} :

$$y_3 = \frac{y_{n+1} - f_{n-2} y_2}{f_{n-1}}$$

Če to vstavimo v zadnjo enačbo, dobimo po preureditvi za y_2 enačbo:

$$(f_{n-2} + f_{n-1}) y_2 = y_{n+1} - f_{n-1} y_1$$

Ker je koeficient pri y_2 vsota dveh zaporednih členov Fibonaccijevega zaporedja (5) in zato enak f_n , dobimo od tod:

$$y_2 = \frac{y_{n+1} - f_{n-1} y_1}{f_n}$$

S tem je obrazec (8) dokazan.

Primer. Pri numeričnih podatkih (6) dobimo Fibonaccijevo zaporedje:

$$y_x: \{3, -19/13, 20/13, 1/13, 21/13, 22/13, 43/13, 5\}$$

Interpolacija s produkti

Pri tej interpolaciji je produkt dveh zaporednih členov enak prvemu naslednjemu členu; tu je treba poiskati posebno rešitev diferenčne enačbe:

$$y_{x+2} = y_x y_{x+1} \quad (9)$$

pri pogojih (3). V naslednjem se omejimo na možnost, ko so vsi členi y_x pozitivni. Drugi člen y_2 izračunamo iz obrazca:

$$y_2^{f_{n-1}} = y_n / y_1^{f_{n-2}} \quad (10)$$

Obrazec je mogoče dokazati z matematično indukcijo analogno, kakor smo dokazali obrazec (8); lahko ga pa izvedemo neposredno iz obrazca (8). V ta namen vzamemo transformacijo:

$$Y_x = \log y_x \quad (11)$$

in prepišemo po logaritmiranju enačbo (9):

$$Y_{x+2} = Y_x + Y_{x+1} \quad (12)$$

To pa je enačba (7), za katero je drugi člen po obrazcu (8):

$$Y_2 = (Y_n - f_{n-2} Y_1) / f_{n-1} \quad (13)$$

Z obratno transformacijo dobimo od tod obrazec (10), ki ga je bilo treba dokazati.

Primer. Pri numeričnih podatkih (6) dobimo zaporedje:

$$y_x: \{3; 5^{1/13}/3^8, 5^{1/13}/3^5, 5^{2/13}/3^3, 5^{3/13}/3^2, 5^{5/13}/3, 5^{8/13}/3; 5\}$$

Interpolacija s konveksno linearno sestavo

Pri tej interpolaciji je vsak vmesni člen predpisana konveksna linearna sestava sosednjih dveh členov. Tu je treba poiskati tisto posebno rešitev diferenčne enačbe:

$$y_{x+1} = p y_x + (1 - p) y_{x+2} \quad (14)$$

ki zadošča robnima pogojema (3); pri tem zadoščata koeficienta linearne sestave pogojem:

$$0 < p < 1 \quad \text{in} \quad 0 < 1 - p = q < 1 \quad (15)$$

Podobno kakor pri Fibonaccijevi interpolaciji je tudi tu mogoče enačbo rešiti na več načinov, saj je diferenčna enačba homogena, linearna, drugega reda in ima konstantne koeficiente.

Lotimo se naloge tako, da najprej izračunamo drugi člen y_2 ! Tega računamo iterativno.

Ko je $n = 3$, pišemo $p = p_3$ in izrazimo iz diferenčne enačbe drugi člen kot konveksno linearno sestavo prvega in tretjega člena:

$$y_2 = p_3 y_1 + (1 - p_3) y_3$$

Pri računanju drugega člena zaporedij z več kot tremi členi uporabimo izrek:

Če je pri n členih:

$$y_2 = p_n y_1 + (1 - p_n) y_n \quad (16)$$

tedaj je pri $(n + 1)$ členih:

$$y_2 = p_{n+1} y_1 + (1 - p_{n+1}) y_{n+1} \quad (17)$$

kjer je:

$$p_{n+1} = p/(1 - (1 - p) p_n) \quad (18)$$

Dokaz. Iz diferenčne enačbe smo že izrazili drugi člen s prvim in tretjim členom:

$$y_2 = p y_1 + (1 - p) y_3$$

Pri predpostavki, da velja obrazec (16), izrazimo y_3 z y_2 in y_{n+1} :

$$y_3 = p_n y_2 + (1 - p_n) y_{n+1}$$

Če to vstavimo v prejšnjo enačbo, dobimo za y_2 po preureditvi enačbo:

$$(1 - (1 - p) p_n) y_2 = p y_1 + (1 - p) (1 - p_n) y_{n+1}$$

iz katere izračunamo:

$$y_2 = \frac{p}{1 - (1 - p) p_n} y_1 + \left(1 - \frac{p}{1 - (1 - p) p_n}\right) y_{n+1}$$

S tem je izrek dokazan.

Koeficienti $p_3, p_4, p_5, \dots$ pri prvem členu y_1 linearnih sestav tvorijo zaporedje, ki je rekurzivno definirano takole:

$$p_3 = p, \quad p_{n+1} = p/(1 - (1 - p) p_n) \quad (19)$$

Če predpišemo v konveksni linearni sestavi (14) $p = 1/2$, imamo opraviti z aritmetično interpolacijo; v tem primeru se vsi računi in obrazci zelo poenostavijo.

Če pa izberemo $p = (-1 + \sqrt{5})/2$, imamo opraviti z interpolacijo po pravilu zlatega reza. Zlati rez pa smo že na drugačen način obravnavali v Obzorniku.*

Primer. Pri numeričnih podatkih (6) in $p = (-1 + \sqrt{5})/2$, ko imamo torej opraviti z interpolacijo po pravilu zlatega reza, je drugi člen:

$$y_2 = p_8 y_1 + (1 - p_8) y_8$$

Po definiciji (19) izračunamo:

$$p_8 = \frac{p(1 - 4pq + 3p^2q^2)}{1 - 5pq + 6p^2q^2 - p^3q^3} = (6 + 10\sqrt{5})/29$$

Drugi člen je:

$$y_2 = (133 - 20\sqrt{5})/29$$

in zaporedje:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ y_2 &= (133 - 20\sqrt{5})/29 = 3,04\ 409 \\ y_3 &= (106 - 7\sqrt{5})/29 = 3,11\ 543 \\ y_4 &= (125 - 14\sqrt{5})/29 = 3,23\ 086 \\ y_5 &= (117 - 8\sqrt{5})/29 = 3,41\ 764 \\ y_6 &= (128 - 9\sqrt{5})/29 = 3,71\ 984 \\ y_7 &= (131 - 4\sqrt{5})/29 = 4,20\ 882 \\ y_8 &= 5 \end{aligned}$$

* A. Vadnal, Zlati rez, Obzornik mat. fiz. 14 (1967), 1, 21—27.

KVANTNI HALLOV EFEKT

PETER GOSAR

UDK 537.633.2

Članek poroča o nedavnem odkritju, da je Hallova prevodnost dvodimenzionalnih prevodnikov pri nizkih temperaturah kvantizirana v celoštevilčnih mnogokratnikih e^2/h . Obravnavana je elementarna teorija tega novega makroskopskega kvantnega pojava. Opisane so MOS in heterostrukture, ki se uporabljajo pri meritvah kvantnega Hallovega efekta.

THE QUANTUM HALL EFFECT

The article reports on the recent discovery that in two-dimensional conductors at low temperatures the Hall conductance is quantized in integral multiples of e^2/h . The elementary theory of this new macroscopic quantum effect is presented. MOS and hetero-structures, which are used in the quantum Hall effect measurements, are described.

Uvod

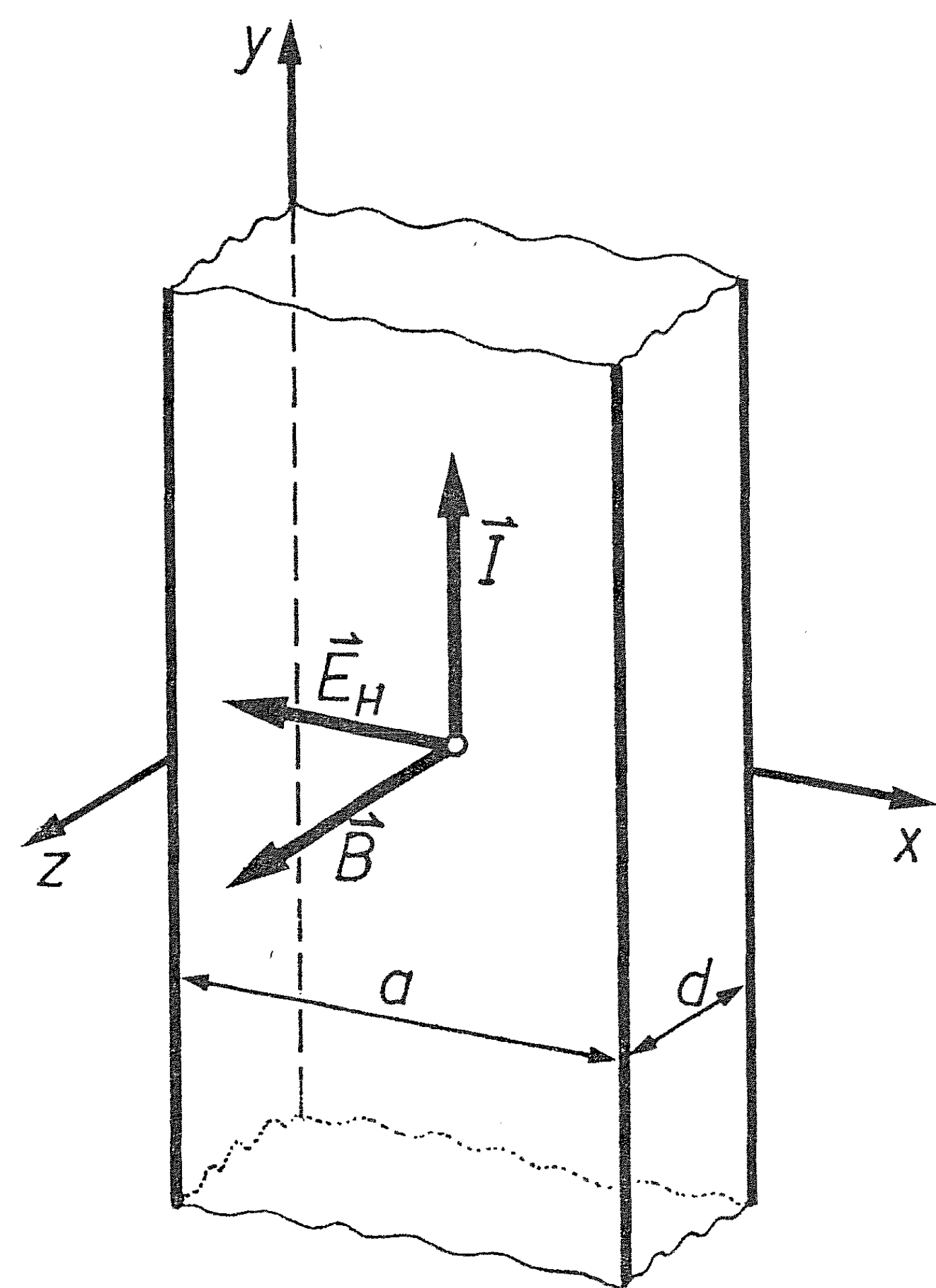
Ameriški fizik E. H. Hall je l. 1879 odkril, da nastane v vodnikih, ki so v magnetnem polju in teče v njih tok, transversalno električno polje. Poleg običajne longitudinalne komponente v smeri toka se pojavi še transversalna komponenta polja E_H , ki je pravokotna tako na smer toka kot tudi na smer magnetnega polja. To Hallovo polje je sorazmerno gostoti električnega toka in gostoti magnetnega polja ter sinusu kota, ki ga oklepata smeri toka in magnetnega polja. Razlago za nastanek Hallovega polja moramo iskati v mikroskopskem mehanizmu električnega prevajanja. Električni tok nosijo nabiti delci, običajno elektroni, ki se precej prosto gibljejo v prevodniku. Oglejmo si, kakšne sile delujejo na nosilec toka v magnetnem polju. Vzemimo ploščat vodnik, širine a in debeline d , kot kaže slika 1. Tok I teče v smeri y , magnetno polje B pa kaže v smer z . Nosilci toka se gibljejo v smeri y s srednjo hitrostjo v . Tok I lahko izrazimo kot

$$I = q n_0 v a d \quad (1)$$

kjer je q naboj posameznega nosilca, n_0 pa je koncentracija nosilcev. Zaradi magnetnega polja deluje na nosilce Lorentzova sila, ki je v povprečju usmerjena v smer x in enaka $y v B$. Če ne bi bilo drugih sil v tej smeri, bi se nosilci toka odklonili iz prvotne smeri y . Odklon toka iz prvotne smeri pa ni možen zaradi oblike vodnika. Na stenah vodnika, ki so pravokotne na smer x , se nabere električni naboj, ki s svojim poljem in iz njega izvirajočo silo na nosilce natančno uravnovesi Lorentzovo silo. To je Hallovo polje

$$E_H = -v B \quad (2)$$

V praksi seveda ne merimo neposredno Hallove poljske jakosti, ampak



Sl. 1. Ploščat vodnik v magnetnem polju

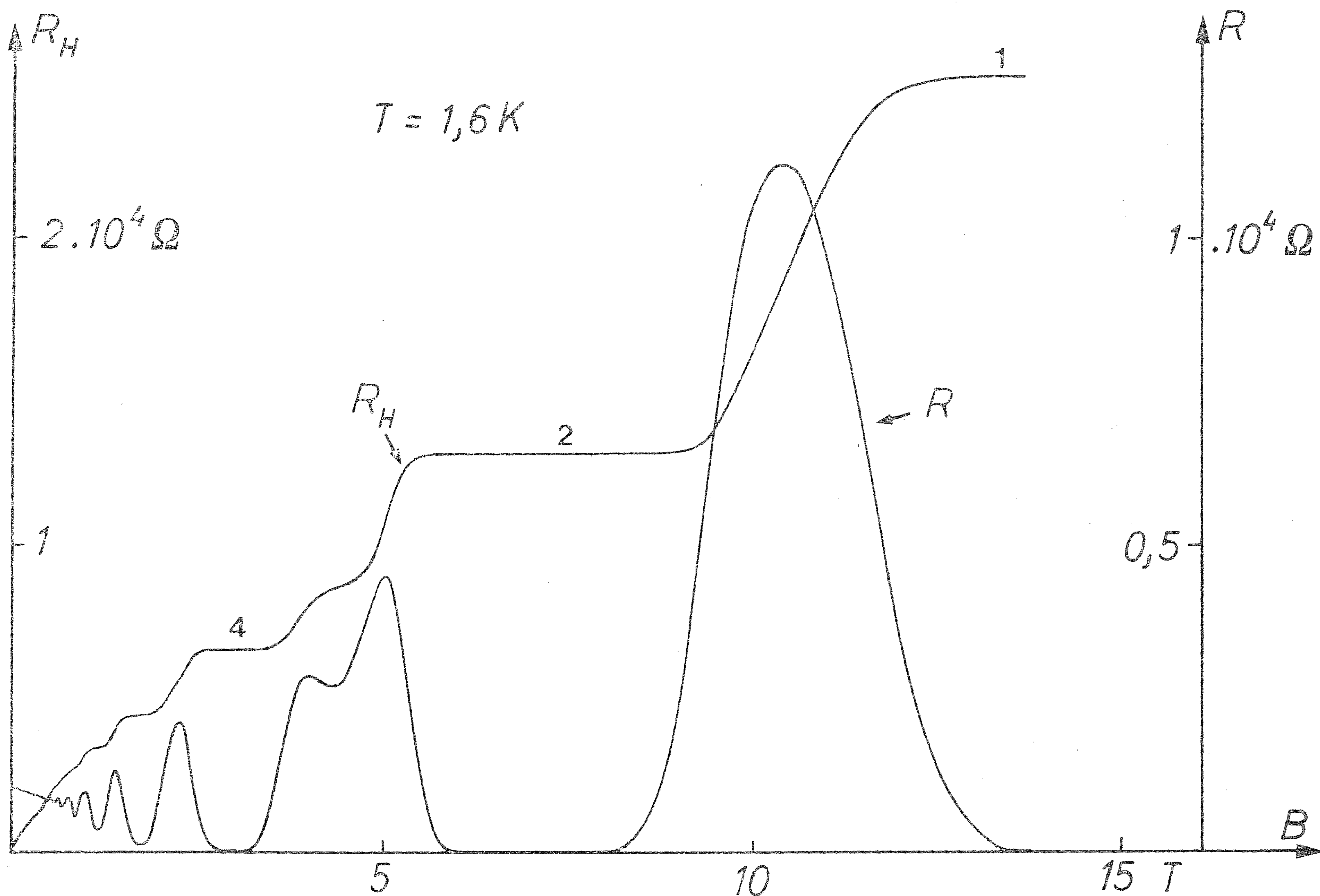
Hallovo napetost U_H med nasprotnima stranicama vodnika v smeri x . Iz enačb (1) in (2) sledi

$$U_H = R_H I \quad ; \quad R_H = B/q N \quad ; \quad N = n_0 d \quad (3)$$

kjer je R_H Hallova upornost. Pri tankem ploščatem vodniku predstavlja N število nosilcev na enoto ploskve vodnika, to je ploskovno gostoto nosilcev. Iz predznaka U_H lahko sklepamo na vrsto nosilcev naboja. Opozoriti je treba tudi na to, da je Hallova upornost odvisna le od debeline vodnika, ne pa od ostalih njegovih dimenzij. Če v ploščat vodnik izvrtamo luknje ali reže, se Hallova upornost vodnika ne spremeni.

Iz izraza za Hallovo upornost je razvidno, da R_H linearno narašča z gostoto magnetnega polja. K. von Klitzing s Tehniške univerze v Münchenu je leta 1980 opazil pri tankih prevodnih plasteh, ki so debele le nekaj nanometrov, izrazita odstopanja Hallove upornosti od linearne naraščanja z gostoto magnetnega polja B [1]. Tako tanke prevodne plasti je mogoče dobiti tik pod površino polprevodniških kristalov, običajno je to silicij, ali na meji med dvema različnima polprevodnikoma, ki sta zraščena v enojen kristal. Tu gre za meritve pri temperaturah nekaj K in pri magnetnih poljih do 15 T. Tipičen potek Hallove upornosti mejne plasti med GaAs in $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ v odvisnosti od B je pokazan na sliki 2. Na sliki je narisan tudi potek longitudinalne upornosti R , to je razmerja med napetostjo na vzorcu v smeri toka in tokom. Eksperimentalni rezultati so presenetljivi. Potek Hallove upornosti ima stopničasto obliko. Na stopnicah, kjer se R_H ne spreminja z B , velja z izredno natančnostjo

$$R_H = h/e^2 i \quad (4)$$



Sl. 2. Hallova in longitudinalna upornost pri heterostrukturi GaAs — $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ [2]

kjer so h Planckova konstanta, e naboj elektrona in i celo število. Na sliki je pri posameznih stopnicah zapisano ustrezno število i . Vrednost razmerja h/e^2 je približno $25\,813\,\Omega$.

Zaradi Planckove konstante v izrazu (4) sklepamo, da moramo iskati razlago za stopničasti potek R_H v okviru kvantne mehanike. Odtod tudi ime *kvantni Hallov efekt* za ta pojav. Presenetljivo pri kvantnem Hallovem pojavu je tudi to, da je longitudinalna upornost R nič v skoraj celotnem področju magnetnih polj, kjer je R_H kvantiziran. Tedaj teče tok v plasti brez upora, kar nas spominja na superprevodnost. Pri meritvah R_H je mogoče doseči izredno natančnost z relativno napako pod 10^{-7} . Razmerje h/e^2 nastopa tudi v izrazu za konstanto fine strukture α :

$$\alpha^{-1} = 2h/\mu_0 c e^2 \quad (5)$$

kjer sta μ_0 induksijska konstanta in c svetlobna hitrost. Konstanta α je merilo za moč interakcije med elektroni in fotoni. Predstavlja najpomembnejši parameter v teoriji elektronskih nivojev v atomih in v kvantni elektrodinamiki. Konstanta fine strukture je danes poznana iz raznih meritev na sedem mest natančno [3]: $\alpha^{-1} = 137,035993(1 \pm 0,75 \cdot 10^{-7})$. Meritve kvantnega Hallovega efekta dajo za α^{-1} isto vrednost s približno enako natančnostjo. Kvantni Hallov efekt kaže izredno reproducibilnost, rezultati meritev so praktično neodvisni od eksperimentalnih parametrov, kot so vrsta prevodnega materiala, različni vzorci, struktura in geometrija prevodne plasti. Nekateri predlagajo, da bi na osnovi kvantnega Hallovega efekta uzakonili absolutni standard upornosti.

Da bi razložili kvantni Hallov efekt, bomo v naslednjem poglavju študirali lastnosti *dvodimenzionalnih prevodnikov* v magnetnem polju. Take prevodnike predstavljajo zelo tanke prevodne plasti. Plasti morajo biti dovolj tanke, tako da je v njih gibanje nosilcev naboja, v nadaljnjem elektronov, možno le v ravnini plasti, ne pa v smeri pravokotno na plast. Plast debeline d naj leži v ravnini $x y$. Če si predstavljamo elektrone v plasti kot proste delce, je njihov energijski spekter podan z

$$E = \hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)/2m + \hbar^2 k_z^2/2m \quad ; \quad \hbar = h/2\pi \quad (6)$$

kjer je m masa elektrona, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ pa valovni vektor. Kar se tiče komponent x in y valovnega vektorja, ni omejitev, komponenta k_z pa je kvantizirana s pogojem, da je valovna funkcija elektrona na mejah plasti, to je pri $z = 0$ in $z = d$, enaka 0. V smeri z ima valovna funkcija obliko stoječega valovanja in k_z je mnogokratnik π/d . Zadnji člen v izrazu (6) je tedaj $(\hbar^2 \pi^2/2m d^2) l^2$; $l = 1, 2, \dots$ in predstavlja diskretne skoke v energiji. Najmanjši skok pri $d = 5\text{ nm}$ je približno 45 meV . To je veliko v primerjavi s toplotno energijo $k_B T$, kjer je k_B Boltzmannova konstanta, saj je $k_B T$ pri 1 K le $0,086\text{ meV}$. Zato pričakujemo, da so v tako tanki plasti zasedena le elektronska stanja z majhnimi l . Do zasedbe višje ležečih stanj bi prišlo le pri večjih koncentracijah elektronov, ko bi bila nižje ležeča stanja že popolnoma zasedena z elektroni. V nadaljnjih razmišljanjih se bomo omejili le na stanja z $l = 1$. V dvodimenzionalnem prevodniku povzroča majhna debelina prevodne plasti zamrznitev gibanja v smeri pravokotno na plast.

Dvodimenzionalni prevodnik v magnetnem polju

Prevodni trak, ki predstavlja dvodimenzionalni prevodnik, leži v ravnini $x y$ med $x = 0$ in $x = a$ (Sl. 3). Magnetno polje ima smer z , Hallovo polje E_H pa smer $-x$. Gostoto magnetnega polja $\mathbf{B} = B(0, 0, 1)$ lahko izrazimo z vektorskim potencialom $\mathbf{A}$ kot $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Pri tem vektorski potencial ni enolično določen. Primerno izbiro $\mathbf{A}$ predstavlja $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$.

Hamiltonov operator za prost elektron v magnetnem polju je podan z $(\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2/2m$, kjer je $\mathbf{p}$ operator za gibalno količino elektrona. Pri dvodimenzionalnem prevodniku na sliki 3 se ustrezni Hamiltonov operator, ob istovremnem upoštevanju električnega polja E_H , glasi

$$H = p_x^2/2m + (p_y - e B x)^2/2m + e E_H x \quad (7)$$

Takoj vidimo, da $p_y = -i \hbar \partial/\partial y$ komutira s H . Komponenta gibalne količine v smeri y je torej konstanta gibanja. Označili jo bomo kar s črko p . Z enostavno preureditvijo členov v izrazu (7) dobimo

$$H = p_x^2/2m + \frac{1}{2} m \omega^2 (x - x_0)^2 + e E_H x_0 + \frac{1}{2} m (E_H/B)^2 \quad (8)$$

kjer sta

$$\omega = e B/m \quad (9)$$

in

$$x_0 = \omega^{-1} (p/m - E_H/B) \quad (10)$$

Prva dva člena v (8) predstavljata Hamiltonov operator za enodimenzionalen harmonični oscilator s težiščem v x_0 , zadnja dva člena pa sta konstanti in prispevata le k premiku vseh nivojev za isto vrednost. ω je ciklotronska frekvenca. Pri 10 T je za elektron $\hbar \omega = 1,16$ meV. V kristalih se elektron ne giblje popolnoma tako kot v praznem prostoru. Vpliv kristala na elektron se pozna predvsem v tem, da moramo v izrazih (8) do (10) maso elektrona m nadomestiti z navidezno maso. Ta je pri Si približno $0,2 m$, pri GaAs pa $0,068 m$. Zaradi tega se ciklotronska frekvenca močno poveča. Pri 10 T je $\hbar \omega$ 5,8 meV za Si in 17 meV za GaAs.

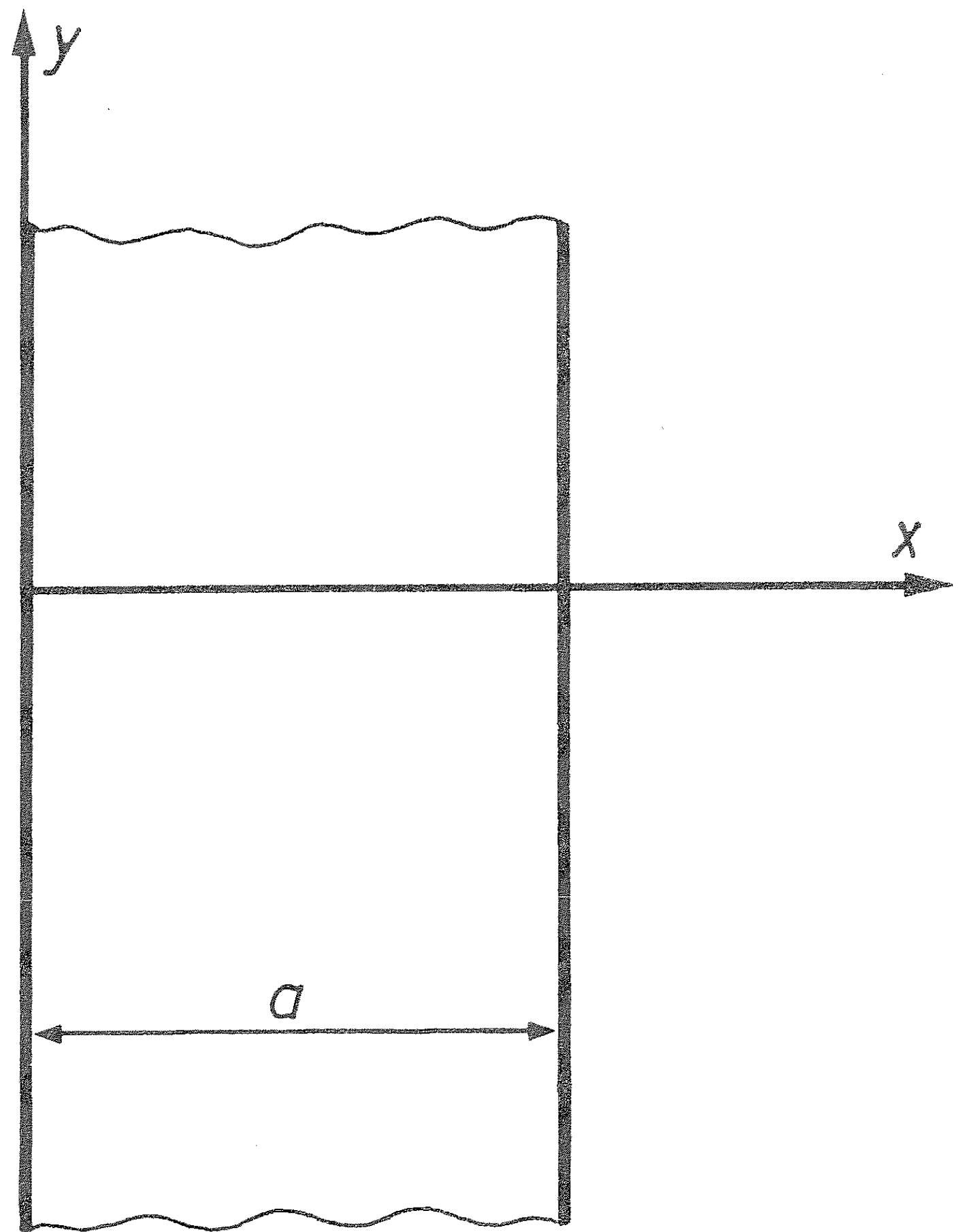
Valovna funkcija $\psi_{p,n}(x, y)$ elektrona z gibalno količino p v smeri y ima v n -tem kvantnem stanju harmoničnega oscilatorja obliko

$$\psi_{p,n}(x, y) = L^{-1/2} \exp(i p y/\hbar) \Phi_n(x - x_0) \quad (11)$$

kjer je L dolžina traku, $\Phi_n(x)$ pa valovna funkcija oscilatorja za n -to kvantno stanje. Valovna funkcija (11) je normirana na 1 na dolžini L , ki je popolnoma poljubna. Energija stanja (11) je

$$E_n(p) = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega + e E_H x_0 + \frac{1}{2} m (E_H/B)^2 \quad (12)$$

Edina odvisnost energije od gibalne količine p je skrita v x_0 . Če ne bi bilo Hallovega polja, bi bil $E_n(p)$ neodvisen od p .



Sl. 3. Prevodni trak v ravninskem koordinatnem sistemu

Zanimivo je izračunati, s kakšno hitrostjo se giblje valovni paket, ki je sestavljen iz valovnih funkcij (11) za isto stanje n oscilatorja in katerih gibalna količina ne odstopa dosti od izbrane srednje vrednosti p . Skupinska hitrost valovnega paketa v ima smer y in je podana z

$$v = d E_n(p)/d p = E_H/B \quad (13)$$

Vsi valovni paketi imajo isto hitrost in smer gibanja. Precej presenetljiva ugotovitev!

Pri kvantnem Hallovem efektu so razmere take, da so zasedeni le nizko-ležeči nivoji harmoničnega oscilatorja, običajno je $n = 0$ ali $n = 1$, ker je $k_B T \ll \hbar \omega$ pri T velikostne stopnje 1 K. Ustrezni valovni funkciji $\Phi_n(x)$ imata naslednji krajevni potek

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &\sim \exp(-x^2/2r^2) \\ \Phi_1(x) &\sim (x/r) \exp(-x^2/2r^2) \end{aligned} \quad (14)$$

kjer je $r = (\hbar/eB)^{1/2}$ ciklotronski radij. Klasično predstavlja r radij orbite, po kateri kroži elektron v magnetnem polju z gostoto B , če je njegova kinetična energija enaka energiji osnovnega stanja $\frac{1}{2} \hbar \omega$ harmoničnega oscilatorja. Pri $B = 10$ T je $r = 8,1$ nm. Premer orbite je pri poljih te velikostne stopnje izredno majhen v primerjavi s širino traku a , ki je $50 \mu\text{m}$ in več. Valovna funkcija (11) ima v smeri x znatno vrednost le v ozkem intervalu velikosti $2r$ okoli težiščne lege x_0 . V smeri y pa je njena amplituda konstantna.

Posamezna stopnica Hallove upornosti ustreza situaciji, ko so zasedena vsa elektronska stanja prevodnega traku, ki pripadajo istemu stanju harmoničnega oscilatorja. Tako so pri eni stopnici zasedena na primer vsa stanja z $n = 0$, pri nadaljnji stanja z $n = 0$ in $n = 1$ itd. Za stanja, ki imajo isti n , pravimo tudi, da pripadajo istemu *Landauovemu nivoju*. Pri štetju stanj z izbranim n moramo seveda najprej ugotoviti, kakšne vrednosti lahko zavzame gibalna količina p . Tu nastopita dve omejitvi. Zaradi povezave (10) med p in x_0 sledi omejitve

$$m E_H/B < p < m E_H/B + m \omega a \quad (15)$$

ker mora ležati x_0 na traku. Da lahko preštejemo stanja, je tudi smiselno zahtevati, da se mora valovna funkcija v smeri traku periodično ponavljati s periodo L , ki naj ima makroskopske razsežnosti. Pogoji periodičnosti torej postavlja dodatno zahtevo

$$p = (\hbar/L) l \quad (16)$$

kjer je l celo število. Iz pogojev (15) in (16) sledi, da je število stanj z izbranim n enako $L a e B/\hbar$. Ustrezna ploskovna gostota stanj je tedaj $e B/\hbar$. Če je eden ali več Landauovih nivojev popolnoma zasedenih z elektroni, je pripadajoča ploskovna gostota elektronov mnogokratnik $e B/\hbar$ ali $N = (e B/\hbar) i$. Tako dobljen N , vstavljen v izraz (3) za R_H , dá ravno eksperimentalno vrednost (4) za Hallovo upornost.

Omeniti je treba, da ima elektron tudi magnetni moment $\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$, ki prispeva k energiji elektronskih stanj. Na osnovi Paulijevega izključitvenega principa lahko vsako od opisanih elektronskih stanj zasedeta dva elektrona z nasprotno orientiranima spinoma. Vendar se energija teh dveh elektronov razlikuje za $2\mu_B B$, kar pri polju 1 T dá že 1,16 meV. Zato je zasedenost teh nivojev lahko tudi enojna. Vsekakor pa to ne spreminja gornjih splošnih ugotovitev o kvantnem Hallovem efektu.

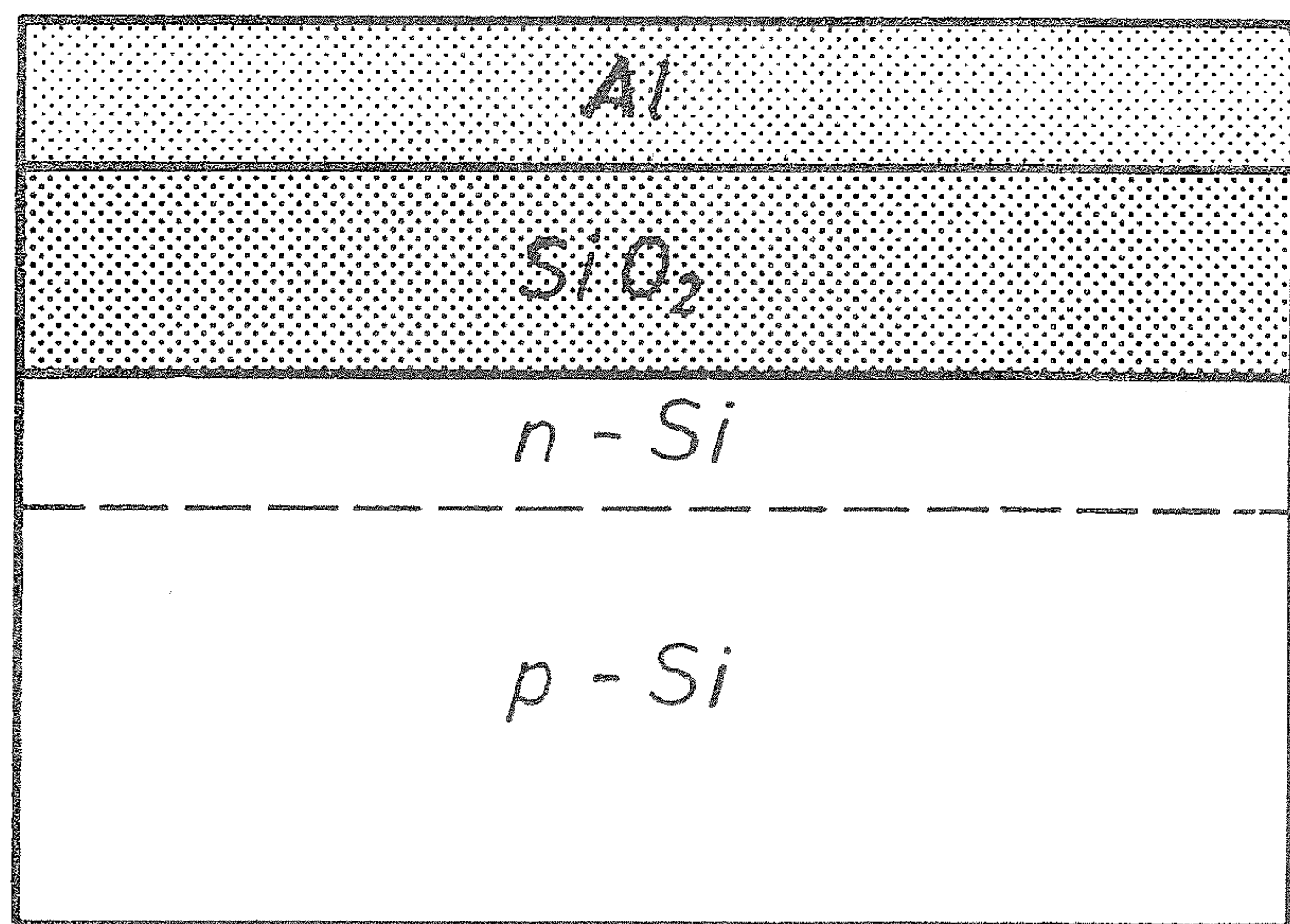
Širino posamezne stopnice pri Hallovi upornosti lahko razložimo le, če v ustreznem intervalu magnetnega polja ploskovna gostota elektronov narašča linearno z B . Ploskovna gostota elektronov pri dvodimenzionalnem prevodniku, ki kaže kvantni Hallov efekt, torej ni konstantna. Dvodimenzionalni prevodnik mora biti v stiku z rezervoarjem elektronov, s katerim izmenjuje elektrone tako, da je v področju stopnice nekaj Landauovih nivojev ali en sam v celoti zaseden z elektroni, drugi pa so popolnoma prazni. Ker se vse godi pri zelo nizkih temperaturah, lahko rečemo, da mora rezervoar elektronov skrbeti za to, da je Fermijeva energija v področju med dvema Landauovima nivojema.

Pogoji, ki morajo biti izpolnjeni za opazovanje kvantnega Hallovega efekta, so očitno zahtevni. Za primerne dvodimenzionalne prevodne plasti so se izkazale nekatere *inverzijske plasti* v polprevodniških kristalih. O teh bo govor v naslednjem poglavju.

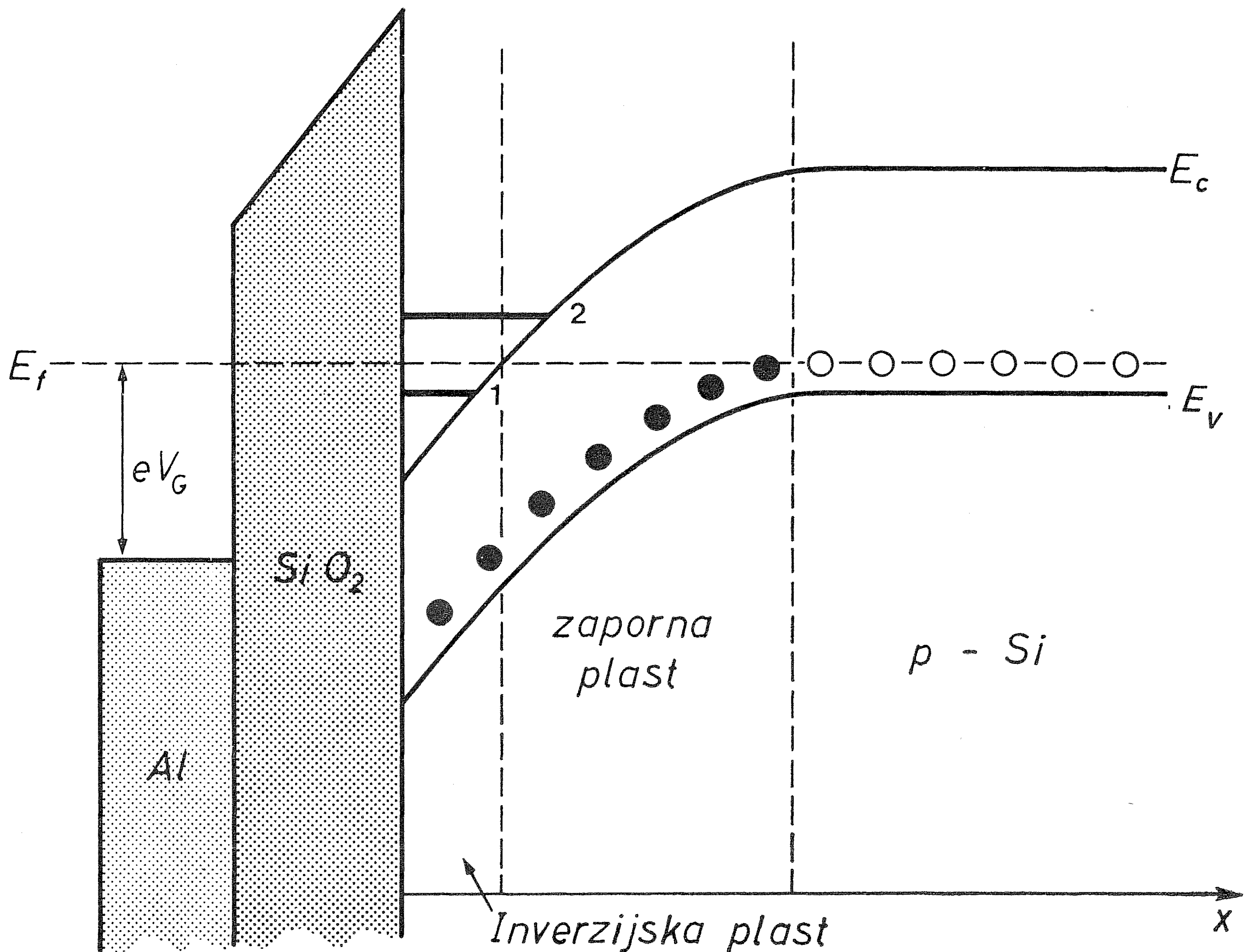
Inverzijska plast

Tik pod površino polprevodniškega kristala ali na meji med dvema kristaloma pogosto nastane zaradi kemijskega onesnaženja in drugih vzrokov tanka prevodna plast, ki je nasprotnega tipa kot notranjost kristala. Tako ima lahko kristal tipa p ob površini plast tipa n . Take plasti imenujemo *inverzijske* zaradi površinske inverzije tipa polprevodnika. Kvantni Hallov efekt so opazovali na dveh vrstah polprevodniških struktur z dobro definirano inverzijsko plastjo [4], [5].

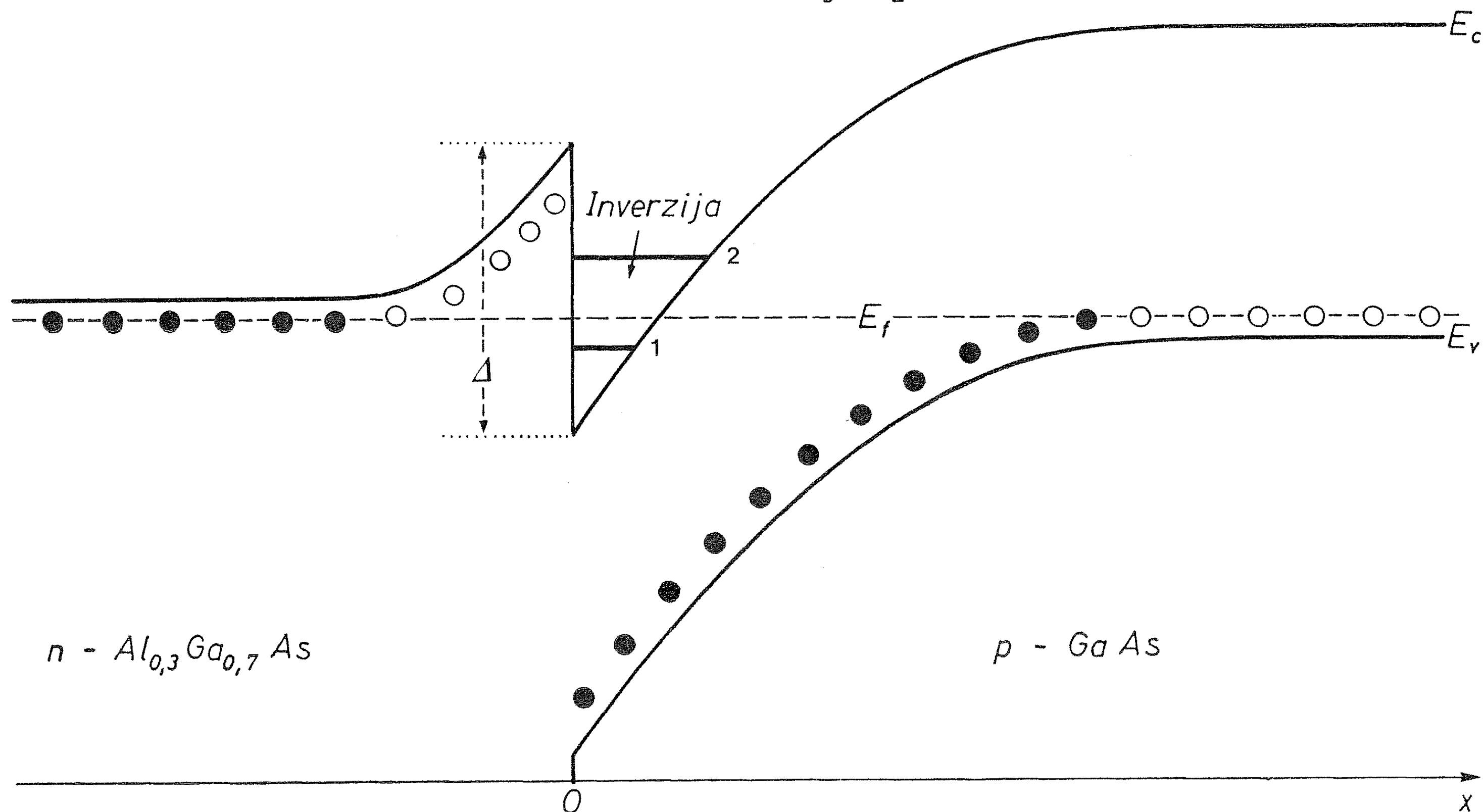
Kot prvo si bomo ogledali strukturo MOS s silicijem tipa p kot osnovnim materialom. MOS pomeni začetnice besed *metal-oxide-semiconductor*. Struktura MOS je razvidna s slike 4. Na ploščici silicija tipa p je plast silicijevega dioksida, ki je debela okoli 200 nm, na njej pa kovinska elektroda iz aluminija. Če damo na elektrodo dovolj veliko pozitivno napetost, 10—50 V, glede na silicij, nastane v polprevodniku pod oksidno plastjo inverzijska plast tipa n . Shemo elektronskih nivojev pri strukturi MOS kaže slika 5. Iz slike je razvidno spreminjanje lege spodnjega robu E_c prevodnega pasu in gornjega robu E_v valenčnega pasu z oddaljenostjo x od površine polprevodnika. Akceptorski nivoji so označeni s krogci. Polni krogci predstavljajo z elektroni zasedene, prazni pa nezasedene nivoje. Zaradi pozitivne napetosti V_G med kovinsko elektrodo in polprevodnikom se nabere negativni naboj v bližini površine polprevodnika. Ta je lociran na akceptorskih nivojih v zaporni plasti, podobno kot v zaporni plasti pri stiku $n-p$, in deloma v prevodnem pasu v področju inverzijske plasti. Inverzijska plast nastane le, če je električno polje v oksidni plasti dovolj veliko, da ukrivi prevodni in valenčni pas v polprevodniku toliko, da se energija nekaterih nivojev prevodnega pasu zniža pod Fermijevo energijo E_f . Inverzijska plast je zelo ozka, tipično 2,5—5 nm, in so



Sl. 4. Struktura MOS



Sl. 5. Shema elektronskih nivojev pri strukturi MOS



Sl. 6. Shema elektronskih nivojev pri heterostrukturi $\text{GaAs} - \text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$

s tem izpolnjeni pogoji za dvodimenzionalno prevodnost. Na sliki sta narisana dva nivoja $l = 1, 2$, v prevodnem površinskem kanalu, ki ustrezata kvantizaciji $\mathbf{k}$ v smeri pravokotno na površino. Le nivo $l = 1$ je zaseden z elektroni. Pri strukturi MOS lahko z napetostjo V_G spreminjamo širino inverzijske pla-

sti. To pomeni, da se s spreminjanjem V_G premika lega nivojev glede na Fermijevo energijo. Notranjost polprevodnika predstavlja elektronski rezervoar, ki z lahkoto izmenjuje elektrone z inverzijsko plastjo, tako da so vedno zasedeni le nivoji pod Fermijevo energijo. Opisana struktura je primerna za opazovanje kvantnega Hallovega efekta. Vendar tu pri eksperimentih običajno držijo konstantno gostoto magnetnega polja B , spreminjajo pa krmilno napetost V_G . Hallova upornost R_H kot funkcija V_G tudi kaže stopničast potek. Stopnice se pojavijo vedno, ko pride Fermijeva energija med dva sosednja Landauova nivoja. Tu R_H pojema z rastočo napetostjo V_G .

Druga struktura, ki je primerna za opazovanje kvantnega Hallovega efekta, je stik $p-n$ med dvema polprevodnikoma z različno širino prepovedanega pasu. Uporabljajo predvsem GaAs tipa p in $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ tipa n . Polprevodnik GaAs ima precej manjšo širino prepovedanega pasu kot $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$. Potek energije spodnjega robu prevodnega pasu v odvisnosti od oddaljenosti x od stika $n-p$ je pokazan na sliki 6. Prostor $x < 0$ izpolnjuje $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$, prostor $x > 0$ pa GaAs. V področju $x > 0$ je narisana tudi gornji rob valenčnega pasu. Krogci predstavljajo donorske, $x < 0$, oziroma akceptorske, $x > 0$, nivoje. Značilen za takšno *heterostrukturo* je skok Δ v energiji pri $x = 0$. Tik ob stiku $p-n$ imamo v področju p ozko plast, kjer je Fermijeva energija v prevodnem pasu. Ta plast predstavlja dvodimenzionalen vodnik. Širine inverzijske plasti tu ne moremo spreminjati. Zato je pri tej strukturi kvantni Hallov efekt opazljiv le, če spreminjamo magnetno polje. Elektronski rezervoar predstavljajo tu elektroni na donorskih nivojih v področju n . Heterostiki $p-n$ so bolj ugodni za opazovanje kvantnega Hallovega efekta kot strukture MOS. Zadoščajo šibkejša magnetna polja in dopustne so višje temperature.

Razlaga kvantnega Hallovega efekta, ki smo jo podali v članku, je le osnova za globlja teorijska razmišljanja o tem pojavu [6], [7]. Predvsem se postavlja vprašanje o transportu elektronov v realnih in ne idealiziranih dvodimenzionalnih prevodnikih. Ni še znan odgovor na vprašanje, s kakšno natančnostjo velja zveza (4). Imamo opraviti z novim makroskopskim kvantnim pojavom, ki ima precej skupnega s superprevodnostjo. Z njim se je v fiziki odprlo zanimivo področje, ki bo imelo znaten vpliv na naše razumevanje osnovnih procesov elektronskega transporta v kristalih in amorfni snoveh, odpira pa tudi nove možnosti na področju uporabe fizikalnih pojavov.

LITERATURA

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination for the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494.
- [2] K. v. Klitzing, *The Quantum Hall Effect*, Europhysics News **13** (1982), No. 4, 2.
- [3] T. Kinoshita, W. B. Lindquist, *Eight-Order Anomalous Magnetic Moment of the Electron*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1573.
- [4] M. E. Cage, S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect I*, Comments Solid State Phys. **11** (1983) 1; S. M. Girvin, M. E. Cage, *The Quantum Hall Effect II*, Comments Solid State Phys. **11** (1983) 47.
- [5] G. A. Baraff, D. C. Tsui, *Explanation of Quantized-Hall-Resistance Plateaus in Heterojunction Inversion Layers*, Phys. Rev. **B 24** (1981) 2274.
- [6] R. B. Laughlin, *Quantized Hall Conductivity in Two Dimensions*, Phys. Rev. **B 23** (1981) 5632.
- [7] B. I. Halperin, *Quantized Hall Conductance, Current-Carrying Edge States, and the Existence of Extended States in a Two-Dimensional Disordered Potential*, Phys. Rev. **B 25** (1982) 2185.

UPORABA CAUCHYJEVE NEENAKOSTI PRI DOKAZOVANJU NEKATERIH NEENAKOSTI

ŠEFKET ARSLANAGIĆ

Math. Subj. Class. (1980) 97 A 99

Cauchyjevo neenakost (med geometrično in aritmetično sredino) uporabimo pri reševanju nekaterih nalog iz aritmetike in geometrije.

APPLYING THE CAUCHY INEQUALITY TO PROVING VARIOUS INEQUALITIES

A few problems from arithmetic and geometry are solved using the Cauchy inequality (between the geometric and the arithmetic mean).

V članku bomo uporabljali Cauchyjevo neenakost, ki velja med aritmetično in geometrijsko sredino poljubnih pozitivnih števil $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

enakost velja le v primeru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Zelo pogosto se uporablja Cauchyjeva neenakost za $n = 2$:

$$(a + b)/2 \geq \sqrt{ab} \quad (2)$$

Dokažimo jo za ta primer! Iz $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ sledi $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, od tod pa že dobimo (2). Z dokazom formule (1) za splošen n se ne bomo ukvarjali; dokazati jo je mogoče s popolno indukcijo.

Pa preidimo k zgledom uporabe.

Zgled 1. Dokaži, da za poljubno naravno število n velja

$$\log_n(n + 1) < \log_{n-1} n$$

Dokazati moramo torej, da je $\log_n(n + 1)/\log_{n-1} n < 1$. Iz znane zveze $1/\log_x y = \log_y x$ in neenakosti (2) res dobimo

$$\begin{aligned} \log_n(n + 1)/\log_{n-1} n &= \log_n(n + 1) \log_n(n - 1) \leq \\ &\leq [(\log_n(n + 1) + \log_n(n - 1))/2]^2 = [\log_n \sqrt{n^2 - 1}]^2 < 1 \end{aligned}$$

Zgled 2. Dokaži, da je ploščina trikotnika manjša od šestine vsote kvadratov njegovih stranic, torej $p < (a^2 + b^2 + c^2)/6$.

Iz (2) sledi

$$ab \leq (a^2 + b^2)/2, \quad ac \leq (a^2 + c^2)/2, \quad bc \leq (b^2 + c^2)/2$$

Če te neenačbe seštejemo, dobimo $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$. Ploščino lahko zdaj ocenimo takole

$$6p = ab \sin \gamma + ac \sin \beta + bc \sin \alpha < ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Zgled 3. Naj bo s pozitivno število. Najdi največjo prostornino, ki jo more imeti kvader z robovi a, b, c , pri katerem je $a + b + c = 3s$.

Iz (1) sledi

$$V(a, b, c) = a b c \leq [(a + b + c)/3]^3 = s^3 = V(s, s, s)$$

Zgled 4. Dokaži, da za vsako naravno število n velja neenakost $2^{n-1} n! \leq n^n$. Razstavimo $(n - 1)!$ takole

$$\begin{aligned} (n - 1)! &= \sqrt[1]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1)} \sqrt[(n - 1)]{(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \sqrt[1]{1 \cdot (n - 1)} \sqrt[2]{2 \cdot (n - 2)} \dots \sqrt[(n - 2)]{(n - 2) \cdot 2} \sqrt[(n - 1)]{(n - 1) \cdot 1} \end{aligned}$$

Če za vsak faktor v zadnjem produktu uporabimo neenakost (2), dobimo, da ta produkt ni večji od

$$\frac{1 + (n - 1)}{2} \cdot \frac{2 + (n - 2)}{2} \cdot \dots \cdot \frac{(n - 2) + 2}{2} \cdot \frac{(n - 1) + 1}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$$

Tako smo dobili neenakost $(n - 1)! \leq (n/2)^{n-1}$. Če jo pomnožimo z n , dobimo neenakost, ki smo jo želeli dokazati.

Zgled 5. Geometrično (če pogledamo »trigonometrični krog«) je očitno, da za $0 \leq x < \pi/2$ veljata neenakosti $\sin x \leq x$ in $\operatorname{tg} x \geq x$. Ni pa neposredno razvidno, v kakšnem odnosu sta vsota levih in vsota desnih strani teh dveh neenakosti. Dokaži, da je $\sin x + \operatorname{tg} x \geq 2x$ (za $0 \leq x < \pi/2$).

Odvod funkcije

$$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$$

je

$$f'(x) = \cos x + 1/\cos^2 x - 2$$

Iz (2) sledi

$$\cos x + 1/\cos^2 x \geq 2 \sqrt{(\cos x)(1/\cos^2 x)} = 2 \sqrt{1/\cos x} \geq 2$$

To pomeni, da je $f'(x) \geq 0$ na intervalu od 0 do $\pi/2$, torej f narašča na tem intervalu. Ker je $f(0) = 0$, je $f(x) \geq 0$ na vsem intervalu. To pa je prav neenakost, ki jo je bilo treba dokazati.

Prevedel in priredil *Marjan Vagaja*

OBVESTILO

OBVESTILO NAROČNIKOM OBZORNIKA

Zaradi težkega finančnega položaja Obzornika za matematiko in fiziko smo že prvi letošnji številki priložili položnico z željo, da nam naročnino nakažete čimprej. Tole obvestilo naj velja kot drugo vabilo, da s pravočasnim vplačilom naročnine omogočite redno izhajanje časopisa. Enak opomin bomo objavili tudi v četrti številki Obzornika. Dolžnikom, ki svoje obveznosti ne bodo poravnali do občnega zbora, bomo poslali poseben opomin s priporočeno pošto. Seznam najbolj trdovratnih dolžnikov pa bomo pripravili do konca letošnjega leta s predlogom, da njihova imena za prihodnje leto črtamo iz seznama naročnikov revije. Naročnike Obzornika za matematiko in fiziko prosimo za razumevanje.

Ciril Velkoverh

KOMISIJA ZA TISK V LETU 1983

V tem koledarskem letu je Komisija za tisk izdala nekaj publikacij manj kot prejšnje leto.

Obzornik za matematiko in fiziko je izhajal pravočasno v običajnem obsegu in šestimi rednimi številkami. Med njimi je bila peta posvečena 21. društvenemu seminarju, tokrat iz fizike, z naslovom Elektronika in računalništvo v fizikalnem merstvu. Vodil ga je Jože Pahor. Tudi rubrika šola ima več prispevkov kot navadno. Redno smo poročali o vseh važnejših domačih novicah in novih knjigah in tako sproti seznanjali širšo strokovno javnost z razgibano društveno in drugo dejavnostjo. Ob močno povečanih izdatkih za natis Obzornika in kljub družbeni subvenciji (redni in izredni skupaj 574.199 din) so izdatki v koledarskem letu za 7.154 din višji od dohodkov. Ta primanjkljaj bomo skušali pokriti z dodatnimi izrednimi subvencijami. S tem letnikom smo zaključili tridesetletno obdobje rednega izhajanja društvenega glasila. Za zaključek smo pripravili in izdali še stvarno in abecedno avtorsko kazalo za zadnjih 15 let.

Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome je v minulem koledarskem letu nadomestil manjkajoče številke iz prejšnjega leta, ko je koordinacijski odbor družbenega dogovora o izdajanju mladinske periodike s sedežem pri Kulturni skupnosti Slovenije Preseku zelo pičlo namenjal subvencijo ter skušal doseči, da bi izhajal v manjšem obsegu oz. z manj številkami letno. Uredniki so se potrudili in pripravili dovolj zanimivih rokopisov, med katere sodijo predvsem Rešene naloge z republiških tekmovanj za učence 7. in 8. razredov osnovnih šol. S tem je Presek dosegel, da zanimanje za list med učenci v osnovnih šolah ni padlo in da je ostala letna naklada skoraj 20 000. Zaradi omenjenih težav je bila tudi lani družbena subvencija Preseku izredno nizka (skupaj 556.362 din), čeprav je delež Izobraževalne skupnosti Slovenije (ISS) večji za 50 %. Predlanski primanjkljaj (160.000 din) in lanski (502.164 din) bomo skušali pokriti z obljubljeno dodatno subvencijo Raziskovalne skupnosti Slovenije (RSS) in Kulturne skupnosti Slovenije (KSS). Tako je Presek (končno) dobil moralno in vsaj deloma tudi materialno priznanje za svoje delo. Lani je Presek zaključil desetletno obdobje izhajanja. Na skromni slovesnosti ob občnem zboru so njegovi najzaslužnejši sodelavci prejeli društveno priznanje, člani uredniškega odbora pa so pripravili izdajo stvarnega in abecednega avtorskega ter imenskega kazala ter organizirali kviz za svoje bralce.

V lanskem koledarskem letu v Knjižnici Sigma nismo izdali nobene nove knjige, zato pa kar štiri ponatise. To se je posrečilo zaradi uspešne posebne akcije v prejšnjem letu, v kateri smo poslali na vse srednje in osnovne šole paket novih knjig. Tako je prodaja zrasla in potrebne ponatise je bilo mogoče izdati. Obljubljenega rokopisa za novo knjigo nismo dobili. Nadomestnega teksta, ki smo ga imeli že več let v prevajanju, nam ni uspelo izdati do konca koledarskega leta, pač pa smo ga izdali do skrajnega roka 30. 3. 1984 in s tem ohranili kontinuirano izhajanje knjig v zbirki ter si zagotovili pravico tudi do nadaljnjih subvencij pri RSS, ISS in morda KSS. Delo V. Devideja Matematika skozi kulture in epohe smo kot prvo natipkali na novem IBM composer pisalnem stroju. Kljub izredni subvenciji KSS bomo knjigo natisnili le v črno-beli tehniki v nakladi 2000 izvodov.

Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij Matematika-Fizika je bogatejša le za eno delo; morali smo ga izdati prav tako sami, ker še vedno nimamo založbe, ki bi hotela izdajati naša dela. Prodaja teh del ni velika. Ker smo v tej zbirki brez družbene subvencije, bomo knjige lahko izdajali sami le ob pomoči zainteresiranih visokošolskih in drugih ustanov.

Izdaja del v novi zbirki Matematični rokopisi se je izkazala umestna. Od skupne naklade smo lani prodali tretjino zaloge.

V izbranih poglavjih iz matematike in računalništva (spremenjen je naslov zbirke) je izšlo že 21 različnih naslovov, za katere je veliko zanimanje med študenti. Izdali smo dva nova rokopisa in tri ponatise. Ob tem smo dobili izredne subvencije nekaterih ustanov, ki so za te izdaje zainteresirane (Fakulteta za elektrotehniko,

IJS, Univerzni računski center, Iskra) skupaj 180.000 din. Zbirka izkazuje sicer pozitiven saldo poslovanja, skupaj z matematičnimi rokopisi pa negativnega, in sicer 118.246 din. Za kritje tega primanjkljaja in za dodatna sredstva, ki so nam potrebna za ponatise še nekaterih razprodanih učbenikov, bomo morali zaprositi VTO-je in fakultete na univerzi. Tiskarski stroški so se v zadnjih dveh letih toliko povišali, da iztrženi denar od prodaje knjig nikakor ne zadostuje za plačilo novih natisov. V prihodnje bomo morali naklade še zmanjšati in natis večkrat ponoviti (ker manjka tudi skladiščnega prostora), prodajne cene pa močno povečati ter hitreje razprodati naklade.

Podobno velja za učbenike v Zbirki izbranih poglavij iz mehanike.

Publikacije Preprint series of the department of mathematics in postdiplomski seminar iz matematike financira oddelek za matematiko IMFM. Podobno velja za Zbirko izbranih poglavij iz fizike, iz katere smo prodali tretjino zaloge, tako da ima zbirka pozitiven saldo; z njim bomo izdali naslednji rokopis.

Med učbeniki in priročniki pa naj omenimo dve posebnosti. Za srednjo šolo smo izdali sami ali skupaj z DZS Zbirko vaj iz aritmetike, algebre in analize za vse štiri razrede srednjih šol, kar se je, po dolgotrajnih pregovorih z ZŠ in DZS, izkazalo za zelo koristno. Druga posebnost pa je skupna izdaja knjige Znanost v Veliki ilustrirani enciklopediji pri Mladinski knjigi. Naše društvo je pri tej knjigi opravilo vse strokovno delo, prevod in priredbo, recenzijo in druge uredniške posle. Ob separatnem ponatisu obeh polovic knjige v okviru Sveta knjige pa je prišlo do neljubih nasprotij med MK in DMFA SRS, saj za to izdajo nismo sklenili založniške pogodbe.

Ob 200-letnici izida prvega Vegovega logaritmovnika smo v imenu DMFA SRS sodelovali pri proslavi v Zagorici, katere glavni organizator je bila Občinska kulturna skupnost Ljubljana Moste-Polje. Le-ta nam je prepustila ob financiranju soizdajo razglednic, značk in brošure o Juriju Vegi. Prevzeli smo skrb za širjenje teh natisov, ne le pri društvu, pač pa tudi v Zagorici. Domačinom smo ponudili v prodajo več različnih brošur s povečanim rabatom (20 %), da bi bila postrežba in zadovoljstvo večje. Najemnino sobe še vedno financira OKS Ljubljana Moste-Polje. Pri sofinanciranju spominskih edicij so sodelovale še nekatere ustanove (IJS, VŠOD-Kranj, ORS Kamnik, Iskra-elektrooptika, FE, ISS, Elektrolabor Milana Vidmarja, VEKŠ Maribor, VTŠ Maribor, Intertrade) — skupno 72.424 din.

Vzdrževanje Plemljeve spominske sobe na Bledu financira OKS Radovljica.

Dolžnikov je bilo ob koncu lanskega leta nekoliko več kot navadno. Pri prodaji knjig, pobiranju članarine za Obzornik za matematiko in fiziko ter naročnine za Presek, bomo odločneje zahtevali vplačilo dolžnih zneskov.

Edvard Kramar, Ciril Velkoverh

* Seznam izdanih publikacij v letu 1983 je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. 31 (1984) št. 1, str. IV.

FINANČNO POROČILO KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS

Obzornik za matematiko in fiziko 30 (1983) št. 1, 2, 3, 4, 5, 6

Dohodki:	naročnina	452.570,00
	subvencije: RSS	317.525,00
	ISS	57.600,00
	skupaj	827.695,00
Izdatki:	tiskarski stroški	732.393,70
	članarina UO DMFA SRS	26.560,00
	režija	75.895,40
	skupaj	834.849,00
Razlika (negativna)		7.154,00

Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome**10** (1982/83) št. 3, 4, 6, 7,**11** (1983/84) št. 1, 2

Dohodki:

naročnina	1.882.676,60
subvencije: RSS	278.388,00
ISS	277.974,00
Delo — popusti	233.078,40
skupaj	2.672.117,00

Izdatki:

tiskarski stroški	2.024.328,75
avtorski honorarji	638.883,40
materialni stroški	511.069,00
skupaj	3.174.281,15

Razlika (negativna)

502.164,15

Knjižne izdaje (natisi, ponatisi, prodaja)

	Dohodki	Izdatki	Saldo*
Knjižnica Sigma	2.145.001,00	1.428.447,00	716.554,00
Matematika-Fizika	660.532,00	371.452,00	289.080,00
Izbrana poglavja iz matematike in računal.	1.307.505,00	1.203.905,00	103.800,00
Matematični rokopisi	208.134,00	430.180,00	— 222.046,00
Zbirka izbranih poglavij iz fizike	204.897,40	37.800,00	167.097,40
Zbirka izbranih poglavij iz mehanike	39.784,35	—	39.784,35
Publikacije IMFM	188.272,70	128.061,70	60.211,00
Razni učbeniki in priročniki	631.521,00	631.521,00	—

* Pozitivni saldi pomenijo nedokončano proizvodnjo.

Prodaja knjig, značk in drugo

	Prodano v vred-		Zaloga v vred-	
	knjig	nosti	knjig	nosti
Knjižnica Sigma	16 826	2.316.985	14 328	2.269.128
Matematika-Fizika	1 972	860.032	1 531	551.304
Izbrana poglavja iz matematike in računalništva	3 930	874.790	4 758	1.302.172
Postdiplomski seminar iz matematike	269	39.830	627	87.350
Matematični rokopisi	1 179	215.010	2 161	391.170
Zbirka izbranih poglavij iz mehanike	65	15.600	20	4.800
Zbirka izbranih poglavij iz fizike	680	99.300	1 204	183.980
Postdiplomski seminar iz fizike	64	4.148	93	5.780
Razne knjige	4 323	664.121	1 754	362.366
Značke, razglednice in drugo	19 372	463.674	135 135	3.931.842
Skupaj	48 680	5.553.490	161 611	9.089.892

Režija

Dohodki:

OMF	115.342,30
Presek	258.354,80
prodaja knjig	694.450,00
izdajanje knjig	653.983,35
drugi dohodki	483.964,90
skupaj	2.206.084,35

Izdatki:

OD (bruto)	643.852,20
avtorski honorarji in intelektualne storitve	565.795,95
PTT OMF in Presek	119.855,40
materialni stroški pisarne	446.783,70
bančni stroški	14.121,60
drugi odhodki	131.812,10

Saldo 1982

— 481.006,35

Skupaj

2.403.227,30

Saldo 31. 12. 1983

— 197.142,95

Janez Markelj, Ciril Velkovrh

Delo članov Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko se kaže tudi v poročilih o raziskovalnih nalogah. Podani so kratki povzetki teh del.

106. Analitične rešitve z družin krivulj invariantnih na rotacije. Nosilec J. Globevnik, sodelavci: A. Založnik, F. Forstnerič, M. Lakner, E. Beloglavec.

Delo dokazuje v prostoru $\mathbb{C}^2$ Rudinov izrek o analitičnem nadaljevanju zvezne funkcije z roba v notranjost enotske krogle pri razmeroma milih predpostavkah. Podan je novi dokaz tega izreka v $\mathbb{C}^N$, in sicer brez uporabe teorije unitarno invariantnih funkcijskih podprostorov na sferi. Če je zvezna funkcija na enotskem disku v $\mathbb{C}$ analitična na rotacijsko invariantni družini gladih Jordanovih krivulj, so v delu dobljeni zadostni pogoji za analitičnost take funkcije.

107. Toeplitzovi operatorji na Bergmanovih prostorih. Nosilca: M. Hladnik, B. Magajna.

Raziskava obravnava unitarno ekvivalenco posebnega razreda operatorjev na Hilbertovem prostoru. Unitarna ekvivalenca dveh operatorjev iz razreda je prevedena na problem o matričnih holomorfnih funkcijah. Opisan je bistveni spekter t.i. posplošenih Toeplitzovih operatorjev. Na koncu dela je nekaj primerov določevanja spektra Toeplitzovih operatorjev in odgovorov, kdaj je Toeplitzev operator na Bergmanovem prostoru Hilbert-Schmidtov, kdaj v razredu s sledjo in kdaj je kompakten za pozitiven simbol.

108. Kvazispektralnost kvazinilpotentnih operatorjev. Nosilec: M. Omladič.

V delu je podana konstrukcija spektralnih podprostorov, primerna predvsem za kvazinilpotentne operatorje, ki niso nilpotentni. Rezultati se kar ujemajo s teorijo spektralnih maksimalnih podprostorov. Avtor je vpeljal še pojem spektralnih maksimalnih podprostorov operatorskih analitičnih funkcij.

109. Spekter in numerični zaklad elementa realne ali kompleksne asociativne normirane algebre. Nosilec V. Lampret.

V delu je opisan odnos med spektrom in numeričnim zakladom elementa realne ali kompleksne asociativne normirane algebre. Karakterizirani so poševno hermitski in pozitivni elementi normirane algebre. Pokazane so tudi anomalije v zvezi s spektrom, numeričnim zakladom in hermitskimi elementi v primeru, če je algebra brez enote.

110. Kombinatorne metode v topologiji. Nosilec J. Vrabec, sodelavci: Z. Magajna, B. Mohar, D. Repovš.

Za bločne svežnje so v delu definirani Tihonov razred, Stiefel-Whitneyev in Eulerjev razred ter ugotovljene njihove osnovne lastnosti. Nekateri teh razredov so identificirani kot ovire za eksistenco prerezov bločnih svežnje. Razvite so metode za ugotavljanje uredljivosti simplicialnih kompleksov. Za poljubna končna grafa G in H je avtorju s sodelavci uspelo konstruirati skupen končnolisten graf $G \cdot H$ in pokazati, da imajo G , H in $G \cdot H$ take celične vložitve v sklenjene ploskve, da se dasta krovni projekciji grafa $G \cdot H$ na G in H razširiti do razvejanih krovni projekcij ploskev.

111. Metode za numerično reševanje sistemov navadnih diferencialnih enačb z razširjenim območjem. Nosilec Z. Bohte, sodelavci: G. Tomšič, B. Orel, M. Petkovšek, A. Kmet.

V prvem delu naloge je podrobno obravnavanih in analiziranih več variant nove eksponentne metode za reševanje začetnih nalog pri sistemih navadnih diferencialnih enačb. Dalje je podanih nekaj novih metod za reševanje začetnih nalog pri navadni enačbi drugega reda. Na koncu je podrobno razložena kvazi-Newtonova metoda za reševanje sistemov nelinearnih enačb, ki nastanejo pri numerični realizaciji implicitnih metod za reševanje sistemov navadnih diferencialnih enačb prvega reda.

112. Računalniško orientirane matematične metode — VIII. Nosilec J. Grad, sodelavca: V. Rupnik, J. Barle.

V nalogi so definirane meje stabilnosti intervalov, v okviru katerih se smejo in morajo izbirati vrednosti vseh koeficientov namenske funkcije pri izbranem prvem koeficientu, da se optimalna rešitev novega linearne programa glede na prvotnega ohranja. Oblikovani algoritem je testiran na računalniku.

113. Numerična in računalniška matematika. Nosilec J. Kozak.

V nalogi so zbrani podprogrami za reševanje problemov, ki so najpogostejši v nalogah numerične aproksimacije. Ti so razvrščeni v sedem skupin: v splošno uporabne podprograme, v podprograme numerične linearne algebre, v podprograme za delo s polinomi, v podprograme za delo z zlepci, v podprograme za reševanje interpolacijskih nalog, v podprograme za reševanje aproksimativnih nalog in podprograme za reševanje navadnih diferencialnih enačb s kolokacijo.

114. Stirlingove funkcije. Nosilec A. Vadnal, sodelavec J. Barle.

Prvi del naloge obravnava dva tipa realnih diskretnih in njim ustreznih zveznih Stirlingovih funkcij, ki imajo za svoje vrednosti Stirlingova števila. V drugem delu je govor o Stirlingovi eksponentni funkciji, njej inverzni in o povezavi z integralnim logaritmom. Tretji del pa obravnava neko posplošitev goniometričnih funkcij, ki privede do Stirlingovih števil druge vrste.

115. Kompleksnost logičnih teorij, drugi del. Nosilec I. Hafner, sodelavec B. Jurčič.

V nalogi sta obravnavani dve metodi za izpeljavo spodnjih mej za dolžino dokazov. Za tri teorije je uspelo dobiti linearno spodnjo mejo, za eno teorijo pa je ugotovljena spodnja meja reda $n \cdot \log n$. Dokazano je tudi, da je dolžina korakov v algoritmični prototetiki neelementarna v odnosu do dolžine formule.

116. Bibliografija Josipa Plemlja in nekaterih zgodnjih odmevov na njegova dela v mednarodni matematični literaturi. Nosilec J. Povšič.

Delo obsega uvod, knjige in razprave Josipa Plemlja z odmevi nanje ter ocene, ki jih je pisal J. Plemelj. Vseh enot v osebni bibliografiji je 55. Pri zbiranju odmevov v letu 1983 so bili na novo zbrani še 403. V celoti je tako zbranih čez 1000 odmevov.

117. Algoritmi teorije grafov III. Nosilec V. Batagelj, sodelavca: B. Mohar, M. Petkovšek.

V nalogi so obravnavani induktivni razredi grafov, Hamiltonova naloga v posebnih vrstah grafov, problem prirejanja v grafih z vrednostmi na povezavah, zveze med grafi in popolnimi grafi. Podana je tudi shema postopkov za pregledovanje grafov. Izdelani so programi za točno barvanje točk grafov, za določanje korenskih grafov danih povezanih grafov in za računalniško sestavljanje grafov.

118. Algebrična teorija grafov II. Nosilec D. Marušič, sodelavec J. Herga.

Delo se ukvarja s hamiltonskimi in Cayleyevimi lastnostmi po točkah simetričnih grafov. Dokazano je, da ima vsak po točkah simetričen graf reda $2p^2$ hamiltonov cikel. Dokazan je tudi izrek, ki pravi, da je vsak simetričen graf $2p$, $p \equiv 3 \pmod{4}$ oziroma reda p , p^2 , p^3 nujno Cayleyev graf. Za vsako naravno število n , deljivo s p^4 , je konstruiran po točkah simetričen graf, ki ni Cayleyev. Nakazane so tudi poti za rešitev nekaterih nerešenih problemov s področja teorije grafov.

119. Invariante grafov. Nosilec T. Pisanski, sodelavca: J. Shawe-Taylor, A. Malnič.

V raziskavi je poudarek na četverkotniških vložitvah grafov. Obravnavani so amalgami grafov kubov, križiščno število nekih kartezičnih produktov grafov na raznih ploskvah. Delo obravnava posplošena barvanja, neodvisni polinom, posebne družine regularnih grafov; prikazani so neki rezultati v zvezi z obstojem Hamiltonovega cikla v kartezičnih produktih neskončnih grafov.

Gabrijel Tomšič

NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1984

Nagradi Sklada Borisa Kidriča sta prejela

1. prof. dr. **Mitja Kregar** za pomembna dela na področju atomov.

Mitja Kregar je razvil model večelektronskega atoma in z njim izračunal nekatere atomske količine ter jih primerjal z izmerjenimi. Ključna novost je uspešna poenostavitev računa z vpeljavo efektivnega coulombskega polja. Podrobno je raziskal, v kakšni zvezi je novi, nazorni model atoma s precej bolj zapletenim Hartree-Fockovim.

Pokazal je tudi, da model omogoča precej natančno računanje atomskih parametrov, kot so ionizacijske energije in elektronske afinitete lahkih jeder ter funkcije zasenčenja pri trkih lahkih jeder. Povezovanje vseh teh količin je pogosto potrebno pri drugih osnovnih raziskavah, na primer v jedrski fiziki, in pri raznih aplikacijah, ki temeljijo na posameznih lastnostih atomov.

2. doc. dr. **Andrej Ule** za delo *Osnovna filozofska vprašanja sodobne logike*.

Delo dr. Andreja Uleta *Osnovna filozofska vprašanja sodobne logike* vsebuje analizo filozofske misli treh filozofov polpretekle dobe, ki so najbolj zaslužni za razvoj moderne logike in njenega filozofskega premisleka. To so bili Gottlob Frege, Bertrand Russell in Ludwig Wittgenstein. Andrej Ule je z izčrpno in globoko kritično mislijo ovrednotil njihove dosežke ter jih interpretiral z uporabo marksistične dialektične metode ugotavljanja notranjih protislovij v njihovih delih in v medsebojnih teoretskih odnosih. Posebna novost, ki je prav rezultat Uletove raziskovalne metode, je analiza Wittgensteinovega logičnega atomizma. V misli tega znamenitega avstrijskega filozofa je odkril bistvene dialektične prvine. Delo je znanstvena obogatitev tiste slovenske in jugoslovanske filozofske misli, ki se z vso resnostjo spopada s perečimi filozofskimi problemi sodobne logike in metodologije znanosti.

Nagrade za izume in tehnične izboljšave so prejeli

1. dr. Janez Pirš, Bojan Marin, Erik Marganu, Stanimir Vasić, Igor Mušević, Andrej Primc, Ivan Kvasić, Andrej Vučković, Silva Pirš, Andrej Gartner in prof. dr. **Robert Blinc** za izuma *Miniaturni monitor časovno odvisnih električnih signalov z LCD zaslonom in pomnilnim zapisom in Tekočekristalni osciloskopski zaslon z internim reflektorjem in interno mrežo*.

2. Miloš Budnar, mag. Vladimir Cindro, prof. dr. **Mitja Kregar**, **Vekoslav Ramšak**, Marjan Ravnikar, Zdravko Rupnik, dr. Vito Starc in mag. **Žiga Šmit** za tehnično izboljšavo *Razvoj metode protonskega vzbujanja rentgenskih žarkov (PIXE) za sledne analize*.

3. prof. dr. Miroslav Kljajić, Janez Krajnik, Miha Stopar, Amadej Trnkoczy in doc. dr. Uroš Stanič za izum *Čevlji za merjenje vertikalne sile in njenega prijemališča med hojo*.

PROFESOR IVAN ŠTALEC DOBIL ŽAGARJEVO NAGRADO

Ni še dolgo tega (glej Obzornik mat. fiz. 27 (1981) 184—186), ko smo čestitali profesorju Štalcu ob življenjskem jubileju — sedemdesetletnici. Zdaj imamo spet priliko, da mu stisnemo roko.

V petek, 23. marca 1984, je bila v Cankarjevem domu v Ljubljani slovesna podelitev Žagarjevih nagrad za leto 1984. Ivan Štalec jo je dobil za svoje dolgoletno in plodno pedagoško delo. Učil je matematiko in fiziko na gimnazijah v Murski Soboti, Trbovljah in Ljubljani. Je eden tistih učiteljev, ki pustijo s svojim delom neizbrisno sled, izboren predavatelj, neprekosljiv metodik. Od svojih učencev je terjal primerne napore, zato pa so bili seveda med najuspešnejšimi tekmovalci in kasneje strokovnjaki. Napisal je, sam ali kot soavtor, okrog 50 učbenikov za matematiko in fiziko za različne šole, osnovne in srednje. Svoje metodično znanje je prenašal tudi na nove rodove učiteljev matematike in fizike.

Ob zasluženih nagradi profesorju Štalcu kolegi, člani Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS še enkrat iskreno čestitamo.

Peter Petek

TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE V BEOGRADU

Ob dnevu študentov beograjske univerze, 4. aprila, je bilo v Beogradu 16. mednarodno tekmovanje študentov matematike. Iz Ljubljane so se ga udeležili Matija Lokar, Peter Šemrl in Gregor Kovačič. V tekmovalni komisiji je delal Mirko Dobovišek.

Sodelovalo je 14 ekip. Vrstni red prvih šestih je bil: 1. Budimpešta, 2. Praga I, 3. Beograd I, 4. Praga II, 5. Ljubljana, 6. Elektrotehnična fakulteta iz Beograda. Gregor Kovačič je bil v konkurenci 1. in 2. letnikov drugi, za Szenes Andrásom iz Budimpešte.

Tokrat so tekmovalci tekmovali le iz naslednjih področij: funkcionalna analiza, realna analiza, kompleksna analiza, algebra, topologija in seveda v skupini za 1. in 2. letnik.

Moj vtis je, da se zadnja leta jugoslovanski študenti vedno težje kosajo s študenti tujih univerz. Mogoče je k temu pripomogla uspela reforma šolstva.

Realna analiza

1. Naj bo f navzdol omejena odvedljiva funkcija iz R^n v R .

Dokaži, da za vsak $\varepsilon > 0$ eksistira taka točka x v R^n , da je

$$\|f'(x)\| \leq \varepsilon$$

2. Naj bo X množica vseh zaporedij $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, pri katerih je $x_i \in \{0, 1\}$ in $x_i x_{i+1} = 0$ za vsak $i \in \mathbf{N}$, in naj bo $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija, definirana s

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-x_i-x_{i+1}}$$

Izračunaj maksimum in minimum funkcije φ .

Funkcionalna analiza

1. T naj bo kompakten metričen prostor in $f, f_1, f_2, \dots$ zvezne funkcije iz T v R , za katere velja $\lim f_n(t) = f(t)$ in $\sup \{|f_n(t)| : n \in \mathbf{N}, t \in T\} < \infty$.

Dokaži, da obstaja zaporedje končnih konveksnih kombinacij funkcij $f_n (n = 1, 2, \dots)$, ki enakomerno konvergira proti f .

2. Naj bo X popolnoma regularen Hausdorffov prostor in $C(X)$ prostor vseh zveznih realnih funkcij na X . Topologija v $C(X)$ naj bo topologija enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah. F naj bo neničeln zvezen linearen funkcional na $C(X)$.

Dokaži, da obstaja najmanjša kompaktna množica K z lastnostjo, da iz $f(x) = 0$ za $x \in K$ sledi $F(f) = 0$.

Kompleksna analiza

1. Funkcija f naj bo definirana z vrsto $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$, katere konvergenčni polmer je 1 in katere koeficienti a_n so vsi nenegativni.

Dokaži, da je $z = 1$ singularnost funkcije f .

2. Naj bo f trigonometrijski polinom $f(\vartheta) = \sum_{-n}^n a_k e^{ik\vartheta}$. Privzemimo da je $f(\vartheta) > 0$ za vse realne ϑ . Dokaži, da eksistira tak polinom

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \text{ da velja } f(\vartheta) = |P(e^{i\vartheta})|^2, \vartheta \in \mathbf{R}.$$

Algebra

1. Abelovo grupo $(A, +)$ imenujemo deljivo, če ima enačba $nx = a$ rešitev v A za vse $a \in A$ in $n \geq 1$.

Dokaži naslednjo trditev. Sistem enačb S nad deljivo grupo A ima rešitev v A , če in samo če ima rešitev v A vsak končen podsistem iz S .

2. Grupa $(G, \cdot)$ naj bo generirana z elementi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, za katere velja $a_n = a_{n+1}^{n+1}$ pri vseh $n \geq 1$.

Dokaži, da je $(G, \cdot) \cong (Q, +)$, kjer je $(Q, +)$ aditivna grupa racionalnih števil.

Topologija

1. S naj bo krivulja $\{(\cos t, \sin t, 1/t); t > 0\}$. Ali je petlja $f(t) = (0, 1 + \cos t, 1 + \sin t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$ kontraktibilna v prostoru $\mathbf{R}^3 \setminus S$?

2. Dokaži, da se Hilbertova kocka da vložiti v prostor $\exp I$ (prostor zaprtih podmnožic enotnega intervala I s Hausdorffovo metriko).

Naloge za prvi in drugi letnik

1. Funkcija $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ naj bo $n + 1$ -krat zvezno odvedljiva na $(-1, 1)$ in naj bo $g(0) = 0$. Definirajmo funkcijo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ takole: $f(x) = g(x)/x$ za $x \neq 0$ in $f(0) = g'(0)$. Dokaži, da obstaja n -ti odvod $f^{(n)}(0)$, in ga izračunaj.

2. Na množici dvakrat odvedljivih funkcij $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, za katere velja $f(0) = f(\pi) = 0$ in ki niso identično enake 0, definirajmo funkcional

$$L(f) = \inf \{f''(x)/f(x) : 0 < x < \pi, f(x) \neq 0\}$$

Poišči maksimum funkcionala L in funkcije, na katerih doseže maksimum.

3. Naj bo A realna matrika tipa $m \times n$ in B realna matrika tipa $m \times 1$. Dokaži, da ima enačba $A^T A X = A^T B$ rešitev.

Ali lahko trdimo isto, če matriki nista realni?

4. Naj bo A simetrična, nesingularna matrika s pozitivnimi elementi. Največ koliko ničelnih elementov ima lahko matrika, inverzna k matriki A ?

Mirko Dobovišek

URESNIČEVANJE UČNEGA NAČRTA ZA MATEMATIKO V PROGRAMIH SREDNJEGA IZOBRAŽEVANJA*

1. Kaj in koliko?

Kaj naj bi poučevali pri matematiki v slovenskih srednjih šolah, sem poskušal prikazati v prejšnjem prispevku z istim naslovom. Zasnova učnega načrta je prilagojena številu ur matematike v 67 programih srednjega izobraževanja (od 105 do 542 ur) in nekaterim značilnostim sorodnih programov. Bralec bo morda utegnil pobrskati v spominu ali po papirjih. Jedro srednješolske matematike sestavlja 22 poglavij (od poglavij skupne vzgojno-izobrazbene osnove do diferencialnega in integralnega računa) in ima svojo notranjo, v glavnem linearno zgradbo. Nekatera poglavja je sicer mogoče obiti, večinoma pa manj ur matematike v programu pomeni nižjo zgradbo. V primerjavi s prej veljavnimi učnimi načrti za matematiko je v jedru nekaj novosti (npr. vektorska zasnova geometrije v ravnini, logika in statistika). Vnašanje novosti je povezano z drugačnim pogledom na nekatera tradicionalna poglavja srednješolske matematike.

Kako ustreči zahtevi »manj, pa bolj poglobljeno«? Učni načrt s preglednicami uresničevanja poglavij po letnikih in smereh izobraževanja okvirno določa obseg matematike v programih, na izvajanje pouka pa vpliva zlasti realizacija učnega načrta v učbenikih. Seveda je za uspešen pouk nujna medsebojna usklajenost učnega načrta in učbenikov. Pri nadaljnjem oblikovanju učnega načrta bo treba prav gotovo bolj razgraditi in diferencirati vzgojno-izobraževalno vsebino. Večje število ur matematike v nekaterih programih (npr. učitelj, računalništvo) omogoča obravnavo dodatnih, stroki namenjenih poglavij, v programu naravoslovno-matematična tehnologija pa bolj poglobljeno obravnavo poglavij jedra. Od tod izhaja tudi večvrstnost učbenikov za matematiko.

2. Kako?

Kako je nastajal učni načrt za matematiko, kdaj in kdo ga je oblikoval? Programsko jedro matematike je bilo pripravljeno zaradi pregleda nad celotno strukturo srednješolske matematike, da bi bilo mogoče z izborom poglavij učni načrt diferencirati glede na potrebe posameznih usmeritev (po programih in smereh izobraževanja). Vsebinska osnova za oblikovanje programskega jedra in nato učnega načrta za matematiko je bil učni načrt skupne vzgojno-izobrazbene osnove (1. letnik, 105 ur). Priprave so tekale v več delovnih skupinah tako, da je bil najprej pripravljen najširši izbor vsebin za »matematičnega tehnika« v naravoslovno-matematični usmeritvi, nato pa osnutek učnega načrta za to usmeritev. Upoštevane so bile pripombe, ki so jih v novembru 1980 posredovali DMFA SRS, VTO matematika in mehanika ter Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko. Osnutek učnega načrta za matematiko je bil v začetku vsebinsko notranje diferenciran, saj so se delovne skupine zavedale, da je težko oblikovati enoten učni načrt za vse učence, vendar taka metodologija ni bila sprejeta pri drugih predmetih in diferenciacija ni bila uresničena.

V letu 1980 se je na novo konstituirala predmetna komisija za matematiko skupne vzgojno-izobrazbene osnove (3 visokošolski učitelji, 3 srednješolski učitelji, 3 delavci Zavoda SRS za šolstvo); njene naloge seveda segajo precej pred začetek uvažanja usmerjenega izobraževanja. Predmetna komisija je s problematiko pouka matematike seznanila Strokovni svet SR Slovenije za vzgojo in izobraževanje, ta pa je že v februarju 1981 sprejel dopolnitve učnega načrta za matematiko skupne vzgojno-izobrazbene osnove. Spremembe zmanjšujejo abstraktno obravnavo posameznih poglavij, vendar še ohranjajo vektorsko zasnovano geometrijo v ravnini.

V aprilu 1981 je v okviru priprave osnutkov vzgojno-izobraževalnih programov redakcijska skupina za predmet matematika (3 srednješolski učitelji, 2 delavca Zavoda SRS za šolstvo) na osnovi števila ur matematike v predmetnikih pripravila 13 različic učnega načrta in jih sporočila strokovnim svetom posebnih izobraževalnih skupnosti. Programsko jedro in učni načrt za matematiko je sprejela komisija za pripravo programa za naravoslovno-matematično usmeritev. Komisija se je

* Članek je nadaljevanje prispevka istega avtorja v Obzorniku za matematiko in fiziko letnik 30 (1983), št. 4, dopolnjuje razpravo ob okrogli mizi na letošnjem seminarju DMFA Slovenije in je namenjen boljši informiranosti članov.

v letu 1982 preoblikovala v strokovni svet Izobraževalne skupnosti Slovenije, ki je dolžan obravnavati in reševati problematiko pouka matematike v srednjem izobraževanju. V tej komisiji oz. strokovnem svetu ima matematična stroka ves čas svojega predstavnika. V novembru 1982 je bil strokovni svet seznanjen z razhajanjem med učnim načrtom za matematiko in učbenikom Legiša, Štalec, Zakrajšek — Matematika 2, v katerem ni obravnavano poglavje Uvod v infinitezimalni račun, ter z mnenjem Odbora za študijska in študentska vprašanja VTO matematika in mehanika, ki podpira klasično zasnovo geometrije v skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi (brez vektorjev) in opustitev poglavja Uvod v infinitezimalni račun. Zato je bila predlagana prilagoditev uresničevanja učnega načrta učbenikoma Matematika 1 in Matematika 2 navedenih avtorjev. V letu 1983 je strokovni svet večkrat razpravljал o učbenikih F. Križaniča Matematika, drugo in tretje berilo (za naravoslovno-matematično usmeritev) in sprejel sklep o njuni začasni ustreznosti za dobo dveh let. O prilagoditvah uresničevanja učnega načrta je Zavod SRS za šolstvo obveščal šole pa tudi neposredno učitelje matematike na seminarjih in aktivih.

3. Spremljanje programov in prvi rezultati

V šolskih letih 1981/82 in 1982/83 je teklo spremljanje pouka matematike v 1. in 2. letniku v programih srednjega izobraževanja na vzorcu 21 šol. Spremljali smo učni načrt, učbenike in okoliščine poučevanja. Na presojanje učnega načrta so seveda vplivali učbeniki (saj je vsak učbenik le ena od mogočih realizacij učnega načrta).

V 1. letniku je bila namenjena posebna pozornost neskladju med učnim načrtom in učbenikom pri obravnavi geometrije. Pokazalo se je, da je učbenik Legiša, Štalec, Zakrajšek — Matematika 1 za mnoge učence še vedno prezahteven, da pa je za določene programe vsebina učbenika le premalo poglobljena. Zaradi velikega razpona v predznanju in sposobnostih učencev morata biti učni načrt in učbenik ustrezno notranje diferencirana, pri nekaterih poglavjih pa bi bila potrebna tudi variantna obravnava vsebine (npr. geometrija v ravnini). Evalvacijska skupina za matematiko (1 visokošolski učitelj, 3 srednješolski učitelji, 2 delavca Zavoda SRS za šolstvo), ki ji je bilo naloženo spremljanje uresničevanja učnega načrta, je predlagala opustitev poglavja o vektorjih ter naslednjo spremembo vrstnega reda in nazivov temeljnih poglavij matematike skupne vzgojno-izobrazbene osnove: 1. Izjave. Množice. Preslikave. 2. Kolobar. 3. Obseg. 4. Funkcije in enačbe. 5. Geometrija v ravnini (s pripombo, da je v programu naravoslovno-matematična tehnologija izvedljiv zahtevnejši vektorski pristop h geometriji v ravnini). Predlog evalvacijske skupine je obravnavala in sprejela tudi predmetna komisija za matematiko skupne vzgojno-izobrazbene osnove.

V 2. letniku je v učbeniku Legiša, Štalec, Zakrajšek — Matematika 2 obravnava vektorjev povezana s trirazsežnim prostorom, obravnava metrične geometrije pa je glede na veljavni učni načrt precej razširjena. V učbeniku je opuščeno poglavje Uvod v infinitezimalni račun. Evalvacijska skupina je predlagala prenos poglavja o vektorjih v 2. letnik kot 6. poglavje učnega načrta ter spremembo naziva poglavja Trirazsežni prostor v Merjenje v geometriji. V okviru diferenciacije vsebine učnega načrta naj bi se poglavje Uvod v infinitezimalni račun opredelilo kot informativno v vseh programih, razen v programu naravoslovno-matematična tehnologija. Predlagane spremembe bodo uveljavljene deloma z izvedbenimi navodili šolam, deloma pa z globljimi korekturami programov.

V 3. in 4. letniku poteka spremljanje uresničevanja nadaljnjih poglavij učnega načrta, med njimi je novost poglavje iz logike, pa tudi pot prek statistike v verjetnostni račun. Avtorji učbenikov so pri teh poglavjih posvetili precej pozornosti zlasti notranji diferenciaciji vsebine. Vsekakor ni pričakovati prav lahke uveljavitve novega. Veliko pa še naprej lahko prispevajo učitelji, ki so že doslej vložili dosti navora v uresničevanje učnega načrta.

Oblikovanje učnega načrta je stalen proces, ki mora slediti razvoju matematike in potrebam družbe. Pri tem ne gre zanemariti povezanosti matematike z različnimi strokovnimi področji. Matematika je namenjena tudi uporabi in najbrž uporabo tudi potrebuje.

Težave pri uresničevanju učnega načrta niso majhne, s skupnimi močmi jih poskušajmo odpraviti.

Aleksander Cokan

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Od 4. do 7. aprila 1984 je bilo v Beogradu 17. mednarodno tekmovanje študentov matematike. V ljubljanski ekipi so bili tokrat Miran Černe iz prvega, Robert Bakula iz drugega in Aleksander Simonič iz tretjega letnika. Tekmovalci tretjega in četrtega letnika so lahko kot običajno izbirali dve področji, s katerih so reševali naloge, in sicer po eno področje iz naslednjih dveh skupin: realna analiza, funkcionalna analiza in algebra ter programiranje, numerična analiza, diferencialne enačbe, funkcije kompleksnih spremenljivk, topologija in verjetnostni račun.

O izboru nalog, te so priložene, si bo bralec lahko sam ustvaril mnenje; podpisani mislim, da so bile med posameznimi področji prevelike razlike v težavnosti. Nalogam iz programiranja bi lahko očitali nejasnost, zaradi katere je celo prišlo do neljubih zapletov pri popravljanju, nalogam iz numerične analize pa to, da so se že pojavile (vsaj v podobni obliki) na prejšnjih tekmovanjih.

Končni vrstni red ekip je bil naslednji (v oklepaju so navedene točke, možnih je bilo 300): Budimpešta (199), Sarajevo (145), Praga I (111), Sofija (97), Beograd I (84), Novi Sad (83), Amsterdam I (81), Praga II (64), Beograd II (62), Szeged (62), Ljubljana (56), Zagreb I (53), Titograd (35), Rostock (30), Stockholm (15), Zagreb II (11), Beograd III (8), Amsterdam II (7), Priština (6).

Od posameznikov je bil v konkurenci prvih in drugih letnikov najboljši Gabor Tardos iz Budimpešte, pri višjih letnikih pa Jan Nehovar iz Prage.

Naloge za 1. in 2. letnik

1. Naj bo $\omega(n)$ število nerazcepnih faktorjev naravnega števila $n \geq 2$, to pomeni

$$\omega(p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}) = a_1 + \dots + a_s$$

kjer so $p_1, \dots, p_s$ praštevila. Naj bo nadalje

$$S(x) = \{n \in \mathbf{N}, n \geq x, \omega(n) \equiv \omega(n+1) \pmod{2}\}$$

za $x \geq 2$. Dokaži, da je $\text{card } S(x) \geq x/10$.

2. Naj bo funkcija $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ zvezna in surjektivna. Dokaži, da obstaja podmnožica $A \subseteq [a, b]$, taka, da je na njej zožitev $f|_A: A \rightarrow [c, d]$ monoton in surjektivna.

3. Naj bo (x_n) zaporedje definirano z $x_0 > 0$ in $x_{n+1} = \arctg x_n$. Dokaži, da gre $x_n \sqrt{n}$ proti $\sqrt{3/2}$ ko gre $n \rightarrow \infty$.

4. Funkcija $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ zadošča pogoju

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 z_i z_j f(t_i - t_j) \geq 0$$

za poljubne $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ in $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$. Naj bo f zvezna v 0. Dokaži, da je potem enakomerno zvezna na $\mathbf{R}$.

Realna analiza

1. Ugotovi, ali obstaja množica $E \subseteq [-1, 1]$, taka, da je $-E = E$, $m(E) = 0$ in $E + E$ ni Lebesguovo merljiva množica (m je Lebesguova mera na $\mathbf{R}$).
2. Dana je funkcija $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, taka, da je $f(0) = 0$, $f(1/n) = (-1)^n$, in da je monotona na intervalih $[1/(n+1), 1/n]$ za vsak $n \in \mathbf{N}$. Ugotovi, ali ima funkcija $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x^\lambda f(x)$, $\lambda > 0$, omejeno variacijo na $[0, 1]$.

Funkcionalna analiza

1. Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev. Če je $A: l^2 \rightarrow l^2$ omejen linearen operator in za vsak $x \in l^2$ velja $\|Ax\| + \|A^*x\| \geq \|x\|$, potem velja vsaj ena od treh trditev:

- (i) A je injektiven,
- (ii) A ima zaprto zalogo vrednosti in
- (iii) zaloga vrednosti A je gosta.

2. Linearen operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[0, 1])$ je pozitiven, če iz $x \geq 0$ sledi $Ax \geq 0$. Imejmo zaporedje pozitivnih operatorjev A_n in naj velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n e_i = e_i, \quad \text{za} \quad i = 0, 1, 3$$

kjer je $e_i(t) = t^i$. Dokaži, da je potem $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = x$ za vsak $x \in \mathcal{C}[0, 1]$.

Algebra

1. Naj bo M množica takih funkcij $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, za katere je

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ za neke } a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = 1$$

Dokaži ali ovrzi: grupa $(M, \circ)$ je končno generirana (o pomeni kompozitum funkcij).

2. Naj bo G grupa, v kateri je $f(x) = x^3$ injektivni homomorfizem in H njena podgrupa, taka, da velja izjava

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall y \in H)(\exists x \in H) x^n = y$$

Dokaži, da obstaja podgrupa F grupe G , taka, da je $G = H \oplus F$ ($\oplus$ pomeni direktno vsoto grup).

Programiranje

1. Koeficienti polinoma

$$P = a_6 X^6 + a_5 X^5 + \dots + a_0$$

so skalarji, X pa je matrika. V nekem programu se ta polinom večkrat izračunava za različne matrike X . Sestavi proceduro, ki izračuna vrednost tega matričnega polinoma s tremi (ali manj) matričnimi množenji.

2. Ena od metod za približno reševanje začetnega problema za navadno diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ je opisana z naslednjimi formulami

$$u'_{n+1} = f(x, u_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, u_n) (u_{n+1} - u_n), \quad u_{n+1}(a) = y_0$$

$$v'_{n+1} = f(x, u_n) + (f(x, v_n) - f(x, u_n)) (v_{n+1} - u_n) / (v_n - u_n), \quad v_{n+1}(a) = y_0$$

Če so izpolnjeni določeni pogoji za rešitvi $u_n(x)$ in $v_n(x)$ zgornjih linearnih diferencialnih enačb, velja

$$u_0(x) < u_n(x) < u_{n+1}(x) < y(x) < v_{n+1}(x) < v_n(x) < v_0(x)$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$ Ob predpostavki, da so funkcije $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $u_0(x)$ in $v_0(x)$ dane s podprogrami, opiši algoritem za izračun aproksimacij $u_n(x)$ in $v_n(x)$ na mreži

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k, \quad \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - x_{i-1}| \leq h$$

s točnostjo ε . Če točnost po 10 iteracijah ni dosežena, je treba prekiniti računanje. Pri tem so a , h , k in ε vnaprej dani.

Numerična analiza

1. Ali obstaja kvadratura formula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A \sum_{i=1}^8 f(x_i) + R(f)$$

pri čemer je $A \in \mathbf{R}$, $x_1, \dots, x_8 \in [0, 1]$, ki je točna za polinome stopnje, manjše ali enake 8?

2. Za reševanje sistema linearnih enačb

$$Au = f, \quad A = A_1 + A_2$$

A_1 in A_2 sta pozitivno definitni, je predlagan naslednji iterativni postopek

$$\begin{aligned} u^{i+1/2} &= u^i - \tau(A_1 u^{i+1/2} + A_2 u^i - f) \\ u^{i+1} &= u^{i+1/2} - \tau(A_1 u^{i+1/2} + A_2 u^{i+1} - f) \\ i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Razišči konvergenco tako dobljenih približkov v odvisnosti od parametra $\tau \in \mathbf{R}$.

Diferencialne enačbe

1. Vzemimo diferencialno enačbo

$$x^2 y'' + (a x^k - b(b - 1)) y = 0, \quad a, b, \quad k \in \mathbf{R}, \quad b \neq 1/2$$

Za $k = -4b + 2$ ali $k = 4b - 2$ z ustrezno substitucijo enačbo prevedi na linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Nato najdi splošno rešitev za $a = 4$ in $b = 3/2$.

2. Najdi splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + \frac{4x}{1+x^2} y' + \frac{4}{(1+x^2)^4} y = 0$$

Funkcije kompleksnih spremenljivk

1. Naj bo f analitična na $U = \{z, |z| \leq 1\}$. Dokaži, da je za $0 < p < \infty$

$$\frac{1}{\pi} \int \int_{|z| < 1} |f(z)|^{2p} dx dy \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(e^{i\vartheta})|^p d\vartheta \right]^2$$

2. Naj bo $S(z) = \exp((z+1)/(z-1))$ in

$$l(r) = \int_0^{2\pi} S'(r e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad 0 < r < 1$$

Dokaži, da je $\liminf_{r \rightarrow 1-0} \sqrt{1-r} l(r) > 0$.

Topologija

1. Naj bo X nešteven metrični prostor. Dokaži, da obstaja zvezna funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, taka, da je $f(X)$ neštevna množica.

2. Ali obstaja navzdol polzvezna dekompozicija enotne krogle v evklidskem prostoru, taka, da je vsak član dekompozicije množice treh nekolinearnih točk?

Verjetnostni račun

1. Naj bo X_{nk} , $n = 1, 2, 3, \dots$, $k = 1, 2, 3, \dots$ dvojno zaporedje slučajnih spremenljivk in naj bo h_{nk} karakteristična funkcija X_{nk} . Pokaži, da gre $\max_{1 \leq k \leq n} P(|X_{nk}| \geq \varepsilon)$ proti 0, ko gre $n \rightarrow \infty$ natanko takrat, ko gre proti 0 $\max_{1 \leq k \leq n} |h_{nk}(u) - 1|$, in v tem primeru je konvergenca enakomerna.

2. Naj bo (ξ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih standardizirano normalno ($N(0, 1)$). Naj bo

$$T(m, n) = \sup_{0 \leq t \leq \pi} \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin k t}{k} \xi_k(\omega) \right|$$

Dokaži, da je

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} T(2^n, 2^{n+1}) < \infty\right) = 1$$

Janko Gravner

NAVODILO AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Rokopis mora biti natipkan v dveh izvodih (drugi izvod je lahko kseroks kopija) na belem papirju formata A-4, z dvojnimi razmikom in vsaj 2 cm širokim robom na vseh štirih straneh. V tekstu morajo biti vse besede, ki naj bodo postavljene kurzivno, in vsi matematični simboli podčrtani z valovito črto. Besede in simboli, ki morajo biti stavljeni polkrepko, pa podčrtani z ravno črto. Podrobnejša navodila so v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 62—64. Pri korekturah na krtačnih odtisih uporabljajte dogovorjene oznake.

POGOVOR O SKUPNIH PROGRAMSKIH JEDRIH IN PROBLEMIH POUKA MATEMATIKE IN RAČUNALNIŠTVA

Po zaključku seminarja o Računalniški matematiki smo se zbrali na pogovor o skupnih programskih jedrih in problemih pouka matematike in računalništva. Kljub sobotnemu popoldnevu (11. 2. 1984) je bilo udeležencev kar dovolj. S tem pogovorom smo tudi poravnali dolg z občnega zbora v Cerknem, češ da bomo strokovno razpravo o programskih jedrih še nadaljevali. Po informaciji o trenutnem stanju programskih jeder (podala sta jo A. Cokan in I. Mulec) in krajši razpravi smo ponovno prišli do mnenja, da so sklepi, sprejeti na občnem zboru (objavljeni so bili v Delu in OMF št. 1, t. l.), še nadalje veljavni in predstavljajo stališče našega društva.

V drugem delu pogovora, ki je bil kar živahen, je bil govor o problemih pouka obeh strok: matematike in računalništva. Pogovora so se udeleževali kolegi, ki uče na osnovnih šolah, srednjih šolah in na fakultetah. Sprejeli smo tele predloge, ki naj jih upravni odbor društva posreduje strokovnemu svetu in delegatom v ustreznih odborih:

1. V srednjem izobraževanju je preveč predmetov, mnoge predmete bi lahko brez škode odpravili, nekatere pa združili v večjo enoto. Učenci imajo preveč ur šole na teden in zato premalo časa in volje za delo doma. Zaradi prevelikega števila predmetov je preverjanje znanja skoraj nemogoče — opravlja se le v pisni obliki in to neglede na značaj predmeta.

2. V razredih je preveč učencev in je tako imenovana notranja diferenciacija pouka praktično nemogoča.

3. Nujno je treba sprostiti učni načrt tako za predmet matematiko kot tudi računalništvo, torej vsebinsko zmanjšati snov. Večina učiteljev je pri sedanjem učnem načrtu v veliki časovni stiski. V programih je veliko preveč abstraktnih informacij in predvsem preveč snovi, ki lahko počaka na kasnejši, univerzitetni študij. Učenci se tako navadijo le na površno razumevanje, trdnega znanja osnov pa nimajo. Dobro predelati snov (ne le bežati skozi snov) se da le tako, da bi bilo snovi na vseh usmeritvah za tretjino manj. Zato so bili podani pomisleki ob uvedbi še novih specialnih poglavij (npr. logika ipd.).

4. Pouk računalništva naj bi ne bil samo teoretičen, zato je za pametno izvedbo tega pouka nujno omogočiti šolam nakup manjših računalnikov.

Z upoštevanjem navedenih predlogov bi vsaj malo izboljšali stanje pouka obeh predmetov.

Gabrijel Tomšič

NOVE KNJIGE

MIZORI-OBLAK P., MATEMATIKA, I. in II. del, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1983, 756 strani.

Knjigi predstavljata prvi in drugi del učbenika, tretji del je v pripravi. Že v uvodu zvemo, da delo nima namena biti učbenik, po katerem bi lahko študent samostojno študiral, temveč je le sestavni del učnega procesa, katerega nedeljivi del so predavanja.

Tako je pred vsakim poglavjem kratka ponovitev definicij, formul in osnovnih izrekov, sledijo pa številne dobro izbrane naloge z izdelanimi rešitvami in izčrpnimi pojasnili. Kjer je to potrebno, so dodane pregledne slike. Tekst je natipkan in razmnožen v tehniki multilith, kar je izdajo nedvomno pocenilo, vendar ne na račun kvalitete, saj je knjiga zelo lepo berljiva.

Prvi del obsega snov, ki se predava na strojni — in drugih tehničnih fakultetah — v prvem letniku: linearno algebro in analizo funkcij ene spremenljivke z odvodom in integralom. Drugi del zajema tista poglavja, ki sodijo večinoma v drugi letnik: vrste, funkcije več spremenljivk, navadne diferencialne enačbe, mnogoterni integral, diferencialno geometrijo, vektorsko analizo.

Ker je v delu sistematično zbrano obsežno gradivo, bo prav gotovo koristno za študente tehnike in naravoslovja, saj v slovenskem jeziku še nimamo tako obširne zbirke nalog iz višje matematike.

Peter Petek

SAVELOV A. A., Ravninske krivulje, Školska knjiga, Zagreb 1979, 383 str.

Delo sta iz ruščine prevedla (original je iz l. 1960) in opremila z opombami Branko Kučinić in Slavko Hozjan.

Človeka so zanimala krivulje že v prazgodovini. Gledanje nanje se je bistrilo, vsaka zgodovinska epoha se odraža tudi v gledanju (teoriji) krivulj. Pričujoče delo je le ena od odličnih enciklopedij kosoma gldakih krivulj, ki se pa naslanja na klasična dela z začetka stoletja (G. Loria, H. Wieleitner). Izbor v zbirki je pogojen s tehničnim napredkom zadnjih dveh stoletij. Delo je namenjeno študentom tehnike, matematikom in je dostopno že mladini, ki pozna uvod v matematično analizo. Matematiku nudi enciklopedija lepo priložnost, da samostojno povezuje in razširi razne ideje za oblikovanje krivulj, če je treba tudi z uporabo računalnika. Upamo, da bosta prevajalca to delo dopolnila še s podobno enciklopedijo izbranih prostorskih krivulj in ploskev.

Ivan Pucelj

BRIESKORN E., KNÖRER H., Ebene algebraische Kurven, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, Boston 1981, XI + 964 str.

Ta zapis predavanj je namenjen matematikom. Pisca obravnavata krivulje v kompleksni projektivni ravnini; tako dobi bralec globlji pogled na klasično gradivo, kot ga daje npr. enciklopedija Savelova. Prvi avtor je znan topolog, zato je za zainteresiranega bralca najzanimivejši študij njegovega opisa raziskav krivulj z razrešitvijo singularnosti, kar predstavlja v knjigi tretjino vsega gradiva. Delo poživljajo originalne zgodovinske iskricice, npr. Newtonova pisma in sporočila, Artinove kite, primeri vozlov iz Ashleyeve zbirke, novejši nerešeni problemi v zvezi z grupami kit in Stallingsovimi vozli. Ta mojstrski zapis, ki ubrano povezuje klasično algebrske geometrije s sodobnimi problemi, bo koristen tudi podiplomskemu študiju.

Ivan Pucelj

GALLAVOTTI G., The Elements of Mechanics, New York, Heidelberg, Berlin, Springer 1983, 575 str.

Knjiga tudi po avtorjevih besedah ni elementarna knjiga o mehaniki, ampak obravnava osnovne aksiome mehanike z matematičnega stališča. Branje je zato za povprečnega fizika razmeroma težavno, ker obravnava mehaniko v obliki izrekov in dokazov. Knjiga ima pet poglavij: Fenomenološka realnost in modeli; Kvalitativni vidiki enodimenzionalnega gibanja; Sistemi z mnogimi prostostnimi stopnjami, teorija vezi, analitična mehanika; Posebni mehanski sistemi; Stabilnost disipativnih in konzervativnih sistemov. Na koncu je še vrsta dodatkov, ki vsebujejo daljše matematične dokaze.

Priznati moram, da mi ob prvem pregledu knjiga ni bila všeč, ker vsebuje precejšnje število sicer znanih izrekov, vendar napisanih v strogem matematičnem jeziku, ki fiziku ni najbolj domač. Ob ponovnem skrbnejšem prebiranju pa se je večina pomislekov razblinila. Čeprav mi je avtorjeva filozofija še vedno v marsičem tuja, je na koncu vendarle treba priznati, da mu je uspelo strnjeno povezati analitično mehaniko v urejeno in logično celoto. Težki matematični jezik je razredčen z »opažanji«, v katerih avtor prijazno in z dobro izbranimi primeri pojasni pomen izreka, ki ga namerava obravnavati.

Prva tri in del četrtega poglavja obravnavajo snov, ki je bolj ali manj standardna za klasične učbenike analitične mehanike, vendar, kot že rečeno, na nestandarden način. Zanimivo je npr. obravnavanje vezi, ki je v tej knjigi globlje, kot sem ga bil navajen doslej. Del četrtega in peto poglavje obravnava stabilnost mehanskih sistemov v splošni obliki in vsebuje zanimive izreke o sistemih, ki dopuščajo manjše število konstant gibanja, kot je število prostostnih stopenj. Ravno ti zanimivi izsledki (ki so se že pojavljali v literaturi, vendar so tu primerno zbrani) verjetno opravičujejo avtorjev način obravnavanja klasične mehanike. Knjiga je zato v celoti zanimiv prispevek, ki pogloblja matematično strukturo klasične mehanike in bo zanimiva za bralca, ki ga to področje posebej zanima.

Andrej Čadež

GIAQUINTA M., Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Annals of mathematics studies 105, Princeton university press. Princeton 1983, 298 + 8 str.

Najpreprostejša naloga klasičnega variacijskega računa je: poišči funkcijo, pri kateri zavzame funkcional

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

minimum, pri čemer sta predpisani vrednosti funkcije na krajiščih a in b . Če ima funkcional minimum pri zvezno odvedljivi funkciji y , funkcija F pa je zvezno parcialno odvedljiva na drugo in tretjo spremenljivko, potem mora biti diferencial funkcionala Φ

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) z(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) z'(x) \right] dx \quad (2)$$

enak 0 za vsako zvezno odvedljivo funkcijo z , ki zadošča pogojema $z(a) = z(b) = 0$. Iz enačbe (2) izpeljemo Eulerjevo enačbo

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3)$$

Knjiga obravnava večdimenzionalni analog funkcionala (1):

$$\Phi(u) = \int_M F \left(x_1, \dots, x_m; u_1, \dots, u_n; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) dx \quad (1')$$

kjer je F vektorska funkcija z N komponentami, M primerna množica v $\mathbf{R}^m$, dx pa je m -dimenzionalna Lebesguesova mera.

Če zavzame funkcional (1') pri vektorski funkciji u minimum, potem mora biti izpolnjena enačba podobna enačbi (2). Imenujemo jo šibka oblika Eulerjeve enačbe. Če je F dovolj gladka, sledi iz te šibke Eulerjeve enačbe običajna Eulerjeva enačba, ki je v našem primeru sistem N parcialnih diferencialnih enačb drugega reda

$$\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial u_j} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3')$$

V I. poglavju je dokazano, da ima funkcional (1') pri dokaj milih pogojih na funkcijo F minimum v prostoru H_2^1 Soboljeva, tj. rešitev u je s kvadratom integrabilna, njeni parcialni odvodi v smislu teorije distribucij pa so tudi s kvadratom integrabilni.

Poglavja od drugega do devetega so posvečena reševanju vprašanja: pri kakšnih pogojih na funkcijo F , dimenziji n in N je funkcija, ki da funkcionalu (1') minimum, odvedljiva enkrat ali celo večkrat tudi v navadnem pomenu besede.

Ker taka funkcija zadošča tudi sistemu parcialnih diferencialnih enačb (3'), je zgornja naloga poseben primer naloge: pri kakšnih pogojih je distribucijska rešitev sistema parcialnih diferencialnih enačb tudi rešitev v navadnem smislu ali celo večkrat zvezno odvedljiva funkcija.

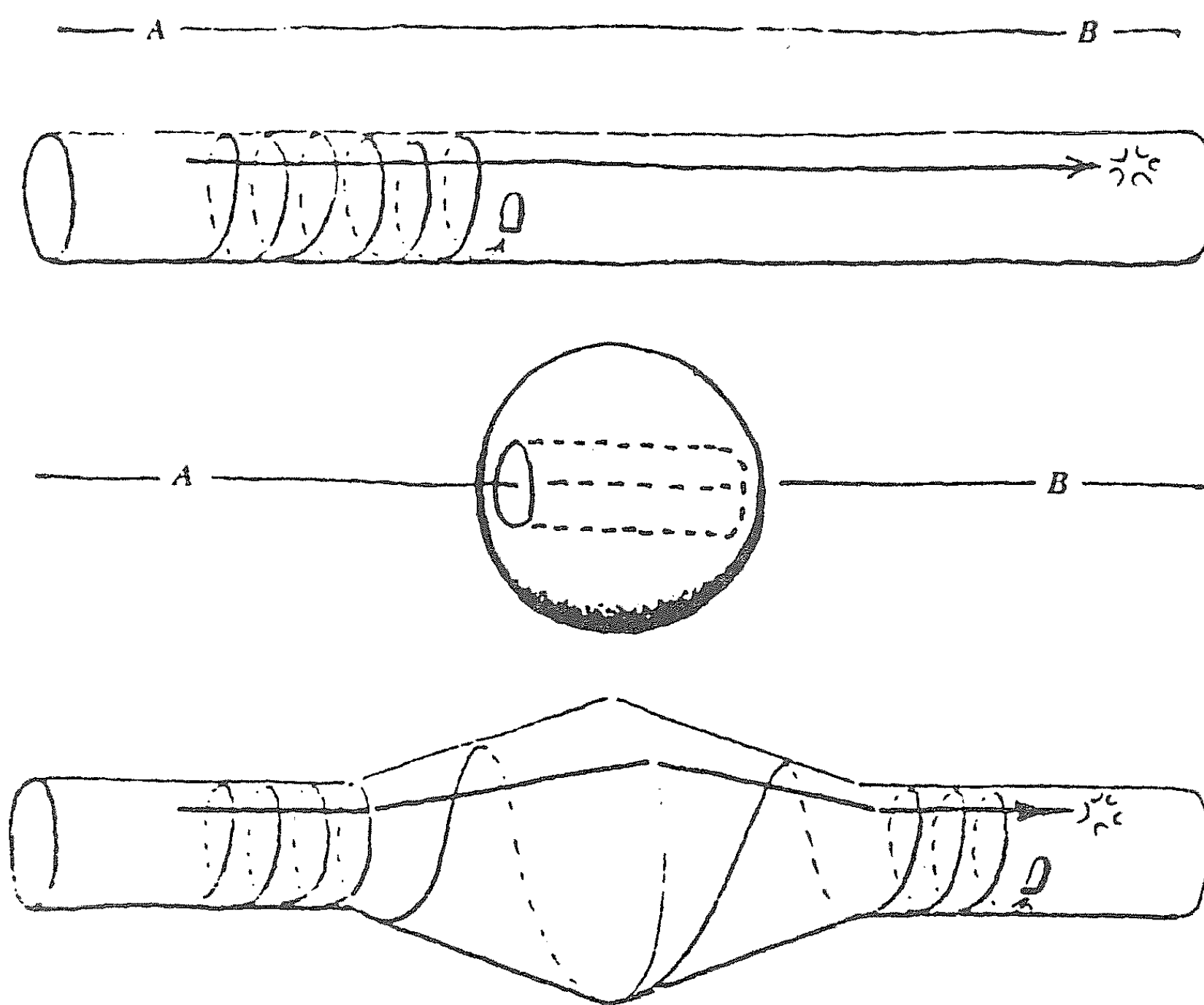
Knjiga je napisana pregledno, dokazi so skrbno izdelani. Podaja pregled metod za reševanje zastavljenega problema. Ker predpostavlja poznavanje osnov teorije distribucij in prostorov Soboljeva, je v glavnem dostopna šele na nivoju tretje stopnje.

Omenimo naj še, da snov knjige izhaja iz poskusa odgovoriti na 19. in 20. Hilbertov problem iz leta 1900.

Anton Suhadolc

Med množico knjig o relativnosti se Lewisa C. Epsteina Ponazorjena relativnost odlikuje v več pogledih. Napisana je za nefizike in shaja skoraj popolnoma brez enačb. Njeno težišče je na zelo nazornih risbah. Ne izogne se splošni teoriji relativnosti kot večina knjig te vrste. Glavna posebnost pa je osnovni model, ki ga uporablja: Vsa telesa se gibljejo vselej natanko s svetlobno hitrostjo. S to »zgodbo ali mitom« je zares mogoče ponazoriti podaljšanje časa, skrčenje dolžin in druge nasledke teorije relativnosti. Telo, ki za opazovalca po starem miruje, se giblje pač samo v času. Telo, ki bi se gibalo za opazovalca po starem s svetlobno hitrostjo, se pač giblje samo v prostoru. V splošnem pa ima ravninski vektor nove hitrosti z velikostjo c komponento v času in komponento v prostoru. Tako lahko opazujemo le nekakšno skrčeno senco v prostoru, če se telo giblje po starem. S prostorom je tu mišljena smer gibanja telesa, torej vzdolžna smer. Prečne smeri ni mogoče vrisati v diagram, vsaj ne pri gibanju po treh prostorskih razsežnostih. Kar velja za čas in prostor, velja tudi za polno energijo (»dinamično maso«) in gibalno količino.

Sprva je bralec nekoliko presenečen nad tveganim pogledom, a se nanj hitro navadi. Prepriča ga njegova preprostost in nazornost in to, da je mogoče z njim skladno pojasniti nasledke teorije relativnosti. Zave se, da je v fiziki v rabi veliko modelov, ki jih presoјamo zgolj po njihovi uspešnosti. Avtor ima posebno zmožnost, da naredi zahtevne stvari prozorne in »razumljive«. Bogastvo nazornih in duhovitih zamisli, posebno v splošni teoriji relativnosti, pritegne tudi fizika. Tako na primer pojasni nazorno in sprejemljivo oba vzroka, zaradi katerih se svetloba z zvezde odkloni pri prehodu mimo Sonca.



Značilni sliki iz poglavja o uvitem prostoru: »Risba kaže v prostoru-času pot izstrelka in fotona med A in B v praznem prostoru brez gravitacije. Dolžina poti fotona, ki potuje samo po prostoru, določa krajevni razmik med A in B « (zgoraj). »Risba kaže v prostoru-času pot izstrelka in fotona med A in B , če je med njima Zemlja. Pot fotona, ki potuje samo po prostoru, se podaljša. Zaradi prehoda skozi Zemljo je treba nekako povečati krajevni razmik med A in B « (spodaj). (Odebelina na cevi ne bi smela imeti robov; z robovi je narisana, ker si je tako mogoče narediti iz papirja.) Moto poglavja se glasi: »Razmere niso bolj čudne, kot si zamišljate, so bolj čudne, kot si lahko zamišljate.«

Nekaj svežosti Epsteinovega prijema začutimo že iz naslovov in podnaslovov poglavij: Načelo relativnosti (v glavnem o zgodovini ideje o gibanju), Osrednji problem (v glavnem o svetlobni hitrosti), Pandorina skrinjica (v glavnem o desinhronizaciji časa in njenih posledicah), Merjenje posledic (v glavnem o tem, kako natančno izračunati učinek), Mit (v glavnem o tem, zakaj se prostor skrči, čas upočasni in zakaj se ne morete gibati hitreje kot svetloba), Veliki pok (v glavnem o sevanju iz ognjene krogle, robu vesolja in kozmološkem načelu za kozmologijo velikega poka), $E = mc^2$ (v glavnem o masi energije in o tem, iz česa je masa), Uganka (v glavnem o spreminjanju svetlobne hitrosti), Vzrok gravitacije (v glavnem o tem, kako ukrivljeni prostor-čas povzroča gravitacijo), Uviti prostor, Konci prostora in časa (v glavnem o trganju in spajanju nebes).

Knjižico toplo priporočam tudi slovenskim bralcem. Če ne bi bilo težav z deviznimi avtorskimi pravicami, bi predlagal, da jo kratkomalo prevedemo. John Gribbin konča zelo pohvalno poročilo v New Scientistu z nasvetom, naj prebere knjigo vsakdo, ki si želi kratek povzetek Einsteinovih zamisli.

Janez Strnad

ALEXITS G., Approximation Theory (Selected Papers), Akadémiai Kiadó, Budapest 1983, 298 str.

Knjiga je zbirka 34 izbranih člankov znanega madžarskega matematika Georga Alexitsa. Ti članki vsebujejo njegove rezultate v teoriji aproksimacij, teoriji multiplikativnih funkcijskih sistemov in nedavne prispevke o funkcijskih vrstah. Vsi članki razen enega so ponatisnjeni v izvirni obliki. Izjema je prevod enega članka iz madžarskega v angleški jezik. Poleg člankov vsebuje knjiga kratek življenjepis avtorja in opis njegovega znanstvenega delovanja ter popolno bibliografijo. Na koncu knjige so dodane opombe o odmevnosti navedenih člankov in seznam napak, ki so bile pozneje odkrite v originalih.

Zvonimir Bohte

KOZAK J., Podatkovne strukture in algoritmi, DMFA SRS 1984, 484 str. (Izbrana poglavja iz matematike in računalništva ; 16.) Cena 1750.— din (1400.— din).

Slovensko računalništvo je pridobilo s Kozakovim učbenikom pomembno delo, ki je zapolnilo vrzel na področju algoritmov in podatkovnih struktur. Glede na to, da je algoritem osrednji pojem računalništva, je Kozakovo delo za računalniško misel pri nas še posebno pomembno. Doslej so imeli študentje matematike in računalništva na voljo le Vilfanov prevod Wirthovih knjig z naslovom Računalniško programiranje, kjer pa je težišče na metodologiji programiranja. Kozakov učbenik se zgleduje bolj po knjigah Horowitza in Sahnija Fundamentals of Data Structures in Fundamentals of Computer Algorithms, kjer je poudarek prav na podatkovnih strukturah in algoritmihih.

Knjiga sestoji iz štirih poglavij. V kratkem uvodu seznani bralca z namenom knjige in z osnovnimi pojmi. V poglavju o podatkovnih strukturah so obdelani sklad, vrsta, urejeni seznam, drevo, graf in tabela simbolov. Najobsežnejše je poglavje o algoritmihih, v katerem najdemo metode deli in vladaj, požrešno metodo, dinamično programiranje, sestopanje ter razvejevanje in omejevanje. Poglavje sklene razmislek o spodnji meji zahtevnosti. Knjigo končujejo koristni dodatki: rešitve izbranih nalog, seznam opisanih podatkovnih struktur in algoritmov, literatura in stvarno kazalo.

Menim, da smo s Kozakovim učbenikom dobili knjigo, ki jo bodo veseli študentje matematike in računalništva, pa tudi starejšim kolegom bo prišla prav, saj bodo v njej našli marsikaj, kar potrebujejo v praksi.

Tomaž Pisanski