

1983

Letnik 30

2

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Rojstna  
hiša  
JURIJA  
VEGE



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1983

**Uredniški odbor:** France Avsec (gim. Kranj), Robert Blinc (FNT), Alojz Kodre (FNT), **Edvard Kramar** — glavni urednik (FNT), Peter Legiša (FNT), Jože Lep (VTŠ Maribor), Anton Moljk (FNT), Mitja Rosina (FNT), Tomaž Skulj (Iskra Ljubljana), **Janez Strnad** — odgovorni urednik, urednik za fiziko (FNT), **Anton Suhadolc** — urednik za matematiko (FNT), **Ciril Velkovrh** — urednik (FNT), Ivan Vidav (FNT). Jezikovni pregled Marija Janežič. Slike je narisal Miha Štalec.

**Naročnina:** za posameznike 350.— din (za člane društva je že vračunana člana-rina), za dijake in študente 175.— din, za ustanove in podjetja 600.— din, za tujino 20 \$, posamezna številka 100.— din, dvojna številka 200.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska c 19, p. p. 6, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

**Tisk:** Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1983 DMFA SRS — 628  
YU ISSN 0473—7466

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

## VSEBINA

### Članki

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| Infinitezimali (Bojan Magajna) . . . . .                                   | 33 |
| Primer uporabe popolnega sistema s štirimi dogodki (Cveto Pohar) . . . . . | 42 |

### Dopisi

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Glas s srednje šole ali kdaj bo že konec z nerodno besedo (Marijan Prosen) . . . . . | 49 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|

### Novice

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| Kaj je eksergija? (Janez Strnad) . . . . .                     | 50 |
| Ob stoletnici smrti Viljema Ogrinca (Marijan Prosen) . . . . . | 55 |

### Domače vesti

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Prof. Jože Povšič 75-letnik (Alojzij Vadnal) . . . . .                                           | 56 |
| Tekmovanje študentov matematike v Beogradu (Mirko Dobovišek) . . . . .                           | 57 |
| Obvestilo uredniškega odbora (Janez Strnad, Anton Suhadolc) . . . . .                            | 59 |
| Novi člani društva v letu 1982 (Ciril Velkovrh) . . . . .                                        | 60 |
| Vabilo na proslavo dvestoletnice izida prvega Vegovega logaritmovnika (Ciril Velkovrh) . . . . . | 60 |

### Nove knjige

|                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| (Janez Strnad, Franc Cvelbar, Mitja Kregar, Peter Gosar, Ciril Velkovrh, Alojz Kodre, Peter Legiša, Zlatan Magajna, Janez Rakovec, Matjaž Omladič) . . . . . | 61  |
| Publikacije DMFA SRS v letu 1982 (Ciril Velkovrh) . . . . .                                                                                                  | III |

## CONTENT

### Articles

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Infinitesimals (Bojan Magajna) . . . . .                                             | 33 |
| An example of the use of a complete systems with four events (Cveto Pohar) . . . . . | 42 |

### Letters

|           |    |
|-----------|----|
| . . . . . | 49 |
|-----------|----|

|                |    |
|----------------|----|
| News . . . . . | 50 |
|----------------|----|

|                     |    |
|---------------------|----|
| Home news . . . . . | 56 |
|---------------------|----|

|                     |    |
|---------------------|----|
| New books . . . . . | 63 |
|---------------------|----|

Na ovitku: Rojstna hiša Jurija Vege, Zagorica

## INFINITEZIMALI

BOJAN MAGAJNA

Math. Subj. Class. (1980) 12 F 99, 26 E 35

V članku bomo vpeljali hiperrealna števila kot produkt števno mnogo izvodov polja realnih števil modulo prost ultrafilter. Ta števila, med katerimi so poleg realnih števil še neskončno velika in neskončno majhna števila ali infinitezimali, bomo uporabili za definicijo zveznosti in odvedljivosti realnih funkcij. To bo samo bežen pogled v nestandardno analizo.

### INFINITESIMALS

The article presents a construction of the hyperreal number system as a product of countably many copies of the field of real numbers modulo some free ultrafilter. This system includes besides all ordinary real numbers also infinitely large and infinitely small elements or infinitesimals and we shall use them to define continuity and derivative of real functions.

#### 1. Uvod

V starejših knjigah o diferencialnem računu nastopajo neskončno majhne količine ali infinitezimali. Bralec je morda že srečal naslednjo definicijo odvoda funkcije  $f$  v točki  $x_0$ :

Realno število  $a$  je odvod funkcije  $y = f(x)$  v točki  $x_0$ , če se za vsak  $x$ , za katerega je razlika  $dx = x - x_0$  infinitezimal ( $=$  neskončno majhno število) različen od 0, kvocient

$$\frac{dy}{dx}$$

neskončno malo razlikuje od  $a$ , kjer je  $dy = f(x) - f(x_0)$ .

V klasični analizi, katere del je vsebovan v standardnih fakultetnih programih matematike, je taka definicija zavrnjena kot nesmiselna, ker v njej nastopajo neskončno majhna števila. Kajti če poskusimo povedati, kaj so neskončno majhna števila, bi morda lahko rekli, da so to števila, ki so po absolutni vrednosti manjša od vseh pozitivnih realnih števil. Toda ker je edino tako znano število 0, infinitezimalov, ki naj bi nastopali v zgornji definiciji, sploh ni. Kljub temu pa je misel o neskončno majhnih količinah intuitivno privlačna, kar dokazuje tudi zgodovina diferencialnega računa. Leibniz, oče diferencialnega računa (neodvisno od njega je odkril diferencialni račun tudi Newton), je verjel, da si je mogoče zamisliti sistem števil, ki vključuje poleg realnih števil še neskončno majhne (in neskončno velike elemente). Te elemente je sešteval in množil z običajnimi realnimi števili ter pri tem upošteval, da so manjši od vsakega pozitivnega realnega števila. Infinitezimali nastopajo tudi v delih kasnejših matematikov; vendar pa ni mogel niti Leibniz niti njegovi nasledniki neoporečno povedati, kateri zakoni vladajo tako razširjenemu številskemu sistemu. Kričeča protislovja, ki so spremljala infinitezimale, so naposled privedla matematike, da so jih opustili in zamenjali z danes splošno razširjeno  $\varepsilon, \delta$  metodo. Fraze kot je: ...če za vsak  $\varepsilon > 0$  ob-

staja tak  $\delta > 0$ , da je ..., so danes vsakomur dobro znane. Infinitezimali so bili tako pregnani kot »duhovi izumrlih količin«; če so jih kje še uporabljali, je bilo to treba razumeti samo kot skrajšani način izražanja.

Z odkritjem nearhimedskih polj je bil sicer rešen algebraični problem vložitve realnih števil v polje (= komutativni obseg), ki vsebuje tudi infinitezimale, toda težava nastopi, ko skušamo razširjeni sistem uporabiti v analizi (na primer definirati transcendentne funkcije  $\sin$ ,  $\log \dots$ ). V tem stoletju je bilo nekaj bolj ali manj uspešnih poskusov, da bi definirali in opravičili rabo infinitezimalov. Logično popolnoma zadovoljivo rešitev pa je šele pred 22 leti našel Abraham Robinson. Pokazal je, da obstaja urejeno polje  ${}^*\mathbf{R}$ , ki je razširitev polja realnih števil  $\mathbf{R}$ , vsebuje neskončno majhne in neskončno velike elemente in ima v nekem smislu enake lastnosti kot  $\mathbf{R}$ . V kakšnem smislu in katere lastnosti so to, pa je mogoče natančno povedati v okviru formalne logike. Gre za lastnosti, ki se dajo izraziti v določenem formalnem logičnem jeziku.

Kmalu po Robinsonovem odkritju se je izkazalo, da je mogoče infinitezimale uspešno posplošiti in uporabiti v topologiji, funkcionalni analizi in tudi na nekaterih drugih področjih matematike in teoretične fizike. Ena od potrditev plodnosti uporabe nestandardne analize je na primer Bernstein-Robinsonov dokaz trditve, da ima vsak omejen linearen operator  $T$  na Hilbertovem prostoru, za katerega obstaja tak polinom  $p$ , da je  $p(T)$  kompakten operator, netrivialen, zaprt invarianten podprostor. Čeprav je danes znanih več standardnih dokazov te trditve, je bil problem več let nerešen in prvi dokaz je uspel z uporabo nestandardne analize.

Nemogoče nam je v kratkem članku v celoti predstaviti osnove nestandardne analize. Za tako nalogo bi potrebovali nekaj znanja iz formalne logike. Kljub temu pa lahko vpeljemo model hiperrealnih števil matematično zadovoljivo in se pri tem popolnoma izognemo formalni logiki.

## 2. Hiperrealna števila

Najprej moramo ponoviti nekaj dejstev o ultrafiltrih. Vse trditve o ultrafiltrih, ki jih bomo uporabljali, in ustrezne dokaze je mogoče dobiti na primer v [P str. 111—123].

**2.1. Definicija.** Naj bo  $J$  neskončna množica. Neprazna družina  $\mathcal{U}$  podmnožic množice  $J$  se imenuje *filter* na  $J$ , če zadošča naslednjim pogojem:

- (1)  $\emptyset \notin \mathcal{U}$ ;
- (2) če je  $A \in \mathcal{U}$  in  $B \in \mathcal{U}$ , potem je  $A \cap B \in \mathcal{U}$ ;
- (3) če je  $A \in \mathcal{U}$  in  $B \supset A$ , potem je  $B \in \mathcal{U}$ .

Filter  $\mathcal{U}$  na  $J$  se imenuje *ultrafilter*, če zadošča pogoju:

- (4) za poljubno podmnožico  $A$  množice  $J$  je ali  $A \in \mathcal{U}$  ali  $A^c \in \mathcal{U}$ . (Tukaj označuje  $A^c$  komplement množice  $A$  v množici  $J$ .)

Ultrafilter  $\mathcal{U}$  je *prost*, če velja:

- (5) nobena končna množica ni element v  $\mathcal{U}$ .

Iz lastnosti (2) takoj sledi, da je presek končno mnogo elementov filtra element filtra; lastnost (2) nato pove, da je ta presek neprazen. Pokazati je mogoče [P str. 117], da zadošča dani filter  $\mathcal{U}$  pogoju (4) natanko tedaj, ko je maksimalen za relacijo inkluzije, ko ne obstaja tak filter  $\mathcal{G}$  na  $J$ , da bi bilo  $\mathcal{U} \supset \mathcal{G}$  in  $\mathcal{U} \neq \mathcal{G}$ . Ekistenco prostih ultrafiltrov je mogoče dokazati z uporabo

Zornove leme. Zaradi (4) in (5) mora vsebovati prost ultrafilter vsako množico s končnim komplementom. Družina vseh tistih podmnožic množice  $J$ , ki imajo končen komplement, je filter na  $J$  in z uporabo Zornove leme je lahko videti, da je vsebovan v vsaj enem ultrafiltru  $\mathcal{U}$ . Ta ultrafilter  $\mathcal{U}$  je prost, ker ima za elemente komplemente vseh končnih podmnožic množice  $J$ . V nadaljnjem bomo uporabljali še naslednjo lastnost ultrafiltrov:

(L) Če so  $A_1, \dots, A_n$  take množice, da je njihova unija  $A$  v ultrafiltru  $\mathcal{U}$ , potem je v  $\mathcal{U}$  vsaj ena od množic  $A_j$ .

Za dokaz predpostavimo nasprotno, da ne bi bila nobena od množic  $A_j$  v  $\mathcal{U}$ . Potem bi bilo  $A_j^c \in \mathcal{U}$  za vsak  $j = 1, \dots, n$  (po lastnosti (4) ultrafiltrov), od koder bi dobili

$$\bigcap_{j=1}^n A_j^c \in \mathcal{U}$$

po (2). Toda, ker je

$$\bigcap_{j=1}^n A_j^c = \left( \bigcup_{j=1}^n A_j \right)^c = A^c$$

bi potem sledilo  $A \cap A^c \in \mathcal{U}$ , kar pa nasprotuje lastnosti (1). Odslej naprej bomo vzeli za  $J$  množico naravnih števil  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{U}$  pa naj bo fiksni prost ultrafilter na  $\mathbf{N}$ .

2.2. Opazujmo množico  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  vseh zaporedij realnih števil. Bodita  $\alpha = (a_j : j \in \mathbf{N})$ ,  $\beta = (b_j : j \in \mathbf{N})$  dve poljubni zaporedji. Množica  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  je za operaciji

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a_j + b_j : j \in \mathbf{N}) \\ \alpha \beta &= (a_j b_j : j \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

komutativen kolobar z enoto  $(1, 1, 1, \dots)$  in je z relacijo  $\alpha < \beta$  natanko tedaj, ko neenakost  $a_j < b_j$  ne velja kvečjemu za končno mnogo indeksov  $j \in \mathbf{N}$  delno urejen. Ta kolobar vsebuje izomorfen izvod polja realnih števil  $\mathbf{R}$ , saj je preslikava

$$\mu : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

ki vsakemu realnemu številu  $a$  priredi konstantno zaporedje,

$$\mu(a) = (a, a, \dots) \quad (1)$$

očitno monomorfizem kolobarjev. Še več, neomejena zaporedja bi lahko rabila kot neskončni elementi, zaporedja, ki konvergirajo k 0, pa kot infinitezimali v tem kolobarju. Žal pa ima ta kolobar delitelje nič in zato ni obseg; razen tega pa je z relacijo  $<$  samo delno in ne linearno urejen. Tem težavam se lahko izognemo tako, da vzamemo namesto  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  kvocientni kolobar po maksimalnem idealu  $\mathcal{M}$ , ki ga bomo sedaj definirali.

2.3. **Definicija.** Naj bo  $\mathcal{M}$  množica vseh tistih zaporedij  $\alpha = (a_j : j \in \mathbf{N})$ , pri katerih je množica

$$A_\alpha = \{j \in \mathbf{N} : a_j = 0\}$$

element prostega ultrafiltra  $\mathcal{U}$ .

2.4. **Lema.**  $\mathcal{M}$  je maksimalen ideal kolobarja  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

Dokaz. Vzemimo poljubne  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$  in  $\gamma \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ . Naj bo  $\alpha = (a_j : j \in \mathbf{N})$ ,  $\beta = (b_j : j \in \mathbf{N})$ ,  $\gamma = (c_j : j \in \mathbf{N})$ ; naj bo  $A_\alpha = \{j \in \mathbf{N} : a_j = 0\}$  in naj bodo množice  $A_\beta$ ,  $A_\gamma$ ,  $A_{\alpha+\beta}$ ,  $A_{\alpha\gamma}$  definirane analogno. Potem je očitno

$$A_{\alpha+\beta} \supset A_\alpha \cap A_\beta \quad (1)$$

$$A_{\alpha\gamma} \supset A_\alpha \quad (2)$$

Iz  $\alpha \in \mathcal{M}$  in  $\beta \in \mathcal{M}$  sledi  $A_\alpha \in \mathcal{U}$  in  $A_\beta \in \mathcal{U}$ , torej  $A_\alpha \cap A_\beta \in \mathcal{U}$ ; nato sledi iz (1),  $A_{\alpha+\beta} \in \mathcal{U}$ , kar pomeni, da je  $\alpha + \beta \in \mathcal{M}$ . Podobno sledi iz  $A_\alpha \in \mathcal{U}$  in (2), da je  $A_{\alpha\gamma} \in \mathcal{U}$ , torej  $\alpha\gamma \in \mathcal{M}$ . S tem je dokazano, da je  $\mathcal{M}$  ideal.

Denimo sedaj, da bi bil  $\mathcal{M}$  vsebovan v kakem večjem idealu  $\mathcal{I}$ . Naj bo  $\delta \in \mathcal{I} - \mathcal{M}$  in izberimo zaporedje  $\delta' = (d_j' : j \in \mathbb{N})$  takole:

$$d_j' = \begin{cases} 1, & \text{če je } j \in A_\delta \\ 0, & \text{če } j \notin A_\delta \end{cases}$$

Potem je zaporedje  $\delta + \delta'$  obrnljiv element kolobarja  $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ , ker je vsak njegov člen  $d_j + d_j'$  različen od 0. Ker  $\delta \notin \mathcal{M}$ , množica  $A_\delta$  ni v  $\mathcal{U}$ ; ker pa je  $\mathcal{U}$  ultrafilter, mora biti potem v  $\mathcal{U}$  njen komplement  $A_\delta^c$ . Po definiciji elementa  $\delta'$  imamo  $A_{\delta'} = A_\delta^c$ , kar pomeni, da je  $\delta' \in \mathcal{M}$ . Potem je tudi  $\delta' \in \mathcal{I}$  (ker je  $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}$ ), torej tudi  $\delta + \delta' \in \mathcal{I}$ . Ker pa je element  $\delta + \delta'$  obrnljiv in ker pravi ideal ne vsebuje nobenega obrnljivega elementa, sledi od tod, da je  $\mathcal{I} = \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ . S tem je dokazano, da je ideal  $\mathcal{M}$  maksimalen.

**2.5. Posledica.** Kvocientni kolobar  $*\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{M}$  je polje (komutativni obseg).

Naj bo  $p : \mathbf{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow *\mathbf{R}$  kvocientna surjekcija in za poljuben  $\alpha \in \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$  naj  $\bar{\alpha}$  označuje ustrezeni element v  $*\mathbf{R}$ , torej  $\bar{\alpha} = p(\alpha)$ .

Sedaj bomo definirali v polju  $*\mathbf{R}$  relacijo stroge linearne urejenosti, ki jo bomo označevali kar z  $<$ .

**2.6. Definicija.** Bodita  $a, b \in *\mathbf{R}$  poljubna,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$  pa taki zaporedji, da je  $a = \bar{\alpha}$  in  $b = \bar{\beta}$ ; naj bo pri tem  $\alpha = (a_j : j \in \mathbb{N})$ ,  $\beta = (b_j : j \in \mathbb{N})$  in  $A = \{j \in \mathbb{N} : a_j < b_j\}$ . Potem naj velja relacija

$$a < b$$

natanko tedaj, ko je  $A \in \mathcal{U}$ .

Seveda se moramo najprej prepričati, da je ta definicija nedvoumna, da je neodvisna od izbire predstavnikov  $\alpha, \beta$  elementov  $a, b$ . Naj bo torej  $a = \bar{\gamma}$  in  $b = \bar{\delta}$  še kaka druga predstavitev razredov  $a, b \in *\mathbf{R}$  z zaporedji  $\gamma = (c_j : j \in \mathbb{N})$ ,  $\delta = (d_j : j \in \mathbb{N})$ . Naj bo  $C = \{j \in \mathbb{N} : c_j < d_j\}$ . Treba je videti, da je  $C \in \mathcal{U}$  natanko tedaj, ko je  $A \in \mathcal{U}$ . Ker je  $\bar{\alpha} = \bar{\gamma}$  in  $\bar{\beta} = \bar{\delta}$ , sta množici  $E_1 = \{j \in \mathbb{N} : a_j = c_j\}$  in  $E_2 = \{j \in \mathbb{N} : b_j = d_j\}$  v  $\mathcal{U}$ . Če je  $A \in \mathcal{U}$ , potem sledi iz

$$C \supset A \cap E_1 \cap E_2$$

da je tudi  $C \in \mathcal{U}$ . Prav tako sledi iz  $C \in \mathcal{U}$ , da je  $A \in \mathcal{U}$ .

**2.7. Izrek.**  $*\mathbf{R}$  je z relacijo  $<$  strogo linearno urejeno polje. To pomeni, da veljajo za poljubne  $a, b, c \in *\mathbf{R}$  naslednje izjave:

- (1)  $a \not< a$  (irefleksivnost);
- (2) če je  $a < b$  in  $b < c$ , potem je  $a < c$  (tranzitivnost);
- (3) če je  $a \neq b$ , potem je  $a < b$  ali  $b < a$  (sovisnost);
- (4) če je  $a < b$ , potem je  $a + c < b + c$ ;
- (5) če je  $a < b$  in  $0 < c$ , potem je  $ac < bc$ .

Polje  $*\mathbf{R}$  vsebuje izomorfen izvod polja realnih števil  $\mathbf{R}$ . Pri tem je preslikava  $\sigma = p \mu$  ustrezna vložitev, kjer je  $\mu$  preslikava definirana z 2.2.(1).  $*\mathbf{R}$  je prava razširitev polja realnih števil  $\mathbf{R}$ .

Dokaz. Izberimo taka zaporedja  $\alpha = (a_j : j \in \mathbf{N})$ ,  $\beta = (b_j : j \in \mathbf{N})$ ,  $\gamma = (c_j : j \in \mathbf{N})$ , da bo  $a = \bar{a}$ ,  $b = \bar{\beta}$ ,  $c = \bar{\gamma}$ .

(1) Če bi za kak  $a$  veljala *relacija*  $a < a$ , bi bila množica  $\{j \in \mathbf{N} : a_j < a_j\}$  v ultrafiltru  $\mathcal{U}$ . Toda to je nemogoče, ker filtri ne vsebujejo prazne množice kot elementa. Točka (2) sledi takoj iz dejstva, da je presek dveh množic iz filtra  $\mathcal{U}$  element v  $\mathcal{U}$ . Tudi dokaza za (4) in (5) sta trivialna in ju prepuščamo bralcu. Pokažimo sedaj (3). Naj bo

$$A_1 = \{j \in \mathbf{N} : a_j = b_j\}, \quad A_2 = \{j \in \mathbf{N} : a_j < b_j\}, \quad A_3 = \{j \in \mathbf{N} : b_j < a_j\}$$

Potem je  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbf{N} \in \mathcal{U}$  in iz lastnosti 2.1. (L) ultrafiltrov sledi, da je vsaj ena od množic  $A_j$  v  $\mathcal{U}$ . Ker  $a \neq b$ ,  $A_1 \notin \mathcal{U}$ ; zato je ali  $A_2 \in \mathcal{U}$  ali  $A_3 \in \mathcal{U}$ . V prvem primeru je  $a < b$ , v drugem pa  $b < a$ .

Preslikava  $\sigma = p \mu$  je kot kompozitum dveh homorfizmov

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mu} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \xrightarrow{p} {}^*\mathbf{R}$$

homorfizem. Pokazati je treba injektivnost. Če je  $\sigma(d) = 0$  za kak  $d \in \mathbf{R}$ , potem je  $\mu(d) \in \mathcal{M}$ . Ker pa je  $\mu(d) = (d, d, \dots)$ , sledi takoj iz definicije ideala  $\mathcal{M}$ , da je  $d = 0$ .

Da bi pokazali neenakost  ${}^*\mathbf{R} \neq \sigma(\mathbf{R})$ , vzemimo poljubno zaporedje  $\delta = (d_j : j \in \mathbf{N})$  od 0 različnih števil, ki konvergira k 0. Ker je za vsako pozitivno realno število  $\varepsilon$  komplement množice

$$D = \{j \in \mathbf{N} : |d_j| < \varepsilon\}$$

končna množica, je  $D \in \mathcal{U}$ . Od tod takoj sledi, da za element  $d = \bar{\delta} \in {}^*\mathbf{R}$  velja relacija  $|d| < \sigma(\varepsilon)$ , kjer je  $|d| = \max\{d, -d\}$ . To pomeni, da je  $d$  po absolutni vrednosti manjši od slike vsakega pozitivnega števila  $\varepsilon$ . Pri tem je pomembno, da je  $d \neq 0$ , ker je  $\{j \in \mathbf{N} : d_j = 0\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$ . Zato je  ${}^*\mathbf{R}$  res prava razširitev polja realnih števil  $\mathbf{R}$ .

Kot je v takih primerih navada, bomo sedaj identificirali izomorfni polji  $\mathbf{R}$  in  $\sigma(\mathbf{R})$ . Tako bomo odslej vzeli, da je kar  $\mathbf{R} \subset {}^*\mathbf{R}$ . Realnega števila  $a$  potem ne bo več treba razlikovati od njegove slike  $\sigma(a)$  v  ${}^*\mathbf{R}$ . Tudi elemente polja  ${}^*\mathbf{R}$  bomo imenovali števila.

**2.8. Definicija.** Število  $a \in {}^*\mathbf{R}$  je *končno* natanko tedaj, ko obstaja tak  $n \in \mathbf{N}$ , da je  $|a| < n$ ; število je *neskončno*, če ni končno. Število  $a$  je *infinitesimal* natanko tedaj, ko je  $|a| < \frac{1}{n}$  za vsak  $n \in \mathbf{N}$ .

Na osnovi te definicije je očitno 0 infinitezimal in očitno je 0 edini infinitezimal med realnimi števili. Na koncu dokaza izreka 2.7. smo videli, da obstajajo v  ${}^*\mathbf{R}$  od 0 različni infinitezimali. Ker je lahko videti, da je število  $a$  neskončno natanko tedaj, ko je  $a \neq 0$  in  $1/a$  infinitezimal, je s tem dokazan tudi obstoj neskončnih števil v  ${}^*\mathbf{R}$ . Vsako zaporedje realnih števil, ki konvergira proti neskončnosti (in še mnogo drugih zaporedij) predstavlja neskončen element polja  ${}^*\mathbf{R}$ .

**2.9. Trditev.** Naj bo  ${}^*\mathbf{N}$  množica vseh tistih elementov v  ${}^*\mathbf{R}$ , ki se dajo predstaviti z zaporedji naravnih števil, torej

$${}^*\mathbf{N} = p(\mathbf{N}^{\mathbf{N}})$$

Naj bo  $\mathbf{N}_{\infty} = {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$ . Potem je  $\mathbf{N}_{\infty}$  množica vseh neskončnih števil v množici  ${}^*\mathbf{N}$ .

Dokaz. Množico  ${}^*\mathbf{N}$  lahko napišemo kot unijo disjunktnih množic,  ${}^*\mathbf{N} = \mathbf{N} \cup \mathbf{N}_\infty$ . Ker so naravna števila končna, je treba pokazati, da so elementi množice  $\mathbf{N}_\infty$  neskončni. Vzemimo nasprotno, da bi bil kak  $a \in \mathbf{N}_\infty$  končno število, da bi bilo torej  $a \leq n$  za kak  $n \in \mathbf{N}$ . Predstavimo  $a$  z zaporedjem:  $a = \bar{a}$ ,  $\alpha = (n_j : j \in \mathbf{N})$ , kjer so  $n_j$  naravna števila. Potem je množica  $A = \{j \in \mathbf{N} : n_j \leq n\}$  element ultrafiltra  $\mathcal{U}$ . Če napišemo  $A$  kot unijo disjunktnih množic  $A_i = \{j \in \mathbf{N} : n_j = i\}$  za  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , sledi po 2.1. (L), da je natančno ena od množic  $A_i$  v ultrafiltru  $\mathcal{U}$ . Za ustrezni  $i$  je potem  $a = i$ , kar nasprotuje privzetku  $a \in \mathbf{N}_\infty = {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$ .

Elemente množice  $\mathbf{N}_\infty$  imenujemo *neskončna naravna števila*.

Množici  ${}^*\mathbf{N}$  in  $\mathbf{N}$  se razlikujeta v zelo pomembni lastnosti. Medtem, ko je  $\mathbf{N}$  z relacijo  $<$  dobro urejena množica, to ne velja za  ${}^*\mathbf{N}$ . To pomeni, da nima vsaka podmnožica množice  ${}^*\mathbf{N}$  najmanjšega elementa. Tako, na primer, ni najmanjšega neskončnega naravnega števila, kajti za vsaka  $a \in \mathbf{N}_\infty$  je  $a - 1 \in \mathbf{N}_\infty$ .

Po drugi strani pa lahko mnogo lastnosti naravnih števil posplošimo na elemente množice  ${}^*\mathbf{N}$ . Tako lahko, na primer, razdelimo števila v  ${}^*\mathbf{N}$  na *soda* in *liha*. Pri tem imenujemo število  $a \in {}^*\mathbf{N}$  sodo, če obstaja tak  $b \in {}^*\mathbf{N}$ , da je  $a = 2b$ ; število  $a$  je liho, če ni sodo. Po tej definiciji lihega števila pa ni čisto očitno, da lahko vsako liho število  $a \in {}^*\mathbf{N}$  izrazimo v obliki  $a = 2b + 1$ , kjer je  $b \in {}^*\mathbf{N}$ . Da bi to videli, moramo  $a$  najprej predstaviti z zaporedjem naravnih števil:  $a = \bar{a}$ ,  $\alpha = (n_j : j \in \mathbf{N})$ . Ker število  $a$  ni sodo, množica  $A = \{j \in \mathbf{N} : \exists k \in \mathbf{N}, n_j = 2k\}$  ni element ultrafiltra  $\mathcal{U}$ . (Če bi bilo  $A \in \mathcal{U}$ , bi bilo  $b = \bar{\beta}$ , kjer je  $\beta = (m_j : j \in \mathbf{N})$ ,  $m_j = n_j/2$  za  $j \in A$ ,  $m_j = 0$  za  $j \notin A$ , tako število v  ${}^*\mathbf{N}$ , za katerega bi veljalo  $a = 2b$ .) Potem je  $A^c \in \mathcal{U}$ . Za vsak  $j \in A^c$  je število  $n_j$  liho in ga zato lahko napišemo v obliki  $n_j = 2m_j + 1$ . Postavimo sedaj še  $m_j = 0$  za  $j \in A$  in naj bo  $\beta = (m_j : j \in \mathbf{N})$ . Sedaj je lahko videti, da je  $b = \bar{\beta}$  tisti element v  ${}^*\mathbf{N}$ , za katerega je  $a = 2b + 1$ . Na očitni način lahko vpeljemo v  ${}^*\mathbf{N}$  tudi pojem deljivosti in praštevila. Bralec lahko za vajo na primer dokaže, da obstajajo neskončna praštevila. V tem članku ne bomo več obravnavali naravnih števil, pač pa se vrnimo k splošnim hiperrealnim številom.

**2.10. Trditev.** Množica  $K$  vseh končnih elementov v  ${}^*\mathbf{R}$  je podkolobar in množica  $I$  vseh infinitezimalov je ideal v  $K$ .

Dokaz je lahek in ga prepuščamo bralcu.

**2.11. Izrek.** (i) Za vsak  $a \in K$  obstaja tak  $b \in \mathbf{R}$ , da je  $a - b \in I$ .

(ii) Kvocientni kolobar  $K/I$  je izomorfen polju realnih števil  $\mathbf{R}$ , kjer je izomorfizem zožitev naravne surjekcije  $s : K \rightarrow K/I$  na  $\mathbf{R} \cong \sigma(\mathbf{R}) \subset K$ .

Dokaz. (i) Za vsak  $a \in K$  je množica

$$A = \{x \in \mathbf{R} : a < x\}$$

neprazna in navzdol omejena; naj bo  $b = \inf A$ , kjer gledamo infimum v  $\mathbf{R}$ . Trdimo, da je  $a - b \in I$ . V nasprotnem primeru bi bilo  $|a - b| > \varepsilon$  za kak pozitiven realen  $\varepsilon$ ; torej  $a - b > \varepsilon$  ali pa  $b - a > \varepsilon$ . V prvem primeru bi sledilo, da je  $b + \varepsilon < a$ , zato tudi  $b + \varepsilon < x$  za vsak  $x \in A$ , torej  $b + \varepsilon \leq \inf A = b$ , to pa je nemogoče. V drugem primeru pa neenakost  $b - \varepsilon > a$  pove, da je  $b - \varepsilon \in A$  in bi zato moralo biti  $b = \inf A \leq b - \varepsilon$ , kar pa je spet protislovje.

(ii) Ker je  $\mathbf{R} \cap I = \{0\}$ , je  $s|_{\mathbf{R}}$  injektivna preslikava. Surjektivnost sledi takoj iz (i), ker je  $s(a) = s(b)$ , če je  $a - b \in I$ .

2.12. S posredovanjem izomorfizma  $s: \mathbf{R} \rightarrow K/I$  bomo identificirali polji  $K/I$  in  $\mathbf{R}$ . (V tej zvezi naj omenimo, da je  $s: \mathbf{R} \rightarrow K/I$  edini izomorfizem iz  $\mathbf{R}$  v  $K/I$ , ker je edini avtomorfizem polja  $\mathbf{R}$  identiteta.) V smislu te identifikacije bomo vzeli, da  $s$  preslikuje v  $\mathbf{R}$ . Za vsak  $a \in K$  imenujemo realno število  $s(a)$  *standardni del* elementa  $a$ . Za vsak  $a \in K$  je  $s(a)$  edino tako realno število, ki se od  $a$  razlikuje za infinitezimal. Če je  $a \in \mathbf{R}$ , je  $s(a) = a$ .

Bolj splošno, lahko vpeljemo v  ${}^*\mathbf{R}$  ekvivalenčno relacijo

$$a \approx b \text{ natanko tedaj, ko je } b - a \in I$$

Če za dve števili  $a, b$  velja  $a \approx b$ , pravimo da sta *infinitezimalno blizu*. Vsako končno število je infinitezimalno blizu natanko enemu realnemu številu.

Preslikava  $s$  je monotona: če je  $a < b$ , potem je  $s(a) \leq s(b)$ . V nasprotnem primeru,  $s(b) < s(a)$ , bi bila namreč razlika

$$a - b = (a - s(a)) + (s(b) - b) + (s(a) - s(b))$$

pozitivna, ker sta prva dva člena v vsoti na desni infinitezimala, tretji člen pa bi bil pozitivno realno število. Toda ker je  $a < b$ , je  $a - b < 0$  in bi prišli do protislovja.

### 3. Limite in odvodi

V tem razdelku bomo videli, kako je mogoče uporabiti infinitezimale za definicijo zveznosti in odvedljivosti realnih funkcij. V ta namen je treba najprej razširiti definicijsko območje funkcije, da bo vsebovalo tudi hiperrealna števila. Zaradi enostavnejšega izražanja bomo vzeli, da so funkcije definirane povsod na  $\mathbf{R}$ , funkcije, katerih definicijsko območje je podmnožica v  $\mathbf{R}$ , bi lahko obravnavali podobno.

**3.1. Definicija.** Za poljubno funkcijo  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definirajmo funkcijo  ${}^*f: {}^*\mathbf{R} \rightarrow {}^*\mathbf{R}$  takole: za vsak  $x = p(x_j : j \in \mathbf{N}) \in {}^*\mathbf{R}$  (kjer označuje  $p$  kvocientno surjekcijo, definirano takoj po 2.5.,  $x_j$  pa so realna števila) naj bo

$${}^*f(x) = p(f(x_j) : j \in \mathbf{N})$$

Lahko je videti, da je ta definicija neodvisna od izbire zaporedja  $(x_j : j \in \mathbf{N})$ , katerega ekvivalenčni razred je  $x$ . Prav tako je za vsak  $x \in \mathbf{R}$  razvidna enakost  ${}^*f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$  (kjer je  $\sigma$  vložitev, definirana v izreku 2.7.). Ker pa že vemo, da nima pomena razlikovati med realnim številom  $x$  in njegovo sliko  $\sigma(x)$ , lahko napišemo to enakost kot  ${}^*f(x) = f(x)$ . Z drugimi besedami, funkcija  ${}^*f$  je razširitev funkcije  $f$ . Razširjena funkcija  ${}^*f$  je s funkcijo  $f$  enolično določena; odslej bomo tudi zanjo uporabljali kar simbol  $f$ , kar ne bo povzročilo nobenega dvoumja.

**3.2. Trditev.** Za poljubno funkcijo  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  obstaja limita (1)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$$

in je enaka realnemu številu  $c$  natanko tedaj, ko je  $f(x) \approx c$  za vsak  $x \in {}^*\mathbf{R}$ , ki zadošča pogoju  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$ .

**Dokaz.** Denimo najprej, da limita (1) obstaja in da je enaka  $c$ . Izberimo poljuben  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$  (kjer je  $\mathbf{R}^+$  množica pozitivnih realnih števil). Po definiciji limite obstaja tak  $\delta \in \mathbf{R}^+$ , da iz  $x \in \mathbf{R}$ ,  $|x - x_0| < \delta$  in  $x \neq x_0$  sledi  $|f(x) - c|$

$< \varepsilon$ . Naj bo  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$ . Predstavimo  $x$  z zaporedjem realnih števil,  $x = p(a_j : j \in \mathbf{N})$  in naj bo  $A = \{j \in \mathbf{N} : |a_j - x_0| < \delta \text{ \& } a_j \neq x_0\}$ . Ker  $x \approx x_0$  in  $x \neq x_0$ , je  $A \in \mathcal{U}$ . Ker je  $|f(a_j) - c| < \varepsilon$  za vsak  $j \in A$ , sledi po definiciji 3.1., da je  $|f(x) - c| < \varepsilon$ . Ker velja ta neenakost za vsak  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ , je gotovo  $f(x) \approx c$ .

Vzemimo sedaj še obratno, da limita (1) sploh ne obstaja ali pa da je različna od  $c$ . Potem obstaja tak  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$  in tako realno zaporedje  $(a_j : j \in \mathbf{N})$ , da je  $a_j \neq x_0$  za vsak  $j$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = x_0$  in  $|f(a_j) - c| \geq \varepsilon$  za vsak  $j$ . Za element  $x = p(a_j : j \in \mathbf{N}) \in {}^*\mathbf{R}$  potem velja hkrati  $x \approx x_0$ ,  $x \neq x_0$  in  $|f(x) - c| \geq \varepsilon$ , torej tudi  $f(x) \not\approx c$ .

Trditev 3.2. omogoča alternativno definicijo zveznosti: realna funkcija  $f$  je v točki  $x_0 \in \mathbf{R}$  zvezna natanko tedaj, ko za vsak  $x \in {}^*\mathbf{R}$  iz  $x \approx x_0$  sledi  $f(x) \approx f(x_0)$ .

3.3. Ker je odvod definiran klasično kot limita diferenčnega kvocienta, omogoča trditev 3.2. tudi alternativno definicijo odvoda. Naj bo  $f$  realna funkcija, izberimo  $x_0 \in \mathbf{R}$  in opazujmo funkcijo

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

ki je definirana na množici  $\mathbf{R} - \{x_0\}$ . Razširimo  $f$  in  $k$  po definiciji 3.1. na množico  ${}^*\mathbf{R} - \{x_0\}$ ; potem velja relacija (1) za vsak  $x \in {}^*\mathbf{R} - \{x_0\}$ . Ker je odvod funkcije  $f$  v točki  $x$  definiran klasično kot

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} k(x)$$

kadar ta limita obstaja, sledi iz trditve 3.1.:

Funkcija  $f$  je v točki  $x_0$  odvedljiva in njen odvod je enak realnemu številu  $c$  natanko tedaj, ko je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx c \quad (2)$$

brž ko je  $x \approx x_0$  in  $x \neq x_0$ .

Če pišemo  $dx = x - x_0$ ,  $dy = f(x) - f(x_0)$ , potem dobimo od tod definicijo odvoda, ki smo jo omenili v uvodu.

Naj bo  $f$  v točki  $x_0$  odvedljiva funkcija. Če pomnožimo (2) z  $dx$ , dobimo

$$f(x) - f(x_0) \approx c \, dx \quad (3)$$

Od tod lahko takoj vidimo, da je vsaka odvedljiva funkcija tudi zvezna. Po kriteriju za zveznost, ki smo ga dobili kot posledico trditve 3.2., je dovolj videti, da iz  $x \approx x_0$  sledi  $f(x) \approx f(x_0)$ . Če je  $x \approx x_0$ , potem je  $dx = x - x_0$  infinitezimal. Ker je  $c \in \mathbf{R}$  in množica infinitezimalov ideal v kolobarju vseh končnih elementov, je  $c \, dx$  infinitezimal. Po (3) je potem tudi  $f(x) - f(x_0)$  infinitezimal, kar pomeni, da je  $f(x) \approx f(x_0)$ .

3.4. Sedaj ko vemo, da infinitezimali obstajajo, in ko nam ni težko verjeti, da lahko nadomestijo v klasični analizi metodo  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , se moramo vprašati o smiselnosti takega pristopa. Uporaba infinitezimalov je smiselna, če je ta pot enostavnejša od klasične poti brez infinitezimalov. Model, ki smo ga opisali, ne izpolnjuje tega kriterija. Težava tiči v tem, da moramo pri dokazovanju hiperrealna števila predstavljati z zaporedji realnih števil. O infinite-

zimalih ne znamo povedati nič, če si jih ne predstavljamo z realnimi zaporedji in tako reduciramo njihove lastnosti na lastnosti realnih števil. Toda opisani model hiperrealnih števil je samo ozek, poenostavljen izsek iz nestandardne analize. Bralec se morda spomni, da je mogoče pojem funkcije, relacije, operacije itd. definirati samo s teorijo množic. Tako lahko potopimo model  $\mathcal{G}$  dane matematične teorije (se pravi, vse objekte in odnose med njimi, ki nastopajo v dani teoriji) v teorijo množic. Standardna analiza priredi modelu  $\mathcal{G}$  nestandardni model  $^*\mathcal{G}$ . Sama konstrukcija modela  $^*\mathcal{G}$  ni preprosta, toda mogoče je dokazati nekaj splošnih izrekov o  $\mathcal{G}$  in  $^*\mathcal{G}$ , ki bistveno poenostavijo uporabo nestandardnih metod. Tukaj omenimo samo najpomembnejšega od teh izrekov, t. i. Leibnizovo načelo (ali načelo prenosa). Ta izrek trdi, da velja vsaka izjava, ki jo je mogoče izraziti v določenem formalnem logičnem jeziku, v modelu  $\mathcal{G}$  natanko tedaj, ko velja v  $^*\mathcal{G}$ . Tukaj ne moremo opisati omenjenega jezika formalne logike. Kljub temu bomo poskusili na primeru pokazati, kako omogoča Leibnizovo načelo uporabo infinitezimalov, ne da bi jih bilo pri tem treba predstavljati z realnimi zaporedji. Za primer pogledjmo, kako bi dokazali že omenjeni kriterij o zveznosti funkcij.

Izjava, da je funkcija  $f$  v točki  $x_0$  zvezna, pomeni, da za vsak fiksen  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$  obstaja tak  $\delta \in \mathbf{R}^+$ , da velja stavek

$$(\forall x \in \mathbf{R}) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (1)$$

Stavek (1), strogo vzeto, sicer ni izražen v formalnem logičnem jeziku, vendar ga je mogoče izraziti v tem jeziku. Po Leibnizovem principu velja zato tudi v  $^*\mathbf{R}$ , torej

$$(\forall x \in ^*\mathbf{R}) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (2)$$

Če je  $x \approx x_0$ , potem je  $|x - x_0| < \delta$  za vsak  $\delta \in \mathbf{R}^+$  in (2) pove, da je tedaj  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Ker velja zadnja neenakost za vsak  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ , sledi  $f(x) \approx f(x_0)$ .

Vzemimo sedaj še obratno, da iz  $x \approx x_0$  sledi  $f(x) \approx f(x_0)$ . Izberimo poljuben  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ . V modelu  $^*\mathbf{R}$  velja tedaj stavek

$$(\exists \delta \in ^*\mathbf{R}^+) (\forall x \in ^*\mathbf{R}) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (3)$$

saj lahko zavzame v njem spremenljivka  $\delta$  za vrednost infinitezimal in je potem po hipotezi  $f(x) \approx f(x_0)$ , torej tudi  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Leibnizovo načelo prevede stavek (3) v klasično definicijo zveznosti:

$$(\exists \delta \in \mathbf{R}^+) (\forall x \in \mathbf{R}) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (4)$$

## LITERATURA

- [D] Davis M., *Applied Nonstandard Analysis*, John Wiley Sons, New York 1977.
- [L, G] Lutz, R., Goze M., *Nonstandard Analysis*, Springer-Verlag 881, New York 1981.
- [P] Prijatelj N., *Matematične strukture III*, DZS, Ljubljana 1972.
- [R] Robinson A., *Non-Standard Analysis*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam 1966.
- [S, L] Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J., *Introduction to the Theory of Infinitezimals*, Academic Press, New York 1976.

## PRIMER UPORABE POPOLNEGA SISTEMA S ŠTIRIMI DOGODKI

CVETO POHAR

Math. Subj. Class. (1980) 62 G 10, 62 P 10

Zanima nas verjetnost pojava nekih dogodkov v različnih časovnih intervalih, predvsem hipoteza, da je ta verjetnost v vmesnem obdobju manjša od verjetnosti v sosednjih obdobjih. Hipotezo preskušamo z uporabo popolnega sistema s štirimi dogodki.

### AN EXAMPLE OF THE USE OF A COMPLETE SYSTEM WITH FOUR EVENTS

We are interested in the probability of occurrence of certain events in a certain time interval. Also we test the hypothesis whether the probability of occurrence in a certain time interval is less than the probability of occurrence in adjacent time intervals.

V tem članku bomo obravnavali množice  $N$  elementov, ki se jim neki dogodek  $A$  zgodi natanko enkrat v življenju ali življenjski dobi.

Verjetnost, da se  $k$ -temu elementu ( $1 \leq k \leq N$ ) zgodi  $A$  v obdobju  $(t_1, t_2]$ ,  $0 \leq t_1 < t_2$ , označujemo  $P_{(k)}(t_1, t_2)$ , in v posebnem primeru, ko je  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t$ ,  $P_{(k)}(t)$ . Verjetnost  $P_{(k)}(t_1, t_2)$  naj izpolnjuje naslednja pogoja:

1. ni odvisna od tega, koliko in katerim preostalim elementom naše množice se  $A$  zgodi na  $(t_1, t_2]$  ali že na  $(0, t_1]$
2. je neodvisna od  $k$ .

Zaradi 2. lahko pišemo  $P_{(k)}(t_1, t_2) = P(t_1, t_2)$  in  $P_{(k)}(t) = P(t)$ ,  $1 \leq k \leq N$ .

Omenimo dva primera, ki zadoščata temu modelu:

a) pri bolnikih, ki so zboleli za dano nenalezljivo boleznijo, nas zanima verjetnost, da so zboleli od trenutka  $t$ ,

b) pri strojih, ki se pokvarijo prej ali slej in so taki, da jih ni vredno popravljati, nas zanima verjetnost, da se pokvarijo do trenutka  $t$ .

Pri poljubno izbranem obdobju  $(t_1, t_2]$  ( $0 \leq t_1 < t_2$ ) imamo očitno opravka z Bernoullijevim zaporedjem poskusov (glej lit. 1, str. 58—59). Zato je verjetnost  $P_N(t_1, t_2; n)$ , da se  $A$  zgodi v obdobju  $(t_1, t_2]$  natanko  $n$  elementom izmed  $N$ , enaka

$$P_N(t_1, t_2; n) = \binom{N}{n} \cdot [P(t_1, t_2)]^n \cdot [1 - P(t_1, t_2)]^{N-n} = B_N(p; n),$$

$$p = P(t_1, t_2) = P(t_2) - P(t_1), \quad 0 \leq n \leq N \quad (1)$$

in v posebnem primeru

$$P_N(t; n) = \binom{N}{n} \cdot [P(t)]^n \cdot [1 - P(t)]^{N-n} = B_N(p; n), \quad p = P(t),$$

$$0 \leq n \leq N \quad (2)$$

V nadaljnjem bomo rabili še dve verjetnosti. Prva, ki jo bomo označevali  $P_N(t_1, t_2; t_3, t_4; n, m)$ , ( $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ,  $n \geq 0$ ,  $m \geq 0$ ,  $n + m \leq N$ ), je verjetnost, da se v obdobju  $(t_1, t_2]$  zgodi dogodek  $A$   $n$  elementom izmed  $N$  in

v obdobju  $(t_3, t_4]$   $m$  elementom izmed  $N - n$  preostalih. Izračunamo jo po temle premisleku.

Najprej s  $p$  označimo verjetnost, da se posameznemu elementu zgodi dogodek  $A$  v obdobju  $(t_1, t_2]$ , in z  $r$  verjetnost, da se mu zgodi v  $(t_3, t_4]$ . Tedaj je  $p = P(t_2) - P(t_1)$  in  $r = P(t_4) - P(t_3)$ . Verjetnost, da se  $A$  zgodi posameznemu elementu v preostalem obdobju, je očitno  $1 - p - r$ .

Če elemente oštevilčimo z 1 do  $N$ , je elementaren dogodek dogodek, da se  $n$  elementom z danimi številkami dogodek  $A$  zgodi v  $(t_1, t_2]$ ,  $m$  elementom z danimi številkami v  $(t_3, t_4]$  in  $N - n - m$  elementom s preostalimi številkami v preostalem obdobju. Verjetnost poljubnega elementarnega dogodka je  $p^n \cdot r^m \cdot (1 - p - r)^{N-n-m}$ . Preštejmo še, koliko je vseh elementarnih dogodkov! Toliko jih je, kolikor je možnih različnih hkratnih razvrstitev  $n$  elementov v prvo obdobje,  $m$  elementov v drugo obdobje in  $N - n - m$  elementov v preostalo obdobje. To število je enako  $\frac{N!}{n! m! (N - n - m)!}$ . Zato je končno

$$P_N(t_1, t_2; t_3, t_4; n, m) = \frac{N!}{n! m! (N - n - m)!} \cdot p^n \cdot r^m \cdot (1 - p - r)^{N-n-m},$$

$$p \geq 0, \quad r \geq 0, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad n + m \leq N \quad (3)$$

Podobno dobimo verjetnost  $P_N(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6; n, m, l)$ , da se dogodek  $A$  zgodi  $n$  elementom izmed  $N$  v obdobju  $(t_1, t_2]$ ,  $m$  elementom izmed  $N - n$  preostalih v  $(t_3, t_4]$  in  $l$  elementom izmed  $N - n - m$  preostalih v  $(t_5, t_6]$ . Če označimo  $p = P(t_2) - P(t_1)$ ,  $r = P(t_4) - P(t_3)$ ,  $s = P(t_6) - P(t_5)$ , je

$$P_N(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6; n, m, l) =$$

$$= \frac{N!}{n! m! l! (N - n - m - l)!} p^n \cdot r^m \cdot s^l \cdot (1 - p - r - s)^{N-n-m-l},$$

$$n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad l \geq 0, \quad n + m + l \leq N, \quad p \geq 0,$$

$$r \geq 0, \quad s \geq 0, \quad p + r + s \leq 1 \quad (4)$$

Če nas bodo bolj kot  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  in  $t_6$  zanimale vrednosti  $p, r$  in  $s$ , bomo raje pisali  $P_N(p, r, s; n, m, l) = P_N(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6; n, m, l)$  in podobno  $P_N(p, r; n, m) = P_N(t_1, t_2; t_3, t_4; n, m)$  ter  $P_N(p; n) = B_N(p; n) = P_N(t_1, t_2; n)$ .

Ker sedaj poznamo verjetnost  $P_N(p, r; n, m)$ , se bomo lahko lotili naslednje naloge: Vzemimo, da je  $p \leq r$ . Kolikšna je tedaj verjetnost, da je  $n \geq m + d$  ( $d \geq 0$ )? Ali to verjetnost lahko omejimo od zgoraj z neko funkcijo spremenljivke  $p$ ?

Če pri danih  $N$  in  $d \geq 0$  z  $D_N(d)$  označimo

$$D_N(d) = D = \{(n, m) : n \geq m + d, \quad m \geq 0, \quad n + m \leq N\},$$

lahko takoj odgovorimo na prvo vprašanje. Dobimo

$$P_N(p, r; D) = P_N(n \geq m + d) = \sum_{(n, m) \in D} P_N(p, r; n, m) =$$

$$= \sum_D \frac{N!}{n! m! (N - n - m)!} \cdot p^n \cdot r^m \cdot (1 - p - r)^{N-n-m}$$

Izraz na desni lahko preoblikujemo v

$$\begin{aligned}
 P_N(p, r; D) &= \sum_D \frac{N!}{n! (N-n)!} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n} \cdot \frac{(N-n)!}{m! (N-n-m)!} \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{r}{1-p}\right)^m \cdot \left(\frac{1-p-r}{1-p}\right)^{N-n-m} = \sum_D B_N(p; n) \cdot B_{N-n}\left(\frac{r}{1-p}; m\right) = \\
 &= \sum_{n=d}^N B_N(p; n) \cdot \sum_{m=0}^{m'} B_{N-n}\left(\frac{r}{1-p}; m\right) \quad (5) \\
 &\quad m' = \min(n-d, N-n)
 \end{aligned}$$

(Ker je  $p < 1$  in  $1-p = 1 - [P(t_2) - P(t_1)] = P(t_1) + P(t_2, \infty) \geq P(t_3, t_4) = r$ , sledi  $0 \leq \frac{r}{1-p} \leq 1$ . Zato imamo lahko  $\frac{r}{1-p}$  za neko verjetnost. Katero? Podobnih dokazov odslej ne bomo več ponavljali.)

Podobno kot (5) pokažemo tudi

$$P_N(p, r; D) = \sum_D B_N(r; m) \cdot B_{N-m}\left(\frac{p}{1-r}; n\right) \quad (6)$$

Da bomo lahko odgovorili na drugo vprašanje, potrebujemo naslednjo lemo.

*Lema 1:*

Funkcija  $Q_{N,m}(p) = \sum_{n=0}^m \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ ,  $0 \leq m \leq N$ ,  $N > 0$ ,  $0 \leq p \leq 1$

je nerastoča funkcija spremenljivke  $p$  in funkcija

$\bar{Q}_{N,m}(p) = \sum_{n=m}^N B_N(p; n)$  nepadajoča funkcija spremenljivke  $p$ .

*Dokaz:*

Pri  $m < N$  lemo dokažemo z odvajanjem:

$$\begin{aligned}
 Q'_{N,m}(p) &= \left( \sum_{n=0}^m \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n \cdot (1-p)^{N-n} \right)' = \\
 &= \sum_{n=1}^m \frac{N!}{(n-1)! (N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n} - \sum_{n=0}^m \frac{N!}{n! (N-n-1)!} p^n (1-p)^{N-n-1} = \\
 &= N \cdot \sum_{n=1}^m \frac{(N-1)!}{(n-1)! [N-1-(n-1)]!} p^{n-1} (1-p)^{N-1-(n-1)} - \\
 &- N \cdot \sum_{n=0}^m \frac{(N-1)!}{n! (N-1-n)!} p^n (1-p)^{N-1-n} = \\
 &= N \cdot Q_{N-1,m-1}(p) - N \cdot Q_{N-1,m}(p) = - \frac{N!}{m! (N-1-m)!} p^m \cdot (1-p)^{N-1-m} \leq 0
 \end{aligned}$$

Pri  $m = N$  je  $Q_{N,N}(p) = 1$ , tako da je prvi del trditve leme očiten. Drugi del trditve sledi iz  $\bar{Q}_{N,m}(p) = 1 - Q_{N,m-1}(p)$ .

Sedaj poiščimo največjo vrednost izraza  $P_N(p, r; D)$  pri pogoju  $0 \leq p \leq r$ ,  $p + r \leq 1$ . Ker je  $P_N(p, r; D)$  zvezna funkcija, dobimo njen maksimum pri nekem paru  $(p_0, r_0)$ ,  $0 \leq p_0 \leq r_0$ ,  $p_0 + r_0 \leq 1$ . Če ti dve vrednosti vstavimo v (5), takoj z lemo 1 ugotovimo, da je  $r_0 = p_0$ . Tako je

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq p \leq r} P_N(p, r; D) &= P_N(p_0, r_0; D) = P_N(p_0, p_0; D) = \max_{0 \leq p \leq 0,5} P_N(p, p; D) = \\ &= \max_{0 \leq p \leq 0,5} \sum_D \frac{N!}{n! m! (N - n - m)!} \cdot p^{n+m} \cdot (1 - 2p)^{N-n-m} \end{aligned} \quad (7)$$

Kot bomo videli na primeru, zadnji izraz v (7) v splošnem nima ekstrema na krajiščih intervala. Zato je najbolj primerno to funkcijo tabelirati in ji približno določiti največjo vrednost. Kot primer v Tabeli 1 navajamo vrednosti  $P_{40,7}(p)$ ,  $P_{40,8}(p)$ ,  $P_{40,9}(p)$  in  $P_{40,10}(p)$ .

Tabela 1

| $P$         | $p$ | 0,00  | 0,05  | 0,10  | 0,15  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,35  | 0,40  | 0,45  | 0,50  |
|-------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_{40,7}$  |     | 0,000 | 0,001 | 0,011 | 0,030 | 0,052 | 0,072 | 0,092 | 0,110 | 0,126 | 0,140 | 0,134 |
| $P_{40,8}$  |     | 0,000 | 0,000 | 0,004 | 0,014 | 0,030 | 0,046 | 0,063 | 0,078 | 0,093 | 0,105 | 0,134 |
| $P_{40,9}$  |     | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,007 | 0,016 | 0,028 | 0,041 | 0,054 | 0,066 | 0,078 | 0,077 |
| $P_{40,10}$ |     | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,003 | 0,009 | 0,016 | 0,026 | 0,036 | 0,046 | 0,056 | 0,077 |

Podobno lahko rešimo nalogo: Imamo  $p \geq r$ . Kolikšna je verjetnost, da je  $m \geq n + d$  ( $d \geq 0$ )? Ali to verjetnost lahko od zgoraj omejimo z neko funkcijo spremenljivke  $r$ ? Pri dokazovanju izhajamo iz enačbe (6).

V praksi se včasih — kot bomo videli tudi na primeru — sprašujemo, ali nima zaporedje  $p_k(\Delta) = P(k\Delta) - P((k-1)\Delta)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  pri nekem  $\Delta > 0$  dveh lokalnih maksimumov. Če jih ima, rečemo, da je bimodalno. Na postavljeno vprašanje ne moremo, če poznamo le empirično porazdelitev, odgovoriti popolnoma gotovo, temveč le z nekim tveganjem  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Seveda je ugodno, če je to tveganje čim manjše.

Najlažje delo imamo, če ima omenjeno zaporedje le tri člene, ko je  $p = P(t + \Delta) - P(t)$ ,  $r = P(t + 2\Delta) - P(t + \Delta)$  in  $s = P(t + 3\Delta) - P(t + 2\Delta)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\Delta > 0$ . V primeru bimodalnosti je  $p > r$  in  $s > r$ . (\*)

Pri dokazovanju izhajamo, kot je v statistiki običajno, iz nasprotne trditve, da (\*) ni izpolnjen. To pomeni, da urejena trojka  $(p, r, s)$  — rekli bomo kar porazdelitev — ni bimodalna. Tedaj imamo tri nezdružljive možnosti:

- a)  $p \leq r < s$ ,  $p + r + s \leq 1$
- b)  $p \leq r$ ,  $s \leq r$ ,  $p + r + s \leq 1$  in
- c)  $p > r \geq s$ ,  $p + r + s \leq 1$

ki so komplementarne bimodalnosti.

Pogoja  $p + r + s \leq 1$ , ki se stalno ponavlja, odslej ne bomo več pisali.

Ker privzamemo, da je empirična porazdelitev bimodalna, imamo:  $n \geq m + d$ ,  $l \geq m + e$ ,  $m \geq 0$ ,  $d \geq 0$ ,  $e \geq 0$ ,  $n + m + l \leq N$ .

Ti pogoji nam določajo polje  $D = D_N(d, e) = \{(n, m, l) : n \geq m + d, l \geq m + e, m \geq 0, n + m + l \leq N\}$

Preden bomo natančno proučili navedene tri možnosti, bomo  $P_N(p, r, s; D)$  spremenili v oblike, ki so enakovredne oblikama (5) in (6) in si tako olajšali nadaljnje sklepanje.

Kot rečeno, izraz

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_D \frac{N!}{n! m! l! (N - n - m - l)!} \cdot p^n \cdot r^m \cdot s^l \cdot (1 - p - r - s)^{N - n - m - l}$$

dalje preoblikujemo v

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_D \frac{N!}{n! m! (N - n - m)!} \cdot p^n \cdot r^m \cdot (1 - p - r)^{N - n - m} \cdot \frac{(N - n - m)!}{l! (N - n - m - l)!} \cdot \left(\frac{s}{1 - p - r}\right)^l \cdot \left(\frac{1 - p - r - s}{1 - p - r}\right)^{N - n - m - l}$$

ali

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_D P_N(p, r; n, m) \cdot B_{N - n - m} \left( \frac{s}{1 - p - r}; l \right) \quad (8)$$

Če sedaj v (8) uporabimo (5) in (6), dobimo

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_D B_N(p; n) \cdot B_{N - n} \left( \frac{r}{1 - p}; m \right) \cdot B_{N - n - m} \left( \frac{s}{1 - p - r}; l \right) \quad (9)$$

ter

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_D B_N(r; m) \cdot B_{N - m} \left( \frac{p}{1 - r}; n \right) \cdot B_{N - n - m} \left( \frac{s}{1 - p - r}; l \right) \quad (10)$$

Ker v izrazu  $P_N(p, r, s; n, m, l)$  lahko pare  $(p, n)$ ,  $(r, m)$ ,  $(s, l)$  zamenjamo med seboj, ne da bi spremenili njegovo vrednost, dobimo več formul, ki so podobne (9) in (10). Navedimo le eno, ki jo bomo pozneje potrebovali:

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_D B_N(r; m) \cdot B_{N - m} \left( \frac{s}{1 - r}; l \right) \cdot B_{N - m - l} \left( \frac{p}{1 - r - s}; n \right) \quad (11)$$

Sedaj lahko dobljene verjetnosti ocenimo navzgor, in sicer najprej v primeru a).

Poleg polja  $D_N(d, e) = D$  vzamemo še projekcije tega polja v ravnine  $(m, l)$ ,  $(n, l)$  in  $(n, m)$  ter jih po vrsti označimo  $D_n$ ,  $D_m$  in  $D_l$ .

Delo pričnimo z definicijo in računanjem  $P_a$ . Uporabimo formulo (11), v kateri sumiramo najprej po  $n$ :

$$P_a = \sup_{p \leq r \leq s} P_N(p, r, s; D) = \max_{p \leq r \leq s} \sum_{D_n} P_N(r, s; m, l) \cdot \sum_{n \leq m + d}^{N - m - l} B_{N - m - l} \left( \frac{p}{1 - r - s}; n \right)$$

Pri poljubno izbranih  $r$  in  $s$  — zato tudi pri tistih, pri katerih imamo maksimum — je desni izraz zaradi leme 1 največji takrat, ko je  $p$  največji. Tedaj je  $p = r$  in

$$P_a = \max_R P_N(r, r, s; D)$$

Polje  $R$ , na katerem sedaj iščemo maksimum, določajo pogoji:

$$r \leq s \leq 1 - 2r \leq \frac{1}{3} \quad (12)$$

Če pri zapisu  $P_a$  uporabimo enačbo (8), v kateri pišemo  $p = r$ , in najprej sumiramo po  $l$ :

$$P_a = \max_R \sum_{D_l} P_N(r, r; n, m) \cdot \sum_{l=m+e}^{N-n-m} B_{N-n-m} \left( \frac{s}{1-2r}; l \right)$$

nam lema 1 in (12) takoj povesta, da je desni izraz največji takrat, ko je  $s = 1 - 2r$ . Tedaj je vsota po  $l$  vedno enaka 1, tako da imamo

$$P_a = \max_{0 \leq r \leq 1/3} \sum_D P_N(r, r; n, m) = \max_{0 \leq r \leq 1/3} \sum_{D_l} \frac{N!}{n! m! (N-n-m)!} \cdot r^{n+m} \cdot (1-2r)^{N-n-m} \quad (13)$$

Navedemo lahko še eksplicitno obliko sumacijskega polja  $D_l$

$$D_l = \{(n, m) : 0 \leq m \leq \frac{1}{3}(N-d-e), \quad m+d \leq n \leq N-2m-e\}$$

Izraz (13) je podoben izrazu (7); v njem le sumiramo po manjšem polju in iščemo ekstrem vsote na manjšem območju.

Zaradi simetričnosti  $P_N(p, r, s; n, m, l)$  glede na pare  $(p, n)$ ,  $(r, m)$ ,  $(s, l)$  primer c) obravnavamo podobno kot primer a) in končno dobimo

$$P_c = \max_{p > r \geq s} P_N(p, r, s; D) = \max_{0 \leq s \leq 1/3} \sum_{D_n} \frac{N!}{m! l! (N-m-l)!} \cdot s^{m+l} \cdot (1-2s)^{N-m-l} \quad (14)$$

$$D_n = \{(m, l) : 0 \leq m \leq \frac{1}{3}(N-d-e), \quad m+e \leq l \leq N-2m-d\}$$

Izraza (13) in (14) sta si podobna, saj iz (13) dobimo (14), če v njem  $n$  zamenjamo z  $l$ ,  $p$  s  $s$  in  $d$  z  $e$ . Če izraza računamo numerično, računamo vrednosti enake funkcije.

Preostala nam je še možnost b), pri kateri je  $0 \leq p \leq r$ ,  $0 \leq s \leq r$ . Ta dva pogoja določata neki zaprt prostor  $S$ .

Pogoja  $0 \leq p \leq r$ ,  $p + 2r \leq 1$  podobno določata neko zaprto polje  $T$ . Če v enačbi (9) najprej fiksiramo  $p$  in  $r$  ter zapišemo

$$P_N(p, r, s; D) = \sum_{D_l} B_N(p; n) \cdot B_{N-n} \left( \frac{r}{1-p}; m \right) \cdot \sum_{l=m+e}^{N-n-m} B_{N-n-m} \left( \frac{s}{1-p-r}; l \right)$$

je zaradi leme 1 očitno, da je  $P_N(p, r, s; D)$  nepadajoča funkcija spremenljivke  $s$ . Zaradi pogoja b) je torej očitno, da imamo pri fiksnih  $p$  in  $r$  ekstrem tedaj, ko je  $s = r$ :

$$P_b = \max_s P_N(p, r, s; D) = \max_T P_N(p, r, r; D).$$

Da izraz na desni ocenimo še naprej, uporabimo enačbo (11) in v njej upoštevamo, da je  $s = r$ . Imamo

$$P_N(p, r, r; D) = \sum_{D_n} B_N(r; m) \cdot B_{N-m} \left( \frac{r}{1-r}; l \right) \cdot \sum_{n=m+d}^{N-m-l} B_{N-m-l} \left( \frac{p}{1-2r}; n \right)$$

Ker velja lema 1, je pri fiksnem  $r$  izraz na desni nepadajoča funkcija spremenljivke  $p$ . Izraz  $P_N(p, r, r; D)$  je torej pri omejitvi  $0 \leq p \leq r$ ,  $p + 2r \leq 1$  navzgor omejen s  $P_N(r, r, r; D)$ . Ker to vrednost pri  $p = r$  tudi doseže, je

$$\begin{aligned} P_b &= \max_s P_N(p, r, s; D) = \max_{0 \leq r \leq 1/3} P_N(r, r, r; D) = \\ &= \max_{0 \leq r \leq 1/3} \sum_D \frac{N!}{n! m! l! (N-n-m-l)!} \cdot r^{n+m+l} \cdot (1-3r)^{N-n-m-l} \end{aligned} \quad (15)$$

Z vprašanjem, pri kateri vrednosti  $r$  ima funkcija na desni v (15) ekstrem, se nismo posebej ukvarjali. Menimo, da je najbolj prikladno, če funkcijo tabeliramo pri raznih vrednostih  $r$ ,  $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$  in ekstrem določimo približno iz teh vrednosti. Za primere  $N = 40$ ;  $d = e = 7, 8, 9, 10$  smo funkcijo tabelirali v Tabelo 2. Kot vidimo, funkcija v vseh primerih na celotnem intervalu narašča.

Tabela 2

| $P$            | $p$ | 0,00  | 0,03  | 0,06  | 0,09  | 0,12  | 0,15  | 0,18  | 0,21  | 0,24  | 0,27  | 0,30  | 0,33  |
|----------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_{40,7,7}$   |     | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,003 | 0,006 | 0,010 | 0,014 | 0,019 | 0,024 | 0,028 |
| $P_{40,8,8}$   |     | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,002 | 0,004 | 0,007 | 0,009 | 0,013 | 0,016 |
| $P_{40,9,9}$   |     | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,001 | 0,003 | 0,004 | 0,006 | 0,009 |
| $P_{40,10,10}$ |     | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,002 | 0,003 | 0,004 |

Naš namen, da ocenimo, kaj je z bimodalnostjo trojice  $(p, r, s)$ , zahteva le še nekaj dela.

Z  $A$  označimo dogodek, da je  $0 \leq p \leq r < s$ ,  $p + r + s \leq 1$  (možnost a)); z  $B$  označimo dogodek, da je  $0 \leq p \leq r$ ,  $0 \leq s \leq r$ ,  $p + r + s \leq 1$  (možnost b)); s  $C$  označimo dogodek, da je  $p > r \geq s \geq 0$ ,  $p + r + s \leq 1$  (možnost c)) in z  $D$  dogodek, da je  $n \geq m + d$ ,  $m \geq 0$ ,  $l \geq m + e$ ,  $n + m + l \leq N$  (seveda pri danih  $d \geq 0$ ,  $e \geq 0$  in  $N > 0$ ).

Da so  $A$ ,  $B$  in  $C$  res dogodki, pokažemo takole:  $p$ ,  $r$  in  $s$  so dana števila ( $0 \leq p$ ,  $0 \leq r$ ,  $0 \leq s$ ,  $p + r + s \leq 1$ ), ki pa jih ne poznamo. Zato je vsak  $A$ ,  $B$  in  $C$  ali nemogoč ali gotov dogodek. (Gotov je lahko seveda kvečjemu eden.)

Nas zanima vrednost  $P(D | (A + B + C))$ . Če uporabimo formulo za pogojno verjetnost in nezdružljivost dogodkov  $A$ ,  $B$  in  $C$ , imamo

$$\begin{aligned} P(D | (A + B + C)) &= \frac{P(D(A + B + C))}{P(A + B + C)} = \frac{P(DA + DB + DC)}{P(A + B + C)} = \\ &= \frac{P(DA) + P(DB) + P(DC)}{P(A) + P(B) + P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(D | A) + P(B) \cdot P(D | B) + P(C) \cdot P(D | C)}{P(A) + P(B) + P(C)} \end{aligned} \quad (16)$$

Od tod ocenimo

$$P(D | (A + B + C)) \leq \frac{P(A) \cdot P_a + P(B) \cdot P_b + P(C) \cdot P_c}{P(A) + P(B) + P(C)} \leq \max \{P_a, P_b, P_c\} \quad (17)$$

Dogodek  $A + B + C$  je komplementaren dogodku, da je urejena trojica  $(p, r, s)$  bimodalna. Označimo ga  $\overline{BI}$ . Tako (17) lahko pišemo

$$P(D | \overline{BI}) \leq \max \{P_a, P_b, P_c\} \quad (18)$$

Če nimamo dodatnih informacij o dogodkih  $A$ ,  $B$  in  $C$ , ocene (18) ne moremo več izboljšati.

Sedaj si oglejmo uporabo naše teorije na primeru (glej lit. 2): »Pogostost pojava nenalezljive bolezni  $B$  pri človeku je v posameznih življenjskih obdobjih različna in iz nekaterih raziskav lahko sklepamo, da je porazdeljena bimodalno.«

Na vzorcu  $N = 40$  želimo statistično preveriti omenjeno trditev. Zato najprej ocenimo teoretično verjetnost  $P(D | \overline{BI})$  za primer  $N = 40$  in  $e = d \geq 0$ .  $d$  večamo toliko časa, dokler ne dobimo  $P(D | \overline{BI}) \leq 0,05$ . V našem primeru smo dobili  $d = 8$ ,  $P(D | \overline{BI}) \leq 0,044$ . Na vzorcu pa smo dobili  $n = 14$ ,  $m = 4$ ,  $l = 20$ , tako da se je zgodil dogodek  $D$ . Verjetnost, da pogostost pojava bolezni  $B$  pri ljudeh ni porazdeljena bimodalno, je torej majhna ( $p \leq 0,05$ ). Zato to hipotezo pri stopnji značilnosti 0,05 zavrnilo. V praksi zato smemo privzeti, da je pogostost pojava bolezni  $B$  pri ljudeh res porazdeljena bimodalno.

## LITERATURA

- [1] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Ljubljana, Mladinska knjiga 1971.
- [2] M. Skulj, *Pomen starosti med psihotičnimi depresijami*, Zdravstveni vestnik, 48 (1979), 203—205.

Zahvaljujem se dipl. inž. M. Tepinovi za izdelavo računalniških programov in dr. med. M. Skulju za vzpodbudo, da je to razmišljanje sploh nastalo.

## DOPISI

### GLAS S SREDNJE ŠOLE ALI KDAJ BO ŽE KONEC Z NERODNO BESEDO

V prispevku\* in utrinku\* pa v raznih slovarjih itn. lahko beremo, da za količino nekateri (še vedno) uporabljajo ime veličina. Zdaj pa bi bil že čas, da to nekoliko nerodno besedo pozabimo in se enkrat za vselej enotno dogovorimo in damo prednost izrazu količina.

Trdim lahko, da na naših srednjih šolah že dalj časa ni takega profesorja matematike in fizike, ki bi pri svojem predmetu uporabljal izraz veličina namesto količine. Pa saj vsi vemo, kaj veličina pomeni!

Marijan Prosén

---

\* Glej Obzornik mat. fiz. 27 (1980) 61 in 30 (1983) 31.

## KAJ JE EKSERGIJA?

V današnjem času vse večje energijske lakote se odnos do energije spreminja v široki javnosti in tudi v strokovnih krogih. Koristen pojem, ki strokovnjakom lahko pripomore do drugačnega pogleda na energijo, je *eksergija*. Pojem so razvili tehniki, a se je v zadnjem času tako razširil, da bi ga morali spoznati tudi fiziki.

Na začetku nekoliko obširnejše predstavitev novega pojma na splošno obdelajmo *odprte sisteme*, to je takšne, ki izmenjavajo z okolico tudi snov, ne samo dela in toplote. Navadno jih precej zapostavljamo in dajemo prednost *zaprtim sistemom*, ki z okolico snovi ne izmenjavajo.

Zamislimo si odprt sistem, v katerega priteče pri tlaku  $p_2$  in temperaturi  $T_2$  s hitrostjo  $v_2$  pri višini  $z_2$  masa snovi  $m$  s prostornino  $V_2$ . V tem času naj odteče iz njega v okolico pri tlaku  $p_1$  in temperaturi  $T_1$  s hitrostjo  $v_1$  pri višini  $z_1$  masa snovi  $m$  s prostornino  $V_1$ . Vzeli smo, da se masa odtekajoče snovi ujema z maso pritekajoče in se tako omejili na stacionarni tok snovi skozi sistem in na stacionarne razmere sploh. Energija sistema se v tem primeru ne spremeni in iz energijskega zakona izhaja, da je odvedena energija enaka dovedeni energiji in dovedenemu delu in dovedeni toploti. K dovedeni energiji štejemo notranjo, kinetično in potencialno energijo, ki jo prinese snov:  $W_n(p_2, T_2) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2$ , in k odvedeni energiji notranjo, kinetično in potencialno energijo, ki jo odnese snov:  $W_n(p_1, T_1) + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1$ . Delo razdelimo na delo tlaka  $p_2V_2 - p_1V_1$  in na dodatno delo  $A$ , na primer delo na osi stroja. Privzamemo, da poteka izmenjavanje toplote med sistemom in okolico — brez izmenjavanja snovi — samo pri temperaturi okolice  $T_1$ . Navadno sistem toploto  $Q_1$  in delo  $A$  odda, tako da sta ti količini negativni.

Enačbo

$$\begin{aligned} W_n(p_2, T_2) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 + p_2V_2 - p_1V_1 + A + Q_1 = \\ = W_n(p_1, T_1) + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 \end{aligned}$$

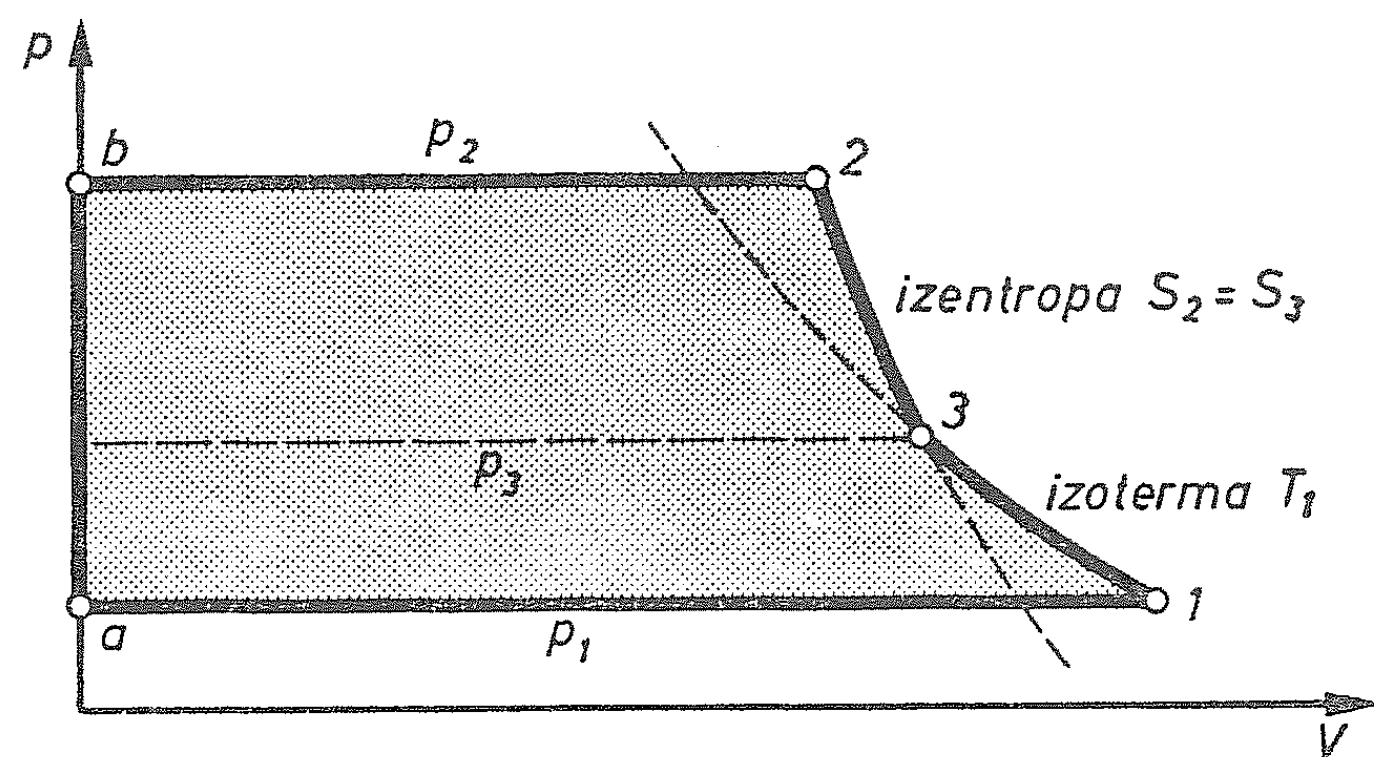
predelamo in vpeljemo entalpijo  $H = W_n + pV$ :

$$-A = H(p_2, T_2) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 - (H(p_1, T_1) + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1) + Q_1$$

Ta zveza nam je domača kot posplošena Bernoullijeva enačba  $H + \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{konstantno}$ , ki velja, če ni dodatnega dela in izmenjavanja toplote z okolico [1].

Vprašamo se po *razpoložljivem delu*, ki ga lahko odda sistem v najugodnejšem primeru [2]. Hitro odgovorimo, da odda sistem največ dela v danih okoliščinah, če so vse spremembe v njem reverzibilne. To pomeni, da mora biti tudi tok snovi skozi sistem reverzibilen. Tako je razpoložljivo delo popolnoma določeno, ne da bi bilo treba posebej predpisovati vmesna stanja, preko katerih preide v sistemu snov od tlaka  $p_2$  in Temperature  $T_2$  do tlaka  $p_1$  in temperature  $T_1$ . Nič pa ne škodi, če si izberemo za ta prehod kdaj kako posebno pot (Sl. 1).

Iz entropijskega zakona izluščimo toploto, ki jo sistem pri reverzibilni spremembi izmenja z okolico pri temperaturi  $T_1$ :  $Q_1 = T_1(S(p_2, T_2) - S(p_1, T_1))$ .



Sl. 1. Tako vpeljemo eksergijo za posebno reverzibilno pot iz začetnega stanja pri tlaku  $p_2$  in temperaturi  $T_2$  v stanju okolice pri tlaku  $p_1$  in temperaturi  $T_1$  [4]. Najprej snov pri konstantnem tlaku  $p_2$  in temperaturi  $T_2$  spravimo v valj (b  $\rightarrow$  2), nato jo z odmikanjem bata adiabatno razpnemo, da pade temperatura od  $T_2$  na  $T_1$  in tlak od  $p_2$  na  $p_3$  (2  $\rightarrow$  3), potem jo izotermno razpnemo pri temperaturi  $T_1$ , da pade tlak od  $p_3$  na  $p_1$  (3  $\rightarrow$  1) in naposled pri konstantnem tlaku  $p_1$  in temperaturi  $T_1$  spravimo iz valja (1  $\rightarrow$  a). Delo pri tej reverzibilni spremembi je raz-

položljivo delo in mu ustreza ploščina lika a231b, torej  $-A_0 = \int_a^b V dp$ . Za entalpijo  $H = W_n + pV$  velja  $dH = dW_n + p dV + V dp$ . Iz energijskega zakona v diferencialni obliki  $dW_n = dQ + dA = dQ - p dV$  sledi  $V dp = dH - dQ$  in je

$$-A_0 = \int_a^b V dp = \int_1^2 dH - \int_1^2 dQ = H_2 - H_1 - T_1(S_2 - S_1)$$

Prva sprememba je namreč izentropna, tako da je  $S_3 = S_2$ , druga pa reverzibilna izotermna pri temperaturi  $T_1$ , tako da je  $Q = T_1(S_3 - S_1) = T_1(S_2 - S_1)$ . Pri tem nismo upoštevali možnosti, da se spremenita kinetična in potencialna energija sistema

Pri tem je  $S(p_2, T_2)$  entropija, ki jo prinese snov, in  $S(p_1, T_1)$  entropija, ki jo odnese snov. Tako je razpoložljivo delo naposled

$$-A_0 = H(p_2, T_2) - T_1 S(p_1, T_1) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 - (H(p_1, T_1) - T_1 S(p_1, T_1) + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1)$$

Pogosto se kinetična in potencialna energija ne spremenita in je razpoložljivo delo

$$-A_0 = H(p_2, T_2) - T_1 S(p_2, T_2) - (H(p_1, T_1) - T_1 S(p_1, T_1)) \quad (1a)$$

Mimogrede se vprašajmo, kolikšno je razpoložljivo delo, ko preide zaprt sistem, torej sistem, ki mu ne dovajamo snovi, iz začetnega stanja pri tlaku  $p_2$  in temperaturi  $T_2$  v končno stanje pri tlaku  $p_1$  in temperaturi  $T_1$ . Ker je v tem primeru po energijskem zakonu sprememba energije enaka dovedenemu delu in dovedeni toploti, je razpoložljivo delo

$$-A_0 = W_n(p_2, T_2) - T_1 S(p_2, T_2) - (W_n(T_1, p_1) - T_1 S(p_1, T_1)) \quad (1b)$$

Upoštevali smo samo dodatno delo in izračunali kot prej toploto, ki jo sistem reverzibilno izmenja z okolico pri temperaturi  $T_1$ . Pri stacionarnem toku skozi sistem (1a) in pri zaprtem sistemu (1b) je mogoče razpoložljivo delo izraziti kot razliko dveh količin; v prvem primeru je to  $H - T_1 S$ , v drugem pa  $W_n - T_1 S$ . Če ne bi bila entropija pomnožena s konstantno temperaturo okolice  $T_1$ , ampak z vsakokratno temperaturo, na primer s  $T_2$ , bi šlo v prvem primeru za Gibbsovo prosto entalpijo  $G = H - TS$  in v drugem za Helmholtzovo prosto energijo  $F = W_n - TS$ . Tako si izraza za razpoložljivo delo v obeh primerih lažje vtisnemo v spomin.

Razpoložljivo delo je uvedlo v termodinamiko neodvisno drug od drugega več fizikov in tehnikov. Nekateri pripisujejo prvenstvo M. Gouyu (1889), nekateri J. W. Gibbsu (1873, 1875) ali P. G. Taitu (1868). Drugi menijo, da izvira pojem od J. C. Maxwella (1871) ali lorda Kelvina (1879). Zaslužna za razvoj

tega pojma v strojništvu novejšega časa sta F. Bošnjaković (1935) in Z. Rant\* (1956) [3], [4]. Rant je specifično razpoložljivo delo, to je na enoto mase preračunano razpoložljivo delo, poimenoval *eksergijo* (nemško Exergie). V angleško govorečem svetu so dolgo vztrajali pri imenu available work ali availability [2], zdaj pa se tudi tam uveljavlja exergy (spočetka essergy), podobno kot v Sovjetski zvezi [5], [6].

Terminologija ni popolnoma enotna. Nekateri razumejo pod eksergijo specifično razpoložljivo delo nasploh. Drugi se omejujejo na stacionarni tok snovi skozi sistem in večinoma postavijo za eksergijo

$$e(p, T) = h(p, T) - T_1 s(p, T)$$

s specifično entalpijo  $h$  in specifično entropijo  $s$ . Če je treba upoštevati spremembo kinetične in potencialne energije, dodajo še  $\frac{1}{2}v^2$  in  $gz$ . Specifično razpoložljivo delo pri stacionarnem toku snovi skozi sistem je tedaj

$$-A_0/m = e_2 - e_1$$

Naknadno posebej vpeljejo *eksergijo toplote*, s čimer vključijo tudi zaprte sisteme. Obravnavajo namreč primer, pri katerem sistem ne izmenjuje toplote samo pri temperaturi okolice  $T_1$ , ampak mu dovedemo še toploto  $Q_2$  pri višji temperaturi  $T_2$ , ne da bi izmenjal z okolico snov. Toploto preračunajo na maso snovi, od katere sistem prejme toploto,  $q = Q_2/m$ , in postavijo za eksergijo toplote, ki jo dovedemo sistemu pri temperaturi  $T_2$ :

$$e_q = q(T_2 - T_1)/T_2$$

Če namreč idealnemu toplotnemu stroju — ta ponavlja reverzibilno krožno spremembo in prejema toploto samo pri višji temperaturi  $T_2$  in jo oddaja samo pri nižji temperaturi  $T_1$  — dovedemo toploto  $Q_2$ , odda delo  $-A_0 = -Q_2 \eta_1^C = Q_2(T_2 - T_1)/T_2$ . Tu je  $\eta_1^C$  izkoristek idealnega (Carnotovega) toplotnega stroja. S toploto  $Q_1$  pri temperaturi  $T_1$  ne odvedemo nobene eksergije, tako da je  $e_q = e_2 - e_1$ .

Nekateri vpeljejo še pojem *anergije*, to je preostale energije, ki je ni mogoče izkoristiti v obliki dela. Namesto v navadni obliki — v neodvisnem sistemu se ohrani energija, entropija se ohrani pri reverzibilnih spremembah, pri ireverzibilnih pa poveča — lahko ti izrečejo energijski in entropijski zakon v novi obliki: v neodvisnem sistemu se ohrani vsota skupne eksergije in skupne anergije, skupna eksergija se pri reverzibilnih spremembah ohrani, pri ireverzibilnih pa zmanjša.

Ob tem se spomnimo misli, da »...nekateri celo trdijo, da s poudarjanjem zakona o ohranitvi energije v neodvisnih sistemih učenca napeljejo na misel, da je nesmiselno govoriti o varčevanju z energijo, ki je tako ali tako neuničljiva...« [7]. Glede tega zakona v novi obliki ni mogoče odreči neke privlačnosti. Vendar eksergije najbrž ni mogoče vpeljati v srednji šoli, saj učenci ne poznajo entalpije in pridejo do entropijskega zakona le oklevaje. Tudi pri uvodnem predavanju iz fizike na univerzi nastopijo pri nekaterih skupinah študentov podobne težave.

Računanje z eksergijo ima vsaj dve prednosti. Najprej je mogoče preprosto vpeljati izkoristek, ki upošteva entropijski zakon. Običajni *energijski*

---

\* Zoran Rant (1904—1972), profesor na strojni fakulteti v Ljubljani in na tehniški visoki šoli v Braunschweigu (ZRN).

*izkoristek* ali *izkoristek prve vrste* je določen kot kvocient izkoriščene in dovedene energije. Za toplotne stroje je  $\eta_1 = -A_{izk}/Q_{dov}$ , za druge stroje, na primer vodno turbino, elektromotor ali dinamostroj, pa  $\eta_1 = -A_{izk}/A_{dov}$ . Izkoristek dobro izdelanih velikih drugih strojev se približuje idealni vrednosti 1, pri toplotnih strojih pa zaradi entropijskega zakona idealni Carnotovi vrednosti  $\eta_1 = (T_2 - T_1)/T_2$ .

Po tem premisleku vpeljemo *eksergijski izkoristek* ali *izkoristek druge vrste*:

$$\eta_2 = -A_{izk}/(-A_0) = (-A_{izk}/m)/(e_{dov} - e_{odv})$$

Tako določeni izkoristek se za vse stroje, tudi za toplotne, približuje idealni vrednosti 1; dosegel bi jo, če bi bile spremembe reverzibilne.

Povejmo še besedo, dve o izkoristku naprav za ogrevanje. Izkoristek prve vrste za napravo za ogrevanje z gorivom je  $\eta_1 = -Q_{izk}/Q_{dov}$ . Za ta primer vpeljemo izkoristek druge vrste kot

$$\eta_2 = e_{odv}/e_{dov}$$

tako da se približuje idealni vrednosti 1 pri reverzibilnih spremembah. Tedaj bi bila namreč odvedena eksergija enaka dovedeni.

Za zgled ocenimo izkoristek druge vrste za manjšo napravo za centralno ogrevanje. Naprava prejema toploto v peči pri temperaturi dimnih plinov okoli  $T_2 = 1200^\circ\text{C}$ . Pri tem izkoristi 60 % toplote, ki se sprosti pri sežigu goriva, preostanek gre v glavnem v dimnik. Grelniki v stanovanju oddajajo toploto zraku pri temperaturi  $T_3 = 20^\circ\text{C}$ . Za temperaturo okolice vzemimo  $T_1 = 0^\circ\text{C}$ . Kvocient odvedene eksergije  $e_{odv} = q'(T_3 - T_1)/T_3$  in dovedene eksergije  $e_{dov} = q(T_2 - T_1)/T_2$  je

$$\eta_2 = \eta_1(T_3 - T_1)T_2/(T_2 - T_1)T_3 = 0,6 \cdot 20 \text{ K} \cdot 1473 \text{ K}/1200 \text{ K} \cdot 293 \text{ K} = 0,05$$

Pri tem smo upoštevali, da je izkoristek prve vrste  $q'/q = \eta_1 = 0,6$ .

Preglednica: Ocene za izkoristek druge vrste nekaterih naprav in postopkov [4], [5]

|                                                           |      |
|-----------------------------------------------------------|------|
| turbina in dinamostroj v toplotni elektrarni              | 0,9  |
| sežig brez ostankov                                       | 0,65 |
| izmenjave toplote v parnem kotlu                          | 0,65 |
| parni kotel                                               | 0,5  |
| toplotna elektrarna                                       | 0,4  |
| izločitev kisika iz zraka ali alkohola iz vodne raztopine | 0,1  |
| ogrevanje stanovanj                                       | 0,05 |

Druga prednost računanja z eksergijo je v tem, da lahko preprosto izračunamo, kako učinkoviti so posamezni deli večje naprave, na primer toplotne elektrarne. Razlika  $1 - \eta_2$ , ki je za reverzibilno spremembo enaka nič, neposredno kaže, kolikšen del eksergije gre v kakem delu v izgubo, ali z drugimi besedami, koliko se del približa reverzibilnemu idealu. Za zgled ocenimo eksergijsko izgubo parnega kotla v toplotni elektrarni [5]. V tem parnem kotlu moramo dovesti vodi s temperaturo  $T_3 = 30^\circ\text{C}$ , toploto  $q = 3,66 \text{ MJ/kg}$ , da jo spremenimo v paro pri temperaturi  $T_4 = 562^\circ\text{C}$  (in tlaku 167 bar). Toploto dovajamo pri temperaturi dimnih plinov  $T_2 = 2000^\circ\text{C}$ , za okolico pa vzamemo temperaturo  $T_1 = 10^\circ\text{C}$ , kolikor meri temperatura hladilne vode v hladilniku (kondenzatorju).

Kotlu dovedemo eksergijo s sežigno toploto  $e_q = q(T_2 - T_1)/T_2$  in z vodo  $e_3 = h_3 - T_1 s_3$ , a odvedemo eksergijo s paro  $e_4 = h_4 - T_1 s_4$ . Razliko dovedene in odvedene eksergije obdrži kotel zase, se pravi, da so njegove eksergijske izgube

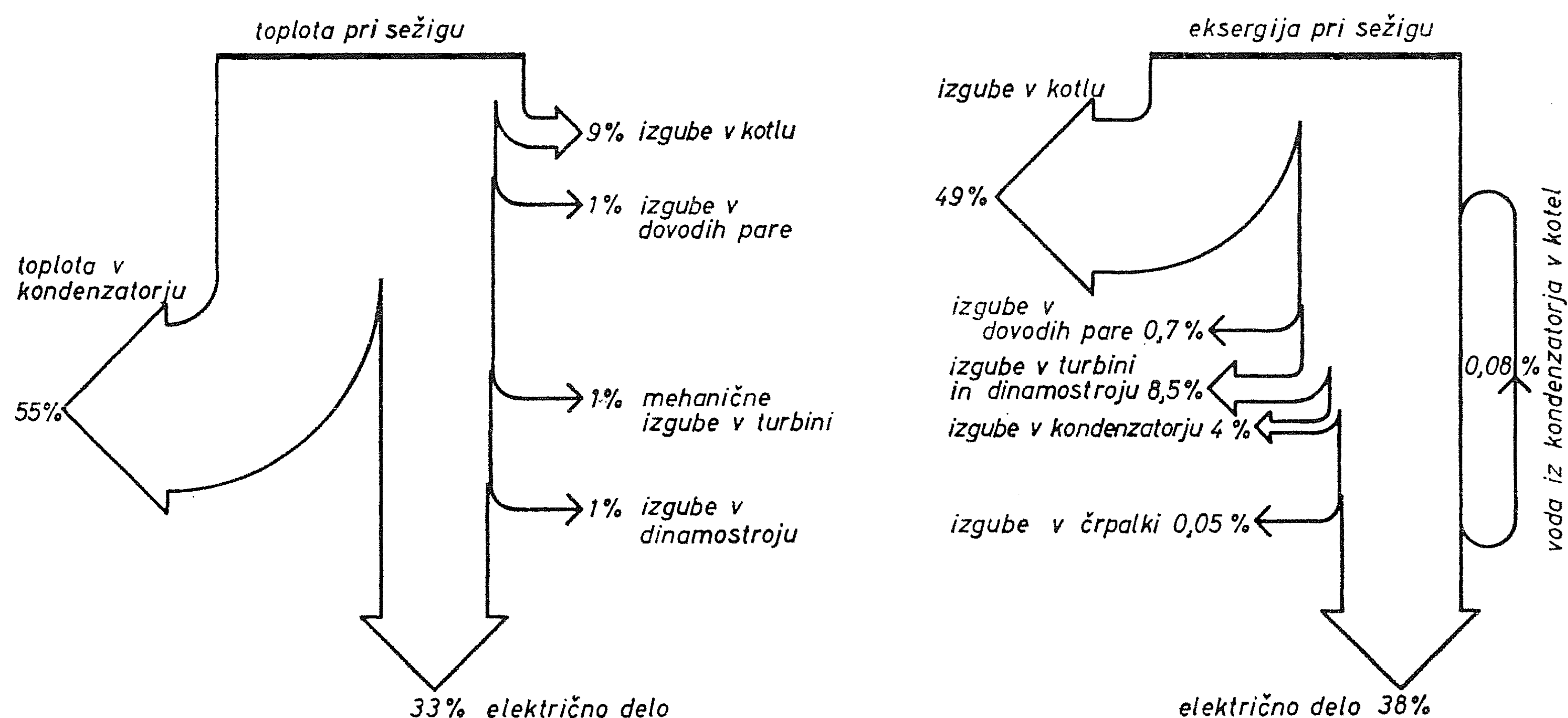
$$\begin{aligned} e_q + e_3 - e_4 &= q(T_2 - T_1)/T_2 + (h_3 - T_1 s_3) - (h_4 - T_1 s_4) = \\ &= 3,66 \text{ MJ kg}^{-1} \cdot 1990 \text{ K}/2273 \text{ K} + \\ &+ (0,1 \text{ MJ/kg} - 283 \text{ K} \cdot 0,27 \text{ kJ/kg K}) - \\ &- (3,42 \text{ MJ/kg} - 283 \text{ K} \cdot 6,35 \text{ kJ/kg K}) = \\ &= 3,2 \text{ MJ/kg} + 0,02 \text{ MJ/kg} - 1,62 \text{ MJ/kg} = \\ &= 3,22 \text{ MJ/kg} - 1,62 \text{ MJ/kg} = 1,60 \text{ MJ/kg} \end{aligned}$$

Podatke za specifično entalpijo in specifično entropijo smo razbrali iz parnih tabel.

Uvidimo, da prispeva voda, ki jo dovajamo kotlu pri temperaturi nad temperaturo okolice, samo 0,02 MJ/kg, to je manj kot desetinko odstotka dovedene eksergije. Pomembno je predvsem to, da se zgubi v kotlu kar 1,60 MJ kg<sup>-1</sup>/3,22 MJ kg<sup>-1</sup> = 49 % dovedene eksergije. Eksergijski izkoristek kotla je torej le 1 - 0,49 = 0,51. Tolikšne eksergijske izgube nastanejo iz dveh vzrokov. Del toplote, ki se sprosti pri sežigu, kakih 9 %, se izgubi v dimnik. Preostala izguba pa gre na račun ireverzibilnosti zaradi velike temperaturne razlike med dimnimi plini in vodno paro.

S podobnimi računi ugotovimo, da so v drugih delih elektrarne eksergijske izgube manjše: v parnih ceveh 0,7 %, v turbini 7,7 %, v dinamostroju 0,8 %, v hladilniku 3,9 % in napajalni črpalki 0,1 % (sl. 2). Skupne eksergijske izgube elektrarne so vsota vseh naštetih: 62 %. Iz tega sledi, da je eksergijski izkoristek elektrarne 1 - 0,62 = 0,38. Energijski izkoristek elektrarne dobimo, ko pomnožimo dobljeni rezultat z izkoristkom ustreznega Carnotovega stroja:

$$\eta_1 = \eta_2 \eta_1^C = \eta_2 (T_2 - T_1)/T_2 = 0,38 \cdot 1990 \text{ K}/2273 \text{ K} = 0,33$$



Sl. 2. Energijska (levo) in eksergijska bilanca (desno) neke toplotne elektrarne [5]. Del računa za kotel je narejen med besedilom. Pentlja na desni ustreza vodi, ki jo vodijo iz kondenzatorja nazaj v kotel in katere eksergijo smo izračunali

Na koncu mimogrede omenimo, da stanja okolice, *izhodiščnega* ali »mrtvega stanja« (angl. dead state), ni mogoče izbrati na osnovi termodinamičnih razlogov. Pri izbiri tega stanja, ki vsekakor mora biti ravnovesno, se je treba opreti na praktične razloge. Za tlak  $p_1$  izberejo navadni zračni tlak okoli 1 bara in za temperaturo  $T_1$  temperaturo ozračja med 0 °C in 30 °C. Več nejasnosti je glede kemijskega sestava v tem stanju, ki ga je tudi treba izbrati, če dopustimo kemijske reakcije. V najsplošnejšem primeru upoštevajo ravnovesno stanje ozračja, svetovnega morja in zemeljske skorje, kolikor je dostopna tehničnemu izkoriščanju. Razmere pa niso preproste, ker se z upoštevanom debelino zemeljske plasti spreminja povprečna koncentracija mineralov in postane eksergija odvisna od te debeline [8].

Janez Strnad

## LITERATURA

- [1] I. Kuščer, S. Žumer, *Termodinamika*, DMFA, Ljubljana 1974, str. 29.
- [2] G. J. van Wylen, *Thermodynamics*, J. Wiley & Sons, New York 1954, str. 229.
- [3] Z. Rant, *Termodinamika*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1963, str. 177.
- [4] F. Bošnjaković, *Technische Thermodynamik*, Steinkopf, Dresden 1965, str. 174.
- [5] V. A. Kirillin, V. V. Syčev, A. E. Šejndlin, *Engineering Thermodynamics*, Mir, Moscow 1976.
- [6] J. Kestin, *Availability: The Concept and Associated Terminology*, Energy 5 (1980) 679.
- [7] J. Ferbar, Razprava na posvetovanju Energijski problemi v pouku fizike, Obzornik mat. fiz. 27 (1980) 26.
- [8] J. Ahrendts, *Reference States*, Energy 5 (1980) 667.

## OB STOLETNICI SMRTI VILJEMA OGRINCA

Viljem Ogrinc (1845—1883) je bil po poklicu sodnik. V gimnazijskih in študentskih letih ter v prvih letih službovanja pa se je ukvarjal tudi z astronomijo. Vzgojen je bil v nemškem duhu. Kot dijak v Ljubljani sploh ni obiskoval pouka slovenščine. Slovensko narodno zavest so mu vcepili šele profesorji-frančiškani v Novem mestu, kjer je maturiral [1].

Že kot osmošolec je začel leta 1863 v Novicah objavljati poljudne prispevke iz astronomije o Luni, utrinkih, o Soncu. Ti in drugi prispevki v tedanjih slovenskih časopisih kažejo, da je dobro poznal osnove astronomije in jih znal izvrstno preliti v poljudno pisanje. Ogrinc je pisal v čisti slovenščini, njegov slog je jedrnat in jasen.

Mnogo se je ukvarjal s slovenskim astronomskim izrazoslovjem in ga je kot prvi vzorno uredil. Njegovo najpomembnejše delo je odličen prevod *Astronomije* iz nemške Schödlerjeve *Knjige prirode*. To delo, ki ga imamo lahko za prvi slovenski učbenik astronomije, je izšlo pri Slovenski matici leta 1870.

*Astronomija* ni bila le goli prevod, ampak najdemo v njej mnogo Ogrinčevih dodatkov, v katerih posreduje za tisti čas novejša spoznanja o zvezdah (tako že omenja spremenljivke, npr. Algola, Miro in nove zvezde), o zvezdnih kopicah in meglenicah (galaksijah), planetih, o Zemlji in Luni in o kometih in utrinkih. Od dodatka je treba omeniti kazalo in terminologijo po abecedi (nemško-slovensko), Luningovo karto in karto zvezdnega neba, v katero so vrisane zvezde do 4. magnitude [2].

Zadnja leta svojega kratkega življenja je Ogrinc popolnoma prenehal z »astronomskim« pisateljevanjem. Kot sodnik, ki je služboval po raznih krajih Slovenije, je bil pač preobremenjen z delom. Za astronomijo ni imel časa. V tem času se je odtujil slovenstvu in se mu pozneje popolnoma izneveril. Ni znano, zakaj. Kljub temu je za slovensko astronomijo storil toliko, da ne kaže pozabiti njegovega dela.

Marijan Prosén

## LITERATURA

- [1] *Slovenski biografski leksikon*.
- [2] V. Ogrinc, *Astronomija*, Ljubljana, Slovenska matica 1870.

## PROF. JOŽE POVŠIČ 75-LETNIK



Naš 75-letnik je zagledal luč sveta 6. marca 1907 v Dobrovi pri Novem mestu. Osnovno šolo je obiskoval v Škocjanu in Novem mestu. Po končani gimnaziji v Novem mestu se je posvetil študiju matematike in fizike na univerzi v Ljubljani in diplomiral l. 1934. Po diplomi se je dve leti zaposlil kot asistent za fiziko na Tehniški fakulteti in bil nato l. 1936 nastavljen za profesorja na Tehnični srednji šoli v Ljubljani, kjer je služboval do upokojitve. V zadnjih dveh desetletjih je opravljal poleg rednega pedagoškega dela še posle pomočnika ravnatelja.

Poleg vestnega in nad vse uspešnega vzgojnega dela z mladino je žrtvoval mnogo časa za delo v družbenih strokovnih organizacijah; objavil je tudi vrsto publikacij s področja pedagogike, biografije in bibliografije znamenitih slovenskih matematikov.

Od ustanovitve našega Društva matematikov, fizikov in astronomov je bil član odbora in med drugim vodil sekcijo za bibliografijo. L. 1954 je v Narodni univerzitetni knjižnici pripravil in organiziral razstavo del Jurija Vege in literature o njem. Kasneje je bil v našem

društvu duša prizadevanj za ureditev spominske sobe v rojstni hiši Jurija Vege v Zagorici.

Za njegovo publicistično dejavnost so najbolj pomembne biografije in bibliografije treh naših matematikov, ki so izšle pri Slovenski akademiji znanosti in umetnosti; te so: o Francu Močniku l. 1966, o Juriju Vegi l. 1974 in o Francu Hočevarju l. 1978. Številne članke in razprave s pedagoško in strokovno vsebino je objavil v revijah: Obzornik za matematiko in fiziko, Nastava matematike, Sodobna pedagogika in Pedagoški tisk. Nadalje je sodeloval s prispevki pri Jugoslovanski enciklopediji, Slovenskem biografskem leksikonu in pri zbirki Naši znameniti tehniki.

Za svoje požrtvovalno in uspešno delo v šoli in v javnosti je prejel l. 1967 nagrado Staneta Žagarja, predsednik republike pa ga je odlikoval s tremi odlikovanji; tretjega, red republike z bronastim vencem, je prejel l. 1974 ob 25-letnici našega društva.

Jubilant pravi, da je že dolgo v pokoju; tega pa nikakor ni opaziti, saj ga je videti še sredi dela, ko vneta kot mravljinček zbira gradivo za svoje bodoče publikacije: v okviru raziskovalne naloge pri Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko zbira zgodnje odmeve na dela prof. J. Plemlja v matematični literaturi.

Ob jubileju mu želimo, da bi še dolgo lahko opravljal svoje veliko poslanstvo — odkrivanje slovenske kulture, zakrite s tujim jezikom.

*Alojzij Vadnal*

## TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE V BEOGRADU

Od 2. do 5. aprila 1982 je bilo v Beogradu petnajsto zvezno in osmo mednarodno tekmovanje študentov matematike, ISTAM'82.

Iz Ljubljane so se tekmovanja udeležili Janko Gravner, Leopold Matoh in Mihael Perman. Popravljanje nalog je bilo kot vedno težavno in dolgo.

Janko Gravner je dosegel v konkurenci 3. in 4. letnikov tretje mesto, kar je vsekakor uspeh, posebej zato, ker je bil edini Jugoslovan med prvimi sedmimi.

Ekipni vrstni red je bil naslednji: Beograd, Praga 1, Dunaj, Budimpešta, Ljubljana, Szeged, Praga 2, Novi Sad, Skopje, Priština.

Za izziv bodočim tekmovalcem, študentom in tudi že diplomiranim matematikom podajamo še naloge s tega tekmovanja. Tekmovalci prvih in drugih letnikov so imeli skupne naloge, drugi pa so morali izbrati po dva predmeta. Izbiranje predmetov ni bilo čisto poljubno, vendar ga tu ne bi navajali.

### Naloge za 1. in 2. letnik

1. Naj bo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Nadalje naj bo dvakrat odvedljiva na  $(a, b)$  in  $f(a) = f(b) = 0$ . Dokaži, da velja ocena

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq M \frac{(b-a)^3}{12}$$

kjer je  $M = \sup_{x \in (a, b)} |f''(x)|$ .

2. Naj bo  $f$  polinom stopnje  $n-1$  s kompleksnimi koeficienti in  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  med seboj različna kompleksna števila. Za poljubno naravno število  $m$  in poljubne kompleksne polinome  $p_1, \dots, p_n$  naj bo

$$p(x) = f(x + \alpha_1) p_1(x^m) + \dots + f(x + \alpha_n) p_n(x^m)$$

Dokaži, da če je  $m > n$  in polinom  $q(x) = 1 + x + \dots + x^{m-1}$  deli polinom  $p$ , tedaj so vsi  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) deljivi z  $x-1$ .

3. Naj bo  $f$  nenegativna nepadajoča konveksna funkcija na  $[0, \infty)$ , za katero velja  $f(0) = 0$ , in za asimptoto naj ima premico  $y = x - \alpha$  ( $\alpha > 0$ ). Definirajmo zaporedje funkcij  $\{f_n\}$  takole:  $f_1 = f$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{2}f_{n-1}(f_{n-1}(2x))$ .

Dokaži, da so  $f_n$  nenegativne nepadajoče konveksne funkcije in da zaporedje  $\{f_n\}$  konvergira proti funkciji  $\max\{0, x - \alpha\}$  enakomerno na  $[0, \infty)$ .

4. Naj bosta  $a$  in  $b$  taka elementa grupe  $G$ , ki zadoščata pogoju  $a^n = e$  ( $e$  je enota v  $G$ ) in  $aba^{-1}b^{-1} = b$ . Dokaži, da je  $b^{2^n-1} = e$ .

### Algebra

1. Polgrupo, v kateri velja enakost  $x^2 = x$  za vsak  $x$ , imenujemo trak. Dokaži ali ovrzi naslednji trditvi:

a) Vsak končno generiran trak je končen.

b) V vsakem končnem traku velja vsaj ena enakost, ki ni posledica aksiomov traku (tj. ni posledica enakosti  $x(yz) = (xy)z$  in  $x^2 = x$ ).

2. Grupoid  $(G, \cdot)$  imenujemo funkcionalno prost za razred identitet  $\Phi$ , če v njem ne velja niti ena identiteta, ki ni posledica identite iz  $\Phi$ . Dokaži ali ovrzi trditev:

Naj bo  $\Phi$  razred enakosti, v katerem nastopa največ  $k$  spremenljivk, in  $(G, \cdot)$  prost grupoid nad  $\Phi$  z  $n \geq k$  prostimi generatorji. Potem je  $(G, \cdot)$  funkcionalno prost za  $\Phi$ .

### Funkcionalna analiza

1. Naj bosta  $X$  in  $Y$  Banachova prostora ter  $A$  in  $B$  omejena linearna operatorja iz  $X$  v  $Y$ . Dokaži naslednjo trditev: Če je  $\text{Im } A$  zaprt in  $\text{Im } B$  končno dimenzionalen podprostor prostora  $Y$ , potem je  $\text{Im } (A + B)$  zaprt podprostor v  $Y$ .

2. Naj bodo  $f, f_1, f_2, \dots, f_n$  linearni funkcionali na linearnem prostoru  $X$ . Dokaži, da iz  $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) \subseteq \ker f$  sledi, da je linearni funkcional  $f$  linearna kombinacija funkcionalov  $f_1, \dots, f_n$ .

### Realna analiza

1. Dokaži, da je

$$n! \sim \left[ \int_0^\infty \frac{\ln n}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)} dx \right]^{-1}, \text{ ko gre } n \rightarrow \infty$$

2. Naj bo  $h: [0, A] \rightarrow \mathbb{R}$  takšna zvezna funkcija, da ni absolutno zvezna na nobenem intervalu  $[\alpha, \beta]$  ( $0 \leq \alpha < \beta \leq A$ ). Nadalje naj bodo funkcije  $f_1, \dots, f_N$  v  $L^2[0, A]$  in  $\Phi_i(t) = \int_0^t f_i(t) dt$ . Dokaži, da iz  $\Phi_1(t) + h(t)\Phi_2(t) + h^2(t)\Phi_3(t) + h^3(t)\Phi_4(t) + \dots + h^{N-1}(t)\Phi_N(t) = 0$  za vsak  $t \in [0, A]$  sledi  $\Phi_i(t) = 0$  za  $0 \leq t \leq A$  in  $i = 1, \dots, N$ .

### Verjetnostni račun

1.  $X$  in  $Y$  naj bosta pozitivni, neodvisni slučajni spremenljivki. Njuna gostota naj bo zvezna funkcija  $f(x)$ . Predpostavimo, da sta  $U = X - Y$  in  $V = \min\{X, Y\}$  neodvisni. Dokaži, da je

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}, \text{ za nek } \lambda.$$

2.  $X$  in  $Y$  naj bosta slučajni spremenljivki, definirani na nekem verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$   $P(X = n) = P(Y = n) = 2^{-n}$  in korelacijskim koeficientom  $r(X, Y) = -1/2$ . Dokaži, da sta spremenljivki  $U = XY$  in  $V = \max\{X, Y\}$  enako porazdeljeni.

### Funkcije kompleksnih spremenljivk

1. Naj bo  $h(z) = z \cos z - 1$ .  
a) Dokaži, da velja neenakost

$$|\cos |z|| \leq |\cos z|$$

b) Koliko rešitev v množici  $\mathbb{C} - \mathbb{R}$  ima enačba  $h(z) = 0$ ?

2. Naj bo  $f(z)$  analitična funkcija na  $D = \{z : |z| \leq 1\}$ . Dokaži, da velja

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta$$

### Diferencialne enačbe

1. Reši diferencialno enačbo

$$5(ax + b)y'' + 8ay' + c(ax + b)^{1/5}y = 0$$

kjer so  $a, b$  in  $c$  realna števila in  $c > 0$ .

2. Reši diferencialno enačbo

$$(x - a)^2 (x - b)^2 y'' = cy$$

kjer so  $a, b$  in  $c$  realna števila in  $a \neq b, c > 0$ .

## Topologija

1. Naj bo  $r$  metrika na  $\mathbb{R}^n$ , ki je ekvivalentna običajni evklidski metriki  $d$ . Z  $I(r)$  in  $I(d)$  označimo njuni grupi izometrij. Pokaži, da iz  $I(d) \subseteq I(r)$  sledi  $I(r) = I(d)$ .

2. Naj bo  $f$  zvezna preslikava kompaktnega Hausdorffovega prostora  $X$  na Hausdorffov prostor  $Y$  in diagonala  $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$  naj bo množica tipa  $G_\delta$  v  $X \times X$ . Pokaži, da ima prostor  $Y$  števno bazo.

## Programiranje

1. Izdelaj program, ki simulira let lunarnega modula. Modul je v orbiti, na višini 15.000 m. Njegova vodoravna hitrost je 1605 m/s. Obrnemo ga lahko v 12 različnih položajev. V položaju 12 so motorji obrnjeni proti površju Lune. Motorji lahko delujejo z 0%, 10%, ..., 100% maksimalne moči, ki da pospešek 8 m/s<sup>2</sup> pri polnih rezervoarjih. Masa modula je 3500 kg in masa goriva 4500 kg. Poraba goriva je 12 kg/s pri največji moči motorja. Polmer Lune je 1600 km, gravitacijska konstanta je 1,62.

Čas razdeli na delčke dolžine  $q$  sekund. Pred vsakim časovnim intervalom naj računalnik zahteva smer in moč delovanja motorja. Po preteku časovnega intervala pa naj poda poročilo, ki vsebuje: višino, horizontalno hitrost, vertikalno hitrost, količino goriva in čas.

2. Izdelaj podprogram, ki simulira CPU računalnika. Eno-adresni ukazi uporabljajo akumulator z bitom prenosa. Ukazi so: prenesi iz spomina v akumulator, prenesi iz akumulatorja v spomin, seštej, negiraj (dvojiški komplement), premakni na levo in premakni na desno (oba premika uporabljata bit prenosa). Števila so predstavljena kot polja s šestnajstimi celoštevilčnimi spremenljivkami, ki zavzemajo vrednosti 0 ali 1.

Z uporabo zgornjega podprograma napiši podprograma za celoštevilsko množenje in deljenje.

Izdelaj program, ki prebere desetiški celi števili  $A$  in  $B$ , ju spremeni v binarni polji in z uporabo zgornjih podprogramov izračuna  $C = 3A - B - A/B$ . Rezultat naj izpiše kot desetiško število. Pogoje ukaze lahko simuliraš kjerkoli v programu.

## Geometrija

1. Naj bodo  $Z_1$ ,  $Z_2$  in  $Z_3$  zrcaljenja na treh premicah v ravnini. Dokaži, da je  $(Z_2Z_3Z_1Z_2Z_3)^2$  translacija vzdolž prve premice.

2. V trirazsežnem hiperboličnem prostoru je dana ravnina  $\pi$  in v njej trikotnik  $ABC$ . Naj bo  $l$  premica zunaj ravnine  $\pi$  in  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  presečnice ravnine  $\pi$  z ravninami  $Al$ ,  $Bl$  in  $Cl$ . Dokaži, da za zrcaljenja  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  na premicah  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  velja:  $Z_1Z_2Z_3 = Z_3Z_2Z_1$ .

Mirko Dobovišek

---

## OBVESTILO UREDNIŠKEGA ODBORA

Bralci *Obzornika za matematiko in fiziko*, ki so se udeležili občnega zbora v Čateških toplicah, so lahko začudeno ugotovili, da je bil v prvi številki naveden stari uredniški odbor. Spominjali so se namreč, da je bil na zboru imenovan nov odgovorni urednik in urednik za matematiko. Imenovani kolega pa iz osebnih razlogov ni prevzel dolžnosti. Uredniški odbor, ki se je znašel v škripcih, je zato na zadnji seji v letu 1982 zaprosil starega odgovornega urednika in starega urednika za matematiko, da bi še eno leto opravljala svoji dolžnosti. To sta storila, da bi Obzornik lahko nemoteno izhajal. Že na eni od prejšnjih sej se je uredniški odbor odločil, da bo kljub nezavidljivemu finančnemu položaju Obzornik še naprej izhajal v knjižgotisku in se tudi sicer način dela ne bo spremenil.

Janez Strnad in Anton Suhadolc

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Zveza geodetov Slovenije, kulturni skupnosti in komiteja za družbene dejavnosti občin Domžale in Ljubljana Moste-Polje, krajevna skupnost Klopce in delovna organizacija Iskra — Kibernetika Kranj, tozd Vega Ljubljana, vabijo na

**PROSLAVO  
DVESTOLETNICE IZIDA PRVEGA  
VEGOVEGA LOGARITMOVNIKA**

z odkritjem kipa Jurija Vege

v soboto, 28. maja 1983 ob 11. uri  
pred Vegovo rojstno hišo v Zagorici nad Dolskim.

Slavnostni govornik bo docent dr. Tomaž Pisanski.

Kulturni program bodo izvajali recitatorji z OŠ Križevska vas in mladinski pevski zbor KS Klopce, pevski zbori osnovnih šol: Moravče, Dolsko in Edvarda Kardelja iz Polja, ter mešani pevski zbor Iskre — tozd Vega.

Prireditve bo ob vsakem vremenu!

Vljudno vabljeni!

*Ciril Velkovrh*

**NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1982**

V letu 1982 se je na novo naročilo na društveno revijo Obzornik za matematiko in fiziko le 22 matematikov oz. fizikov, ki so obenem postali tudi novi člani društva. Poleg teh se je na revijo naročilo še 5 študentov, ki plačujejo znižano naročnino. Tudi osip je v letošnjem letu večji od števila novih naročnikov, saj smo društveno revijo prenehali pošiljati na 34 naslovov. Med njimi je 17 revijo odpovedalo, 2 sta umrla, 15 članov pa je prenehalo dobivati Obzornik zaradi dvoletnega dolga, kljub temu, da so dobili vsako leto po tri opomine. Zaradi vsakoletnega odpovedovanja je danes članov le še 840.

*Ciril Velkovrh*

|                        |                        |                          |
|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 1300. Avbelj Helena    | 1308. Kontler Saša     | 1316. Stegne Janko       |
| 1301. Cencelj Matija   | 1309. Kramar Darinka   | 1317. Sušnik Bogdan      |
| 1302. Čopič Martin     | 1310. Osenčič Ivanka   | 1318. Šenveter Stanislav |
| 1303. Gubaš Fani       | 1311. Pirc Raša        | 1319. Tomazin Viktor     |
| 1304. Hudolin Nada     | 1312. Praznik Marija   | 1320. Vračko Marjan      |
| 1305. Jan Franc        | 1313. Pumpernik Danilo | 1321. Žumer Marko        |
| 1306. Kljajić Miroljub | 1314. Rožman Jožef     |                          |
| 1307. Koglot Franica   | 1315. Stanovnik Anica  |                          |

# NOVE KNJIGE

---

**Present Status and Aims of Quantum Electrodynamics, G. GRAFF, E. KLEMP**  
**in G. WERTH (uredniki), Lecture Notes in Physics 143, Springer-Verlag, Berlin,**  
**Heidelberg, New York 1981. 302 str.**

Zbornik s simpozija o sedanjem stanju v kvantni elektrodinamiki in njenih namenih v Mainzu maja leta 1980 je dokaj aktualen. Kvantna elektrodinamika daje najnatančnejše napovedi o pojavih, ki jih povzroča elektromagnetna interakcija, a ima svoje meje. Spoznavanje teh mej, ki so v zvezi z drugimi interakcijami, je pomembno za nadaljnji razvoj. Simpozij, na katerem so predavali pretežno fiziki iz ZR Nemčije, je zajel fizikalne osnove in matematične metode kvantne elektrodinamike, povezavo teorije in poskusov, analizo merskih podatkov, mogoče izboljšave potrditev kvantne elektrodinamike in prispevke drugih interakcij.

H. Pietschmann je podal uvod, F. Scheck je predaval o univerzalnosti interakcije med leptoni, W. Hepp o preskusih kvantne elektrodinamike pri velikih prenosih gibalne količine, O. Steinmann o nekaterih osnovnih problemih, E. Boriejeva in J. Calmet o teoriji in numeričnih metodah pri anomalnem magnetnem momentu leptonov ter E. H. Dehmelt o merjenjih na izoliranem elektronu. E. Klempt je obdelal magnetni moment miona in F. J. M. Farley njegovo merjenje. E. Boriejeva je predavala o vezanih sistemih, F. W. Zitzewitz o osnovnem stanju pozitronija, E. W. Weber o njegovih vzbujenih stanjih, H. Ortz o mioniju, L. Tauscher o polarizaciji vakuumu ter P. S. Farago in R. Wallenstein o Lambovem premiku. R. Neumann je govoril o sistemih, podobnih heliju, B. Fricke o težkih sistemih z elektroni in H. Backe o nastanku pozitronov pri trkih težkih ionov.

Zbornik daje dokaj usklajen pregled novejših dosežkov in vprašanj v kvantni elektrodinamiki.

*Janez Strnad*

**High-Energy Ion-Atom Collisions, Proc. of the International Seminar on High-Energy Ion-Atom Collision Process, Debrecen, March 1981. Ed. by D. Berenyi and G. Hock, (Nuclear Methods Monograph Series, 2) Akadémiai Kiadó, Budapest 1982.**

Knjiga je zbirka povabljenih predavanj in nekaterih raziskovalnih prispevkov ožjega mednarodnega srečanja o trkih visokoenergijskih ionov in atomov (področje energije MeV do GeV). Njihovo proučevanje vodi na eni strani do razlage sipalnega mehanizma, na drugi strani pa do podatkov o visokovzbujenih ionskih stanjih.

Razprave so osredotočene na proučevanje sproščenih elektronov. Izgleda, da so organizatorji želeli s srečanjem obogatiti in utrditi svoj na.r.t raziskav s tega področja.

*Franc Cvelbar*

**LINDGREN I., Morrison J.: Atomic Many-Body Theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982, 469 str.**

Knjiga obravnava nerelativistično teorijo več teles in njeno uporabo pri opisu fermionskih sistemov ter tako presega okvir atomske fizike. Le vsi zgledi so s področja atomske fizike. Prvi del je posvečen splošni teoriji vrtilne količine in modelu neodvisnih delcev, vključno z modelom Hartree-Focka. Drugi del pa obravnava interakcije v sistemih z več fermioni. Avtorja se močno poslužujeta modernih grafičnih metod. V prvem delu uvajata diagrame, ki ponazarjajo sklapljanje vrtilnih količin, v drugem delu pa Goldstonove diagrame, ki so modifikacija Feynmanovih diagramov, prirejani za teorijo motenj. Avtorja predpostavljata le splošno znanje kvantne mehanike. Zato bo knjiga dobrodošla tako študentom višjih letnikov kot tudi raziskovalcem (fizikom in kemikom), ki se želijo podrobneje seznaniti s teoretičnimi osnovami in modernimi metodami atomske spektroskopije. Bralca zlasti lepo uvaja v moderne diagramatične tehnike.

*Mitja Kregar*

**Diffraction Studies on Non-Crystalline Substances, Editors: István Hargittai and W. J. Orville — Thomas, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981, 894 str.**

Knjiga obravnava teorijske in eksperimentalne vidike uklona žarkov X, elektronov in nevtronov na nekristaliničnih snoveh s posebnim poudarkom na problemih strukture. V njej so zbrani monografski prispevki vodilnih strokovnjakov na področju uklona iz vseh delov sveta. Delo se po vsebini zelo naslanja na predavanja na mednarodni šoli v kraju Pečs na Madžarskem l. 1981, ki jo je organizirala sekcija za difrakcijo madžarskega fizikalnega društva. Vseh prispevkov je 21. Knjiga je razdeljena na pet delov, ki predstavljajo dokaj zaključna tematska področja. Obravnavajo po vrsti pline, tekočine, strukturo amorfnih sistemov, polimere in kovinske zlitine. Posamezne razprave so zaključene celote. Pisane so v monografskem stilu, kar daje knjigi posebno vrednost. Fizika nekristaliničnih ali amorfnih snovi je izredno hitro rastoča veja fizikalnih znanosti, osnova vsake raziskave na tem področju pa so vprašanja strukture. Ta knjiga je lahko dober priročnik, da se seznanimo s sedanjimi pogledi na strukturo amorfnih snovi.

*Peter Gosar*

**Seminar on differential geometry / ed. S.-T. Yau. Princeton, Univ. press, 1982. 706 str. Annals of mathematics studies, 102. Cena 71.50 \$.**

V šolskem letu 1979/80 sta Institute for Advanced Study in National Science Foundation organizirala seminar iz diferencialne geometrije. V tem delu so objavljena vsa predavanja s tega seminarja, razen tistih, ki so posvečena študiju zaključenih geodetskih in minimalnih ploskev; ta bodo izšla v posebnem zborniku.

K večini člankov je še dodana obsežna literatura. Predavanja so si sledila takole:

Survey on partial differential equations in differential geometry (S.-T. Yau), Poincaré inequalities on Riemannian manifolds (P. Li), Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry (B. Theissier), Liouville theorems for harmonic mappings, and an approach to Bernstein theorems (S. Hildebrandt), Subharmonic functions, harmonic mappings and isometric immersions (L. Karp), An isoperimetric inequality and Weierstrass manifolds (J. L. Kazdan), On the Blaschke conjecture (C. T. Yang), Best constants in the Sobolev imbedding theorem: The Yamabe problem (T. Aubin), Gaussian and scalar curvature, an update (J. L. Kazdan), Conformal metrics with zero scalar curvature and a symmetrization process via maximum principle (W.-M. Ni), Rigidity of positively curved manifolds with large diameter (D. Gromoll, K. Grove), Complete three dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature (R. Schoen, S.-T. Yau), Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space (A. Treibergs), Applications of the Monge-Ampère operators to the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations (I. Bakelman), Extremal Kähler metrics (E. Calabi),  $L^2$  harmonic forms on complete manifolds (J. Dodziuk),  $L^2$ -cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties (J. Cheeger, M. Goresky, R. MacPherson), Function theory of noncompact Kähler manifolds of nonpositive curvature (R. Greene), Kähler manifolds with vanishing first Chern class (M. L. Michelsohn), Compactification of negatively curved complete Kähler manifolds of finite volume (Y.-T. Siu, S.-T. Yau), Local isometric embeddings (H. Jacobowitz), Yang-Mills theory: its physical origins and differential geometric aspects (J. P. Bourguignon, H. B. Lawson), Symmetry and isolated singularities of conformally flat metrics and of solutions of the Yang-Mills equations (B. Gidas), On parallel Yang-Mills fields (G. Chao-hao), Variational problems for gauge fields (K. Uhlenbeck), Some geometrical aspects of integrable nonlinear evolution equations (H.-H. Chen, Y.-C. Lee), The conformally invariant Laplacian and the instanton vanishing theorem (R. O. Wells), Causally disconnecting sets, maximal geodesics and geodesic incompleteness for strongly causal space-times (J. Beem, P. Ehrlich), Renormalization (A. Jaffe), Metrics with prescribed Ricci curvature (D. DeTurck), Black hole uniqueness theorems in classical and quantum gravity (A. Lapedes), Gravitational instantons (M. Perry), Some unsolved problems in classical general relativity (R. Penrose), Problem section (S.-T. Yau).

Iz seznama se vidi, da je zbornik namenjen strokovnjakom s področja diferencialne geometrije.

*Ciril Velkovrh*

**STRNAD J., Fizika, 4. del, Molekule. Kristali. Jedra. Delci. — Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1982. — (Matematika-Fizika; 18) Cena 450.— din (360.— din). 284 str.**

Dobili smo še četrti del visokošolskega učbenika, ki je namenjen osnovnemu dveletnemu tečaju fizike. Obsega opis sestavljenih kvantnih sistemov, kot so naštetih v podnaslovu (atom je obdelan že v 3. delu). Fizika jedra in delcev je v primeri s fiziko goste snovi nekoliko poudarjena po obsegu, nadrobnostih in aktualnosti, tako da bi obdelano gradivo marsikje zadoščalo tudi že za študij na višji ravni.

Metodološko težišče knjige je v uporabi osnovnih kvantnomehanskih računskih orodij iz 3. dela. Fenomenološki opis sistemov in pojavov je, kjer je le mogoče, podprt s preprostim kvantnomehanskim modelom ali oceno. Računi, vključno z numeričnimi, so izvedeni *in extenso*, kar je bralcu v veliko pomoč. Po tem in po izčrpnosti študijskega gradiva je knjiga dragocen spremni tekst k predavanjem. Škoda je le, da sta morala zadnja dela učbenika iziti v skromnejši grafični izdelavi, zaradi česar so matematični vstavki v tekstu, zlasti še v podnapisih k slikam in tabelam, slabše razločni.

*Alojz Kodre*

**KRIŽANIČ F., Nihalo, prostor in delci. — Ljubljana: Slovenska matica, 1982. — (Naravoslovna knjižnica; 2). Cena 1150.— din (800.— din). 355 str.**

Nova knjiga profesorja Križaniča Nihalo, prostor in delci je nekaj posebnega. V slovenskem kulturnem prostoru nismo imeli še nič podobnega. Trdim lahko, da je knjiga tudi v svetovnem merilu originalna in nenavadna. Na kratko bi jo lahko označili za širok izsek iz zgodovine matematike ali pa za precej osebni pogled na razvoj te vede.

Začetek branja je malce naporen. V zelo kratkobesednem, originalnem slogu nas pisec v uvodu praktično potopi v vprašanja bolj načelne narave o matematiki, njeni vlogi v naravoslovju, njeni zvezi z izkustvom. Kopico citatov avtor neprisiljeno poveže v kompozicijo, v kateri na srečo ni preveč filozofije.

Naslovi poglavij: Obisk, Sence, Pohlep, Oderuštvo, Prežemanje, Odsevi, Kuga naj bralca ne vznemirijo. Namenjeni so bolj za popestritev; o vsebini pa v nasprotju z naslovom knjige ne povedo dosti.

Kmalu spoznamo, da snov teksta ni izbrana enciklopedično. Evdoksova razlaga gibanja planetov kot kombinacija kroženj se zdi sprva nepotrebna — kot vsaka presežena teorija. Čez čas matematično izobraženi bralec zasluti, da jo je avtor obravnaval z drugačnim namenom: pokazati predhodnice Fourierove vrste. Dejansko je skozi celo knjigo potegnjena rdeča nit, ki nas od grških in orientalskih matematikov sprva privede do Fourierove vrste, kasneje pa jo avtor splete še z drugimi in potegne z upodobitvami grup praktično do danes.

Prepričljiva in zanimiva je v tem pogledu obravnava devetnajstega stoletja. Plastično je prikazana ovinkasta pot razvoja teorije grup, od Galoisa do Lieja z njegovimi transformacijskimi grupami in dalje. Zadnje poglavje to krona z opisom uporabe upodobitev grup v teoriji elementarnih delcev.

Kakor je ta rdeča nit posebna odlika knjige, mi je po drugi strani všeč, da se je avtor ni držal preveč natančno. Ob njej najdemo opise drugih važnih matematičnih področij. Spoznamo pot, ki je pripeljala do pojma vektorskega prostora — s Hamiltonom, Grassmannom in drugimi. Zelo rad sem bral pregled nastanka funkcionalne analize. Tu je imel avtor posebno srečno roko pri izbiri zgledov, ki so značilni, a obenem kar se da enostavni.

Poudariti moram, da knjiga ne obravnava le oseb in dogodkov. Polna je matematike same, vključno s formulami in izpeljavami. Ta stran teksta je, s stališča človeka, ki se je skozi tako ali sorodno snov že pregrizel, napisana zelo elegantno. Vse tiste pa, ki niso tako srečni in bodo morda razočarani ali obupani nad svojim nerazumevanjem kake izpeljave, naj takoj pomirim. Kraljevske poti v matematiko ni in je tudi tako lep pregled, kot je v tej knjigi, ne more utreti.

Mik dajejo knjigi tudi živi opisi matematičnih okolij, predvsem v Nemčiji, Rusiji in pozneje Sovjetski zvezi. Vsakdo rad prebere kaj o Emmy Noether ali Davidu Hilbertu. Zvemo tudi, kako so živeli in delali slavni matematiki 20. stoletja kot Banach, Haar, von Neumann, Hausdorff, Gelfand; od kod je bil in kako nesrečno je končal Urison in še marsikaj.

Kleinova obravnava geometrije nam pomaga pojasniti poglede profesorja Križaniča na poučevanje geometrije. Ko smo že pri osebah, naj mimogrede omenim, da je tiskarski skrat nekajkrat dodal imenoma Lebesgue in Fourier nepotrebni črki.

Nemogoče pa mi je na kratko podati duha te knjige. Treba jo je vzeti v roke in prebrati. Sam sem prvih 250 strani prebral v dveh dneh in se le stežka odtrgal od nje. No, če sem odkritosrčen, moram priznati, da se pozneje nisem tako lahko prebijal skozi zadnji poglavji o upodobitvah grup, ki se mi zdita precej težji od drugih. Morata pa biti zanimivi za fizike, ki o tem že nekaj vedo.

Težko bi presodil, kako bodo na knjigo gledali nematematiki. Že fizikom verjetno sem in tja zmanjka motivacije, saj jim nekatera matematična imena ne povedo dosti. Predstavljam pa si, da vsaj za fizike sugestivni, originalni način profesorja Križaniča to brez težav premosti.

Vsekakor lahko bralci s pomanjkljivo matematično izobrazbo ob določeni vztrajnosti najdejo v knjigi veliko privlačnega. Konec koncev, kot je rekel eden mojih kolegov, je prav, da naši izobraženci dobijo vsaj nekaj vtisa o veličini in raznolikosti matematične zgradbe, kakršna je nastala v dolгих stoletjih. V naši kulturni družbi je denimo zelo cenjeno, če kdo kaj ve o filozofiji. Bolj redko pa srečamo človeka, ki bi se pohvalil z znanjem matematike. Upam, da bo tudi v tem smislu knjiga kaj premaknila.

*Peter Legiša*

**BAK A., K-theory of forms. — Princeton : Princeton Univ. press, 1981. — 269 str. — (Annals of mathematics studies ; 98)**

Glavni problemi kirurgije mnogoterosti se navadno reducirajo na preučevanje določenih kvadratičnih form. J. Milnor, C. T. C. Wall in drugi avtorji so po letu 1960 pokazali, da so ovire za geometrično kirurgijo v grupah, ki so ozko povezane z omenjenimi kvadratičnimi formami. Pričujoča knjiga povzema del obširnih raziskav, ki so bile narejene v zadnjih 20 letih na tem področju; predstavlja namreč algebrske tehnike za računanje K-grup kvadratičnih in hermitskih form. Knjiga zahteva precejšnje predznanje algebre in algebrske K-teorije, in bo zato zanimiva predvsem za ozek krog algebraikov in algebrskih topologov.

*Zlatan Magajna*

**UŠAN J., Donon V., Tosić R., Uvod u algebru sa metodičkom zbirkom zadataka. — Novi Sad : Radnički univerzitet »Radivoj Čirpanov«, 1979. — 287 str.**

Knjiga je izčrpen uvod v temeljne algebrske strukture. V začetnih poglavjih se bralec podrobno seznani z matematično logiko, teorijo množic, z relacijami in preslikavami. To omogoča kar največjo eksaktnost v nadaljnjih poglavjih, ki govorijo o grupoidu, polgrupi, grupi, kvazigrupi, kolobarju, obsegu, mreži.

Osnovni algebrski pojmi: krajšanje, komutativnost, asociativnost, nevtralni in inverzni element, distributivnost, izomorfizem, kongruenca — so vpeljeni najbolj splošno, pri grupoidu, in se potem toliko lažje uporabljajo pri bogatejših strukturah. Posebej zanimivo je tudi poglavje o kvazigrupah. S tega področja je avtor J. Ušan napisal mnogo znanstvenih del in tudi knjigo Kvazigrupe (Institut za matematiku, Novi Sad 1979).

Definicije in pregledno dokazane izreke spremljajo zelo številni primeri in rešene naloge, kjer srečamo osnovne pa tudi manj znane modele algebrskih struktur. Knjiga bo zares koristila vsakomur, ki želi dobro razumeti in tudi uporabljati temeljne algebrske strukture.

*Janez Rakovec*

**DOBOVIŠEK M., MAGAJNA B., Naloge iz algebre I. — Ljubljana : DMFA SRS, 1983. — 136 str. (Zbirka izbranih poglavij iz matematike ; 20). Cena 250.— din.**

Pred nami je nova zbirka nalog, ki bo zapolnila še eno vrzel v našem, sicer skromnem nizu univerzitetnih učbenikov za študente matematike. To je zbirka nalog iz linearne algebre, ki v dobršni meri pokriva program predmeta algebra I (pogrešamo le poglavje o polinomih). Zbirka je razdeljena na dvanajst poglavij različnega obsega, dodana ji je dokaj popolna literatura za dodatni študij, pa še obsežno poglavje »namigi in rezultati«.

V prvem poglavju so zbrane naloge iz trirazsežnega, realnega (torej »običajnega«) prostora, v naslednjih treh pa naloge iz osnovnih algebrskih struktur, splošnega vektorskega prostora in linearnih transformacij. Najobsežnejše je poglavje o matrikah, sledi pa mu še poglavje o determinantah. V naslednjih štirih poglavjih so zbrane naloge iz matrično podanih linearnih transformacij, spektralne teorije, invariantnih podprostorov in Jordanove kanonične forme. Zadnji dve poglavji obsegata še naloge iz matričnih funkcij ter naloge v evklidskih in unitarnih prostorih.

Zbrane naloge so zanimive, korektno zastavljene in jasno formulirane. Poleg primerne količine ilustrativnih in rutinskih nalog sta avtorja vključila v zbirko tudi lepo število teoretičnih nalog, med katerimi so nekatere že kar zahtevne. Pri nalogah (še posebno pri nekaterih »operatorskih«) opažamo izviren pristop avtorjev. V namigih in rezultatih lahko bralec najde večino numeričnih rezultatov rutinskih nalog, težje teoretične naloge pa so tu različno obdelane. Nekatere so izdelane v vseh podrobnostih, kar moramo pohvaliti, saj se ob teh bralec lahko uči korektnega matematičnega jezika. Druge naloge spet sta avtorja opremila le z namigom, nekatere pa nimajo niti tega (večinoma upravičeno, tu in tam pa ga vendarle pogrešamo).

Zbirke bodo veseli predvsem študenti prvega letnika matematike, gotovo pa bo prišla prav še komu.

*Matjaž Omladič*

#### **PUBLIKACIJE DMFA SRS V LETU 1982**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Cena<br>v din |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1.— 4. Obzornik za matematiko in fiziko, 29 (1982) št. 1/2, 3, 4, 5/6 (545, 566, 572, 584) (posamezna številka)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 100.—         |
| 5.—11. Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome, 9 (1981/82) št. 3, 4, 5 (Kuščer I., Enajsta šola iz fizike — Presekova knjižnica ; 10), 6 (Zajc P., Tekmujmo za Vegova priznanja : Zbirka rešenih nalog iz matematike za učence petih in šestih razredov osnovnih šol SR Slovenije — Presekova knjižnica ; 11); 10 (1982/83) št. 1, 2, 5 (Presekov koledar 1983) (553, 559, 563, 570, 580, 588, 590) (posamezna številka) | 40.—          |
| <b>Presekova knjižnica (samostojne publikacije)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |               |
| 12. 0. Tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov naravnih števil (562)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 20.—          |
| 13. 9. Strnad J., Začetki kvantne fizike (554)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 40.—          |
| 14.—15. 12. Ranzinger P., Naše nebo — astronomske efemeride 1983 (589, 560)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 100.—         |
| 16.—17. Matematični informator — 1., 2. (558, 592)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | —             |
| 18. Preprint series of the department of mathematics, no. 19 (551)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | —             |
| 19. IMFM : poročilo za leto 1981 (555)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | —             |
| 20. DMFA SRS : Občni zbor, 34., Čateške toplice, 1982 (587)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | —             |
| 21. Republiško tekmovanje iz matematike, Koper (567)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | —             |
| 22. Republiško tekmovanje iz matematike za osnovnošolce, Koper (574)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | —             |
| 23. Predtekmovanje mladih fizikov, Koper (568)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | —             |
| 24. Republiško tekmovanje iz fizike za osnovnošolce, Maribor (573)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | —             |

Na desni strani seznama so navedene znižane cene, ki veljajo za člane društva, študente in naročnike Preseka.

Na koncu naslovov so v oklepajih zaporedne številke izdaj Komisije za tisk DMFA SRS od leta 1951 do danes.

### Knjižnica Sigma

|         |        |                                                                                      |       |
|---------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 25.     | 20. i. | Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele (11. natis) (550)                    | 100.— |
| 26.     | 32. a. | Weinberg S., Prve tri minute (2. natis) (561)                                        | 240.— |
| 27.—29. | 33.    | Prijatelj N., Osnove matematične logike, 1. del (1., 2. in 3. natis) (546, 556, 600) | 240.— |
| 30.     | 34.    | Laue M., Kratka zgodovina fizike (585)                                               | 240.— |
| 31.     | 35.    | Milanković M., Kratka zgodovina astronomije, 1. del (599)                            | 240.— |

### Matematika-Fizika — zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

|     |        |                                                                                                |       |
|-----|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 32. | 14. a. | Strnad J., Fizika, 3. del, Posebna teorija relativnosti. Kvantna fizika. Atomi (2 natis) (605) | 576.— |
| 33. | 17.    | Križanič F., Linearna analiza na grupah (552)                                                  | 552.— |
| 34. | 18.    | Strnad J., Fizika, 4. del, Molekule. Kristali. Jedra. Delci (575)                              | 360.— |

### Zbirka izbranih poglavij iz matematike

|         |        |                                                                                         |       |
|---------|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 35.     | 3. č.  | Zakrajšek E., Fortran (5. natis) (591)                                                  | 400.— |
| 36.     | 6. d.  | Dobovišek M., Hladnik M., Omladič M., Rešene naloge iz analize I. (6. natis) (581)      | 100.— |
| 37.     | 14. b. | Nadrah N., Cobol (3. natis) (582)                                                       | 280.— |
| 38.     | 17. a. | Vidmar R., Začni s TOPS-10 (2. natis) (569)                                             | 100.— |
| 39.—40. | 18.    | Mohar B., Zakrajšek E., Uvod v programiranje (1. in 2. natis) (579, 606)                | 160.— |
| 41.     | 19.    | Hladnik M., Naloge in problemi iz matematične analize, 1. del, Množice in števila (586) | 400.— |

### Zbirka izbranih poglavij iz fizike

|     |        |                                                                                 |       |
|-----|--------|---------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 42. | 13. a. | Prelovšek P., Kušcer I., Zbirka formul za vektorje in tenzorje (2. natis) (547) | 20.—  |
| 43. | 19.    | Kladnik R., Reaktorska fizika (557)                                             | 240.— |

### Postdiplomski seminar iz matematike

|     |        |                                                                         |       |
|-----|--------|-------------------------------------------------------------------------|-------|
| 44. | 11. a. | Vidav I., Banachove algebre (2. natis) (576)                            | 200.— |
| 45. | 12. a. | Vidav I., Uvod v teorijo C*-algeber (2. natis) (583)                    | 120.— |
| 46. | 13.    | Vrabec J., Bordism, homology, and Stiefel-Whitney numbers (549)         | 100.— |
| 47. | 14.    | Vidav I., Linearni operatorji v Hilbertovem prostoru (571)              | 240.— |
| 48. |        | Mramor-Kosta N., Algebraic varieties in complex projective spaces (577) | —     |
| 49. |        | Mramor-Kosta N., Duality of projective varieties (578)                  | —     |

### Seminar za numerično in računalniško matematiko

|     |      |                                                                                                         |      |
|-----|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|     |      | (posamezni izvod)                                                                                       | 40.— |
| 50. | 201. | Batagelj V., Barvanje točk grafov (564)                                                                 |      |
| 51. | 224. | Batagelj V., Graph : osnovne predstavitve v strukturu (548)                                             |      |
| 52. | 263. | Tvrđy I., Implementacija naročniških funkcij v mikroračunalniško krmiljenih telefonskih centralah (565) |      |
| 53. | 275. | Batagelj V., Razvrščanje v skupine : ultrametrika (601)                                                 |      |
| 54. | 288. | Batagelj V., Urejeni postopki sestavljanja katalogov (602)                                              |      |
| 55. | 294. | Vitek A., X : program za vzdrževanje izvornih knjižic (598)                                             |      |
| 56. | 299. | Glavič M., Gnosis (603)                                                                                 |      |
| 57. | 301. | Ferligoj A., Batagelj V., Razvrščanje v skupine (604)                                                   |      |

### Matematični rokopisi

|     |    |                                                                                                        |       |
|-----|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 58. | 1. | Petkovšek M., Pisanski T., Izbrana poglavja iz računalništva, 1. del, Jeziki. NP-polnost. Naloge (593) | 160.— |
| 59. | 2. | Kramar E., Nekaj nalog iz linearne algebre (594)                                                       | 60.—  |
| 60. | 3. | Tutorial for the sed screen editor (595)                                                               | 40.—  |
| 61. | 4. | Pascal compiler manual (596)                                                                           | 50.—  |
| 62. | 5. | Batagelj V., Diskretne strukture. Naloge (597)                                                         | 120.— |

Ciril Velkovrh