

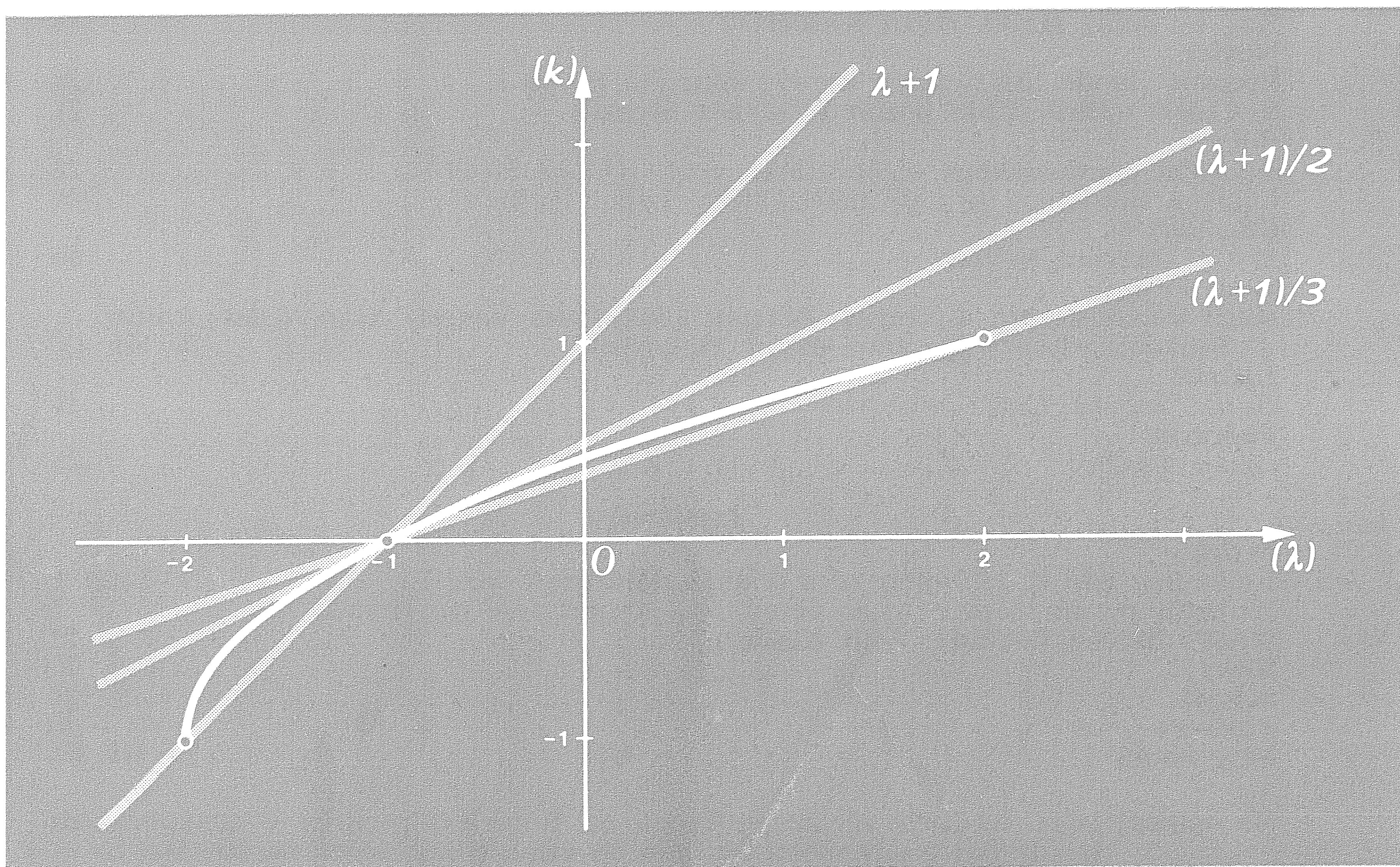
ODPISANO
1-177/83-1

1983

Letnik 30

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1983

Uredniški odbor: France Avsec (gim. Kranj), Robert Blinc (FNT), Alojz Kodre (FNT), **Edvard Kramar — glavni urednik** (FNT), Peter Legiša (FNT), Jože Lep (VTŠ Maribor), Anton Moljk (FNT), Mitja Rosina (FNT), Tomaž Škulj (Iskra Ljubljana), **Janez Strnad — odgovorni urednik, urednik za fiziko** (FNT), **Anton Suhadolc — urednik za matematiko** (FNT), **Ciril Velkovich — urednik** (FNT), Ivan Vidav (FNT). Jezikovni pregled Marija Janežič. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 350.—din (za člane društva je že vračunana člana-rina), za dijake in študente 200.—din, za ustanove in podjetja 600.—din, za tujino 20 \$, posamezna številka 100.—din, dvojna številka 200.—din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska c 19, p.p. 6, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1983 DMFA SRS — 607
YU ISSN 0473—7466

Poština plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA**Članki**

Eulerjeva premica in središče trikotniku včrtanega kroga (Marija Vencelj) . . .	1
S potenčno metodo do napake v programu (Jernej Kozak)	5
Kaj se zadaj skriva (Ivan Kuščer)	13

Novice

Preprost model pulzirajoče zvezde (Marijan Prosén)	20
V CERN odkrili šibki bozon W (Janez Strnad)	21

Šola

Uporaba operacijskega ojačevalnika v šoli (Janez Žitnik)	22
Logična simbolika in pouk matematike (Izidor Hafner)	26

Odgovori

119 — (Marjan Hribar)	30
---------------------------------	----

Nove knjige

(Ciril Velkovich, Mitja Kregar, Boštjan Žekš, Peter Vencelj, Ivan Vidav, Anton Suhadolc, Ciril Velkovich, Marko Petkovšek)	29, III, IV
--	-------------

Utrinki

(Janez Strnad, Ciril Velkovich)	31
---	----

Popravek

(Janez Žitnik)	25
--------------------------	----

CONTENT**Articles**

Euler line and the incenter of a triangle (Marija Vencelj)	1
With the power method to an error in a program (Jernej Kozak)	5
What's hidden behind? (Ivan Kuščer)	13

News	20
-----------------------	----

School	22
-------------------------	----

Answers	30
--------------------------	----

New books	29, III, IV
----------------------------	-------------

Na ovitku: Lega središča včrtanega kroga na Eulerjevi premici v enakokrakem trikotniku v odvisnosti od kota ob vrhu. (Glej članek na str. 1)

EULERJEVA PREMICA IN SREDIŠČE TRIKOTNIKU VČRTANEGA KROGA

MARIJA VENCELJ

Math. Subj. Clas. (1980) 51 A 05, 51 M 05

Članek obravnava vprašanje, kdaj leži središče trikotniku včrtanega kroga na Eulerjevi premici. Navaja preprost dokaz trditve, da je to značilna lastnost enakokrakih trikotnikov. Originalen dokaz je izveden s sredstvi linearne algebre. V nadaljevanju daje tudi odgovor o natančnejši legi središča včrtanega kroga na Eulerjevi premici za enakokrake trikotnike.

EULER LINE AND THE INCENTER OF A TRIANGLE

In the article we present a new simple proof of the fact that the incenter of a triangle lies on the Euler line only if the triangle is isosceles. Further we determine the position of the incenter on the Euler line.

1. Veliki švicarski matematik Euler je leta 1765 dokazal, da leži v poljubnem trikotniku težišče na daljici, ki spaja višinsko točko s središčem trikotniku očrtanega kroga. Natančneje, težišče leži na tretjini te daljice, šteto od središča očrtanega kroga. Preprost dokaz te trditve najdemo tudi v [1]. Po Eulerju nosi nosilka te daljice ime *Eulerjeva premica*, daljico samo pa bomo imenovali *Eulerjeva daljica*.

Višinska točka, težišče in središče očrtanega kroga so tri izmed štirih točk trikotnika, ki jim pogosto pritikamo pridevek »znamenite«. Četrta teh točk je središče trikotniku včrtanega kroga. Tako se samo po sebi ponuja vprašanje, kakšna je lega te točke glede na Eulerjevo premico. Velja, da središče včrtanega kroga v splošnem ne leži na Eulerjevi premici. Vendar so v posebnem primeru, ko je trikotnik enakokrak, vse štiri znamenite točke kolinearne, vse štiri leže na simetrali osnovnice. To je očitno, saj v enakokrakem trikotniku sovpadajo simetrala osnovnice, težiščnica na osnovnico, višina na osnovnico in simetrala kota ob vrhu trikotnika. Lahko si postavimo vprašanje, ali razen enakokrakih obstajajo še kakšni trikotniki z lastnostjo, da leži središče včrtanega kroga na Eulerjevi premici. Odgovor daje naslednji izrek.

Izrek. *Potreben in zadosten pogoj za to, da leži središče včrtanega kroga na Eulerjevi premici je, da je trikotnik enakokrak.*

Zadostnost pogoja smo uvideli že zgoraj. Edini dokaz potrebnosti, ki ga poznam iz literature, najdemo v članku [2]. Do rezultata pride analitično z uporabo trigonometrije po računsko razmeroma dolgi poti. V primeri s tem dokazom je algebraični dokaz, ki mi je uspel, dokaj enostaven in vsaj za take primere govori v prid vektorskemu pristopu k evklidski geometriji.

Dokaz potrebnosti pogoja.

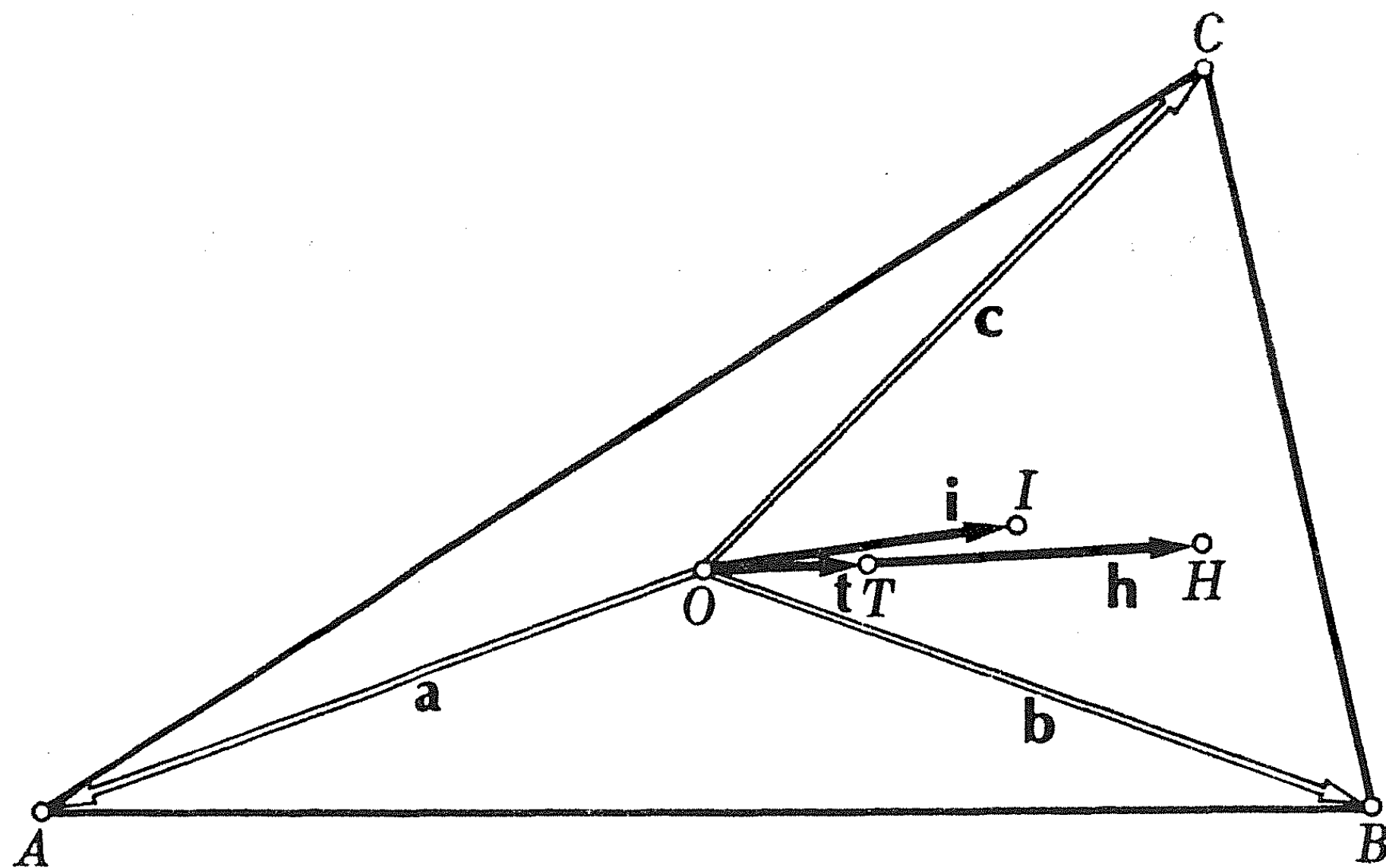
Naj bo v trikotniku ABC točka O središče očrtanega kroga, T težišče, H višinska točka in I središče včrtanega kroga. Izberimo središče očrtanega

kroga O za koordinatno izhodišče in z $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{i}$ označimo krajevne vektorje do točk A , B , C , T , H , I kot na sliki 1. Brez izgube splošnosti lahko vzamemo, da je polmer trikotniku očrtanega kroga enak 1, torej

$$r = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$$

V izbranem koordinatnem sistemu je $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (glej [1]) in ker leži I po predpostavki na Eulerjevi premici, je vektor $\mathbf{i}$ kolinearen vektorju $\mathbf{h}$, torej obstaja število k , da je

$$\mathbf{i} = k(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$



Slika 1

Poiščimo polmer ϱ včrtanega kroga, to je oddaljenost točke I od nosilk trikotnikovih stranic. Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ enako dolga, je normala na stranico $[AB]$ kolinearna njuni vsoti $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Torej je

$$\varrho = \left| (\mathbf{i} - \mathbf{a}) \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|} \right|$$

Ker je

$$\begin{aligned} (\mathbf{i} - \mathbf{a})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= [k(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (k\mathbf{b} - \mathbf{a})](\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= k(1 + \mathbf{ac} + \mathbf{ab} + \mathbf{bc}) + (k - 1)(1 + \mathbf{ab}) \end{aligned}$$

in

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 2(1 + \mathbf{ab})$$

dobimo

$$(\varrho/\sqrt{2})\sqrt{1 + \mathbf{ab}} = |k(1 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac}) + (k - 1)(1 + \mathbf{ab})|$$

Za ostali dve stranici dobimo s ciklično permutacijo vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ od tod še

$$(\varrho/\sqrt{2})\sqrt{1 + \mathbf{bc}} = |k(1 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac}) + (k - 1)(1 + \mathbf{bc})|$$

$$(\varrho/\sqrt{2})\sqrt{1 + \mathbf{ac}} = |k(1 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac}) + (k - 1)(1 + \mathbf{ac})|$$

Če označimo $\alpha = \sqrt{1 + \mathbf{ab}}$, $\beta = \sqrt{1 + \mathbf{bc}}$, $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{ac}}$, $x = k(1 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac})$, $y = \varrho/\sqrt{2}$ in $z = k - 1$, dobimo sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

$$\begin{aligned} x \pm \alpha y + \alpha^2 z &= 0 \\ x \pm \beta y + \beta^2 z &= 0 \\ x \pm \gamma y + \gamma^2 z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

V drugem stolpcu nastopa v vsaki od enačb eden od napisanih predznakov. Ker je $y = \varrho/\sqrt{2}$, polmer včrtanega kroga pa ni nikoli enak nič, ima homogeni sistem (1) netrivialno rešitev. Zato mora biti determinanta sistema enaka nič, torej

$$\begin{vmatrix} 1, & \pm \alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \pm \beta, & \beta^2 \\ 1, & \pm \gamma, & \gamma^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ta determinanta je enaka nič, če sta vsaj dva od členov v drugem stolpcu enaka. Recimo, da smo trikotnik označili tako, da sta enaka prva dva člena. To da $\alpha = \beta$ ali $\alpha = -\beta$. V obeh primerih je $\alpha^2 = \beta^2$, kar da

$$ab = bc$$

Odtod sledi $b(a - c) = 0$, krajevni vektor do točke B je torej pravokoten na stranico $[AC]$. Ker leži koordinatno izhodišče na simetrali stranice $[AC]$, leži na njej zaradi pravkar ugotovljenega tudi B . Oglišče B je torej enako oddaljeno od oglišč A in C , trikotnik je enakokrak. S tem je izrek dokazan.

Ni težko razložiti tudi možnosti različnih predznakov v sistemu (1). V dokazu namreč nismo nikjer upoštevali, da je točka I prav središče trikotniku včrtanega kroga in ne morda središče katerega od trikotniku pričrtanih krogov. Tako smo dokazali pravzaprav več, kot smo si na začetku zastavili. Velja naslednji izrek.

Izrek. *Trikotnik je enakokrak natanko v primeru, ko leži na Eulerjevi premici vsaj ena od točk I, I_1, I_2, I_3 , kjer je I središče včrtanega kroga in so I_1, I_2, I_3 središča trikotniku pričrtanih krogov. Če leži na Eulerjevi premici ena od teh točk, ležita natanko dve in sicer I in ena izmed preostalih treh točk.*

Izjemen primer je seveda enakostraničen trikotnik, pri katerem Eulerjeva premica ni določena, saj v njem »znamenite« točke sovpadajo.

2. V članku [2] najdemo za točko I tudi njen natančnejši položaj na Eulerjevi premici. Velja

Izrek. *V enakokrakem trikotniku leži središče včrtanega kroga na daljici med težiščem in višinsko točko.*

Avtor članka dokaže izrek posebej za enakokrake trikotnike s kotom ob vrhu, manjšim od $\pi/3$, posebej za tiste s kotom ob vrhu med $\pi/3$ in $\pi/2$ in posebej za topokotne enakokrake trikotnike. Pričujoči novi dokaz je dokaj preprosto kos splošnemu primeru.

Dokaz. Naj bo ABC enakokrak trikotnik z vrhom C . Spet lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je polmer trikotniku očrtanega kroga enak 1. Kot v prejšnjem dokazu si tudi tu izberimo središče očrtanega kroga O za koordinatno izhodišče in označimo krajevne vektorje do posameznih točk z ustreznimi malimi črkami kot na sliki 2.

Imamo

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda \mathbf{c} \quad (2)$$

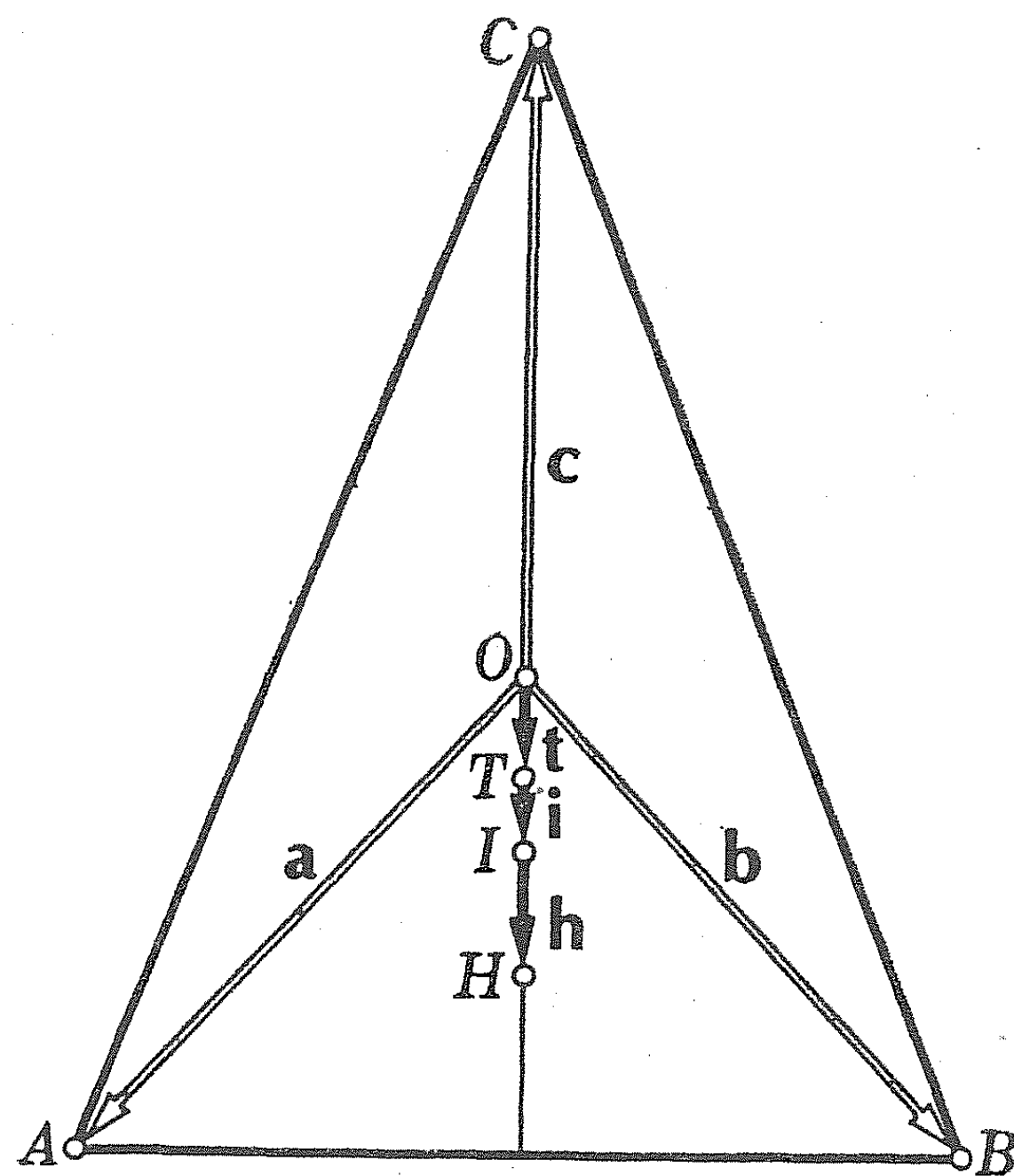
in ker je $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ter $\mathbf{t} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$, sledi

$$\mathbf{h} = (1 + \lambda)\mathbf{c} \quad \text{in} \quad \mathbf{t} = (1 + \lambda)\mathbf{c}/3$$

Ker je $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, dobimo iz (2) oceno

$$\lambda^2 = 2(1 + \mathbf{ab}) < 4 \quad (3)$$

torej je $\lambda \in (-2, 2)$. Nadalje je $\mathbf{i} = k\mathbf{c}$, pri čemer je $|k| < 1$, ker je I notranja trikotnikova točka, torej leži znotraj očrtanega kroga.



Slika 2

Izračunajmo sedaj polmer včrtanega kroga. Po eni strani je

$$\varrho = |IC_1| = |(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2 - k\mathbf{c}| = |\lambda/2 - k| \cdot |\mathbf{c}| = |\lambda/2 - k|$$

in po drugi

$$\begin{aligned} \varrho &= \left| \frac{(\mathbf{i} - \mathbf{c})(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{|\mathbf{b} + \mathbf{c}|} \right| = \left| (k - 1)\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{|\mathbf{b} + \mathbf{c}|} \right| = \\ &= (1 - k)(1 + \mathbf{bc})/\sqrt{2(1 + \mathbf{bc})} = (1 - k)\sqrt{(1 + \mathbf{bc})/2} \end{aligned} \quad (4)$$

Če pomnožimo (2) skalarno z $\mathbf{b}$ in upoštevamo (3), dobimo $\mathbf{bc} = \lambda/2$. To vstavimo v (4) in izenačimo obe vrednosti za ϱ . Dobimo

$$|\lambda - 2k| = (1 - k)\sqrt{2 + \lambda}$$

Izrazimo k z λ ! Dobimo

$$k = -1 \pm \sqrt{2 + \lambda}$$

Ker je $|k| < 1$, pride v poštev le zveza

$$k = -1 + \sqrt{2 + \lambda} \quad (5)$$

Zveza (5) podaja odvisnost koeficienta k od parametra λ na intervalu $(-2, 2)$.

Narišimo graf funkcije $k = k(\lambda)$. Na isto sliko narišimo nato še premici $k = \lambda + 1$ in $k = (\lambda + 1)/3$ (Slika 3 na ovitku).

Graf naše funkcije leži na intervalu $(-2, 2)$ vedno med obema premicama. Naš koeficient k leži torej vedno med $1 + \lambda$ in $(1 + \lambda)/3$. To pa pomeni, da leži središče včrtanega kroga s krajevnim vektorjem $\mathbf{i} = k\mathbf{c}$ vedno med višinsko točko, ki ima krajevni vektor $\mathbf{h} = (1 + \lambda)\mathbf{c}$, in težiščem s krajevnim vektorjem $\mathbf{t} = (1 + \lambda)\mathbf{c}/3$. To pa je prav trditev našega izreka.

Opomba. S slike 3 lahko še marsikaj preberemo. Vidimo, da intervala, na katerem je točka I , v splošni oceni ne moremo zmanjšati. Naša krivulja ima namreč pri $\lambda = -2$ skupno točko s premico $k = \lambda + 1$ in pri $\lambda = 2$ skupno točko s premico $k = (\lambda + 1)/3$. Nadalje je premica $k = (\lambda + 1)/2$ tangenta na našo krivuljo v točki $\lambda = -1$. Ker leži ta tangenta nad krivuljo in ker ležita središči I in O vedno na isti strani oglišča C , kaže vektor

$$IN = (\lambda + 1)\mathbf{c}/2 - k\mathbf{c}$$

vedno proti C . Tu smo z N označili razpolovišče Eulerjeve daljice $[OH]$, to je središče kroga devetih točk. Središče včrtanega kroga I leži tedaj vedno na tisti polovici Eulerjeve daljice, ki je bolj oddaljena od vrha trikotnika. Ker ustreza $\lambda = -1$ enakostraničnemu trikotniku, lahko rečemo tudi, da leži I za tiste enakokrake trikotnike, ki imajo krak krajši od osnovnice, na isti polovici Eulerjeve daljice kot težišče, za tiste s krajšo osnovnico pa na nasprotni polovici.

LITERATURA

- [1] F. Križanič, *Matematika I*, Zavod SRS za šolstvo, Ljubljana 1980.
- [2] S. Fempl, *Nešto o značajnim tačkama trougla*, Matematično fizički list 16 (1965/66), str. 106.

S POTENČNO METODO DO NAPAKE V PROGRAMU

JERNEJ KOZAK

Math. Subj. Class. (1980) 41 A 15

Ne zgodi se tako redko, da nam matematično ozadje problema pomaga odkriti napako v računalniškem programu. V tej notici prikažemo tak primer v pomembni nalogi, interpolaciji z zlepkami. V našem primeru je osnovni kamen eksponentno padanje Lagrangeovih zlepkov. To dejstvo dokažemo in razložimo vpliv na odkritje napake. V nadaljevanju pokažemo, da ta lastnost temelji na dejstvu, da imajo bazne funkcije končen nosilec. Za konec poudarimo, da pravilna interpolacijska naloga, ki zahteva rešitev pasovnega sistema enačb, pogosto vodi k eksponentno padajočim Lagrangeovim funkcijam in je zato numerično stabilna.

WITH THE POWER METHOD TO AN ERROR IN A PROGRAM

It is not so rare that the mathematical background of a problem helps us to locate an error in a computer program. In the following note such an example is demonstrated in an important problem of spline interpolation. In our case the theoretical basis is the exponential decay of Lagrange splines. This fact is proved and it is explained how it is utilized in the error detection. It is further shown that this property is based on the fact that the basis functions have finite support. In conclusion it is pointed out that a correct interpolation problem which requires a solution of a band system of equations often leads to exponentially decaying Lagrange functions, and is therefore numerically stable.

1. Uvod

Kot je spoznal že marsikateri bralec, razvoj računalniškega programa ni preprosta naloga. Ne le spodrseljaji v algoritmu, že drobna tipkarska napaka nam lahko krepko zagreni programiranje. Posebej današnji način dela, neposredni pogovor z računalnikom prek tastature in zaslona, lahko kaj hitro pripelje do napak. Strpno sistematično razgrajevanje problema in sprotno dokazovanje pravilnosti korakov nas pripelje mimo večine pasti, pa vendar v lovu za izpuščeno vejico v fortranskem stavku

```
INTEGER  N,  M,  B
*                C,  D,  I
```

potrebujemo kar nekaj domišljije. Pri odpravljanju programerskih spodrseljajev nam neredko pomaga tudi poznavanje ozadja problema. Ta notica je nastala ob enem takšnih primerov, sestavljanju programa za konstrukcijo kubičnih interpolacijskih zlepkov. Pot, po kateri je bila odkrita edina napaka v programu, je poučna in razkriva izredno numerično stabilnost interpolacije z zlepkami.

Na kratko: izberemo naravno število n in interval $[a, b] \in \mathbb{R}$ razdelimo z n strogo naraščajočimi vozli $t := (t_i)_{i=1}^n$

$$a = : t_1 < t_2 < \dots < t_n := b$$

Kubični zlepek (zlepek reda 4) je funkcija, ki je na vsakem od podintervalov (t_i, t_{i+1}) polinom reda 4 (stopnje < 4) in ima na $[a, b]$ dva odvoda zvezna, v znakih

$$\text{in } f|_{(t_i, t_{i+1})} \in \mathbf{P}_4 := \{g \mid g \text{ je polinom reda 4, (stopnje } < 4)\}$$

$$f \in C^{(2)}[a, b]$$

Prostor kubičnih zlepkov $S_4 := S_{4,t}$ je očitno linearen in preprost premislek

$$4 \cdot \text{\textit{število intervalov}} - 3 \cdot \text{\textit{število notranjih točk}} =$$

$$= 4(n-1) - 3(n-2) = n+2 =: m$$

nam pove

$$\dim S_{4,t} = m$$

Kubični zlepek je na podintervalih $[t_i, t_{i+1}]$ polinom reda 4, zato ga najpogosteje odsekoma izrazimo z vrednostmi

$$f(t_i), \quad f(t_{i+1}), \quad f'(t_i), \quad f'(t_{i+1})$$

Poiščimo najprej bazne polinome $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \in \mathbf{P}_4$ na intervalu $[0, 1]$. Iz

$$\Phi_1(0) = 1, \quad \Phi_1'(0) = 0$$

sledi

$$\Phi_1 := 1 + x^2(\alpha x + \beta)$$

in iz

$$\Phi_1(1) = \Phi_1'(1) = 0$$

izpeljemo

$$\alpha = 2, \quad \beta = -3$$

torej

$$\Phi_1 := \Phi_1(x) := 1 + x^2(2x - 3)$$

Podobno iz $\Phi_3'(0) = 1, \Phi_3(0) = \Phi_3(1) = \Phi_3'(1) = 0$ sledi

$$\Phi_3 := \Phi_3(x) := x(1-x)^2$$

Zasukamo interval $[0, 1]$ in preostali funkciji sta

$$\Phi_2 := \Phi_2(x) := \Phi_1(1-x), \quad \Phi_4 := \Phi_4(x) := -\Phi_3(1-x)$$

Na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$ se zlepek $f(x)$ izraža torej v obliki

$$f(x) = f(t_i) \Phi_1\left(\frac{x-t_i}{\Delta t_i}\right) + f(t_{i+1}) \Phi_2\left(\frac{x-t_i}{\Delta t_i}\right) +$$

$$+ f'(t_i) \Delta t_i \Phi_3\left(\frac{x-t_i}{\Delta t_i}\right) + f'(t_{i+1}) \Delta t_i \Phi_4\left(\frac{x-t_i}{\Delta t_i}\right) \quad (1.1)$$

Tu je $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$. Tako napisan zlepek že izpolnjuje pogoj $f \in C^{(1)}[a, b]$, doseči pa moramo še zveznost drugega odvoda.

Naj bo $g \in C[a, b]$ dana funkcija, ki jo želimo aproksimirati z zlepkom. Najpogosteje poznamo kar vrednosti funkcije g

$$g|_t := (g(t_i))_{i=1}^n$$

Zlepku f , ki se v t ujema z g , pravimo interpolacijski. V obliki (1.1) so preostali neznani odvodi

$$\mathbf{s} := (s_i)_{i=1}^{n-1} := (f'(t_i))_{i=1}^{n-1}$$

zveznost drugega odvoda nam da

$$f''(t_i - 0) = f''(t_i + 0), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (1.2)$$

Če o funkciji g ne vemo nič več, preostala pogoja naprtimo zlepku. Največkrat kar prekličemo prva notranja vozla

$$f^{(3)}(t_2 - 0) = f^{(3)}(t_2 + 0), \quad f^{(3)}(t_{n-1} - 0) = f^{(3)}(t_{n-1} + 0) \quad (1.3)$$

pri dovolj velikem n . Bralec si bo iz (1.2) in (1.3) brez težav v splošnem izpeljal sistem enačb, ki določa neznane $\mathbf{s}$, za naš program pa delitev poenostavimo v ekvidistantno

$$h := (b - a)/(n - 1), \quad t_i := (i - 1)h + a, \text{ za vse } i$$

Tedaj je sistem enačb $\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1} := h \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := (b_i)_{i=1}^{n-1}, \quad b_i := \begin{cases} (g(t_3) + 4g(t_2) - 5g(t_1))/2, & i = 1 \\ 3(g(t_{i+1}) - g(t_{i-1})), & i = 2, \dots, n-1 \\ (5g(t_n) - 4g(t_{n-1}) - g(t_{n-2}))/2, & i = n \end{cases}$$

Matrika $\mathbf{A}$ je obrnljiva. To razberemo že iz izpeljanke Gerschgorinovega izreka (Varga (1962), stran 21), ki pravi, da vse lastne vrednosti ireducibilne diagonalno dominantne matrike leže v strogi notranjosti unije krogov s središči v diagonalnih elementih in s polmeri, ki so vsota absolutnih vrednosti izven-diagonalnih elementov v istem stolpcu. Ta unija je v našem primeru

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 3\}$$

Torej $\lambda = 0$ ne more biti lastna vrednost.

In zdaj k računalniškemu programu. Ker preslikava

$$I_4 : C[a, b] \mapsto S_{4,t} : f \mapsto I_4 f := \\ := \text{interpolacijski zlepek s preklicanima vozloma } t_2, t_{n-1}$$

ohranja zlepke in $\mathbf{P} \subset S_{4,t}$, je za prvo testno funkcijo smiselno izbrati kar

$$g := g(x) := 1$$

Rezultat pri podatkih $[a, b] := [0, 1]$, $n = 11$, $h = 0.1$ in primerjanju obeh funkcij v točkah $t_{i+1/2} := (t_i + t_{i+1})/2$

i	$t_{i+1/2}$	$g(t_{i+1/2})$	$I_4 g(t_{i+1/2})$
1	0.05	1.0000000	1.3415064
2	0.15	1.0000000	0.9084936
3	0.25	1.0000000	1.0245191
4	0.35	1.0000000	0.9934301
5	0.45	1.0000000	1.0017604
6	0.55	1.0000000	0.9995283
7	0.65	1.0000000	1.0001266
8	0.75	1.0000000	0.9999655
9	0.85	1.0000000	1.0000115
10	0.95	1.0000000	0.9999885

govori, da je v programu očitno napaka. Kako naj jo poiščemo?

2. Prva misel

Matrika A je tridiagonalna, zato smo za razcep uporabili za ta primer prirejen Gaussov algoritem brez pivotiranja, opisan npr. v Isaacson, Keller (1966, stran 55—56). Prva misel je bila: matrika A v našem primeru ni diagonalno dominantna (s strogo dominantnostjo v prvi in zadnji vrstici), kot jo zahteva izrek 5 v isti knjigi, in algoritem lahko zaide v numerične težave. Da ugovor ne velja, je mogoče preveriti na več načinov, še najlepša pa je pot, ki nas nekoliko pouči o naravi zlepkov.

De Boor in Pinkus (1977) sta pokazala tole: naj bo v sistemu enačb

$$Ax = b$$

matrika A totalno pozitivna, torej naj bodo vsi minorji reda r , $1 \leq r \leq n$

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n \end{matrix}$$

nenegativni. Pivotiranje v Gaussovem algoritmu je odveč.

V aproksimaciji z zlepkami pogosto srečamo totalno pozitivne matrike. V našem primeru lahko zelo preprosto direktno preverimo, da velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

in podobno na drugem koncu matrike. Matriko B

$$B := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

seveda lahko razcepimo v $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{U}$ brez pivotiranja po omenjenem postopku in pozoren bralec bo odkril, da imata dvodiagonalni matriki $\mathbf{L}$ in $\mathbf{U}$ le ne-negativne elemente. Trdimo: dvodiagonalna matrika z nenegativnimi elementi je totalno pozitivna. Res, za takšno matriko $\mathbf{C}$ ugotovimo

$$C \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} i_2 & i_3 & \dots & i_r \\ j_2 & j_3 & \dots & j_r \end{pmatrix}$$

in induktivni sklep trditev potrdi. Prvotno matriko $\mathbf{A}$ lahko torej razstavimo v produkt totalno pozitivnih matrik, torej je po Cauchy-Binetovem obrazcu tudi sama totalno pozitivna.

3. Napaka

Preglejmo rezultat interpolacije še enkrat. Za napako $e := g - I_4 g$ in kvociente $\lambda_i := e(t_{i-1/2})/e(t_{i+1/2})$ ugotovimo

i	$e(t_{i+1/2})$	λ_i
2	— 0.915064E-1	—
3	0.245191E-1	— 3.73205
4	— 0.656986E-2	— 3.73206
5	0.176040E-2	— 3.73203
6	— 0.471742E-3	— 3.73170
7	0.126565E-3	— 3.72727
8	— 0.345177E-4	— 3.66667
9	0.115059E-4	— 3.00000

Napaka je torej na levem delu intervala največja in v desno zamre. Na vsakem koraku se deli s faktorjem λ_i in numerične vrednosti kažejo, da zaporedje $(\lambda_i)_{i=n}^{\infty}$ konvergira k $-3.73 \dots$. Sklep: napako smo naredili v sestavljanju začetnih enačb, točneje v prvi, saj prav ta ni sprogramirana po splošnemu pravilu. Izpis b_1 je to res potrdil in popravljeni program pokorno reproducira konstanto.

Razmišljanje, ki je tako hitro odkrilo napako, pa je takole: Če je napaka nastala v enačbah, ki predpisujejo lastnosti zleпка na levem robu intervala, jo nosi eden ali več bližnjih Lagrangeovih zlepkov. Torej je desno od fiksnega vozla t_j napaka v vozlih enaka nič

$$e(t_i) = 0 \quad , \quad i = j + 1, j + 2, \dots$$

Za takšne i iz

$$e(t_i) = e(t_{i+1}) = 0 \quad \text{in} \quad e \in \mathbf{P}_4 \text{ na } (t_i, t_{i+1})$$

izpeljemo

$$e(x) = e'(t_i) ((x - t_i) - (x - t_i)^3/(\Delta t_i)^2 + \\ + e''(t_i) ((x - t_i)^2 - (x - t_i)^3/(\Delta t_i))/2 \quad , \quad \text{na } (t_i, t_{i+1})$$

Napaka je torej linearno odvisna od komponent vektorja

$$\mathbf{e}_i := (e'(t_i) \Delta t_i \quad , \quad e''(t_i) (\Delta t_i)^2/2)$$

Toda $e \in C^{(2)}[a, b]$ in

$$\mathbf{e}_{i+1} = - \begin{pmatrix} q_i & \\ & q_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_i = : \mathbf{Q}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_i, \quad q_i := \Delta t_{i+1} / \Delta t_i$$

Za ekvidistantni primer je $\mathbf{Q}_i = \mathbf{I}$, za vse i , in torej

$$\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{A} \mathbf{e}_i$$

To pa je en korak (nenormirane) potenčne metode za računanje dominantne lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$ (Isaacson, Keller (1966), stran 147).

Karakteristični polinom matrike $\mathbf{A}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -(\lambda^2 + 4\lambda + 1)$$

ima ničli

$$\lambda_1 := -(2 + \sqrt{3}) < -1 < \lambda_2 := -(2 - \sqrt{3}) = 1/\lambda_1 < 0$$

torej zaporedje $(\mathbf{e}_i)$, ki ni identično enako 0, raste vsaj v eno smer. Točneje, pri zgornji predpostavki $\mathbf{e}_i$ gotovo raste z desne v levo in

$$(\mathbf{e}_i)_j / (\mathbf{e}_{i+1})_j \rightarrow -(2 + \sqrt{3}) = -3.73205$$

s padajočim i -jem za obe komponenti j . To pa je natančno tisto, kar trdijo numerično dobljene vrednosti!

4. Demkov izrek

Za konec zastavimo še vprašanje: kaj odlikuje kubične zlepke, da Lagrangeov zlepek eksponentno zamre od vrednosti 1 v nasprotju s tem, kar vemo npr. o Lagrangeovem polinomu

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\cdot - t_j) / (t_i - t_j)$$

Odgovor se je koval več let. Vendar tako Douglas, Dupont in Wahlbin (1975) kot de Boor (1976 a) ga vežejo na zlepke. Šele Demko (1977) dokončno izlušči najpomembnejšo lastnost, pasovnost matrike:

Naj bo $\mathbf{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^n$ pasovna matrika, $a_{ij} = 0$, $|i - j| > m$ in za neki p , $1 \leq p \leq \infty$, omejena in omejeno obrnljiva

$$\|\mathbf{A}\|_p \leq C, \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \leq 1/c, \quad C, c > 0$$

Za elemente $a_{ij}^{(-)}$ inverzne matrike, $\mathbf{A}^{-1} = : (a_{ij}^{(-)})$, tedaj velja

$$|a_{ij}^{(-)}| \leq \text{const } \lambda^{|i-j|}, \quad \text{za vse } i, j$$

kjer sta $\text{const} > 0$ in $\lambda \in (0, 1)$ konstanti, eksplicitno odvisni le od c , C in m , ne pa od n .

Dokažimo izrek. Omejimo se kar na prvi stolpec inverzne matrike

$$\mathbf{x} := (x_i)_{i=1}^n := (a_{i1}^{(-)})_{i=1}^n$$

in $1 \leq p \leq 2$. Za preostale stolpce naredimo podoben sklep, za $2 \leq p \leq \infty$ pa transportiramo obe matriki, saj je n končen. Definirajmo

$$\mathbf{x}_k := (0, 0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

in

$$\mathbf{z}_k := \mathbf{A} \mathbf{x}_k$$

Matrika A je pasovna

$$(z_k)_i = 0, \quad i < k - m$$

vektor x_{k-2m} pa je od $(k - 2m)$ -te komponente naprej prvi stolpec inverzne matrike

$$(z_{k-2m})_i = 0, \quad i \geq k - m$$

Uporabimo to v oceni

$$c \|x_k\|_p \leq \|Ax\|_p = \|z_k\|_p \leq \|z_k - z_{k-2m}\|_p \leq C \|x_k - x_{k-2m}\|_p$$

kar pomeni

$$(C/c)^p \sum_{i \geq k} |x_i|^p \leq \sum_{i=k-2m}^{k-1} |x_i|^p$$

Na desni strani neenakosti nastopa m zaporednih komponent vektorja x . Poenostavimo z

$$\alpha_i := \sum_{j=i}^{i+2m-1} |x_j|^p$$

v

$$\sum_{i \geq k} \alpha_i \leq 2m(C/c)^p \alpha_{k-2m} =: \text{const} \alpha_{k-2m} \quad (4.1)$$

nenakost, ki jo je de Boor imenoval diskretno Gronwallovo neenakost, po analogiji s pogostnim orodjem v teoriji diferencialnih enačb. Naj za zaporedje nenegativnih števil $\alpha := (\alpha_i)_{i \geq 0}$ in fiksni $m \in \mathbb{N}$ velja

$$s_k := \sum_{i \geq k} \alpha_i \leq \text{const} \alpha_{k-m}, \quad \text{za vse } k \geq m$$

in konstanto $\text{const} > 0$. Tedaj

$$\alpha_k \leq \lambda^{k+1-m} s_0, \quad \lambda := (\text{const}/(\text{const} + 1))^{1/m} \quad (4.2)$$

kar zaključuje dokaz Demkovega izreka. Preverimo (4.2). Po predpostavki

$$s_k \leq \text{const} \alpha_{k-m} = \text{const} (s_{k-m} - s_{k-m+1})$$

in

$$(1 + \text{const}) s_k = s_k + \text{const} s_k \leq s_k + \text{const} s_{k-m+1} \leq \text{const} s_{k-m}$$

torej

$$s_k \leq \text{const}/(\text{const} + 1) s_{k-m}$$

in odtod

$$\begin{aligned} \alpha_{jm} &\leq (\text{const}/(\text{const} + 1))^j s_0, & \alpha_{jm+1} &\leq (\text{const}/(\text{const} + 1))^j s_0, \\ \dots \alpha_{jm+m-1} &\leq (\text{const}/(\text{const} + 1))^j s_0 \end{aligned}$$

Demkova ideja vodi k razumevanju nerešenih vprašanj v teoriji zlepkov ali bolje k razumevanju pasovnih matrik v splošnem, kar govore rezultati de Boora (1976 b, 1980 a, 1980 b). Pripomnimo, da izrek velja le za končne n , vendar tudi ko n raste prek vseh meja, ohranja svoje osnovno sporočilo: naj pasovna matrika (a_{ij}) inducira linearno omejeno preslikavo na l_p . Če je omejeno obrnljiva, je tudi njen obrat dan z matriko, katere elementi od diagonale stran eksponentno padajo.

Matrika A iz razdelkov 3 in 4 je seveda pasovna z $m = 1$, vendar tudi v interpolaciji z zlepki splošnega reda pasovnost ni redka. Res, naj bo

$$\begin{aligned} S_{k,t} &:= \text{linearni prostor zlepkov reda } k \text{ z vozli } t := \\ &:= \{f \mid f \in C^{(k-2)}[a, b], f|_{(t_i, t_{i+1})} \text{ je polinom reda } k\} \end{aligned}$$

in $\varphi := (\varphi_i)$ dani linearni interpolacijski pogoji. Če zaporedju t dodamo a in b ($k-1$) krat, vsi možni B -zlepki

$$B_{i,k} := B_{i,k}(x) := (t_{i+k} - t_i) [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - x)_+^{k-1}$$

tvorijo prav posebej lepo bazo $S_{k,t}$. B -zlepki imajo majhen nosilec

$$\text{supp } B_{i,k} = (t_i, t_{i+k})$$

in običajno rešujemo naloge, za katere velja

$$\varphi_i B_{j,k} = 0 \quad , \quad |i - j| > m \in \mathbf{N} \quad , \quad \text{za vse } i, j$$

Naj bo Gramova matrika $\mathbf{A} := (\varphi_i B_{j,k})$ pasovna. Lagrangeov zlepek

$$l_i = \sum_j a_{ji}^{(-)} B_{j,k} \in S_{k,t}$$

na $[t_r, t_{r+1}]$ ocenimo po Demkovem izreku:

$$|l_i(x)| = \left| \sum_j a_{ji}^{(-)} B_{j,k}(x) \right| \leq \sum_{j=r-k+1}^r |a_{ji}^{(-)}| B_{j,k}(x) \leq \text{const } \lambda^{|i-r|} \sum_j B_{j,k}(x) = \text{const } \lambda^{|i-r|}$$

saj B -zlepki dele enoto, $\sum_j B_{j,k}(x) = 1$, če so le izpolnjene zahteve izreka.

LITERATURA

- [1] C. de Boor, *A bound on the L_∞ — norm of L_2 — approximation by splines in terms of a global mesh ratio*, Math. Comp. **30** (1976), 765—771.
- [2] C. de Boor, *Odd-degree spline interpolation at a biinfinite knot sequence*, v Approximation Theory, Bonn 1976, R. Schaback in K. Scherer eds., Lecture Notes Math. 556, Springer, Heidelberg 1976, 30—53.
- [3] C. de Boor, A. Pinkus, *Backward error analysis for totally positive linear systems*, Numer. Math. **27** (1977), 485—490.
- [4] C. de Boor, *What is the main diagonal of a biinfinite band matrix?*, v Approximation Theory, Bonn 1979, R. DeVore in K. Scherer eds., Academic Press, New York 1980.
- [5] C. de Boor, *Dichotomies for band matrices*, MRC Tech. Summ. Rep. 2057, Univ. of Wis., 1980.
- [6] S. Demko, *Inverses of band matrices and local convergence of spline projections*, Siam J. Numer. Anal. **14** (1977), 616—619.
- [7] Douglas, T. Dupont, Jr., L. Wahlbin, *Optimal L_∞ — error estimates for Galerkin approximations to solutions of two point boundary value problems*, Math. Comp. **29** (1975), 475—483.
- [8] E. Isaacson, H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, New York 1966.
- [9] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.

KAJ SE ZADAJ SKRIVA*

IVAN KUŠČER

UDK 539

Pregledu prvih določitev Avogadrovega števila in z njim povezanih atomskih konstant sledi podroben opis določitve iz modrine neba, pri čemer si pomagamo s fotografskim svetlobnim merilnikom. Zadnje poglavje zagovarja zgodnje vpletanje mikroskopskega opisa pojavov v pouk fizike.

WHAT'S HIDDEN BEHIND?

The early determinations of Avogadro's number and associated atomic constants are briefly reviewed. A detailed description is given for a determination from the brightness of the blue sky, by aid of a photographer's light gauge. The last section advocates an early inclusion of the microscopic description of phenomena into physics teaching.

1. Uvod

Nekoč so fizikalne pojave opisovali samo tako, kot jih neposredno dojemamo bodisi z lastnimi čutili ali z meritvami. Opazujemo npr. taljenje ledu in ugotovimo, kako se lastnosti vode pri tem spremenijo. Tak opis je *makroskopski* ali, kot tudi pravimo, *fenomenološki*.

Potem ko so se ljudje v prejšnjem stoletju dokončno prepričali, da je svet sestavljen iz atomov, so se pri vsakem pojavu tudi začeli spraševati, kaj se zadaj skriva, torej kaj se pri tem dogaja z gradniki materije. Za led vemo, da so v njem molekule razporejene v kristalno mrežo. Ko se led stali, se razpored podere. Tak način opisovanja imenujemo *mikroskopski*.

Kolikor se le da, posredujemo v šoli vselej oba opisa. Za električni tok v žici povemo, kako ga merimo in tudi to, da se v njem skriva usmerjeno gibanje prevodniških elektronov. Precej razprav je že bilo med šolniki o vprašanju, kako bi oboje najbolje razporedili. Zatika se, ker do podatkov za kvantitativen mikroskopski opis ni lahko priti, razen če jih povemo kar s prižnice. Zato da razumemo Millikanov poskus in da znamo z njim določiti osnovni naboj, moramo že precej vedeti o električnem polju, o viskoznosti in o uporuh padajoče kapljice. Resneje se o vsem tem lahko pogovorimo šele, ko je velik del šolske fizike že mimo.

Ni dobro, če prestrogo vztrajamo pri načelu, da mora učenec za vsako stvar sproti natančno zvedeti, kako do nje pridemo. Na tak način se fizike najprej učimo kot kuhanja in pridemo do globljih resnic šele proti koncu. Tradicionalni učbeniki (tudi ta, pri katerem sem sam sodeloval), se še deloma držijo takšne poti. Ko hočemo to spremeniti, pa se ne smemo zaleteti v nasprotno skrajnost, namreč da bi kar iz zraka jemali podatke in trditve o atomih, kadarkoli bi se nam zahotelo ozaljšane razlage. Pri takem pouku se učenec lahko naleze vtisa, da je vse skupaj nekako izmišljeno. V dobi, ko se je srednjeveško praznoverje ponovno začelo razširjati, bi bilo to še posebno nevarno. Če pri mikroskopskem opisu skrbno vsega ne premislimo, kaj hitro

* Predavanje na seminarjih Zavoda za šolstvo SRS za učitelje fizike na srednjih šolah, avgusta 1982.

zabredemo v lažne trditve. V šolskih knjigah jih najdemo pri površinski napetosti, v kinetični teoriji, pri električnem toku in v uvodnih poglavjih kemije. Nekateri pedagoško usmerjeni strokovnjaki opravičujejo spodrsaljaje, češ da je lahkotna laž za šolo boljša kot težavna resnica. Vendar učitelji fizike na splošno ne nasedajo takšni modrosti. Saj je vsa umetnost poučevanja v tem, da težavno resnico naredimo lažjo, ne da bi se ji izneverili.

2. Velikost atomov

Ali je še kaka srednja pot, ki ne bi delala preskokov, a bi vendarle omogočila pravočasno vključitev mikroskopskega opisa? Najdemo jo, če se tu in tam odpovemo natančnemu obravnavanju in se zadovoljimo z ocenami velikostnih stopenj ali celo samo s kvalitativnim pojasnjevanjem. Približno znanje, ki ga učenci prinesejo iz osnovne šole in iz sviofizike, lahko precej pomaga, čeprav je treba to znanje tu in tam obnoviti.

O atomih se je težko pogovarjati, preden ne zvemo, kako veliki so. Zato si oglejmo zgodovinsko najpomembnejše določitve Avogadrovega števila ali iz njega izvedenih količin: velikosti in mas atomov, osnovnega naboja in Boltzmannove konstante. Presodili bomo, kaj od tega se da povedati v šoli.

Prvo zelo grobo oceno je dobil Thomas Young leta 1816 s primerjavo površinske napetosti in izparilne toplote, preračunane na prostorninsko enoto kapljevine. Kvocient obeh količin ima enako velikostno stopnjo kot debelina napete površinske plasti, ta pa ni dosti večja kot premer molekule. Za vodo dobimo

$$\gamma/\rho q_i = 0,07 \text{ J m}^{-2}/2,26 \cdot 10^9 \text{ J m}^{-3} = 0,03 \text{ nm}.$$

Rezultat je za faktor 10 premajhen; vendar ga z dodatnimi privzetki lahko izboljšamo, kot povedo učbeniki. Kljub slabi natančnosti je Youngova zamisel za šolo dragocena. Posebno prijetno je, da se pogovarjamo le o splošno znanih pojavih in o razumljivih pojmi.

Teže je razumeti Loschmidtovo določitev, ki je bila druga v zgodovini (1865) in ki izhaja iz viskoznosti plinov. Plin je viskozen samo zato, ker si strižno gibajoče se plasti druga drugi podajajo gibalno količino s prehajanjem molekul. Podobno se godi vlakoma, ki po vzporednih tirih počasi vozita drug mimo drugega, če potniki skačejo sem in tja. Četudi bi bilo še tako malo trenja, se vlaka ustavljata, ker prinese vsak potnik drugemu vlaku nekaj gibalne količine, ki njegovemu gibanju nasprotuje.

Prispodoba pomaga, da ocenimo silo, s katero zračna plast zadržuje sosednjo hitrejšo. Ne da bi se zamujali z izpeljavo, si samo oglejmo oceno za viskoznost, ki jo na koncu dobimo s krajšanjem:

$$\eta \sim \rho l c.$$

Pravzaprav bi bili morali uporabiti povprečno velikost termične molekulske hitrosti ($\bar{v} = (8 kT/\pi m)^{1/2}$); namesto nje smo vzeli zvočno hitrost, ki je skoraj ravno tolikšna ($c = (c_p kT/c_V m)^{1/2}$). Faktor l je povprečna prosta pot, to je razdalja, ki jo molekula v povprečju prepotuje od trka do trka. Znamenje $\sim$ pomeni, da se samo velikostni stopnji na obeh straneh ujemata. (Ignorirali smo številski koeficient, ki je malo manjši kot 1, kot pokaže resnejša izpeljava.) Iz viskoznosti zraka ($\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ pascalsekund), gostote ($\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$) in zvočne hitrosti ($c = 340 \text{ m/s}$) dobimo malo premajhen rezultat: $l = 40 \text{ nm}$.

Vedeti moramo še, da je povprečna prosta pot obratno sorazmerna z gostoto plina. Seveda: pri slepem tavanju po goščavi prej kam butnemo kot v redkem gozdu. Ko plin spremenimo v kapljevino, bi se povprečna prosta pot po takem računu morala zmanjšati nekako na premer molekule ($2r_0$). Zrak se pri ukapljitvi približno 800-krat zgosti, čemur ustreza zmanjšanje proste poti na $40 \text{ nm}/800 = 0,05 \text{ nm}$. V velikostni stopnji se nismo dosti zmotili, kajti premeri atomov in majhnih molekul merijo po nekaj desetink nanometra.

V šoli se moramo seveda zadovoljiti s kvalitativno razlago. Celo če viskoznosti sploh ne definiramo kvantitativno, bo vsak učenec zaupal primerjavi z vlakoma. Razumljivo je, da o viskoznosti odločata živahnost termičnega gibanja in razdalja, iz katere molekule v povprečju nemoteno priletijo v obravnavano zračno plast. O tej razdalji očitno odloča debelina molekul, ki se potemtakem mora dati izračunati iz opazovane viskoznosti.

3. Modrina neba kaže, kako velike so molekule

Na začetku našega stoletja so se zvrstili trije možje z novimi neodvisnimi določitvami: Jean Perrin z opazovanjem termičnega (»Brownovega«) gibanja smolnih kapljic v vodi, Millikan s svojimi naelektrenimi kapljicami in lord Rayleigh z modrino neba. Ker je Millikanov poskus splošno znan in zapisan v vseh učbenikih, Perrinov pa za začetek težko razumljiv, se ustavimo samo pri modrini neba. Izpeljava ne bo čisto po Rayleighu. V kvalitativni obliki bi se sklepanje dalo ponoviti v zadnjem razredu srednje šole.

Začnemo s vprašanjem, zakaj je zrak moten. Motnost se kaže v modrini neba, ki ne izgine niti ob najčistejšem vremenu, ko ni ne dima ne prahu. Če bi bil zrak idealen kontinuum, ne bi mogel biti moten in nebo bi bilo črno. Moten je zato, ker je zrnat, namreč narejen iz molekul. Podobno kot prah, tudi molekule sipajo svetlobo, čeprav ne tako močno in modro svetlobo bolj kot rdečo. V molekuli elektroni nalahko nihajo pod vplivom vpadajoče sončne svetlobe. Vsaka osvetljena molekula torej sama seva kot majhna dipolna antena. Njena svetilnost je sorazmerna z gostoto vpadajočega svetlobnega toka.

Električni dipolni moment, ki ga zunanje polje vzbudi v molekuli, je sorazmeren s poljsko jakostjo,

$$p_e = \alpha E.$$

Koeficient α se imenuje *polarizirnost*. Če bi besedo po vsej sili hoteli prevesti, bi nemara rekli, da je to električna podajnost molekule.

Ko polje niha, niha z njim dipolni moment in zato molekula seva. Izsevano polje je sorazmerno s pospeškom elektronov, torej z drugim odvodom dipolnega momenta, torej s kvadratom frekvence. Oddani svetlobni tok in z njim svetilnost molekule sta potemtakem sorazmerna s $(p_{e0} \omega^2)^2 = (\alpha E_0 \omega^2)^2$, če sta p_{e0} in E_0 amplitudi molekulskega dipolnega momenta in poljske jakosti pri vpadajočem valovanju. Drugače povedano: razsuti svetlobni tok je pri enaki amplitudi poljske jakosti sorazmeren z λ^{-4} , to je z recipročno četrto potenco valovne dolžine. S tem smo pojasnili, zakaj se modra svetloba močnejše razsuje kot rdeča, torej zakaj je nebo modro.

Koeficienta, ki posreduje navedeno sorazmernost, ne moremo na hitro izpeljati, ampak kvečjemu po dimenzijah uganemo, katero potenco influenčne

konstante (ϵ_0) in svetlobne hitrosti (c) mora vsebovati. Ker ugibanje ni resno, raje povzemimo iz knjig:

$$I = (\alpha E_0 \omega^2)^2 / (4\pi)^2 \epsilon_0 c^3.$$

Tolikšna je svetilnost v ekvatorski ravnini dipola.

Spomnimo se še, da se gostota vpadajočega svetlobnega toka takole zapiše,

$$j = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c.$$

Ker je ta tok nepolariziran, samo polovično prispeva k svetilnosti molekule v smeri, ki je za 90° stran od Sonca. (V svoji lastni smeri namreč dipol nič ne seva, kot vemo iz šole.) Svetilnost molekule se torej izraža tudi takole,

$$I = (\alpha \omega^2 / 4\pi \epsilon_0 c^2)^2 j = (\pi \alpha / \epsilon_0 \lambda^2)^2 j.$$

Polarizirnost molekul se kaže tudi v tem, da deluje zrak kot dielektrik in da ima zato lomni kvocient (ν) večji kot 1. Spomnimo se, da je $\nu = \sqrt{\epsilon}$ in da po drugi strani električna polarizacija pove, kolikšna je vsota dipolnih momentov v prostorninski enoti, torej

$$D - \epsilon_0 E = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E = n p_e = n \alpha E,$$

če je n številska gostota molekul. Sledi

$$\alpha = (\nu^2 - 1) \epsilon_0 / n \approx 2(\nu - 1) \epsilon_0 / n,$$

kar vstavimo v prejšnji izraz za svetilnost, zato da se znebimo neznane polarizirnosti,

$$I = [2\pi(\nu - 1)/n \lambda^2]^2 j.$$

Ker so molekule v zraku popolnoma neurejene, ne pride do izraza nobena interferenca svetlobnih valov z različnih molekul, ampak se kar seštevajo svetlobni tokovi. Svetilnost posamezne molekule torej množimo z n in še z debelino h zračne plasti v opazovani smeri. Tako dobimo svetlost neba, to je na ploščinsko enoto preračunano svetilnost:

$$B = [2\pi(\nu - 1)/\lambda^2]^2 j h/n.$$

Iz izmerjene svetlosti B in podatkov na desni strani enačbe že lahko izračunamo številsko gostoto molekul v zraku in iz nje Avogadrovo število.

Pred leti, bilo je pozno spomladi, sem na izletu na Kamniško sedlo ob kristalno čistem vremenu poskusil, ali se da takšna določitev izvesti kar s fotografskim svetlobnim merilnikom. Ker merilnik nima absolutne skale, sem ga usmeril še na zasneženo pobočje, ki ga je Sonce skoraj pravokotno obsevalo. Merilnik je pokazal 25-krat večjo svetlost ($B_0 \approx j/\pi$) kot pri pogledu na nebo, in to 90° stran od Sonca ter kakih 45° nad obzorjem.

Tlak v višini 1400 m, kjer sem delal poskus, meri kakih 850 milibarov, temperatura pa je bila okrog $10^\circ\text{C} = 283\text{ K}$. Pri teh okoliščinah je gostota zraka manjša od normalne za faktor 0,8, tako da zavzema kilomol prostornino $V_M = 22,4\text{ m}^3/0,8 = 28\text{ m}^3$. Za lomni kvocient zraka (gl. tabelo v učbeniku) uvidimo iz prejšnjega, kam je treba vtakniti faktor 0,8:

$$\nu - 1 = 0,8 \cdot 0,00027 = 2,2 \cdot 10^{-4}.$$

Še valovno dolžino potrebujemo. Vzeli jo bomo malo pod sredino vidnega spektra, recimo $\lambda = 500\text{ nm}$.

Debelina ozračja, preračunana na gostoto pri tleh, je enaka $p/\rho g = 8000$ m. Zaradi poševnega pogleda množimo s $\sqrt{2}$, tako da bomo vzeli $h = 1,13 \cdot 10^4$ m. Sedaj smo pripravljeni, da na osnovi prejšnjih enačb izračunamo Avogadrovo število:

$$N_A = V_M n = \pi V_M h(B_0/B) [2\pi(\nu - 1)/\lambda^2]^2 = \\ = \pi \cdot 28 \text{ m}^3 \cdot 1,13 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot 25 \cdot [2\pi \cdot 2,2 \cdot 10^{-4}/(5 \cdot 10^{-7} \text{ m})^2]^2 = 7,6 \cdot 10^{26}.$$

Rezultat je samo za 25 % previsok, s čimer smo spričo precej negotovih podatkov in zelo približne meritve lahko zadovoljni. Pravzaprav bi bil človek manj presenečen, če bi bil rezultat prenizek. Dim in prah v zraku ter večkratno sipanje svetlobe in po drugi strani tudi umazanija na snegu namreč zmanjšujejo kontrast B_0/B med snegom in nebom. Iz premajhnega B_0/B pa sledi premajhen N_A .

Odkritje rentgenskih interferenc na kristalih (Max von Laue s sodelavcem, 1912, ter William in Lawrence Bragg, 1913) je odprlo možnost za novo in natančnejšo določitev Avogadrovega števila. Vendar je minilo še 15 let, preden je E. Bäcklinu (1928) uspela neodvisna meritev valovne dolžine pri enobarvni rentgenski svetlobi. Uporabil je umetno mrežico, na katero je rentgenski curek vpadal zelo položno. Kako so potem na Braggov način določili razmik mrežnih ravnin v kristalu in iz njega Avogadrovo število, piše v vsakem učbeniku. Učence spomnimo na odboj svetlobe na tankih plasteh, ki ga računsko podobno obravnavamo.

Dandanes poznamo Avogadrovo število bolj kot na stotisočinko njegove vrednosti natančno. Za kilomol velja

$$N_A = 6,02205 \cdot 10^{26}.$$

Zaman pa bi spraševali, katera meritev je dala to vrednost. Osnovnih konstant namreč ne določajo več s po eno samo vrsto meritve, ampak po ovinku vse hkrati z raznolikimi meritvami, ki jih je več vrst kot iskanih konstant. Srednje vrednosti in efektivne (= »standardne«) napake za iskane konstante računajo po metodi najmanjših kvadratov. Reviews of Modern Physics je o tem večkrat poročala, kar je povzel tudi Obzornik za matematiko in fiziko (*Osnovne konstante*, 1 (1951) 132).

4. Razpored v šoli

Kako kmalu se lahko v šoli začnemo pogovarjati o atomih, je odvisno od razporeda poglavij. Če vse leto dolgočasimo učence z mehaniko točkastih, togih in idealno prožnih teles, nimamo z atomi kaj početi. Namišljena telesa pač niso narejena iz atomov. Bolje je čimprej priznati, da so telesa narejena iz snovi in da imajo snovi vsakovrstne lastnosti. Pri pojasnjevanju teh lastnosti nam že pride prav mikroskopska slika. Nekaj tega bi nemara lahko prišlo že v uvodno poglavje, še pred mehaniko.

Resnejšo razpravo o molekulah vpletemo pri fiziki plinov, kjer iz kinetične teorije izpeljemo Boylov zakon. Pri poglavjih o toploti je seveda še več priložnosti: pri energiji, pri faznih spremembah ter pri temperaturi in entropiji.

Pravzaprav je narobe, da sta mehanika in termodinamika v šoli tako ostro ločeni. Ločitev je umetna in izvira iz časov, ko so ljudje delili fiziko na po-

glavja po svojih čutih. Tip je bil za mehaniko, vid za optiko, ... voh pa so prepustili kemikom. Posebno neprijetno je, da obravnavamo energijo dvakrat: pri mehaniki ob izreku o kinetični energiji in šele dosti kasneje pri termodinamiki ob energijskem zakonu. Učencem je treba zabičati, da izrek ne velja vedno. Seveda ne velja, ko pa zamolčimo notranjo energijo! Če bi obe poglavji združili, bi odpadlo marsikako sprenevedanje. Naloga je videti s pedagoške plati težavna in se je pisci učbenikov zato še vedno precej ogibajo.

Ko pri nauku o toploti preskakujemo z makroskopskega opisa na mikroskopski, je treba paziti, da ga ne polomimo. Upoštevati moramo, da je cela vrsta pojmov prirejenih samo za makroskopski opis. Pri posamezni molekuli ne moremo govoriti ne o temperaturi ne o entropiji. Razen tega v mikroskopski sliki ne moremo ločiti dela in toplote, čeprav je ta ločitev pri makroskopskem opisovanju tako zelo pomembna. Ni več razločka med reverzibilnimi in ireverzibilnimi spremembami, kajti v mikroskopski sliki poteka vse reverzibilno. Tudi razloček med površinsko in prostorninsko porazdeljenimi silami se izgubi. Dokler se ne srečamo z gradniki jeder, imamo opravka sploh samo z elektromagnetnimi silami in s težo.

Kvantitativno prevajanje z mikroskopskega na makroskopski opis je lahko težavno in v ta namen so razvili posebno znanost: statistično mehaniko. Le nekaj drobtin lahko iz nje prevzamemo za srednješolski pouk. Predvsem se ustavimo pri mikroskopski sliki snovi v ravnovesnem stanju in pri pojmu energije.

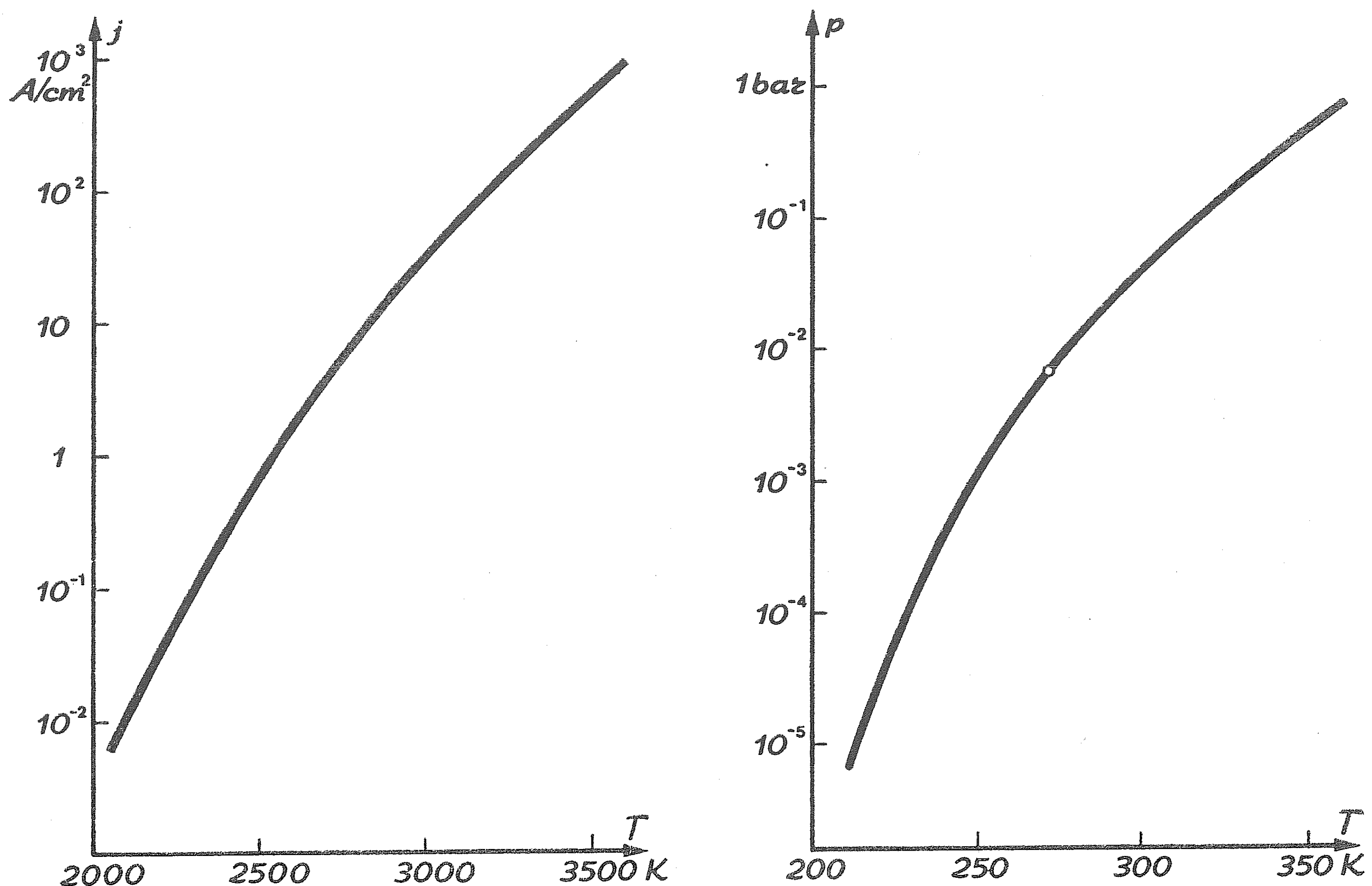
Celo pri energiji se lahko zarečemo, tako kot pisec nekih skript s trditvijo, da je toplota kinetična energija molekul. Pri makroskopskem opisu smo navajeni, da energijo razdelimo v notranjo, kinetično in potencialno v zunanjem (npr. težnem) polju. Tudi vsaka molekula ima svojo potencialno energijo v zunanjem polju in svojo kinetično energijo. Razen tega ima množica molekul še medsebojno potencialno energijo zaradi medmolekulskih sil. Samo potencialno energijo v zunanjem polju kar tako seštejemo, da dobimo celotno potencialno energijo telesa. Iz kinetične energije pa moramo najprej izluščiti tisti delež, ki ustreza morebitnemu usmerjenemu gibanju večje množice molekul. S seštevanjem teh deležev dobimo makroskopsko kinetično energijo telesa. Ostanek, to je kinetična energija termičnega gibanja, pa se skupaj s potencialno energijo medmolekulskih sil piše v prid notranji energiji snovi.

Ko se pri hidrodinamiki pogovarjamo o hitrostih majhnih vodnih kapljic, je treba učencu povedati, da so te namišljene kapljice še vedno neznansko velike v primeri z molekulami. Termično gibanje kapljic zato ni zaznavno, ampak samo njihovo usmerjeno gibanje. Hitrost kapljice je enaka vektorskega povprečju molekulskih hitrosti. Po navadi je to povprečje dosti manjše kot termične hitrosti posameznih molekul.

Priložnost za ponovitev te razprave imamo pri zvoku. Kdor ima razvito fantazijo in se ne sramuje slikovitega pripovedovanja, lahko učencem prikaže, kakšno je zvočno valovanje v mikroskopski sliki. Učenec bo spredvidel, zakaj ima zvočna hitrost v plinu enako velikostno stopnjo kot povprečna velikost hitrosti pri termičnem gibanju molekul.

Pri optiki ali raje kasneje pri sevanju anten se spomnimo modrine neba. Morda prihaja v poštev tudi kvalitativna mikroskopska razlaga lomnega kvocienta.

Razlago električnega toka z gibanjem elektronov ali ionov smo že omenili. Škoda je le, da mora potrditev teh zamisli počakati na poskuse s curki v vakuumu. Mimogrede tu omenimo, da je termična emisija elektronov iz kovin podoben pojav kot izhlapevanje vode. Ker izhlapevajo elektroni le pri zvišani temperaturi, sklepamo, da je za njihovo iztrganje iz kovine potrebna energija, torej nekakšna izparilna toplota. Sijajen, čeprav samo kvalitativen, je poskus z elektronko — diodo, ki ima za katodo razbeljeno žico. Dokler na anodi ni napetosti, katoda močno žari. Vroče je kot poleti na morju, kadar ni vetra. Ko pa s pozitivno anodno napetostjo nekaj sto voltov odsesamo vso elektronsko paro, katoda razločno potemni. Zebe jo kakor mokrega človeka na vetru.



Sl. 1. Krivulji za nasičeno gostoto toka, ki izvira iz volframske katode, ter za izparilni tlak ledu in vode. Druga krivulja se nalahko zlomi pri trojni točki. Zaradi boljše preglednosti sta skali na navpičnih oseh logaritemski. Slika je povzeta po prvi izdaji knjige I. Kuščerja in A. Moljka: *Fizika*, 3. del, str. 739 (DZS, Ljubljana, 1963)

Da imamo pri izhlapevanju elektronov opravke z istovrstnim pojavom kot pri izhlapevanju kake snovi, spoznamo ob primerjavi ustreznih diagramov. Desna krivulja na sliki 1 pove, kako je izparilni tlak pri vodi odvisen od temperature. Leva pa kaže, kako se s temperaturo spreminja gostota električnega toka, ki izvira iz segrete volframske katode. Da določimo to gostoto toka, moramo na anodo pritisniti tolikšno pozitivno napetost, da odsesamo vse izvirajoče elektrone, tako da dosežemo *nasičeni tok*, kakor pravimo. Za oba pojave velja enaka diferencialna enačba, ki je znana z imenoma Clausiusa in Clapeyrona in ki jo izpeljemo iz entropijskega zakona. (Glej npr. I. Kuščer in S. Žumer, *Termodinamika*, Ljubljana 1974, str. 93). Rešitev enačbe je za primer elektronov znana kot *Richardsonova formula* (prav tam, str. 97).

PREPROST MODEL PULZIRAJOČE ZVEZDE

Zvezde, ki se jim izsev periodično spreminja, so za astrofizika še posebej zanimive. To so nekakšni svetilniki v naši Galaksiji in v bližnjih galaksijah, ki jim je mogoče po zvezi med izsevom in periodo določiti oddaljenost.

Dogajanje v pulzirajočih zvezdah je zelo zapleteno in ga ni mogoče preprosto opisati. Zanimivo pa je, da da osnovno zvezo med izsevom in periodo že zelo preprost model.

Mislimo si, da je zvezda plinska krogla z radijem R . V njej v ravnovesju tlak plina uravnoveša gravitacijski tlak. Tako ocenimo tlak s povprečno gostoto in povprečnim gravitacijskim pospeškom: $\bar{p} = \bar{\rho} \bar{g} R$. Če vzamemo za povprečni gravitacijski pospešek kar pospešek na površini zvezde z maso m , to je $\bar{g} = G m/R^2 = G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}/R^2 = \frac{4}{3}\pi G \bar{\rho} R$, sledi

$$\bar{p}/\bar{\rho} \propto \bar{g} R \propto \bar{\rho} R^2$$

Hitrost longitudinalne motnje ali valovanja (zvoka) v plinu je $v = (\kappa p/\rho)^{1/2}$, če je κ razmerje specifičnih toplot plina. S povprečnim tlakom in povprečno gostoto je

$$v \propto (\bar{p}/\bar{\rho})^{1/2} \propto \bar{\rho}^{1/2} R$$

Vzemimo, da se zvezda širi in krči tako, da nastane stoječe valovanje z najnižjo (osnovno) lastno frekvenco, pri kateri je na sredini vozeli in na površini hrbet valovanja: $\frac{1}{2}\bar{\lambda} = 2R$. Tedaj je nihajni čas

$$t_0 = \bar{\lambda}/v = 4R/v \propto \bar{\rho}^{-1/2}$$

Iz te zveze sledi

$$t_0 = Q(\bar{\rho}/\bar{\rho}_s)^{-1/2} \quad (1)$$

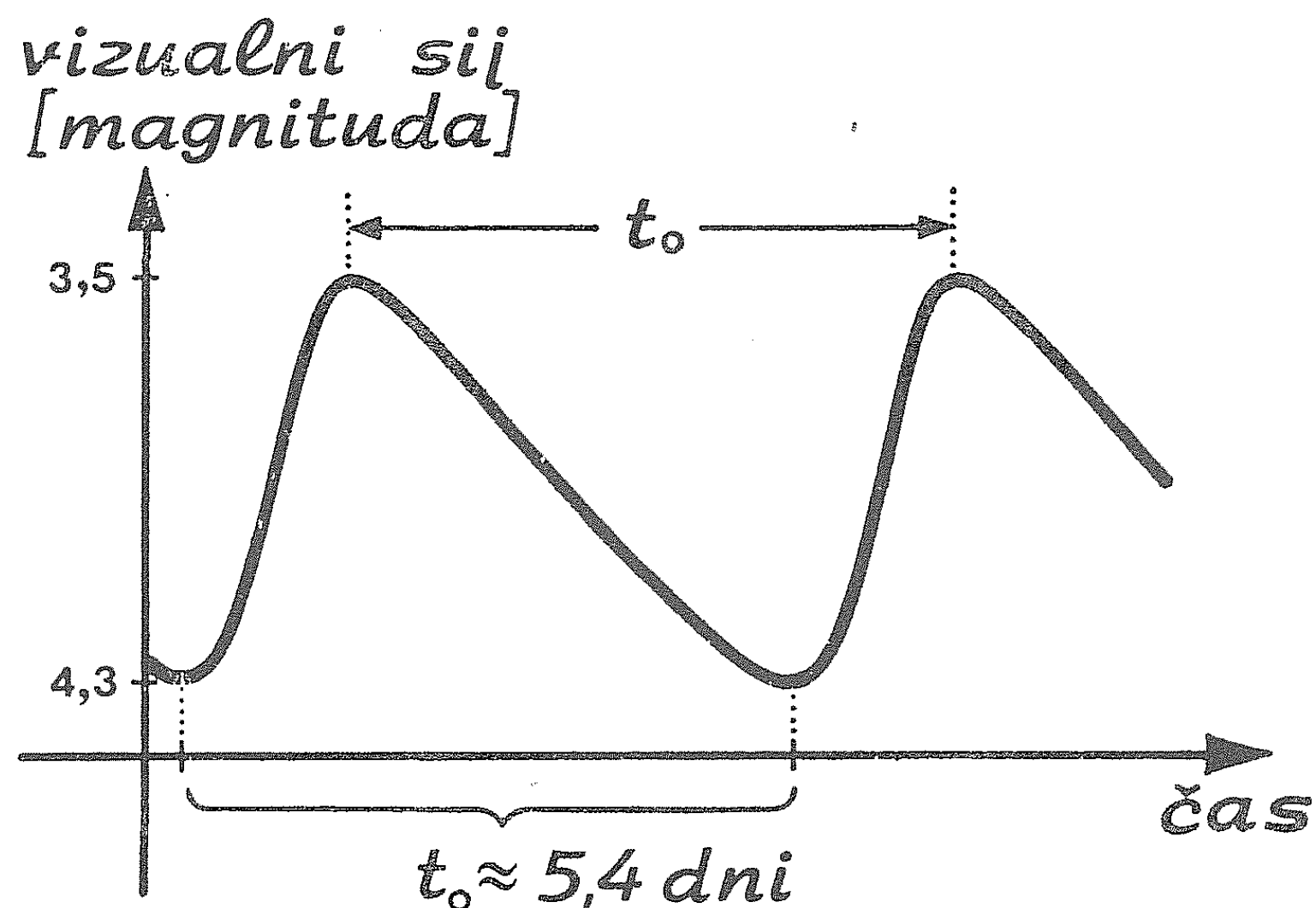
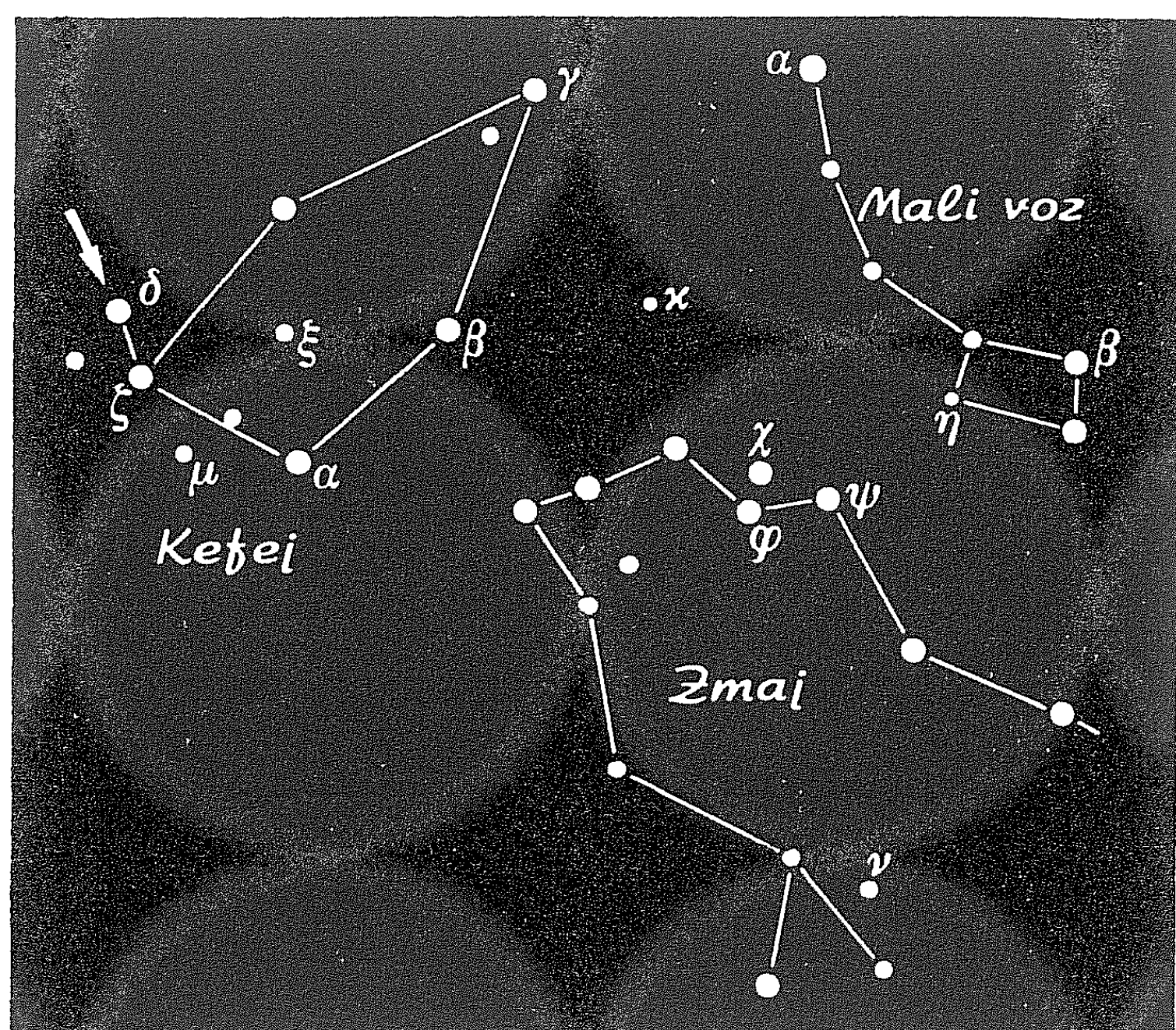
Q je nihajni čas za pulzirajočo zvezdo s povprečno gostoto Sonca $\bar{\rho}_s = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Če zberemo vse koeficiente, ki jih prej nismo zapisali, dobimo $Q = 2(\frac{1}{3}\pi \kappa G \bar{\rho}_s)^{-1/2} = 0,06$ dneva [1], [2]. Pri tem smo postavili $\kappa = \frac{5}{3}$ za enoatomni plin in za gravitacijsko konstanto $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Nihajni čas, to je perioda sija, je obratno sorazmeren s kvadratnim korenom iz povprečne gostote zvezde.

Za razne podrobno obdelane modele podajajo konstanto Q med 0,12 in 0,03 dneva [1], [2]. Za klasične kefeide pa so dobili iz merjenj $Q = 0,04$ dneva [1]. Tipična zastopnica klasičnih kefeid je δ Kefeja (Sl. 1). Ta orjakinja ima povprečno gostoto okoli $10^{-4} \bar{\rho}_s$. Nihajni čas δ Kefeja je po enačbi (1) okoli 6 dni, kar se zadovoljivo ujema z opazovano vrednostjo 5,37 dneva.

Bolometrični (polni) izsev zvezde glede na bolometrični izsev Sonca je $P/P_s = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 / 4\pi R_s^2 \cdot \sigma T_s^4 = (R/R_s)^2 \cdot (T/T_s)^4$; pri tem smo s T označili absolutno temperaturo fotosfere zvezde. Ker je razmerje povprečnih gostot zvezd $\bar{\rho}/\bar{\rho}_s = (m/m_s) \cdot (R/R_s)^{-3}$ in razmerje radijev $R/R_s = (P/P_s)^{1/2} \cdot (T/T_s)^{-2}$, lahko enačbo (1) prepišemo v obliki:

$$t_0 = Q(m/m_s)^{-1/2} \cdot (P/P_s)^{3/4} \cdot (T/T_s)^{-3} \quad (2)$$

$P_s = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$; $T_s = 5800 \text{ K}$. Enačbo (2) uporabimo pri obravnavanju klasičnih kefeid in posebej pri določitvi razdalje δ Kefeja.



Sl. 1. Lega klasične kefeide δ Kefeja. To znamenito pulzirajočo zvezdo je prav lahko mogoče izslediti že s prostim očesom. Tudi nihanje njenega sija opazimo s prostim očesom (a). Časovna odvisnost sija δ Kefeja (b)

Klasične kefeide so orjaške zvezde. Zanje približno velja $m/m_s = (P/P_s)^{3/10}$ [1]. Tako iz enačbe (2) sledi odvisnost izseva od periode in fotosferske temperature zvezde:

$$P/P_s = (t_0/Q)^{5/3} \cdot (T/T_s)^5$$

δ Kefeja ima $t_0 = 5,37$ dneva, v maksimu ima sij 3,4 magnitude (ko na Zemljo pošilja svetlobni tok z gostoto $j \approx 10^{-9} \text{ W/m}^2$ in tedaj je približno $T = 6300 \text{ K}$. Pri teh podatkih dobimo za razdaljo okoli 270 parsek, kar se malo razlikuje od opazovalnih podatkov [1].

Marijan Prosén

LITERATURA*

- [1] K. U. Allen, *Astrofizičeskie veličiny*, Moskva, Mir 1977, 306.
- [2] C. Hoffmeister, *Veränderliche Sterne*, Leipzig, J. A. Barth 1970, 60.
- [3] M. Prosén, *Spreminjanje radija kefeide*, Obzornik za mat. fiz. 29 (1982), 116.

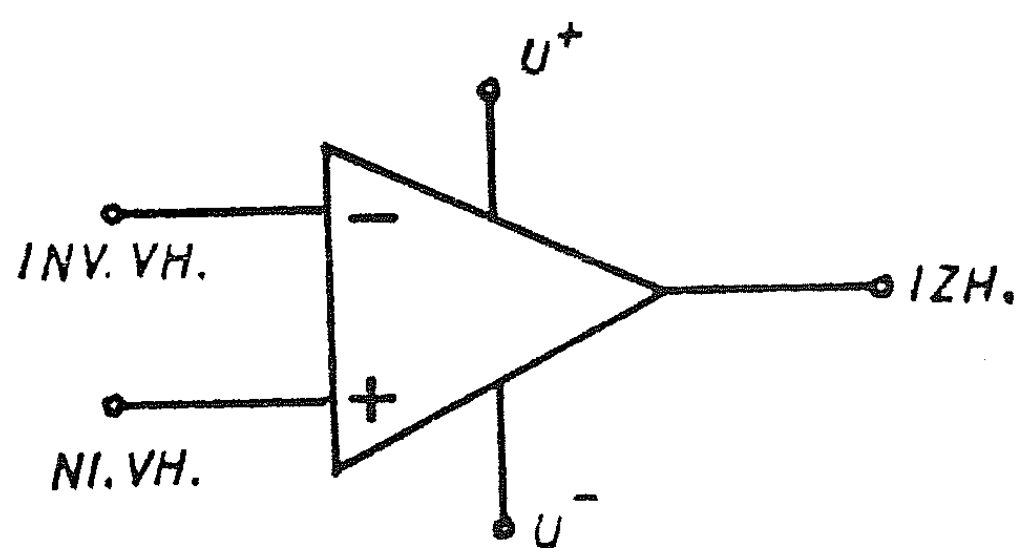
V CERN ODKRILI ŠIBKI BOZON W

Proti koncu januarja so v Ženevi sporočili, da so pri trkih protonov in antiprotonov v trkalniku (colliderju) zasledili sedem dogodkov, pri katerih so nastali in razpadli nabiti šibki bozoni $W^\pm$ z lastno energijo okoli 80 GeV. Te bozone, ki prenašajo šibko interakcijo, so dolgo napovedovali, a doslej zaman iskali. Obzornik bo o odkritju poročal v naslednji številki.

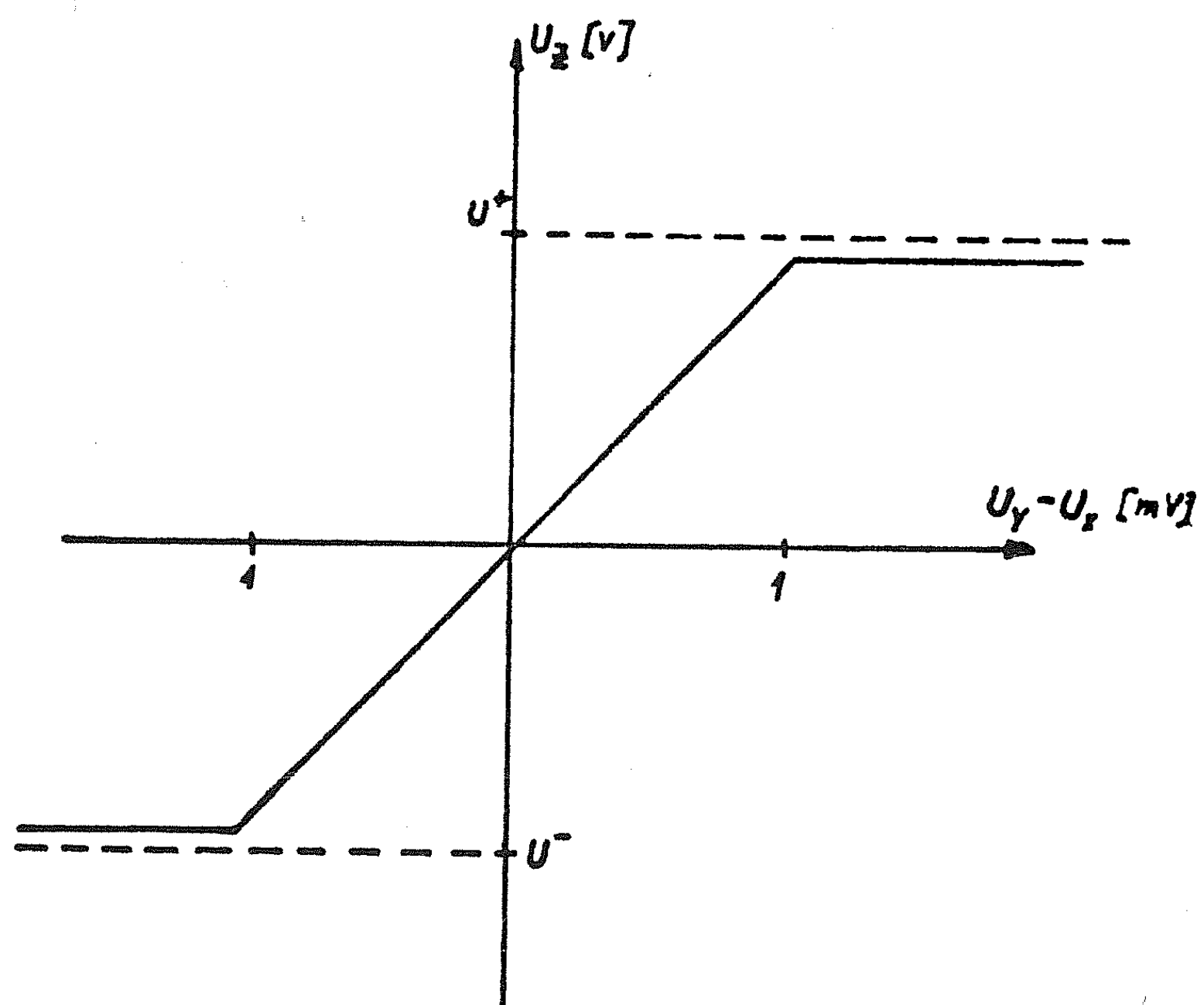
Janez Strnad

UPORABA OPERACIJSKEGA OJAČEVALNIKA V ŠOLI

Velik napredek elektronike je povzročil, da se tudi v šoli vse pogostejše srečujemo z različnimi integriranimi vezji. Poleg tega učenci velikokrat postavljajo vprašanja o integriranih vezjih. Eno od najbolj uporabnih linearnih integriranih vezij je *operacijski ojačevalnik*, ki je dobil svoje ime zaradi uporabe v analognih računalnikih, kjer z njim realizirajo različne računske operacije. Obdelajmo nekaj za pouk zanimivih vezij z operacijskim ojačevalnikom.



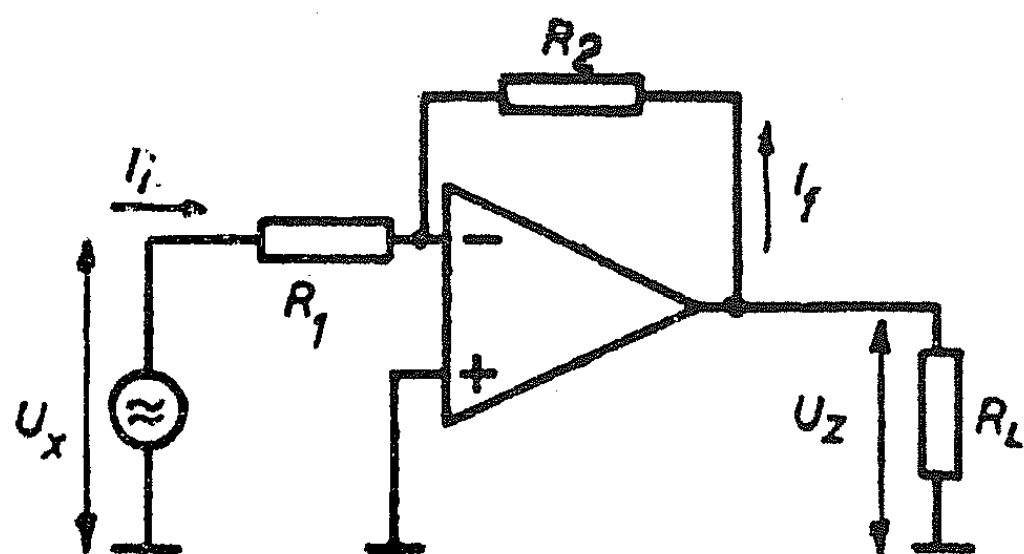
Slika 1



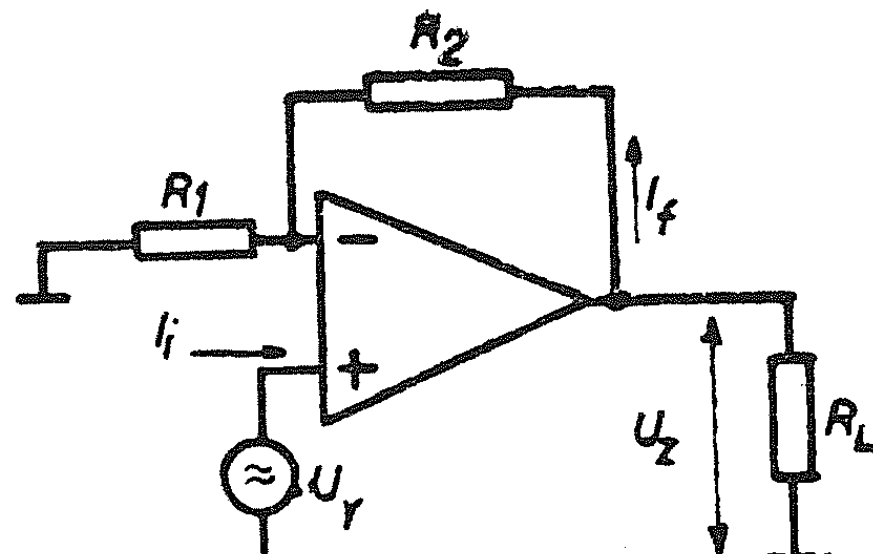
Slika 2

Operacijski ojačevalnik ima dva vhoda in en izhod. Ojačenje napetosti je zelo veliko, navadno vsaj nekaj deset tisoč, tokova, ki tečeta v oba vhođa pa sta zelo majhna in merita navadno nekaj sto nA. Simbol za operacijski ojačevalnik kaže Sl. 1. Vhod, označen z $-$, imenujemo tudi *invertirajoči (INV) vhod*, vhod, označen s $+$, pa *neinvertirajoči (NI) vhod*. Če na vhod INV idealnega operacijskega ojačevalnika privedemo napetost U_x in na vhod NI napetost U_y , je izhodna napetost U_z :

$$U_z = -A(U_x - U_y)$$



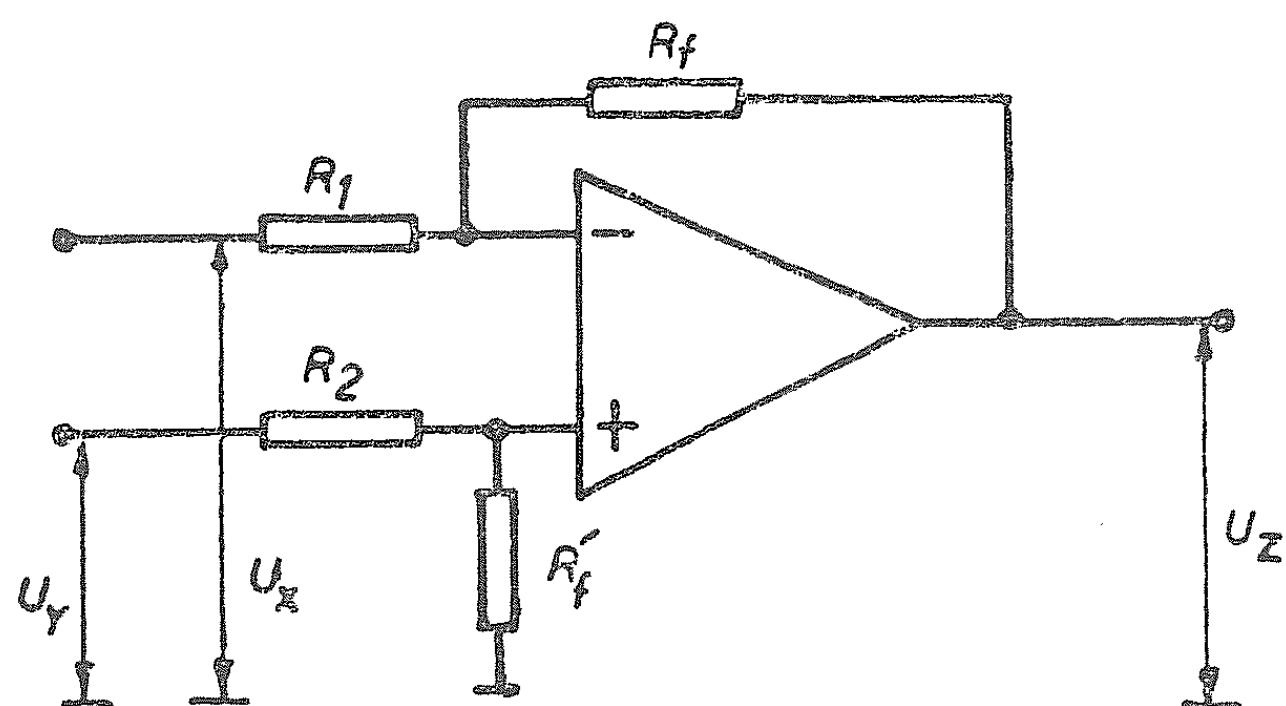
Slika 3



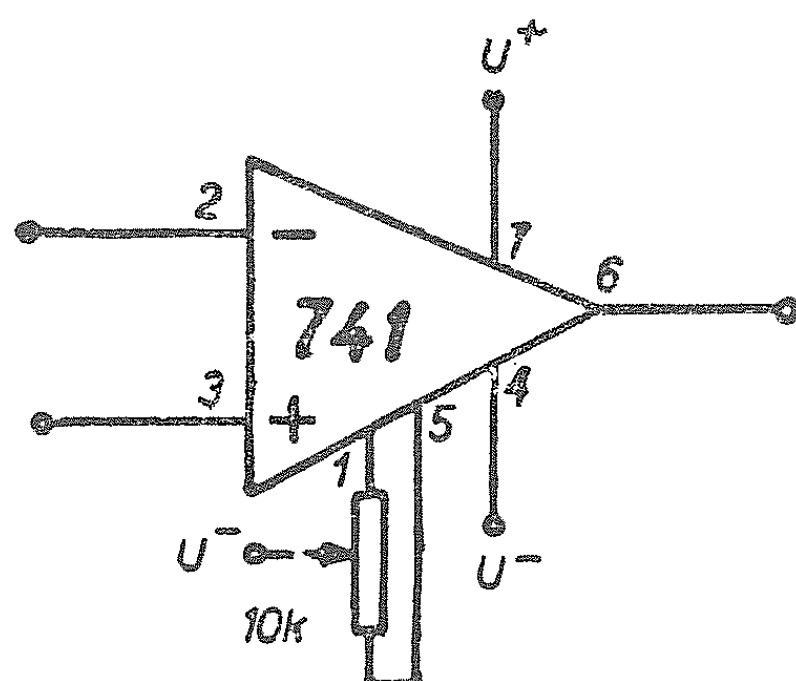
Slika 4

A je ojačenje napetosti ojačevalnika. Pri idealnem operacijskem ojačevalniku je torej izhodna napetost enaka nič, če sta napetosti na obeh vhođih enaki nič. Običajno potrebuje operacijski ojačevalnik za delovanje dve napetosti, ki sta glede na zemljo nasprotno enaki in ležita med ± 6 V in ± 18 V. Diagram (Sl. 2) podaja zvezo med napetostjo U_z in napetostma U_x in U_y . Operacijski ojačevalnik prekrmlimo že z vhodno napetostjo nekaj milivoltov, se pravi, da doseže izhodna napetost svojo največjo vrednost, ki je le malo manjša od napajalne napetosti. Poglejmo, kako se

obnaša vezje (Sl.3) in poiščimo zvezo med izhodno napetostjo U_z in vhodno napetostjo U_x . Vhod NI je ozemljen in napetost U_y je enaka nič: $U_x = -U_z/A$. Ker je ojačenje napetosti A zelo veliko, je napetost na vhodu INV zelo blizu 0 V. Razlika napetosti med obema vodom je tako enaka 0 V. Za tokove v posameznih vejah velja: $I_i = U_x/R_1$ in $I_f = U_z/R_2$. Tok, ki teče v vhod ojačevalnika, je zelo majhen in sledi: $I_i = -I_f$. Razmerje $A_u = U_z/U_x = -R_2/R_1$ imenujemo napetostno ojačenje invertirajočega ojačevalnika. Odvisno je le od vrednosti zunanjih elementov. Upor R_2 je vezan v zanki negativne povratne zveze. Vhodna upornost vezja je enaka R_1 , izhodna upornost pa je manjša kot 1 ohm.



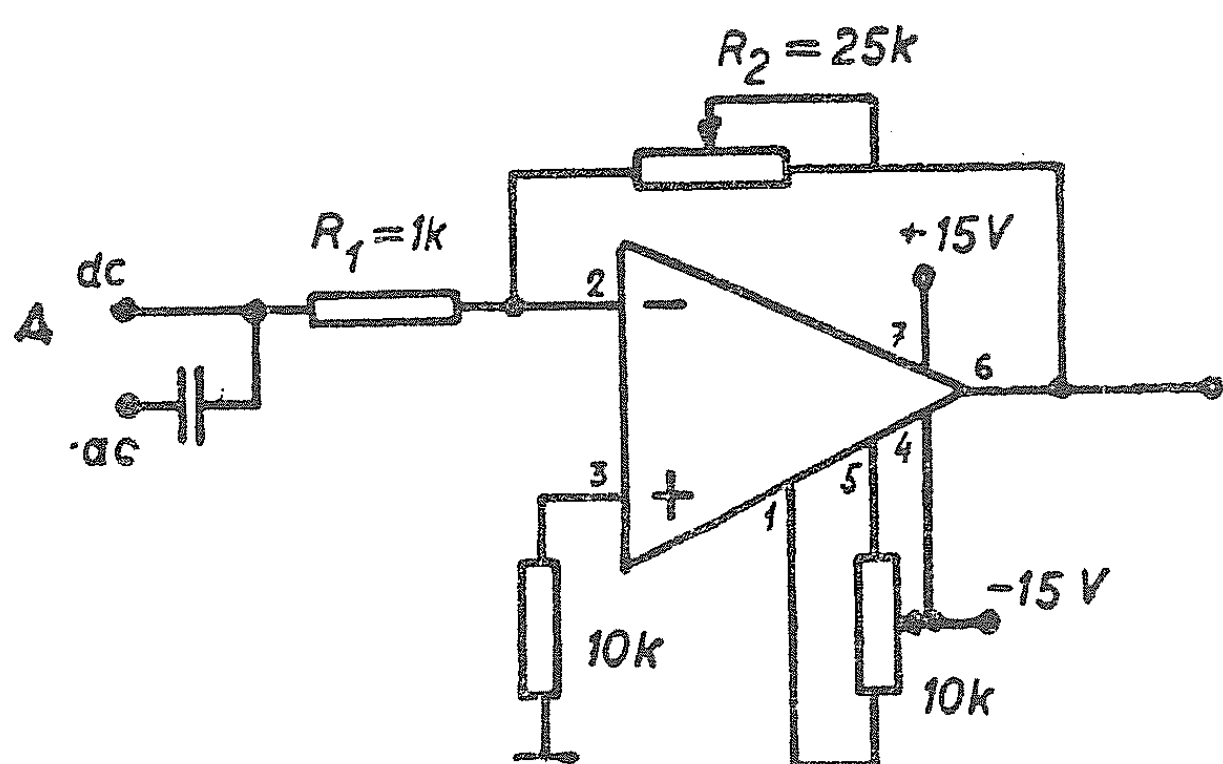
Slika 5



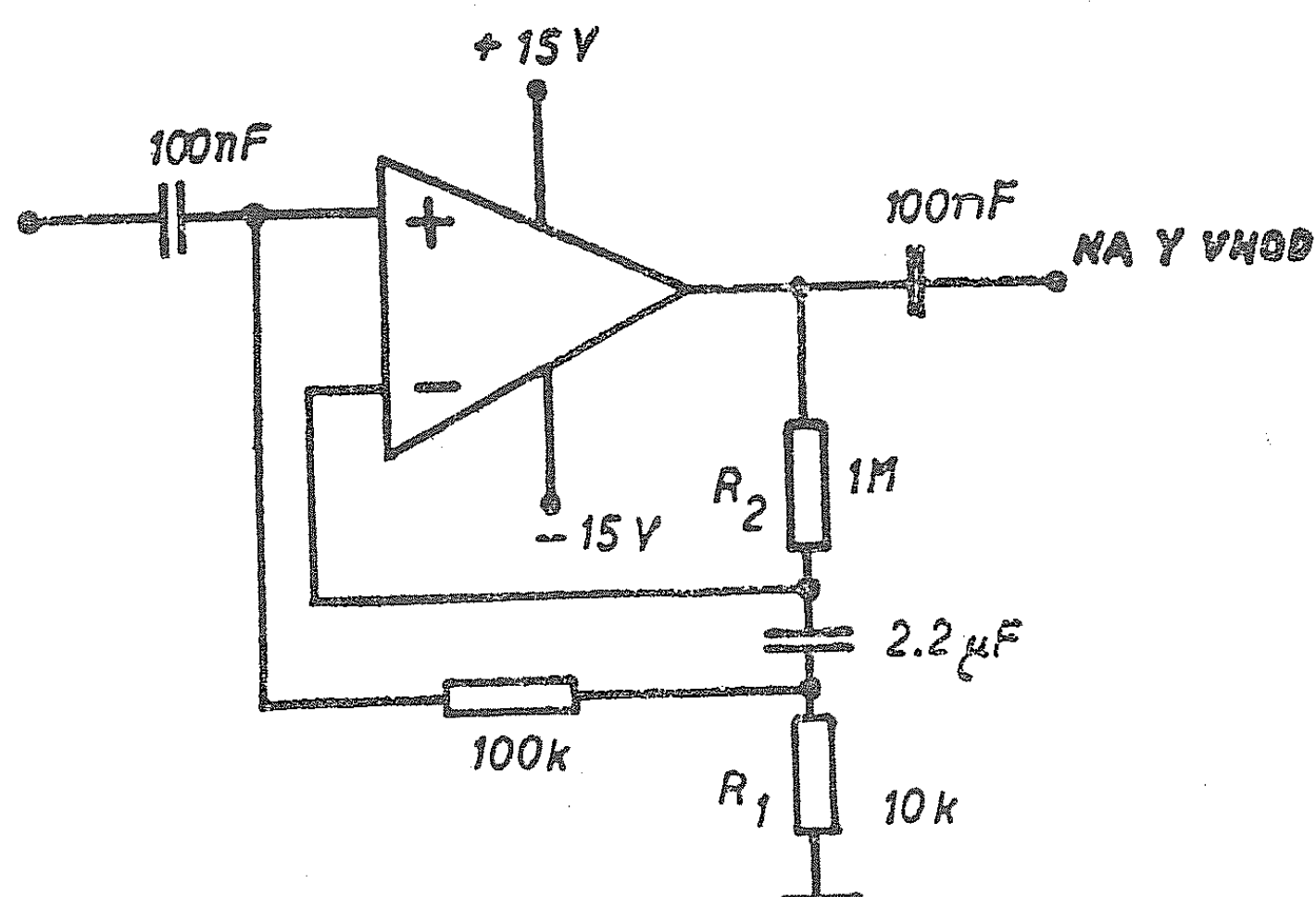
Slika 6

Vezje (Sl.4) imenujemo *neinvertirajoči ojačevalnik*. Kot pri invertirajočem ojačevalniku je tudi tu razlika napetosti med vodom enaka 0 V. Ker sta upora R_1 in R_2 vezana kot delilnik napetosti, je na vhodu INV napetost $U_x = U_z R_1 / (R_1 + R_2)$. Prav tako je tudi napetost na vhodu NI. Ojačenje napetosti je $A_u = U_z/U_y = 1 + (R_2/R_1)$. Vhodna upornost vezja je velika, saj teče v vhod NI zelo majhen vhodni tok.

Če želimo ojačiti razliko napetosti $U_x - U_y$, uporabimo vezje s Sl.5. Če sta R_1 in R_2 ter še R_f in R_f' enaka, je izhodna napetost $U_z = (U_x - U_y) R_f/R_1$. Vezje imenujemo *diferencialni ojačevalnik*.



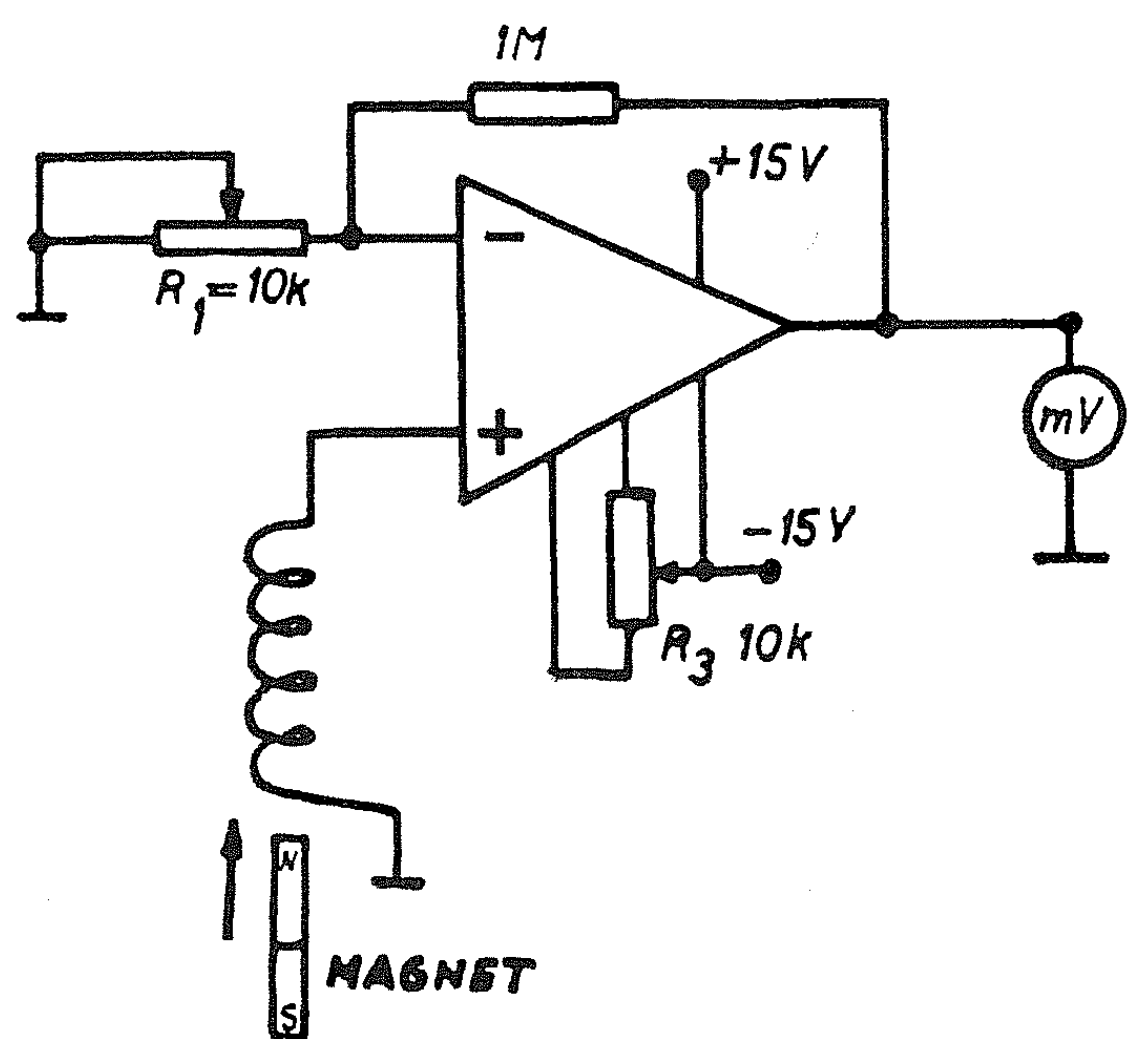
Slika 7



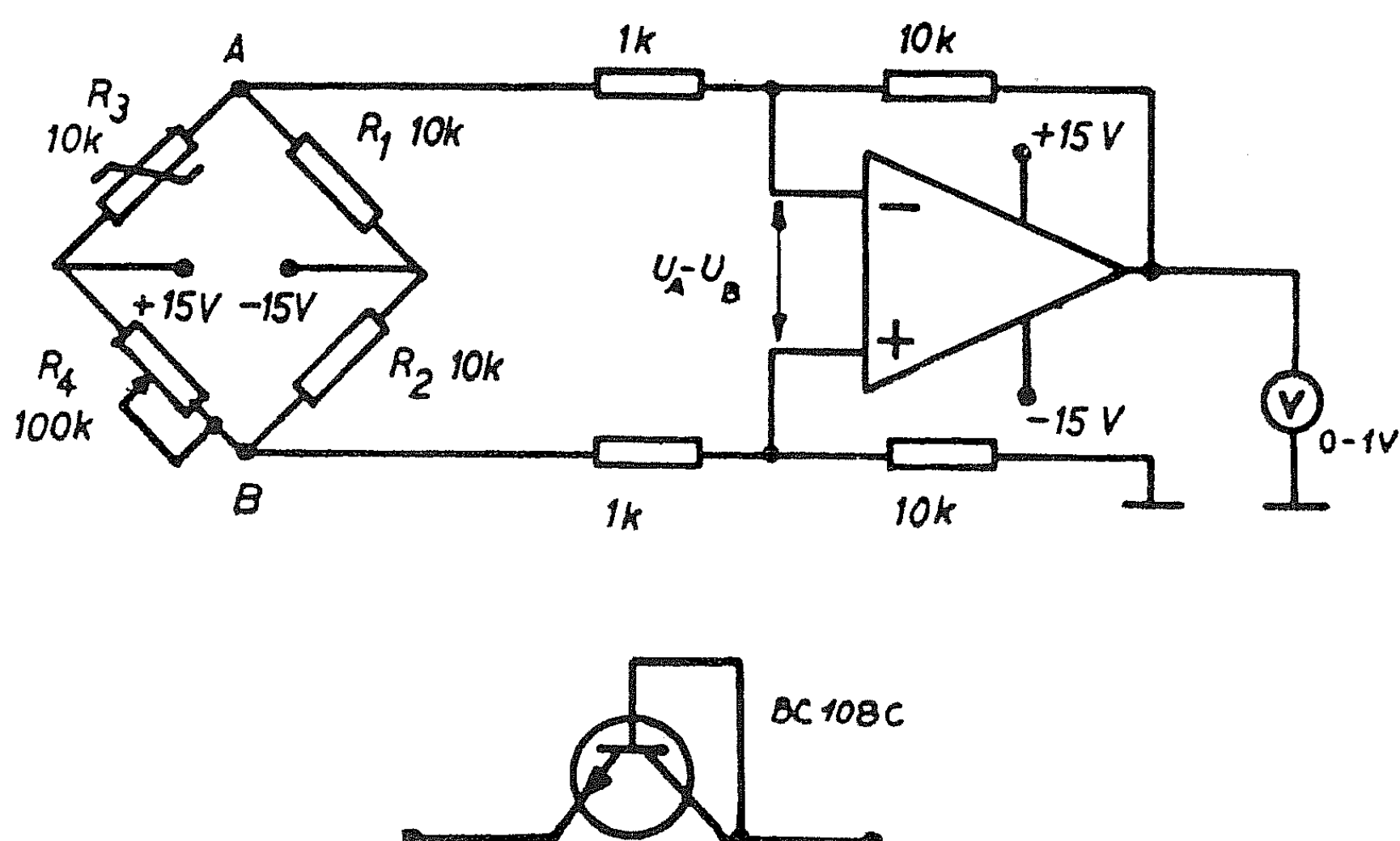
Slika 8

Pri nas so najbolj dostopni operacijski ojačevalniki z generično številko 741, ki jih dobimo pod oznakami IL741 (EI Niš), CA741 (RCA), μA 741 (Fairchild), MC1741 (Motorola), L141 (SGS-ATES) itd. Tega ojačevalnika ne poškodujemo, če napravimo na izhodu kratek stik. Ojačevalnik 741 je uporaben za ojačevanje napetosti s frekvencami do 1000 Hz, pri višjih frekvencah pa njegovo ojačanje enakomerno pojema. Pri nas je dosegljiv tudi operacijski ojačevalnik z generično številko 709 (IL709, μA 709, SN72709...), ki ima veliko ojačenje napetosti tudi pri frekvencah do 30 000 Hz, vendar ni zaščiten pred kratkim stikom na izhodu in potrebuje dodatne zunanje elemente za frekvenčno kompenzacijo. Izhodni tok omejimo na dovoljeno vrednost z uporabo za 220 ohm, ki ga vežemo med izhod ojačevalnika in

vhod porabnika. Najpogosteje izvedemo frekvenčno kompenzacijo s kondenzatorjema za 20 pF in 200 pF ter uporom za 1500 ohm. Sl. 6 kaže karakteristični priključni vezji za operacijska ojačevalnika 709 in 741. Oznake priključkov veljajo za osem-polna kovinska ali plastična ohišja. V zadnjem času se dobe v inozemstvu operacijski ojačevalniki, v katerih so namesto navadnih bipolarnih tranzistorjev integrirani tranzistorji FET ali MOSFET. To so TL 071 in TL 081 (FET) CA 3140 (MOSFET). Našteti ojačevalniki imajo veliko ojačenje napetosti tudi pri frekvencah nad 50 000 Hz. Vhodni tokovi merijo le nekaj deset pA, zato lahko pri teh ojačevalnikih dosežemo vsaj tisočkrat večje vhodne upornosti kot pri navadnih bipolarnih operacijskih ojačevalnikih.



Slika 9

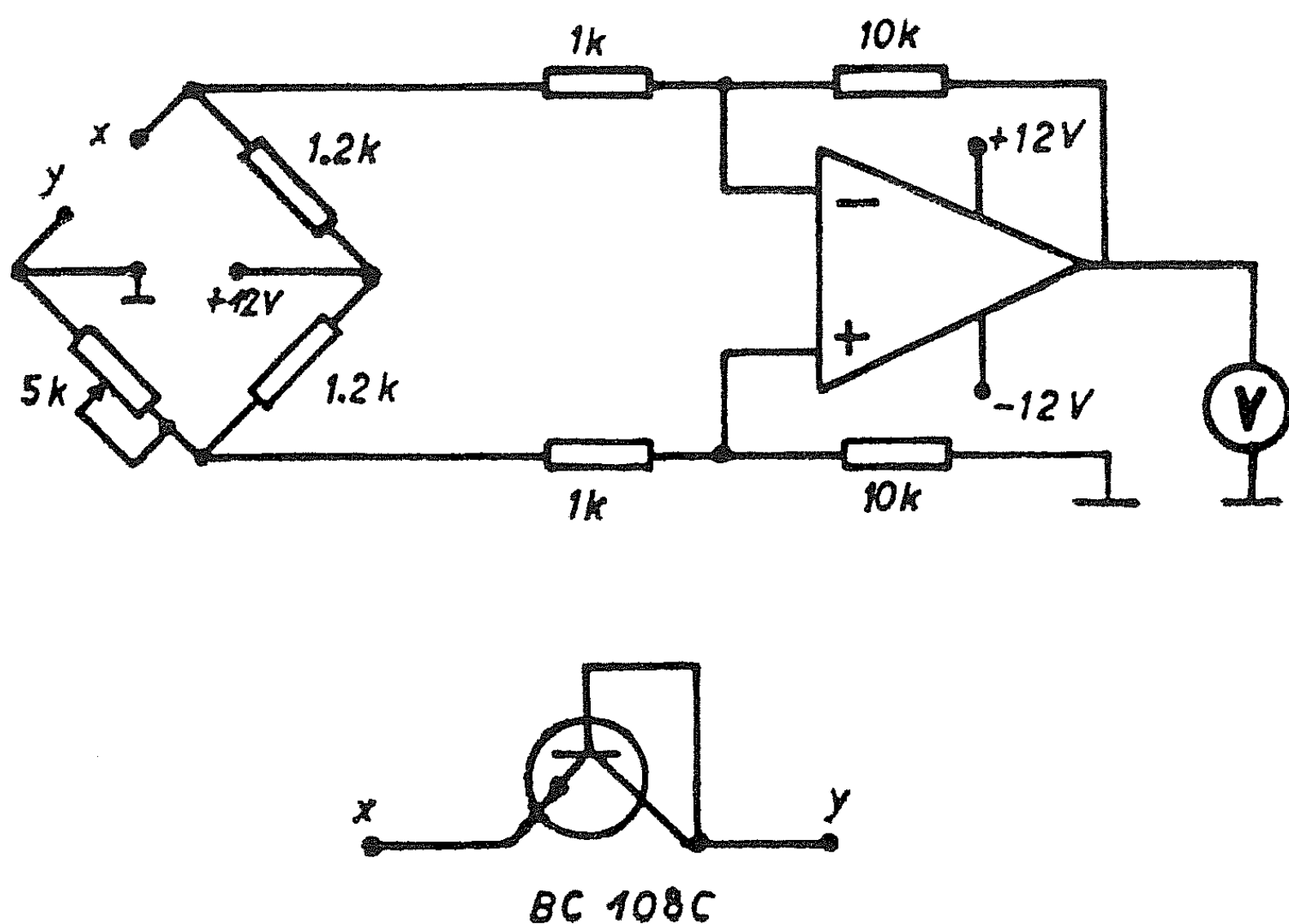


Slika 10

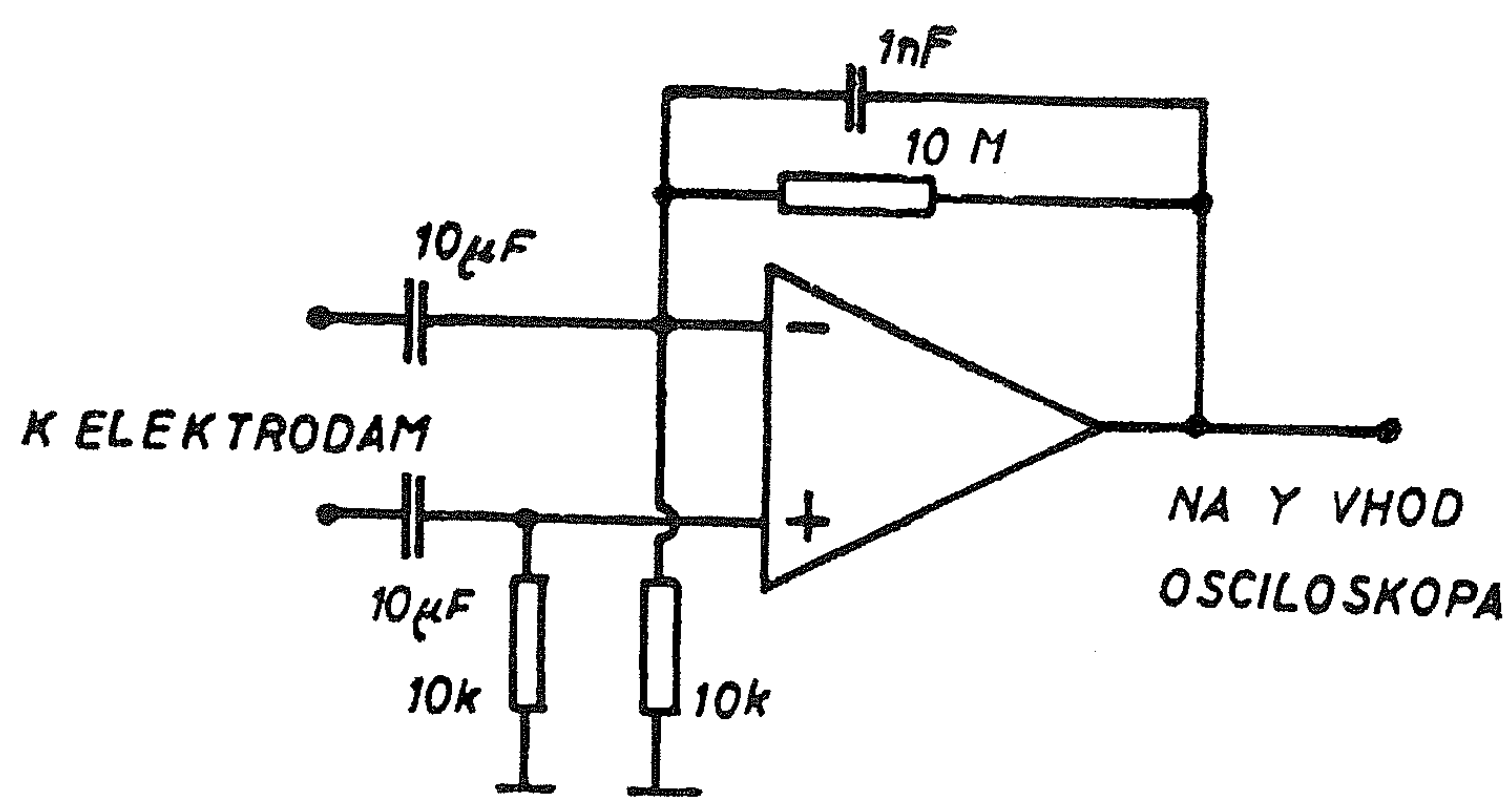
Oglejmo si nekaj vezij za šolo. Ojačevalnik za ojačevanje izmeničnih napetosti kaže Sl. 7. S spremenljivim uporom R_2 nastavimo ojačenje napetosti, ki je $A_u = R_2/R_1$. S trimer potenciometrom za 10 000 ohm nastavimo izhodno napetost na nič tako, da vežemo točko A na zemljo in nastavimo trimer v tako lego, da je izhodna napetost enaka nič. Izmenične napetosti privedemo na vhod preko kondenzatorja, enosmerne napetosti pa privedemo neposredno na upor R_1 .

Z vezjem s Sl. 8 povečamo občutljivost preprostega osciloskopa. Ojačevalnik ima ojačenje napetosti $A_u = (R_2 + R_1)/R_1 = 100$ in vhodno upornost nekaj Mohm, kar je ugodno, če uporabimo ojačevalnik kot predojačevalnik za povečanje občutljivosti vhoda Y osciloskopa. Namesto ojačevalnika 741 lahko uporabimo TL 081 ali TL 071, ki imata enak razpored priključkov kot 741.

Ojačevalnik majhnih napetosti pri opazovanju indukcijskih pojavov kaže Sl. 9. S trimerjem R_1 nastavimo ojačenje, s trimerjem R_2 pa nastavimo ničlo na izhodu.



Slika 11



Slika 12

Elektronski termometer napravimo, če uporabimo operacijski ojačevalnik kot diferencialni ojačevalnik (Sl. 10). S termistorjem $R_3 \approx 3 \text{ kohm}$ zaznavamo temperaturo. Ko se upornost termistorja zaradi zvišane temperature zmanjša, mostiček, ki ga sestavljajo upora R_1 in R_2 , trimmer R_4 in termistor R_3 , ni več v ravnovesju. Med točkama A in B se pojavi razlika napetosti; to ojačimo in merimo z voltmetrom, ki mu umerimo skalo v stopinjah. Namesto termistorja lahko uporabimo tudi tranzistor, ki ga vezemo, kot kaže Sl. 11.

Z ojačevalnikom s Sl. 12 sledimo časovnemu poteku napetosti, ki se pojavi pri utripanju srčne mišice. Operacijski ojačevalnik je vezan kot diferencialni ojačevalnik. Če nastavimo občutljivost vhoda Y osciloskopa na največ 100 mV/cm in časovno bazo na kakih $0,1 \text{ s/cm}$, lahko opazujemo na zaslonu srčne utripe. Elektrodi sta kovinski ploščici, ovlaženi s slano raztopino za boljši kontakt. Za dober rezultat moramo eno izmed elektrod namestiti nad srce na prsih, drugo pa na hrbtu.

Vsa opisana vezja so tako preprosta, da jih brez težav izdelamo sami in uporabimo pri pouku fizike in drugih naravoslovnih predmetov. Veliko koristnih napotkov je zbranih v literaturi, posebno v [1], [2], [5], [6] in [10].

Janez Žitnik

LITERATURA

- [1] Clayton G. B., *Experiments with Operational Amplifiers*, MacMillan Press 1977.
- [2] Clayton G. B., *Operational Amplifiers*, Newnes-Butterworths 1977.
- [3] Jones M. H., *A Practical Introduction to Electronic Circuits*, Cambridge University Press 1978.
- [4] *Linear Integrated Circuits*, National 1975.
- [5] Bergtold F., *Schaltungen mit Operationsverstärkern*, Band 1, 2, R. Oldenbourg 1975.
- [6] Coughlin R. F., Driscoll F. F., *Operational Amplifiers and Linear Integrated Circuits*, Prentice Hall 1977.
- [7] Rutkowski, G. B., *Handbook of Integrated Circuit Operational Amplifiers*, Prentice Hall 1977.
- [8] Lenk J., *Manual for Operational Amplifier Users*, Reston 1976.
- [9] *Modern Applications of Linear IC's*, TAB Books 1974.
- [10] Carr J., *How to Design and Build Electronic Instrumentation*, TAB Books 1978.

POPRAVEK

V članku *Merilnik frekvence električnih signalov* (Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 4) je na sl. 1 a napaka. Prave vrednosti kondenzatorjev so $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 0,1 \mu\text{F}$, $C_3 = 10 \text{ nF}$, $C_4 = 1 \text{ nF}$. Na sl. 3 pa je puščica emitorja tranzistorja T_2 obrnjena narobe. Tranzistor BFJ 64 je tipa pnp.

Janez Žitnik

LOGIČNA SIMBOLIKA IN POUK MATEMATIKE

1. O koristnosti logične simbolike pri pouku matematike so mnenja različna. Tako nekateri menijo, da sodi ta simbolika že v nižje razrede osemletke, drugi pa, da niti na univerzo ne. Pri nas se je za slednje opredelil profesor Vadnal. Tako piše v Obzorniku 15 (1968) 3, str. 130—131 ter v Obzorniku 20 (1973) 6, str. 181:

Tudi Skubic je skušal svoj učbenik modernizirati z uvajanjem logičnih simbolov. Toda tudi on je pri tem nedosleden in, če le more, zavije na pot bolj razumljive razlage v klasičnem jeziku. Zaradi tega je mnogo bolj razumljiv tam, kjer razpravlja po starem, kot pa tam, kjer razlaga v jeziku logičnih simbolov.

Ko opredeli npr. na str. 274 zveznost funkcije, jo klasično definira takole: Funkcija $f(x)$ je v točki x_0 zvezna natanko tedaj, kadar moremo najti k vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε vsaj eno tako pozitivno število δ , da je izpolnjena neenačba $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, če je le $|x - x_0| < \delta$. To definicijo napiše nato še z logičnimi simboli. Nekaj strani za tem pa opredeli na str. 277 enakomerno zveznost funkcije kratkomalo takole: Funkcija $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna natanko tedaj, kadar moremo najti k vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε vsaj eno tako pozitivno število $\delta(\varepsilon)$, da velja implikacija:

$$|x - x'| < \delta(\varepsilon) \rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Ni tu važno, kaj misli pri tem izšolani matematik, važno je, kaj in koliko razume pri tem študent, ki se šele uči in ki se šele vživlja v težaven pojem zveznosti. Vprašanje je, ali je smotrno uporabljati zgoščeno logično pisavo že pri prvem učenju kake snovi, ki je že v vajenem jeziku zadosti težka. Podobno vprašanje velja tudi za aksiomatično metodo: Ali tudi ta ne zahteva že določene stopnje poznavanja učne snovi, da jo zares koristno lahko uporabimo?

Pri pedagoškem delu na nižjih stopnjah, kjer naj skušamo učencu kar najbolj pomagati do razumevanja učne stvarine, bi odsvetovali prekomerno rabo matematične simbolike, ki razumevanje lahko zelo oteži, ker misli učenec pojmovno, besedno in vsaj na začetku ne v simbolih. Simbole lahko s pridom rabimo šele, ko učenec stvarino vsebinsko že do neke mere obvlada. Pretirana raba simbolike, kjer se je lahko izognemo, namreč pri pedagoškem delu preveč utruja. Namesto simboličnega zapisa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

bi morda bil vsaj na začetku bolj razumljiv stavek:

za vsako pozitivno število ε in za vsaj eno pozitivno število δ

V obeh formulacijah povemo namreč vsebinsko natančno isto.

2. Navedimo sedaj nekaj izjav v klasičnem jeziku in uporabimo izraz »za vsak x in za vsaj en y « za branje kvantifikatorjev ($\forall x$) ($\exists y$).

Beseda *število* se nanaša na naravna števila.

- (1) Vsa števila, ki niso večja od 10, niso manjša od 7.
- (2) Nobeno število, ki ni večje od 5, ni deljivo s 5.
- (3) Vsaj eno število, ki ni večje od 10, ni manjše od 7.
- (4) Za vsako naravno število x in za vsaj eno naravno število y velja, da je $y > x$.
- (5) Za vsaj eno naravno število y in za vsako naravno število x velja $y > x$.
- (6) Za vsako naravno število x in za vsaj eno naravno število y y ni večje od x .

(7) Za vsaj eno naravno število y in za vsako naravno število x y ni večje od x .

Potrebujemo kar nekaj časa, da ugotovimo, da so izjave (1), (2) in (3) resnice, čeprav se nanašajo na matematično znanje predšolskega otroka. Glede izjav (4) in (5) obstajajo različna mnenja. Jaz menim, da sta ekvivalentni in neresnični. Vrstici (6) in (7) sta še težje razumljivi, dvoumni in morda ne sodita niti med pravilne stavčne konstrukcije. Dvoumje izvira iz tega, ker kaže, da imata izraza »za vsak x in za vsaj en y « ter »za vsaj en y in za vsak x « isti pomen.

3. Če uvedemo kvantifikatorje tako, da rečemo, da bomo pisali » $\forall x \in \mathbb{N}$ « namesto »za vsako naravno število x « še ne pokrijemo vseh primerov. Če se dogovorimo, da bo izraz » $S(x)$ « označeval lastnost » x je sodo število«, potem lahko prevedemo naslednje izjave v simboliko:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------|
| (1) Vsako naravno število je sodo. | (1') $(\forall x) S(x)$ |
| (2) Nobeno naravno število ni sodo. | (2') $(\forall x) \neg S(x)$ |
| (3) Vsaj eno naravno število je sodo. | (3') $(\exists x) S(x)$ |
| (4) Vsaj eno naravno število ni sodo. | (4') $(\exists x) \neg S(x)$ |
| (5) Vsako naravno število ni sodo. | (5') $\neg (\forall x) S(x)$ |

Izjavi (4) in (5) sta logično ekvivalentni, zapisa pa se razlikujeta samo po tem, da namesto »vsako« piše »vsaj eno«. V slovenskem jeziku lahko torej v tem primeru naredimo to zamenjavo, ne da bi spremenili pomen, v simboličnem jeziku takšna zamenjava vedno spremeni tudi pomen. Nasprotniki simbolizma bodo to dejstvo vzeli za dokaz, da je simbolizem neuporaben. V resnici pa je slovenski jezik tisti, ki je težak, saj npr. dovoljuje spremembo vrstnega reda stavčnih členov. Oglejmo si primera nepravilne rabe, navedena v Slovenščini za vsakogar Janeza Gradišnika:

(6) Vse to, kar so takrat pisali o moji plači, ni bila resnica.

(7) Vsak osveščen pripadnik maloštevilnega naroda ne more biti ravno-dušen do usode svojega narodnega jezika.

Naslednji primer pa kaže, da je lahko majhna sprememba v izražanju velika sprememba v pomenu:

(8) Vse, kar govorim, je neresnica.

(9) Vse, kar govorim, ni resnica.

Seveda pa simbolični jezik ne bo izpodrinil naravnega jezika, nasprotno, prevajanje iz enega v drugega bo izostrilo natančnost izražanja v naravnem jeziku, to pa je eden od najvišjih ciljev, ki jih želimo doseči.

4. Kot vemo, so definicije v matematiki v nekem smislu odveč, novo uvedeni pojem lahko v vsaki trditvi eliminiramo tako, da namesto *definiendum* uporabimo *definiens*. Če prepišemo definiensa definicij iz citiranega odstavka, dobimo v bistvu tole:

(1) K vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε lahko najdemo vsaj eno tako pozitivno število δ , da je izpolnjena neenačba $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, če je le $|x - x_0| < \delta$.

(2) K vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε lahko najdemo vsaj eno tako pozitivno število $\delta(\varepsilon)$, da velja implikacija:

$$|x - x'| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Po logični strani je razlika le v tem, da je spremenljivka x_0 zamenjana z x' . Pogoji (1) pravi o x, x_0 in f prav isto kot pogoj (2) o x, x' in f . Kaj pa pravzaprav pogoj (1) pove — isto, kot katerikoli od naslednjih 6 pogojev:

(3) K vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε lahko najdemo vsaj eno tako pozitivno število δ , da je

$$|x - x_0| \geq \delta \quad \text{ali} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(4) Za vsako pozitivno število ε velja, da lahko najdemo vsaj eno takšno pozitivno število δ , za katero velja $|x - x_0| \geq \delta$ ali pa je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(5) Za vsako pozitivno število ε velja:

$$x \neq x_0 \quad \text{ali} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(6) $x \neq x_0$ ali pa za vsako pozitivno število ε velja neenačba $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(7) $x \neq x_0$ ali pa je $f(x) = f(x_0)$.

(8) Če velja $x = x_0$, potem velja $f(x) = f(x_0)$.

To zadnje pa ni nič drugega kot eden od logičnih zakonov oziroma trivialna resnica.

5. Prejšnje argumentiranje je v celoti vezano na logične zakone, ponovimo ga lahko tudi v simboliki.

$$(1) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

$$(2) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - x_0| \geq \delta \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Vrstica (1) je logično ekvivalentna (2) zaradi zakona $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

$$(3) (\forall \varepsilon > 0) ((\exists \delta > 0) |x - x_0| \geq \delta \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Vrstica (3) je logično ekvivalentna vrstici (2) zaradi zakona $(\exists a) (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists a) \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, kjer a ne nastopa v formuli $\mathcal{B}$.

$$(4) (\forall \varepsilon > 0) (x \neq x_0 \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Vrstica (3) je ekvivalentna vrstici (4) po izreku:

$$x \neq x_0 \Leftrightarrow (\exists \delta > 0) |x - x_0| \geq \delta$$

$$(5) x \neq x_0 \vee (\forall \varepsilon > 0) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Vrstica (5) je ekvivalentna vrstici (4) po zakonu $\forall a (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee \forall a \mathcal{B}$, kjer a ne nastopa v $\mathcal{A}$.

$$(6) x \neq x_0 \vee f(x) = f(x_0)$$

Vrstica (6) je ekvivalentna vrstici (5) po izreku $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$(7) x = x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$$

Vrstica (7) je ekvivalentna vrstici (6) zaradi zakona $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

6. Na tej stopnji bodo nasprotniki simbolizma trdili, da je nekoristen in da ga kaže prepovedati. Toda za te nejasnosti ni kriv simbolizem. Med pogoje

$$(1) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

$$(2) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

je bistvena razlika. Prvi daje odnos med tremi objekti x , x_0 in f , drugi pa med dvema, namreč odnos med x_0 in f — prav ta je *zveznost* funkcije f v točki x_0 . Toda prav (1) se običajno daje kot prireditev pogoja (1) iz točke 4. Kot prevod slovenskega teksta je to seveda lahko točno, toda ne prvo ne drugo ni ustrezen definiens za definicijo zveznosti.

7. Simbolična logika lahko opravi svojo nalogo le, če ji damo dovolj prostora in časa. Če jo odpravimo v nekaj vrsticah in minutah, bo bolj škodovala, kot pa razjasnjevala, odprla bo več problemov, kot pa bi jih rešila. Kolikokrat bo otrok ponovil » $7 \cdot 8 = 56$ «, preden si bo dokončno zapomnil. Kolikokrat je treba uporabiti zakon » $\neg(\forall x) A \Leftrightarrow (\exists x) \neg A$ «, da ga dokončno obvladamo, ali pa » $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ «? Izražanje matematičnih tekstov v pogovornem jeziku je večkrat težavna zadeva. Še teže je formulirati pravila sklepanja za pogovorni jezik. Brez pravil sklepanja pa dokazovanje nima nikakršnega smisla. V šoli smo slišali nekaj pravil za stavčno logiko, za kvantifikatorje pa nobenih; prav tako o pravilnem formuliranju definicij nikjer ni bilo govora. Primer definicije zveznosti zadosti zgovorno kaže, da to znanje ne pride samo po sebi.

Izidor Hafner

NOVE KNJIGE

MATEMATIKA — stručno-metodički časopis. — Zagreb, Školska knjiga, 10 (1981) št. 1, 2, 3, 4.

Revija Matematika objavlja članke, ki obravnavajo splošne probleme matematičnega izobraževanja (zamisli, načrte, programe idr.), strokovne in metodične poglede programske vsebine matematičnih predmetov na vseh nivojih izobraževanja, poročila o novih matematičnih teorijah, predstavitev posameznih matematičnih problemov in zanimivih problemov iz drugih področij povezanih z matematiko, razne zanimivosti iz zgodovine matematike, obvestila o novih knjigah in revijah ter obvestila o važnejših dogajanjih v zvezi z matematiko.

Revijo Matematika so izdajale že različne založbe v Beogradu, Ljubljani in Sarajevu. Nepravočasno izhajanje revije bo skušala popraviti Školska knjiga iz Zagreba, ki je zamudo za leto 1981 že nadomestila, obljublja pa, da bo kmalu prišla na tekoče. Revijo priporočamo vsem aktivom matematikov na srednjih in osnovnih šolah v Sloveniji. V imenu uredniškega odbora revije vabimo člane našega društva, da se v reviji oglašajo s prispevki.

Ciril Velkoverh

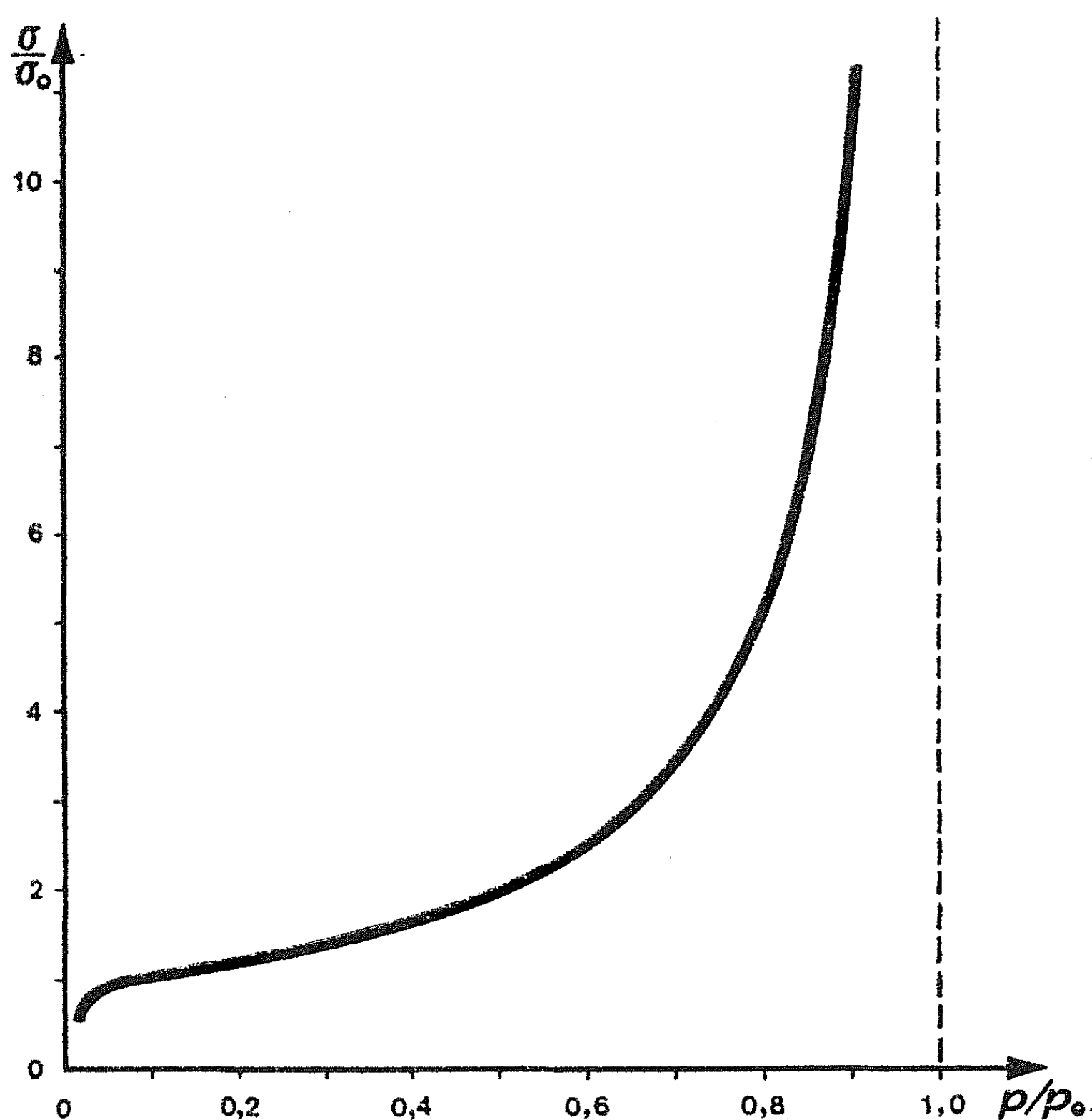
Ko smo v šoli govorili o površinskih pojavih pri stiku kapljev in trdnih snovi, smo spoznali, da voda moči steklo. Po domače bi lahko rekli, da so molekulske sile med steklom in vodo večje kot sile v vodi. Zato ne smemo biti presenečeni ob spoznanju, da je površje stekla vedno prekrito z oblogo vodnih molekul. Debelina obloge je odvisna od temperature in od delnega tlaka vodne pare in hitro raste, ko se bliža rosišče [1].

Množino adsorbirane vode ocenimo z Brunauerjevo, Emmettovo in Tellerjevo enačbo za adsorpcijsko izotermo. (Izpeljavo najde bralec v monografiji J. H. de Boera [2].) Označimo s σ površinsko gostoto adsorbiranih molekul, s σ_0 površinsko gostoto adsorpcijskih centrov, s p delni tlak vodne pare ob steni in s p_0 nasičeni tlak vodne pare pri izbrani temperaturi. Tedaj je približno [2]:

$$\sigma/\sigma_0 = k(p/p_0) (1 - p/p_0)^{-1} [1 + (k - 1) p/p_0]^{-1}$$

Konstanta k je razmerje med karakterističnim časom adsorbirane molekule na površju stekla in karakterističnim časom adsorbirane molekule na površju vode. Približno je to razmerje enako $k = \exp [M(q_a - q_i)/RT]$, če so q_a adsorpcijska toplota, q_i izparilna toplota in R plinska konstanta.

Gostota adsorpcijskih centrov je odvisna od mikroskopičnih lastnosti trdnega površja. Adsorpcijski centri so tam, kjer so bolj ali manj izraziti minimumi medsebojne potencialne energije molekul, ki se adsorbirajo, in skupin atomov na površju. Domnevamo lahko, da je dovolj aktivno površje povsem prekrito z adsorbiranimi molekulami, ki se tiščijo druga druge. Za oceno bomo kar privzeli, da je gostota adsorpcijskih centrov enaka površinski



Sl. 1. Adsorpcijska izoterma za vodno paro pri temperaturi 20 °C [2]

šinski gostoti vodnih molekul, ki bi v enomolekulski plasti popolnoma prekrile steklo. S podatkom, da je efektivni premer vodne molekule okoli 0,4 nm, določimo $\sigma_0 = 6,3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$.

Za konstanto k dobimo pri 20 °C vrednost 100, če uporabimo podatka $q_a = 2,9 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ in $q_i = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$. Podatek za q_a je le groba ocena, saj je odvisen še od vrste in obdelave stekla. Adsorpcijska toplota naj bi bila nekaj 10 % večja od izparilne toplote [2].

Na adsorpcijski izotermi za izbrane podatke ločimo tri značilna področja (Sl. 1). Pri majhni relativni vlažnosti, $p/p_0 < 0,1$, je na steklu redka enomolekulska plast vode. Ta se v naslednjem področju zgosti in se zdebela do dvomolekulske plasti, ko se poveča relativna vlažnost do $p/p_0 \approx 0,5$. Od tu naprej

pa se plast vodnih molekul zelo hitro debeli. Pri relativni vlažnosti 90 % je na steklu 10 premerov debela plast molekul, pri 95 % 20 premerov, pri 99 % pa že 100 premerov debela plast. Za nasičeno vlažnost da enačba neomejeno debelino plasti molekul. Tedaj se pač pojavijo na površju stekla kapljice vode.

Z izoterme odberemo, da je pri relativni vlažnosti 45 % $\sigma/\sigma_0 = 1,8$. Na enem kvadratnem centimetru površja je tedaj okoli 10^{15} molekul vode. Predstava, da lahko z odlivanjem vode izpraznimo kozarec in ostane v njem le ena molekula vode, je tedaj hudo naivna. Če hočemo kozarec zares osušiti, moramo steklo segreti do 200—300 °C in sproti odčrpavati odhlapelo vodno paro. Vendar celo iz stekla, ki ga segrejemo, tako da se zmehča, odhlapeva vodna para, ki je prej difundirala v steklo ali pa sproti nastaja ob razgradnji stekla.

Marjan Hribar

LITERATURA

[1] S. Dushman, *Scientific Foundations of Vacuum Technique*, J. Wiley, New York 1962.

[2] J. H. de Boer, *The Dynamical Character of Adsorption*, Clarendon Press, Oxford 1953.

UTRINKA

Tri z e

Energija -e ž fizikalna veličina, vsebovana v določenem sistemu v različnih oblikah, ki lahko prehajajo druga v drugo...

entalpija -e ž termodinamična veličina, ki kaže celokupno energijo plinov in par v odvisnosti od volumna, tlaka in temperature...

entropija -e ž po termodinamični zakonitosti tisti del toplote, ki se pojavlja pri vsakem delu, ki ga pa ni več mogoče pretvoriti nazaj v delo ali kako drugo vrsto energije, ampak se izgubi v vesolju...

Splošni tehnični slovar, I. del, Zveza inženirjev in tehnikov, Ljubljana 1978

Izbral: Janez Strnad

»Fourierovo delo je značilen zgled za to, kako so potrebe v fiziki sprožile napredek v matematiki.«

M. v. Laue, *Kratka zgodovina fizike*, Ljubljana: DMFA SRS, 1982. Str. 76. (Knjižnica Sigma; 34)

Izbral: Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

MESSER J., Temperature dependent Thomas-Fermi theory. Berlin, Springer Verlag, 1981. 131 str. (Lecture notes in physics; 147).

Knjiga je posvečena predvsem študiju termodinamičnih lastnosti velikih sistemov delcev, ki jih povezujejo težnostne in/ali električne sile. Omenimo naj le nekatere obravnavane teme: kriteriji stabilnosti snovi, Soboljeva in Lieb-Thirringova neenakost, (ne)relativistični fermionski in bozonski sistemi, kozmična snov, lastnosti temperaturno odvisne Thomas-Fermijeve enačbe, fazni prehodi v hadronih, zvezdah in galaksijah itd.

Bralcu, ki se želi seznaniti s tem zanimivim in aktualnim področjem statistične mehanike, bo knjiga vsekakor dobrodošla. Zgoščeni tekst, ki se oslanja na mnogo modernih citiranih virov, odlikuje ob matematični strogosti močan poudarek na fizikalni interpretaciji obravnavane snovi in je namenjen ne le specialistom, temveč širšemu krogu bralcev.

Mitja Kregar

EILENBERGER G., Solitons. Mathematical Methods for Physicists, Solid State Sciences 19. Springer-Verlag, Berlin 1981. 192 str.

V zadnjih letih je izšlo precej monografij in zbornikov o solitonih, to je o nelinearnih lokaliziranih ekscitacijah, ki se širijo s konstantno hitrostjo in pri tem ohranjajo svojo obliko. Ti pojavi so pomembni na raznih področjih fizike, od plazme in fizike trdne snovi do teorije osnovnih delcev. Knjiga prof. Eilenbergerja je izšla iz kurza teorijske fizike in je zato bolj kot druga dela z istim ali podobnim naslovom namenjena fizikom.

Po splošnem uvodu avtor podrobneje obravnava Korteweg-de Vriesovo enačbo in na tem primeru uvede metodo inverznega sipanja; to metodo potem uporabi za reševanje drugih nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb, ki imajo rešitve solitonskega tipa. Eno od poglavij knjige je posvečeno Sine-Gordonovi enačbi, ki je za fizike najzanimivejša. V nasprotju z drugimi sorodnimi deli avtor podaja tudi uvod v termodinamiko solitonskih sistemov, čeprav ne daje dokončnih odgovorov na zastavljena vprašanja, ker raziskave na tem področju še tečejo. Zadnje poglavje na primeru »Toda mreža« obravnava solitonske ekscitacije v diskretnih sistemih.

Boštjan Žekš

Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures, A. Bosznay (Ed.), Euro-mech Colloquium No. 112, Mátrafüred (Hungary) 21–23 February 1979. Akadémiai Kiado, Budapest 1980. 669 str.

Med dinamičnimi problemi v tehniki, še posebno v mehaniki konstrukcij, so posebno pomembni oscilacijski instabilnostni problemi. Načine obravnavanja teh vprašanj bi v grobem razdelili v eksperimentalne in teoretično numerične. Da bi zblížala delo matematikov in fizikov na eni strani in tehnikov in eksperimentalcev na drugi strani, je mednarodna zveza za teoretično in uporabno mehaniko organizirala kolokvij o lastnih nihanjih v zvezni snovi. V knjigi so zbrani članki večine udeležencev tega kolokvija. Obravnavajo nekatera vprašanja o lastnih frekvencah v elastičnih telesih, posebno še glede na konstrukcijsko mehaniko. Med njimi so nekateri teoretično manj zahtevni prispevki, imajo pa za prakso velik pomen. Več člankov obravnava numerična vprašanja, zlasti modifikacije, izboljšave in novejšo rabo Poincare-Rayleigh-Ritzove metode, Ficheraove metode ortogonalnih invariant in nekaterih drugih podobnih metod. V knjigi je zbranih 38 prispevkov.

Peter Vencelj

KRIŽANIČ F., Linearna analiza na grupah. Državna založba Slovenije 1982. 360 str. (Matematika-Fizika : zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij ; 18). Cena 690.— din (552.— din).

Knjiga Linearna analiza na grupah je delo z zelo bogato vsebino. Njeno težišče je na teoriji upodobitev grup. Zaradi obsežnosti te teorije se je avtor omejil v glavnem na kompaktne grupe. Podrobneje pa seznanja bralca z rotacijsko in ortogonalno grupo, s kristalografskimi grupami ter z njihovimi upodobitvami. Knjiga govori tudi o uporabi grup in upodobitev v kvantni mehaniki. Zato bo prišla prav tudi fizikom in kemikom.

Delo sestoji iz 9 poglavij. Prvo nas najprej seznani s splošnimi lastnostmi grup, nato s specialnimi grupami, kot so simetrična, linearna, rotacijska, Lorentzova grupa in poliederske grupe. Drugo poglavje obravnava upodobitve grup in zvezo med moduli in upodobitvami. Govori o kohomoloških grupah modula, o razcepljivih moduli in o unitarnih ter projektivnih upodobitvah. Tretje poglavje je posvečeno topološkim grupam. Najprej je dokazan obstoj invariantnega integrala na kompaktni grupi. Nato se seznanimo z algebro nad kompaktno grupo in z uporabo te algebre pri upodobitvah končnih grup, posebej simetrične grupe. Četrto poglavje govori o Fourierovi analizi nad kompaktno grupo in o karakterjih. V petem poglavju je splošna teorija Liejevih grup in Liejevih algeber. V šestem poglavju se avtor izčrpno pomudi pri rotacijski grupi, ki je lep primer za uporabo splošne teorije. Poišče Liejevo algebro rotacijske grupe, enostavne module nad to grupo, povezavo obelnih (sferičnih) funkcij z regularno upodobitvijo, tenzorske in spinorske upodobitve ter upodobitve ortogonalne grupe. Sedmo poglavje obravnava polpreme produkte in splošne razširitve grup. Razširitve diskretne translacijske grupe s končnimi, ortogonalnimi grupami so kristalografske grupe. Tu je tudi govor o zvezi med Besselovimi funkcijami in upodobitvami Evklidove grupe ter o upodobitvah kristalografskih grup. Grupe in njihove upodobitve imajo pomembno vlogo že v klasični fiziki, še bolj pa v kvantni mehaniki in teoriji osnovnih delcev. O vsem tem seznanja bralca osmo poglavje. Zadnje poglavje, morda najbolj zahtevno, je posvečeno upodobitvam lokalno kompaktne grupe $SL(2, \mathbb{C})$, to je grupe vseh dvovrstnih unimodularnih kompleksnih matrik. Na koncu je seznam literature, ki obsega 130 del.

Knjiga je napisana v zelo lepem in jedrnatem slogu. Nobena beseda ni odveč. Dokazi izrekov so jasni in kratki. Izdelanih je mnogo primerov, od preprostih do bolj zamotanih. Tako je npr. izračunana invariantna mera za najbolj znane kompaktne grupe pa tudi za nekatere lokalno kompaktne. Posamezna poglavja so različno težka. Nekatera ne zahtevajo posebnega predznanja. Vsekakor pa bo bralec lažje študiral knjigo, če se bo prej seznanil z avtorjevimi deli: Linearna algebra in linearna analiza, Topološke grupe, Liejeve grupe in Liejeve algebre.

Ivan Vidav

VIDAV I., Linearni operatorji v Banachovih prostorih. Postdiplomski seminar iz matematike 14. DMFA, Ljubljana 1982. 148 str.

Pričujoče delo je razširjen zapis predavanj iz funkcionalne analize, ki jih je imel avtor v okviru podiplomskega študija iz matematike.

Končno imamo v slovenščini delo, ki se ukvarja z osnovnim področjem funkcionalne analize — teorijo linearnih operatorjev v Banachovih prostorih. Avtor je posvetil eno poglavje Fredholmovim operatorjem. Glavnina dela je poglavje o spektralnih operatorjih. V kratkem poglavju o perturbaciji operatorjev obravnava avtor tudi snov, h kateri je sam prispeval (glej referenco 7 v delu). Zelo zanimivo je tudi zadnje poglavje o krepko zveznih polgrupah operatorjev.

Za študente tretje stopnje matematike je knjiga eden od osnovnih učbenikov. Zanimiva in dostopna je tudi vedoželjnim študentom matematike, predvsem zaradi zadnjega poglavja pa tudi bolj teoretično usmerjenim fizikom.

Uvodno in prvo poglavje podajata pregled osnov funkcionalne analize. Za to snov žal še nimamo učbenika v slovenščini. Delno jo pokriva Križaničeva LAILA, bolj malo in iz drugega zornega kota pa brošura Linearni topološki prostori podpisanega. Temeljit učbenik osnov funkcionalne analize si poleg študentov gotovo želi še kdo.

Anton Suhadolc

MATEMATIČNI ROKOPISI. — Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1982. — Izdajata Odsek za matematiko FNT in Oddelek za matematiko IMFM.

1. Petkovšek M., Pisanski T., Izbrana poglavja iz računalništva, 1. del, Jeziki. NP-polnost. Naloge. 250 str.
2. Kramar E., Nekaj nalog iz linearne algebre. 36 str.
3. Tutorial for the sed screen editor. 24 str.
4. Pascal compiler. Manual. 48 str.
5. Batagelj V., Diskretne strukture. Naloge. 72 str.

Zbirka »MATEMATIČNI ROKOPISI« je bila ustanovljena na željo nekaterih predavateljev matematike na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, ki so v minulih letih svoje zapiske predavanj in razne zbirke vaj odstopali študentom, da so si jih sami razmnoževali na xerox kopirnih strojih. Ker je razmnoževanje v večji nakladi na multilyth kopirnih strojih cenejše, smo se odločili za organizirano izdajo skript. S tem bomo lažje ustregli širšemu krogu interesentov. Rokopise, za katere bo večje zanimanje, bomo po strokovni in jezikovni korekturi izdali v »Zbirki izbranih poglavij iz matematike«.

Ciril Velkovrh

MOHAR B., Zakrajšek E., Uvod v programiranje. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1982, 180 str. (Zbirka izbranih poglavij iz matematike; 18). Cena 200.— din (160.— din).

Leta 1975 je kot četrti zvezek Izbranih poglavij iz matematike izšel seminarski material Programski jezik PASCAL E. Zakrajška. Odtlej je bila knjižica še nekajkrat ponatisnjena. Ob pripravi nove izdaje pa sta jo avtorja močno razširila in dopolnila z zapiski za predavanja pri predmetu Uvod v računalništvo za študente 1. letnika matematike ter s svojimi izkušnjami pri poučevanju in praktičnem delu. Tako je nastal nov zajeten učbenik Uvod v programiranje. Bistvo sprememb in dopolnitev pove že naslov: stara knjižica je bila predvsem zgoščen opis PASCALA, nova knjiga pa nas s pomočjo PASCALA, ki je za to zelo primeren, uči programiranja.

V uvodnem poglavju najdemo za nadaljnje razumevanje potrebna pojasnila o računalniku ter programskih jezikih in njihovi sintaksi. Drugo poglavje nas seznani z osnovami jezika PASCAL: s simboli jezika, zgradbo programa, skalarnimi tipi, enostavnimi stavki in kontrolnimi strukturami. Tretje poglavje govori o sestavljenih podatkovnih strukturah in o podprogramih. V četrtem poglavju je zbranih nekaj dodatnih tem, ki so za začetnika manj pomembne, kot so množice, kazalci, rekurzivni podprogrami, »nebodigatreba« GOTO stavek itd. Zadnje — peto — poglavje pa opisuje nekatere posebnosti prevajalnikov za PASCAL na dosegljivih računalnikih (CYBER — CDC 6000 in DEC-10). Ti podatki so pri praktičnem delu nadvse dobrodošli; za primer naj navedemo opis uporabe sistema PASDDT za odkrivanje napak v programih na računalniku DEC. Sledi še nekaj običajnih koristnih prilog.

Učbenik je napisan jasno in zelo sistematično. Vse sintaktične konstrukcije so pregledno prikazane s sintaktičnimi diagrami. Posebna odlika so številni primeri programov; krajši so posejani med besedilom, daljši pa zbrani na koncu poglavij.

Knjiga je namenjena predvsem študentom matematike v I. letniku, s pridom pa jo bodo uporabljali tudi študentje drugih fakultet, zlasti Fakultete za elektrotehniko, nadalje učitelji in učenci na srednjih šolah pri pouku računalništva in sploh vsi, ki bi se radi seznanili z računalnikom in programiranjem. Seveda pa se programiranja — tako kot šofiranja — ne da naučiti brez sočasnega vztrajnega praktičnega dela. Predvidoma bo učbeniku sledila tudi zbirka nalog.

Naj omenimo zanimivost, da je bilo besedilo knjige v celoti oblikovano na računalniku s pomočjo urejevalnika in nato fotokopirano z računalniškega izpisa, tako da je knjiga skupaj s priročnikom Začni s TOPS-10 R. Vidmarja eden prvih primerov računalniške tipografije pri nas.

Marko Petkovšek