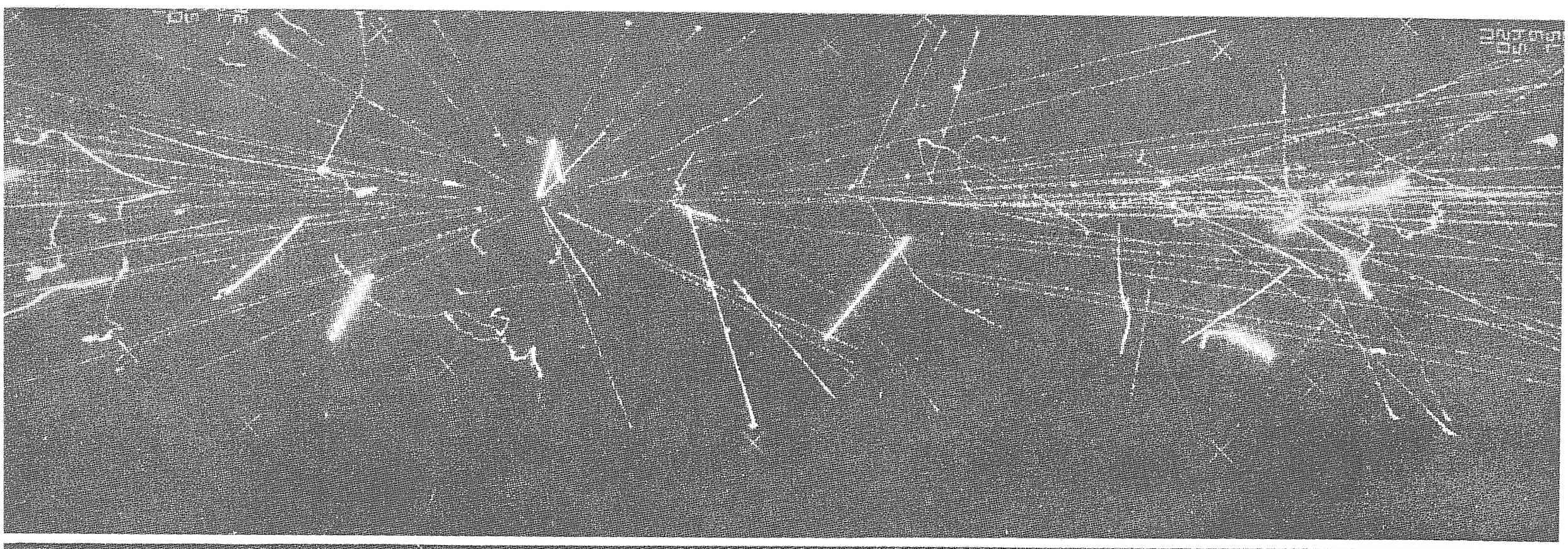
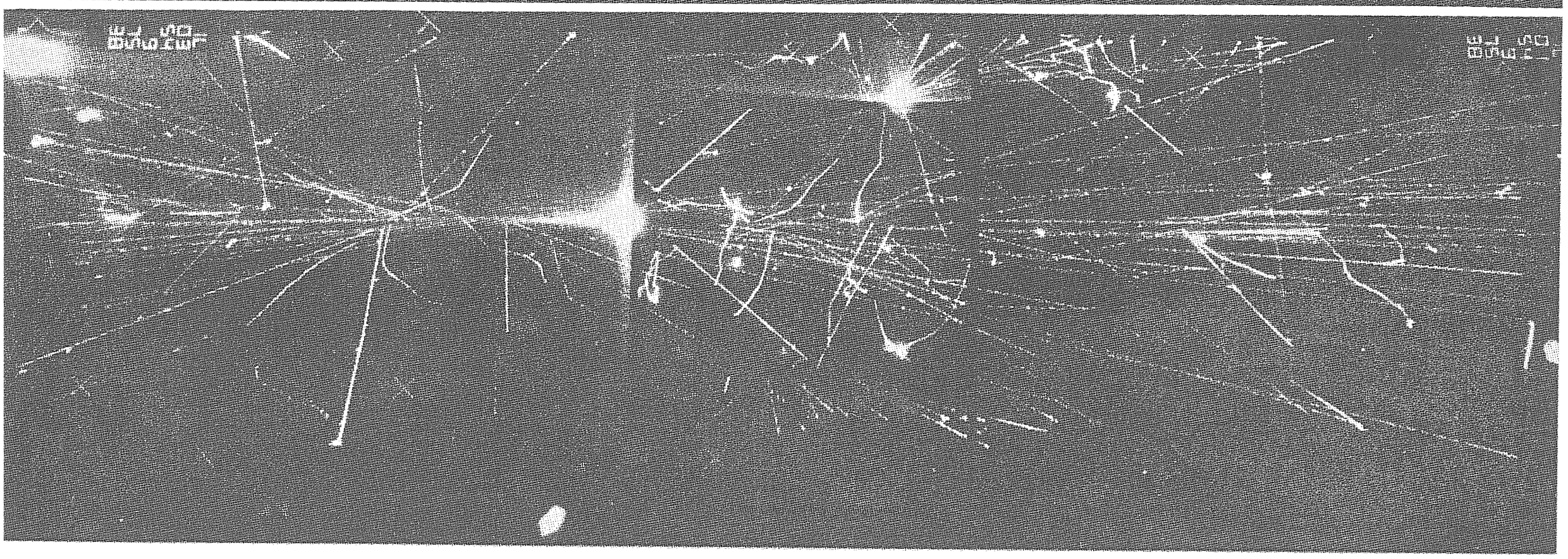
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

1982
Letnik 29
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO





LETNIK 29. — ŠTEVILKA 4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1982

Glavni urednik: Edvard Kramar, **odgovorni urednik:** Janez Strnad.
Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.
Naročnina: za posameznike 300.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 150.— din, za ustanove in podjetja 500.— din, za tujino 20 $ = 800.— din, posamezna številka 100.— din, dvojna številka 200.— din.
Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 6, tel. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233.
Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.
Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1982 DMFA SRS — 572

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA

Članki
Elementarna varianta osnovnega izreka integralnega računa (Aljoša Volčič) . . 97
Novice
O nerešljivem problemu (Ivan Vidav) 101
e je transcendentno število (Rudolf Moge) 103
Korak k višjim energijam (Janez Strnad) 106
Merilnik frekvence električnih signalov (Janez Žitnik) 111
Utrinek
Vse o radioaktivnem razpadu (Izbral Dušan Modic) 114
Šola
Zakaj speljavajo avtomobili s parkirišč? (Jurij Vdovič, karikatura Miha Štalec) 115
Spreminjanje radija Kefeide (Marijan Prosén) 116
Domače vesti
XIV. zvezno tekmovanje študentov matematike Istam 1981 (Franci Forstnerič) 117
Seznam diplomantov ... (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 121
Nagrajenci Sklada Borisa Kidriča v letu 1982 (Zbral in uredi Ciril Velkovrh) . 124
V slovo kolegu in prijatelju profesorju Francu Galiču (Ivan Pucelj) 125
Novi člani društva v letu 1981 (Ciril Velkovrh) 126
Nove knjige (Ciril Velkovrh, Izidor Hafner, Gorazd Lešnjak, Tomaž Pisanski, Anton Suhadolc, Rajko Jamnik, Anuška Ferligoj, France Križanič, Niko Prijatelj, Milan Hladnik, Janez Rakovec, Peter Legiša) 126

CONTENTS

Articles
An elementary version of the fundamental theorem of calculus (Aljoša Volčič) 97
News 101
School 115
Home news 117
New books 126

Na ovitku: Fotografiji reakcije med protonom in antiprotonom pri razpoložljivi energiji 540 GeV v pramenski celici (glej novico na str. 106.)

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 4

ELEMENTARNA VARIANTA OSNOVNEGA IZREKA INTEGRALNEGA RAČUNA

ALJOŠA VOLČIČ*

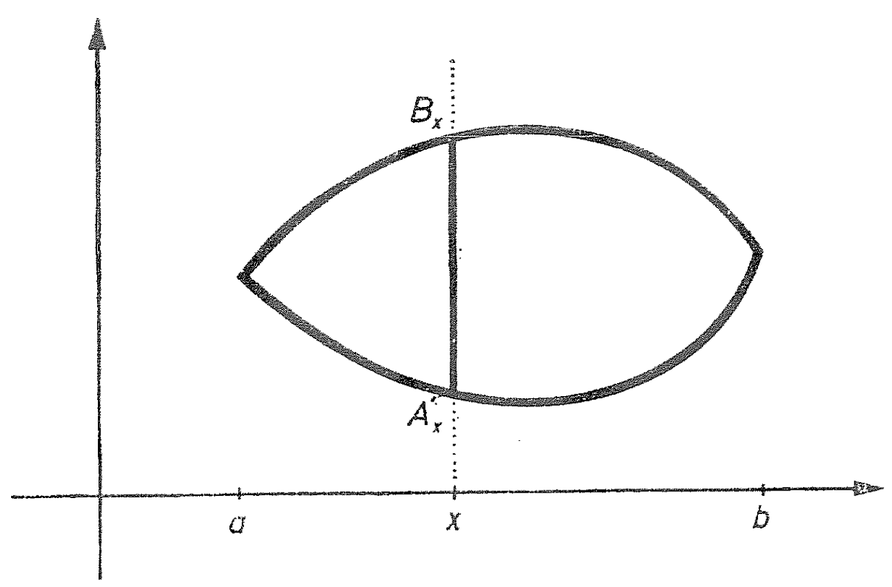
Math. Subj. Class. (1980) 26 A 51

V članku je podan elementaren dokaz osnovnega izreka integralnega računa za primer konveksne funkcije, zvezne na intervalu [a, b].

AN ELEMENTARY VERSION OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

In the paper an elementary proof of the fundamental theorem of calculus is presented, valid for convex functions, continuous on [a, b].

Pri matematični formulaciji nekega problema sem se znašel pred naslednjo situacijo



V ravnini je dana konveksna množica K, pri kateri poznamo za vsak x dolžino daljice A_xB_x. Funkcija $f(x) = \overline{A_xB_x}$ je razlika dveh konveksnih funkcij na intervalu $[a, b]$. Pravimo, da je funkcija g na intervalu $[a, b]$ konveksna, če za vsak $t \in [0, 1]$ in za poljubna x_1 in x_2 iz intervala $[a, b]$ velja

$$g(tx_1 + (1 - t)\, x_2) \leqq tg(x_1) + (1 - t)\, g(x_2)$$

Vedeti hočem, ali velja obrazec

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a) \tag{1}$$

Za odvod, ki nastopa pod integralom, vemo, da obstaja povsod na intervalu $[a, b]$ razen morda v števno mnogo točkah. (Za dokaz tega izreka kakor tudi za druge lastnosti konveksnih funkcij glej npr. knjigo [1] ali njen ruski prevod.)

Vsakemu študentu prvega letnika matematike (in mnogim dijakom iz srednje šole) je znano, da formula (1) gotovo velja za zvezno odvedljive funkcije. To pa v našem primeru ni vselej res. Seveda velja obrazec (1) tudi v drugih primerih. V mnogih učbenikih preberemo, da velja obrazec (1) natanko tedaj, ko je f absolutno zvezna funkcija. Odvod take funkcije obstaja tedaj skoraj povsod in je integrabilen pri Lebesguesu. Odvod je torej lahko zelo grda

* Redni profesor matematike na inženirski fakulteti univerze v Trstu.

funkcija, zato je treba integral v (1) razumeti v Lebesguesovem smislu. Za dokaz teh trditev glej npr. [4], posebno poglavje 8.

Omenili smo pojem absolutno zvezne funkcije. Pravimo, da je funkcija f absolutno zvezna na $[a, b]$ če je za vsak $\varepsilon > 0$ mogoče dobiti tak $\delta > 0$, da je $\sum | f(x_i') - f(x_i'') | < \varepsilon$, kakorkoli izberemo končno število ne prekrivajočih se podintervalov $[x_i', x_i'']$, katerih skupna dolžina ne presega δ. Lahko je ugotoviti, da je v našem primeru f absolutno zvezna. V [1] je dokazan zrek, da je diferenčni kvocient konveksne funkcije nepadajoča funkcija, zato je diferenčni kvocient na vsakem intervalu $[a + c, b - c]$, $c > 0$ in $c < (b - a)/2$ omejen. Velja torej neenačba $| f(x_2) - f(x_1) | \leqq M(x_2 - x_1)$, od tod pa že sledi absolutna zveznost na intervalu $[a + c, b - c]$ in z limitnim prehodom absolutna zveznost na intervalu $[a, b]$. Zato obrazec (1) velja. V tem članku pa bi rad pokazal, kako dokažemo (1) v zaželenem obsegu z elementarnimi sredstvi in brez uporabe Lebesguesovega integrala.

Izrek 1. Naj bo g konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$, v krajiščih a in b zvezna. Potem velja formula (1).

Tu definiramo funkcijo pod integralom v točkah, v katerih odvod ne obstaja, s poljubno vrednostjo med levim in desnim odvodom. Tako postane integrand nepadajoča funkcija in integral v (1) je kar Riemannov, glej npr. [2], str. 226. Izberimo α in β tako, da bo $a < \alpha < \beta < b$ in določimo n_0 tako, da bo

$$\frac{\beta - \alpha}{n_0} < \min (b - \beta,\ \alpha - a)$$

Za poljuben $n > n_0$ definirajmo

$$x_i = \alpha + i(\beta - \alpha)/n \quad , \quad i = -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ n + 1$$

Riemannove vsote

$$\sum_{i=1}^{n} g'(x_i)\ (x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

težijo, ko gre n čez vsako mejo, k integralu $\int_a^\beta g'(t)\, dt$. Ker je g konveksna, velja neenačba ([1], § 4, razdelek 4, Cor. 1)

$$\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leqq g'(x_i) \leqq \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

torej moremo vsoto (2) vkleniti v dvojno neenačbo

$$\sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) \leqq \sum_{i=1}^{n} g'(x_i)\ (x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} (g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

»Teleskopska« lastnost krajnih vsot pove, da je vsota (2) med vrednostma

$$g(\beta) - g(\alpha) \quad \text{in} \quad g(\beta + (\beta - \alpha)/n) - g(\alpha + (\beta - \alpha)/n)$$

Iz zveznosti funkcije g dobimo, ko gre $n \to \infty$

$$\int_a^\beta g'(x)\, dx = g(\beta) - g(\alpha)$$

Iz zveznosti funkcije g in zveznosti integrala sledi, ko gre $\alpha \to a^+$ in $\beta \to b^-$, formula (1) in izrek je dokazan.

Izrek sedaj zlahka razširimo na funkcije, ki so razlika dveh konveksnih funkcij.

Dokazani izrek in varianta z zveznim odvodom imata komplementarno vlogo, popolnoma podobno tisti, ki jo imata izreka o integrabilnosti (po Riemannu) za naraščanje oz. zvezne funkcije. Oglejmo si natančneje, za katere funkcije velja pravkar dokazani izrek.

Izrek 2. Absolutno zvezna funkcija f, definirana na $[a, b]$, je razlika dveh konveksnih funkcij natanko tedaj, ko ima njen odvod omejeno variacijo na vsakem intervalu $[\alpha, \beta]$ za $a < \alpha < \beta < b$.

Dokaz. Če je $f = f_1 - f_2$, kjer sta f_1 in f_2 konveksni, potem je $f' = f_1' - f_2'$. V točkah, kjer f_1' ali f_2' ne obstaja, definiramo f_1' oz. f_2' spet s poljubno vrednostjo med levim in desnim odvodom. Tako sta f_1' in f_2' nepadajoči funkciji in velja

$$V(f', [\alpha, \beta]) \leqq V(f_1', [\alpha, \beta]) + V(f_2', [\alpha, \beta]) = f_1'(\beta) - f_1'(\alpha) + f_2'(\beta) - f_2'(\alpha)$$

Tu pomeni $V(f_1', [\alpha, \beta])$ variacijo funkcije f' na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Res pa je tudi obratno. Če ima namreč f' omejeno variacijo na intervalu $[\alpha, \beta]$, potem ga lahko zapišemo kot razliko dveh nepadajočih funkcij, omejenih na $[\alpha, \beta]$ ([2], str. 229):

$$f' = g_1 - g_2$$

Zato je

$$f(x) - f(\alpha) = \int_a^x f'(t)\, dt = \int_a^x (g_1(t) - g_2(t))\, dt = \int_a^x g_1(t)\, dt - \int_a^x g_2(t)\, dt$$

Izrek je dokazan, če pokažemo, da je funkcija

$$h(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

konveksna, če je g nepadajoča. Očitno je h zvezna funkcija. Taka pa je konveksna natanko tedaj ([1], pogl. 1), ko velja

$$h((x_1 + x_2)/2) \leqq 1/2 g(x_1) + 1/2 g(x_2) \quad , \quad x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \tag{3}$$

Naj bo $x_3 = (x_1 + x_2)/2$. Potem je

$$\int_a^{x_3} g(t)\, dt = \int_a^{x_1} g(t)\, dt + \int_{x_1}^{x_3} g(t)\, dt \tag{4}$$

Ker je g nepadajoča, je seveda $\int_{x_1}^{x_3} g(t)\, dt \leqq \int_{x_3}^{x_2} g(t)\, dt$, zato $2 \int_{x_1}^{x_3} g(t)\, dt \leqq \int_{x_1}^{x_3} g(t)\, dt + \int_{x_3}^{x_2} g(t)\, dt = \int_{x_1}^{x_2} g(t)\, dt$ ali $\int_{x_1}^{x_3} g(t)\, dt \leqq 1/2 \int_{x_1}^{x_2} g(t)\, dt$. Tako dobimo iz ocene (4)

$$\int_a^{x_2} g(t)\, dt \leqq \int_a^{x_1} g(t)\, dt + 1/2 \int_{x_1}^{x_2} g(t)\, dt = 1/2 \int_a^{x_1} g(t)\, dt + 1/2 \int_a^{x_2} g(t)\, dt$$

to pa je prav enačba (3) in h je res konveksna na intervalu $[\alpha, \beta]$. V definiciji $h(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ je g intergrabilna na intervalu $[\alpha, b]$, saj je g odvod absolutno

zvezne funkcije ([4]), pogl. 8). Zato smemo napraviti limito $\beta \to b^-$ in $h(x)$ je konveksna na $[a, b]$. Podobno se prepričamo, da je h konveksna na vsem intervalu $[a, b]$.

Pripombe in primeri.

1. V dokazanem izreku smo odvod v (1) definirali tako, da je integrand nepadajoča funkcija, zato je integral kar Riemannov. Če bi odvod definirali tam, kjer ne obstaja, poljubno, bi obrazec (1) še veljal, saj bi drugače definirana funkcija sovpadala s prejšnjo povsod razen morda v številno mnogo točkah, le integral v (1) bi morali razumeti v Lebesguesovem smislu.

Oglejmo si primer. Naj bo $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)/n^2$, kjer je

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x \leqq q_n \\ x - q_n, & \text{če je } x > q_n \end{cases}$$

Tu je $\{q_n\}$ zapis v zaporedje racionalnih števil iz intervala $[0, 1]$. Vrsta je očitno konvergentna, na $[0, 1]$ celo enakomerno, posamezni členi so nenegativne naraščajoče konveksne funkcije, zato se da pokazati, da je tudi vsota konveksna funkcija. Malo daljši premislek kaže tudi, da je funkcija h odvedljiva v vseh iracionalnih točkah in odvod tam pozitiven, v racionalnih točkah pa ni odvedljiva. Zato je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} h'(x), & x \text{ ni racionalen} \\ -1, & x \text{ racionalen} \end{cases}$$

nezvezna v vseh točkah intervala $[0, 1]$, tedaj tudi ni integrabilna po Riemannu ([3], str. 257). Še vedno velja formula (1), če razumemo integral v Lebesgruesovem smislu: $h(x) = \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x h'(t)\,dt$.

2. Obstajajo funkcije, ki imajo zvezen odvod, a niso razlika dveh konveksnih funkcij. Taka je npr. funkcija

$$f(x) = \int_0^x t \sin(1/t)\,dt$$

njen odvod namreč nima omejene variacije. Ta primer pokaže, da izrek 1 ni posplošitev izreka, ki velja za zvezno odvedljive funkcije.

3. Funkcija, definirana pod točko 1, pa tudi bolj enostavna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq 1/2 \\ x - 1/2, & x > 1/2 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1, & x > 1/2 \end{cases}$$

kažeta, da izrek 1 pove nekaj novega v primerjavi s tistim za funkcije z zveznim odvodom.

LITERATURA

[1] N. Bourbaki, *Elements de mathematique IX. Functions d'une variable reelle*, Ch. 1, 2, 3. Hermann, Paris 1958.

[2] I. Vidav, *Matematika* I. DZS, Ljubljana 1978.

[3] I. Vidav, *Matematika* II. DZS, Ljubljana 1979.

[4] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw, New York 1966

NOVICE

O NEREŠLJIVEM PROBLEMU

Pred kratkim je bil objavljen v Preseku »nerešljivi problem« (Presek **9** (1981/82), str. 182). Ta problem zahteva, da poiščemo dve naravni števili. Nerešljiv se imenuje zato, ker na videz ni dan noben podatek, ki bi omogočal najti ti števili. Rešitev je več. Ena sama je, če se omejimo na primer, ko vsota iskanih števil ni večja od 64. Barry Wolk z univerze v Manitobi je zastavil podoben »nerešljiv« problem, pri katerem pa je rešitev ena sama, ne glede na to, kako velika je vsota. Vendar je pri tem treba privzeti, da je Goldbachova domneva pravilna. Nalogo je objavil Martin Gardner v Scientific American, junij 1980. Glasi se takole:

Peter je izbral dve naravni števili, večji od 1. Vsoto teh števil je povedal prijatelju Janezu, produkt pa Mirku. Janez si ogleda vsoto in telefonira Mirku:

»Ne vidim možnosti, kako bi ti lahko ugotovil vsoto.«

Čez nekaj časa odgovori Mirko:

»Imaš prav. Tudi tvoje sporočilo mi ne pomaga določiti vsoto.«

Kmalu nato pa se spet oglasi Janez:

»Vem, kolikšen je produkt.«

Kateri števili je izbral Peter?

Rešitev. Naj bo vsota izbranih števil V in produkt P. Mirko bi takoj našel vsoto V v primeru, če bi bil P produkt dveh praštevil. Ko je Janez telefoniral, da Mirko ne bo mogel najti vsote, je zato Mirko dobil informacijo:

(I) **Število V ni vsota dveh praštevil.**

Mirko kljub temu ni mogel najti vsote. Zato je njegovo sporočilo Janezu vsebovalo tole informacijo: P se da razstaviti v produkt dveh faktorjev vsaj na dva načina tako, da vsota faktorjev ni enaka vsoti dveh praštevil. Ker je ta informacija omogočila Janezu najti produkt P, pomeni to:

(II) **Število V lahko zapišemo samo na en način kot vsoto $x + y$ tako, da se za produkt $P = xy$ razstaviti vsaj še na en način v x' y', kjer spet vsota faktorjev $x' + y'$ ni vsota dveh praštevil.**

Določimo zdaj vsa števila V z lastnostma (I) in (II).

Goldbachova domneva pravi, da je vsako sodo število, ki je večje od 2, vsota dveh praštevil. Privzemimo, da je ta domneva pravilna. Ker V ni vsota dveh praštevil, je potemtakem liho število. Tudi razlika $V - 2$ je liho število, ki pa ni enako kakemu praštevilu p, ker bi sicer bilo $V = p + 2$ vsota dveh praštevil. Zato je $V - 2 = ab$, kjer sta a in b lihi števili, obe večji od 1. Pišimo $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $m, n \geqq 1$. Potem je

$$V = 4mn + 2(m + n) + 3$$

Naj bo $x = 4mn + 2$, $y = 2(m + n) + 1$, tedaj $x + y = V$. Produkt

$$P = xy = (4mn + 2)\,[2(m + n) + 1]$$

lahko razstavimo tudi na faktorja x' y', kjer je

$$x' = 2 \quad \text{in} \quad y' = (2mn + 1)\,[2(m + n) + 1]$$

Vsota $x' + y' = (2mn + 1)\,[2(m + n) + 1] + 2$ ni vsota dveh praštevil. Torej smo zapisali V kot vsoto $x + y$, kjer se da $P = xy$ razstaviti na dva načina v produkt dveh faktorjev tako, da vsota faktorjev ni vsota dveh praštevil.

Drugič razcepimo V na sumanda $x = 4mn - 4(m + n) + 2$ in $y = 6(m + n) + 1$. Pri tem najprej privzemimo, da je $mn - m - n > 0$. Produkt $P = xy$ pa je enak tudi produktu faktorjev

$$x' = 2 \quad \text{in} \quad y' = (2mn - 2m - 2n + 1)\,(6m + 6n + 1)$$

z vsoto $x' + y' = (2mn - 2m - 2n + 1)\,(6m + 6n + 1) + 2$, ki prav gotovo ni vsota dveh praštevil, ker je $2mn - 2m - 2n + 1 > 1$. Torej smo zapisali V na dva načina kot vsoto $x + y$ tako, da se da pripadajoči produkt $P = xy$ vsakokrat razstaviti na dva načina na dva faktorja, kjer vsota faktorjev ni vsota dveh praštevil. Zato $V = 4mn + 2(m + n) + 3$ nima lastnosti (II), če je $mn - m - n > 0$.

Oglejmo si zdaj, kdaj je $mn - m - n \leqq 0$. Smemo vzeti, da je $m \geqq n$. Potem sta dve možnosti:

a) $n = 1$ in $m \geqq 1$ poljuben;

b) $m = n = 2$.

Obdelajmo najprej primer (b). Tedaj je $V = 27$. Pišimo $27 = 3 + 24 = 5 + 22$. Oba produkta $3 \,.\, 24 = 72$ in $5 \,.\, 22 = 110$ se dasta še na en način razstaviti na dva faktorja tako, da vsota faktorjev ni vsota dveh praštevil. In sicer je $72 = 8 \,.\, 9$ z vsoto faktorjev $8 + 9 = 17$ ter $110 = 2 \,.\, 55$ z vsoto faktorjev $2 + 55 = 57$. Torej število 27 nima lastnosti (II).

V primeru (a) je $V = 6m + 5$. Naj bo $x = 4m + 2$, $y = 2m + 3$, teday $x + y = 6m + 5 = V$. Število $P = xy$ je tudi produkt faktorjev $x' = 2$ in $y' = (2m + 1)\,(2m + 3)$. Vsota $x' + y' = (2m + 1)\,(2m + 3) + 2$ ni vsota dveh praštevil. Drugič razcepimo V na sumanda $x = 4m - 2$ in $y = 2m + 7$. Produkt xy je tudi enak produktu $x'y'$, kjer je $x' = 2$ in $y' = (2m - 1)\,(2m + 7)$. Če je $m > 1$, je $x' \neq x$ in $y' \neq y$, število $x' + y' = (2m - 1)\,(2m + 7) + 2$ pa ni vsota dveh praštevil. Tako smo ugotovili, da $V = 6m + 5$ pri $m > 1$ nima lastnosti (II).

Za $m = 1$ je $V = 11$. Pišemo lahko $V = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$. Pripadajoči produkti so $2 \,.\, 9 = 18$, $3 \,.\, 8 = 24$, $4 \,.\, 7 = 28$ in $5 \,.\, 6 = 30$. Od teh števil se da samo 30 zapisati na dva načina kot produkt dveh faktorjev tako, da vsota faktorjev ni vsota dveh praštevil. Je namreč $30 = 5 \,.\, 6 = 2 \,.\, 15$. Števili $5 + 6 = 11$ in $2 + 15 = 17$ pa nista vsoti dveh praštevil. Torej $V = 11$ ima lastnosti (I) in (II).

Odgovor na zastavljeno vprašanje se potemtakem glasi: Samo število 11 ima obe lastnosti (I) in (II). Pripadajoči produkt je $P = 30$. Peter je izbral števili 5 in 6.

Ivan Vidav

e JE TRANSCENDENTNO ŠTEVILO

Ko je J. Liouville l. 1844 dokazal obstoj transcendentnih števil, so se mnogi znameniti matematiki lotili dokazovanja, da je e transcendentno število. Po dolgem in zamotanem dokazu, ki ga je l. 1873 zdelal Charles Hermite, je med drugimi tudi David Hilbert objavil svoj dokaz l. 1893 v Mathematische Annalen. Medtem je Georg Cantor l. 1874 dokazal, da je algebrskih števil števno, transcendentnih pa neštevno mnogo. Stopimo po Hilbertovi poti.

Trditev e je transcendentno število je dokazal s protislovjem. Če e ni transcendentno število, tedaj je algebersko, zato obstaja tak polinom s celimi koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in $a_0 \neq 0$, da je e njegova ničla:

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Za nadaljno obdelavo dokaza se najprej pomudimo ob Eulerjevi funkciji gama, definirani z

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx, \qquad s > 0$$

Zanjo velja funkcionalna enačba

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$$

Naj bo n naravno število! Tedaj je $\Gamma(n+1) = n!$, saj je $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$. S tem spoznanjem premagajmo

$$I_k = \int_0^\infty x^k\, p(x)\, e^{-x}\, dx$$

pri čemer je p polinom s celimi koeficienti $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Velja:

$$I_k = b_n \int_0^\infty x^{k+n} e^{-x}\, dx + \ldots + b_0 \int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx =$$

$$= b_n\,\Gamma(k+n+1) + \ldots + b_0\,\Gamma(k+1) = b_n(k+n)! + \ldots + b_0\, k!$$

Ker za vsako naravno število r velja $(k+r)! \equiv 0 \bmod (k+1)!$ in ker je $p(0) = b_0$, je

$$I_k \equiv p(0)\, k! \mod (k+1)! \qquad (2)$$

Definirajmo še polinom $q(x)$ s celimi koeficienti, vodilnim koeficientom ena, stopnje $m + n\,(m+1)$, m kratno ničlo nič ter $m+1$ kratnimi ničlami $1, 2, \ldots, n$.

Uvedimo novo spremenljivko $y = x - k$ pa dobimo

$$q(y) = y^m\, t_0(y), \text{ če je } k = 0$$

$$q(y+k) = y^{m+1}\, t_k(y), \text{ če je } 0 < k \leq n \qquad (3)$$

$t_n(y), \ldots, t_0(y)$ so polinomi s celimi koeficienti ter

$$t_0(0) = (-1)^{n(m+1)}\,(n!)^m \qquad (4)$$

Zapišimo $q(x) = [x(x-1) \ \ldots \ (x-1)]^m (x-1) \ \ldots \ (x-n)$ in ocenimo $q(x)\, e^{-x}$. Če je $\max\limits_{0 \leqq x \leqq n} | x(x-1) \ \ldots \ (x-n) | = A$ in $\max\limits_{0 \leqq x \leqq n} | (x-1) \ \ldots \ (x-n)\, e^{-x} | = B$, tedaj je

$$q(x)\, e^{-x} \leqq A^m B \tag{5}$$

Naj bo $I = (a_n e^n + \ldots + a_0) \int\limits_0^\infty q(x)\, e^{-x}\, dx$. Zaradi (1) je

$$I = 0 \tag{6}$$

Integrand je zvezna funkcija. Če je

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k \int\limits_k^\infty q(x)\, e^{-x+k}\, dx \text{ in}$$

$$I_2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_0^k q(x)\, e^{-x+k}\, dx$$

tedaj je

$$I = I_1 + I_2$$

Uvedimo novo spremenljivko $y = x - k$, pri čemer je k nenegativno celo število in ocenimo k-ti člen prve vsote:

$$a_k \int\limits_k^\infty q(x)\, e^{-x+k}\, dx = a_k \int\limits_0^\infty q(y+k)\, e^{-y}\, dy$$

Upoštevajmo (3), (2) in (4) in dobili bomo

$$a_0 \int\limits_0^\infty q(y)\, e^{-y}\, dy = a_0 \int\limits_0^y y^m\, t_0(y)\, e^{-y}\, dy \equiv a_0\, t_0(0)\, m! \mod (m+1)!, \text{ če je } k = 0$$

ter

$$a_k \int\limits_0^\infty q(y+k)\, e^{-y}\, dy = a_k \int\limits_0^\infty y^{m+1}\, t_k(y)\, e^{-y}\, dy \equiv a_k\, t_k(0) \,.\, (m+1)! \mod (m+2)!, \text{ če}$$

velja $0 \leqq k \leqq n$. Očitno je tedaj

$$I_1 \equiv a_0\, t_0(0)\, m! \equiv a_0 (-1)^{n(m+1)}\, (n!)^m\, m! \mod (m+1)!$$

Če sta si števili $a_0\, n!$ in $m+1$ tuji, tedaj je I_1 od nič različno celo število, prav tako pa je tudi

$$I_1/m!, \text{ saj je } I_1 \equiv 0 \mod (m!). \text{ Zato } I_1/m! \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{7}$$

Ocenimo še člen druge vsote. Če upoštevamo (5), dobimo

$$a_k \int\limits_0^k q(x)\, e^{-x+k}\, dx \leqq |a_k|\, e^k \int\limits_0^k A^m B\, dx = |a_k|\, e^k\, A^m\, B\, k$$

Zato je

$$|I_2| \leqq \sum_{k=1}^{n} k\, |a_k|\, e^k\, A^m\, B$$

Ker je $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{A^m}{m!} = 0$, je za dovolj velik m

$$|I_2|/m! < 1 \tag{8}$$

Izberimo tak m, da bo veljalo (8) in da si bosta števili $a_0 n!$ in $m + 1$ tuji. Zaradi (7) in (8) je $I_1 + I_2 \neq 0$, kar je protislovno s (6).

Opomba recenzenta. Malo enostavnejša verzija dokaza tega izreka se najde tudi v knjigi A. Baker, Transcendental number theory.

Rudolf Moge

LITERATURA

[1] J. F. Koksma, *Diophantische Aproximationen*, Springer, Berlin 1936.

[2] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Academic Press, New York-London 1966.

[3] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.

[4] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Springer Verlag, New York 1976.

[5] W. J. Le Veque, Fundamentals of Number Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1977.

[6] Đ. Kurepa, *Viša algebra*, Građevinska knjiga, Beograd 1979.

INDEX TO THE MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION (1980)

The Mathematical Library of the University of Ljubljana, Yugoslavia, has prepared the second edition of a comprehensive key word Index to the Mathematics Subject Classification (1980).

The booklet contains 130 pages (size A-4). Each significant word used in the classification scheme is listed along with the subject number and the full text of the line in which it appears.

Those interested in obtaining the copies can order them by paying 20 $ (520.— din for Yugoslavia) for each copy to the account No. 50100-620-107-25730-32009-007-900 for Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS at Ljubljanska banka, Ljubljana.

In stock there is also the first edition of the Index of the AMS Subject Classification Scheme (1970) the price being 15 $ (216.— din for Yugoslavia) for each copy.

All inquiries schould be made to Mr. Ciril Velkovrh, Librarian, Department of Mathematics, University of Ljubljana, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, pp 543, Yugoslavia.

KORAK K VIŠJIM ENERGIJAM

V fiziki visokih energij je posebno pomembno raziskovanje neobstojnih delcev, ki nastanejo pri reakcijah med obstojnimi delci. Prizadevajo si, da bi dobili čim bolj kratkožive in nenavadne delce. Ti imajo veliko lastno energijo, kar zahteva veliko kinetično energijo delca, ki sproži reakcijo. Reakcije zelo hitrih izstrelkov z mirujočimi delci v tarči so v tem pogledu dokaj neugodne. Poleg polne energije se ohrani namreč tudi skupna gibalna količina delcev, ki sodelujejo pri reakciji. Zato je razpoložljiva energija, to je energija, ki je v težiščnem sistemu na voljo za nastanek novih delcev, le majhen del kinetične energije izstrelka. V relativistični mehaniki dobimo zanjo [1]

$$W_r = 2mc^2 [(1 + W_k/2mc^2)^{1/2} - 1]$$

če ima izstrelek kinetično energijo W_k in imata izstrelek in mirujoči delec enako lastno energijo mc^2. Za proton z zelo veliko kinetično energijo smemo vzeti, da so protoni v jedru v tarči nevezani in mirujejo. Pri kinetični energiji protona 400 GeV je tedaj razpoložljiva energija 26 GeV, to je le 6 % kinetične energije istrelka. (V nerelativističnem približku — pri majhni hitrosti — meri razpoložljiva energija 50 % kinetične energije izstrelka.)

Ta neugodna okoliščina je botrovala gradnji *nakopičevalnikov*. Če trčita delca, ki imata v laboratorijskem sistemu enako kinetično energijo, a nasprotno enako gibalno količino, se težiščni sistem ujema z laboratorijskim in je razpoložljiva energija enaka skupni začetni energiji delcev. V nakopičevalniku krožijo nabiti delci v prečnem magnetnem polju v svitkasti vakuumski cevi. V posebnih pospeševalnih celicah jih dodatno pospešujejo vsaj toliko, da izravnajo izgubo kinetične energije zaradi sinhrotronskega sevanja.

Nakopičevalnik za trke enakih delcev mora imeti dvoje vakuumskih cevi z nasprotno usmerjenim magnetnim poljem, po katerih krožijo delci v nasprotnih smereh. Tak je edini delujoči nakopičevalnik za protone ISR (Intersecting Storage Rings — sekajoča se nakopičevalna obroča) Evropskega centra za jedrske raziskave CERN v Ženevi. V njem dosežejo protoni kinetično energijo do 26,5 GeV, tako da je razpoložljiva energija 2 . 26,5 Gev = = 53 GeV. Njegovi vakuumski cevi imata obliko na ogliščih zaobljenih kvadratov, ki sta zasukana drug proti drugemu (sl. 1). Na ravnih delih se na osmih krajih sekata in tam pride do trkov med protoni in do reakcij; te opazujejo.

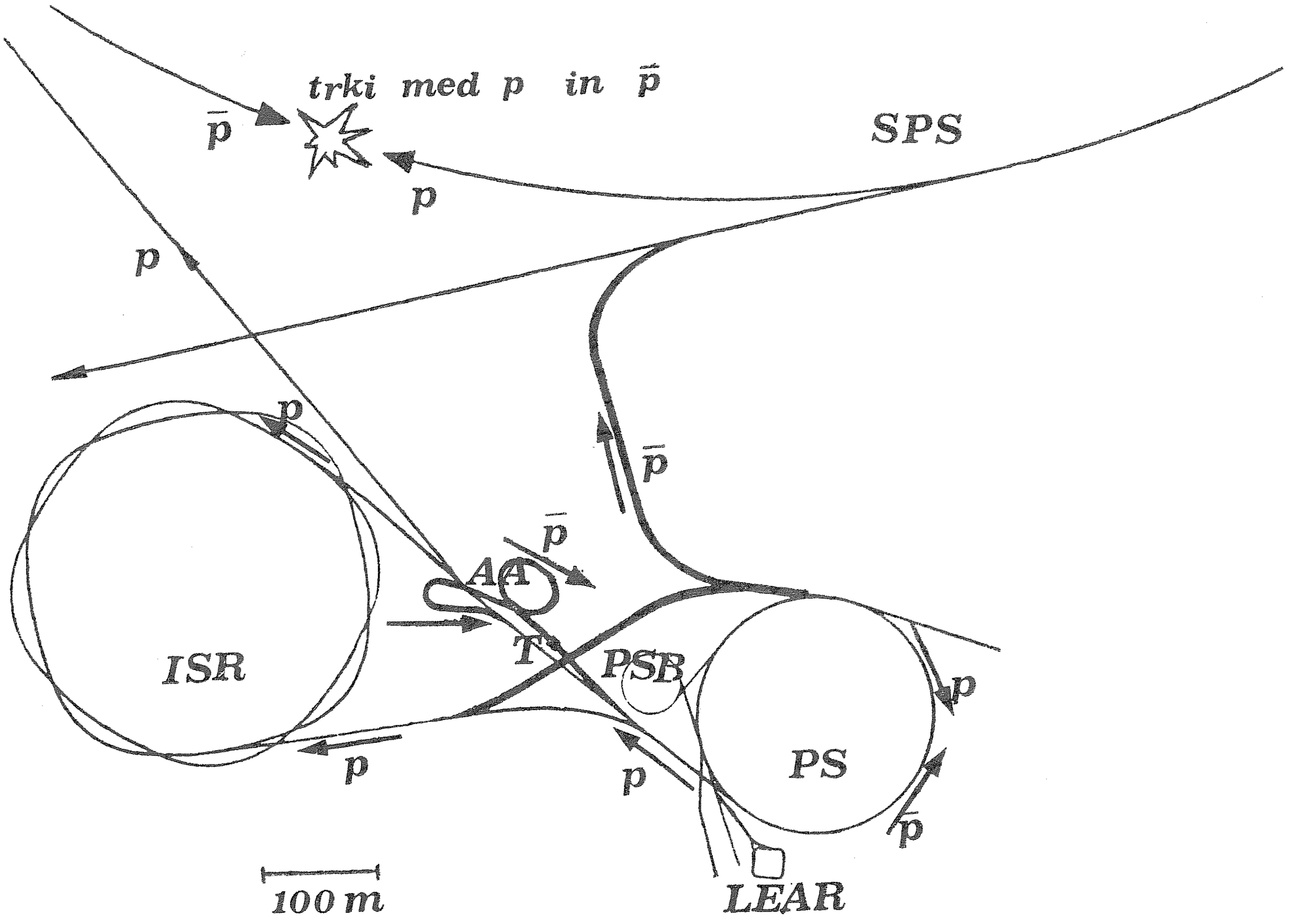
Nakopičevalnik za delce in njihove antidelce ima samo eno vakuumsko cev. Zaradi nasprotnega naboja in enake mase krožijo delci in antidelci v istem magnetnem polju v nasprotnih smereh drugi nad drugimi. Na dveh ali na štirih krajih tir delcev prekriža tir antidelcev in tam nastopijo reakcije; te opazujejo. Tak je največji delujoči nakopičevalnik za elektrone in pozitrone PETRA v Hamburgu. V njem dosežejo elektroni in pozitroni kinetično energijo do 19 GeV, tako da je razpoložljiva energija 2 . 19 GeV = 38 GeV.

Proti koncu prejšnjega leta je začel v CERN delovati super protonski sinhrotron SPS kot *trkalnik* (collider) za protone in antiprotone [2]—[5]. V njem dosežejo protoni in antiprotoni kinetično energijo do 270 GeV, tako da je razpoložljiva energija 2 . 270 GeV = 540 GeV, kar je desetkrat več od največje prej dosežene vrednosti. Še posebej je vredno občudovanja, da so dosegli to samo s preureditvijo SPS, ne da bi zgradili nov nakopičevalnik.

SPS, ki je bil prvotno zgrajen kot protonski sinhrotron za 400 GeV, bo v prihodnje deloval izmenoma na oba načina: kot pospeševalnik za protone do 400 GeV in kot trkalnik za protone in antiprotone do razpoložljive energije 540 GeV. (Preurejajo tudi drugi veliki pospeševalnik — protonski sinhrotron za 400 GeV Fermilaba v Batavii v ZDA in načrtujejo za leto 1984 ali 1985 trkalnik z razpoložljivo energijo do 2000 GeV.)

Doseženi skok razpoložljive energije je tolikšen, da mu je treba posvetiti nekaj pozornosti. Predlog, da bi s prilagoditvijo protonskega sinhrotrona močno povečali razpoložljivo energijo, so dali leta 1976 C. Rubbia, P. McIntyre in D. Cline. Razmišljali so o možnosti, da bi z obstoječimi pospeševalniki ugotovili obstoj *vmesnega bozona*. To je delec, ki posreduje šibko interakcijo in za katerega napoveduje teorija, da nastopa nabit (W^+ in W^-) z lastno energijo okoli 80 GeV in nevtralen (Z^0) z lastno energijo okoli 90 GeV.

Načrt so osnovali na postopku, ki mu pravijo *hlajenje curka*. Pri tem ni mišljeno navadno hlajenje, pri katerem z zniževanjem temperature zmanjšujemo povprečno kinetično energijo molekul, na primer v plinu. S hlajenjem curka dosežejo, da se gibljejo nabiti delci v curku kolikor mogoče v eni smeri, čeprav so se na začetku gibali v dokaj različnih smereh. Pri tem torej zmanjšajo na najmanjšo mogočo mero komponento gibalne količine delcev



Sl. 1. Razporeditev naprav v Evropskem centru za jedrske raziskave CERN v Ženevi: PS stari protonski sinhrotron za 26 GeV, PSB pospeševalnik, ki daje protone za vbrizgavanje v PS, T tarča, v kateri rodijo protoni antiprotone, AA zbiralnik antiprotonov, ISR sekajoča se nakopičevalna obroča, LEAR nizkoenergijski antiprotonski obroč, SPS super protonski sinhrotron kot trkalnik. Zvezda kaže mesto, na katerem pride do trkov in reakcij, debelejše črte pa novozgrajene transportne predore [4]

prečno na os curka. Leta 1966 je sovjetski fizik G. Budker predlagal hlajenje curka antiprotonov, ki izstopajo po nastanku iz tarče v vseh mogočih smereh, *s curkom elektronov*. Oba curka, od katerih je elektronskega zelo lahko voditi, potekata drug ob drugem in delci v njiju imajo v smeri osi curkov kolikor mogoče enako hitrost. Ob trkih prevzemajo elektroni od antiprotonov gibalno količino v prečni smeri, tako da imajo naposled antiprotoni le še gibalno količino v smeri osi curka. Hlajenje antiprotonskega curka z elektronskim curkom so uspešno izvedli v Novosibirsku leta 1975.

Tudi v CERN in Fermilabu so se ukvarjali s tem vprašanjem. Že leta 1968 je v CERN S. van der Meer predlagal *stohastično hlajenje*, da bi izboljšal zmogljivost ISR. V določenem preseku vakuumske cevi naj bi z elektrodami otipali električno polje delcev v curku in s tem določili lego težišča naboja. Ko bi prišel curek po enem obhodu zopet v ta presek, pa bi z ustreznim električnim poljem elektrod poskrbeli za dodatno električno silo, ki bi delovala proti osi. Z večmilijonkratnim ponavljanjem postopka bi dosegli, da bi se težišče curka gibalo po predpisani osi. Pri tem bi se manjšina delcev izgubila iz curka, ker pač zaznavajo le lego težišča naboja in ima električna sila na delce v curku samo v povprečju pravo smer. Hlajenje curka so preskusili na ISR leta 1975. Izid je bil tako obetajoč, da so zgradili za poskusne namene poseben majhen nakopičevalnik ICE (Initial Cooling Experiment — začetni hladilni poskus, ice-led). Z njim so preskušali elektronsko in stohastično hlajenje antiprotonskega curka. Poskusi s stohastičnim hlajenjem so bili tako uspešni, da so leta 1978 sprejeli zamisel C. Rubbie in njegovih sodelavcev.

Ko uporabljajo SPS kot trkalnik, pospešijo najprej protone v starem protonskem sinhrotronu PS do kinetične energije 26 GeV. Nato jih vodijo na kovinsko tarčo, v kateri nastajajo pari antiproton-proton (sl. 1). V povprečju samo vsak petstotisoči proton rodi par antiproton-proton. Od nastalih antiprotonov izberejo širok curek tistih s kinetično energijo okoli 3,5 GeV — le-teh je namreč največ — in jih vodijo v AA (Antiproton Accumulator — zbiralnik antiprotonov), nekakšen majhen nakopičevalnik s premerom 50 m. AA ima nenavadno široko vakuumsko cev s premerom 70 cm in z zelo dobrim vakuumom (10^{-10} mbar). V cevi stohastično hladijo curke antiprotonov in jih postopno speljejo v bližino osi. Po kakih 40 urah zberejo v AA kak bilijon antiprotonov, večino od njih (kakih 60 %) v bližini osi.

Te antiprotone izsrkajo, vodijo v posebne magnete, ki curku obrnejo smer, in vbrizgajo v PS, da jih pospeši do kinetične energije 26 GeV.* (V PS krožijo antiprotoni v nasprotni smeri kot protoni.) V 24 urah nadomestijo antiprotone v AA in postopek ponovijo. Antiprotone s kinetično energijo 26 GeV vbrizgajo v SPS v obliki šestih gruč s po 10^{11} antiprotoni (po načrtu; za zdaj je v gruči še stokrat manj antiprotonov). Vanj vbrizgajo tudi šest gruč protonov s tolikšno kinetično energijo. Oboje delce nato hkrati pospešijo do kinetične energije 270 GeV. Na dveh ravnih delih vakuumske cevi SPS se gruče antiprotonov in protonov križajo in tam pride do trkov. Ob križiščih

---

* Pri prejšnjih poskusih so uvajali protone in antiprotone v ISR. Pri enem izmed novih poskusov pa zavrejo v PS antiprotone na 0,3 GeV in jih vbrizgajo potem v majhen nakopičevalnik LEAR (Low Energy Antiproton Ring — nizkoenergijski antiprotonski obroč). Z njim mislijo delati poskuse na energijskem območju od 0,1 do 2 GeV.

sta — globoko pod zemljo — dve dvorani za poskuse, kjer opazujejo in merijo delce, ki nastanejo pri reakcijah.

Splošna slabost nakopičevalnikov je v tem, da so reakcije med delci v dveh curkih mnogo manj pogostne kot reakcije delcev v enem curku iz pospeševalnika z delci v gosti snovi tarče. Učinkovitost nakopičevalnika glede pogostosti reakcij podamo s *svetilnostjo*, to je z efektivnim številom reakcij v časovni enoti na ploščinsko enoto reakcijskega preseka. Po načrtu naj bi trkalnik dosegel svetilnost $10^{30}\ s^{-1}\ cm^{-2}$. Zdaj, ko ga šele preskušajo, je njegova svetilnost komaj $2 . 10^{25}\ s^{-1}\ cm^{-2}$. (Rubbia — kot vodja enega izmed poskusov — pravi napol v šali, da merijo med odmori, ki si jih privoščijo graditelji.) Pričakujejo, da se bo dalo sorazmerno hitro povečati svetilnost na $5 . 10^{28}\ s^{-1}\ cm^{-2}$. (Zares so konec leta 1981 dosegli že $5 . 10^{27}\ s^{-1}\ cm^{-2}$ [6].) Precej teže bo doseči $10^{29}\ s^{-1}\ cm^{-2}$, za kar imajo po načrtu skoraj še leto dni časa. Končna svetilnost pa je stvar daljne prihodnosti. Že pri svetilnosti $10^{29}\ s^{-1}\ cm^{-2}$ naj bi po predvidevanju nastalo kakih deset nabitih vmesnih bozonov W^+ in W^- in en do dva nevtralna vmesna bozona Z^0 na dan.

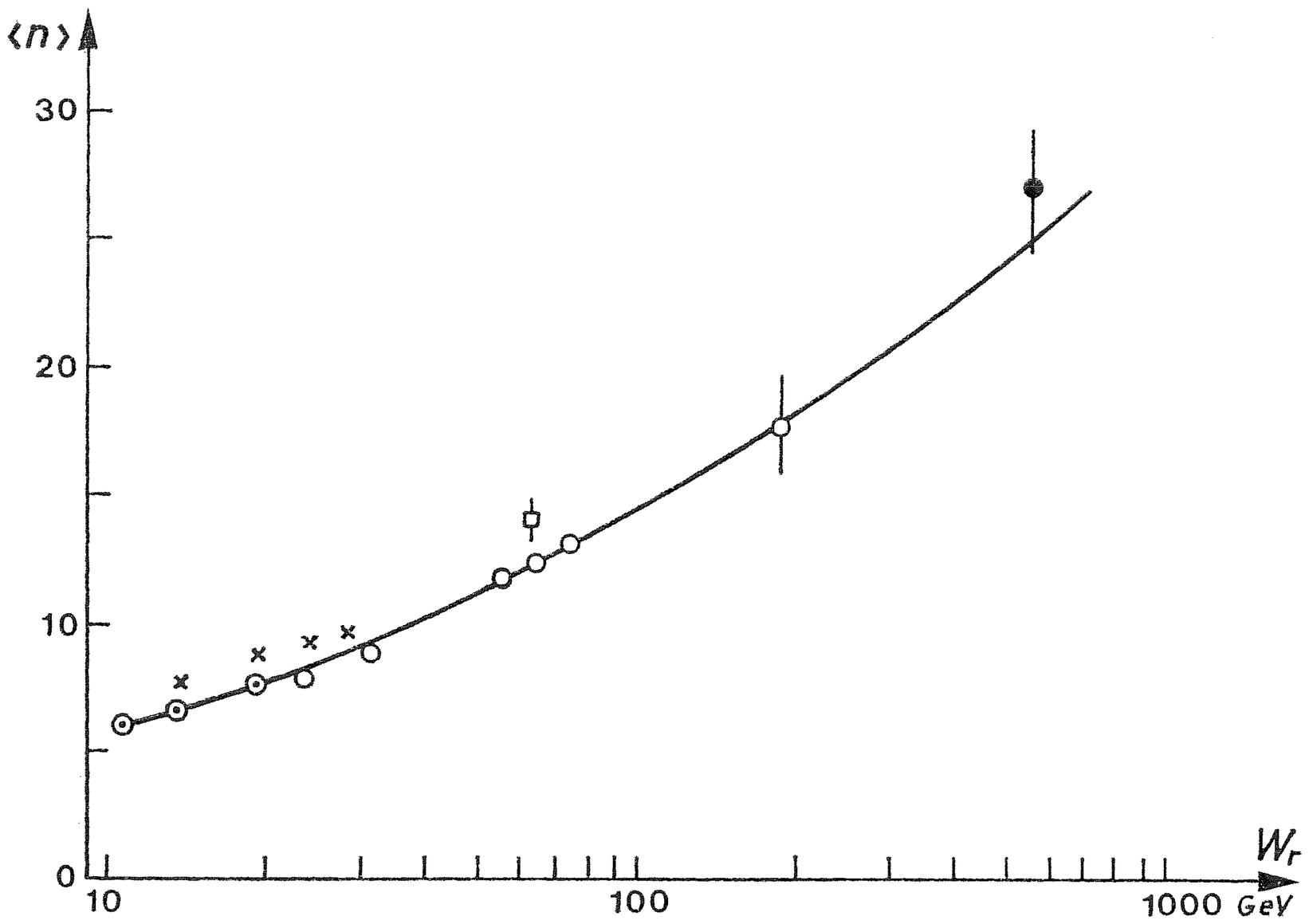
Eno izmed obeh podzemnih dvoran za poskuse zaseda velik merilnik delcev, ki nastanejo pri reakcijah med antiprotoni in protoni. Merilne naprave tehtajo skupaj precej več kot 2000 ton in pri poskusu dela okoli sto fizikov. Majhen del tega poskusa je namenjen tudi iskanju magnetnih monopolov. Vzporedno teče več široko zasnovanih poskusov v drugi dvorani. Pri enem izmed njih merijo energijo in smer delcev, ki nastanejo pri reakcijah antiprotonov s protoni. Pri drugem proučujejo prožno sipanje antiprotonov na protonih in merijo integralni sipalni presek. Pri tretjem poskusu uporabljajo dve po 6 m dolgi *pramenski celici** (streamer chamber), ki neposredno obdajata vakuumski cevi v križišču in v katerih fotografirajo sledi nastalih delcev (slika na naslovni strani, [4], sl. 2).

Glavni cilj sedanjih poskusov je odkritje vmesnega bozona in čim natančnejše merjenje lastne energije in razpadnega časa. Prva je pomemben podatek za enotno teorijo elektromagnetne in šibke interakcije, na osnovi drugega pa bo mogoče sklepati na število generacij leptonov in kvarkov.

Poleg tega naj bi dali poskusi še odgovor na vprašanje, ali pride pri zelo veliki razpoložljivi energiji do nenavadnih pojavov, kakor morda namigujejo izkušnje z kozmičnimi delci. Doslej so opazili kakih pet reakcij kozmičnega delca z zelo veliko energijo, pri katerih je nastalo veliko nabitih delcev,

---

* Celici je dal ime pramenski tok (pramensko razelektrenje, »Elijev ogenj«), ki steče po plinu pri dovolj veliki jakosti električnega polja. Razvili so jo iz iskrne celice pri delu ob ISR [7]. Celica ima tri vzporedne elektrode. Zunanji sta ozemljeni in povezani ob strani z aluminijevo pločevino. Na srednjo pa priključijo posebej izoblikovan kratkotrajen visokonapetostni sunek, v skrajnem primeru do 600 kV. Ozemljena in srednja elektroda na strani fotografske kamere sta prozorni, narejeni iz mreže 0,13 mm debelih žičk v razmiku 1,2 mm. Občutljivo prostornino celice omejujejo 3 cm debele polivinilaste plošče. V notranjosti pa so po 2 cm debele šipe iz svinčevega stekla, v katerih fotoni rodijo nabite delce, da dajo vidne sledi. V celici je mešanica 70 % neona in 30 % helija z dodatkom izobutana, ki zniža potrebno napetost za jasne sledi, in žveplovega heksafluorida, da postane celica hitrejša. V skrajnem primeru je mogočih na sekundo do 200 000 posnetkov. Sledi fotografirajo preko ojačevalnikov slike. Celica ni v magnetnem polju in z njo ni mogoče meriti gibalne količine nastalih nabitih delcev. Prednost obeh celic, ki spodaj in zgoraj obdajata križišče, pa je v tem, da zajameta skoraj polni prostorski kot



Sl. 2. Povprečno število nastalih nabitih delcev pri reakciji med antiprotonom in protonom v odvisnosti od razpoložljive energije. Zadnjo točko so dobili z obdelavo fotografij reakcij v pramenski celici. Za ta primer ne kaže, da bi pri razpoložljivi energiji 540 GeV prišlo do kakih nenavadnih pojavov [5]

a nenavadno malo nevtralnih pionov. Zdi se, da je za te reakcije, ki jim pravijo tudi »dogodki Centauro«, značilna razpoložljiva energija okoli 1000 GeV. To je sicer več, kot zmore trkalnik, vendar zaradi redkosti kozmičnih delcev z zelo veliko kinetično energijo* podatki niso zanesljivi. Zato bi utegnili opaziti kaj nenavadnega že pri razpoložljivi energiji 540 GeV. Ni mogoče prerokovati, kaj bodo pokazali poskusi. Zagotovo pa se obetajo zanimive ugotovitve, še preden bo izšla ta številka *Obzornika.*

Janez Strnad

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Fizika,* III. del, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1981, str. 61.
[2] R. Walgate, *High energy physics grows tenfold,* Nature **294** (1981) 107.
[3] *Antiprotons in the big machine,* CERN Courier **21** (1981) 289.
[4] The Staff of the CERN Proton-Antiproton Project, *First Proton-Antiproton collisions in the CERN collider, Physics Letters* **107 B** (1981) 306.
[5] K. Alpgård et al., *First results on complete events from p — p collisions at the CM energy of 540 GeV; Charged particle multiplicities at the CERN SPS collider;* G. Arnison et al., *Some observations on the first events seen at the CERN proton-antiproton collider,* Physics Letters **107 B** (1981), 310, 315, 320 (1981).
[6] *First results at 540 GeV total energy,* CERN Courier **22** (1982) 3.
[7] K. Eggert et al., *A streamer-chamber detector at the CERN Intersecting storage rings,* Nucl. Instr. and Meth. **126** (1975) 477.

---

* Proton iz kozmičnih delcev mora imeti kinetično energijo 157 000 GeV, da je pri trku z mirujočim protonom razpoložljiva energija 540 GeV.

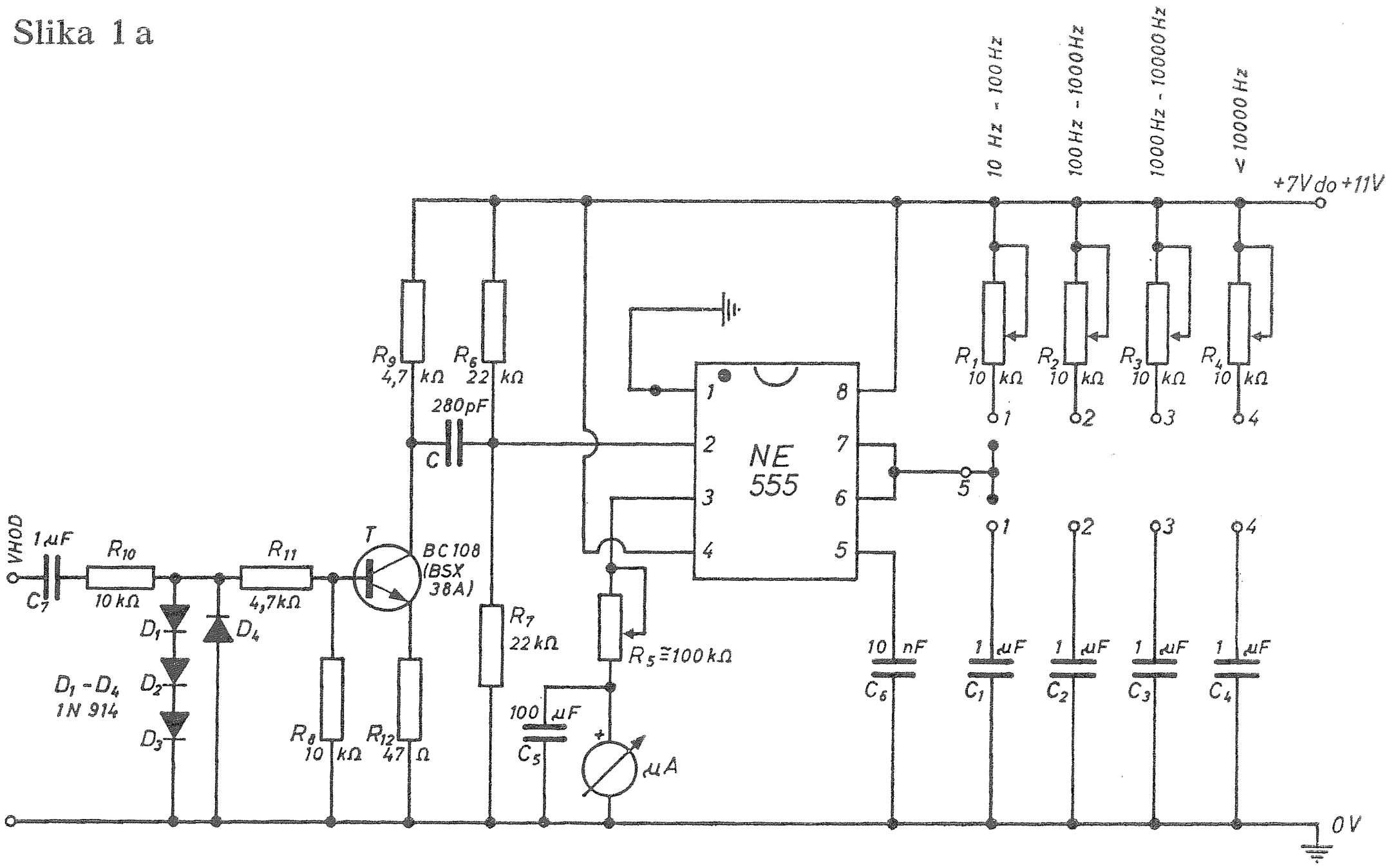
MERILNIK FREKVENCE ELEKTRIČNIH SIGNALOV

Pri pouku fizike in pri delu v fizikalnih krožkih moramo večkrat izmeriti frekvenco kakega električnega signala. Preprost in cenen, a za delo v šoli dovolj natančen merilnik frekvence periodičnih električnih signalov brez težav naredimo sami. S tem merilnikom lahko merimo frekvenco električnih signalov z amplitudo od 2 V do nekaj deset voltov v intervalu od kakih 10 Hz do kakih 50 kHz ali še nekaj več. Celotni interval je razdeljen na štiri območja. Za odčitavanje frekvence uporabimo mikroampermeter na vrtljivo tuljavico. Skala merilnika je linearna.

Jedro merilnika (sl. 1 a) je popularno integrirano vezje NE 555, ki je vezano kot monostabilni multivibrator. Kadar pripeljemo na vhod monostabilnega multivibratorja kratek strm prožilni pulz, dobimo na izhodu pulz pravokotne oblike, medtem ko je sicer napetost na izhodu 0 V. Tako je povprečna izhodna napetost sorazmerna s frekvenco merjenega signala.

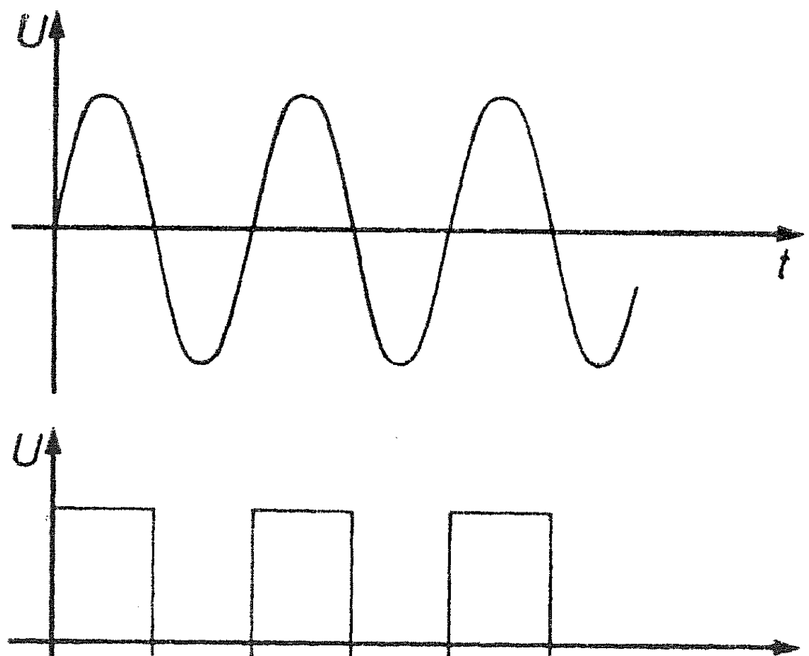
Periodični vhodni signal, ki mu želimo izmeriti frekvenco, najprej močno ojačimo s tranzistorjem T. Na kolektorju dobimo signal pravokotne oblike, ki ga z upornikoma R_6 in R_7 ter kondenzatorjem C diferenciramo. Tako dobimo prožilne pulze, ki jih vodimo na vhod multivibratorja, in na njegovem izhodu dobimu pulze pravokotne oblike s konstantno amplitudo in konstantno dolžino (sl. 1 b). Ker je pri nizki frekvenci razmik med dvema zaporednima pulzoma na izhodu velik, je povprečna napetost tako majhna, da jo težko merimo. Zato s pari kondenzatorjev in upornikov C_1-R_1, C_2-R_2, C_3-R_3, C_4-R_4 nastavimo dolžino izhodnih impulzov za vsako območje posebej na primerno vrednost tako, da povprečno napetost vedno lahko izmerimo. Za nizke frekvence merjenega signala so pulzi dolgi, za visoke frekvence pa kratki. Dolžina prožilnih pulzov mora biti vedno mnogo krajša od dolžine

Slika 1 a

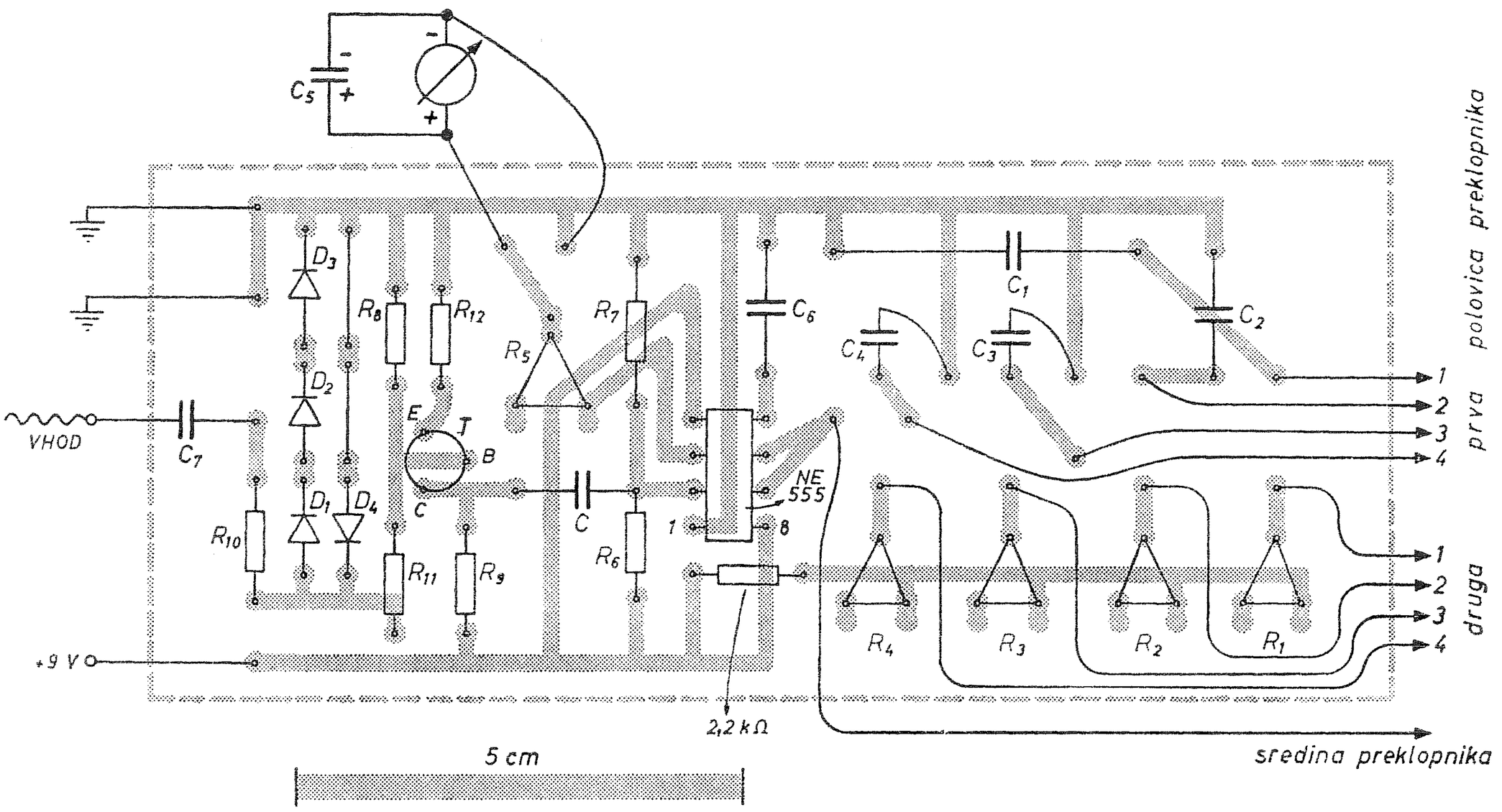


izhodnih pravokotnih pulzov. Povprečna napetost na izhodu je sorazmerna s frekvenco merjenega signala, ustrezni povprečni tok do 100 μA pa merimo z mikroampermetrom. Pare upornikov in kondenzatorjev, ki določajo dolžino izhodnih pulzov, izbiramo z dvojnim preklopnikom s štirimi položaji. Pri

Slika 1 b

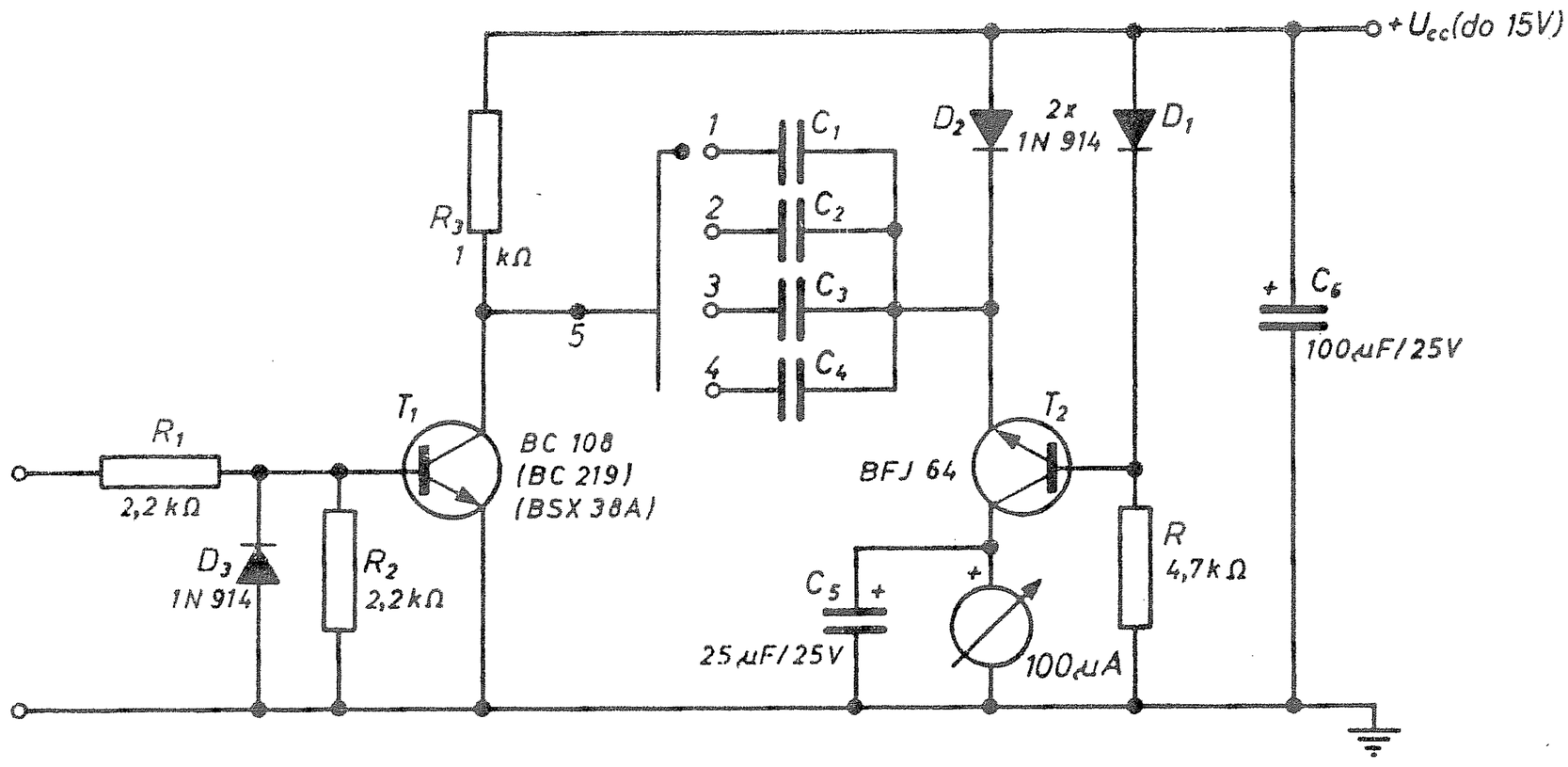


Sl. 1. Merilnik frekvence električnih signalov z integriranim vezjem NE 555. Pri vklopljenem paru C_1-R_1 merimo frekvenco od 10 Hz do 100 Hz, pri paru C_2-R_2 od 100 Hz do 1000 Hz, pri paru C_3-R_3 od 1 kHz do 10 kHz in pri paru C_4-R_4 od 10 kHz do 50 kHz ali nekaj več (a), oblika signala v posameznih točkah vezja (b)



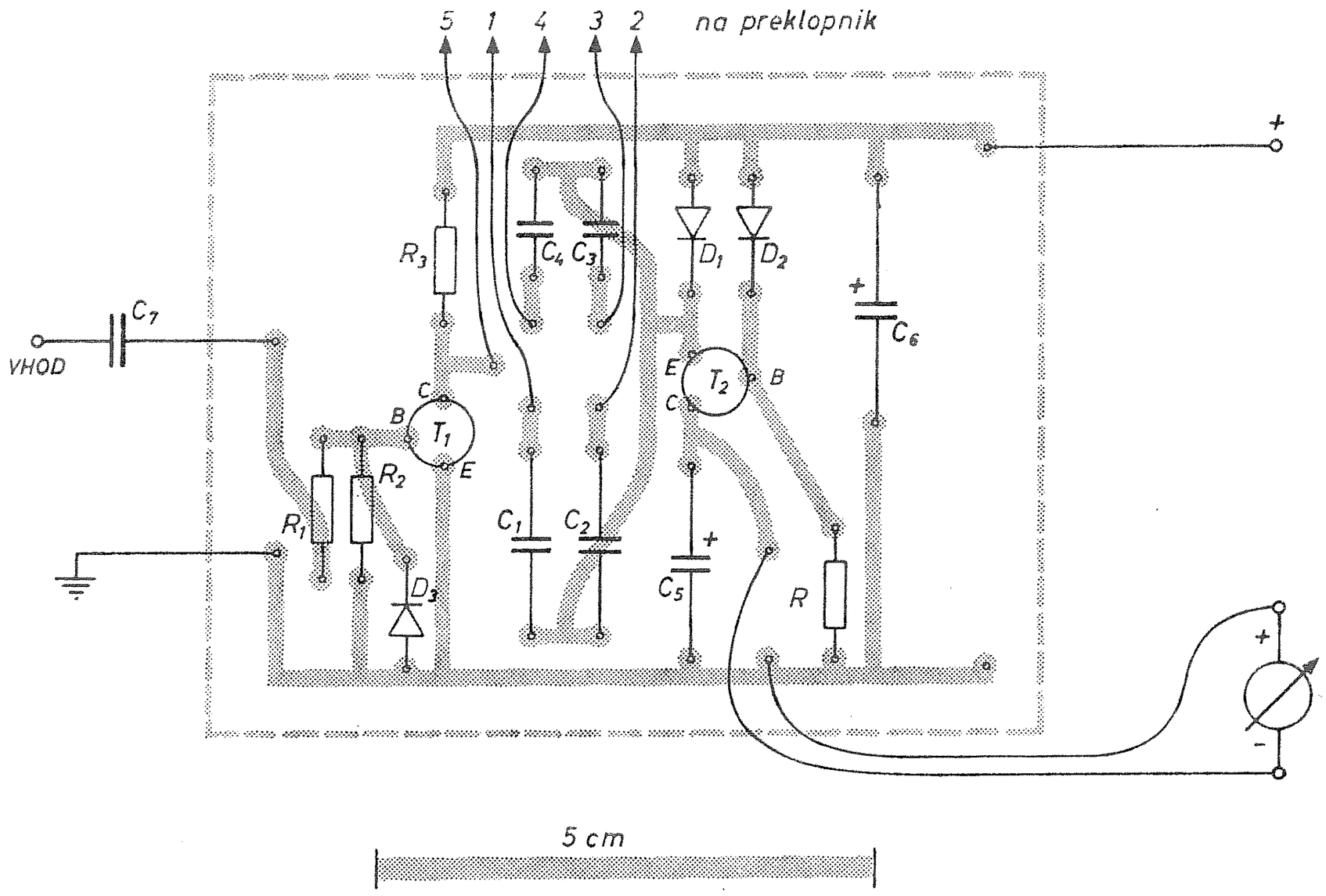
Sl. 2. Ploščica tiskanega vezja (pogled s strani vezja) in razpored elementov

natančno izbranih vrednostih kapacitete kondenzatorjev in upora upornikov se območja ravno stikajo. Najbolje je vzeti za R_1-R_4 spremenljive upornike in z njimi nastaviti odklon merilnika za vsako območje posebej. Za napajanje zadostuje 9-voltna baterija ali še bolje majhen stabilizirani usmernik z izhodno napetostjo od kakih 7 V do kakih 12 V.



Sl. 3. Merilnik frekvence s tranzistorjem. Pri vklopljenem kondenzatorju C_1 merimo frekvence od 10 Hz do 100 Hz, pri C_2 od 100 Hz do 1000 Hz, pri C_3 od 1 kHz do 10 kHz in pri C_4 od 10 kHz do skoraj 100 kHz

Elemente prispajkamo na tiskano vezje. Sl. 2 kaže ploščico tiskanega vezja z razporedom elementov. Merilnik moramo še umeriti. Poln odklon mikroampermetra naj na danem območju ustreza najvišji merjeni frekvenci. Pri kratko sklenjenem vhodu in vklopljenem najnižjem območju nastavimo spremenljivi predupornik R_5 (za instrument od 100 μA je R_5 približno 30 kΩ) tako, da instrument ravno še ne kaže nič. Nato pripeljemo na vhod signal z znano



Sl. 4. Ploščica tiskanega vezja (pogled s strani vezja) in razpored elementov

frekvenco, merilnik preklopimo na ustrezno območje in z ustreznim spremenljivim upornikom nastavimo instrument na pravo vrednost. Postopek ponovimo za vsako od preostalih območij. Če je treba, reguliramo odklon instrumenta še s predupornikom R_5. Če na območju za merjenje najvišjih frekvenc ne dobimo pravega odklona, je treba nekoliko zmanjšati kapaciteto kondenzatorja C, ki jo določimo s poskusom. Pri pazljivem umerjanju je napaka pri meritvi manjša kot 5 %.

Drugo zanimivo vezje (sl. 3) uporabljajo predvsem za štetje pogostosti pulzov, a ga lahko uporabimo tudi kot merilnik frekvence. Ko je tranzistor T_1 odprt, se polni vklopljeni kondenzator izmed C_1-C_4 preko tranzistorja T_1 in diode D_1 in sprejme naboj $e \approx CU_{cc}$. Ko je T_1 zaprt, pa se kondenzator prazni preko upornika R_3 in emitorja tranzistorja T_2, zato teče v kolektorskem krogu T_2 povprečni tok $I = e/t_0$. Ko priklopimo na vhod vezja nihajoč signal, se vklopljeni izmed kondenzatorjev C_1-C_4 izmenoma polni in prazni, povprečni kolektorski tok tranzistorja T_2 pa je sorazmeren s frekvenco merjenega signala. V tabeli na sl. 3 so podane kapacitete kondenzatorjev za posamezna merilna območja. Upor upornika R_3 je orientacijski in ga je najbolje določiti s poskusom. Pomembno je, da se vklopljeni kondenzator izmed C_1-C_4 popolnoma izprazni, medtem ko je T_1 zaprt. Zato mora biti časovna konstanta $C_i R_3 \leqq 1/\nu_m$, če je ν_m najvišja frekvenca, ki jo še merimo na danem območju. Merilnik natančno umerimo tako kot prej, pri čemer nastavimo odklon instrumenta s spremenljivim predupornikom. Na odklon instrumenta vpliva tudi napajalna napetost U_{cc}, ki je lahko med 9 V in 12 V. Tiskano vezje z razporedom elementov kaže sl. 4.

Janez Žitnik

UTRINEK

Vse o radioaktivnem razpadu

»Radioaktivni atomi razpadejo na dva načina: mogoče jih je izriniti iz njihovih notranjih helijevih atomov, ki so naelektreni pozitivno in iz katerih izhajajo žarki alfa. Ti pa lahko spet oddajajo še mnogo manjše delce, elektrone, ki so negativno naelektreni in oblikujejo žarke beta. Pri razpadanju snovi nastajajo poleg tega žarki gama, ki prebijejo vse trdne snovi razen debelih svinčenih plošč.«

...»Polovična vrednost časa za izžarevanje radija [je] komaj štiri dni«... (Domnevam, da gre za razpolovni čas radijeve emanacije — radona.)

Wilhelm Strube, *Pierre in Marie*. Prevedel Franc Šrimpf. Založba Obzorja, Maribor, 1977, str. 216.

Izbral *Dušan Modic*

ZAKAJ SPELJAVAJO AVTOMOBILI S PARKIRIŠČ?

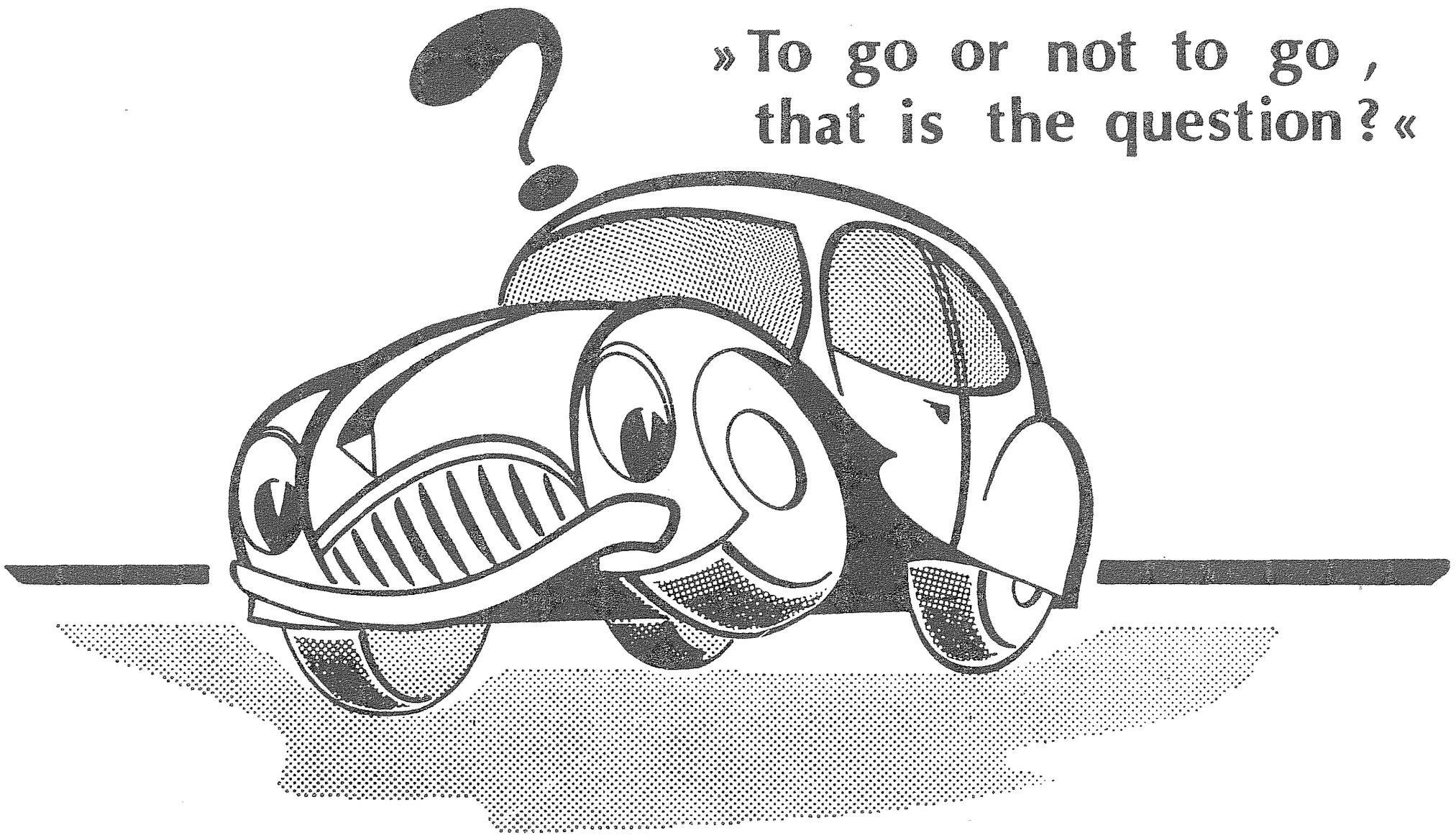
(Obzornik za matematiko in fiziko 27 (1980) 123)

Sholastična disputacija med mefistovsko razpoloženim učiteljem in nadobudnimi šolarji je dokaj zabavna. K pisanju teh vrstic pa me je navedel predzadnji stavek: »Odlično oceno za učiteljevanje pa bo dobil tudi učitelj, ki bo najbolje analiziral, katere napake so v zapisu in kako bi se jim pri pouku ognil.« Po vsem tem, kako je stvar zastavljena, nekoliko dvomim o možnosti objektivne ocene. Vprašanje »Zakaj avto spelje, kaj je pravi vzrok speljevanja«, je nekoliko nesmiselno. Če smo napravili analizo vseh sil, ki delujejo pri gibanju avtomobila, najdemo matematično relacijo med konstruktivnimi parametri avtomobila, karakteristiko motorja in podlage ter med gibalnimi parametri (pod pogojem, da so enačbe rešljive). To je največ, kar zanima fizika ali tehnika; vse drugo je filozofija, torej privatna stvar.

Toda potek in delovanje sil sta pri avtomobilu v resnici preveč zapletena, da bi lahko napravili njuno analizo na nekaj straneh. Tako npr. ne moremo navpičnih sil preprosto »kompenzirati«, saj so soudeležene pri navorih, ki nastopajo v enačbah gibanja. Zato si je priporočljivo zamisliti poenostavljene modele, katerih matematična analiza je jasna in pregledna.

Tak model je npr. kako strelno orožje (puška, top, lok) na primerni podlagi (rama oz. roke strelca, lafeta, zemlja) ali telovadec med vajami.

Učiteljeva izjava, da je »motor del avtomobila, torej njegova sila na kolesa notranja sila« pa izzove naslednjo pripombo. Prvič je to, ali je kaka sila notranja ali ne, odvisno od tega, kaj štejemo k sistemu. Če opazujemo dovolj velik sistem (npr. vesolje), so vse sile notranje. Za naše potrebe je dovolj, če štejemo k sistemu poleg avta le še podlago (zemljo); težišče tega sistema je popolnoma neodvisno od delovanja motorja. Če ni trenja med podlago in kolesi, ne deluje na avto sam nobena sila z vodoravno komponento in ga delovanje motorja ne more premakniti. Če pa imamo trenje, lahko deluje na avto sila, ki ga poganja. To ni sila motorja na kolesa, temveč sila podlage na kolesa, ki je po zakonu o vzajemnem učinku nasprotno enaka sili koles na podlago. Moje mišice so tudi del mojega telesa, toda sila podlage na roke ali noge, ki nastopi zaradi delovanja mišic, je zunanja sila.



Vpletanje trenja in lepljenja je nepotrebno, saj gre tudi brez trenja, npr. pri zobati železnici, letalu, ladji idr.

Pokojni Newton je moral požreti marsikateri očitek na račun svojega absolutnega prostora. Prostor si je pač predstavljal kot nekaj absolutnega, tako je z njim računal in to naglas povedal. Današnji fiziki ne delajo več zadnje Newtonove napake. Toda nekateri od njih imajo prostor kljub vsemu za nekaj absolutnega. Če namreč trde, da je trenje vedno sila, ki gibanje samo zavira — ne pa tudi pospešuje, imajo gibanje in s tem tudi prostor za nekaj absolutnega.

Ker je gibanje torej relativno in ga lahko opišemo in razumemo različno (v različnih koordinatnih sistemih), je nemogoče, da bi bila neka sila v vseh pogledih (v vseh koordinatnih sistemih) zaviralna. Trenje med kolesom in podlago preprečuje gibanje kolesa glede na podlago, omogoča in povzroča pa gibanje (po domače: vožnjo) avtomobila. Kako se to dogaja v podrobnostih, nam pokaže analiza sil, v katero pa se tu ne moremo spuščati.

Lahko pa napravimo v mislih nekaj, kar počno včasih šoferji: pod spodrsavajoče kolo podložimo desko ali kaj podobnega.

Tedaj je mogoče, da kolo desko izvrže zaradi sile trenja med desko in kolesom, če je sila dovolj velika. Če pa je sila trenja med desko in podlago večja, prepreči gibanje deske, ne glede na to, ali avto spelje ali ne. Lahko pa pritegnemo zavore ter desko vlečemo po tleh, z njo vred pa tudi avtomobil. Očitno je, da bo »zaviralna sila trenje« med desko in kolesom povzročala gibanje avtomobila. Če pa popustimo zavore ter desko dovolj hitro potegnemo, bo avtomobil ostal na mestu, ker bo »zaviralna sila vztrajnost« močnejša od »zaviralne sile trenja«.

Lahko pa si mislimo namesto deske železniški vagon in zaradi varnosti avtomobil še dobro privežemo ter kolesa zagozdimo. Tako smo dobili dodatno silo trenja, torej dodatne »zaviralne sile«. Toda po zaslugi teh »zaviralnih sil« bo avtomobil varno opravil svoje gibanje do namenske postaje. Upam, da je stvar dovolj jasna in da lahko neham.

Še prej pa bi, čeprav nisem učitelj, dal univerzalen odgovor na vprašanje, kako se ognemo napakam pri pouku fizike: tako, da jih ne delamo.

Jurij Vdovič

SPREMINJANJE RADIJA KEFEIDE

Pri pojasnjevanju značilnosti kefeid se pojavi več vprašanj. Eno takih je vprašanje: kolikšna je sprememba radija kefeide pri spremembi sija.

Na vprašanje lahko odgovorimo takole: Vzemimo, da zvezda seva kot črno telo po Stefanovem zakonu. Gostota svetlobnega toka, ki prihaja od zvezde na Zemljo, je $j \propto R^2 T^4$. Tu je R radij zvezde, T pa absolutna temperatura njene fotosfere. Sledi $dj/j = 2dR/R + 4dT/T$. Ker velja še $j \propto 10^{-0,4m}$, če pomeni m magnitudo zvezde, je $dj/j = -0{,}4 \ln 10 \,.\, dm$ [1].

Relativna sprememba povprečnega radija kefeide je tedaj $dR/R = |\, 0{,}2 \ln 10 \,.\, .\, dm + 2dT/T \,|$. Če je $dm > 0$, je $dT < 0$ in obratno.

Za δ Kefeja je amplituda nihanja sija $dm = 0{,}8$ magnitude, fotosferska temperatura zvezde pa niha približno med 6300 K (ob maksimalnem siju, ko kaže kefeida značilnost zvezde spektralnega tipa F 5) in 5400 K (ob minimalnem siju; G 2) [2]. Sledi, da je $dR/R = 6\,\%$, kar zares približno ustreza velikosti spreminjanja radija pri kefeidah tipa δ Kefeja [3], [4].

Povprečni radij δ Kefeja je okoli 45 radijev Sonca in se torej spreminja za okoli 2,5 radija Sonca.

Marijan Prosén

LITERATURA

[1] M. Prosén, *Uporaba Planckovega zakona v astronomski fotometriji,* Obzornik za mat. in fiz. **28** (1981), 51.

[2] K. Y. Allen, *Astrofizičeskie veličiny,* Moskva, Mir 1977, 291.

[3] D. Ja. Martynov, *Kurs obščej astrofiziki,* Moskva, Nauka 1979, 261.

[4] C. Hoffmeister, *Veränderliche Sterne,* Leipzig, Barth 1970, 58.

DOMAČE VESTI

XIV. ZVEZNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE ISTAM 1981

4. april je praznik študentov beograjske Univerze. V njegovo počastitev so študentje matematike Prirodoslovno-matematične fakultete PMF v Beogradu tudi letos povabili svoje kolege z jugoslovanskih in nekaterih tujih univerz na zvezno in mednarodno tekmovanje študentov matematike ISTAM. Naš Oddelek za matematiko Fakultete FNT v Ljubljani so zastopali:

Mihael Perman iz 2. letnika

Robert Bončina iz 3. letnika in

John S. Taylor iz 4. letnika.

Od skupno 11 ekip je bilo 5 tujih, po ena iz Krakowa (Poljska), Leipziga (NDR) in Szegeda (Madžarska) ter dve iz Prage (ČSSR).

Naše bivanje v Beogradu je bilo zelo prijetno. V petek, 3. aprila, je bila na PMF po položitvi venca v spomin žrtvam predvojne kaznilnice Glavnjača otvoritvena prireditev. Na njej je poleg umetnikov — študentov sodeloval priznani zbor KUD Žikica Jovanović-Španac. V soboto dopoldne je bilo tekmovanje, zvečer pa smo bili vsi povabljeni v center Sava na osrednjo prireditev v počastitev praznika. To je bil nepozaben večer. Naslednji dan je bil organiziran izlet na Avalo, zvečer pa se je tekmovanje končalo s podelitvijo nagrad in skupno večerjo.

Ekipno je zmagala ekipa Prage s 167 od možnih 300 točk, kar kaže na izredno težavnost nalog. Naša ekipa je dosegla 8. mesto. Izredno uspešen je bil naš John Taylor, ki je reševal naloge iz funkcionalne analize in numerične analize in s 73 od 100 možnih točk dosegel tretje mesto v konkurenci posameznikov. V skupini 1. in 2. letnik je bil najboljši Danko Jocić iz Beograda, v skupini 3. in 4. letnik pa P. Pyrih iz Prage.

Poglejmo še probleme, ki so jih reševali tekmovalci. Naj pripomnim, da so bile nekatere naloge slabo formulirane, tako da so kljub mojemu trudu verjetno nekatere od pomanjkljivosti še vedno ostale. Bralcem se zanje opravičujem.

Naloge za 1. in 2. letnik

1. Naj bo

$$a_n = 1 - \frac{n-1}{1!} + \frac{(n-2)^2}{2!} - \frac{(n-3)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Dokaži, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Naj bo f zvezna funkcija na intervalu (a, b), za katero je

$$\lim_{h\to 0}\left(h^{-3}\int_0^h [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\,du\right) = 0$$

za vsak $x \in (a, b)$. Dokaži, da je f linearna funkcija.

3. Naj bo K polje (= komutativen obseg), $K[x]$ kolobar polinomov v x s koeficienti iz K in

$$P_n(x) = x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1, n \in N$$

Poišči množico vseh tistih naravnih števil n, za katera polinom P_1 deli P_n.

4. Označimo z M_N vektorski prostor vseh magičnih kvadratov dimenzije N nad poljem K. Določi dimenzijo M_N in poišči vsaj eno bazo tega prostora.

(Opomba pisca: magični kvadrat imenujemo matriko, v kateri so vsote elementov v posameznih vrsticah, v posameznih stolpcih in na obeh glavnih diagonalah med seboj enake).

Naloge za 3. in 4. letnik

Funkcionalna analiza

1. Naj bosta $X \neq \{0\}$ in Y normirana linearna prostora nad obsegom realnih ali kompleksnih števil. Dokaži: če je prostor $B(X, Y)$ vseh omejenih linearnih preslikav iz X v Y poln, je tudi Y poln.

2. Naj bo A: $C(X) \to C(Y)$ izometrični izomorfizem realnih Banachovih prostorov, pri čemer sta X in Y kompaktna metrična prostora. Dokaži, da obstaja homeomorfizem φ: $Y \to X$ in zvezna funkcija $a(y)$ z vrednostma ± 1 na Y, tako da ima A reprezentacijo

$$(Af)(y) = a(y) \cdot f(\varphi(y)) \text{ za vsak } y \in Y, \quad f \in C(X).$$

Topologija

1. Ali je vsak lokalno kompakten T_1-prostor, katerega komponente povezanosti so točke, 0-dimenzionalen?

2. Naj bo X topološki prostor, Y njegova kompaktifikacija z eno točko in Z njegova kompaktifikacija z dvema točkama. Poišči primer prostora X, za katerega sta Y in Z homeomorfna in je Y Hausdorffov. Ali ima tako izbran prostor X za vsako naravno število $n > 2$ kompaktifikacijo z n točkami, homeomorfno prostoru Y?

Algebra

1. Grupa G je kvazikomutativna, če zadošča aksiomu

$$(\forall x, y)\,(xy = yx \quad \text{ali} \quad x^2 = y^2)$$

(i) Ali obstaja kvazikomutativna grupa, ki ni komutativna?

(ii) Naj bo Γ kakšna množica identitet, ki veljajo v kakšnih grupah (primer: identiteta $xy = yx$ velja natanko v Abelovih grupah). Priredimo množici Γ razred K_Γ vseh kvazikomutativnih grup, v katerih veljajo vse identitete iz Γ. Ali obstaja taka družina Γ, da vsebuje razred K_Γ nekomutativno grupo?

2. Naj bo K razred vseh komutativnih kolobarjev z enoto, v katerih velja aksiom

$$(\forall x, y)\,(x = y \Leftrightarrow (1 + x + xy)(1 + y + yx) = 1)$$

Dokaži ali ovrzi trditev: razred K je zaprt za homomorfizme kolobarjev (homomorfna slika kolobarja iz K je spet v K).

Realna analiza

1. Naj bo f realna zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, ki ima končen odvod $f'(x)$ v vseh razen morda številno mnogo točkah x iz (a, b) in je $f' \in L_1([a, b])$. Dokaži, da je f absolutno zvezna na $[a, b]$.

2. Naj bo $X = [0, 1)$. Za vsako naravno število n označimo z M_n družino vseh podmnožic $A \subset X$, ki jih lahko predstavimo v obliki

$$A = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} (B + k \cdot 2^{-n})$$

kjer je B neka Lebesguovo merljiva podmnožica intervala $[0,2^{-n})$. Dokaži, da je vsaka družina M_n σ-algebra in $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ Označimo

$$M_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$$

Dokaži: če je $A \in M_0$, je njena Lebesguova mera bodisi 0 bodisi 1.

Kompleksna analiza

1. Naj bo $f(z)$ regularna analitična funkcija na zaprtem disku $\{z \in \mathbf{C},\ |z-a| \leqq r\}$.
a) Dokaži

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u(t) \,.\, e^{-it}\, dt$$

kjer je

$$u(t) = \operatorname{Re} f(a + re^{it}), \quad t \in [0, 2\pi]$$

b) Dokaži, da iz $f(a) = 1$ in $u(t) \geqq 0$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ sledi

$$|f'(a)| < \frac{2}{r}$$

2. Dana je funkcija $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. Označimo z $\mathcal{L}$ družino vseh krivulj, ki ležijo v enotnem disku $\{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$ in jih funkcija $f(f(z))$ preslika v krožnico $\{w \in \mathbf{C},\ |w| = 1/e\}$.
Dokaži, da vsota dolžin vseh krivulj iz $\mathcal{L}$ ni končna.

Numerična analiza

1. Označimo z $A([0,1]; C)$ množico vseh na $[0,1]$ absolutno zveznih funkcij f, za katere je

$$\int_0^1 |f'(x)|\, dx \leqq C \quad (C > 0)$$

Ali obstaja kvadraturna formula

$$S_N(f) = \sum_{j=1}^{N} D_j \,.\, f(x_j) \quad (D_j \in \mathbf{R},\ 0 \leqq x_1 < \ldots < x_N \leqq 1)$$

za katero je

$$\sup\left\{\left| \int_0^1 f(x)\, dx - S_N(f) \right|;\quad f \in A([0,1]; C)\right\} = \frac{C}{2N}$$

2. V linearnem sistemu enačb $Ax = f$ je matrika A velikosti $n \times n$ enaka vsoti $A_1 + A_2$ pozitivno definitnih matrik A_1 in A_2. Za aproksimativno reševanje sistema je predlagana naslednja iterativna metoda:

$$x^{(k+\frac{1}{2})} = x^{(k)} - \tau \,.\, (A_1(x^{(k+\frac{1}{2})} + x^{(k)}) - 2f_1)$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k+\frac{1}{2})} - \tau \,.\, (A_2(x^{(k+1)} + x^{(k+\frac{1}{2})}) - 2f_2)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad f_1 + f_2 = f, \quad \tau > 0$$

Dokaži, da zaporedje $\frac{1}{2}(x^{(k+\frac{1}{2})} + x^{(k)})$ konvergira k rešitvi sistema.

Diferencialne enačbe

1. Dana je Webrova diferencialna enačba

$$y'' - xy' - ay = 0 \quad (a = \text{konstanta},\ a \geqq 1)$$

Dokaži, da rešitev te enačbe, določena z začetnima pogojema $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, zadošča za $x \geqq 0$ neenakostma

$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \leqq y(x) \leqq \exp\left(\frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2}{24} + a\right)\right)$$

2. Dana je diferencialna enačba

$$\text{(E)} \quad ay'' - (x + ab + c) \,.\, y' + (b(x + c) + d) \,.\, y = 0, \quad a,\ b,\ c,\ d = \text{konst.}$$

Z zamenjavo spremenljivke jo spremeni v diferencialno enačbo, katere partikularni rešitvi lahko najdeš z razvojem v potenčno vrsto. Nato določi splošno rešitev enačbe (E).

Verjetnostni račun

1. Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka, slučajna spremenljivka Y pa enakomerno porazdeljena na intervalu $(0, X)$. Naj bo $Z = X - Y$. Dokaži, da sta Y in Z neodvisni natanko tedaj, ko ima X gostoto

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x \,.\, e^{-ax}, \text{ če je } x \geqq 0 \\ 0, \text{ če je } x < 0 \end{cases}$$

za neki $a \geqq 0$.

2. Naj bo $\{X_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \tfrac{1}{2}$$

Označimo

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ (n \in \mathbf{N}) \quad \text{in}$$

$$P(m, n) = P(S_{2j} = 0 \text{ za kakšen } j,\ m \leqq j \leqq m + n)$$

Izračunaj $P(m, n) + P(n, m)$ za $m \geqq 1$, $n \geqq 1$.

Programiranje

1. Pred nami je 12 enakih kroglic, oštevilčenih s števili od 1 do 12. Teže enajstih kroglic so enake, teža ene od kroglic pa je drugačna, ne vemo pa, ali je lažja ali težja. Napiši diagram poteka za postopek, ki s tremi tehtanji na tehtnici z dvema skodelicama ugotovi, katera od kroglic je različna od drugih in ali je lažja ali težja.

Datoteka na disku vsebuje 12 zapisov s težami posameznih kroglic. Na voljo ti je podprogram, ki simulira tehtnico z dvema skodelicama. Napiši program, ki bo rešil zastavljeno nalogo s tremi klici podprograma.

2. Napiši podprogram, ki uredi realna števila danega polja v nepadajoče zaporedje.

Dana so tri polja z n_1, n_2 in n_3 elementi. Združimo jih v skupno polje in ga z danim podprogramom uredimo nepadajoče. V tako urejenem polju naj bo *niz* vsaka maksimalna podmnožica zaporednih elementov, ki pripadajo istemu začetnemu polju. (Primer: če dobimo iz začetnih polj $(x_1, \ldots, x_5)$, (y_1, y_2) in (z_1, z_2, z_3) po ureditvi polje

$$(\underbrace{x_3, x_1}, \underbrace{y_1}, \underbrace{z_3, z_2}, \underbrace{x_2, x_5, x_4}, \underbrace{y_2})$$

vsebuje to polje 5 nizov.)

Napiši program, ki samo z uporabo danega podprograma prešteje število nizov.

France Forstnerič

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE TER DOKTORSKIH DISERTACIJ IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V LETU 1981*

Pedagoška akademija — Maribor

Matematika-fizika

229. Jelica ČEH
230. Marija JAGER
231. Marija KIDRIČ
232. Brigita KISELAK
233. Janko KOGELNIK
234. Stanislav KOVAČIČ
235. Mojca KRIVEC
236. Emil MUMEL
237. Marjanca OGRINC
238. Vojko ORGL
239. Danilo OZIMIČ
240. Cvetka POTOČAN
241. Zdenka PUNGARTNIK
242. Valerija RUPNIK
243. Janez SLAČEK
244. Marija SLUGA
245. Jožica SMOGAVEC
246. Jožica VERBER
247. Olga ZAKAL
248. Martina KOMAR-SLIVNIK

Tehnični pouk-fizika

220. Alenka ARLIČ
221. Nada BAČIČ
222. Branko BEZNEC
223. Bernard ČAKS
224. Olga DROBNIČ
225. Marijan FRANGEŽ
226. Franc GRIL
227. Branko HORVAT
228. Martin KNUPLEŽ
229. Anton KOTOLENKO
230. Anton KOVAČEC
231. Zdenka KRIŽANIČ
232. Danilo LESJAK
233. Bojan LUBAJ
234. Miran PODOJSTERŠEK
235. Peter RIŽNAR
236. Bojan RUSTJA
237. Tatjana ŠEGOVC
238. Brigita ŠLAUS
239. Franc TERBUC
240. Danilo ZAGERNIK
241. Erna ZONIK

---

* Seznam diplomantov iz leta 1980 je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. **28** (1981), 122—127.

Pedagoška akademija — Ljubljana

Matematika-fizika

569. Tea OSTERMAN-VERDIKON
570. Jožica SMRDELJ
571. Darja STARIČ
572. Anica ŠPILETIČ
573. Marija ZAVRL
574. Gretica VOLAŠ-PERHAJ
575. Nives VOLK
576. Zdenka KRČ
577. Marija KRISTANC-ZORE
578. Frančiški MRZEL-JANC
579. Zvonka MURKO-IVANIŠEVIČ
580. Ivanka TURSAN
581. Ida VIDIC
582. Tatjana MULH-KERN
583. Zdravka ADAMIČ
584. Anica ERČULJ-BREGAR
585. Dušica KLEMEN-SARDINŠEK
586. Cvetka KONJAR-GRUBELNIK
587. Tatjana NOVAK-POŽAR
588. Ana PRIMOŽIČ
589. Ivan PUŠAVEC
590. Noelija PAVLIČ
591. Frančiška RAJER
592. Gabrijela CIMPRIČ
593. Robert GAJŠEK
594. Darinka GORINŠEK-JAVERNIK
595. Janez GLUHODEDOV
596. Vincenc HRABAR
597. Ivan SKRINJAR
598. Helena MAVER
599. Mira VRTAČ
600. Janja BRIC
601. Cilka ROSULNIK
602. Ana SLEJKO
603. Branka SREDENŠEK

Fizika-tehnična vzgoja

604. Danijel BREZOVAR
605. Ivica PIRC-PERKO
606. Jožica KRIŽNIČ
607. Anton KAMIN
608. Bojan PAJK
609. Zorka REBEC-POČKAJ
610. Jože SUHADOLČAN
611. Gregor KAMPJUT

Matematika — pedagoška smer

345. Borislava NOVAK	Matematične osnove akustike
346. Marija RAVNAK	Realne funkcije
347. Nevenka TAVČAR	Afina geometrija
348. Martina PIRC	Odvod in integral
349. Julijana MLAKAR-BIZJAK	Nekatere lastnosti aritmetičnih zaporedij
350. Miran GORŠE	Racionalni štirikotniki
351. Dragomir BENKO	O številu rešitev kongruence
352. Andreja KONJAR	Linearne diferencialne enačbe v kompleksnem
353. Nives MIHELIČ	Hopfova lastnost končno generiranih modulov
354. Emilija FABJANČIČ	Binarne kvadratične forme

355.	Lidija GRIL	Konformno upodabljanje
356.	Franc NAGODE	J-sebi adjongirane matrike
357.	Alojz GRAHOR	Razstavljanje racionalnih polinomov
358.	Marija KRAUTHAKER	Polpravilni verižni ulomki
359.	Brega ŠTEBLAJ-RUDEL	Osnovni pojmi teorije grup
360.	Darja OSTRUH	Baireov izrek in njegova uporaba v elementarni analizi
361.	Romualda MEDVEŠČEK	Linearno programiranje
362.	Danica KOCJANČIČ	Decimalne številke in normalna števila
363.	Mitja TURK	Kombinatorna ravninska geometrija
364.	Urška PODGORŠEK	Hiperbolična trigonometrija
365.	Barbara ŠENICA	Dvakratne in dvojne vrste
366.	Metka SUHAČ	Paralelni premik in geodetične krivulje
367.	Darja ŽUŽEK	Fermatov problem za $n = 7$

Matematika — tehniška smer

227.	Janez CERAR	Arhiviranje nuklearno-medicinskih podatkov na računskem centru
228.	Sonja ŠINIGOJ-KOŠIR	Izbrana poglavja numerične analize. Matrični problem lastnih vrednosti. Aproksimacija
229.	Janez DOLENC	Realizacija metode simpleksov na osnovi trikotne dekompozicije
230.	Mitja ROGAČ	Teorija bifurkacij in nelinearni problemi lastnih vrednosti
231.	Janja ŽABJEK	Porazdelitve vrstilnih statistik
232.	Matjaž PRIJATELJ	Matematični modeli nevtronskih mrež
233.	Marjan URBANIJA	Vrtinčni osnosimetrični tok
234.	Stane RIJAVEC	Kolobarji s ciklično multiplikativno grupo enot
235.	Branko HELAK	Razvejeni procesi
236.	Saša MARKIČ	Množična strežba s prednostjo
237.	Ivan BIZJAK	Teorija najboljše aproksimacije
238.	Adrijana KOBAL-JUREN	Brouverjev izrek o negibni točki in sorodni topološki izrek
239.	Vojka ŠILC	Lakunarne Fourierove vrste
240.	Marko BONAČ	Aproksimacija funkcij s Taylorjevo metodo
241.	Vital OBLAK	Globalna aproksimacija začetne naloge
242.	Nada ŠIRCA	Poissonova porazdelitev
243.	Dušan POŽUN	Slučajne porazdelitve točk v evklidskem prostoru
244.	Bojan ZALAR	Vrtinčni tok v vodilniku
245.	Helena BOGATAJ-TVRDY	Planiranje vzorčenja
246.	Branko ČRNIGOJ	Metoda Begamanovega jedra
247.	Darko ŠIFRER	Laplace-Stieltjesova transformacija
248.	Janez ŽEPIČ	Vsiljena nihanja lupin

Matematika — teoretična smer

2.	Emil BELOGLAVEC	Indefinitni vektorski prostori
3.	Barbara MAYER	Metoda najmanjših kvadratov za robni problem
4.	Mitja LAKNER	Korovkinovi izreki
5.	Dorijan MARUŠIČ	Polinomski krovni prostori

Fizika — pedagoška smer

59.	Rajko KRIŽNIK	Nastanek in razširjanje elektromagnetnega valovanja
60.	Ivan STEGNE	Nihala in energija pri nihanju
61.	Rajko PETERNEL	Indukcija
62.	Olga VIDENŠEK	

63.	Edvard DEČKO	Prikaz zrnatosti električnega naboja
64.	Jože MESTNIK	Primer programiranega učenja
65.	Marko DULMIN	Programirani generator električnega dela
66.	Andraž HRASTAR	Uporaba kalkulatorja z možnostjo programiranja pri pouku fizike

Fizika — tehniška smer

323.	Marjan ZAFRED	Kapacitivni merilnik pretoka v odprtih kanalih
324.	Janez DOLINŠEK	Študij faznega prehoda v $PbHPO_4$ s pomočjo jedrske magnetne resonance 31 P
325.	Vincenc NEMANIČ	Namestitev in umeritev analizatorja Augerovih elektronov
326.	Ivan STERN	Merjenje notranjih napetosti v toplotno obdelanih jeklih z uklonom rentgenske svetlobe
327.	Jožef HORVAT	Modelska analiza Nd: YAG laserja
328.	Andrej DEMŠAR	Nd: YAG laser s stalnim delovanjem
329.	Borut LENARDIČ	Temperaturna odvisnost vrtinčnih izgub pri Mn-Zn feritih
330.	Matjaž JAVŠEVAR	Raziskava faznih prehodov v liotropnem tekočem kristalu z ultrazvokom
331.	Marjan VRAČKO	Dvojna jedrska resonanca z večkratnim križanjem in dvofrekvenčnim obsevanjem
332.	Dušan BEVC	Izdelava ingota za vlečenje svetlobnega vodnika in merjenje lomnega količnika
333.	Marjan MEDE	Merjenje hitrosti ultrazvoka v trdnih akustooptično aktivnih snoveh
334.	Peter CRNJAC	Merilnik pretoka v odprtih kanalih s plovcem
335.	Luka ŠUŠTERŠIČ	Nov model amorfne snovi
336.	Gorazd CVETIČ	Ločljivost aparature za merjenje reakcije $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$
337.	Bojan DINTINJANA	Zvezdni fotometer
338.	Borut BREZNIK	Merjenje prevodnosti elektrolitov
339.	Marko ŽUMER	Načrtovanje, izdelava in preizkus ultra visokovakuumskega sistema za spektrometer na Augerjeve elektrone
340.	Benjamin LUKAN	Optimalni centrifugalni odpraševalec za asfaltne baze
341.	Vlado MALAČIČ	Odzivna funkcija ledvice
342.	Marko MIKUŽ	Izračun integralnih presekov za zajetje hitrih nevtronov po statistični teoriji
343.	Božidar ŠARLER	Nedestruktivno določanje prečne porazdelitve sevalcev gama v reaktorskih gorivnih elementih

Meteorologija

35.	Franc DUH	Vertikalna razporeditev vetra v spodnji troposferi nad Slovenijo

Matematika — III. stopnja

19.	Ivan DRNOVŠEK	Gelfand-Naimarkov izrek za JB-algebre
20.	Miklavž MASTINŠEK	Nelinearne polgrupe in Cauchijeva naloga
21.	Vladimir ALKALAJ	Kohomologija in perturbacija Banachovih algeber
22.	Borut JURČIČ-ZLOBEC	Pozitivni linearni operatorji v urejenih Banachovih prostorih
23.	Aleš ZALOŽNIK	Hardyjevi prostori v kompleksni in realni analizi

Fizika — III. stopnja — pedagoška smer

6.	Aleksander KREGAR	Pedagoški problemi v zvezi s simetrijami prostora in časa s poudarkom na ohranitvenih zakonih (1980)

Fizika — III. stopnja — tehniška smer

64. Milan BRUMEN — Anomalne osmozne lastnosti eritrocita
65. Mirjam CVETIČ-KRIVEC — Dibarionska stanja v modelu kvarkov

Matematika — doktorske disertacije

23. Tomaž PISANSKI — Orientabilne in neorientabilne vložitve grafov

Fizika — doktorske disertacije

75. Gregor CEVC — Študij dinamike protonov v vhodnih vezeh s pomočjo parametrične resonance
76. Ludvik ČANŽEK — Kompaktni katodioptrični objektivi. Nova razvojna smer
77. Lenart BARBIČ — Določevanje specifične površine poroznih snovi z jedrsko spin-mrežno relaksacijo
78. El-Halem TURKY — Effect of high frequency electric field on the despersion of ion-acoustic waves in plasma

NAGRAJENCI SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1982*

Raziskovalna skupnost Slovenije je v letošnjem letu podelila 5 Kidričevih nagrad, 17 nagrad Sklada Borisa Kidriča in 21 nagrad za izume in tehnične izboljšave. Med nagrajenci je tudi osem članov našega društva (njihova imena so odtisnjena polkrepko). Štiri nagrade Sklada Borisa Kidriča pa so bile podeljene za dela s področja fizike.

NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA

Dr. Milan Potokar — za pomembno delo na področju proučevanja sevalnega zajetja hitrih nevtronov.

Prof. dr. Bojan Držaj, dr. Vida Pirnat-Šmuc, dipl. ing. Stanko Hočevar, mag. **Andrej ZAJC**, mag. Milan Slokan — za raziskave naravnih in sintetičnih zeolitov.

Prof. dr. **Saša SVETINA** — za razprave s področja teoretične biofizike celic.

Doc. dr. Borut Lavrenčič, dr. **Martin ČOPIČ**, dipl. ing. **Marko ZGONIK** — za raziskave dinamike faznih prehodov s sipanjem laserske svetlobe.

Prof. dr. Igor Grabec — za pomembne raziskovalne dosežke na področju akustične emisije v mehansko obremenjenih snoveh.

Prof. dr. **Ludvik GYERGYEK**, doc. dr. Krunoslav Turkulin, mag. Damjan Zazula, mag. Iztok Gabrovc, dipl. ing. Marjan Vezjak, dipl. ing. Franc Solina, dipl. ing. Franc Jager, prof. dr. Janez Trontelj, doc. dr. Nikola Pavešič, mag. Slobodan Ribarič, doc. dr. Vojko Valentinčič, prof. dr. Aleksander Janežič — za razvoj mikroprocesorskega analizatorja EKG.

NAGRADE ZA IZUME IN TEHNIČNE IZBOLJŠAVE

Doc. dr. Borut Lavrenčič, dr. Pavel Cevc, Janko Polanc — za izum »pasivna infrardeča alarmna naprava«.

Jože Novak, dr. Peter Stegnar, dr. **Viktor DIMIC** — za tehnično izboljšavo »Razvoj postopka za pridobivanje radioaktivnega tehnecija«.

Dr. Dušan Brajnik, dipl. ing. **Marjan LOGAR**, dr. Aleš Stanovnik — za tehnično izboljšavo »Nedestruktivno določanje urana in drugih naravnih sevalcev v rudah, geoloških vzorcih in zemljinah«.

Dipl. ing. Andrej Banovec, dipl. ing. Marija Kern, **Stanko VRHOVEC** — za tehnično izboljšavo »Razvoj tankoplastnega tenziometra«.

Dr. Evgen Kansky, dipl. ing. Rasto Zavašnik, dipl. ing. **Marko ŽUHER**, dipl. ing. Vinko Nemanič, Janez Stamcar, Jože Zupančič — za tehnično izboljšavo »Razvoj in konstrukcija vakuumske naprave za tehnološko obdelavo površin polprevodnikov v skrajnem ultravakuumu z vgrajenim spektrometrom Augerjevih elektronov«.

---

* Seznam lanskih nagrajencev je bil objavljen v *Obzornik mat. fiz.* **28** (1981) 152.

V SLOVO KOLEGU IN PRIJATELJU PROFESORJU FRANCU GALIČU

V petek 14. maja smo kot ponavadi zbrani s študenti pri vajah. Malo še počakamo, da pride France. Ni ga bilo, pa smo vadili sami, misleč, vsak čas bo tu. Sredi dela smo zvedeli, da je na poti nenadoma v mestu umrl. Pretreseni smo zapustili naše predavalnice. Profesorja in prijatelja ne bo več med nas.

Franc Galič se je rodil v revni kmečki družini na Cirniku blizu Brežic. Letos avgusta bi dopolnil triinpetdeset let. V viharju druge svetovne vojne so družino iz rodne grude izselili v Nemčijo. Po povratku iz štiriletnega pregnanstva je vstopil v gimnazijo. Tedanjo osemletno šolo je kmalu končal z maturo na brežiški gimnaziji. Veselje do matematike in fizike ga je privedlo v matematični seminar ljubljanske Univerze. Postali smo kolegi in prijatelji. Po diplomi je odslužil vojake in potem učil na gimnazijah v Stični in Kočevju. Potem je že prevzemal naporna in odgovorna dela: postal je direktor Zavoda za prosvetno in pedagoško službo v Ljubljani in je delal kot svetovalec za matematiko. Bil je pomočnik republiškega sekretarja za prosveto in kulturo. Ustvarjalni nemir in klic po poglobitvi matematične izobrazbe ga vodita na enoletni študij v Združene države Amerike. Na Pedagoški akademiji v Ljubljani je začel učiti algebro leta 1967. Delu se je posvetil z vso vnemo. Njegova dognana in jasna predavanja so navduševala študente. Njegova prijetna osebnost se je odražala v spoštovanju in ljubezni do študentske mladine, kakor tudi do svojih sodelavcev.

Francetovo pestro in razvejano delo ima sledove v številnih področjih. Kot matematik je posvetil veliko svojih moči prenovi pouka na vseh ravneh. Z originalnimi prispevki je ustvarjalno delal pri sestavljanju številnih učbenikov. Bil je mentor mnogim mladim učiteljem in je sooblikoval generacije predmetnih učiteljev. Štiri leta je bil na akademiji pomočnik direktorja (1969—1973), štiri leta pa predstojnik oddelka za matematiko in fiziko. V letih 1977—1981 je bil prorektor Univerze Edvarda Kardelja v Ljubljani. Bil je član številnih družbenopolitičnih organizacij in drugih organizacij in društev: v Zvezi komunistov Slovenije, v republiškem odboru Sindikata delavcev družbenih dejavnosti Slovenije je bil predsednik izvršnega odbora za vzgojo in izobraževanje, v Izobraževalni skupnosti Slovenije je bil član izvršnega odbora. Pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je bil predsednik komisije za Vegova priznanja, s tem delom je imel tudi posebno zadovoljstvo in se je veselil uspehov mladine pri matematičnih podvigih.

Za svoje uspešno delo je dobil družbena priznanja: red dela z zlatim vencem, zlato plaketo Pedagoške akademije v Ljubljani, plaketo Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, plaketo zveznega odbora Sindikata delavcev družbenih dejavnosti Jugoslavije.

Profesor Franc Galič je imel izreden posluh za sočloveka; ljubil je slovensko zemljo in njeno naravo. V družbeno delo se je poglabljal s preudarnim, ljubeznivim in pomirjujočim nastopom. Z veliko mero potrpežljivosti je pomagal razvozlati prenekateri aktualni socialni, študentski in strokovni problem. Spoštoval in upošteval je delo svojih sodelavcev. Vsi, ki smo živeli in delali s Teboj, France, smo Ti ob bolečem slovesu hvaležni za nesebično delo. Kot plemenit in dober človek ostajaš z vsem svojim predanim delom med nami.

Ivan Pucelj

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1981

1263. Babič Marjan
1264. Beloglavec Emil
1265. Benčina Jože
1266. Bleiweis-Trsteniški Maja
1267. Bohak Anton
1268. Čehovin Lojzka
1269. Dintinjana Bojan
1270. Doberšek Fanika
1271. Dolinšek Janez
1272. Golja Radovan
1273. Gril Franc
1274. Grandovec Anica
1275. Jambrošić Ana
1276. Jelič Drago
1277. Kaluža Matjaž
1278. Kraljič Mojca
1279. Lakner Mitja
1280. Langus Danijel
1281. Lesjak Janez
1282. Lobnik Andrej
1283. Lukač Matjaž
1284. Lužnik Janko
1285. Majerle Igor
1286. Medved Ljiljana
1287. Mestek Alojz
1288. Mohar Aleš
1289. Mramor Kosta Neža
1290. Pavlič Noelija
1291. Potrč Matjaž
1292. Sternad Soraja
1293. Plešnik-Furlanič Dženi
1294. Stopar Alenka
1295. Šenica Barbara
1296. Šušteršič Marija
1297. Tvrdy Iztok in Helena
1298. Vončina Danica
1299. Žlender Danila

Število članov društva še vedno narahlo upada. Lani smo iz seznama črtali 59 članov društva, od tega 34 zaradi odpovedi, 1 zaradi smrti in 24 zaradi nerednega plačevanja članarine. Novih članov pa je bilo v preteklem letu le 37. Obzornik za matematiko in fiziko je začelo prejemati še 25 študentov matematike in fizike, ki bodo postali redni člani društva šele čez štiri leta. Društvo ima danes 760 rednih članov. Vredno bi bilo narediti širšo akcijo, da bi se včlanili vsi diplomirani matematiki in fiziki in vsi učitelji teh dveh predmetov na srednjih in osnovnih šolah.

Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE

PREJELI SMO V OCENO

1. Robert P. Langlands, Base change for GL (2). Princeton, Princeton Univ. Press, 1980. 236 str. (Annals of Mathematics Studies ; 96).
2. M. Atteia, D. Bancel, I. Gumowski, Nonlinear problems of analysis in geometry and mechanics. Boston, Pitman Advanced Publ. Program 1981. 208 str. (Research Notes in Mathematics ; 46).
3. Stochastic nonlinear systems in physics, chemistry and biology : Proc. of the Workshop Bielefeld, october 5—11, 1980. Ed. L. Arnold, R. Lefever. Berlin, Springer Verlag 1981. 237 str. (Springer Series in Synergetics ; 8).
4. Mathematical methods and applications of scattering theory : Proc. of a Conference, Catholic Univ. Washington, may 21—25, 1979. Ed. J. A. DeSanto and al. Berlin, Springer Verlag 1980. 331 str. (Lecture Notes in Physics ; 130).
5. Collisions : Proc. International Workshop, Amines, april 8—12, 1980. Ed. G. Cochard and P. Kessler. Berlin, Springer Verlag 1980. 400 str. (Lecture Notes in Physics ; 134).

Ciril Velkovrh

Rozsa PÉTER, Recursive functions in computer theory, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981, 179 str.

To delo madžarske znanstvenice Rósze Péter (umrla je leta 1977) je osnovano na njenih raziskavah možnosti uporabe rekurzijskih funkcij v teoriji računalništva. Pri študiranju izračunavanja rekurzivnih funkcij se v bistvu pojavljajo vsa vprašanja reševanja problemov z računalnikom. Vsebina knjige bo najbolje razvidna, če naštejemo nekatera izmed dvanajstih poglavij: splošne rekurzivne funkcije, rekurzivne funkcije nad besedami, rekurzivnost vsega izračunljivega, rekurzivnost diagramov poteka, rekurzivne procedure in Algol 60, rekurzivnost v Lisp 1.5.

Knjiga bo koristen pripomoček učiteljem in študentom računalništva in matematike.

Izidor Hafner

NOVE KNJIGE

Recent developments in several complex variables, urednik J. E. Fornaess, Annals of Mathematics Studies, Number 100, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981, XI + 452.

Uvod knjige nas seznani z zgodovino izhajanja zbirke Annals of Mathematics Studies. V letih 1933 do 1939 je izšlo čez trideset zvezkov njene predhodnice Princeton Mathematical Notes, ki sta jo izdajala Department of Mathematics of Princeton University in School of Mathematics of the Institute for Advanced Study. Naraščajoče zanimanje in izkušnje ob tej prvi zbirki so omogočile, da so že leta 1940 izšle prve tri knjige zbirke Annals of Mathematics Studies. Napisali so jih Weyl, Tukey in Godel in to je ob dejstvu, da je zbirka pod okriljem revije Annals of Mathematics, napovedalo njeno kakovost. Namen izdajateljev je bil omogočiti poceni objavljanje gradiva, ki je obsežnejše od člankov, ni pa še dozorelo za knjigo. Sčasoma pa so zgodnja dela v zbirki postala klasika in tako so bili mnogi avtorji pripravljeni v zbirki objaviti le popolnoma izdelane prispevke. To je narekovalo, da je po letu 1965 pričela izhajati zbirka Princeton Mathematical Notes s podobnimi cilji, kot so jih imeli prvi izdajatelji Annals of Mathematics Studies.

Sicer pa so v tej knjigi zbrani prispevki udeležencev konference o več kompleksnih spremenljivkah. Članki so strogo raziskovalne narave in tako dostopni le tistim, ki se s tem področjem ukvarjajo, saj večinoma poleg dobrega poznavanja osnov teorije funkcij več kompleksnih spremenljivk zahtevajo tudi podrobno seznanjenost s problemi, ki jih obravnavajo.

Gorazd Lešnjak

Imre CZISZAR, János Körner, Information Theory; Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. Disquisitiones Mathematicae Hungaricae 12, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981. IX + 452 str.

Claude Shannon je sredi tega stoletja osnoval teorijo informacije. Tako je izdelal pripomoček za študij določenih kvantitativnih aspektov informacije, predvsem vpliva kodiranja na prenos informacije. Kasnejše raziskave na tem področju so razvejile informacijsko teorijo v več samostojnih matematičnih disciplin. Knjiga obravnava klasično, stohastično ali Shannonovo teorijo. Avtorja sta si jo zamislila v obliki podiplomskega učbenika. Ker je knjiga v osnovi matematična in ne pokriva uporabe teorije informacije v tehniki, bo najbrž pri nas imela le malo bralcev. To pa je velika škoda, saj ima Csiszárjev in Körnerjev učbenik precej dobrih lastnosti. Naštejmo jih nekaj.

Znanje, ki ga potrebujemo ob študiju te knjige, ne presega osnov verjetnostnega računa in tistih matematičnih osnov, ki jih pridobijo študentje pri nas na vseh tehniških fakulteta. Seveda je za motivacijo treba poznati vsaj osnove teorije informacije (npr. pojma informacije in entropije).

Ker sta se avtorja omejila na problem diskretnega kanala brez pomnenja, obravnavata snov s poenoteno, kombinatorično metodo. To omogoča boljše razumevanje snovi in ponekod tudi krajše dokaze.

Knjiga prinaša najnovejše znanje. Večina rezultatov je iz sedemdesetih let. Nekaj citiranih rezultatov je bilo objavljenih celo leta 1981. Nekateri izreki, predvsem v zadnjih poglavjih, pa so originalni.

V knjigi je približno 300 problemov s kratkimi navodili za reševanje in z referencami na ustrezno literaturo.

Komu naj tedaj učbenik priporočimo? Brez dvoma bo knjiga zanimiva za vse, ki se aktivno ukvarjajo s teorijo informacije. Podiplomski študent računalništva ali uporabne matematike pa bi na njej lahko zgradil soliden magisterij.

Tomaž Pisanski

M. J. D. POWELL, Approximation theory and methods. Cambridge University Press, Cambridge 1980. X + 340 str. Cena 8,50 angl. funtov.

Pričujoča knjiga je razširjeni učbenik teorije aproksimacij. Po vsebini in načinu obravnave je primerna za enoletni kurz iz te teorije. Učbenik odlikujejo tele lastnosti: Napisan je jasno in precizno, vsi izreki so tudi dokazani. Uporablja jezik funkcionalne analize, a ne zahteva njenega globljega poznavanja. Od 24 poglavij v knjigi govore prva 3 o aproksimaciji nasploh in v normiranih prostorih, predvsem v $\mathcal{C}$, L^1 in L^2. Naslednji dve poglavji obdelata osnove interpolacije. Glavnina klasične teorije aproksimacije, predvsem s polinomi in trigonometričnimi funkcijami, je v naslednjih 9 poglavjih. Eno poglavje na kratko poda racionalno aproksimacijo. Vmes sta poglavji o ortogonalnih polinomih in o izreku o enakomerni omejenosti, ki ga avtor dokaže elementarno (brez sklicevanja na Bairov izrek).

Knjiga upošteva moderni razvoj teorije aproksimacij: v zadnjih dveh desetletjih je postalo jasno, da je aproksimacija z zlepki v mnogih pogledih, predvsem v praksi, najvažnejša. Zato avtor posveti teoriji zlepkov kar 7 poglavij.

Teorija je sproti ilustrirana z zgledi. Vsakemu poglavju so dodane naloge. Računalniških programov ni.

Nonlinear evolution equations and dynamical systems. Ed. M. Boiti, F. Pempinelli in G. Soliani. Lecture notes in physics 120. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1980. 368 str., cena 43 DM.

Knjiga je zapis predavanj srečanja na univerzi v Lecci v Italiji, ki je bilo od 20. do 23. junija 1979. Sestavlja jo 17 zapisov predavanj.

Glavna tema srečanja in zapisov je iskanje analitičnih rešitev nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb evolucijskega tipa: $u_t = f(x, t, u_x, u_{xx}, \ldots)$. Posamezni prispevki obravnavajo s tega gledišča enačbe kot Korteweg-de Vriesovo, Sine-Gordonovo, nelinearno Schrödingerjevo. Pri linearni evolucijski enačbi pogosto dobimo rešitev primerne Cauchyjeve naloge z uporabo Fourierove transformacije. Pri tem se reševanje parcialne enačbe reducira na reševanje navadne diferencialne enačbe. Za nekatere nelinearne evolucijske enačbe se da definirati analogna transformacija, imenovana spektralna. Pri tem se reducira reševanje nelinearne parcialne diferencialne enačbe na reševanje navadne linearne diferencialne enačbe!

Eden od prispevkov študira inverzni problem nihanja strune, eden pa uporabo metod matematične fizike v teoriji števil.

Kot večina zapisov specializiranih srečanj je tudi ta na visoki strokovni ravni in zato namenjen v glavnem le strokovnjakom iz tega področja matematične fizike.

Anton Suhadolc

M. B. MARCUS-G. Pisier, Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis. Princeton University Press and University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey, 1981. 150 str. (Annals of Mathematics Studies; 101.)

Slučajna Fourierjeva vrsta je izraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta_n \cos(nx + \varphi_n), \qquad x \in [0,2\pi]$$

v katerem so c_n realna števila z lastnostjo $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots = 1$, φ_n števila z intervala $[0,2\pi]$ in η_n slučajne spremenljivke, za katere je $E(\eta_n) = 0$ in $D(\eta_n) = 1$. Delo Marcusa in Pisierja se ukvarja s potrebnimi in zadostnimi pogoji, da slučajna Fourierjeva vrsta z verjetnostjo 1 enakomerno konvergira. Obravnava tudi analogna vprašanja pri slučajnih Fourierjevih vrstah na lokalno kompaktnih Abelovih grupah in na kompaktnih nekomutativnih grupah, s centralnim limitnim izrekom za te vrste in z uporabami dobljenih rezultatov v harmonični analizi.

Knjiga je poročilo o novejših raziskovalnih dosežkih na področju slučajnih trigonometrijskih vrst. Za branje je potrebno precej znanja iz teorije slučajnih procesov in algebre.

Rajko Jamnik

Ante FULGOSI, Faktorska analiza, Školska knjiga, Zagreb 1979. 168 str. Cena 440.— din.

Faktorska analiza je kot množica postopkov za analizo podatkov o medsebojni povezanosti med proučevanimi pojavi uporabna ne le v družboslovnih znanostih, v katerih se je razvila, temveč tudi v naravoslovnih znanostih. Zaradi vse večje uporabe faktorske analize pri nas je knjiga, ki obravnava najnovejše dosežke na tem področju, zelo dobrodošla.

Ker je knjiga namenjena predvsem uporabnikom faktorske analize (tudi nematematikom), avtor v prvih poglavjih naniza potrebna znanja iz linearne algebre. V nadaljevanju so obravnavana naslednja poglavja iz faktorske analize: osnovni in geometrijski model faktorske analize, metode izločanja faktorjev, komponentne analize, faktorska analiza skupnih faktorjev, rotacije, faktorji višjega reda, faktorske vrednosti, invariantnost in primerjava faktorjev, faktorji v multivariantni analizi, inačice faktorske analize in uporaba faktorske analize v raziskovanju.

Anuška Ferligoj

W. K. BÜHLER, Gauss, A Biografical Study. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. 208 str.

Bühlerjev zgoščeni prikaz Gaussovega življenja in dela je vezan na dva jubileja: leta 1977 je minilo 200 let od Gaussovega rojstva, leta 1980 pa 125 let od njegove smrti. Delo, pravi uvodna beseda, ni namenjeno niti zgodovinarju znanosti niti ljubitelju, ki zbira skalpe velikih mož. O Gaussu in o njegovi dobi govori sodobnemu matematiku in naravoslovcu. 15 poglavij, X medpoglavij in dodatki A, B, C prepletejo Gaussovo zasebno življenje, družbeno udejstvovanje, če smemo tako reči službam, politični okvir dogajanja in Gaussovo znanstveno delo v matematiki, v fiziki, v astronomiji in v geodeziji. Predvsem so poudarjeni tisti Gaussovi prispevki, ki žive še v današnji matematiki, pa naj se tega zavedamo ali ne.

France Križanič

Imre RUZSA, Modal logic with descriptions. Budapest, Akademiai Kiado 1981. 135 str.

Avtor razširja in razveji tako imenovani Q sistem izjavne modalne logike, ki ga je prvi objavil A. N. Prior leta 1957, v modalno logiko prvega reda. Pri tem dodaja znanim znakom standardnega logičnega jezika prvega reda z enakostjo še modalna operatorja M (možno je), S (nujno ugotovljivo je) in deskriptor I, ki uvaja opis termov. Mimo tega temelji semantika sistema na treh logičnih vrednostih: 0 (napačno), 1 (resnično) in 2 (neugotovljivo). V dodatku je obravnavana tudi deontična logika prvega reda, ki se izkaže kot kombinacija dveh podsistemov sistema Q, če ju primerno interpretiramo.

Niko Prijatelj

Veselin PERIĆ, Algebra I (Prsteni, moduli linearna algebra), II (Opšte algebarske strukture, teorija polja, algebarske jednačine). Sarajevo, Svetlost 1980.

Knjiga je eden redkih domačih (jugoslovanskih) učbenikov algebre. Razdeljena je v dva dela. Prvi, obsežnejši, vsebuje poleg osnovnih dejstev o grupah, kolobarjih in obsegih v glavnem standardno snov linearne algebre. Avtor vzporedno z vektorskimi prostori, kjer se je le dalo, obravnava tudi module. Posebno poglavje je posvečeno modulom nad glavnimi kolobarji. Drugi del je krajši in govori najprej o splošnih algebrskih strukturah, nato pa o razširitvah obsegov, ter Galoisovi teoriji in njeni uporabi.

Snov je podana sistematično in pregledno, dokazi so strogi, a ne preveč zgoščeni. Učbenik je seveda v prvi vrsti namenjen študentom matematike, zato tudi številni skrbno izdelani zgledi in primerno številne naloge z izčrpnim navodilom za reševanje ob koncu razdelkov nikakor niso odveč.

Milan Hladnik

Kazimierz KURATOWSKI, Introduction to set theory and topology. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977. 352 str.

Knjiga izpod peresa nedavno umrlega znamenitega poljskega topologa Kuratowskega je obsežen učbenik teorije množic in splošne topologije. Prvi, krajši del je posvečen teoriji množic in vsebuje predvsem logiko, algebro množic, preslikave, ekvipolenco množic in relacije urejenosti. Topologiji je namenjen drugi, daljši del knjige, kjer se srečamo s topološkimi, metričnimi in evklidskimi prostori, z zveznimi preslikavami, s polnimi, kompaktnimi in povezanimi prostori, s teorijo dimenzije in z Jordanovim izrekom. Na koncu je še dodatek, v katerem je R. Engelking podal uvod v homologijo; s tem sega knjiga v algebraično topologijo.

Teorija množic v prvem delu daje dobro osnovo za obravnavo topologije na zelo splošni in visoki ravni. Vendar se avtor ne ustavlja preveč pri rečeh, ki so le teoretično zanimive znotraj obeh področij. Poudarek daje posebno tistemu, kar je pomembno tudi za druge matematične smeri. Samo teorijo spremljajo številni, predvsem netrivialni primeri. Vsakemu poglavju sledijo dovolj zahtevne naloge, ki tudi dopolnjujejo predelano snov (nekaterim so dodana navodila). Posebej pa je treba omeniti avtorjev lastni, izvirni pristop k mnogim področjem; tako na primer v množico vpelje topologijo z operatorjem zaprtja, ki ga po njem imenujemo operator Kuratowskega.

Knjiga je načelno dostopna tudi začetniku, vendar zahteva njeno branje, predvsem drugega dela, neko matematično zrelost. Še posebej bo koristila študentom, ki so se s to snovjo že srečali, in vsem, ki topologijo rabijo pri svojem delu.

Janez Rakovec

A. I. FETISOV, O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama. (Prevod iz ruščine.) Školska knjiga, Zagreb 1981. 258 str.

Avtor nas z aksiomatično metodo vpelje v evklidsko, Lobačevskega (hiperbolično) in Riemannovo (eliptično) trirazsežno geometrijo. Najprej razvije absolutno geometrijo, nato pa preide na evklidski prostor. Podrobno obravnava linearne transformacije in inverzijo ter njihove invariante. Sledijo realizacije evklidske, hiperbolične in eliptične geometrije v parabolični, hiperbolični, oziroma eliptični mreži sfer. Obdelana je hiperbolična ter eliptična metrika in trigonometrija.

Izbrana aksiomatika se od Hilbertove loči predvsem v razdelku o skladnosti. Tu so najprej aksiomatično vpeljana osna zrcaljenja. Dva ravninska lika se potem imenujeta skladna, če lahko preslikamo drugega na drugega s kompozitom osnih zrcaljenj. — Nadaljnja značilnost knjige je konstrukcija modelov hiperbolične in eliptične geometrije v evklidskem prostoru. Ti dve geometriji sta tedaj neprotislovni, če to velja za evklidsko geometrijo. Avtor tako zavrača še vedno številna mnenja o »neresničnosti« neevklidskih geometrij. Pomen teh geometrij nakaže že v zgodovinskem uvodu, v sklepu pa ga podpre s fizikalno interpretacijo.

Besedilo je urejeno pregledno, spremlja ga 178 slik. Poglavja se končujejo s številnimi, predvsem dokazovalnimi, pa tudi konstrukcijskimi nalogami; na koncu so jim dodana navodila. Knjiga je v glavnem dostopna vsakomur, ki pozna evklidsko geometrijo, za razumevanje zadnjih poglavij pa je treba znati še trigonometrijo in nekaj analize.

Janez Rakovec

F. A. SZÁSZ, Radicals of Rings, Disquisitiones mathematicae hungaricae 11, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981. 287 str.

Pričujoča knjiga je monografija o radikalih kolobarjev. Definicij radikala kolobarja je več. Najbolj znan je Jacobsonov radikal, to je presek vseh maksimalnih regularnih desnih idealov danega kolobarja (ali — ekvivalentno — anihilator vseh nerazcepnih desnih modulov nad danim kolobarjem). Knjiga obravnava splošno (Amitsur-Kuroševo) teorijo radikalov in nato še vse važne primere (nil radikale, Jacobsonov radikal itd.). Vsebuje tudi dolg seznam nerešenih problemov in obsežno bibliografijo.

Peter Legiša