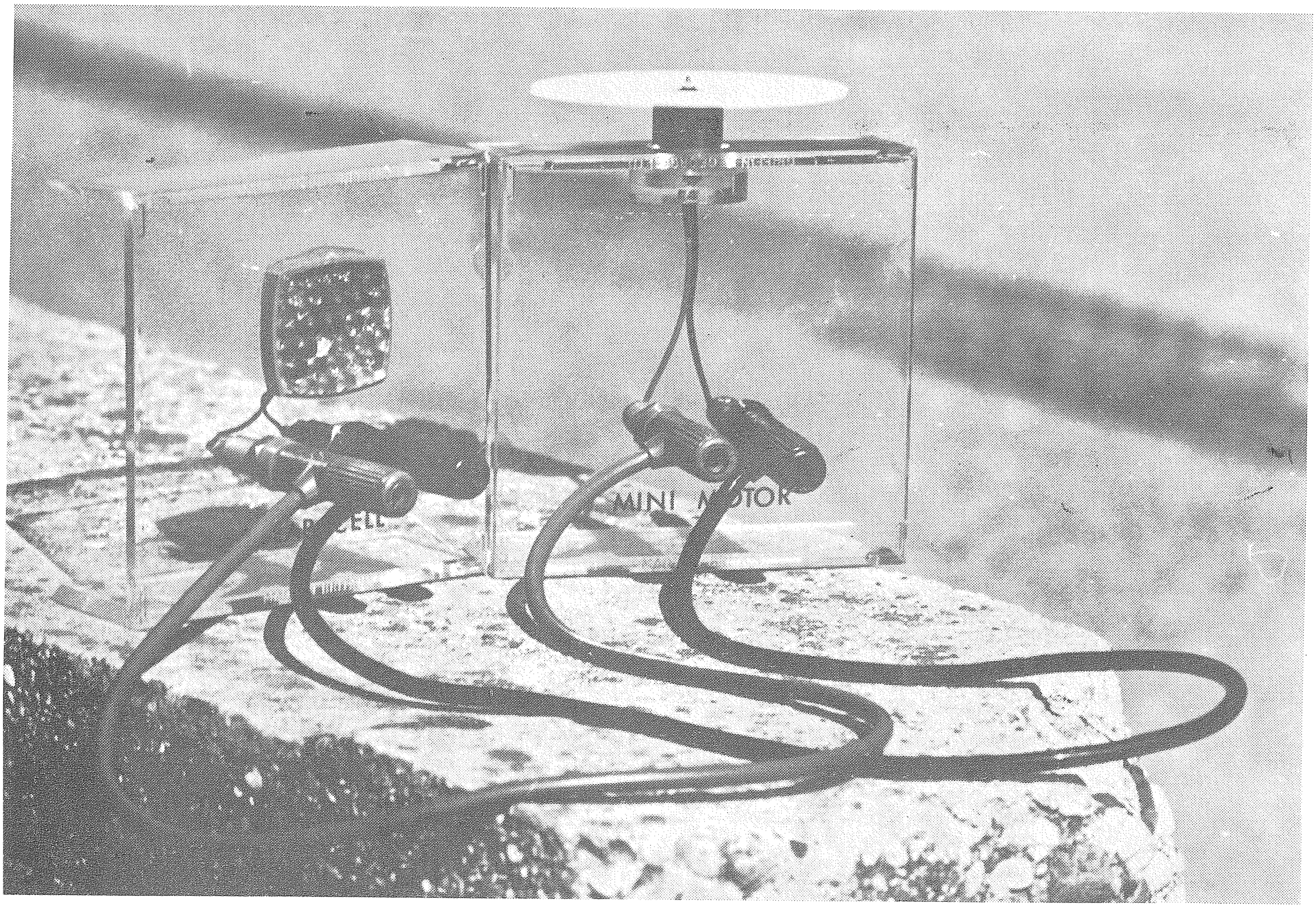
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

1982
Letnik 29
1/2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 29. — ŠTEVILKA 1/2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1982

Glavni urednik: Edvard Kramar, **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 300.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 150.— din, za ustanove in podjetja 500.— din, za tujino 20 $ = 800.— din, posamezna številka 100.— din, dvojna številka 200.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 6, tel. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233.

Tiska tiskara Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1982 DMFA SRS — 545

YU ISSN 0473-7466

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA

Članki

Energijski pasovi v kristalih polprevodnikov (Janez Strnad) 1
Dioda in tranzistor (Jože Pahor) 11
Fotoelektrični pojav (Peter Gosar) 19
Polprevodniški detektorji sevanja (Andrej Likar) 27
Svetleče in laserske diode (Janez Stepišnik) 33
Termoelektrični pojav (Slobodan Žumer) 38
Tunelski pojav v polprevodnikih (Peter Prelovšek) 45

Nove knjige (Rajko Jamnik, Janez Rakovec, Edvard Kramar, Anton Suhadolc, Gabrijel Tomšič, Peter Legiša, Boštjan Žekš, Peter Gosar, Anton Suhadolc, Tomaž Pisanski, Vladimir Batagelj) 10, 18, 32, 44, 50, 51, 52
SVIOFIZIKA (Ivan Kuščer) 53

Šola

Premica in ravnina v učbeniku za matematiko za usmerjeno izobraževanje (Izidor Hafner) 56
Usklajevanje predmetnikov in učnih načrtov za matematiko v osnovni šoli in v skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi srednjega usmerjenega izobraževanja med posameznimi republikami in pokrajinami v SFRJ (Aleksander Cokan) 58

Domače vesti

Ivan Vidav — avnojski nagrajenec (Niko Prijatelj) 61
Mednarodno tekmovanje študentov matematike v Beogradu (Mirko Dobovišek) 62
Primatiada 81 (Primož Tramte) 64
Obzornik za matematiko in fiziko v letu 1982 (Ciril Velkovrh) III
Pogovor z avtorji (Janez Stepišnik) III
9. seminar iz matematike: Geometrija (Martina Koman) IV

Na ovitku: Sončna celica poganja droben elektromotor z vetrnico (Foto Jože Pahor)

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 1/2

11-111/82-1/2
Inv. 111971

ENERGIJSKI PASOVI V KRISTALIH POLPREVODNIKOV

JANEZ STRNAD

UDK 539.1.074.55

Članek obravnava razporeditev elektronskih nivojev v kristalih polprevodnikov, kakršna sta silicij in germanij. Opiše, kako nastanejo iz ostrih nivojev v atomih široki energijski pasovi v kristalih. Na kratko omeni razloček med polprevodniki, izolatorji in prevodniki. Nekoliko podrobneje obdela čisti polprevodnik ter polprevodnik n in polprevodnik p.

ENERGY BANDS IN SEMICONDUCTOR CRYSTALS

The spectra of electron levels in semiconductor crystals, such as silicon and germanium, are considered. The formation of energy bands in crystals from discrete levels in single atoms is described. Briefly the distinction between semiconductors, insulators, and conductors is mentioned. Pure semiconductors, n type semiconductors and p type semiconductors are described.

Ko poslušate radio, gledate televizijo ali računate na žepni računalnik, uporabljate polprevodniške elemente. Tudi manj vsakdanje naprave — zmogljivi računalniki, števne naprave, večkanalni analizatorji, industrijski roboti itd. — bi bile brez njih mnogo večje ali celo neuresničljive. Polprevodniški elementi so preplavili vso elektroniko in iz nje skoraj popolnoma izrinili elektronke. Omogočili so miniaturizacijo, brez katere ne bi bilo vesoljskih poletov in nekaterih drugih vrhunskih dosežkov. Zato ni čudno, da zbuja uporaba polprevodnikov veliko zanimanja. Fizika v srednji šoli ne bi smela mimo polprevodnikov. Vendar so prav polprevodniki v šoli trd oreh. Pot, ki privede vsaj do okvirnega razumevanja polprevodniških naprav, je dolga in ovinkasta. Začne se z obravnavanjem kristalov.

Kristal je nekakšna velikanska molekula iz zelo velikega števila atomov. Njegova pravilna oblika odraža notranjo urejenost. Atomi so v kristalu periodično razporejeni v prostoru: v izbrani smeri naletimo po določeni razdalji vedno znova na enake razmere. Ta periodičnost in bližina sosednjih atomov sta krivi, da se razporeditev elektronskih nivojev v kristalu razlikuje od razporeditve v osamljenem atomu.

V atomu z Z elektroni obravnavamo gibanje enega elektrona v električnem polju jedra in preostalih $Z-1$ elektronov. Prvo je krogelno simetrično, drugo pa smemo imeti vsaj v približku za tako. Kvantna mehanika uči, da ima vezani elektron samo izbrane, diskretne energije. Energije posameznega elektrona ponazorimo s *spektrom elektronskih nivojev*. Na edino, ordinatno os nanesemo energijo in narišemo nivo pri ustrezni energiji z vodoravno črto. Stanje atoma podamo tako, da povemo, katere nivoje zasedajo njegovi elektroni. Upoštevati moramo, da velja za elektrone *izključitveno načelo:* niti dva elektrona v atomu se ne moreta ujemati v vseh kvantnih številih. Če pomeni nivo izbrano kombinacijo kvantnih števil, ki označujejo elektron v atomu, sme torej biti na enem nivoju kvečjemu en elektron.

Elektronski nivo v atomu označimo s četverico kvantnih števil, denimo z glavnim kvantnim številom n, s tirnim kvantnim številom l, ki določa velikost tirne vrtilne količine elektrona, s tirnim magnetnim kvantnim številom m_l, ki določa komponento tirne vrtilne količine v odlikovani smeri, na primer v smeri zunanjega magnetnega polja, in spinskim magnetnim kvantnim številom m_s, ki določa komponento spina v odlikovani smeri. Za ta kvantna števila veljajo zveze $n = n_r + l - 1$, v kateri je n_r število ničel radialnega dela funkcije stanja, $|m_l| \leqq l$ in $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Iz njih sledi $l = 0, 1, 2 \ldots n - 1$ in $m_l = -l, -l + 1, \ldots -1, 0, 1, \ldots l - 1, l$. Kvantno število m_l pri danem l zavzame $2l + 1$ različnih vrednosti, kvantno število m_s pa dve.

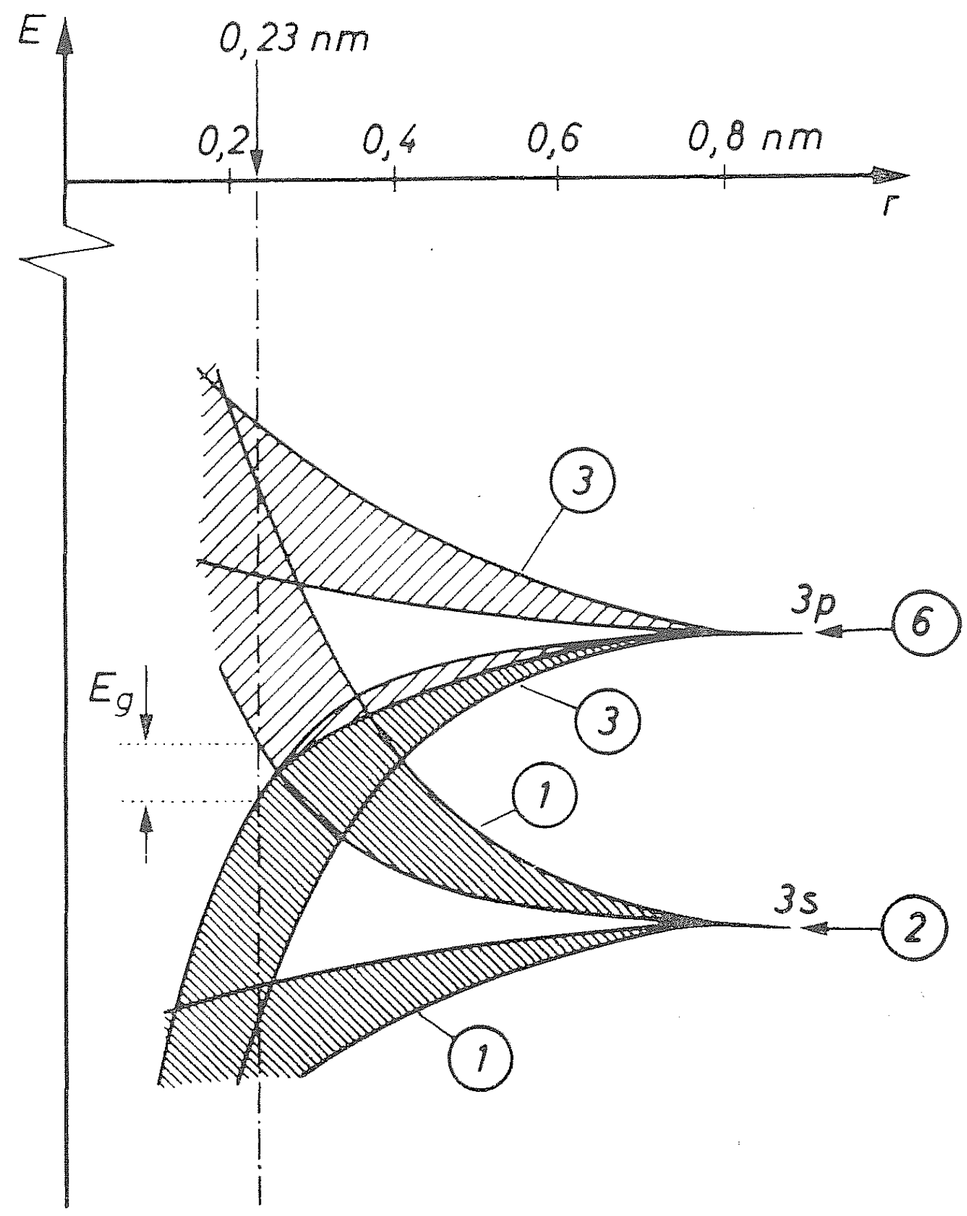
Če atom ni v polju, določata energijo posameznega elektrona le kvantni števili n in l. K dani dvojici n in l gre v tem primeru $2(2l + 1)$ nivojev z enako energijo. To skupino nivojev imenujemo *podlupino*. Posamezne vrednosti l zaznamujemo po ustaljeni navadi s spektroskopskimi simboli: s pomeni $l = 0$, p pomeni $l = 1$, d pomeni $l = 2$, f pomeni $l = 3$ in dalje po abecedi.

Zdaj postavimo v mislih N atomov danega elementa v ravno črto v enakem razmiku, ki ga po volji spreminjamo. Dokler je ta razmik v primeri z razsežnostjo atoma zelo velik, elektroni sosednjih atomov ne vplivajo na elektrone opazovanega atoma in spekter njegovih nivojev je tak, kot da bi bil atom čisto sam. Če obravnavamo vse atome kot enoten sistem, ustreza podlupini $n\ l$ pač $N \,.\, 2(2l + 1)$ nivojev. Zdaj si zamislimo, da se manjša razmik med atomi. Pri dovolj majhnem razmiku se začnejo elektroni sosednjih atomov motiti. Zaradi tega se spremeni energija nivojev dane podlupine. Nivoji se *razcepijo*. Razmik med atomi, pri katerem se nivoji znatno razcepijo, je za višje podlupine večji kot za nižje.

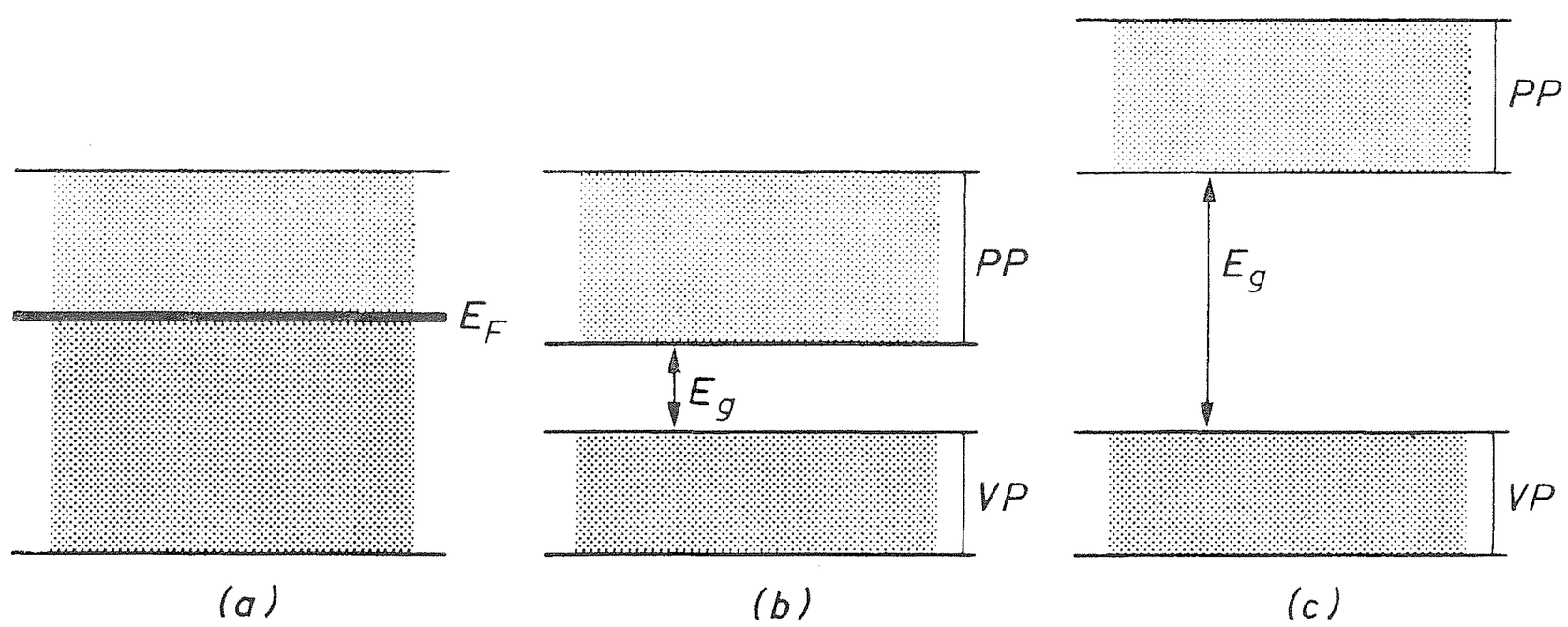
To sliko lahko uporabimo tudi za kristal. Med sosednjima atomoma v kristalu pa je določen *ravnovesni razmik*, pri katerem ima polna energija kristala minimum. Pri večjem razmiku je energija večja, ker moramo pri povečanju razmika premagati privlačne sile med atomi, pri manjšem razmiku pa tudi, ker naraste tedaj zaradi odbojnih sil, ki so posledica izključitvenega načela. (Če bi namreč stisnili elektronske oblake sosednjih atomov na manjšo prostornino, bi nekatere elektrone morali vzbuditi na višje nivoje.)

Najvišji nivoji, na katerih so elektroni, so pri ravnovesnem razmiku razcepljeni za kak elektronvolt ali več. Število nivojev v kristalu pa je zelo veliko, denimo 10^{20} ali več, tudi če je kristal majhen. Energijski razmik med sosednjima nivojema ocenimo tedaj z 10^{-20} eV. Tako majhne energijske razlike ne moremo izmeriti. Zato smemo vzeti, da se lahko energija elektrona na območju, na katerem so nivoji, spreminja zvezno, nekako tako, kot da bi bil elektron prost. Območja z nivoji imenujemo *energijske pasove*, vmesna območja, kjer ni nivojev, pa *prepovedane pasove*. Medtem ko lahko vzamemo, da se energija elektrona znotraj energijskega pasu zvezno spreminja, glede števila elektronov ne smemo pozabiti na število nivojev. Zaradi izključitvenega načela lahko energijski pas sprejme kvečjemu toliko elektronov, kot ima nivojev. Pas je *zaseden*, če je v njem toliko elektronov kot nivojev, *delno zaseden*, če je v njem manj elektronov kot nivojev, in *nezaseden*, če na njegovih nivojih ni elektronov. Razporeditev pasov po energiji in zasedenost najvišjega energijskega pasu, v katerem so elektroni, določa električno prevodnost kristalov.

Sl. 1. Odvisnost energije nivojev v kristalu silicija od razmika med sosednjima atomoma (po približnem računu). Atom silicija ima v osnovnem stanju dva elektrona v podlupini 1 s, dva v podlupini 2 s, šest v podlupini 2 p, dva v podlupini 3 s in dva na šestih nivojih podlupine 3 p. Štirje elektroni v podlupinah 3 s in 3 p so zunanji elektroni. Nezasedene energijske pasove označuje redkejše, zasedene pa temnejše senčenje. V krožcih je navedeno število nivojev na en atom. — Silicij in germanij kristalizirata kot diamant: ploskovno centrirani kubični mreži sta premaknjeni druga proti drugi v smeri telesne diagonale za četrt te diagonale. Tako obdajajo vsak atom štirje sosednji atomi, ki so razporejeni kot oglišča pravilnega tetraedra okoli središča. Ravnovesni razmik v kristalu silicija je 0,23 nm in širina energijske špranje 1,09 eV. Podobno je pri diamantu in germaniju, le da sta ravnovesni razmik 0,15 nm in 0,24 nm in širina špranje 5,4 eV in 0,72 eV. Diamant je izolator, silicij in germanij pa polprevodnika.



Začnimo s kristalom v osnovnem stanju, to je pri kolikor mogoče nizki temperaturi v bližini absolutne ničle. Tedaj so zasedeni najnižji mogoči nivoji, ki jih dopušča izključitveno načelo. Če je zaseden *valenčni pas,* to je energijski pas, nad katerim so sami nezasedeni pasovi, je kristal *polprevodnik* ali *izolator.* Elektroni v zasedenem energijskem pasu ne morejo slediti električni sili, ko pritisnemo na kristal napetost, in ne prispevajo k prevajanju. *Prevodni pas,* to je naslednji višji energijski pas, je nezaseden in *energijska špranja,* to je prepovedani pas med valenčnim in prevodnim pasom, je tako široka, da elektron v enem koraku ne more dobiti zadostne energije za



Sl. 2. Elektroni v energijskih pasovih prevodnika (a), polprevodnika (b) in izolatorja (c) v osnovnem stanju pri zelo nizki temperaturi. Pri prevodniku je v neposredni bližini zasedenih nivojev dovolj nezasedenih nivojev: prevodni pas je samo delno zaseden ali zasedeni valenčni pas se prekriva z nezasedenim prevodnim pasom. Energijska špranja v izolatorju med zasedenim valenčnim pasom (VP) in nezasedenim prevodnim pasom (PP) je široka več elektronvoltov, v polprevodniku pa okoli enega elektronvolta.

prehod preko nje (razen pri preboju v zelo močnem električnem polju). Polprevodniki in izolatorji pri zelo nizki temperaturi torej ne prevajajo.

Razlika je v širini špranje: pri polprevodnikih meri okoli enega elektronvolta, pri izolatorjih pa več elektronvoltov. Zato se pri sobni temperaturi polprevodnik vede drugače kot izolator. Upoštevajmo poleg elektronov v širokem valenčnem pasu, ki jih imamo za skupno last kristala, ostanke atomov, to je jedra in elektrone iz globljih nerazcepljenih nivojev. Ti so vezani na svoje mesto v kristalni mreži, okoli katerega nihajo. Pri sobni temperaturi ocenimo povprečno energijo nihanja s $kT = 0{,}025$ eV. Maloštevilni od njih pa imajo še precej večjo energijo. Tak ostanek lahko preda ob trku svojo energijo elektronu, ki na njen račun preide iz valenčnega pasu preko špranje v prevodni pas. V ravnovesju preide iz valenčnega pasu prav toliko elektronov, kolikor se jih v tem času vanj vrne iz prevodnega pasu. Elektroni v prevodnem pasu — *prevodniški elektroni* — se gibljejo podobno, kot da bi bili prosti, in lahko sledijo električni sili, ko pritisnemo na polprevodnik napetost. Polprevodnik pri sobni temperaturi prevaja, vendar je njegova prevodnost sorazmerno majhna, ker je majhna gostota elektronov v prevodnem pasu.* Čez mnogo širšo špranjo izolatorja preide pri sobni temperaturi zanemarljivo število elektronov iz valenčnega pasu v prevodni pas in zato izolator tudi pri sobni temperaturi ne prevaja. V kovini pa se valenčni in prevodni pas prekrivata ali pa je valenčni pas le delno zaseden in je torej istoveten s prevodnim pasom. V energijskem spektru je tedaj tik ob zasedenih nivojih dovolj nezasedenih nivojev in lahko elektroni sledijo električni sili.

Elektron, ki preide iz valenčnega pasu v prevodni pas, zapusti v valenčnem pasu *vrzel,* to je nezasedeni nivo. Gostota vrzeli v valenčnem pasu je enaka gostoti elektronov v prevodnem pasu. Vrzel zasede kak elektron z enega od bližnjih zasedenih nivojev in vrzel se preseli na ta nivo. Vrzel v valenčnem pasu se tedaj lahko — tako kot elektron v prevodnem pasu — giblje po kristalu podobno, kot da bi bila prosta. Če pritisnemo na polprevodnik napetost, vrzel prispeva k prevajanju. Elektroni, ki jo postopno zasedajo, se gibljejo v smeri električne sile na negativno nabiti delec, vrzel pa v nasprotni smeri, to je v smeri električne sile na pozitivno nabiti delec. Medtem ko ima elektron en negativni osnovni naboj, pripišemo vrzeli en pozitivni osnovni naboj.

Pri gibanju po kristalu se zaradi periodično razporejenih ostankov atomov potencialna energija elektrona v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu periodično spreminja s krajem. Iz tega izvira prispevek k povprečni polni energiji elektrona ali vrzeli. Elektron v prevodnem pasu in vrzel v valenčnem pasu pa lahko opišemo kot prosta delca, ki imata samo kinetično energijo, če jima pripišemo *efektivno maso.* Ta se v splošnem ne ujema z maso prostega elektrona in je za prevodniški elektron drugačna kot za vrzel. Prevodniški elektron in vrzel sta *kvazi delca.*

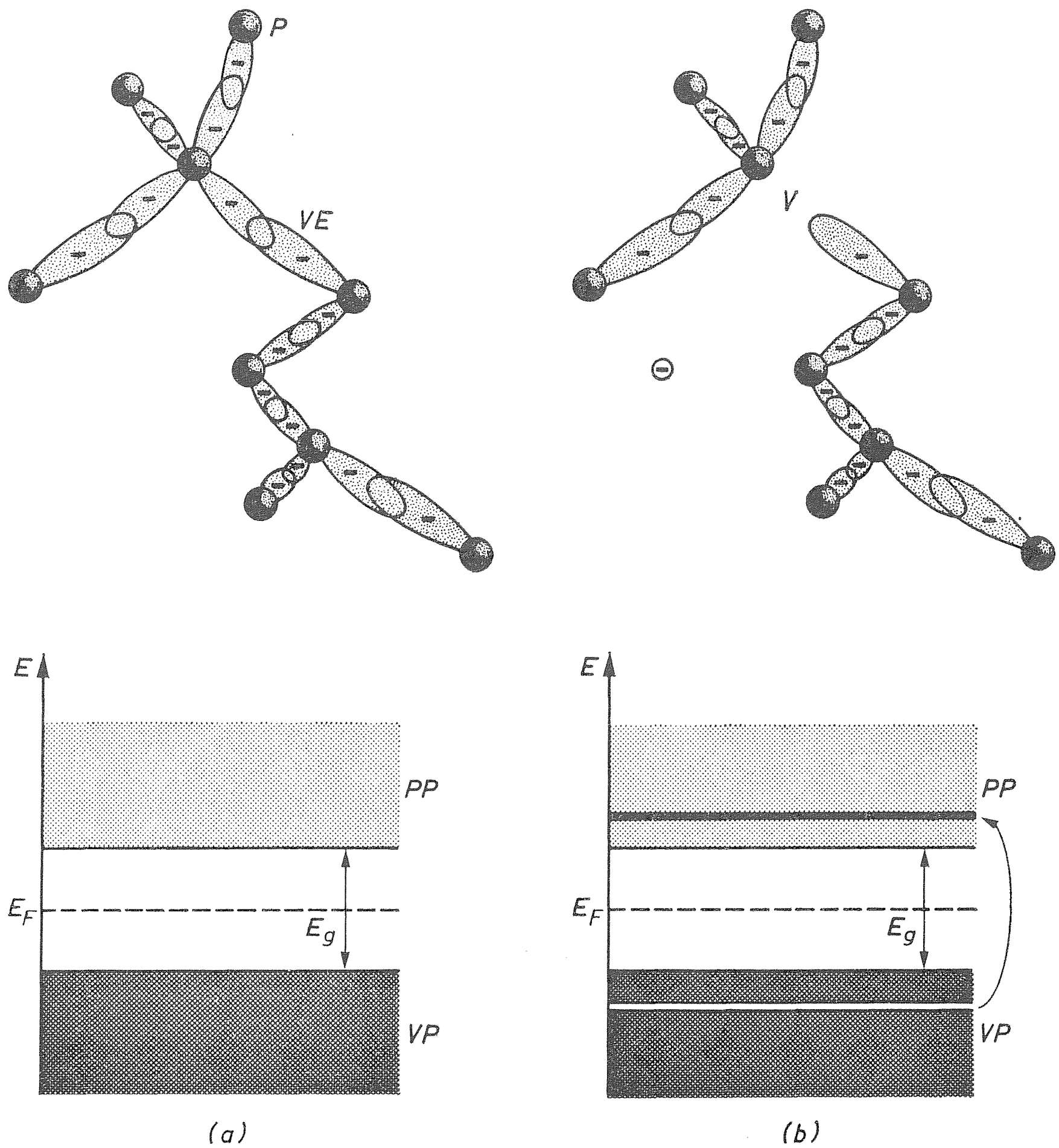
Vzemimo, da je v sicer nezasedenem prevodnem pasu en sam elektron. Pri gibanju po kristalu ob trkih z ostanki atomov v povprečju izgublja energijo in prehaja na vse nižje nivoje, dokler ne doseže dna prevodnega pasu.

---

* Gostota elektronov v prevodnem pasu polprevodnika je pri sobni temperaturi okoli milijardokrat manjša kot v dobrem prevodniku, prevodnost pa desetmilijonkrat manjša. Gibljivost nosilcev naboja v polprevodniku je namreč pri sobni temperaturi okoli stokrat večja kot gibljivost elektronov v kovini.

Vzemimo, da je v sicer zasedenem valenčnem pasu ena sama vrzel. Pri gibanju vrzeli po kristalu elektroni, ki jo postopno zasedajo, v povprečju izgubljajo energijo ob trkih z ostanki atomov in zasedajo vse nižje nivoje, dokler vrzel ne doseže vrha valenčnega pasu. Kar je za prevodniški elektron dno prevodnega pasu, je za vrzel vrh valenčnega pasu.

Ob prehodu elektrona iz valenčnega pasu v prevodni pas nastane vedno par: prevodniški elektron-vrzel. Za *nastanek para* je treba dovesti energijo, ki je določena z razliko nivojev elektrona in vrzeli, torej najmanj energijo, ki je enaka širini špranje. Pri nasprotnem pojavu — *rekombinaciji* — zasede elektron iz prevodnega pasu vrzel v valenčnem pasu. Pri tem se sprosti energija, ki jo določa razlika nivojev elektrona in vrzeli, torej najmanj energija,



Sl. 3. Čisti polprevodnik: pri zelo nizki temperaturi je valenčni pas zaseden in prevodni pas nezaseden (a). Če dobi elektron v valenčnem pasu dovolj energije, na primer pri sobni temperaturi zaradi nihanja kristalne mreže, preide v prevodni pas in zapusti v valenčnem pasu vrzel (b). Zgoraj je nakazana prostorska slika. Kristalno mrežo silicija ali germanija sestavljajo ostanki atomov polprevodnika (P). Štirje zunanji elektroni sodelujejo v kovalentnih vezeh, s katerimi je ostanek vezan na štiri sosede. Vretenaste ploskve omejujejo del prostora, v katerem naletimo z veliko verjetnostjo na vezani elektron (VE) (a). Če dobi vezani elektron dovolj energije, zapusti vez, v kateri ostane vrzel (V) (b).

ki je enaka širini špranje. V ravnovesju nastane v polprevodniku toliko parov prevodniški elektron-vrzel, kolikor se jih v tem času rekombinira.

Pri podrobnejšem opisu obravnavamo elektrone v prevodnem pasu kot plin. Ker ima pri tem bistveno vlogo izključitveno načelo, govorimo o *Fermijevem plinu.* Zasedbeno število, to je število elektronov dN na število nivojev dg, ki ne more biti večje kot 1, določa *Fermijeva porazdelitev*

$$F = dN/dg = 1/(e^{(E-E_F)/kT} + 1)$$

E je energija elektrona, E_F pa *energija Fermijevega nivoja,* ki ustreza v prevodniku pri zelo nizki temperaturni meji, pod katero so nivoji zasedeni, nad njo pa nezasedeni. S to porazdelitvijo si pomagamo tudi pri vrzelih. Upoštevati pa moramo, da ima za vrzeli vrh valenčnega pasu enako vlogo kot dno prevodnega pasu za elektrone. Zato mora Fermijeva porazdelitev za vrzeli glede na vrh valenčnega pasu ležati tako, kot leži Fermijeva porazdelitev za prevodniške elektrone glede na dno prevodnega pasu. Iz tega sledi, da je Fermijev nivo na sredi energijske špranje.

Vse to velja za *čist polprevodnik*; na njegove lastnosti ne vplivajo nečistoče. Popolnoma čistega polprevodnika ni, v najboljšem primeru se posreči doseči polprevodnik s koncentracijo atomov nečistoč okoli 10^{-10}. Vendar se polprevodnik z dano koncentracijo nečistoč vede kot čist pri temperaturi, ki je višja od mejne temperature. Ta mejna temperatura je tem nižja, čim manjša je koncentracija nečistoč.

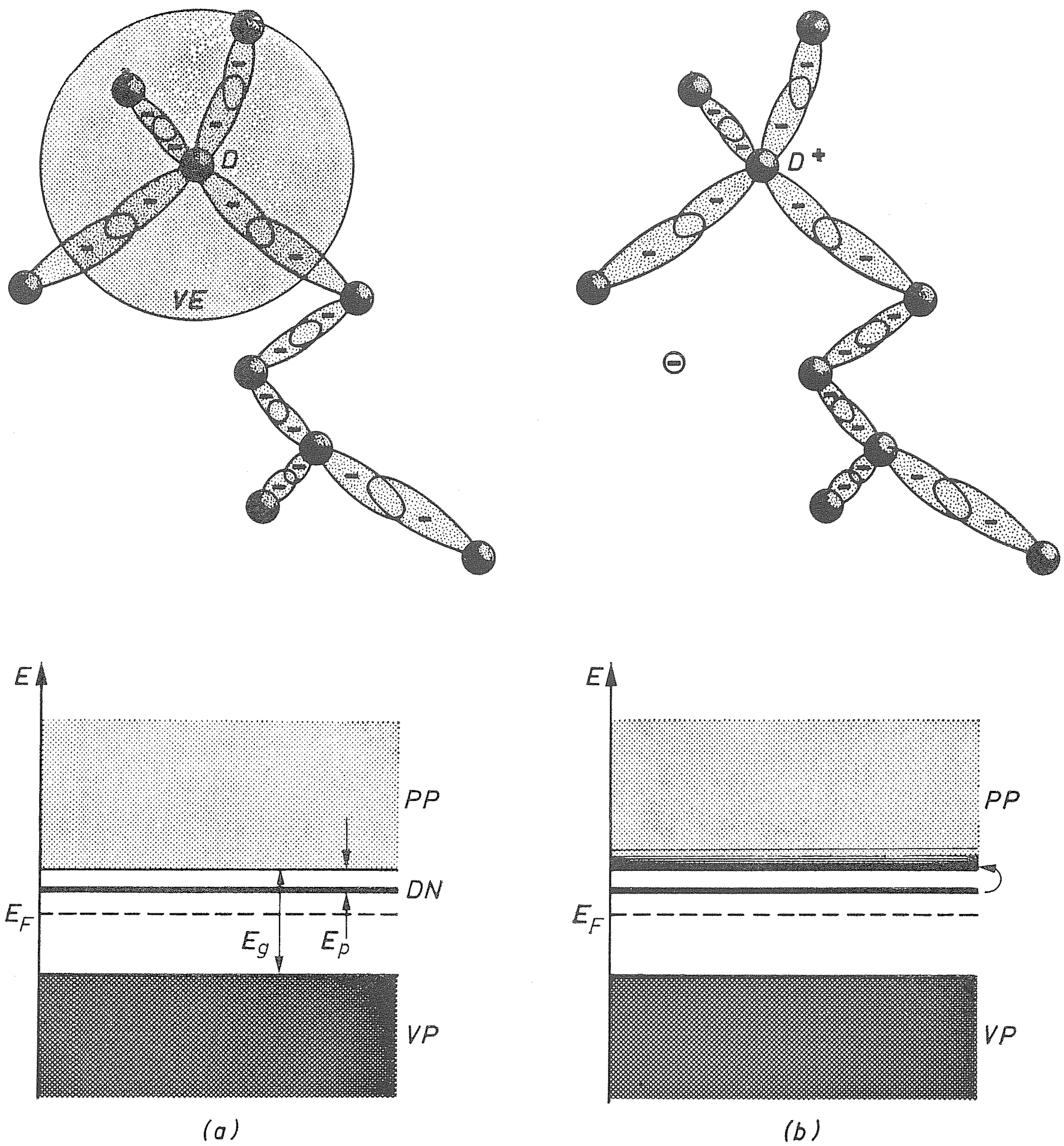
Čist polprevodnik je za uporabo sorazmerno nezanimiv. Mnogo zanimivejši je *polprevodnik s primesjo,* ki mu dodamo izbrano primes z namenom, da vplivamo na njegove lastnosti. Pri najpogosteje rabljenih polprevodnikih siliciju in germaniju uporabljamo kot primes element iz sosednjega stolpca v periodni preglednici.

Najprej obdelajmo polprevodnik s primesjo petvalentnega elementa (fosfora, arzena . . .). Atom petvalentnega elementa zasede v kristalni mreži mesto atoma polprevodnika. Ta atom ima namesto štirih zunanjih elektronov pet takih elektronov, eden izmed njih je tako rekoč odveč. Mislimo si, da sestavlja tak polprevodnik čist kristal polprevodnika, h kateremu štejemo tudi atome primesi s sredico in štirimi od petih zunanjih elektronov, in dodatni peti zunanji elektroni. V spektru čistega polprevodnika se v tem primeru pojavijo dodatni *nivoj primesi,* kakor pravimo nivojem dodatnih elektronov. Nivoji primesi spominjajo na spekter vodikovega atoma. Dodatni elektron se namreč giblje v polju enega pozitvnega osnovnega naboja, ki ga od naboja jedra edinega ne zastrejo preostali elektroni atoma. Vendar se elektron v polprevodniku ne giblje po praznem prostoru kot v vodikovem atomu. Pri približnem obravnavanju upoštevamo to z dielektričnostjo polprevodnika in efektivno maso elektrona.

Ionizacijska energija vodikovega atoma 13,6 eV je sorazmerna z maso elektrona in obratno sorazmerna s kvadratom dielektričnosti (v tem primeru je enaka 1). Efektivna masa prevodniškega elektrona v polprevodniku je nekako desetkrat manjša od mase prostega elektrona in velikostna stopnja dielektričnosti polprevodnika je 10. Po tem ocenimo ionizacijsko energijo petega elektrona v atomu petvalentne primesi v polprevodniku z $10\ \text{eV} \,.\, 0{,}1/10^2 = 0{,}01\ \text{eV}$

Atomi primesi so redki in neurejeno posejani po polprevodniku. Tudi če vse pete elektrone obravnavamo kot enoten sistem, so njihovi nivoji prav

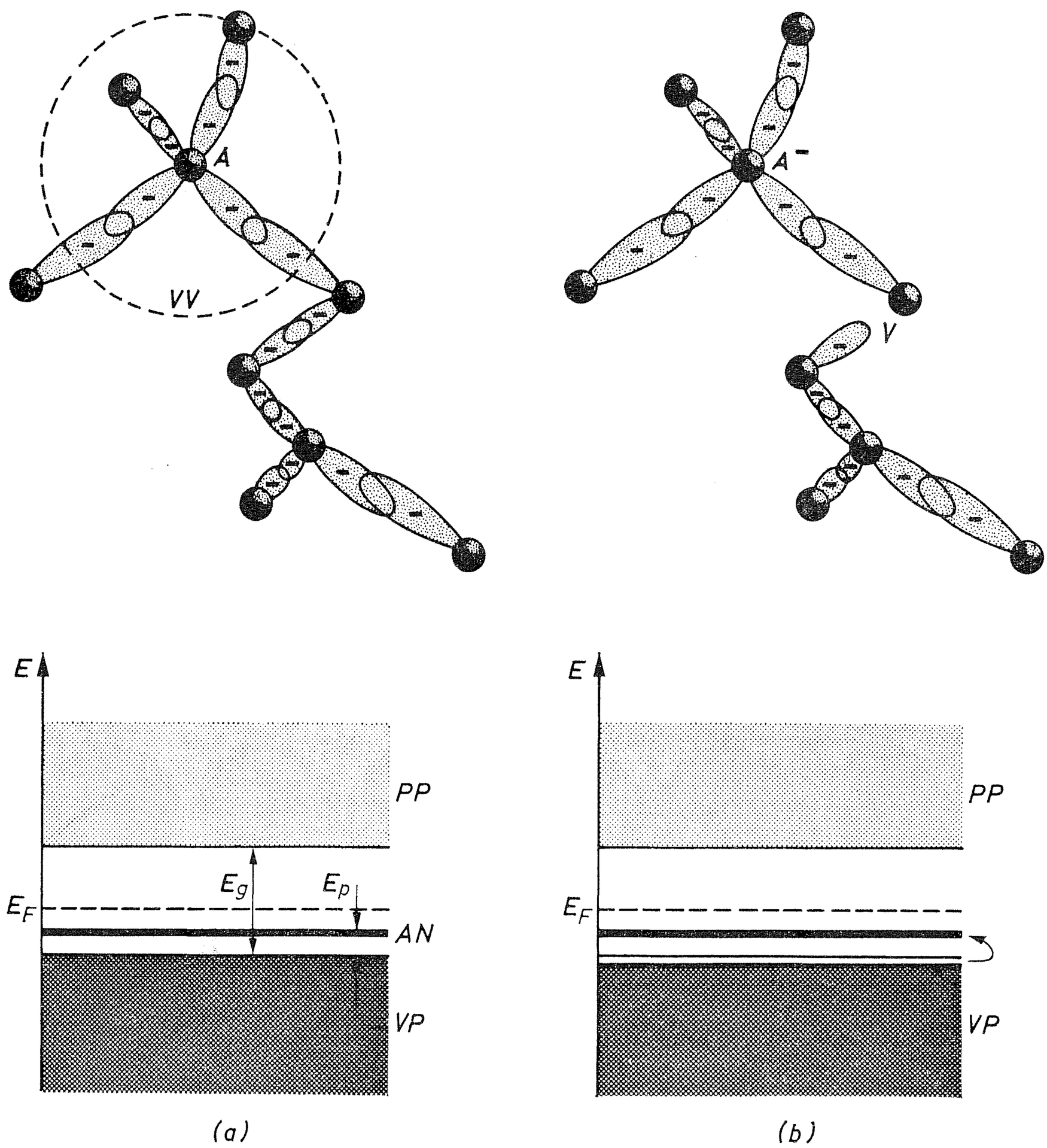
tako ostri kot pri osamljenem atomu. Upoštevati je treba le, da je teh elektronov toliko kot atomov primesi. Vsak od njih prispeva v spekter nivoje, ki spominjajo na vodikove, z najnižjim nivojem za energijo E_p pod dnom prevodnega pasu. V osnovnem stanju pri zelo nizki temperaturi je najnižji nivo zaseden; tedaj so peti elektroni vezani vsak na svoj atom. Pri sobni temperaturi pa preidejo praktično vsi elektroni z nivojev primesi v prevodni pas in se atomi primesi spremenijo v ione z enim pozitivnim osnovnim nabojem. Povprečna energija nihanja ostankov atomov 0,025 eV je namreč večja od ionizacijske energije E_p in elektroni dobijo potrebno energijo pri trkih z njimi. Ti elektroni, kot pač elektroni v prevodnem pasu sploh, pri-



Sl. 4. Polprevodnik n: donorski nivoji (DN) so pri zelo nizki temperaturi zasedeni, valenčni pas je zaseden, a prevodni pas nezaseden (a). E_p je ionizacijska energija donorskega atoma. Pri sobni temperaturi preide peti zunanji elektron z donorskega nivoja na nivo ob dnu prevodnega pasu (b). Zgoraj je nakazana prostorska slika. Pri zelo nizki temperaturi je peti zunanji elektron vezan v donorskem atomu (D) (a), pri sobni temperaturi pa zapusti atom, ki preide v ion z enim pozitivnim osnovnim nabojem (D^+) (b). Bohrov radij za vezani elektron je pri siliciju okoli 14-krat in pri germaniju okoli 35-krat večji od razmika med sosednjima atomoma. Krogla, ki omejuje del prostora, v katerem z veliko verjetnostjo naletimo na vezani peti zunanji elektron, je tedaj narisana mnogo premajhna.

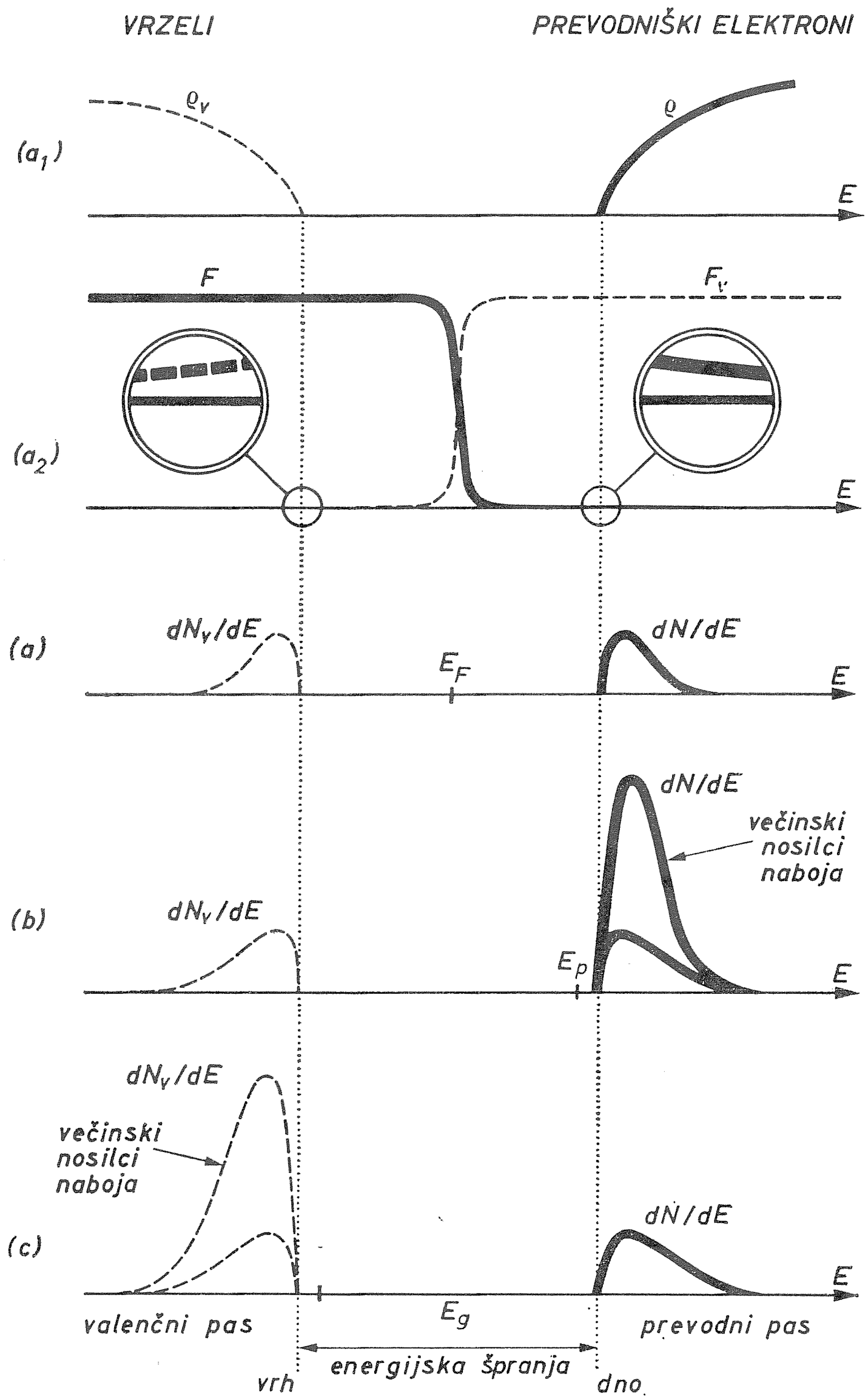
spevajo k prevajanju. Njihovo gostoto uravnamo z dodatkom atomov primesi in tako lahko dosežemo prevodnost, ki je precej večja od prevodnosti čistega polprevodnika.

Pri sobni temperaturi je v prevodnem pasu polprevodnika s petvaletno primesjo tudi nekaj elektronov, ki so vanj prešli iz valenčnega pasu, kjer so zapustili vrzeli. Toda elektroni, ki izvirajo iz atomov primesi, so navadno v veliki večini. Negativni prevodniški elektroni so tedaj *večinski nosilci naboja* in zato govorimo v tej zvezi o *polprevodniku n*. Atomu petvalentne primesi, ki odda pri sobni temperaturi svoj peti zunanji elektron, pravimo *donor* (darovalec). Nivoji primesi so v tem primeru *donorski nivoji*. V polprevodniku *n* gostota prevodniških elektronov navadno znatno presega gostoto vrzeli in je Fermijev nivo premaknjen proti dnu prevodnega pasu.



Sl. 5. Polprevodnik p: akceptorski nivoji (AN) so pri zelo nizki temperaturi nezasedeni, valenčni pas je zaseden, a prevodni pas je nezaseden (a). Pri sobni temperaturi preide elektron z nivoja ob vrhu valenčnega pasu na akceptorski nivo in zapusti vrzel v valenčnem pasu (b). Zgoraj je nakazana prostorska slika. Pri zelo nizki temperaturi je vrzel vezana (VV) v atomu akceptorja (A) (a), pri sobni temperaturi pa zapusti atom, ki preide v ion z enim negativnim osnovnim nabojem (A^-) (b).

Zdaj je na vrsti polprevodnik s primesjo trivalentnega elementa (bor, aluminij . . .). V tem primeru ima atom primesi samo tri zunanje elektrone, torej enega premalo, kar ustreza štirim zunanjim elektronom in vrzeli. Razmere v takem polprevodniku so nekako simetrične razmeram v polprevodniku n. V valenčnem pasu takega polprevodnika je na vsak atom primesi po en nivo manj, tako da je v osnovnem stanju pri zelo nizki temperaturi valenčni pas popolnoma zaseden. Za ionizacijsko energijo E_p nad vrhom valenčnega pasu so nivoji primesi, ki so v osnovnem stanju nezasedeni. To ustreza vrzelim, od katerih je vezana vsaka na svoj atom primesi. Pri sobni temperaturi pa preidejo elektroni z vrha valenčnega pasu na nivoje primesi in zapustijo v valenčnem pasu vrzeli. Vrzeli, ki so v osnovnem stanju vezane, postanejo zdaj proste in atomi primesi se spremenijo v ione z enim negativnim osnov-



Sl. 6. Gostota nivojev (a_1) in Fermijeva porazdelitev (a_2) za elektrone v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu čistega polprevodnika ter porazdelitev elektronov in vrzeli po energiji v čistem polprevodniku (a, dobljeno kot produkt (a_1) in (a_2)), v polprevodniku n (b) in v polprevodniku p (c). Razmerje med večinskimi in manjšinskimi nosilci naboja je navadno precej večje. Zasedbeno število, to je število elektronov dN na število nivojev dg, je za Fermijevo porazdelitev

$$dN/dg = F(E) = 1/[e^{(E-E_F)/kT} + 1] \leq 1.$$

Gostoto nivojev $\varrho = dg/dE$, to je število nivojev dg na energijski interval dE, dobimo iz zveze $dg = 2d^3r d^3p/h^3 = 2V \,.\, 4\pi p^2 dp/h^3 = 2V \,.\, 4\pi(2m^3E)^{1/2}dE$. V faznem prostoru odpadeta na fazno celico s prostornino h^3 ravno dva nivoja (za dve mogoči usmeritvi spina elektrona). $d^3r = V$ je prostornina v navadnem prostoru in $d^3p = 4\pi p^2 dp$ v prostoru gibalne količine p. Za energijo vzamemo, da je kinetična:

$$E = \tfrac{1}{2}p^2/m.$$

nim nabojem. Vrzeli, kot pač vrzeli v valenčnem pasu sploh, prispevajo k prevajanju. Njihovo gostoto uravnavamo z dodatkom primesi in tako lahko dosežemo prevodnost, ki je precej večja od prevodnosti čistega polprevodnika.

Pri sobni temperaturi je v valenčnem pasu tega polprevodnika tudi nekaj vrzeli, ki so nastale, ko so prešli elektroni iz valenčnega pasu v prevodni pas. Toda vrzeli, ki izvirajo iz atomov primesi, so navadno v veliki večini. Pozitivne vrzeli so tedaj večinski nosilci naboja in zato govorimo v tej zvezi o *polprevodniku p*. Atomu trivalentne primesi, ki pri sobni temperaturi sprejme elektron (odda vrzel), pravimo *akceptor* (sprejemnik). Nivoji primesi so v tem primeru *akceptorski nivoji*. V polprevodniku *p* gostota vrzeli navadno znatno presega gostoto prevodniških elektronov in je Fermijev nivo premaknjen proti vrhu valenčnega pasu.

S sestavljanjem območij, na katerih je kristal polprevodnik n, in območij, na katerih je kristal polprevodnik p, dobimo polprevodniške elemente.

LITERATURA

[1] P. Gosar, *O elektronih v kristalih,* Obzornik mat. fiz. **7** (1960) 116.

[2] J. Strnad, *Moderna fizika,* Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov 1977, II. del.

[3] J. Strnad, *Gibanje elektrona v enorazsežnem modelu kristala,* Obzornik mat. fiz. **18** (1971) 170.

NOVE KNJIGE

M. CSÖRGÖ — P. Révész, Strong Approximations in Probability and Statistics. Akadémiai Kiadó. Budapest 1981. Str. 284.

Od leta 1949 naprej, posebno pa od leta 1964 sem, postaja pri obravnavanju limitnih izrekov verjetnostnega računa vse pomembnejši princip invariance. Po tem principu ugotavljamo limitno vedenje kakšnega zaporedja $S_1, S_2, S_3, \ldots$ slučajnih spremenljivk tako, da vzamemo kakšno drugo zaporedje $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, katerega limitno vedenje poznamo ali ga vsaj lahko ugotovimo, nato pa dokažemo, da je ali za vsak $x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < x) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n < x)$$

ali da je z verjetnostjo 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - Y_n}{g(n)} = 0 \tag{1}$$

pri čemer je $g(n)$ primerna naraščajoča funkcija. Če velja (1), pravimo, da je zaporedje $\{Y_n\}$ krepka aproksimacija zaporedja $\{S_n\}$. Slučajne spremenljivke Y_n so po navadi $W(n)$, pri čemer je $W(t)$; $t \geqq 0$ Wienerjev slučajni proces.

Monografija Csörgöja in Révésza povzema dosedanji razvoj te teorije, prinaša precej novih rezultatov in kaže, kako je mogoče krepko aproksimacijo uporabiti na različnih področjih verjetnostnega računa in matematične statistike. Knjiga vsebuje poleg daljšega uvoda poglavja 1. Wienerjev in nekaj sorodnih Gaussovih procesov; 2. Krepke aproksimacije delnih vsot neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z Wienerjevim procesom; 3. Obravnava delnih vsot z metodami krepke aproksimacije; 4. Krepke aproksimacije empiričnih procesov z Gaussovimi procesi; 5. Obravnava empiričnih in kvantilnih procesov z metodami krepke aproksimacije; 6. Obravnava drugih empiričnih procesov z metodami krepke aproksimacije; 7. Principi krepke invariance pri slučajnih limitnih izrekih..

Delo je napisano živahno in sorazmerno lahko dostopno, seveda pa je za branje potrebno znanje verjetnostnega računa.

Rajko Jamnik

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 1/2

DIODA IN TRANZISTOR

JOŽE PAHOR

UDK 621.382.2
621.382.3

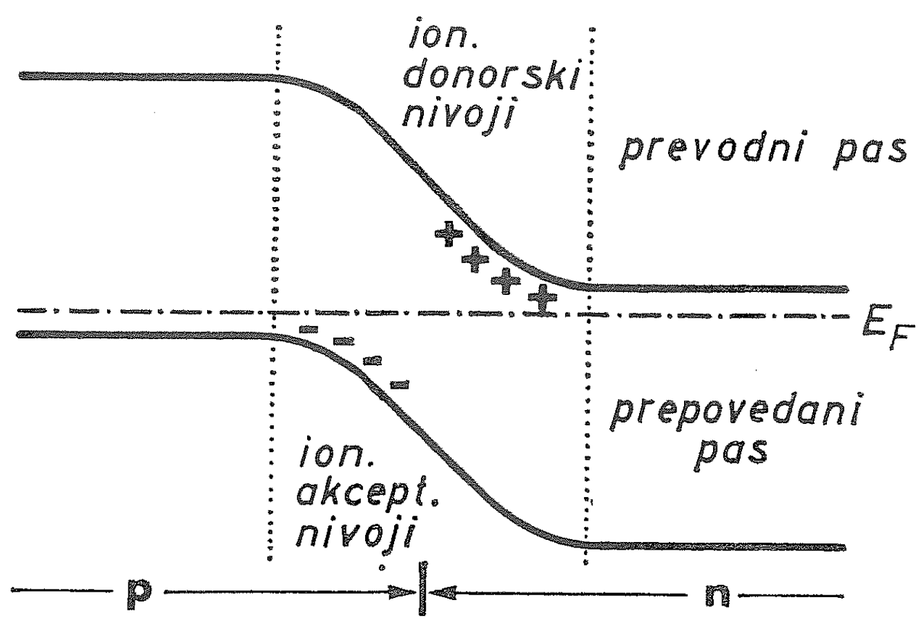
S pomočjo mikroskopske slike smo pojasnili usmerniške lastnosti ter kapacitivnost stika p-n kvalitativno. Uporaba teh lastnosti je ilustrirana z opisom ustreznih poskusov. Z nadaljevanjem stika p-n v razporeditev npn smo uvedli tranzistor in obravnavali njegovo uporabo v ojačevalnikih električnega signala.

DIODE AND TRANSISTOR

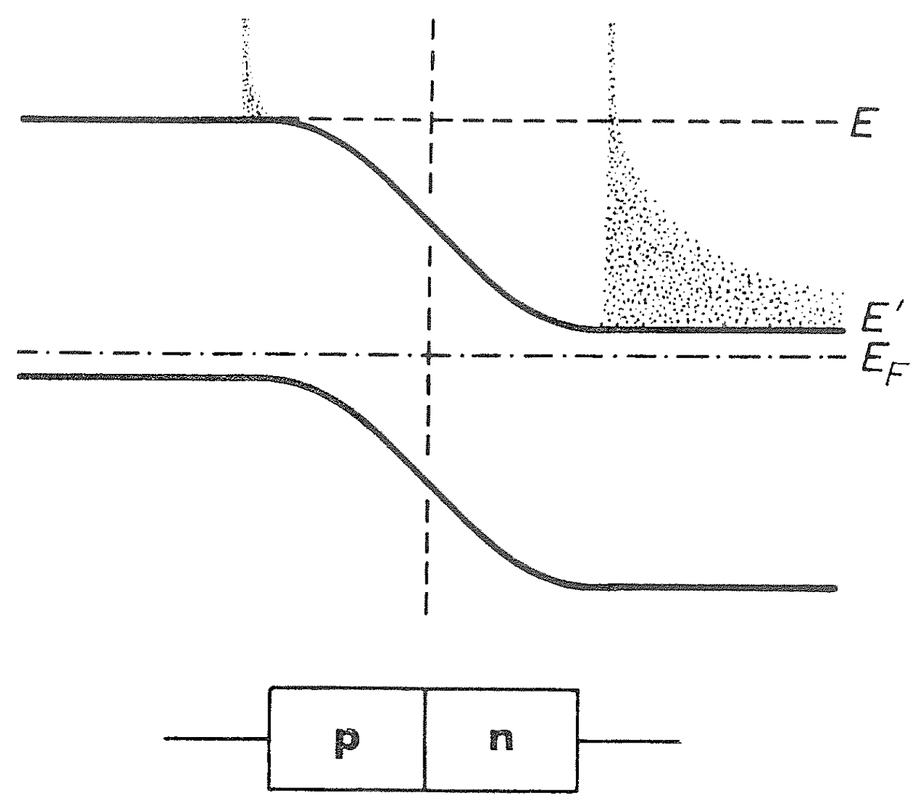
The rectifying properties as well as the junction capacity of the p-n junction are explained qualitatively by using the microscopic picture. Some applications of these properties are illustrated through adequate experiments. By extension of the p-n junction into npn arrangement the concept of the transistor is introduced, and its application for the amplification of the electric signals is discussed.

Vzemimo kos polprevodnika n in kos polprevodnika p in ju staknimo. Pred staknitvijo je bil vsak od obeh kosov zase električno nevtralen. Kolikor je bilo na primer v polprevodniku n razmeroma dobro gibljivih elektronov v prevodnem pasu, toliko je bilo v kristalno mrežo vezanih donorskih ionov s pozitivnim nabojem.

Po staknitvi začno odtekati elektroni iz polprevodnika n z veliko elektronsko gostoto v polprevodnik p z majhno elektronsko gostoto. Zaradi odtekanja elektronov iz polprevodnika n v polprevodnik p se pojavi presežek negativnega naboja na vstopu v področje p in pozitivnega naboja v področju, odkoder so odtekli elektroni. Tako se pojavi med področjem n in p električna dipolna plast z električnim poljem, ki zavira nadaljnjo difuzijo. Slednjič se difuzija ustavi. Tedaj sta tudi oba Fermijeva nivoja v obeh materialih izenačena, kot to zahteva toplotno ravnovesje. Med kosoma se je pojavila potencialna razlika (sl. 1). Oglejmo si, kakšna je tedaj mikroskopska slika (sl. 2).



Sl. 1. Razmere v stiku p-n



Sl. 2. Lega energijskih pasov v stiku p-n

Od množice elektronov, ki so v prevodnem pasu polprevodnika n, jih večina ne more v polprevodnik p. Prehod je mogoč le za elektrone nad energijo E, teh pa je razmeroma malo.

Nasprotno pa je v polprevodniku p elektronov sicer malo, toda vsi lahko dosežejo polprevodnik n, če so usmerjeni tja in na poti ne dožive trka. Ker tako prispevajo k električnemu toku $I_{e\leftarrow}$ iz polprevodnika n v polprevodnik p le izbrani elektroni, k toku $I_{e\rightarrow}$ iz polprevodnika p v polprevodnik n pa vsi, sta tokova $I_{e\leftarrow}$ in $I_{e\rightarrow}$ izenačena kljub različnim elektronskim gostotam v obeh materialih. Stanje je stacionarno.

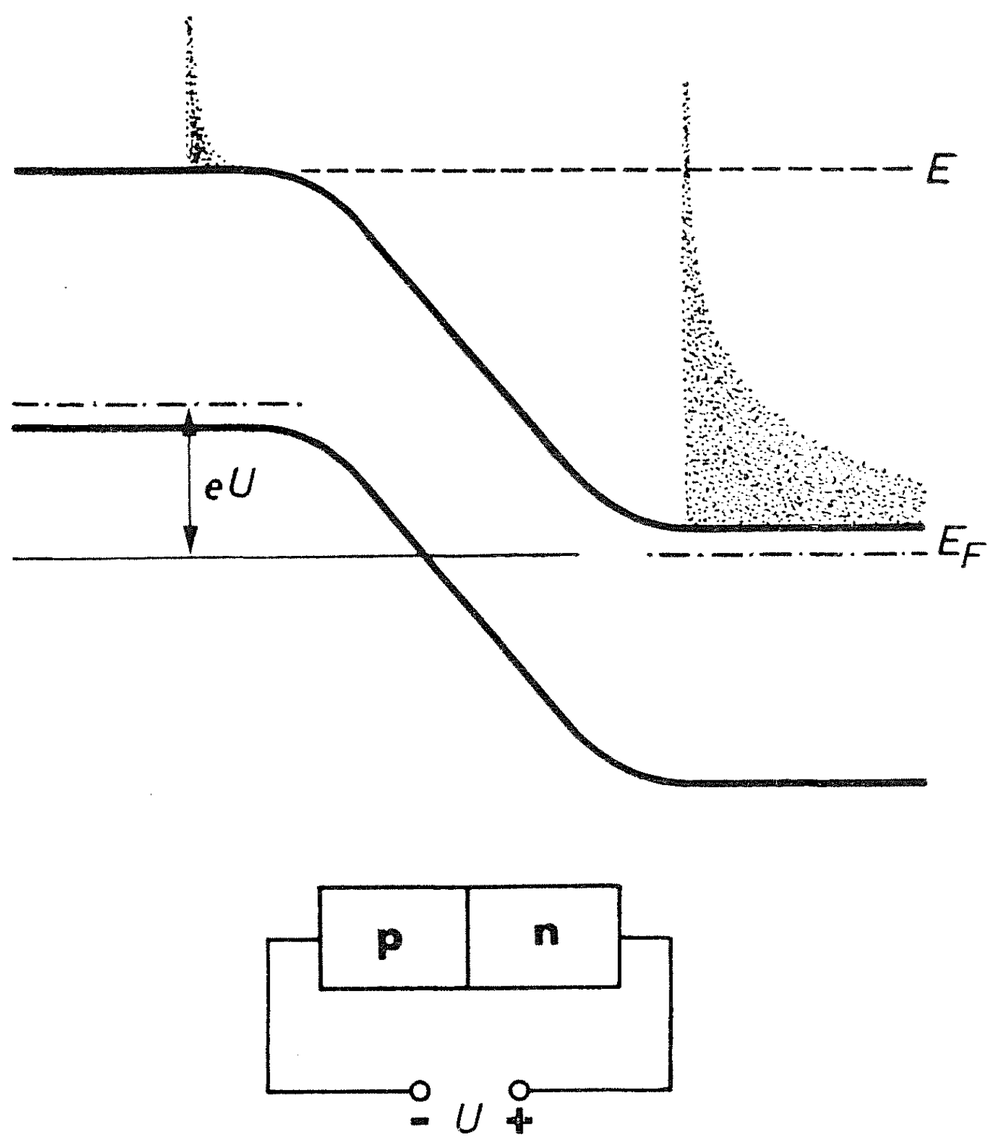
Če zdaj priključimo polprevodnik n na pozitivni priključek zunanjega napetostnega izvira z napetostjo U, polprevodnik p pa na negativni priključek istega izvira, se razmere spremene. Tedaj se na stiku pojavi dodatna potencialna razlika, enaka napetosti uporabljenega zunanjega izvira U. Fermijeva nivoja v obeh kosih polprevodnika sta tako razmaknjena za energijo eU (sl. 3). Zaradi zunanje napetosti pričakujemo skozi stik električni tok. Tok elektronov z leve na desno $I_{e\rightarrow}$ se ne spremeni, kajti še vedno imajo vsi elektroni v prevodnem pasu polprevodnika p enake možnosti kot prej. Pač pa se zmanjša tok elektronov z desne na levo $I_{e\leftarrow}$. Polprevodnik p namreč lahko dosežejo le tisti elektroni iz polprevodnika n, katerih energija presega Fermijevo energijo za $E + eU$. Račun pokaže, da je razlika elektronskih tokov prek stika:

$$I_e = I_{e\leftarrow} - I_{e\rightarrow} \propto e^{-e_0 U/kT} - 1$$

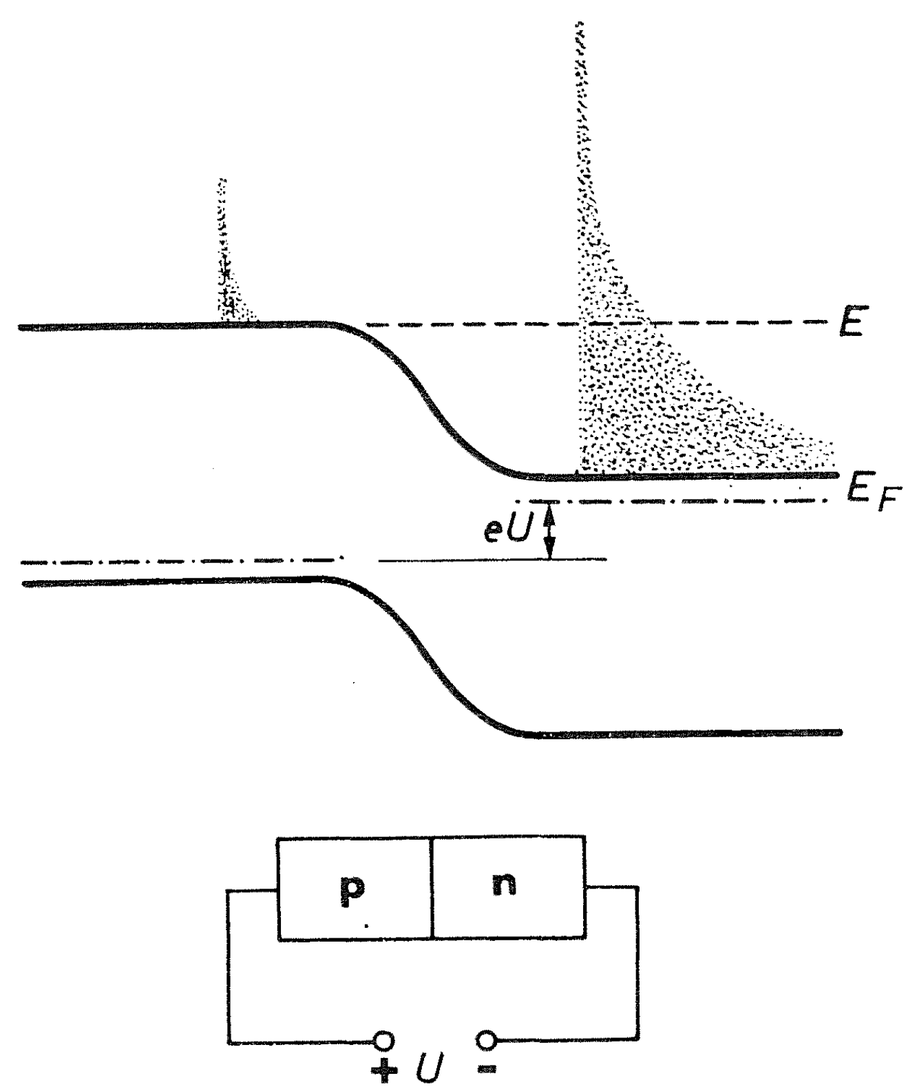
e_0 je naboj elektrona, k pa Boltzmannova konstanta.

Ker velja podoben račun tudi za tok vrzeli I_v, dobimo slednjič za celotni tok skozi stik p-n, se pravi skozi polprevodniško diodo, enačbo:

$$I = I_e + I_v = I_0(e^{-e_0 U/kT} - 1)$$



Sl. 3. Lega energijskih pasov v stiku p-n s priključeno zaporno napetostjo



Sl. 4. Lega energijskih pasov v stiku p-n s priključeno prevodno napetostjo

Uvedli smo sorazmernostni faktor I_0, ki ima dimenzijo toka. Vrednost kT pri sobni temperaturi je okoli 1/40 eV, zato se že pri majhnih napetostih ($U > 0{,}2$ V) tok I zelo približa maksimalni vrednosti I_0, ki ji pravimo zaporni tok. Ker prispevajo k temu toku predvsem maloštevilni elektroni iz polprevodnika p in maloštevilne vrzeli iz polprevodnika n, dioda pri tako priključeni napetosti slabo prevaja.

Tipična vrednost I_0 za usmerniško diodo 1N4003 je le 10^{-9} A, kar je v šoli težko pokazati.

Zdaj priključimo isti napetostni izvir na stik p-n obratno kot prej: pozitivni priključek na polprevodnik p, negativnega pa na polprevodnik n (sl. 4).

Spet sta Fermijeva nivoja razmaknjena za energijo eU, vendar v obratni smeri kot prej. Tok elektronov z leve na desno se ne spremeni, tok elektronov z desne na levo pa se zveča, saj lahko polprevodnik p prek znižane potencialne ovire doseže znatno več elektronov:

$$I_{e\leftarrow} \propto e^{-(E-e_0U)/kT}$$

Za celotni tok prek stika p-n izračunamo:

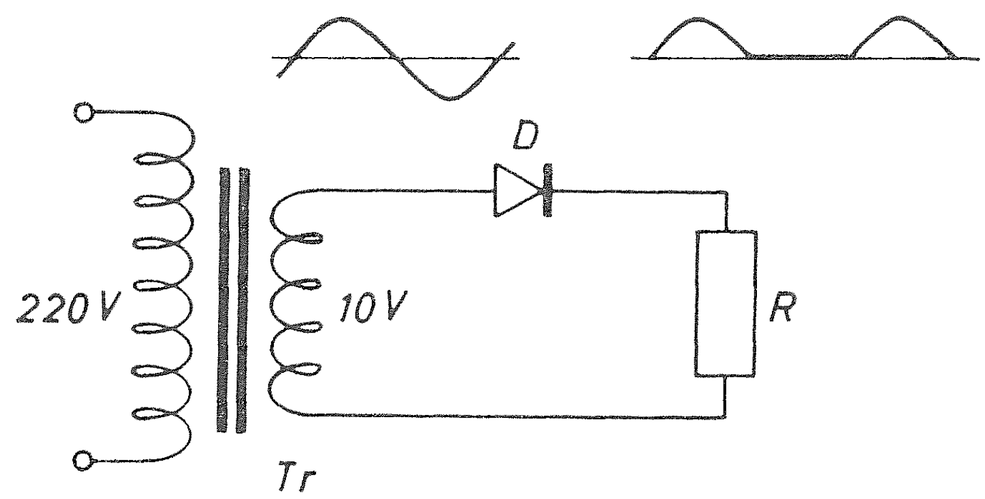
$$I = I_0(e^{e_0U/kT} - 1)$$

Vidimo, da lahko uporabimo isto enačbo za oba primera, če napetost U, pri kateri dioda praktično ne prevaja — imenujemo jo tudi zaporna napetost — štejemo negativno.

Če je napetost v prevodni smeri nad 0,2 V, eksponentni člen popolnoma prevlada. Tedaj raste tok eksponentno z napetostjo. Rečemo lahko tudi obratno: napetost na diodi raste logaritemsko s tokom skoznjo. Obe nelinearni odvisnosti s pridom uporabljamo v analognem računanju.

Predvsem pa se uporablja dioda kot ventil, ki prevaja le v eni smeri, v drugi pa praktično ne. Tako rabi v usmernikih za spreminjanje izmenične napetosti v enosmerno. Oglejmo si delovanje takega usmerniškega vezja (sl. 5).

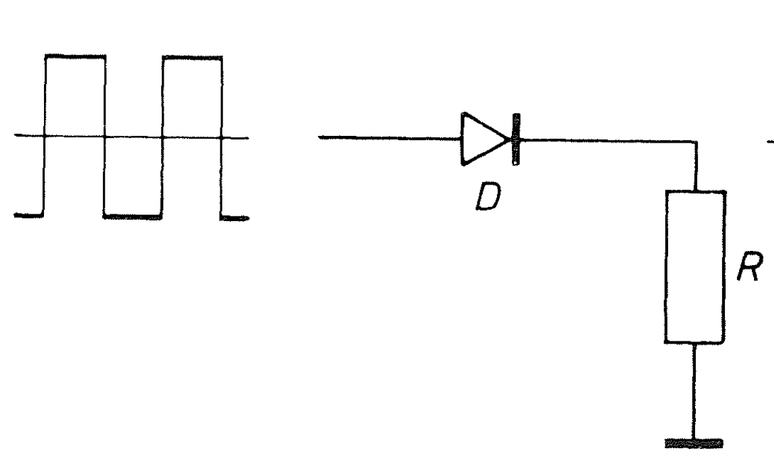
Izmenični izvir naj bo kar omrežni transformator Tr z izhodno napetostjo okoli 10 V. V pozitivni polperiodi teče tok prek zaporedno zvezane diode D in upora R. Ker dioda tedaj dobro prevaja, je na njej majhen padec napetosti in je praktično celotna napetost na uporu. Med negativno polperiodo skozi oba elementa ni toka, zato ni na petosti na uporu. Vendar pa poskus lepo uspe le tedaj, če je frekvenca dovolj majhna in upor R ni prevelik.



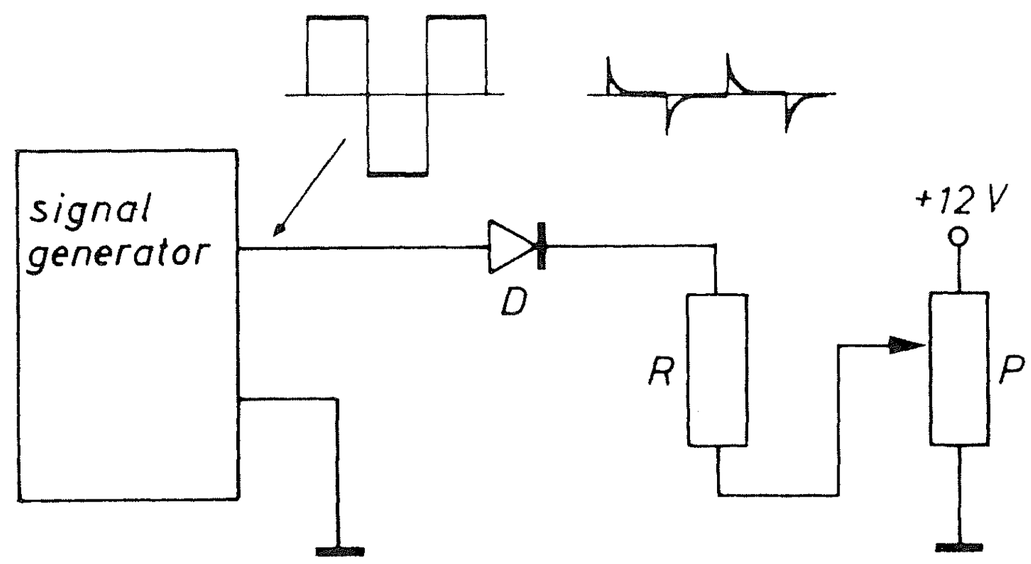
Sl. 5. Usmernik z diodo

Pa uporabimo namesto sinusno oblikovane napetosti pravokotno napetost iz primernega generatorja in povečujmo frekvenco. Osciloskopska slika napetosti (sl. 6) kaže ob nastopu negativne polperiode zobec, ki priča, da skozi diodo najprej steče tok, ki nato eksponentno pada. Tako podobo bi pričakovali, če bi imeli namesto diode kondenzator. Kapacitivni značaj diode pa postane še bolj očiten, če s primernim izvirom napetosti premaknemo izmenični signal tako, da dioda sploh ne more prevajati (sl. 7).

Da bi ocenili kapaciteto diode, lahko napravimo primerjalni poskus. Enako pravokotno napetost kot prej dovedemo na zaporedno vezan kondenzator in upor R in poiščemo tolikšen kondenzator, da bo osciloskopska slika čim bolj podobna prejšnji. V našem primeru smo to dosegli s kondenzatorjem 150 pF, namesto ene pa smo imeli vzporedno zvezanih pet usmerniških diod 1N4003.

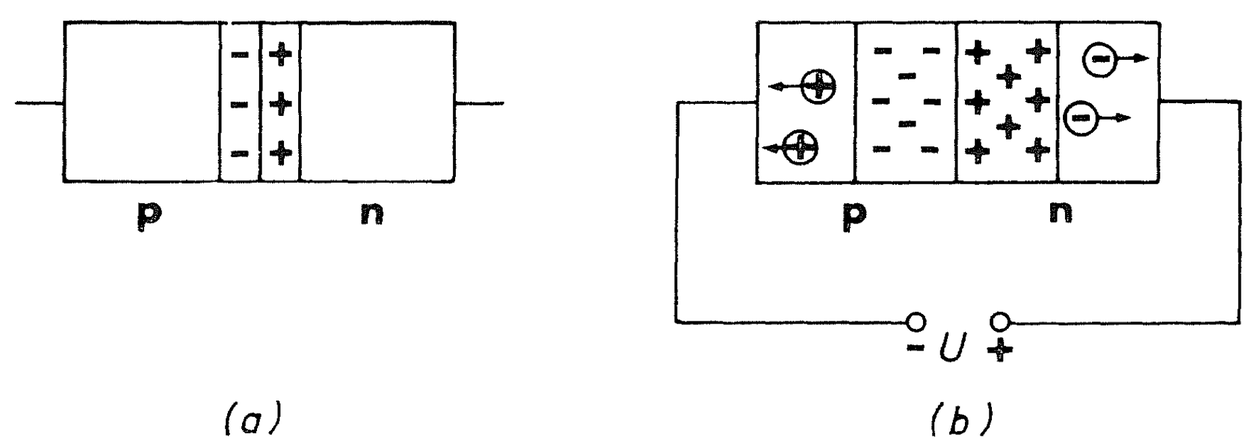


Sl. 6. Neidealno usmerjanje zaradi diodne kapacitete



Sl. 7. Preprosta meritev diodne kapacitete

Da pojasnimo kapacitivno vedenje stika p-n, potrebujemo spet mikroskopsko sliko. Vemo, da že pri staknitvi polprevodnikov n in p pride do preliva elektronov (sl. 8 a). Ko pa priključimo na stik p-n napetost, kot kaže slika 8 b, pride do nadaljnjega odliva elektronov iz polprevodnika n blizu stika. Zato se razširi področje, v katerem je nekompenziran pozitivni naboj donorskih atomov. Podobno posrkamo prosto gibljive vrzeli iz polprevodnika p v bližini stika. Celotno področje prostorskega naboja je zdaj širše, v njem je več naboja. Izid poskusa je tak, kot bi na desni vzeli negativni naboj in ga prelili na levo stran.



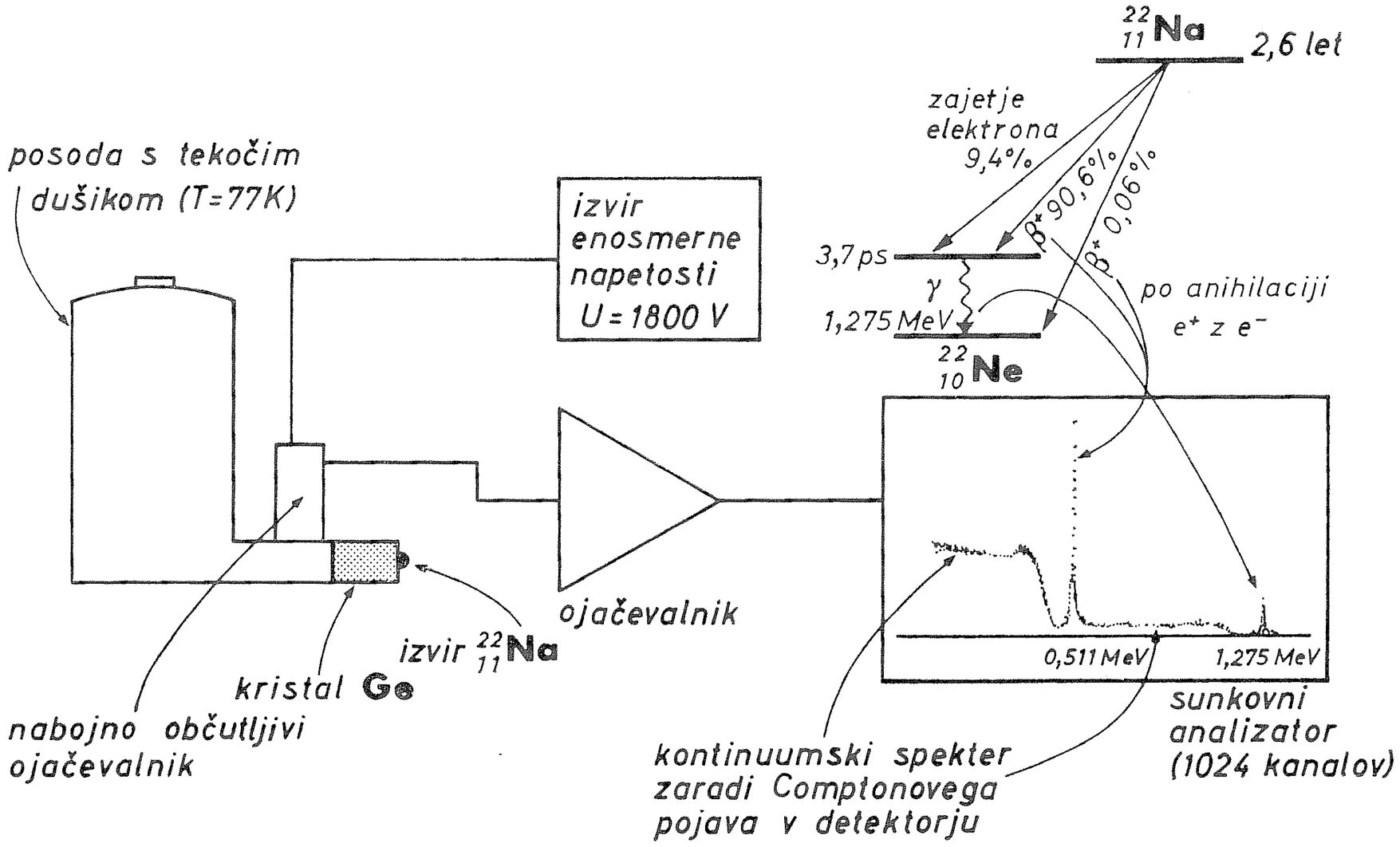
Sl. 8. Širina zaporne plasti je odvisna od zaporne napetosti

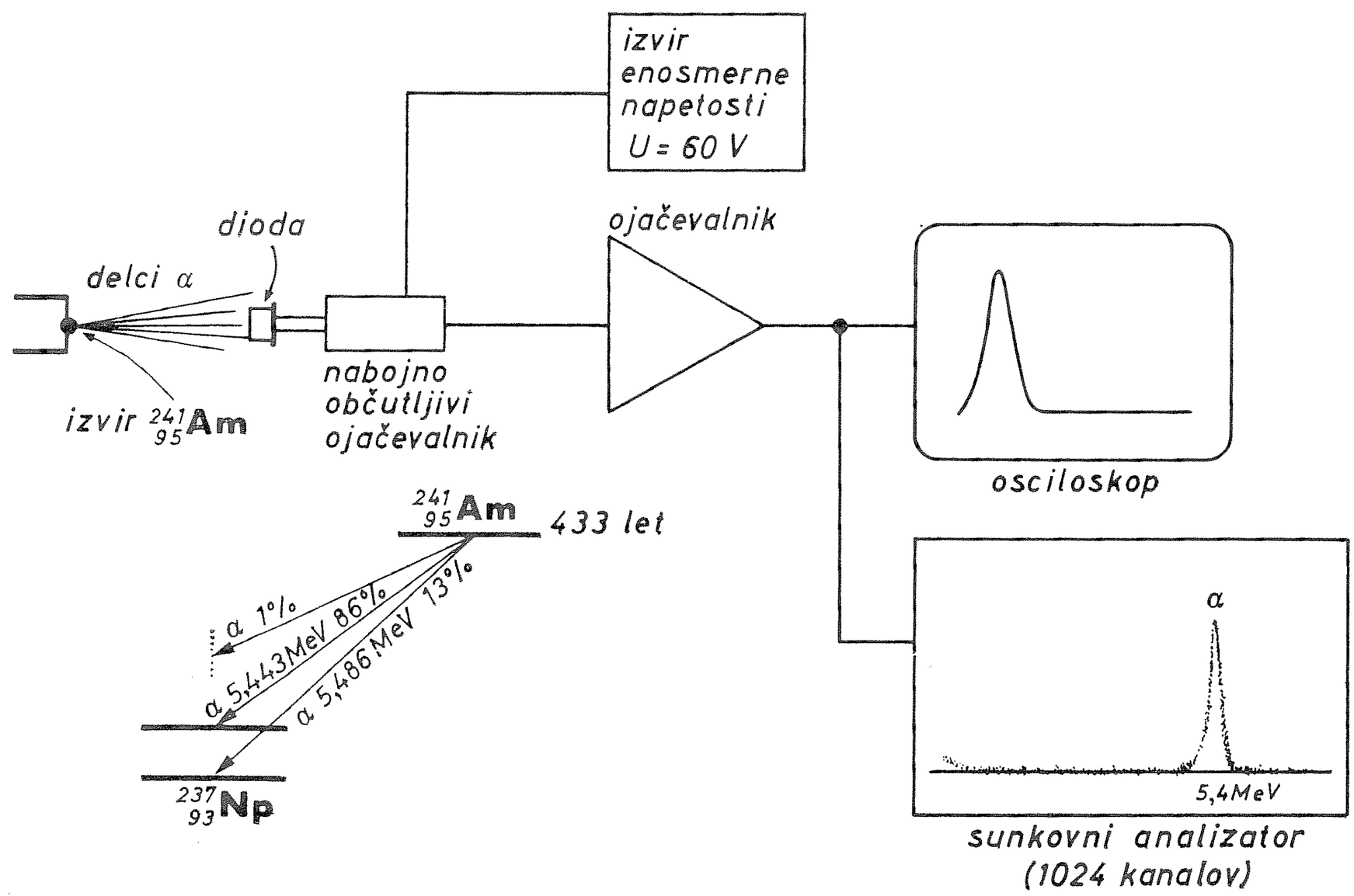
Ko torej priključimo napetost U na stik p-n, pride do preliva naboja e; razmerje e/U je po dogovoru kapaciteta C.

Kapaciteta takega stika p-n ima še zanimivo in močno uporabno lastnost. Dvakrat, trikrat večja napetost ne povzroči dvakrat, trikrat večjega preliva naboja. Tako vedenje niti ne preseneča, če ga primerjamo z razmerami v navadnem ploščatem kondenzatorju, ki ga nabijemo do napetosti U. Pri tem jemljemo naboj z ene kovinske plošče in ga prenašamo na drugo. Obe plošči sta ves čas v enaki razdalji d, poleg tega pa ni omejitev pri prenosu naboja. V kovini je namreč toliko prostih elektronov, da jih že majhen del zadošča za vsa prelivanja, ki pridejo v poštev v običajni praksi. Tako vsebuje 1 cm^3 kovine okoli 10^{22} prostih elektronov, kar pomeni okoli 10^3 As električnega naboja.

V stiku p-n so razmere drugačne. Predvsem je elektronska gostota v polprevodniku n dosti manjša (tipična vrednost je 10^{17} cm^{-3}) kot v kovini. Zato pri prelivanju hitro zmanjka naboja v plasteh tik ob stični ploskvi in je treba seči po nadaljnji naboj globlje na obe polprevodniški področji.

Najpogosteje pa uporabljamo za fotonsko spektroskopijo kristale, v katerih akceptorska primes v zelo čistem osnovnem kristalu natančno kompenzira donorsko primes. Tak kristal ima enako prevodnost kot idealno čist kristal. Natančno kompenzacijo dosežejo z vsiljeno difuzijo litija v kar se da čist kristal germanija ali silicija. Najprej z difuzijo na eni ploskvi močno dopirajo osnovni kristal z litijem. Nastalo diodo potem priključijo na izvir enosmerne napetosti v zaporni smeri in kristal segrejejo, da se poveča gibljivost litijevih ionov v kristalu. Električno polje počasi vleče litijeve ione globlje v kristal. V germaniju mora biti ta postopek zelo počasen in traja nekaj tednov pri temperaturi okrog 60 °C. V takih okoliščinah se ioni litija porazdelijo tako,





Sl. 5. Spekter fotonov iz izvira $^{22}_{11}$Na (a) ter ojačeni sunki in njihova porazdelitev po amplitudi pri merjenju delcev α iz izvira $^{241}_{95}$Am z diodnim detektorjem (b)

da dobimo kompenziran kristal germanija. V germaniju je gibljivost litijevih ionov celo pri sobni temperaturi tolikšna, da moramo njihovo nastalo porazdelitev takoj zamrzniti. Kristal moramo hraniti ves čas, tudi ko z njim ne merimo, pri temperaturi tekočega dušika 77 K. Na kristal priključimo napetost v zaporni smeri (Sl. 4). Električna poljska jakost v kompenzirani plasti je konstantna in približno enaka $\xi = U/d$, če je d debelina kompenzirane plasti, U pa zunanja napetost v zaporni smeri. Kompenzirati je mogoče le do debeline 20 mm. Aktivna prostornina germanijevih detektorjev, kompenziranih z litijem, doseže do 150 cm^3.

V rentgenski spektroskopiji so uporabni tudi detektorji Si(Li). Na tem območju je fotoefekt na atomih z nizkim vrstnim številom znaten. Uporabljajo jih še pri merjenju elektronov, kjer je zaželen detektor iz snovi z nizkim vrstnim številom zaradi manjšega povratnega sipanja elektronov.

Polprevodniški detektorji dajejo nove možnosti pri merjenju prostorske porazdelitve sevanja. V ta namen naparijo na kristal gosto mrežo elektrod. Mogoče je izdelati detektorje, ki imajo prostorsko ločljivost z velikostno stopnjo mikrometra. Izdelavo teh omogoča zelo razvita tehnika mikroelektronskih vezij.

LITERATURA

Glenn K. Knoll, *Radiation detection and measurement,* New York, John Wiley & Sons, 1979.

NOVE KNJIGE

F. KAPPEL, W. SCHAPPACHER, (editors), Abstract Cauchy problems and functional differential equations. Research notes in Mathematics 48, Pitman, Boston, London, Melbourne 1981. 238 + 12 str.

V zadnjih letih se mnogi matematiki ukvarjajo s študijem diferencialnih enačb v Banachovem prostoru; primer take je npr. $y'(t) = A(t, y)$; tu je y funkcija, definirana na realni osi, z vrednostmi v Banachovem prostoru, A pa je za vsak t linearen ali celo nelinearen operator v Banachovem prostoru. K diferencialni enačbi navadno dodamo še začetni ali robni pogoj. Taka abstraktna diferencialna enačba vsebuje kot posebne primere navadne diferencialne enačbe, parcialne diferencialne enačbe, integro-diferencialne enačbe, diferenčno-diferencialne enačbe in druge.

V pričujoči knjigi je 13 člankov, ki so zapisi predavanj konference o diferencialnih enačbah v Banachovem prostoru in nelinearnih polgrup operatorjev. Članki obravnavajo konkretne enačbe ali razrede enačb opisanega tipa. Vsi članki uporabljajo isto metodologijo: problem formulirajo tako, da postane desna stran diferencialne enačbe generator linearne ali nelinearne polgrupe operatorjev. Nato uporabijo rezultate teorije nelinearnih polgrup, ki se je razvila v zadnjih 20 letih. Teorija polgrup pogosto daje eksistenco rešitev, enolično rešljivost, včasih tudi asimptotične ocene ali celo numerično metodo kako aproksimirati rešitev s polgrupo v končno dimenzionalnem prostoru.

Iz zgornjega se vidi, da je knjiga namenjena predvsem strokovnjakom iz področja nelinearne funkcionalne analize in njene uporabe pri diferencialnih enačbah.

Anton Suhadolc

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 1/2

SVETEČE IN LASERSKE DIODE

JANEZ STEPIŠNIK

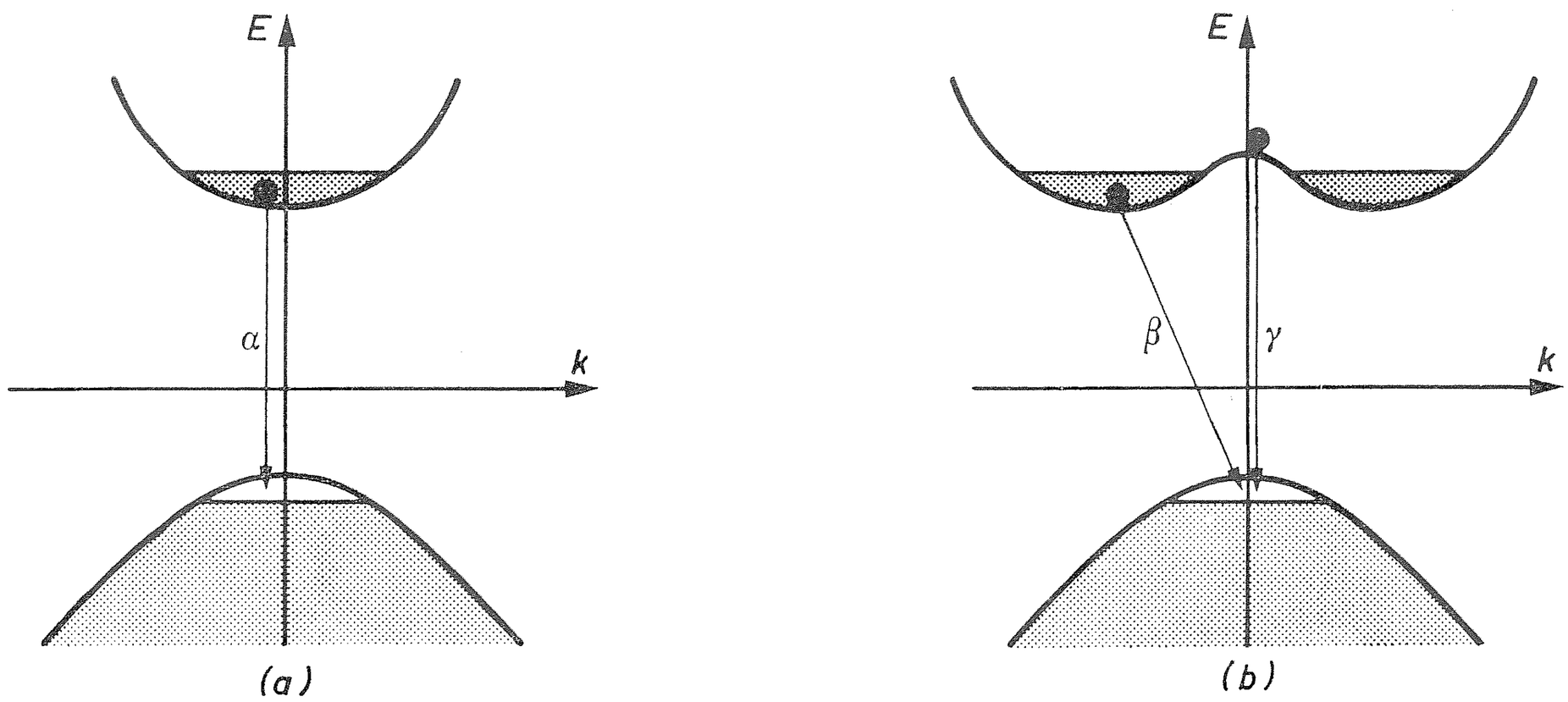
UDK 621.382.2

Opisane so fizikalne osnove sveteče diode in polprevodniškega laserja. Prikazani so pojavi, ki omejujejo izkoristek njihovega delovanja in uporabnosti.

LIGHT EMITING DIODES AND SEMICONDUCTOR LASERS

The basic processes occuring in the light emiting diode and the semiconductor laser are described. Attention is focused on various processes limiting their efficiency and applicability.

Dioda, ki sveti, je tudi eden od standardnih polprevodniških elementov. Najpogosteje jih uporabljajo za številčnice pri žepnih računalnikih in miniaturnih elektronskih napravah, torej tam, kjer potrebujejo majhen in preprost izvir svetlobe. Sveteča dioda je stik p-n, izdelan iz take vrste polprevodnika in s takimi primesmi, da sveti, ko teče skozenj električni tok. Če pritisnemo na stik p-n dovolj veliko napetost v prevodni smeri, preide del elektronov iz nižjega valenčnega pasu v višji prevodni pas. V valenčnem pasu nastanejo prosta stanja — vrzeli, v spodnjem delu prevodnega pasu (Sl. 1) pa z elektroni zasedena stanja. Do take prerazporeditve pride le v tanki plasti okoli stika. Osnovni pojav svetenja je prehod elektrona iz prevodnega pasu v vrzel v valenčnem pasu ob nastanku fotona. Tak prehod imenujemo *rekombinacija elektron-vrzel.*

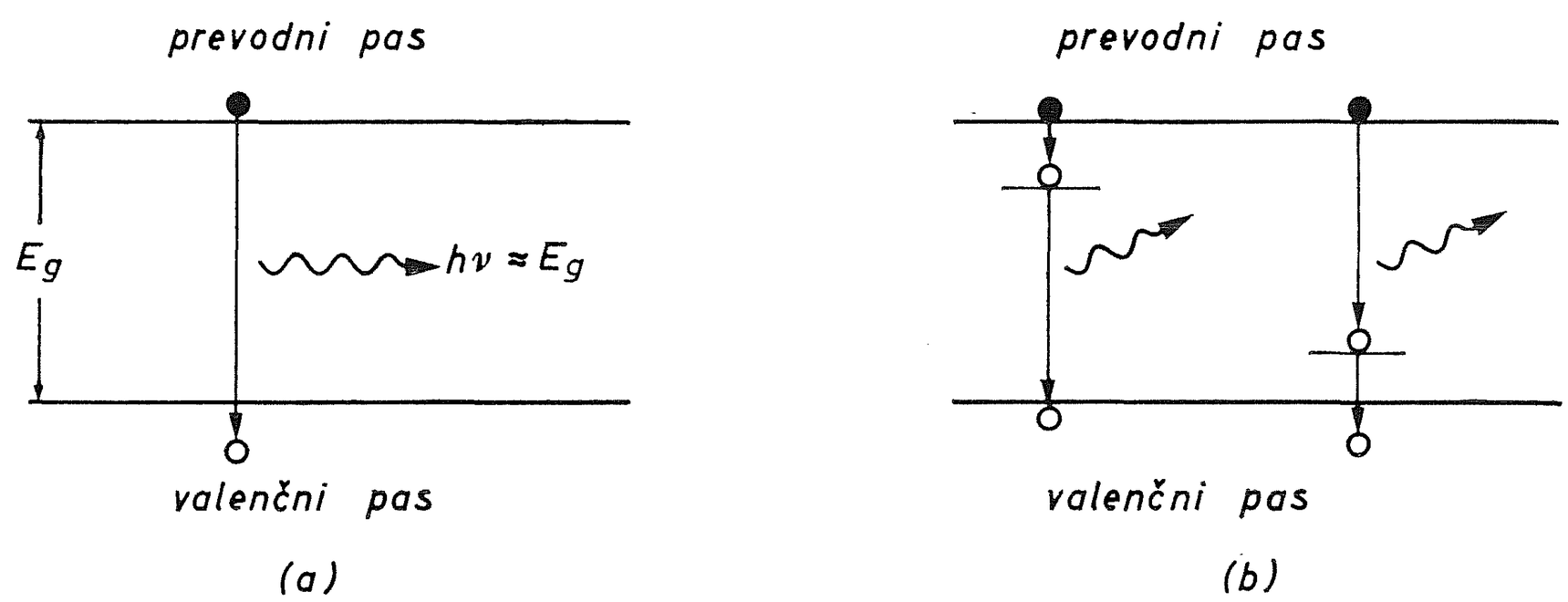


Sl. 1. Sevalni (α, γ) in nesevalni (β) prehodi

Elektron preide v valenčni pas neposredno ali pa preko vmesnih stanj. Pri neposrednem prehodu (Sl. 2 a) je energija izsevanega fotona približno enaka širini prepovedanega pasu E_g in določa valovno dolžino izsevane svetlobe vrsta polprevodnika. Pri polprevodniku s primesmi pa lahko poteka rekombinacija elektron-vrzel posredno preko energijskih stanj, ki nastanejo

zaradi primesi v prepovedanem pasu (Sl. 2 b). Valovno dolžino svetlobe lahko spreminjamo z izbiro koncentracije in vrste primesi.

Prehod elektrona v valenčni pas ni vedno združen z nastankom fotona. Energijo lahko prevzamejo tudi mrežna nihanja. Tak prehod imenujemo nesevalni. Mi pa želimo dobiti čim več svetlobe, zato izberemo polprevodnik s takimi primesmi, da prevladujejo sevalni prehodi. Pri polprevodnikih, kot sta GaAs in InSb, ležita minimum prevodnega pasu in maksimum valenčnega pasu pri isti vrednosti valovnega vektorja k (Sl. 1 a). Prehod α elektrona v valenčni pas $\Delta k \approx 0$ zato ni povezan z znatno spremembo gibalne količine elektrona. Vso razliko energije in gibalne količine prevzame foton. Drugače je pri polprevodnikih Si, Ge in GaP. Večina zasedenih stanj v prevodnem pasu je v minimumu, ki leži pri drugi vrednosti k kot maksimum valenčnega pasu, kjer je večina prostih stanj (Sl. 1 b). Prehod β zahteva poleg energijske tudi znatno spremembo gibalne količine, ki je foton ne more prevzeti. Prevzamejo pa jo lahko mrežna nihanja-fotoni. To je nesevalni prehod. V principu je mogoč prehod γ (Sl. 1 b) z $\Delta k \approx 0$, vendar je verjetnost, da so zasedena višja energijska stanja v prevodnem pasu, zelo majhna.



Sl. 2. a) neposreden prehod elektrona iz prevodnega v valenčni pas in b) prehod preko vmesnih stanj

Velik vpliv na delovanje sveteče diode ima tudi ponovna absorpcija fotonov in odboj na mejnih plasteh. Oba pojava lahko tudi stokrat zmanjšata izkoristek diode.

Nekaj vrst svetečih diod in način njihovega delovanja bomo spoznali na naslednjih primerih.

a) Sveteča dioda GaAs seva infrardečo svetlobo z valovno dolžino 0,92 μm, kar ustreza neposrednemu prehodu elektrona iz prevodnega v valenčni pas preko energijske razlike, ki meri 1,35 eV. Notranji izkoristek diode (razmerje sevalnih rekombinacij proti vsem rekombinacijam) je okoli 15 %. Toda ponovna absorpcija in refleksija zmanjšajo izkoristek na vsega 1 %.

b) Sveteča dioda GaP s primesmi Zn in O seva rdečo svetlobo z energijo fotonov 1,7 eV, pri čemer je širina prepovedanega pasu 2,25 eV. Prehod je posreden preko nivojev, ki jih tvorijo primesi cinka in kisika v prepovedanem pasu. Kljub temu je izkoristek diode okoli 2 %, ker je verjetnost ponovne absorpcije izsevanega fotona majhna.

c) Sveteča dioda GaP s primesjo dušika seva širok spekter svetlobe, katerega vrh se spreminja s koncentracijo primesi. Oko zazna svetlobo kot

rdečo pri majhnih koncentracijah dušika pa prav do zelene pri večjih. V prepovedanem pasu nastane pas stanj, ki se širi, ko se razdalje med atomi dušika manjšajo. Izkoristek je majhen, vendar razmeroma velika občutljivost človeškega očesa za zeleno in rumeno svetlobo omogoča uporabo te diode.

d) Sveteča dioda $GaAs_xP_{1-x}$ s primesjo dušika je spet primer sveteče diode z neposrednimi prehodi, če je le x manjši od 0,5. Širino prepovedanega pasu spreminjamo z večanjem deleža fosfora v spojini. S tem spreminjamo valovno dolžino svetlobe od rdeče do zelene.

Iz sveteče diode je nastala laserska dioda. Toda preden se lotimo opisa, si oglejmo nekaj osnov delovanja laserja. Poenostavljeno si predstavljamo prehod elektrona iz prevodnega v valenčni pas kot prehod med dvema energijskima nivojema. Če predpostavljamo, da je zasedenost spodnjega nivoja N_1, zgornjega nivoja N_2 in pa da so navzoči fotoni, se zasedenost zgornjega nivoja spreminja kot

$$dN_2/dt = -A\,N_2 - B\,U(\nu)\,N_2 + B\,U(\nu)\,N_1 \tag{1}$$

Pri tem je $U(\nu)$ gostota fotonov, A in B pa sta konstanti. Prvi člen na desni ustreza spontanim prehodom na spodnji nivo, drugi stimuliranim prehodom z zgornjega nivoja na spodnjega in tretji člen prehodom s spodnjega nivoja na zgornjega zaradi absorpcije fotonov. Pogoj za delovanje laserja je, da prevladuje drugi člen, to je stimulirano sevanje. To dosežemo tako, da

poskrbimo, da je zasedenost zgornjega nivoja večja kot zasedenost spodnjega nivoja ($N_2 > N_1$) in prevladuje sevanje nad absorpcijo, ter

povečamo gostoto fotonov $U(\nu)$ tako, da sistem zapremo med zrcali, ki preprečujeta uhajanje fotonov, in je spontano sevanje šibkejše od stimuliranega ($AN_2 \ll BU(\nu)N_2$).

Pri elektronih v polprevodniku imamo v vsakem pasu mnogo stanj, ki so lahko zasedena le z enim elektronom. Ne moremo govoriti o zasedenosti, temveč le o verjetnosti, da je stanje zasedeno (f) ali prosto ($1-f$). Tako hitrost stimuliranih prehodov elektronov iz prevodnega v valenčni pas lahko zapišemo kot

$$f_c\,A_c(1-f_v)\,A_v\,U(\nu)\,B \tag{2}$$

in hitrost prehodov zaradi absorpcije kot

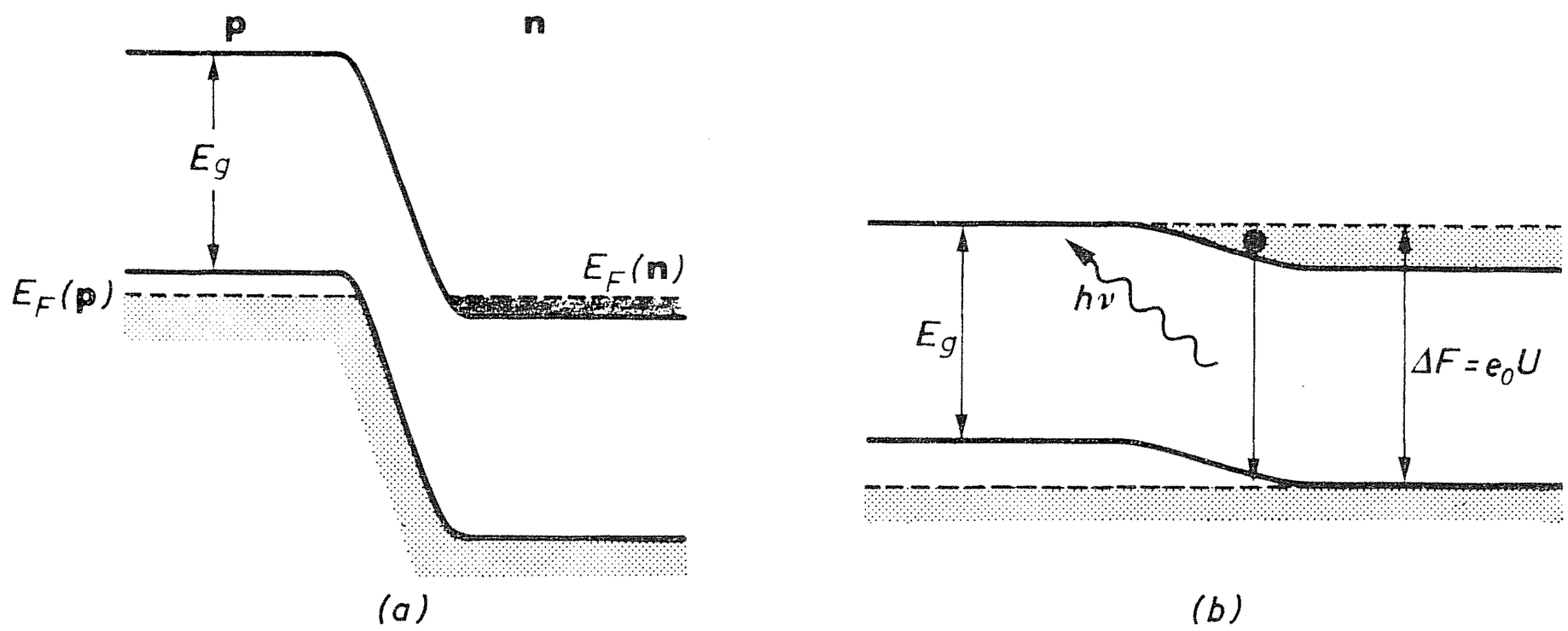
$$f_v\,A_v(1-f_c)\,A_c\,U(\nu)\,B \tag{3}$$

f_v in f_c sta verjetnosti za zasedenost elektronskih stanj v valenčnem in prevodnem pasu, A_v in A_c pa sta efektivni gostoti stanj valenčnega in prevodnega pasu. Če predpostavimo, da je gostota fotonov velika in lahko zanemarimo spontane prehode, je pogoj za delovanje polprevodniškega laserja, da je izraz (2) večji od izraza (3). Odtod pa sledi zahteva

$$f_c > f_v \tag{4}$$

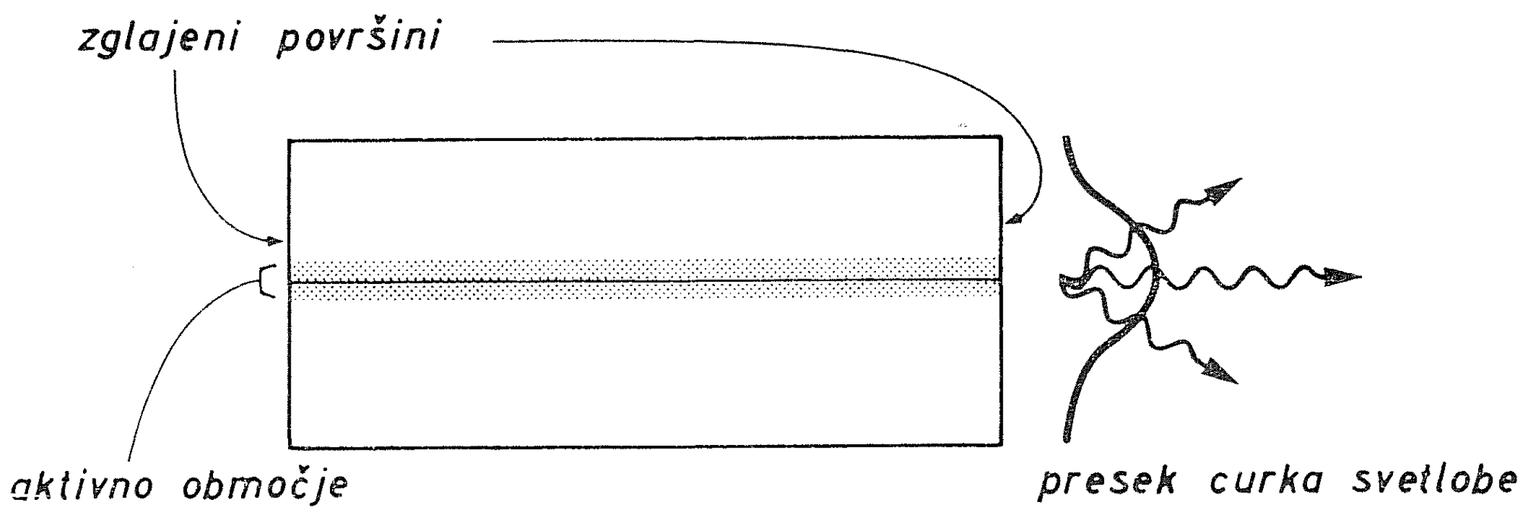
Pri laserski diodi ji ustrežemo s posebnim prijemom. Koncentracijo primesi v polprevodniku povečamo tako močno, da se Fermijev nivo pomakne nad spodnji rob prevodnega pasu, koncentracijo primesi v polprevodniku p pa toliko, da se Fermijev nivo pomakne pod zgornji rob valenčnega pasu (sl. 3). To dosežemo pri gostoti donorskih in akceptorskih atomov v polprevodniku približno $10^{24}\ m^{-3}$. Dokler ne pritisnemo napetosti na stik p-n, ležita

oba Fermijeva nivoja na isti vodoravnici (Sl. 3 a). S pritisnjeno napetostjo se razmakneta za $\Delta F \approx e_0 U$, če je U pritisnjena napetost in e_0 osnovni naboj. V primeru, da je napetost v prevodni smeri tolikšna, da je $\Delta F \geqq E_g$, dobimo v zaporni plasti elektrone v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu (sl. 3 b). Pogoj za lasersko delovanje je izpolnjen.



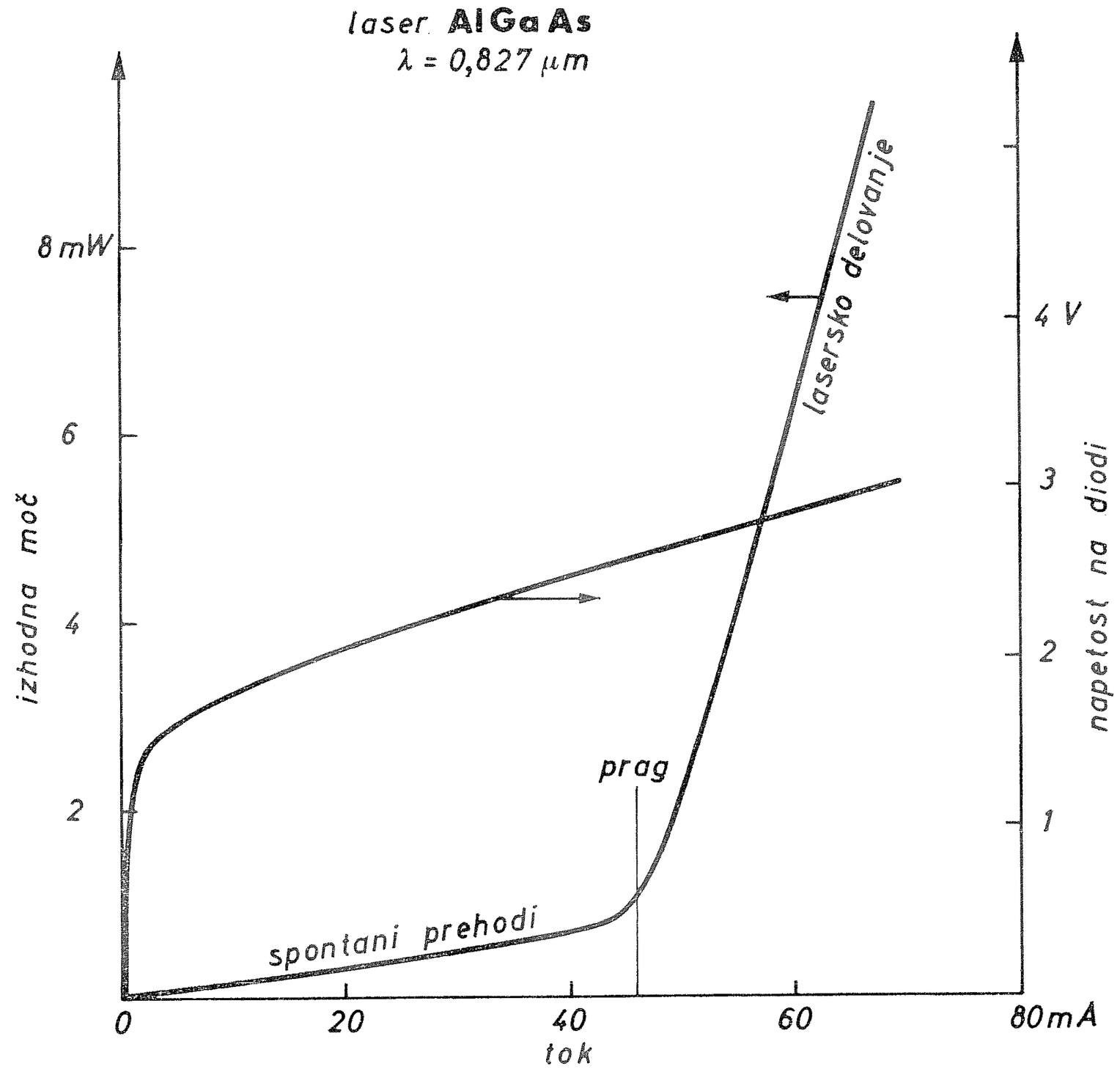
Sl. 3. Energijski nivoji laserske diode a) brez pritisnjene napetosti in b) z napetostjo v prevodni smeri

Pri diodi GaAs je za delovanje laserja potrebna napetost okoli 1,5 V. Pri tem sta zrcali kar dve nasprotni zglajeni površini, ker je odbojnost zaradi velike razlike lomnih količnikov na meji polprevodnik-zrak okoli 35 % (Sl. 4). Aktivno območje laserja je nekoliko širše od širine zaporne plasti (0,1 μm), vendar je prečni presek laserskega curka zaradi divergence znatno širši (40 μm). V neaktivnem območju polprevodnika pa imamo močno absorpcijo fotonov. Tako je pri laserju GaAs, ki deluje pri temperaturi 77 K zvezno z močjo nekaj wattov, notranji izkoristek 70 %, zunanji pa zaradi absorpcije le 30 %. Laser se zato močno greje.



Sl. 4. Laserska dioda

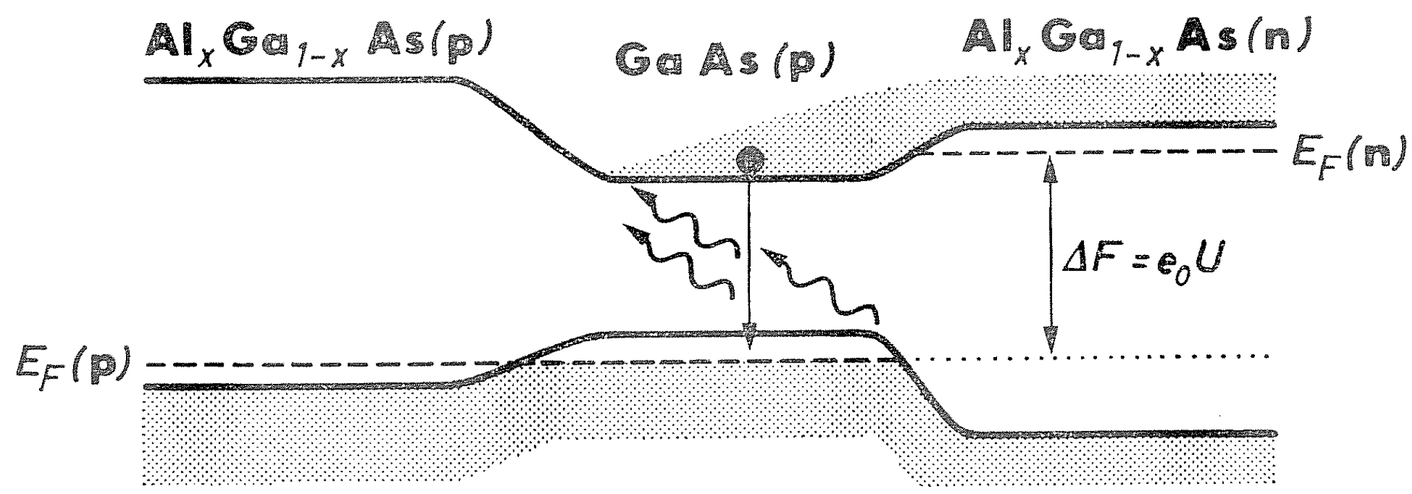
Tokovni prag (Sl. 5) za lasersko delovanje je odvisen od temperature, ker se s temperaturo zmanjšuje $f_c(1 - f_v)$, narašča pa $(1 - f_c) f_v$. Nad neko kritično temperaturo pridemo v začarani krog. Višja temperatura zahteva večji tok, večji tok pa spet greje laser in zvezno delovanje laserja je nemogoče. Laser lahko deluje le pod neko kritično temperaturo in ga je treba hladiti. Ta omejitev znatno zmanjša uporabnost polprevodniškega laserja kljub prednostim, ki jih ima pred vrstami laserjev. To je njegova velikost in dejstvo, da z izvirom napetosti 1,5 V in tokovi 10—100 mA dosežemo lasersko delovanje.



Sl. 5. Izhodna moč in napetost na laserski diodi v odvisnosti od električnega toka

Problem hlajenja so rešili tako, da so namesto dvoplastne diode izdelali večplastno diodo $Al_xGa_{1-x}As$(p)-GaAs(p)-$Al_xGa_{1-x}As$(n) (Sl. 6). S tako zgradbo omejimo presek laserskega curka na aktivno območje plasti GaAs, ker je razlika lomnih količnikov med plastmi znatna. Potencialna ovira med plastema $Al_xGa_{1-x}As$(p) in GaAs(p) pa dodatno poveča koncentracijo elektronov v aktivni plasti. Tak laser deluje zvezno tudi pri sobni temperaturi.

Poleg tega, da je majhen in da je napajanje preprosto, odlikuje polprevodniški laser tudi velik izkoristek. Energijski tok izhodnega curka lahko preprosto moduliramo, zato je laser primeren za uporabo pri optičnih komunikacijah.



Sl. 6. Energijski nivoji večplastne laserske diode z napetostjo v prevodni smeri

LITERATURA

[1] Orazio Svelto, David C. Hanna *Principles of lasers,* Heiden, London, New York, Rheine, 1976.

[2] *Semiconductors Devices for Optical Communication,* Topics in Applied Physics, vol. 39, Springer-Verlag, 1980.

Obzornik mat. fiz. **29** (1982) 1/2

TERMOELEKTRIČNI POJAVI

SLOBODAN ŽUMER

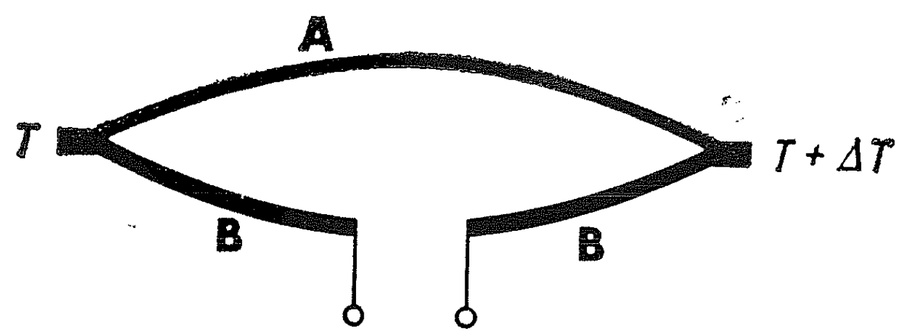
UDK 537.311.32

Delo opisuje fenomenologijo pojavov Peltiera, Seebecka in Thompsona, ki spremljajo električni in toplotni tok v prevodnih snoveh.

THERMOELECTRIC PHENOMENA

The phenomenology of the thermoelectric effects in semiconductors is described.

Termoelektrične pojave poznamo že dolgo, vendar se je njihova uporaba razmahnila šele z razvojem tehnike polprevodnikov. Slika 1 kaže preprost električni krog iz dveh vodnikov (A in B) s spojnima mestoma na različnih temperaturah (T in $T + \Delta T$). Če krog prekinemo, se med prostima koncema pojavi *termoelektrična napetost* ΔU_{AB}. Pojav nosi ime po Seebecku, ki ga je odkril leta 1822. V sklenjenem krogu pa teče električni tok in eno spojno mesto toploto požira, drugo pa oddaja. Ta pojav je leta 1834 odkril Peltier. Poleg tega vodnika izmenjujeta toploto z okolico še povsod tam, kjer je vzdolžni temperaturni gradient različen od nič (Thompsonov pojav, znan od 1854). Vse tri pojave spremljata prevajanje toplote vzdolž vodnikov in sproščanje Joulove toplote.



Sl. 1. Termoelektrični krog

Eksperimentalne ugotovitve

Opazovanja različnih spojev so pokazala, da lahko $\Delta U_{AB}(T, T + \Delta T)$ zapišemo kot razliko dveh napetosti $\Delta U_A(T, T + \Delta T) - \Delta U_B(T, T + \Delta T)$, odvisnih le od snovi, iz katere je vodnik, in od obeh temperatur. Po dogovoru merimo vedno napetost hladnejšega spoja glede na toplejši spoj. Termoelektričnost snovi karakteriziramo z *absolutnim termoelektričnim koeficientom*

$$\alpha = (\Delta U/\Delta T)_{\Delta T \to 0} \tag{1}$$

ki je lastnost snovi. Koeficient sam in njegova temperaturna odvisnost se pri različnih snoveh močno razlikujeta (Sl. 2). Pri kovinah meri α nekaj μV/K, pri polprevodnikih pa nekaj mV/K.

Merjenje Peltierovih toplotnih tokov pokaže, da je toplota P_P, ki jo spoj odda ali prejme, sorazmerna z električnim tokom I:

$$P_P = \pi_{AB} I \tag{2}$$

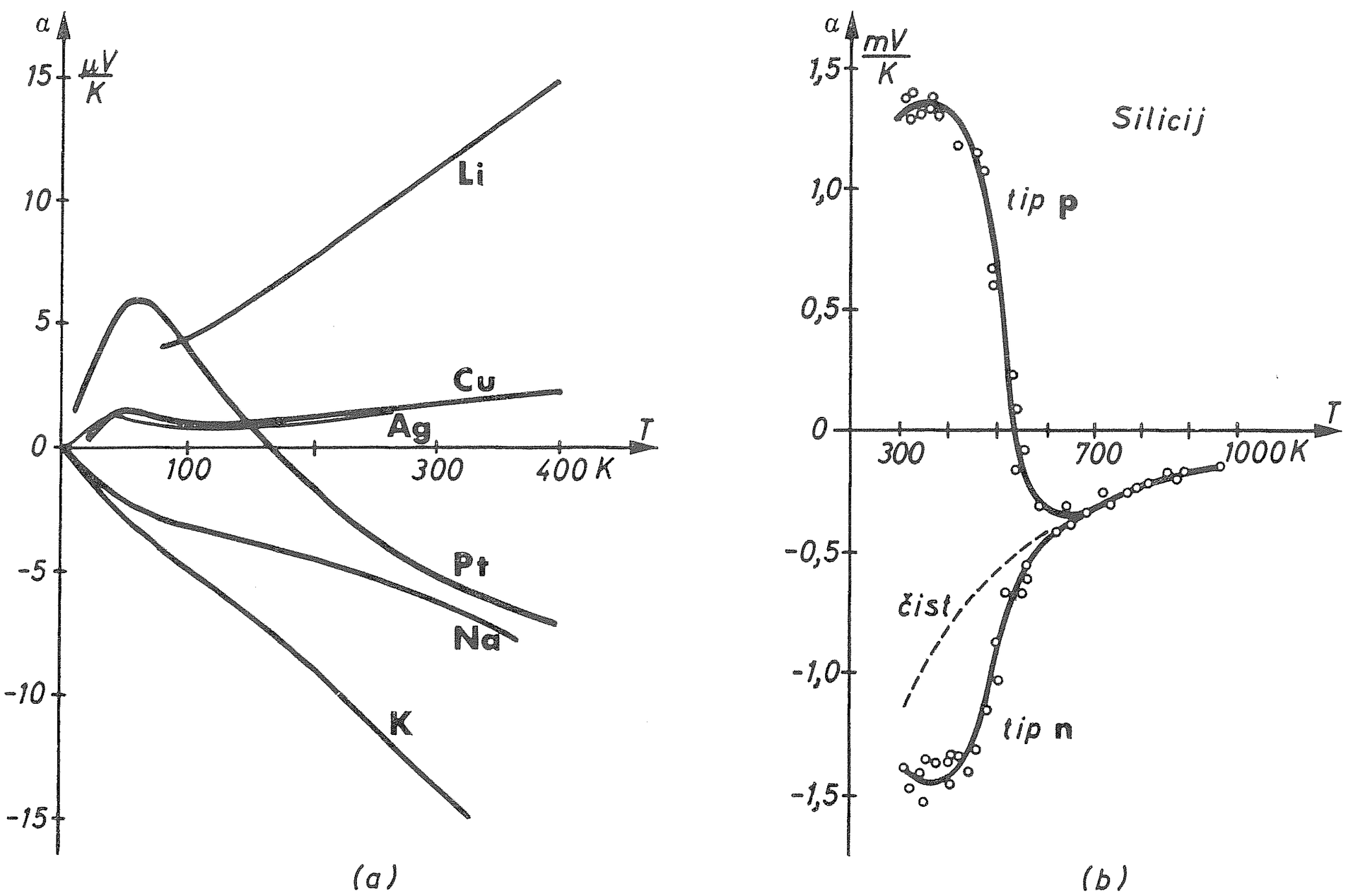
Peltierov koeficient π_{AB} je odvisen samo od temperature spoja in snovi, iz katerih sta vodnika. Vpliva vodnikov sta neodvisna, tako da lahko zapišemo

$\pi_{AB} = \pi_A - \pi_B$. Kasneje bomo ugotovili, da se da npr. π_A izraziti s produktom $\alpha_A T$. V navadnih okoliščinah meri π pri polprevodnikih okoli 1 W/A, pri kovinah pa je tisočkrat manjši.

Podobno je pri Thompsonovem pojavu, pri katerem vodnik izmenjuje toploto z okolico, ko teče po njem električni tok in je vzdolž njega od nič različen temperaturni gradient. Del vodnika, na katerem se temperatura spremeni za dT, oddaja ali prejema toplotni tok

$$dP_T = \sigma I \, dT \tag{3}$$

Koeficient σ je odvisen od temperature in snovi. Pozneje ga bomo povezali s preostalima termoelektričnima koeficientoma. Pri polprevodnikih meri σ nekaj mV/K, pri kovinah pa μV/K.



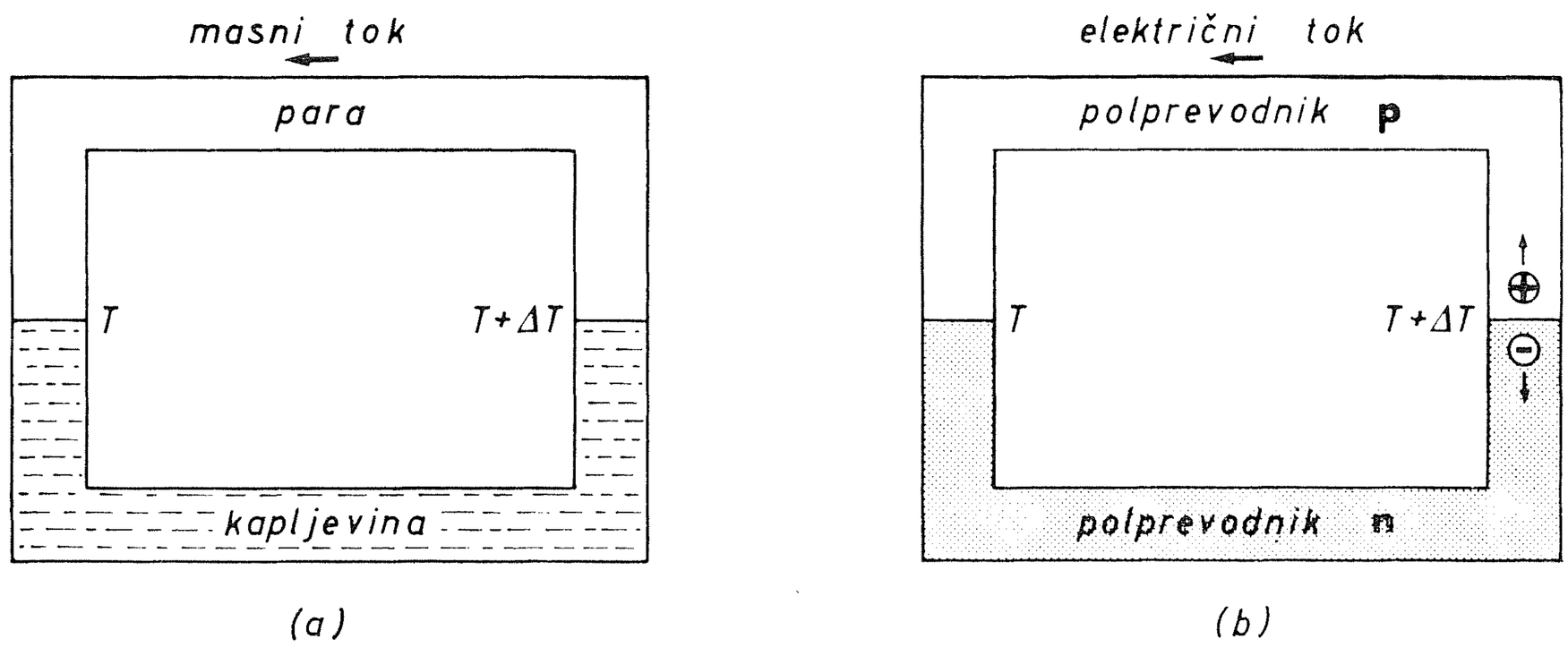
Sl. 2. Temperaturna odvisnost absolutnega termoelektričnega koeficienta α za nekaj kovin (a) in za čist polprevodnik in polprevodnik s primesmi (b)

Peltierov in Thompsonov toplotni tok spremenita smer, ko spremenimo smer električnega toka. Zato pričakujemo, da se nasprotno kot Joulova toplota Peltierova in Thompsonova toplota izmenjujeta reverzibilno.

Fizikalna slika

Za začetek si oglejmo bolj domač sistem para-kapljevina. Zaprimo ju v vezno posodo, katere kraka imata različni temperaturi (sl. 3 a). Sistem seveda ni ravnovesen, lahko pa je stacionaren. Na toplejšem koncu kapljevina izhlapeva in jemlje toploto okolici podobno kot pri Peltierovem pojavu. Vroča para se pomika po cevi na hladnejšo stran, kjer je tlak nižji. Pri tem seveda oddaja odvečno toploto okolici podobno kot pri Thompsonovem pojavu. Obratno sprejema kapljevina v spodnji cevi, kjer teče v nasprotni smeri kot para, toploto iz okolice. V hladnejšem kraku se para kondenzira na po-

vršini kaljevine in oddaja toploto okolici. Če s pregrado preprečimo pretakanje, se pojavi tlačna razlika — podobno kot električna napetost pri Seebeckovem pojavu.



Sl. 3. Vezna posoda s paro in kapljevino (a) in termoelektrični krog iz polprevodnika n in p (b)

Sedaj si oglejmo še termoelektrični krog iz polprevodnikov *p* in *n* (Sl. 3 b). V področju toplejšega spoja pogosteje nastajajo pari vrzel-elektron. Elektroni se nabirajo na strani *n*, vrzeli pa na strani *p*. Energija, ki se pri tem porablja, doteka iz okolice (Peltierov pojav). Prosti nosilci naboja, ki jih je tako na toplejšem koncu kroga več in so tudi bolj »vroči«, se umikajo na hladnejšo stran. Pri tem se »ohlajajo« — oddajajo odvečno energijo (Thompsonova toplota). Elektroni potujejo predvsem po polprevodniku *n*, vrzeli pa po polprevodniku *p*, kjer so večinski nosilci naboja. V hladnejšem spoju elektroni in vrzeli ob rekombinaciji izginjajo, pri čemer se sprošča energija. Električne in toplotne tokove lahko tudi obrnemo, če krog priključimo na izvir napetosti. Če pa krog prekinemo, se med prostima koncema pojavi električna napetost (Seebeckov pojav) kot posledica težnje nosilcev naboja, da se s toplejšega mesta umaknejo na hladnejše. Podobno analizo bi lahko napravili za spoj polprevodnik-kovina. Ker pa so termoelektrični pojavi v kovinah veliko manj izraziti kot v polprevodnikih (Sl. 2), lahko pri takih spojih obravnavamo le termoelektrične lastnosti polprevodnikov. Na tem temelji tudi preprosta metoda za ugotavljanje tipa polprevodnika. Ob polprevodniško ploščico pritisnemo dve kovinski konici, med kateri vežemo voltmeter. Eno od konic segrejemo in opazujemo polariteto napetosti. Za polprevodnik tipa *p* je hladnejši spoj pozitiven ($\alpha_p > 0$), za tip *n* pa velja obratno ($\alpha_n < 0$).

Podrobnejša obravnava polprevodniških in kovinskih spojev bi pokazala, da so dogajanja lahko bolj zapletena: gibljivost »vročih« elektronov ni nujno večja od gibljivosti »hladnih« elektronov; vpliv temperature na lego Fermijevega nivoja E_F je odvisen od vrste snovi.

V okviru preproste mikroskopske slike bomo ocenili Peltierov koeficient. Po definiciji je π enak razmerju med toplotnim in električnim tokom

$$\pi = \sum E_i v_i / \sum e_i v_i \tag{4}$$

ki smo ju izrazili kot vsoti prispevkov vseh prostih nosilcev naboja (elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu). Pri tem je $e_i = \pm e_0$ (e_0 je

osnovni naboj), v_i je hitrost i-tega nosilca naboja in E_i njegova energija. Približno smemo zapisati

$$\pi \cong \pm \bar{E}/e_0 \text{ (+ za polprevodnik p, — za polprevodnik n)}, \tag{5}$$

$\bar{E}$ je povprečna energija prostega nosilca naboja. Štejemo jo običajno od Fermijevega nivoja. Za polprevodnik n E dobro podaja razlika med spodnjim robom prevodnega pasu in E_F. Tako ima π_n velikostno stopnjo enega volta. Podobno je za polprevodnik p. Pri kovinah, kjer E_F leži znotraj prevodnega pasu, je za $T \ll E_F/k$ vzbujen le majhen del elektronov, njihov delež podaja razmerje kT/E_F. Vzbujeni elektroni imajo tu tisočkrat manj energije kot pri polprevodnikih. Enako velja za α, ki naj bi bil linearno odvisen od temperature. Čeprav so tako dobljene ocene zelo približne, nam kvalitativno pojasnjujejo vedenje termoelektričnih koeficientov π in α (glej sliko 2).

Termodinamične zveze

Termodinamično razlago termoelektričnih pojavov, ki si jo bomo na kratko ogledali, je podal že Thompson. Pri tem je pustil ob strani ireverzibilnost električnega in toplotnega toka po vodnikih; kljub temu so tako dobljene zveze pravilne. Na neoporečno razlago termoelektričnosti, ki temelji na termodinamiki križnih transportnih pojavov in ki jo je podal Onsager, je bilo treba čakati še skoraj sto let.

Vzemimo, da naboj Δe reverzibilno obkroži sklenjeno zanko iz vodnikov A in B, ki imata spoja na temperaturah T in $T + \Delta T$. Iz enačbe (3) sledi, da ob tem naboj odda toploto $\sigma_A \Delta T \Delta e$ pri prehodu skozi vodnik A, nakar jo v vodniku B prejme $\sigma_B \Delta T \Delta e$. Prav tako pri prehodu skozi toplejši spoj prejme $\pi_{AB}(T + \Delta T)\Delta e$ toplote in je $\pi_{AB}(T)\Delta e$ odda pri prehodu skozi hladnejši spoj. Ker se pri obhodu entropija ne spremeni, velja:

$$-\sigma_A \Delta T/T + \sigma_B \Delta T/T - \pi_{AB}(T)/T + \pi_{AB}(T + \Delta T)/(T + \Delta T) = 0 \tag{6}$$

tako da dobimo v limiti $\Delta T \to 0$ zvezo med Peltierovim in Thompsonovim koeficientom:

$$\sigma_A - \sigma_B = T\, d(\pi_{AB}/T)/d\,T \tag{7}$$

Podobno iz energijske bilance za enoto pretočenega naboja sledi

$$-\sigma_A \Delta T + \sigma_B \Delta T - \pi_{AB}(T) + \pi_{AB}(T + \Delta T) - \Delta U_{AB} = 0 \tag{8}$$

in v limiti $\Delta T \to 0$

$$\sigma_A - \sigma_B - d\,\pi_{AB}/d\,T = \alpha_{AB} \tag{9}$$

Če upoštevamo še zvezo (7), sledi

$$\pi_{AB} = T\,\alpha_{AB} \tag{10}$$

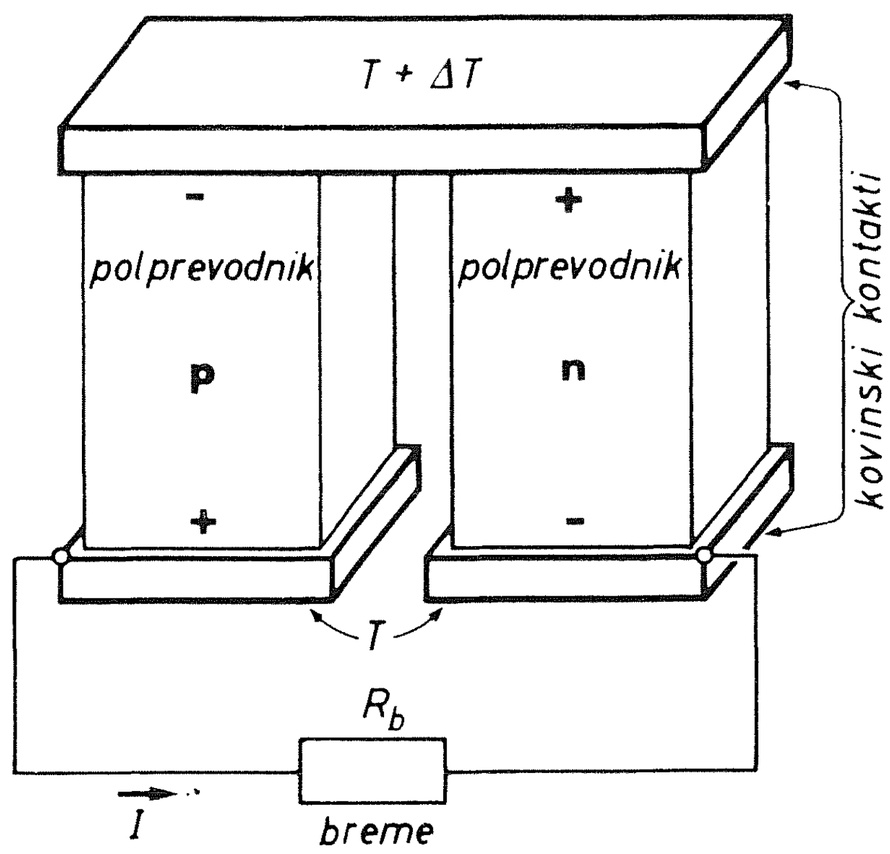
Vidimo torej, da iz enega samega koeficienta in njegove temperaturne odvisnosti lahko določimo še ostala dva termoelektrična koeficienta.

Uporaba termoelektričnih pojavov

Termočlen, ki je že dolgo znan, izkorišča pojav termonapetosti v kovinah za merjenje temperature na zelo širokem temperaturnem območju. Ponavadi uporabimo spoj kovina-zlitina.

Primeri: spoj Pt-(Rh + Pt) uporabljamo na območju 0—1700 °C, Cu-konstantan od — 200 °C do 400 °C in W-(Re + W) od 1000 °C do 2800 °C. Referenčni spoj moramo ohranjati pri stalni temperaturi, ponavadi dosežemo to s posodico s talečim se ledom.

Termoelektrični generator ima za osnovo spoj, ki ga kaže slika 4. Kovinske ploščice, med katere sta priključena polprevodnika p in n, skrbijo za boljši prenos toplote, na termoelektrične lastnosti spoja pa ne vplivajo. Generator daje maksimalno moč, ko je upor bremena R_b enak notranjemu uporu generatorja R_g. Izkoristek generatorja je razmerje med električno močjo I^2R_b, ki se rabi na bremenu, in toplotnim tokom, ki ga na toplejšem spoju krog sprejema. Slednji se da zapisati kot vsota členov: $\pi(T)\, I + \lambda\, \Delta T\, A\, L - \varrho\, I^2\, L/2A$. Prvi člen je Peltierov toplotni tok, drugi toplotno prevajanje obeh polprevodniških krakov in zadnji polovica sproščene Jouleove toplote, ki jo prejme toplejši spoj. Za oba polprevodnika smo vzeli enaki toplotni prevodnosti γ in enaka specifična upora ϱ. Njun skupni presek smo označili z A, skupno dolžino pa z L. Thompsonove toplotne tokove smo zanemarili. Izkoristek, ki ga dobimo pri optimalni obremenitvi ($R_b = R_g$), je približno

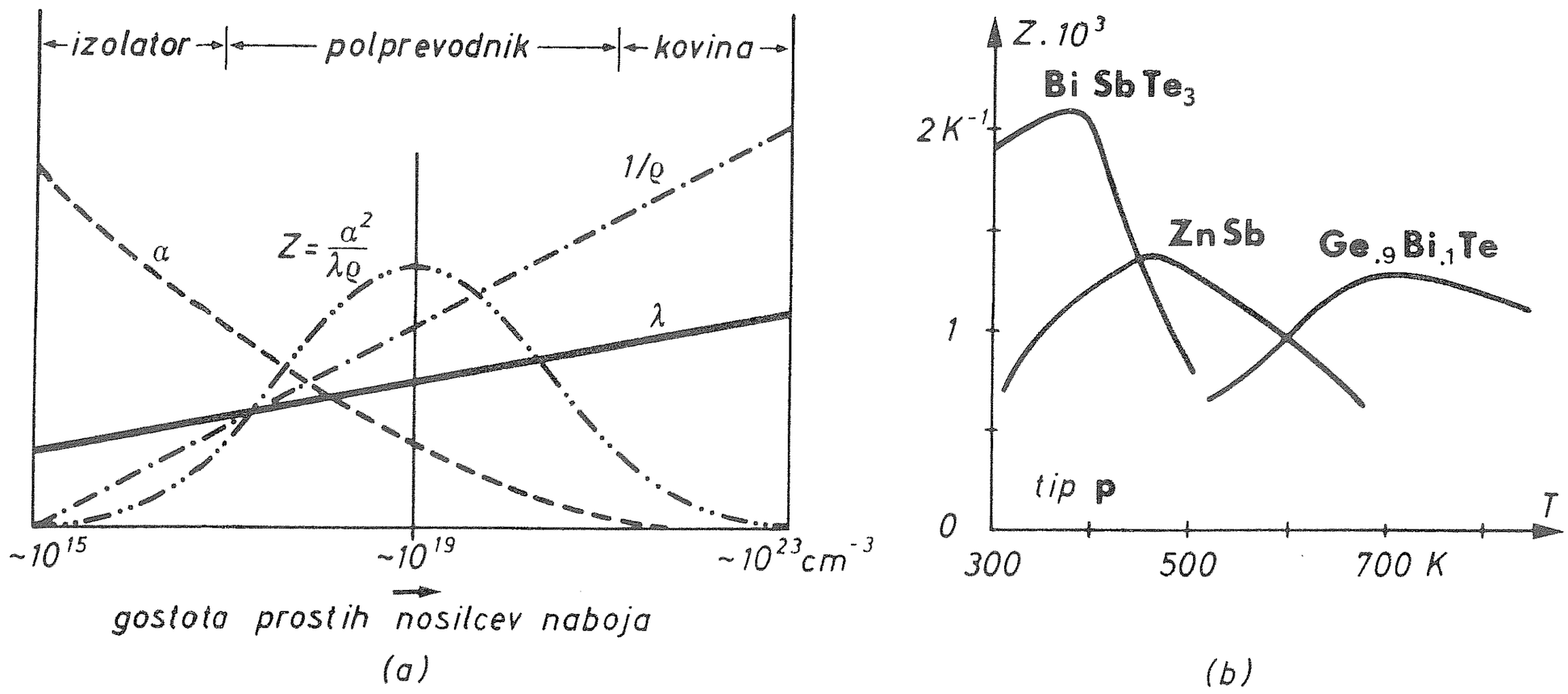


Sl. 4. Polprevodniški termoelektrični generator

$$\eta \cong \tfrac{1}{4}\eta_C\, Z\, T \qquad (11)$$

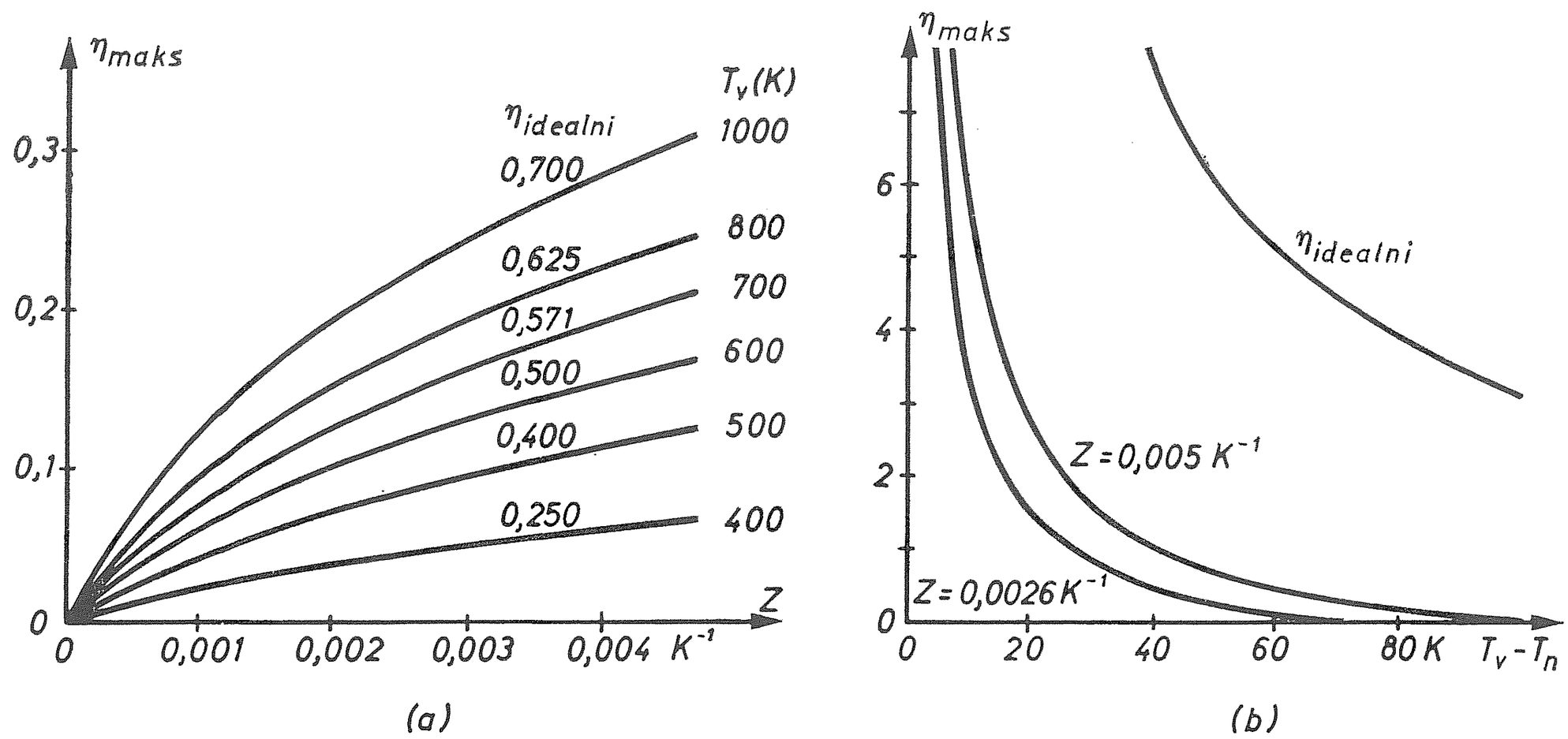
Količina $Z = \alpha^2/\varrho\,\lambda$ karakterizira snov v termoelektričnem pogledu, $\eta_C = \Delta T/T$ pa je izkoristek idealnega Carnotovega toplotnega stroja, ki bi imel isti delovni temperaturi. Slika 5 a kaže shematični potek koeficienta Z in njegovih parametrov α, ϱ, λ v odvisnosti od koncentracije prostih nosilcev naboja. V podrobnostih pa Z določajo seveda vrsta snovi, primesi in obe temperaturi. Tako lahko šele po izbiri delovnih temperatur izberemo par polprevodnikov z največjim izkoristkom. Bistvenima slabostma termoelektričnega stroja, to je uhajanju toplote zaradi toplotne prevodnosti vodnikov in sproščanju Joulove toplote zaradi upora vodnikov, pa se ne moremo izogniti, saj določajo toplotno in električno prevodnost prevodnikov v precejšnji meri enaki mehanizmi. Produkt $\varrho\,\lambda$ tako ni dosti odvisen od izbire materialov za vodnike. Najugodnejše vrednosti za Z dajejo polprevodniške zlitine PbTe, BiSbTe, ZnSb itd. (Sl. 5 b), ki imajo razmeroma majhno toplotno prevodnost. Pri omenjenih snoveh dosega Z vrednosti med 2 in $3.10^{-3}\,K^{-1}$. Tako so največji ne pa tudi optimalni izkoristki termoelektričnih generatorjev med 15 in 20 %. Slika 6 a kaže odvisnost izkoristka od Z in temperaturne razlike. Vidimo, da bi imel v enakih okoliščinah idealni stroj nekajkrat večji izkoristek. Praktična uporabnost teh generatorjev je zato precej omejena. Njihove

prednosti pridejo na dan le, ko je potrebna velika zaneslijvost, saj nimajo gibljivih delov. Generatorje, ki imajo za izvir toplote radioaktivno snov, uporabljajo pri vesoljskih raziskavah. Tipični podatki za tak generator so: polprevodniška zlitina PbTe, izvir ^{210}Po, masa 2,5 kg, premer 10 cm, delovni temperaturi 470 K in 930 K, notranji upor 2 Ω, napetost 3 V, koristna moč 5 W in izkoristek 5 %.



Sl. 5. Električna prevodnost ($1/\varrho$), toplotna prevodnost λ, absolutni termoelektrični koeficient α in parameter Z kot funkcija gostote prostih nosilcev naboja (a) in temperaturna odvisnost parametra Z za tri polprevodniške zlitine (b)

Termoelektrična toplotna črpalka ima enako oblikovan spoj kot generator (Sl. 4). Izkoristek, ki ga določa razmerje med preneseno toploto in vloženim delom, se da zapisati kot funkcija parametra Z in delovnih temperatur. Namesto nerodnega izraza za maksimalni izkoristek termoelektrične črpalke si raje poglejmo njegovo vedenje (sl. 6 b). Pri največjih razpoložljivih vrednostih Z ($2{,}6 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}) ustvarijo take črpalke temperaturne razlike do največ 70 K.



Sl. 6. Maksimalni izkoristek kot funkcija delovnih temperatur (T_v in T_n) in parametra Z za generator s temperaturo hladnejšega spoja $T_n = 300$ K (a) in toplotna črpalka s temperaturo toplejšega spoja $T_v = 300$ K (b). V obeh primerih je naveden tudi idealni izkoristek

Pri teh vrednostih pade njihov izkoristek na nič, pri manjših temperaturnih razlikah pa je še vedno nekajkrat slabši od idealnega (pri $\Delta T = 30\,\mathrm{K}$ kar 10-krat). Za primerjavo povejmo, da imajo komercialni termoelektrični hladilniki izkoristek okoli 0,5, pri kompresijskih hladilnikih pa je običajno nad 1, razen pri zelo majhnih strojih. Tako velja, da so termoelektrični hladilniki nenadomestljivi le tedaj, ko potrebujemo zelo majhno in odporno hladilno enoto, na primer pri hlajenju elektronskih elementov. Dodatna uporabnost Peltierovega hladilnika je še v tem, da ga lahko z obratom električnega toka spremenimo v grelec. To lastnost termoelektričnih toplotnih črpalk izkoriščajo pri vzdrževanju stalne temperature v različnih napravah.

LITERATURA

[1] M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics,* New York, McGraw-Hill 1957.
[2] I. Kuščer in S. Žumer, *Termodinamika,* Ljubljana, DMFA 1974.
[3] J. S. Dugdale, *The Electrical Properties of Metals and Alloys,* London, Edward Arnold 1977.
[4] P. H. Egli (editor), *Thermoelectricity,* New York, John Wiley 1960.

NOVE KNJIGE

Rajko JAMNIK, Matematika. Ljubljana, Partizanska knjiga 1981. 568 str. (Matematika-Fizika: Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij; 16) 1200.— (840.—) din.

Knjiga je spremenjeno in izpopolnjeno delo istega avtorja, ki je bilo namenjeno kot učni pripomoček študentom biotehnične fakultete. V zadnjem času je vse več študijskih smeri, ki imajo enoleten tečaj iz matematike, zato se je pokazala potreba po učbeniku matematike, ki bi pokril te zahteve. Prav ta namen pa je dosežen s to knjigo.

V prvem poglavju avtor razvije temeljne pojme in lastnosti realnih števil, zaporedij in številskih vrst. Drugo poglavje obravnava funkcije ene spremenljivke, kjer so temeljito obdelane elementarne funkcije. Tretje poglavje obsega standardno vsebino diferencialnega računa, v četrtem je govora o Taylorjevi vrsti. Peto in šesto poglavje sta namenjena nedoločenemu in določenemu integralu, kjer naj posebej omenim, da je definicija določenega integrala ločena od geometrijskega pomena določenega integrala. Sedmo poglavje daje osnovne pojme kombinatorike, v osmem pa se z determinantami že pripravi uvod za vektorsko algebro (deveto poglavje), kjer je govora tudi o vektorskem prostoru, linearni odvisnosti in bazi vektorskega prostora. Deseto poglavje govori o matrikah in linearnih sistemih. Kot uporaba vektorske algebre je enajsto poglavje posvečeno ravnini in premici v prostoru. Zatem slede funkcije več spremenljivk in tu je govora tudi o izravnavanju empiričnih funkcij. Trinajsto poglavje je namenjeno uporabi integralnega in diferencialnega računa v geometriji in nekaj tudi v fiziki. V naslednjem poglavju so v obsegu namena knjige obdelane diferencialne enačbe in sistemi diferencialnih enačb. Zadnje poglavje pa je namenjeno verjetnostnemu računu, s čemer je dana osnova za kasnejše razumevanje statističnih metod.

Pri delu je vsekakor treba tudi pohvaliti prijeten in nestereotipen slog pisanja. Kljub temu, da je delo namenjeno matematikom, torej študentom, ki naj bi matematiko ne študirali prepodrobno, je napisano s primerno matematično strogostjo. Res je nekaj težjih ali daljših dokazov izpuščenih, vendar je ob vsakem takem primeru bravec napoten k literaturi, kjer manjkajoče najde. Ob koncu vsakega poglavja je kar dovolj nalog in to daje knjigi še posebno praktično vrednost in popolnost.

Gabrijel Tomšič

Obzornik mat. fiz. 29 (1982) 1/2

TUNELSKI POJAV V POLPREVODNIKIH

PETER PRELOVŠEK

UDK 539.074.55

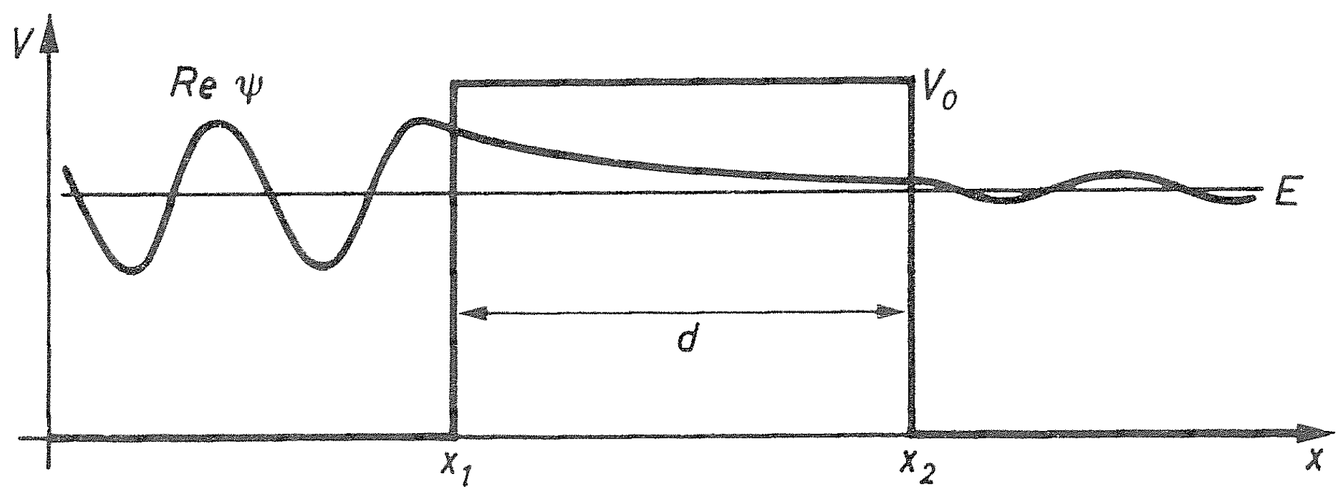
Članek obravnava tuneliranje elektronov v polprevodnikih. Opisano je delovanje Zenerjeve in tunelske diode.

TUNNELING PHENOMENA IN SEMICONDUCTORS

The article deals with tunneling phenomena in semiconductors, in particular with the principles and applications of Zener diodes and tunnel diodes.

V okviru klasične mehanike lahko delec premaga le dovolj nizke potencialne ovire. Iz ohranitve energije in zahteve, da kinetična energija ne sme biti negativna, namreč sledi, da so za delec nedosegljive vse lege, v katerih bi potencialna energija presegla začetno polno energijo. Delec se torej od previsokih ovir odbije.

Kvantna mehanika pa dovoljuje tudi prehode skozi visoke potencialne ovire: delec skozi prepovedano območje *tunelira*. *Tuneliranje* lahko pojasnimo le s kvantnimi zakoni gibanja, torej s Schrödingerjevo enačbo. Ta namreč dopušča, da je v delu prostora pričakovana vrednost kinetične energije negativna. Slika 1 kaže preprost primer potencialne plasti. Vrisani realni del valovne funkcije ψ (ψ je kompleksna količina) je rešitev Schrödingerjeve enačbe, ki ustreza lastnemu stanju energije. Rešitev predstavlja delec, ki vpada na oviro z leve. Zunaj prepovedanega območja, to je za $x < x_1$ in $x > x_2$, ima značaj potujočega valovanja, znotraj ovire, kjer je $V(x) > E$, pa ψ eksponentno pojema z razdaljo od stopne strani.



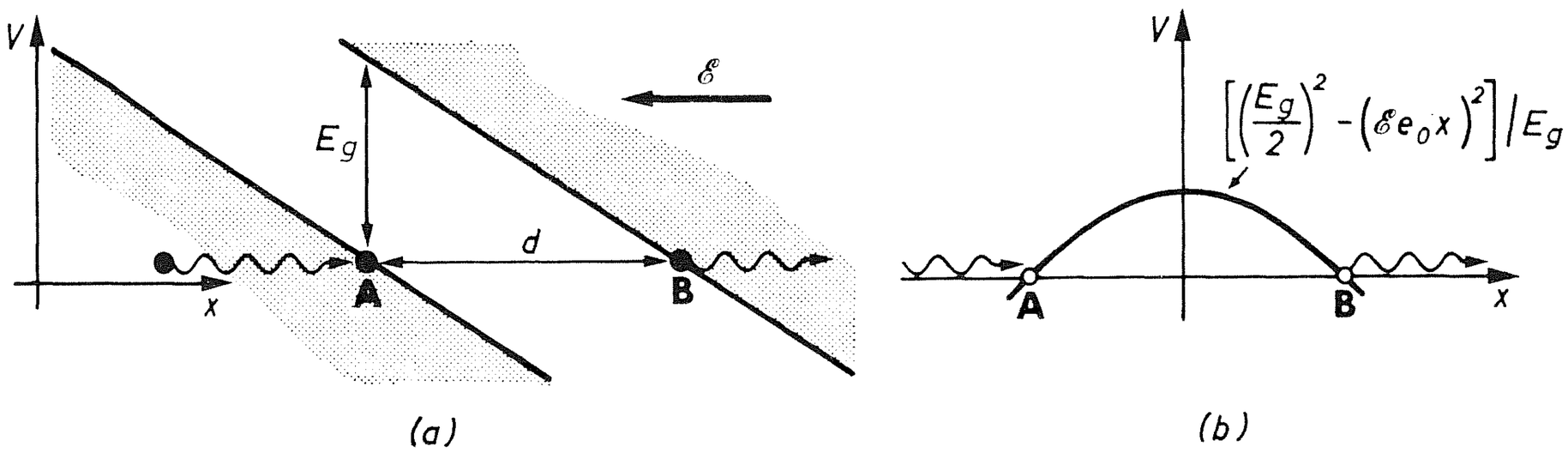
Sl. 1. Realni del valovne funkcije ψ delca z energijo E, ki tunelira skozi pravokotno potencialno oviro

V kvantni mehaniki je smiselno govoriti le o verjetnosti za posamezne dogodke. Verjetnost P, da delec preide skozi oviro, je sorazmerna z velikostjo $|\psi|^2$ na izstopni strani in je za primer na sliki 1

$$P = 4 \exp \{-(4\pi\, d/h)\, [2m\,(V_0 - E)]^{1/2}\} \tag{1}$$

h je Planckova konstanta. Zapisani izraz velja le za primere, ko je $P \ll 1$. Verjetnost je močno odvisna od debeline d, pa tudi od razlike $V_0 - E$ in mase delca m. Navedimo oceno, da je za elektron z maso $9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ kg pri $V_0 - E = 1$ eV verjetnost znatna, denimo večja kot 10^{-4}, le če je $d < 10^{-9}$ m.

V polprevodnikih nas zanima zlasti tuneliranje elektronov iz valenčnega pasu v prevodni pas pod vplivom električnega polja. V homogenem polju z jakostjo $\mathscr{E}$, ki naj ima smer $-x$, dobi namreč elektron dodatno potencialno energijo $V = -e_0 \mathscr{E} x$. Elektron je tedaj pri izbrani polni energiji E v enem delu prostora v valenčnem pasu, v drugem delu pa znotraj prevodnega pasu (Sl. 2 a). Ko potuje v smeri osi x, se znajde (med točkama A in B) v prepovedanem pasu in je prehod mogoč le s tuneliranjem.



Sl. 2. Elektronski pasovi v električnem polju z jakostjo $\mathscr{E}$ dopuščajo tuneliranje iz prevodnega v valenčni pas (a), efektivni potencial $V(x)$, ki ga čuti elektron ob prehodu skozi prepovedani pas (b)

Čeprav analogija s prej opisanim primerom za prosti delec ni popolna, lahko pripišemo elektronu v polprevodniku efektivno maso m^* in opišemo potencial znotraj prepovedanega pasu, kot kaže slika 2 b. Za oceno verjetnosti prehoda zadošča formula (1), v katero vstavimo $E_g/4$ namesto $V_0 - E$ in m^* namesto m. Ob tem je seveda debelina d odvisna od jakosti električnega polja $\mathscr{E}$, saj velja $d = E_g/e_0 \mathscr{E}$. Verjetnost za prehod je znatna le v zelo močnih poljih $\mathscr{E} > 10^6$ V/cm. V čistih polprevodnikih je take razmere zelo težko doseči, pač pa nastanejo v diodah, in sicer znotraj stika p-n.

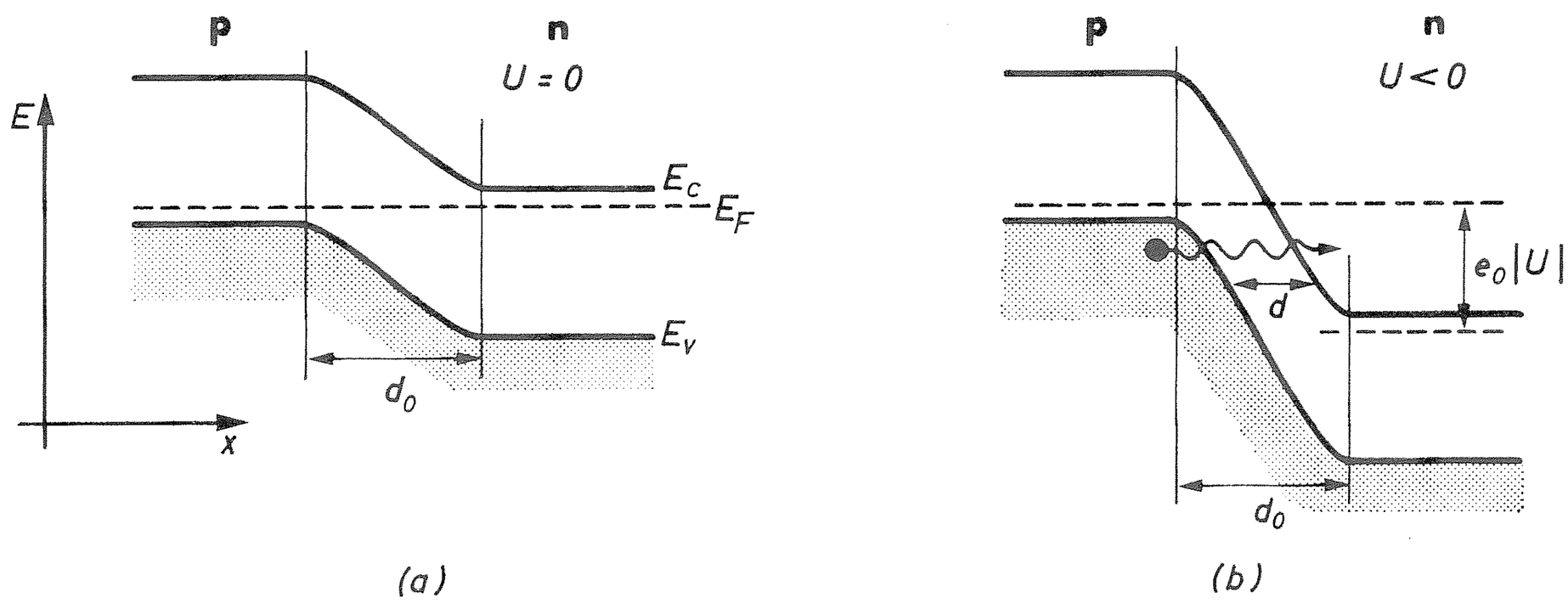
Obravnavali bomo dve vrsti diod, pri katerih je tunelski pojav bistven: *Zenerjeve diode* in *tunelske (Esakijeve) diode*. Obe vrsti se ločita zlasti po legi Fermijeve energije in po zasedenosti elektronskih stanj. Slednja ima bistven vpliv na tok elektronov preko prepovedanega pasu, saj je ta mogoč le, če so ustrezna stanja na izhodni strani nezasedena. To bi pomenilo (Sl. 2 a), da elektron ne bi mogel tunelirati iz točke A v B, če bi bila stanja v okolici B že zasedena z drugimi elektroni.

Zenerjeva dioda

Slika 3 a kaže lego prevodnega in valenčnega pasu v bližini običajnega stika p-n, če ni zunanje napetosti, torej $U = 0$. Fermijeva energija E_F leži v območju p tik nad valenčnim pasom (v primeru dovolj močnega dopiranja), v območju n pa tik pod prevodnim pasom. Tuneliranje elektronov iz zasedenih valenčnih stanj v tem primeru ni mogoče, saj so prevodna stanja previsoko.

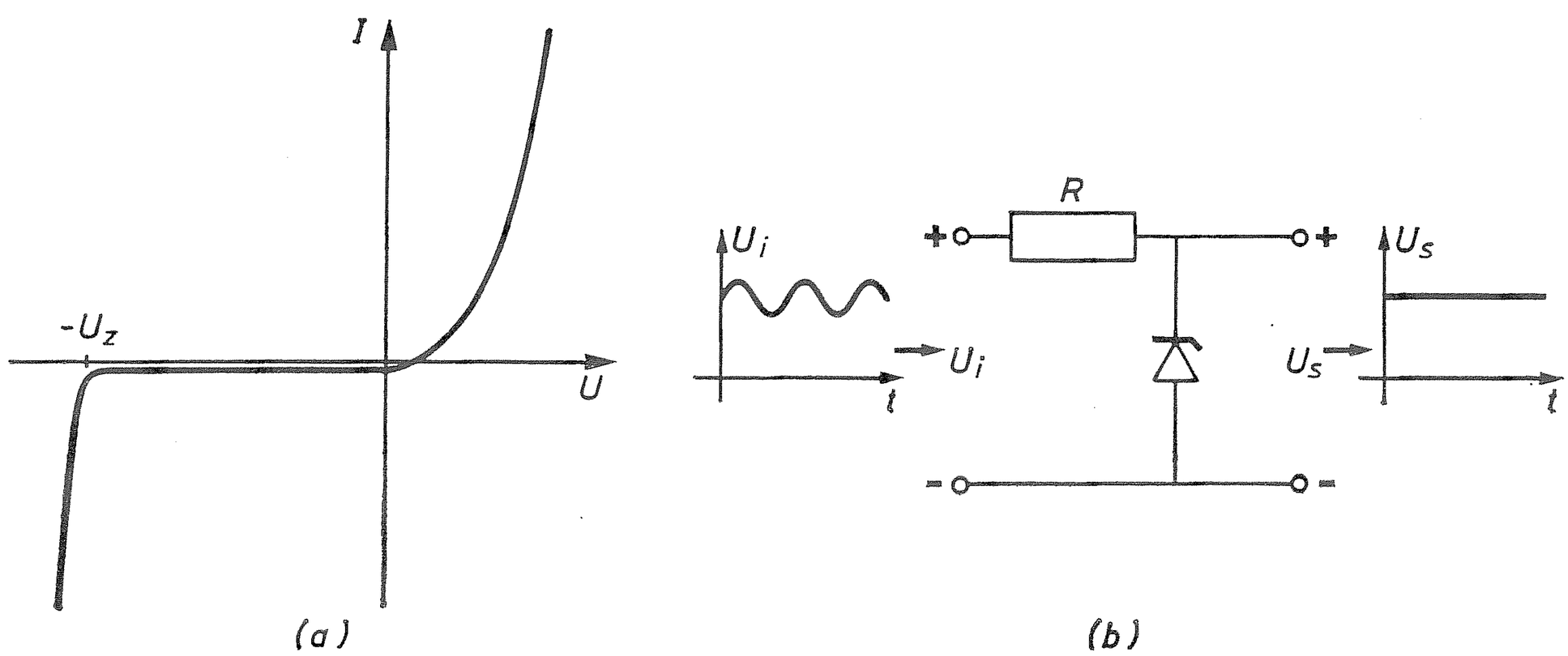
Tuneliranje omogoči že majhna negativna napetost (nekaj desetink volta), ko imajo zasedena valenčna stanja na levi enako energijo kot prevodna stanja na desni (Sl. 3 b). Vendar postane tok znaten šele pri večjih napetostih, ko se zaradi večje električne poljske jakosti $\mathscr{E}$ v stiku zmanjša razdalja

$d < d_0$. Seveda mora biti ob tem tudi širina zaporne plasti d_0 dovolj majhna. Ta je obratno sorazmerna s koncentracijo donorjev oziroma akceptorjev, uporabiti je torej treba močno dopirane polprevodnike. Tudi metalurško mora biti stik čim ostrejši.



Sl. 3. Elektronski pasovi v Zenerjevi diodi pri različnih napetostih U na stiku p-n: $U = 0$ a) in $U < 0$ (b)

Slika 4 a kaže karakteristiko Zenerjeve diode. Dioda nosi ime po Clarencu Zenerju, ki je že leta 1934 predvidel tako možnost tuneliranja. Pri napetostih $U > -U_Z$ je karakteristika podobna kot v običajnih diodah. Pri $U \sim -U_Z$ začne tunelski tok prevladovati nad zapornim difuzijskim tokom. Njegova vrednost eksponentno raste in govorimo o preboju. Ker tunelirajo elektroni v pozitivni smeri x, je električni tok negativen.

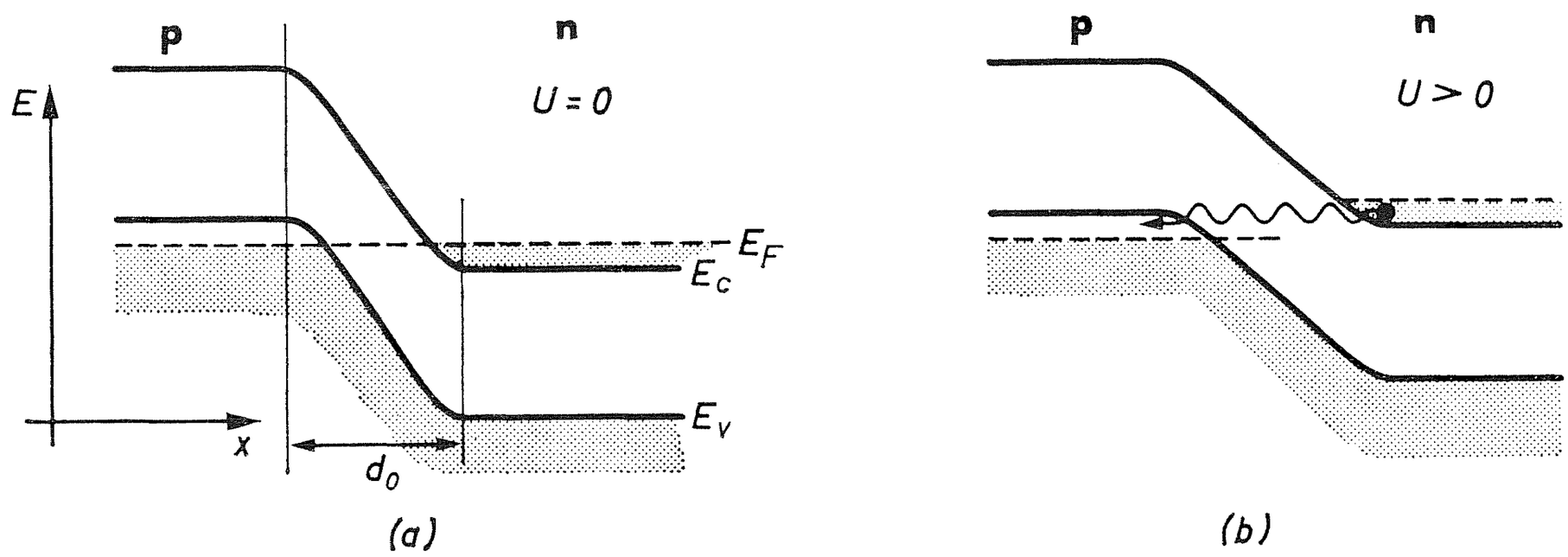


Sl. 4. a) Karakteristika I-U Zenerjeve diode (a) in enostavno vezje za stabilizator napetosti (b)

V komercialnih izvedbah Zenerjeve diode so prebojne napetosti U_Z nekaj voltov. Omeniti je treba, da pride lahko pred nastopom Zenerjevega preboja do plazovnega preboja, ki ima sicer enake posledice, a drug fizikalni izvor. Zaradi svoje karakteristike rabi Zenerjeva dioda kot preprost in cenen stabilizator napetosti. Velike relativne spremembe toka I namreč povzročijo dosti manjša nihanja napetosti $U \sim -U_Z$. Primer preprostega vezja za stabilizator napetosti kaže slika 4 b.

Tunelska dioda

Tunelska dioda se od običajnih diod loči po načinu dopiranja, saj je koncentracija primesi bistveno višja (okoli $10^{26}\,m^{-3}$, v običajnih diodah pa je 10^{22}—$10^{23}\,m^{-3}$). Polprevodnike s tolikšnim deležem primesi imenujemo degenerirane, saj se valovne funkcije elektronov različnih donorskih oziroma akceptorskih stanj med seboj prekrivajo. Elektronska stanja na primeseh torej niso neodvisna in se razcepijo v ozek pas, ki pa sega že v dno prevodnega pasu. Fermijeva energija je sedaj znotraj prevodnega pasu in snov se vede kot polkovina, ker prevaja tok tudi pri nizkih temperaturah. Tunelska ali Esakijeva dioda (po japonskem fiziku Leu Esakiju, ki je dobil leta 1973 za to odkritje Nobelovo nagrado), izkorišča stik degeneriranih polprevodnikov tipa p in n. Karakteristiko diode pojasnimo s slikama 5 a, b. Če ni napetosti na stiku, sta Fermijevi energiji E_F na obeh straneh enaki. Tunelskega toka ni, stanja na obeh straneh so namreč zasedena do iste energije. Pri majhni pozitivni napetosti se zasedena stanja v prevodnem pasu na strani n dvignejo v višino nezasedenih valenčnih stanj na strani p. To omogoči tok elektronov v smeri $-x$ (pozitivni tok), ki raste z napetostjo. Obratno velja za $U < 0$.



Sl. 5. Elektronski pasovi v tunelski diodi pri različnih napetostih U na stiku p-n: $U = 0$ (a) in b) $U < 0$ (b)

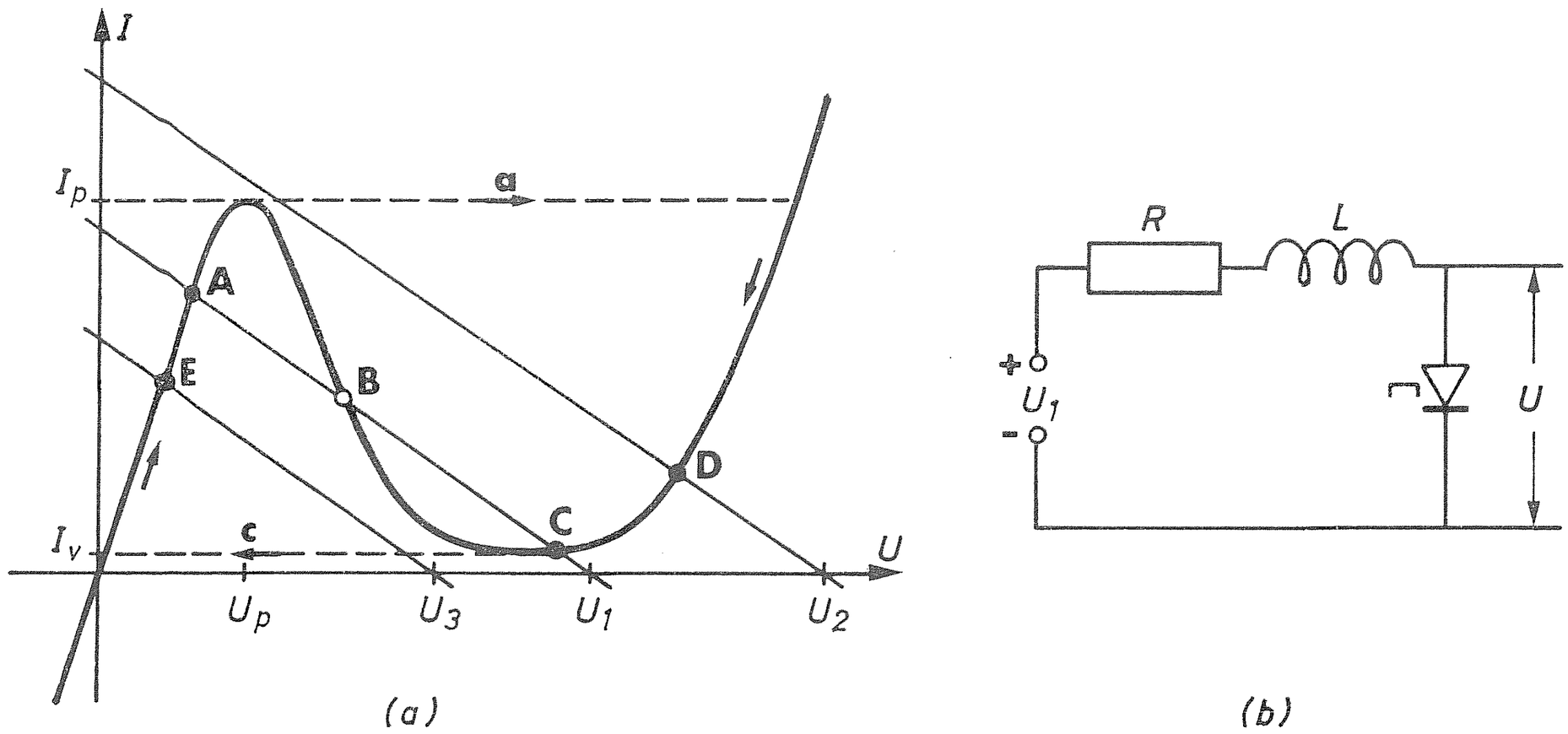
V tem območju prevladuje tunelski tok nad običajnim difuzijskim, ker je zaradi močnega dopiranja zaporna plast izredno ozka, $d_0 \sim 10^{-8}$ m. Ko doseže Fermijeva energija na strani n zgornji rob valenčnega pasu strani p, sta količina dosegljivih nezasedenih stanj, in s tem tudi tok, maksimalna. Pri višji napetosti U elektroni s strani n ne najdejo več toliko ustreznih dovoljenih stanj na strani p in tunelski tok pada, dokler ne doseže vrednosti nič.

višjih napetostih prispevek običajnega difuzijskega toka, odvisnost I od U se tedaj približa karakteristikam običajnih diod.

Karakteristika tunelske diode (Sl. 6 a) kaže ekstrema pri tokovih I_p in I_v. Med njima je značilno območje negativnega diferencialnega upora $dI/dU < < 0$. Pri komercialnih diodah je napetost U_v približno 350 mV, tok I_p med 0,6 mA in 6 mA ter razmerje I_p/I_v približno 8.

Tunelsko diodo uporabljamo predvsem kot hitri preklopnik. Da bi to razumeli, si oglejmo obnašanje enostavnega vezja (Sl. 6 b). Izračunajmo najprej enosmerni tok, ki teče skozi vezje pri konstantni pozitivni napetosti U. Sistem ni več linearen, zato si pomagamo z načinom, ki je ustaljen v elektrotehniki. Padec napetosti na diodi U mora biti enak pritisnjeni napetosti,

zmanjšani za padec napetosti na uporniku R. Induktivnost L na enosmerni tok ne vpliva. Če sedaj vrišemo tako imenovano krivuljo bremena $U = U_1 - I R$ v karakteristiko diode, leže rešitve za tok I na presečiščih obeh krivulj. Kot vidimo na sliki, so pri danem uporu v določenem pasu napetosti $U \sim U_1$ za tok I tri rešitve, ki ustrezajo točkam A, B in C. Pri tem pa predstavlja točka B nestabilno rešitev. Govorimo o bistabilnem vezju. Primera z napetostma U_2 in U_3 pa ustrezata monostabilnim vezjem.



Sl. 6. a) Karakteristika I-U tunelske diode (a) in enostaven primer bistabilnega vezja (b)

Če pri monostabilnem vezju dovedemo na vhod še dodaten kratek napetostni sunek, se bo to po prenehanju sunka vedno vrnilo v začetno delovno točko. Nasprotno pa lahko v bistabilnem slučaju z dovolj močnim sunkom prevržemo vezje iz ene stabilne točke v drugo. Tunelska dioda deluje torej kot preklopnik. Če je preklopnik na začetku v stanju A in dovedemo na vhodu pozitiven napetostni sunek, sledi tok I do ekstremalne vrednosti I_p karakteristiki diode. Od ekstremalne točke naprej to ni več mogoče, saj so vse točke na delu z negativnim uporom nestabilne. Zato nastane trenutni skok napetosti na drugi del karakteristike (pot a), pri tem pa poskrbi induktivnost L za konstantnost toka I. Končno se po sunku delovna točka spusti v C. Podobno lahko prevržemo z negativnim sunkom vezje iz točke C po poti c nazaj v točko A.

Bistvena prednost tunelske diode pred običajnimi preklopnimi vezji je v njeni hitrosti. Preklopni časi tunelskih diod so lahko tudi manjši od 10^{-10} s. Hitrost tuneliranja elektronov je namreč omejena le s svetlobno hitrostjo, parazitskim kapacitivnostim pa se je mogoče s primernimi tehničnimi rešitvami v veliki meri izogniti. Iz istega razloga se dioda uporablja v oscilatorjih visokih frekvenc, saj sledi tudi nihanjem v območju mikrovalovnih frekvenc $\nu \sim 10^{10}$ Hz.

LITERATURA

[1] S. Wang, *Solid — State Electronics,* McGraw-Hill, Kogakusha, New York 1966.

[2] B. G. Streetman, *Solid State Electronic Devices,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1972.

[3] J. Millman, H. Taub, *Pulse, Digital and Switching Waveforms, McGraw-Hill,* New York 1965.

NOVE KNJIGE

L. D. KUDRJAVCEV, Sovremennaja matematika i ee prepodavanie, Nauka, Moskva 1980, 144 str.

Knjižica se ukvarja s problemi pouka matematike za študente, ki jim matematika ni osnovna smer študija. Že pri prvem prelistavanju se mi je zdela tako zanimiva, da sem jo pozneje prebral v celoti. Priljubila se mi je še posebno zato, ker nič v njej ni nasprotovalo mojim sicer ne posebno obsežnim izkušnjam na tem področju, v marsičem pa bi z vsem srcem pritegnil avtorju.

Sam čutim skoraj instinktiven odpor do pojmov, kot sta pedagogika in metodika. Knjiga sicer uporablja besede kot pedagog in vsebuje kratko poglavje o metodiki pouka matematike, vendar iz tega nikakor ne poskuša delati znanosti. Prej bi dejal, da je podobna razgovorom, ki jih imamo o takih temah s kolegi na hodniku, ali prijateljskemu razgovoru s katerim od bolj izkušenih učiteljev. Morda je napisana nekoliko gostobesedno, nekatere stvari avtor rad ponavlja, vendar je bilo na ta način L. D. Kudrjavcevu laže podati širok, umirjen pogled na najrazličnejša vprašanja pouka matematike, kot so program, domače naloge, izpiti, smisel matematike. Druga polovica knjige nosi naslov Osnovne misli o predavanju matematike. Avtor v njej postavi in razčleni deset trditev, od katerih so nekatere precej splošne, druge pa že nekoliko bolj zanimive:

1. Pri matematičnem tečaju obravnavamo matematične strukture.
2. Matematika je ena sama.
3. Vsebine matematičnega tečaja ni mogoče določiti samo s pragmatičnega stališča, oziraje se samo na bodoče poklicne potrebe študentov, ampak je treba upoštevati tudi notranjo logiko same matematike.
4. Cilj pouka matematike je, da si študent pridobi določeno znanje, da zna uporabljati matematične metode, ki se jih je naučil, pa tudi razvitje matematične intuicije in vzgoja matematične kulture.
5. Podajanje matematike mora biti po možnosti preprosto, jasno in osnovano na razumni ravni strogosti.
6. Učiti je treba to, kar je potrebno in česar se je težko naučiti.
7. Eksistenčni izreki so nujen del matematične izobrazbe strokovnjakov, ki se bodo ukvarjali z uporabo matematike.
8. V začetku pouka je treba dati prednost induktivnim metodam, nato pa počasi pripravljati in uporabljati deduktivni način.
9. Učenje reševanja uporabnih nalog z matematičnimi sredstvi ni naloga matematičnega tečaja, pač pa strokovnih predmetov.
10. Katera področja matematike in v kakšnem obsegu pridejo v poštev za študente dane stroke, so dolžni določiti strokovnjaki s tega področja pri posvetovanju z matematiki, način poučevanja pa je stvar matematikov samih.

V knjigi je mnogo zanimivih misli, anekdot, izkušenj in podobnega. Napisana je neprisiljeno, a dovolj avtoritativno. O ustnih izpitih pravi recimo avtor, da morajo trajati najmanj 10—15 in največ 30 minut. Spodnja meja je potrebna zato, da študent razume, zakaj je dobil prav tako oceno, podaljševanje čez zgornjo mejo pa se avtorju zdi napačno, saj je smisel izpita, da študent pokaže, kaj se je naučil, in ne, kako se znajde pri dolgotrajni konfrontaciji s spraševalcem.

V zvezi s točko 6 avtor navaja naslednji značilni (nematematični) primer. Ker se tudi v SZ dogaja, da ljudje po končani šoli ne znajo napisati prošnje za sprejem na delo in za to potrebnega življenjepisa, so se v tisku pojavili predlogi, da bi bilo dobro v šole uvesti predmet Administracija. Avtor pravi, da je to več kot neumno, saj se je tega mogoče naučiti mimogrede, med delom in je škoda za to zapraviti več kot nekaj minut dvakrat na leto. Sicer pa je, kot pravi Kudrjavcev, že zdaj v učnih programih mnogo preveč stvari, ki so sicer potrebne, a se jih je mogoče hitro in lahko naučiti.

Vseh drugih dilem, obravnavanih v knjigi, seveda ni mogoče navesti. Avtor graja napake svojih kolegov (preveč formalizma itd.) in uspešno zavrača nekatere neosnovane napade na ustaljeni način poučevanja matematike (»zastarelost« klasične analize zaradi numeričnih metod, »nepotrebnost« računanja nedoločenih integralov itd.). V vsakem primeru pa je, kot pravi avtor, poučevanje matematike stvar matematikov samih, saj so poskusi, da bi matematiko za druge smeri poučevali nematematiki, še zmeraj propadli. Avtor zelo poudarja nujnost čim boljše strokovne podkovanosti predavateljev, k čemur sodi tudi raziskovalno delo.

Začetek in konec knjige izzvenita nekoliko resignirano, saj, kot pravi Kudrjavcev, vsak predavatelj misli, da je njegov način predavanja najboljši. Hkrati s tem pa pisec navaja naslednji še zmerom aktualni citat iz ust okrajnega šolskega nadzornika Luke Lukiča v Gogoljevem Revizorju: »Bog nas obvaruj učiteljske službe! Strah od povsod! Vsakdo se vtika, vsakdo bi rad pokazal, da tudi on kaj ve.«

Peter Legiša

Solitons. Editors, R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Topics in Current Physics 17, Springer-Verlag, Berlin 1980, 389 str.

Knjiga vsebuje dvanajst prispevkov več avtorjev in obravnava solitone, to je lokalizirane ekscitacije, ki se širijo s konstantno hitrostjo in pri tem ohranjajo svojo obliko. Do takih pojavov pride v enodimenzionalnih sistemih, ki so nelinearni in disperzni. Ekscitacije solitonskega tipa na vodni površini so bile poznane že v prejšnjem stoletju, vendar se je šele v zadnjem desetletju pokazalo, da so pomembne tudi v drugih nelinearnih fizikalnih sistemih (plazma, nelinearna optika, nelinearni pojavi v trdni snovi, teorija polja).

Večji del knjige je posvečen matematičnim metodam za reševanje nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb z rešitvami solitonskega tipa, s posebnim poudarkom na metodi inverznega sipanja. Poleg zgodovinskega uvoda in predstavitve nekaterih fizikalnih sistemov s solitonskimi ekscitacijami obravnava knjiga še vlogo kvantnih solitonov v statistični fiziki ter analogijo med kvantnim sine-Gordonovim modelom in modeli iz teorije faznih prehodov ter teorije polja. Ker so bili prispevki za to knjigo napisani že leta 1976, iz njih ni popolnoma razvidna široka uporaba pojma solitona v fiziki v zadnjih letih.

Boštjan Žekš

Narrow Gap Semiconductors Physics and Applications / Ed.: W. Zawadzki, Lecture Notes in Physics 133, Springer — Verlag, Berlin 1980, broš., VI + 572 str.

Polprevodniki z majhno energijsko režo, pod 0,5 eV, med valenčnim in prevodnim pasom so močno razširili možnosti uporabe polprevodnikov v elektroniki. Njihove lastnosti omogočajo med ostalim gradnjo izredno občutljivih senzorjev za infrardečo svetlobo, termoelektričnih generatorjev, senzorjev magnetnega polja, električnih merilcev deformacij in diodnih laserjev za infrardeče področje. Obširne možnosti uporabe so v zadnjih desetletjih močno vzpodbudile raziskave v fiziki polprevodnikov z majhno energijsko režo. V zvezku Lecture Notes in Physics št. 133 so zbrana predavanja na mednarodni letni šoli za fiziko polprevodnikov z majhno energijsko režo, ki je bila v Nîmesu, Francija, septembra 1979. Predavali so znani strokovnjaki iz Evrope in Amerike. Poudarek je bil na šoli, predavanja so bila namenjena širšemu krogu mladih fizikov in ne le specialistom. 31 prispevkov obravnava strukturo pasov, dielektrične, optične in magnetne lastnosti, transport elektronov, fotogalvanske pojave, mrežna nihanja, teorijo primesnih centrov in nelinearne transportne pojave, če naštejem le poglavitne teme. Nekaj prispevkov obravnava tudi tehnologijo in uporabo.

Peter Gosar

E. J. WATSON, Laplace transforms. Van Nostrand Reinhold, New York 1981. VIII + 205 str.

Knjig s takim in podobnim naslovom imamo v naši knjižnici že zelo veliko. Tudi naslovi poglavij: 1. Laplaceova transformacija 2. Navadne diferencialne enačbe 3. Inverzna transformacija 4. Parcialne diferencialne enačbe 5. Druge uporabe ne povedo dosti. Pri pazljivejšemu pregledu knjige pa ugotovimo, da gre za zelo dobro premišljen učbenik. Napisan je tako, da ni treba imeti obširnega predznanja, ne zahteva npr. poznavanja Lebesguesovega integrala. Formulacija izrekov in dokazi pa so precizni in temeljiti. Knjiga torej ni posvečena strokovnjaku iz analize, kot npr. prekrasni knjigi Widderjeva Laplace transform ali Titchmarshova o Fourierovih transformacijah, niti ni zbirka receptov. Avtorju se je posrečila srednja pot; teorija je konkretna in iz nje se da ugotoviti, zakaj včasih nekritična uporaba receptov ni uspešna. Res lepa je ilustracija uporabe Laplaceove transformacije. Neobičajno temeljito so obdelani asimptotični razvoji.

Študentom matematike, fizike in drugim, ki se zanimajo za Laplaceovo transformacijo, knjigo toplo priporočam.

Anton Suhadolc

Studies on Mathematical Programming, ed. by A. Prékopa, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980, 200 str.

To je zbornik petnajstih predavanj z znanstvenega srečanja leta 1975 v Matrafüredu na Madžarskem. Članki so večinoma pregledni in zajemajo različna področja matematičnega programiranja. Med drugim obravnavajo linearno, nelinearno, stohastično in parametrično programiranje. Ker knjiga pokriva velik del matematičnega programiranja, bi utegnila rabiti kot pomožni učbenik na podiplomskem študiju operacijskih raziskav.

Edina večja pomanjkljivost knjige je dejstvo, da je izšla celih pet let po konferenci. To ji seveda zmanjšuje pomembnost, saj znanje — predvsem v mladih znanstvenih disciplinah, kjer je razvoj še posebno bliskovit — vse prehitro zastareva.

Med članki moramo omeniti pravi biser. Gre za prispevek L. Lovásza, *Efficient Algorithms: An Approach by Formal Logic.* V njem avtor na čisto samosvoj in za matematika privlačen način obravnava ključni problem teoretičnega računalništva: polinomske algoritme in razred NP.

Tomaž Pisanski

Compiler Construction, An Advanced Course. Edited by F. L. Bauer & J. Eickel. Second Edition. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976 (izšlo tudi kot Lecture Notes in Computer Science Vol. 21).

Nadaljevalni tečaj iz pisanja prevajalnikov, na osnovi katerega je nastala pričujoča knjiga, sta v marcu leta 1974 organizirala Matematični inštitut tehniške univerze v Münchnu in Leibnizov računski center pri Bavarski akademiji znanosti. Zaradi izjemnega uspeha je bil tečaj ponovljen še marca 1975.

Tečaj, skupaj s svojim predhodnikom iz leta 1972 — tečajem o »tehnologiji« programske opreme (Software Engineering, An Advanced Course. Edited by F. L. Bauer. Lecture Notes in Computer Science Vol. 30) sodi v sklop prizadevanj bavarskih računalnikarjev, zbranih okrog F. L. Bauerja (enega od očetov računalništva), da bi postali ena od vodilnih računalniških skupin. Zato so za predavatelje na obeh tečajih povabili takrat vodilne strokovnjake. Tako iz tečajev izhajajoči knjigi predstavljata dokaj zaokrožen in še danes aktualen pregled stanja na področju programske opreme in pisanja prevajalnikov v prvi polovici sedemdesetih let.

Knjigi sta potemtakem namenjeni računalnikarjem, ki bi si želeli poglobiti svoje znanje iz tehnologije programske opreme in pisanja prevajalnikov. Tem ju toplo priporočam.

Vladimir Batagelj

SVIOFIZIKA

Najnovejša šolska reforma obeta izredno razvejen sistem srednjih šol, vendar s skupnim programom za prvi letnik, ki naj daje »skupno vzgojno izobrazbeno osnovo v usmerjenem izobraževanju« ali na kratko »SVIO«. Letnik obeta učencem še priložnost za predah, preden se dokončno odločijo za usmeritev.

Tako smo torej dobili »sviofiziko«, ki naj zaključi fizikalno izobrazbo iz osnovne šole. Podobno kot tam naj bi se snov obravnavala večidel kvalitativno, torej brez enačb in računskih zgledov. Žal se ni izpolnila obljuba, da iz te fizike ne bo »cvekov«, ampak da bo služila učencem le za informacijo. Pri marsikateri usmeritvi so tudi pozabili na prvotno zagotovilo, da se na račun sviofizike ne bo zmanjšala fizika v višjih letnikih, kjer se stvari šele lahko obravnavajo bolj resno, to je kvantitativno.

V skladu z učnim načrtom SVIO, ki ga je leta 1979 objavil Zavod za šolstvo, naj bi več piscev pripravilo devetdelni »didaktični komplet«. Lahko smo veseli, da smo dobili pet delov: tridelni učbenik (Franc Plevnik, Drago Šulek, Janez Strnad, 60 + 56 + 72 strani, cena trikrat po 50 din), zbirko preskusnih vprašanj (Aleksander Kregar, 134 strani, cena 60 din) in eksperimentalni priročnik (Aleš Jereb, Peter Prelog in Tomaž Skulj, 368 strani + priloga, cena 480 din). Knjige so izšle v letih 1978 do 1981 pri Državni založbi Slovenije. V naslednjem bom prikazal prve štiri dele, oceno priročnika pa bo Obzornik objavil kasneje. Ker gre za pomemben dogodek, bo zapis daljši, kot je sicer v navadi.

Prvi vtis je prijeten in človeka preseneti živahno pisanje, zlasti v Šulekovem delu. Učbenik se vsaj v prvih dveh delih izogiba grmadenju enciklopedičnega znanja. Nikjer se ne kopičijo zbirke suhoparnih trditev in uokvirjenih formul, ki bi se jih pridni učenci učili na pamet. — Vedno sem se bal nesistematičnega podajanja učne snovi; kaže pa, da je tudi tak način lahko uspešen.

V prvem zvezku obravnava Franc Plevnik nihanje in valovanje, potem ko v uvodu na kratko ponovi fiziko iz osnovne šole. Učenec mora tu odgovoriti na kopico vprašanj, a ta žal niso vsa do kraja premišljena. Na vprašanje »kako se giblje telo, če je rezultanta zunanjih sil enaka nič« (str. 2) ni enoličnega odgovora. (Pomislimo na kotaljenje in nutacijo ter na vsakovrstna gibanja netogih teles!) Pri vprašanju »kako računamo toploto« (na isti strani) mora učenec šele premišljevati, kaj bi avtor pravzaprav rad slišal. Zbirko teh vprašanj bi bilo treba še obogatiti, jo temeljito preskusiti v razredu ter popraviti, kar ne bi prestalo preskusa.

Čeprav se zdi poglavje o nihanju nekoliko raztegnjeno, bi si človek tu in tam želel več fizikalne vsebine in ne samo opisovanja pojavov. Razmejitev med lastnim in vsiljenim nihanjem bi lahko bila bolj dosledna (gl. stran 19 do 21). Glede energije pri nihanju bi koristila nadaljnja pojasnila. Nekajkrat beremo, da pri dušenem nihanju energija z nihala odteka; nikjer pa ni besede o nadaljnji usodi te energije. Spričo osrednjega pomena pojmov dela in energije bi sploh prišla prav obširnejša ponovitev — lahko ob nihalu kot zgledu.

Trditev, ki niso z ničimer utemeljene ali obrazložene, naj v učbeniku fizike ne bi bilo. Tak primer pa najdemo na strani 40: »Odbiti val ima takšno obliko, kot bi prihajal izza ovire, iz nekega navideznega izvira, ki leži zrcalno simetrično glede na pravi izvir na drugi strani pregrade.« Izpeljava ne bi bila težavna, če bi si pisec pomagal z žarki. Žal pa tega pojma sploh ne vpelje.

Drugi zvezek začenja Drago Šulek z valovnimi pojavi pri svetlobi, kjer so nekatera mesta težko razumljiva. Razloček med uklonskima slikama, ki ju dobimo z eno ali z dvema režama, je na slikah 3 in 4 komaj opazen, na sliki 6 pa bistven. Slika 7, ki kaže nekakšne valovne pakete, je popolnoma nerazumljiva; slika 8, ki razlaga uklon na mreži, ni dosti boljša.

O energiji svetlobe bi bilo vredno kaj več povedati, ker stvari začetniku niso same po sebi umevne (gl. stran 9). Še vprašanje k strani 10: Ali je res, da spekter svetlobe iz žarnice močneje počrni fotografski film v svojem ultravijoličnem delu kot v vidnem?

Šulek rad navrže pojasnila o mikavnih tehničnih novostih, kar knjigo poživlja. Žal pa so nekatera pojasnila prekratka. Pri radarju je omenjena uporaba Dopplerjevega pojava (str. 16), in sicer samo z opisom pojava, brez razlage. Valovnemu vodniku za svetlobo (str. 15) sta odmerjeni samo dve vrstici. Tudi pojasnilo o širini

frekvenčnega pasu pri radiu (str. 28) je preskopo za učenca, ki mu je vse skupaj še novo.

Drugi del zvezka začenja s fotoefektom in končuje z razpravo o razločku med klasično in kvantno fiziko. Nemara so tu že sestavljalci učnega načrta preveč tvegali; ni videti, da bi tveganje uspelo. Učenec zve o kvantni fiziki komaj kaj več kot to, da je ne more razumeti. Nejasni izrazi, kot so »kvantni delci« in »naključno porazdeljeni paketi« ne morejo pomagati. Trditev, da »delci postanejo valovanje« (stran 48) pa učenca le še bolj zbega.

Tretji (Strnadov) zvezek je neprimerno bolj zahteven kot prejšnja dva in je kljub bolj zgoščenemu slogu obsežnejši. Kot približno merilo za težavnost učbenika lahko vzamemo število vpeljanih novih pojmov. Pri Plevniku jih nisem naštel niti 20 in pri Šuleku le malo več, Strnad pa jih ima vsaj kakih sto. Človek se kar ustraši, da vsebuje zlasti prvi zvezek morda premalo in tretji preveč. Saj gre Strnad ponekod dalj kot dosedanji učbeniki za 4. razred gimnazije in vsekakor presega učni načrt SVIO.

Učencem, ki bi se radi usmerili v fiziko, bo Strnadov del učbenika kajpada veliko koristil. Saj pripoveduje o zgradbi snovi in nekaj malega o vesolju, kar sta osrednji temi fizike v našem stoletju. Toda kaj porečejo drugače usmerjeni učenci? Po drugi strani se moramo bati, da niti najresnejši učenec ne bo razumel Feynmanovega diagrama (str. 56) ter pojasnila o virtualnih fotonih in mezonih (str. 57). Bržkone mu bo trditev, da šibka sila povzroča razpad beta (str. 56), obogatila samo besedni zaklad, ne pa znanja.

Ponekod bi abstraktne formulacije kazalo nadomestiti z bolj domačimi in včasih enačbe z besedami (primer na strani 17). Stavek »Masa kilomola je tedaj količina, ki ima za mersko število relativno molekulsko maso, za enoto pa kilogram« (str. 6) bi se dal predelati v bolj razumljivo obliko. Na str. 16 beremo, da zakon o ohranitvi energije »izhaja iz energijskega zakona«. Ali ni oboje eno in isto? Včasih pogrešamo zgled, tako pri pojmu masnega števila (str. 29). Tabele tega ne morejo nadomestiti, ker jih učenci ne berejo sproti. Prekratke razprave so težko razumljive, npr. tista o energiji mase (str. 38).

Kregarjev zvezek z naslovom Naloge za preverjanje znanja iz fizike prestavlja zbirko preskusnih vprašanj ali »testov«, kot temu pravijo ljubitelji tujk. Na nekatera vprašanja mora učenec odgovoriti z besedami ali s kratkim računom, za kar so povsod rezervirane prazne vrstice. (Ali ni to potrata spričo dragega tiska in ali ni pohujšanje, če naj učenci pišejo po knjigi in jo s tem naredijo neuporabno za naslednjo generacijo?) Večidel pa so vprašanja oblikovana v slogu šoferskih izpitov, tako da učenec samo zaznamuje pravega izmed štirih ali petih ponudenih odgovorov.

Kregarju je uspelo, da je z vprašanji dokaj enakomerno pokril vso učno snov. Uporabnost zbirke pa je odvisna še od tega, ali so vprašanja učencu popolnoma razumljiva, ali za odgovore zadošča znanje iz učbenika in ali je vsak odgovor zanesljivo enoličen. Del vprašanj ne ustreza vsem zahtevam. Vidi se, da avtor ni imel priložnosti, da bi zbirko pred tiskom preskusil, s tem da bi kolegom (najbolje kar avtorjem učbenika) ali dobrim učencem dal izdelati odgovore. Naj naštejem nekaj primerov!

Str. 6: »Koliko dela lahko telo v najboljšem primeru odda?« — Str. 8: »Katera sila deluje na enakomerno krožeče telo in od česa je odvisna?« — Obakrat ni jasno, kaj naj bi človek odgovoril.

Str. 17: Lastne frekvence težnega nihala se učenec ni naučil računati.

Str. 34: Učenec ne more vedeti, od česa vsega je odvisna hitrost valov na vodni gladini.

Str. 49: »Podobno kot struna niha tudi vpeta palica. Kako s splošnimi podatki izrazimo lastno frekvenco palice, ki ima dva vozla, enega na enem skrajnem koncu, drugega pa za $\lambda/4$ od drugega skrajnega konca?« — Uvodno pojasnilo razumem tako, da je nihanje palice transverzalno. Takšno nihanje pa je bolj zamotano kot pri struni, tako da učenec ne more odgovoriti. Kako naj bi eksperimentalno izpolnili zadnji pogoj, tudi ni jasno.

Poskus z uklonom svetlobe na robu noža (str. 52) ni razumljivo opisan. Kakšno »svetlikanje« naj bi pri tem videli in kako?

Str. 56: »Zakaj rečemo, da je sončna svetloba bela?« — Vprašanje je bolj terminološko kot kaj drugega, tako da se o trditvi lahko prepiramo.

Str. 58: »Toplotni sprejemnik je občutljiv za tisti del svetlobnega toka, ki ga zaznavamo kot toploto.« — Izjava ni razumljiva, ker nobena svetloba ni »mrzla«.

Str. 69: »Kakšen pogoj mora biti izpolnjen, da valovanje nosi informacijo praktične vrednosti?« — Vprašanje ni jasno. Enako velja za vprašanje o modulaciji svetlobe, ki ima črtast spekter (str. 70).

Vprašanja o tehniških prijemih, kot npr. način modulacije pri radiu in televiziji (str. 71), bi kazalo prihraniti za višje razrede ustreznih tehniških usmeritev.

Vprašanje o karakteristiki diode (str. 77) razširja učno vsebino učbenika.

Enačba $v = (600\ \mathrm{km/s}\sqrt{V})\ \sqrt{U}$ na straneh 79 in 80) ima hibridno obliko: na desni so nekatere količine zapisane s simboli in druge s številskimi podatki. Takšne enačbe bi morali vsaj v šoli prepovedati, če jih že v inženirskem pisanju ne moremo.

Pri razpravljanju o energiji bi se bilo treba posebno skrbno izražati. Frazi »na elektrone vloženo delo« in »se na elektronu opravlja delo« (str. 79) se zdita nerodni.

Terminologija ponekod ni enotna. V učbeniku beremo o magnetnih silnicah, Kregar pa ima gostotnice (str. 81).

Pri poglavjih iz učbenika, ki dajejo samo površno informacijo, bi bilo najbolje, da opustimo vsakršno spraševanje. Svarilne primere najdemo na strani 83 in dalje: »Kaj pomeni trditev, da je elektron kvantni delec?« — Človek res ne ve, kaj naj bi odgovoril, kajti razločevanje med »kvantnimi« in »nekvantnimi« (?) delci je prisiljeno. — Str. 85: »Za kateri del sveta veljajo zakoni klasične fizike in za kateri zakoni kvantne fizike?« — Očitno ne gre za noben »del sveta«. Razen tega je učenec premalo zvedel, da bi znal povedati kaj drugega kot naučene besede. — Str. 99: »Zakaj gibanje molekul (pri plinu v posodi) ne zamre...?« — Brez pojasnila o trkih ob stene je vprašanje nepopolno, s tem dodatkom pa pretežavno.

Dogaja se, da naredi recenzija z naštevanjem slabosti v delu hujši vtis, kot si to recenzent želi in kot to delo zasluži. Zato naj poudarim, da je v vseh treh delih učbenika stvarnih napak le malo, vsekakor manj kot v prvih izdajah marsikatere podobne knjige. Če je v zbirki vprašanj nekaj več spodrsljajev, pa je treba upoštevati, da je to v slovenski fizikalni literaturi prvi tak poskus in da naloga nikakor ni bila lahka.

Slišal sem, da učbenik in zbirko že ponatiskujejo in da bo marsikaj popravljenega. Ne bo več prebogate zbirke osnovnih delcev in o vesolju bo učenec dobil bolj izdelano podobo. Ohranjena pa bo edina resna hiba knjige, namreč njena heterogenost. Vsak avtor je odgovoren le za svojo tretjino, ne da bi posegal v drugi dve. Vsaj pri naslednjem ponatisu bi bilo treba avtorjem priporočiti, da drug drugemu popravijo tekste. Po ponovni iteraciji bi potem lahko upali na enoten učbenik s tremi avtorji, namesto treh zvezkov. Spodrsljaji, kakršne sem naštel, bi na ta način sami od sebe izginili, kajti vsakdo laže opazi pomanjkljivosti v tujem pisanju kot v svojem. Razen tega bi pisci hočeš nočeš uskladili obseg in težavnost posameznih delov knjige.

Kregarjeva zbirka predstavlja manj nujno dopolnilo k učbeniku. Ponatis bi zato morali odložiti, dokler se ne doseže popolnejša uskladitev z učbenikom in dokler se s preskušanjem ne odpravijo nejasnosti.

Recenzija, ki sta jo za vse štiri zvezke opravila Mitja Kregar in Dušan Modic, je bila zahtevna naloga. Vendar bi bilo dobro, da bi Zavod za šolstvo pred nadaljnjim ponatiskovanjem naročil ponovno recenzijo in se dogovoril, da bodo recenzenti avtorjem kar najbolj pokazali, kje se da še kaj popraviti ali izboljšati.

Jezik je prijeten pri vseh štirih avtorjih. Vendar bi glede jezikovnega pregleda, ki ga je opravil Ernest Jeler, rad nekaj povprašal. Ali so po novem res dovoljene fraze »elektron*ova* hitrost«, da trki »nastopajo« in da delamo kaj »s pomočjo« česa? Razumem, da se jezikoslovec nerad meša v strokovno terminologijo, vendar bi se včasih moral. S sestavljenkama »premosorazmeren« in »obratnosorazmeren« se je težko sprijazniti. Menda je bolje »sorazmeren« in »obratno sorazmeren«.

Projekt »kompleta« je vodil uredniški odbor, v katerem so poleg piscev sodelovali še Janez Ferbar, Tomaž Fortuna, Marjan Hribar in Anton Moljk. V skoraj enakem sestavu je ta odbor poprej pripravil učni načrt. Dobro bi bilo mandat odboru podaljšati, zato da bi vplival na izboljšave pri ponatisih in tudi na tesnejše sodelovanje med avtorji.

Ivan Kuščer

PREMICA IN RAVNINA V UČBENIKU ZA MATEMATIKO ZA USMERJENO IZOBRAŽEVANJE

V novem učbeniku za matematiko, ki ga je napisal profesor Križanič, sta pojma premice in ravnine vpeljana za pojmoma obsega realnih števil oziroma vektorskega prostora. To je presenetljivo, saj običajno mislimo, da je pojem ravnine laže predstaviti kakor pojem dvodimenzionalnega evklidskega ali afinega prostora. Vendar odgovor na to metodološko vprašanje ni preprost in ga tu ne bom obravnaval. Rad pa bi opozoril na nekatere probleme pri definicijah omenjenih pojmov.

1. Pojem premice je uveden na strani 78 takole:

Odnose med točkami na premici povzemimo v dva **aksioma:**

1. *Na premici sta vsaj dve točki.*

2. *Izberimo na premici dve točki. Prvo okličimo za sliko števila* 0, *drugo za sliko števila* 1. *Brž ko to storimo, pripade vsaki točki na premici natanko določeno realno število, vsakemu realnemu številu pa natanko določena točka na premici.*

Enostavneje bi lahko rekli:

Množica je premica natanko tedaj, kadar je ekvipolentna množici realnih števil. Temu bi lahko takoj sledil izrek, da je množica realnih števil premica. Vse bi bilo prav, če ne bi v matematiki v tem primeru rekli, da ima takšna množica moč kontinuuma, ne pa, da je premica. (Beseda »premica« se nanaša na nekoliko bolj komplicirano strukturo.) Seveda tudi pisec sam ni mislil tako, saj po aksiomu

$$\text{Množica } \mathcal{P} \text{ je ekvipolentna množici } \mathbf{R}$$

ni mogoče vpeljati definicije

$$A \textit{ pred } B \Leftrightarrow a < b, \text{ kjer } A \text{ ustreza številu } a, \quad B \text{ pa številu } b.$$

V definiciji je namreč omenjena konkretna funkcija, v aksiomu pa ne. Torej moramo pravilno razumeti aksiome premice takole:

Urejeni par $(\mathcal{P}, \sigma)$ je premica natanko tedaj, kadar je σ bijektivna preslikava množice $\mathcal{P}$ na množico realnih števil.
Preslikava σ^{-1} je v knjigi implicitno vpeljana z izbiro slik števil 0 in 1.

Nato definiramo »pred«:

$$A \textit{ pred } B \Leftrightarrow \sigma A < \sigma B$$

Model za to strukturo pa bi bil urejeni par (množica realnih števil, identična preslikava).

2. Prehod od dvorazsežnega evklidskega vektorskega prostora $\mathcal{E}_2$ do evklidske ravnine je podobno uveden kot prehod od realnih števil k premici (stran 102):

Ravnino $\mathcal{R}$ obravnavajmo kot množico, elemente te množice imenujmo točke, točke označujmo z velikimi črkami $A, B, C, \ldots$ O točkah na ravnini govore aksiomi:

I. *Na ravnini je vsaj ena točka.*
II. *Urejenemu paru točk* $(A, B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ *ustreza natanko določeni vektor* $AB \in \mathcal{E}_2$.
III. *Točki* $A \in \mathcal{R}$ *in vektorju* $\mathbf{a} \in \mathcal{E}_2$ *ustreza natanko določena točka* $B \in \mathcal{R}$, *da je* $AB = \mathbf{a}$.
IV. *Vsaka trojka točk* A, B, C *zadošča* **Chaslesovi identiteti**

$$AB + BC + CA = 0$$

Spet sta dve možnosti za branje definienduma:

(i) Množica $\mathcal{R}$ je *ravnina*$_1$ $\Leftrightarrow \ldots$
(ii) Urejen par $(\mathcal{R}, f)$ je *ravnina*$_2$ $\Leftrightarrow \ldots$

Indeksa v definicijah smo uporabili zato, da bi se izognili dvoumnosti.

Težave povzroča že dejstvo, da funkcija, ki paru (A, B) priredi vektor AB, ni zaznamovana s posebnim znakom, čeprav je ravno tako pomembna kot $\mathcal{R}$. V primeru (i) bi lahko aksiome bistveno skrčili:

Množica $\mathcal{R}$ je *ravnina*$_1$ $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ je ekvipolentna množici $\mathcal{E}_2$. Drugi primer pa bi lahko simbolizirali takole:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{R}, f) \text{ je } \textit{ravnina}_2 \Leftrightarrow\ & (\exists A)(A \in \mathcal{R}) \\
& (\forall A \in \mathcal{R})(\forall \mathbf{a} \in \mathcal{E}_2)(\exists ! B \in \mathcal{R})(f(A, B) = \mathbf{a}) \\
& (\forall A, B, C \in \mathcal{R})(f(A, B) + f(B, C) + f(C, A) = 0)
\end{aligned}
$$

Aksiom II smo lahko izpustili, ker je iz teh aksiomov že razvidno, da f preslika urejeni par $(A, B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ v $f(A, B) \in \mathcal{E}_2$.

Vse to zveni precej abstraktno. Toda če bi Chalesovo identiteto zapisali

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC} \tag{1}$$

potem bi lahko rekli, da je ravnina množica točk, v vsaki izmed katerih je postavljen koordinatni sistem $\mathcal{E}_2$. Prehod iz enega v drugo izhodišče je podan z (1).

Če označimo $\mathbf{r}_A = \boldsymbol{OA}$ in $\mathbf{r}_{A'} = \boldsymbol{O'A}$, sledi $\mathbf{r}_{A'} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{O'}$.

Po uvedbi aksiomov običajno dodamo vsaj en model za definirano strukturo. Primer bi bil lahko urejeni par $(\mathcal{E}_2, g)$, kjer je $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Aksiom III velja zaradi

$$(\forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathcal{E}_2)(\exists ! \mathbf{b} \in \mathcal{E}_2)(\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c})$$

oziroma

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} = \mathbf{c}.$$

Aksiom IV pa se glasi

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{O}.$$

Jasno je, da je način uvedbe ravnine uporaben tudi za premico in prostor, seveda moramo za ta primer vzeti $\mathcal{E}_1$ oziroma $\mathcal{E}_3$. Hitro pa vidimo, da takšna definicija premice ne bi bila istovetna z definicijo premice v prejšnjem razdelku, saj je funkcija f dvomestna, funkcija σ pa enomestna.

3. Definicije bi bile morda jasnejše, če bi strukture označevali z drugo oznako kot pripadajoče osnovne množice, npr. kolobar $\mathbf{K} = (\mathcal{K}, 0, 1, +, -, .)$, ravnino $\mathbf{R} = (\mathcal{R}, f)$ itd. Aksiomatične metode si ne moremo zamisliti brez pojmov, kot sta interpretacija in model. Kako je sicer mogoče rešiti nalogo na strani 34, da je množica s štirimi elementi N, E, D, T kolobar, ko pa je treba dokazati

$$0 \in \mathcal{K},\ 1 \in \mathcal{K}$$

Tale naloga bi zmedla vsakega učenca:

Pokaži, da je primer za kolobar množica dveh števil 0, 1, s katerima računamo takole:

$$
\begin{array}{ccc}
1 + 1 = 1 & 1 + 0 = 0 & 0 + 0 = 1 \\
1 . 1 = 1 & 1 . 0 = 1 & 0 . 0 = 0
\end{array}
$$

Tu sta seveda števili 0 in 1 zamenjali vlogo. Te naloge v učbeniku ni, bila bi pa kar primerna: ko bi učence vprašali za veljavnost izreka $0 + 0 = 0$ v tem modelu in bi dobili prepričljiv odgovor »Seveda, $1 + 1 = 1$«, bi lahko šli na novo snov.

4. Na strani 40 je dokaz, da je element 1 pozitiven. Dokaz izreka bi lahko potekal takole:

(1) $a \neq 0 \Rightarrow a . a > 0$	[že dokazan izrek]
(2) $1 \neq 0 \Rightarrow 1 . 1 > 0$	[v (1) vstavimo 1 namesto a]
(3) $1 . 1 > 0$	[sledi iz (2) in $1 \neq 0$]
(4) $1 . 1 = 1$	[aksiom]
$1 > 0$	[sledi iz (3) in (4)]

V dokazu smo se sklicevali na $1 \neq 0$, kar pa bi morali vzeti za aksiom.

Kolobar, v katerem velja $0 = 1$, in aksiom $0 \neq 1$ sta dva indikatorja, ki pokažeta zrelost za aksiomatizacijo. Toda za takšen splošen način uvedbe aksiomatizacije učenec verjetno še ni pripravljen. Neprestano se namreč sklicujemo na znanje iz osnovne šole in če se sploh lahko na kaj zanesemo, se zanesemo na to, da učenec pozna števili 0 in 1. Aksiomi o kolobarju pa o teh dveh številih ne povedo prav nič — simbola 0 in 1 imata v definiciji kolobarja popolnoma drugačno vlogo od te, da označujeta števili 0 in 1; v bistvu sta spremenljivki. Pomenita lahko karkoli, ne pa nujno omejeni števili. Res pa je, da je ta številski pomen najvažnejši in da to delno opravičuje dvoumno rabo te simbolike. V srednji šoli bi se lahko celo omejili samo na ta pomen, seveda bi tedaj vsak kolobar vseboval števili 0 in 1.

Za konec naj navedem še pripombo k Dedekindovemu aksiomu: Prazna množica je omejena, a nima natančne zgornje meje.

Izidor Hafner

USKLAJEVANJE PREDMETNIKOV IN UČNIH NAČRTOV ZA MATEMATIKO V OSNOVNI ŠOLI IN V SKUPNI VZGOJNO-IZOBRAZBENI OSNOVI SREDNJEGA USMERJENEGA IZOBRAŽEVANJA MED POSAMEZNIMI REPUBLIKAMI IN POKRAJINAMI V SFRJ

1. Uvod

V aprilu 1979 je Medrepubliško-medpokrajinska komisija za reformo vzgoje in izobraževanja predlagala Stalni konferenci zavodov za napredek vzgoje in izobraževanja SFRJ, naj pripravi programski dokument, ki bi bil ob vzporejanju konkretnih razlik, časovne dinamike in drugih objektivnih pogojev razvoja vzgoje in izobraževanja osnova za usklajevanje predmetnikov in učnih načrtov posameznih republik in pokrajin.

Zavod SR Slovenije za šolstvo je za področje matematike in naravoslovja sodeloval pri primerjalni analizi predmetnikov in učnih načrtov republik in pokrajin ter pri oblikovanju predloga skupnega programskega jedra za osnovno izobraževanje in za skupno vzgojno-izobrazbeno osnovo srednjega usmerjenega izobraževanja.

Na predmetnike in učne načrte v osnovni šoli vpliva zasnova povezovanja osnovnega izobraževanja s skupno vzgojno-izobrazbeno osnovo.

V letu 1975 sta bili v okviru medrepubliško-medpokrajinske komisije dogovorjeni dve variantni strokovni rešitvi za izvajanje skupne vzgojno-izobrazbene osnove. Po eni varianti, ki jo uveljavlja tudi zakon o usmerjenem izobraževanju v naši republiki, je skupna vzgojno-izobrazbena osnova vgrajena v programe strokovnega izobraževanja kot obvezen in skupen standard splošne izobrazbe. Po drugi varianti pa se skupna vzgojno-izobrazbena osnova uresničuje z uvajanjem dveletne splošno-izobraževalne srednje stopnje.

Glede na to, da vse republike in pokrajine v prvih dveh letih usmerjenega izobraževanja predvidevajo poleg enotnih tudi izbirne vsebine vzgojno-izobraževalnega dela, razlike v izbirnem delu ne bi smele biti izvor razlik v sistemu vzgoje in izobraževanja, če bi se dogovorili, da se pri izbirnih predmetih zagotovi široka vsebina znanja z velikim transferom. (Glej: Zdenko Medveš, Dogovarjanje republik in pokrajin o skupnih osnovah sistema vzgoje in izobraževanja, Vzgoja in izobraževanje 4/1980.)

V prispevku navajamo nekatere izsledke primerjalne analize predmetnikov in učnih načrtov za matematiko ter informacijo o predlogu skupnega programskega jezika.

2. Matematika v predmetnikih za osnovno šolo in skupno vzgojno-izobrazbeno osnovo

Stanje predmeta se odraža predvsem v kvaliteti, izraženi z vzgojno-izobraževalno vsebino, pa tudi v kvantiteti s številom ur v predmetniku.

V tabeli podajamo tedenski fond učnih ur matematike na razredni in predmetni stopnji osnovne šole in v skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi. Čeprav se število

tednov pouka v posameznih republikah in pokrajinah nekoliko razlikuje, so iz tako poenostavljenega prikaza razvidne nekatere posebnosti. Sedanji spreminjevalni predlogi so v tabeli označeni za poševno črto.

BIH	ČG	HR	KO	MAK	SL	SR	VOJ
5	5	5/4	5	6	5	6	5
5	5	5/4	5	6	5	6	5
5	5	5/4	5	5	5	5	4/5
5	5	5/4	5	5	5	5	4
5	5/4	5/4	4	5	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
3	4	4	4	3	3	4	3
3	4	4	4	3	4	4	3
35	37/36	37/32	36	37	35	38	32/33
3	3/4	4	4	4/3	/3	4	4/3
3	3/4	4	4	3		4	4
6	6/8	8	8	7/6	/3	8	8/7

V osnovnem izobraževanju je matematika zastopana v vseh republikah in pokrajinah od 1. do 8. razreda. Tedensko število ur variira od 32 ur (SAP Vojvodina) do 38 ur (SR Srbija), vendar na letno število ur vpliva tudi različno število tednov pouka v posameznih republikah in pokrajinah. Odstopanja od povprečnega skupnega števila 1275 ur so manjša od 7 %.

V skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi je matematika zastopana v vseh republikah in pokrajinah — razen v SR Sloveniji — v 1. in 2. letu s tedenskim fondom od 6 do 8 ur. V SR Sloveniji je razpored skupne vzgojno-izobrazbene osnove določen s posameznim vzgojno-izobraževalnim programom; matematika je vključena večinoma s 3 urami v 1. leto srednjega izobraževanja, kasneje pa je zastopana v vzgojno-izobraževalnih programih kot strokovno-teoretičen predmet.

3. Predlog skupnega programskega jedra

Primerjalna analiza učnih načrtov je zajela 25 tematskih področij na razredni stopnji izobraževanja, 16 tematskih področij na predmetni stopnji izobraževanja in 9 tematskih področij v skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi. Raziskali smo časovno dinamiko obravnave teh področij v posameznih republikah in pokrajinah ter iz skupne učne vsebine oblikovali predlog programskega jedra. V osnovnem izobraževanju odstopanja od jedra niso bistvena, pojavljajo pa se razlike v tempu in v vrstnem redu obravnave posameznih tematskih področij. V skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi pa je pretežno skupna vsebina ponekod že bolj razširjena.

3.1. *Osnovno izobraževanje*

1. do 4. razred

1. Predmeti v prostoru in odnosi med njimi. Množice: osnovni pojmi, relacije, operacije. Klasifikacija predmetov po lastnostih in osnovni pojmi logike.

2. Naravna števila. Relacije. Operacije in njihove osnovne lastnosti. Enakosti in neenakosti. Desetiški sestav. Rimske številke.

3. Deli celote — ulomki. Uporaba črk za označevanje števil. Izrazi, oklepaji. Enačbe.

4. Mere: dolžina, denar, čas, masa, ploščina in prostornina.

5. Geometrija: črte, dolžina, območja, ravnina, premica, poltrak, vzporedne in pravokotne premice, seštevanje in odštevanje daljic. Pojem kota. Skladnost. Osna simetrija. Geometrijski liki: kvadrat, pravokotnik, trikotnik, krog. Geometrijska telesa: kvader, kocka, valj, krogla. Obseg in ploščina kvadrata in pravokotnika. Površina in prostornina kocke in kvadra.

5. do 8. razred

1. Množice, relacije, funkcije. Množica N, operacije in osnovne lastnosti (No in operacije v No). Množica Z. Merjenje. Deljivost. Ulomki. Decimalne številke. Procenti. Množica Q. Sorazmernost, osnovne funkcijske odvisnosti. Kvadriranje in korenjenje. Množica R.
2. Algebrski izrazi. Enačbe. Neenačbe. Linearna funkcija. Sistemi enačb.
3. Geometrijski objekti kot konveksne množice točk. Kot, merjenje kotov.
4. Vektorji. Geometrijske transformacije: translacija, rotacija, simetrija. Trikotnik, četverokotnik, mnogokotnik, krog. Geometrijske konstrukcije. Obseg in ploščina.
5. Pitagorov izrek. Uporaba.
6. Sorazmerne daljice. Podobnost.
7. Prostorska geometrija. Prizma, piramida, valj, stožec, krogla. Površina in prostornina. Projiciranje.

3.2. *Skupna vzgojno-izobrazbena osnova*

1. Logika in množice. Kartezijski produkt, relacije, funkcije. Realna števila. Algebrske strukture.
2. Vektorji. Izometrijske transformacije. Homotetija in podobnost.
3. Linearna funkcija, enačbe, neenačbe. Sistemi enačb in neenačb.
4. Potence. Koreni.
5. Kompleksna števila. Kvadratna funkcija, enačbe in neenačbe.
6. Eksponentna in logaritemska funkcija.
7. Elementi trigonometrije. Uporaba.

Opomba: V nekaterih republikah in pokrajinah je pretežno skupna vsebina razširjena s temami:

— Kombinatorika.
— Matematična statistika in verjetnost.
— Zaporedja in limitni procesi.
— Prostor. Poliedri, vrtenine.
— Opisna geometrija.
— Pregled razvoja matematike.

4. Pojasnilo

Namen iskanja skupnega programskega jedra ni pripraviti celovit učni načrt kot konglomerat skupne vsebine republiških in pokrajinskih učnih načrtov. Usklajevanje se začne pri predmetnikih, vsebinsko pa se zahtevnost naloge kaže v povezanosti matematike kot znanosti s teorijo učnih načrtov, s problematiko izobraževanja nasploh, z dosegom razvoja metodike in didaktike.

Predlog skupnega programskega jedra za matematiko (in naravoslovno-vzgojno-izobraževalno področje) je pripravljen glede na cilje in naloge področja, opredeljena je struktura področja, vzgojno-izobraževalna vsebina in obrazložitev programskega jedra.

Zasnova pouka matematike upošteva sodobna reformna prizadevanja. To se odraža v linearno-spiralnem principu načrtovanja, v obravnavi vsebine glede na psihološke možnosti učencev, v navajanju učencev na samostojno delo in na uporabo različnih virov informacij. Pouk matematike se približuje razvoju matematike kot znanosti, kar pomeni zbliževanje vsebine pouka in idej sodobne matematike. Matematika je celovit učni predmet, ki v srednjem izobraževanju ne ločuje geometrije od algebre.

Na koncu je treba omeniti, da je od učnega programa do njegove uresničitve v učbeniku mnogo poti. V analizo metodične obravnave vsebine se predlog skupnega programskega jedra ne spušča. Ta predlog pomeni začetek zahtevne naloge za vse republike in pokrajini. Njena uspešna uresničitev zahteva vključitev najširših strokovnih krogov.

Tudi zadnji kongres DMFA SFR Jugoslavije v Budvi je iskanje poti usklajevanja republiških in pokrajinskih programov dal ustrezen poudarek.

Aleksander Cokan

Ivan Vidav — avnojski nagrajenec

Med letošnjimi avnojskimi nagrajenci je tudi akademik profesor dr. Ivan Vidav.

Po zakonu je ta nagrada posebno družbeno priznanje, ki se podeljuje posamezniku ali skupini ustvarjalcev za objavljena dela in druge najvišje dosežke, ki so splošnega pomena za razvoj države.

Bralcem Obzornika prav gotovo ni potrebno posebej za to priložnost predstavljati obsežnega znanstvenega in izjemno bogatega pedagoškega dela prvega slovenskega matematika, ki živi z nami. Ob njegovi šestdesetletnici smo tudi že poskusili izmeriti »daljo in nebeško stran« tega pronicljivega in dejavnega uma in ovrednotiti njegov pomen za razvoj slovenske matematike. Zato naj zdaj le z zadovoljstvom ugotovimo:

Lepe besede zakona se tokrat nedvomno nanašajo na pravega moža.

Niko Prijatelj

DOMAČE VESTI

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE V BEOGRADU

Od 9. do 12. maja 1980 je bilo v Beogradu 6. mednarodno in 13. zvezno tekmovanje študentov matematike — ISTAM'80.

Tekmovanja so se iz Ljubljane udeležili Emil Beloglavec, Robert Bončina, Janko Gravner, Jurij Kovič, John Shawe-Taylor in Meta Škapin.

Študentje 1. in 2. letnika so reševali iste naloge. Študentje 3. in 4. letnikov pa so lahko izbirali med naslednjima skupinama. V skupini A sta bili obvezni nalogi iz realne in funkcionalne analize, drugi dve nalogi pa so si študentje lahko izbrali iz enega od naslednjih predmetov: programiranje in numerična analiza, diferencialne in integralske enačbe in funkcije kompleksnih spremenljivk. V skupini B je bil obvezni del algebra, izbirni predmeti pa so bili: topologija, verjetnostni račun in geometrija.

Za naše študente ta način izbiranja predmetov ni bil ugoden, saj vemo, da smo trenutno v jugoslovanskem merilu najboljši v programiranju in numerični analizi. Uporabni matematiki pa ne poslušajo funkcionalne analize, ki je bila obvezna za tiste, ki so hoteli tekmovati iz programiranja.

Ekipni vrstni red je bil naslednji: 1. Budimpešta, 2. Praga, 3. Krakow, 4. Szeged, 5. Zagreb 1, 6. Ljubljana 1, 7. Skopje, 8. Ljubljana 2, 9. Zagreb 2, 10. Novi Sad, 11. Sarajevo, 12. Delft (Nizozemska), 13. Beograd. Precej dobro pa so se odrezali tekmovalci beograjske matematične gimnazije, ki pa seveda niso tekmovali v konkurenci.

Na tem mestu se še lepo zahvaljujem profesorju Ivanu Puclju, ki je prevedel naloge iz geometrije in jih spravil v tako obliko, da jih lahko objavimo.

Poglejmo si še naloge.

Naloge za 1. in 2. letnik

1. Ali obstaja takšno zaporedje realnih števil $\{a_n\}$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira, če in samo če je zaporedje $\{a_n x_n\}$ omejeno?

2. Množica $S \subset N$ (naravna števila) imenujemo pravilno, če in samo če obstaja limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}(\{1, 2, \ldots n\} \cap S)}{n}$.

Naj bosta S in T pravilni množici. Ali sta $S \cup T$ in $S \cap T$ pravilni množici?

3. Naj bo $(S, *)$ polgrupa, v kateri za poljubne x, y, z velja $x * y * z = x * z * y = y * x * z = y * z * x = z * x * y = z * y * x$. Ali od tod sledi, da je ta polgrupa komutativna?

4. Naj bo D operator, ki vsaki zvezni realni funkciji, definirani na $[a, b]$, priredi realno funkcijo, definirano na $[a, b]$, in ima naslednje lastnosti:

(i) $D(f + g) \geqslant Df + Dg$.
(ii) Če je x_0 točka, v kateri funkcija f doseže maksimum, je $(Df)(x_0) \leqslant 0$.
(iii) $D(px^2 + qx + r) \geqslant p \quad (p > 0)$.

Dokažite: če je $Df \geqslant 0$, potem je f konveksna na $[a, b]$.

Algebra

1. Poišči takšni univerzalni algebri A in B, da je B homomorfna slika A-ja in A homomorfna slika B-ja, vendar A in B nista izomorfni. Ali sta lahko A in B polgrupi?

2. $(S, ., *, K)$ je K^* polgrupa, če in samo če velja:

(i) $(S, .)$ je polgrupa.
(ii) $(x\,y)^* = y^*\,x^*, x^{**} = x$
(iii) $K \subseteq S,\ K\,S \subseteq K,\ S\,K \subseteq K$

Definirajmo: $K_x = \{y \in S;\ x\,y \in K\}$, $P = \{x \in S;\ x^2 = x = x^*\}$
K^* polgrupa $(S, ., *, K)$ je Baerova* polgrupa če in samo če velja:
(iv) $(\forall x \in S)(\exists z \in P)$ da je $K_x = z\,S$
Dokaži, da ima vsaka Baerova* polgrupa enoto.

Funkcije kompleksnih spremenljivk

1. Poišči vse cele funkcije f, za katere velja $|f(z)| = 1$, če je $|z| = 1$.

2. Naj bo f analitična v enotnem disku $f(0) \neq 0$, in naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ničle funkcije f na enotnem disku.

Pokaži, da velja:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta = \log|f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \log|\alpha_k|$$

Topologija

1. Dokaži, da ima topološka grupa (z več kot enim elementom) diskretno topologijo natanko takrat, ko obstaja kompaktna odprta podmnožica te grupe, ki ne vsebuje nobene svoje desne translacije.

2. Dokaži ali ovrzi trditev: Če je metrični prostor S homeomorfen svoji napolnitvi S^*, je S poln.

Diferencialne in integralske enačbe

1. Naj bo f: $(a, b) \to (A, B)$ zvezna funkcija in $0 < A < B$. Dokaži, da za rešitev diferencialne enačbe $y'' = f(x)\,y$, ki ustreza začetnim pogojem $y(x_0) = y_0$ in $y'(x_0) = 0$ $(x_0 \in (a, b))$, velja ocena:

$$y_0 \operatorname{ch}((x - x_0)\sqrt{A}) \leqslant y(x) \leqslant y_0 \operatorname{ch}((x - x_0)\sqrt{B})$$

2. Naj bo K zvezna realna funkcija, definirana na $[0, 1] \times [0, 1]$. Dokaži, da obstaja zvezna realna funkcija L, ki je definirana na $[0, 1] \times [0, 1]$ in zadošča pogoju $L(1/2, y) = 0$ za vsak $y \in [0, 1]$, tako da imata integralska operatorja z jedroma K in L iste lastne vrednosti.

Programiranje

1. Dan je izraz $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$.

V njem lahko * zamenjamo s $+$, $-$, $\times$ in :. Vrednost dobljenega izraza mora biti 100. Napiši program, ki bo poiskal vse rešitve tega problema. Izraz naj se izračunava z leve na desno in vse operacije naj imajo enako prioriteto.

2. Dana je peterka naravnih števil (1, 3, 5, 7, 9). Igralca A in B igrata izmenično (začne A), in to tako, da vsak od njiju zmanjša eno od števil, kolikor hoče, samo da števila ostanejo nenegativna. Izgubi tisti, ki ne more več odigrati poteze. Napiši program, ki privede igralca A do zmage ne glede na to, kako igra nasprotnik.

Geometrija

1. V absolutni ravnini je dan trikotnik ABC. Označimo nosilke stranic AB, BC, CA z (A, B), (B, C), (C, A). Izberimo točke A', B', C', tako da veljajo pogoji:

A' leži na (A, C)	točka A leži med A' in C
B' leži na (A, B)	točka B leži med B' in A
C' leži na (B, C)	točka C leži med C' in B

Označimo usmerjene kote $A'\widehat{A}B$, $B'\widehat{B}C$, $C'\widehat{C}A$ na kratko α', β', γ'. (Koti so med seboj enako orientirani.)

Določimo točko D na poltraku $(A\ ;\ C)$, tako da je vsota $AB + BC + CA$ enaka AD. Zabeležimo vrtljaj okoli oglišča A za usmerjen kot α' z zapisom $V_{A,\alpha'}$ in analogno v drugih primerih. Označimo translacijo za usmerjeno daljico AD z zapisom T_{AD}. (Os (A, D) je nosilka te translacije.)

Dokažite, da velja tale zveza

$$V_{C,\alpha'} \circ V_{B,\alpha'} \circ V_{A,\alpha'} = T_{AD}$$

2. Denimo, da so v prostoru Lobačevskega (L^3) dane štiri točke A, B, C, D, tako da sta usmerjeni premici (osi) (A, C) in (B, D) mimobežnici. Denimo, da je na osi (A, C) točka A pred točko C in da je na osi (B, D) točka B pred točko D. Zabeležimo translacijo, ki jo določa usmerjena daljica AC z zapisom T_{AC}; označimo vrtljaj okoli premice (A, C) za usmerjen kot φ z zapisom $V_{(A,C),\varphi}$.

Dokažite, da potem obstajata v L^3 točki X, Y in obstaja usmerjen kot φ, tako da velja

$$T_{BD} \circ T_{AC} = T_{XY} \circ V_{(X,Y),\varphi}$$

Verjetnostni račun

1. Naj bo $\{X_n, n \geqslant 0\}$ Markovska veriga s stanji 0 in 1. Predhodne verjetnosti so $P_{00} = 1 - \alpha$, $P_{01} = \alpha$, $P_{11} = 1 - \beta$ in $P_{10} = \beta$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$. Naj bo N najmanjše naravno število n, za katero je $X_{n-1} = X_n = 0$. Poišči srednjo vrednost $E(N \mid X_0 = 0)$.

2. Označimo z N slučajno spremenljivko z nenegativnimi celimi vrednostmi. N kroglic neodvisno drugo od druge dajemo z verjetnostjo p v žaro A in z verjetnostjo $1 - p$ v žaro B $(0 < p < 1)$. Označimo z N_1 število kroglic v žari A in z N_2 število kroglic v žari B $(N_1 + N_2 = N)$. Dokaži, da sta N_1 in N_2 neodvisni slučajni spremenljivki, če in samo če je N porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi.

Realna in funkcionalna analiza

1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ tak merljiv prostor, da za vsak $A \in \mathcal{F}$, ki ima pozitivno mero, obstaja $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{F}$, da je $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Nadalje naj obstaja $D \in \mathcal{F}$ z $\mu(D) = 2$. Ali obstaja $C \in \mathcal{F}$, katerega mera je 1?

2. Dokaži, da je operator K: $1_p \to 1_p$, definiran s predpisom $K(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$, kompakten $(p \geqslant 1)$.

Mirko Dobovišek

PRIMATIADA 81
Srečanje študentov prirodoslovno-matematičnih fakultet

Letošnja osma primatiada je bila od 18. do 26. aprila v Strugi ob Ohridskem jezeru. Sodelovale so fakultete iz Beograda, Zagreba, Ljubljane, Sarajeva, Kragujevca, Niša, Novega Sada in fakulteta iz Skopja, ki je bila organizator.

Iz Ljubljane nas je bilo 60 študentov. Tekmovali smo v devetih disciplinah: odbojki, rokometu, nogometu, košarki, šahu, namiznem tenisu, streljanju, kvizu in orientaciji. Najbolje so se odrezali moški v odbojki, ženske pa v namiznem tenisu; oboji so osvojili prvo mesto. Diplome so dobili tudi moški v šahu, kvizu, streljanju, ženske pa v šahu, streljanju, namiznem tenisu in košarki.

Vsako dopoldne so bili tematski razgovori, ob večerih pa so se ekipe pomerile v kvizu ali je bil na sporedu kulturni program. Študenti naše fakultete smo pripravili recital makedonske poezije.

Prihodnje leto bo organizator primatiade PMF iz Kragujevca.

Za udeležbo na primatiadi smo 48 % sredstev dali študenti sami, nekaj so prispevali VTO Matematika in mehanika, VTO Fizika, OOZSM Matematika, OOZSM Fizika, Institut Jožef Stefan in delovne organizacije Center za sodobno oblačenje — Ljubljana, Zavarovalnica Triglav — Celje in Slovenijales — Ljubljana, ki se jim za prispevke lepo zahvaljujemo.

Primož Tramte

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO V LETU 1982

Objava predavanj s seminarja *Fizika polprevodnikov* se je zakasnila, predvsem zaradi pomanjkanja denarja. Podobne težave čakajo Obzornik tudi letos. Ker so izdatki za eno številko narasli na okoli 15 000.— din in ker si od naročnin in subvencij Izobraževalne skupnosti Slovenije ter Raziskovalne skupnosti Slovenije obetamo skupaj le okoli 600 000.— din, bodo, kot kaže, lahko izšle le štiri številke. Uredniški odbor Obzornika je že predlagal nekaj ukrepov, ki naj bi zagotovili izid pete številke. O njih je obvestil tudi občni zbor. Dolžina člankov naj ne bi presegla 6 strani, novice pa ne 3 strani. Objavljena predavanja s seminarjev v prihodnje ne bi smela presegati obsega ene številke.

Tej številki je priložena položnica. Naročnike lepo prosimo, da naročnino čimprej nakažejo na naš žiro račun.

Ciril Velkovrh

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije

v a b i

dosedanje in bodoče avtorje slovenskih matematičnih, fizikalnih in astronomskih knjig in člankov v revijah na

P O G O V O R

ki bo v četrtek, 14. januarja 1982, z začetkom ob 17.15, v Ljubljani, Jadranska c. 19, soba 3—15.

Pregledali bomo uspehe in težave pri dosedanjem izdajanju obeh društvenih revij, knjig in učbenikov v zbirkah Sigma, Matematika-Fizika, izbrana poglavja iz matematike in iz fizike, postdiplomski seminar iz matematike in iz fizike, srednješolskih in osnovnošolskih učbenikov ter drugih del. Pogovorili se bomo tudi o možnostih nadaljevanja izdajateljske dejavnosti v zaostrenih finančnih pogojih.

Na razgovor so vabljeni tudi vsi člani društva, ki se za to dejavnost zanimajo.

Predsednik UO DMFA SRS
Janez Stepišnik, l. r.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, VTOZD Matematika in mehanika Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Zavod SR Slovenije za šolstvo ter Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko prirejajo 29. in 30. januarja 1982

9. seminar iz matematike
GEOMETRIJA

Seminar je namenjen učiteljem srednjih in osnovnih šol za strokovno izpopolnjevanje, vabljeni so tudi ostali člani društva.

Seminar bo v predavalnici M 2 v 2. nadstropju na Jadranski 21 (RRC).

Delo seminarja bo potekalo takole:

Petek, 29. januar:

9.00	
9.00— 9.45	Marija Vencelj: Konstrukcije s šestilom in ravnilom
10.00—10.45	
11.15—12.00	Ivan Vidav: Afina geometrija
12.15—13.00	

Sobota, 30. januar:

8.15— 9.00	Marija Vencelj: Konstrukcije s šestilom in ravnilom
9.15—10.00	Janez Rakovec: Topologija v evklidskih prostorih
10.15—11.00	
11.15—12.00	

Prispevek za seminar je 250 din za udeleženca. Vodstva šol in organizacij združenega dela prosimo, da prispevek nakažejo vnaprej na žiro račun DMFA SRS št. 50101-678-49168, lahko pa ga plača udeleženec na seminarju. Za seminar priporočamo literaturo: Ivan Vidav: Afina in projektivna geometrija in Janez Rakovec: Osnovni pojmi topologije (Sigma).

Sekretarka seminarja
Martina Koman

Vodja Seminarja
Janez Rakovec