

B-172/81
ODPISANO

ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1981
Letnik 28
2

OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(\tilde{x}) & \tilde{a}_{12}(\tilde{x}) & \dots & \tilde{a}_{1n}(\tilde{x}) \\ \tilde{a}_{21}(\tilde{x}) & \tilde{a}_{22}(\tilde{x}) & \dots & \tilde{a}_{2n}(\tilde{x}) \\ - & - & - & - \\ \tilde{a}_{n1}(\tilde{x}) & \tilde{a}_{n2}(\tilde{x}) & \dots & \tilde{a}_{nn}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1981

Glavni urednik: Edvard Kramar, **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 250.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 125.— din, za ustanove in podjetja 350.— din, za tujino 20 \$ = 600.— din, posamezna številka 60.— din, dvojna številka 120.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — Obzornik za matematiko in fiziko, 61001 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 227, tel. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1981 DMFA SRS — 491

YU ISSN 0473-7466

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA**Članki**

Računanje odvoda determinante (Zvonimir Bohte) 33

Šola

Uporaba Planckovega zakona v astronomski fotometriji (Marijan Prosen) . . . 51

Odgovori — 4 (Janez Žitnik), — 49 (Janez Žitnik) 56, 57

Prejeli smo v oceno (Peter Gosar, Jože Vrabec, Rajko Jamnik, Ivan Vidav, Vladimir Batagelj, Marjan Hribar, Matjaž Omladič, Izidor Hafner, Vladimir Batagelj, Edvard Kramar, Vladimir Batagelj, Tomaž Pisanski) 50, 61

Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1980 (Ciril Velkovrh) III

CONTENTS**Articles**

Calculation of the derivate of the determinant (Zvonimir Bohte) 33

School 51**Answers** 56, 57**Reviews** 50, 61

Na ovitku: Determinanta matrike (gl. članek na str. 33)

RAČUNANJE ODVODA DETERMINANTE

ZVONIMIR BOHTE

Math. Subj. Class. (1980) 65F40

Članek obravnava razne metode za računanje odvoda determinante matrike, katere elementi so dane racionalne funkcije ene spremenljivke.

CALCULATION OF THE DERIVATIVE OF THE DETERMINANT

In this article various methods for the calculation of the derivative of the determinant of a matrix whose elements are given rational functions of one variable are treated.

1. Uvod

Naj bo $A(x)$ dana kvadratna matrika reda n , katere elementi $a_{ik}(x)$ so racionalne funkcije spremenljivke x . Označimo z $f(x)$ determinanto matrike $A(x)$

$$f(x) = \det A(x) \quad (1)$$

ki je tudi racionalna funkcija. Kako hitro in natančno izračunamo determinanto matrike $A(x)$ pri dani realni vrednosti argumenta x , je podrobno obdelano v članku [4].

V tem sestavku si bomo ogledali, kako izračunamo odvod determinante (1) pri danem argumentu x .

Računanje determinante in njenega odvoda pride prav pri numeričnem reševanju raznih posplošenih algebraičnih problemov lastnih vrednosti.

Splošni algebraični problem lastnih vrednosti lahko formuliramo v obliki

$$A(x) u(x) = 0 \quad (2)$$

kjer je $A(x)$ dana kvadratna matrika reda n . Naloga je določiti tako vrednost spremenljivke x (lastno vrednost) in tak neničelni vektor $u(x)$ (lastni vektor), da je enačba (2) izpolnjena. Homogen sistem linearnih enačb (2) ima, kot vemo ([5]), netrivialno rešitev $u(x)$ natanko tedaj, ko je determinanta sistema enaka nič. Lastne vrednosti problema (2) so torej rešitve nelinearne enačbe

$$f(x) = 0 \quad (3)$$

kjer je $f(x)$ determinanta matrike $A(x)$. Ko določimo lastno vrednost, to je koren enačbe (3), dobimo ustrezni lastni vektor iz homogenega sistema (2).

Za reševanje nelinearnih enačb je znanih mnogo numeričnih metod ([3]). Nekateri med njimi, kot je npr. sekantna metoda, zahtevajo na vsakem koraku iteracije le računanje funkcijskih vrednosti. Te metode so preproste, toda v splošnem počasne. Pri uporabi takih metod za reševanje problema (2) moramo torej računati le vrednosti determinante (1) za dane vrednosti argumentov x . Če pa želimo za reševanje enačbe (3) uporabljati hitrejša metode, kot je npr. Newtonova ali tangentna metoda ([3]), moramo računati tudi vred-

nosti odvodov funkcije $f(x)$, to je vrednosti odvodov determinante (1) pri danih vrednostih argumenta x . Newtonova iteracija je namreč

$$x_{r+1} = x_r - f(x_r)/f'(x_r), \quad r = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Na vsakem koraku iteracije moramo izračunati takó vrednost determinante kot njen odvod pri tekočem približku x_r . V splošnem pa imamo zato mnogo manj korakov iteracije za isto natančnost kot pri prej omenjenih metodah.

Posebni primeri posplošenega problema (2) so polinomski problemi, kjer je matrika $A(x)$ matrični polinom spremenljivke x :

$$A(x) = A_0 + xA_1 + \dots + x^m A_m \quad (5)$$

Tu so $A_0, A_1, \dots, A_m$ dane kvadratne matrike reda n . Matriko (5) dobimo npr. pri reševanju sistema n homogenih linearnih diferencialnih enačb reda m s konstantnimi koeficienti ([6]). Zelo pogosto v praksi naletimo na posplošeni problem za $m = 1$. Posplošeni problemi za $m = 2$ nastopajo v aerodinamiki pri konstrukciji letal ([6]). Klasični algebraični problem lastnih vrednosti dobimo, če je $m = 1$ in $A_1 = -I$.

Računanje odvodov determinante je potrebno tudi pri numeričnem reševanju dvoparametričnega algebraičnega problema lastnih vrednosti

$$\begin{aligned} A(x, y) u(x, y) &= 0 \\ B(x, y) v(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Tu sta $A(x, y)$ in $B(x, y)$ dani kvadratni matriki dveh spremenljivk. Iščemo tak lastni par (x, y) , da imata oba homogena sistema v (6) netrivialni rešitvi $u(x, y) \neq 0$ in $v(x, y) \neq 0$. Zato so lastni pari rešitve sistema dveh nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \det A(x, y) = 0 \\ g(x, y) &= \det B(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Newtonova metoda za reševanje tega sistema ([3]) zahteva računanje vrednosti obeh determinant in vseh štirih parcialnih odvodov pri danih vrednostih argumentov x in y .

Primer dvoparametričnega problema je ([2])

$$\begin{aligned} (A_0 + xA_1 + yA_2) u(x, y) &= 0 \\ (B_0 + xB_1 + yB_2) v(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

kjer so A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 in B_2 dane kvadratne matrike reda n .

Na algebraične probleme lastnih vrednosti ponavadi naletimo ob numeričnem reševanju ustreznih problemov pri diferencialnih ali integralnih enačbah.

2. Odvod determinante

Determinanta matrike

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

je po definiciji ([5])

$$f(x) = \det A(x) = \sum \pm a_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \dots a_{nk_n}(x) \quad (8)$$

Tu je $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ permutacija števil $1, 2, \dots, n$. Vsota se nanaša na vse možne permutacije teh števil, zato je sumandov $n!$. Če je permutacija $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ soda, člen $a_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \dots a_{nk_n}(x)$ obdrži predznak, če pa je liha, znak spremeni.

Odvod determinante (8) je po pravilih za odvajanje vsote in produkta

$$\begin{aligned} f'(x) = & \sum \pm a'_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \dots a_{nk_n}(x) + \\ & + \sum \pm a_{1k_1}(x) a'_{2k_2}(x) \dots a_{nk_n}(x) + \dots + \\ & + \sum \pm a_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \dots a'_{nk_n}(x) \end{aligned}$$

Ta izraz je očitno vsota n determinant

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (9)$$

kjer je

$$f_i(x) = \det B_i(x)$$

in

$$B_i(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \hline a_{i-1,1}(x) & a_{i-1,2}(x) & \dots & a_{i-1,n}(x) \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \dots & a'_{in}(x) \\ a_{i+1,1}(x) & a_{i+1,2}(x) & \dots & a_{i+1,n}(x) \\ \hline a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

To je prvotna matrika $A(x)$, v kateri pa elemente i -te vrstice nadomestimo z njihovimi odvodi. Pravimo, da determinanto lahko odvajamo po vrsticah.

Ker moremo člene v formuli (8) urediti tudi po stolpcih

$$f(x) = \sum \pm a_{i_1 1}(x) a_{i_2 2}(x) \dots a_{i_n n}(x)$$

kjer je sedaj $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permutacija števil $1, 2, \dots, n$, dobimo z odvajanjem tudi drugo formulo

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) \quad (10)$$

kjer je

$$g_k(x) = \det C_k(x)$$

in

$$C_k(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1,k-1}(x) & a'_{1k}(x) & a_{1,k+1}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2,k-1}(x) & a'_{2k}(x) & a_{2,k+1}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \hline a_{n1}(x) & \dots & a_{n,k-1}(x) & a'_{nk}(x) & a_{n,k+1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

To je prvotna matrika $A(x)$, v kateri elemente k -tega stolpca nadomestimo z njihovimi odvodi. Pravimo, da lahko determinanto odvajamo tudi po stolpcih.

Predpostavimo, da smo pri danem realnem argumentu x_0 izračunali najprej vrednosti vseh elementov prvotne matrike

$$a_{ik}(x_0) = a_{ik}$$

in njihovih odvodov

$$a'_{ik}(x_0) = b_{ik}$$

to se pravi, da imamo že podani matriki

$$A = A(x_0)$$

in

$$B = A'(x_0)$$

Tu pomeni $A'(x)$ odvod matrike $A(x)$, to je matriko, ki ima za elemente odvode elementov matrike $A(x)$.

Računanje odvoda determinante po formulah (9) ali (10) zahteva računanje vsote determinant n matrik, ki jih dobimo iz matrike A tako, da v njej po vrsti zamenjamo po eno vrstico (ali stolpec) z ustrezno vrstico (ali stolpcem) matrike B . Če determinanto računamo na najbolj ekonomičen način na osnovi Gaussovega razcepa matrike ([4]), porabimo za to

$$(2n^4 + n^2 - 3)/3 \quad (11)$$

aritmetičnih operacij. Približno polovico aritmetičnih operacij lahko prihranimo, če upoštevamo, da se v formuli (10) determinante razlikujejo le v enem stolpcu od prvotne. Upoštevati to posebnost ni tako enostavno. Težave so predvsem zaradi pivotiranja ([4]). Kot bomo videli v nadaljnjem, se da izračunati odvod determinante precej bolj ekonomično.

Oglejmo si preprost zgled. Naj bo

$$A(x) = \begin{bmatrix} -1+x, & -3+2x, & 1-x \\ 3-2x, & -1+x, & x \\ 1-x, & 1, & 1+2x \end{bmatrix} \quad (12)$$

Tu je

$$f(x) = 7x^3 - 14x^2 - 4x + 14$$

in

$$f'(x) = 21x^2 - 28x - 4$$

Izračunajmo odvod determinante pri $x = 2$ po formuli (10). Tu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Zato je

$$f'(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 12 + 10 + 2 = 24$$

3. Logaritmični odvod determinante

Do odvoda determinante lahko pridemo tudi po drugi poti. V knjigi [1] najdemo formulo

$$f'(x)/f(x) = \text{sl} (A^{-1}(x) A'(x)) \quad (14)$$

ki pravi, da je logaritmični odvod determinante dane matrike $A(x)$ (to je odvod logaritma njene determinante) enak sledi matrike (to je vsoti diagonalnih elementov), ki je nekakšen »logaritmični odvod matrike« $A(x)$.

Izpeljava formule (14) je dokaj enostavna. Mislimo si, da je determinanta matrike $A(x)$ posredna funkcija argumenta x . Odvisna je od vseh n^2 elementov matrike $A(x)$, vsak od teh pa je funkcija spremenljivke x . Zato velja po pravilu za odvajanje posredne funkcije

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial a_{ik}) a'_{ik}(x) \quad (15)$$

Parcialni odvod determinante na element a_{ik} izračunamo iz izraza, ki ga dobimo, če determinanto razvijemo po i -ti vrstici:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik}(x) \det A_{ik}(x)$$

Tu je $A_{ik}(x)$ podmatrika matrike $A(x)$ reda $n-1$, v kateri sta izpuščeni i -ta vrstica in k -ti stolpec. Zato je

$$\partial f / \partial a_{ik} = (-1)^{i+k} \det A_{ik}(x) \quad (16)$$

To pa je ravno (k, i) -ti element inverzne matrike $A^{-1}(x)$, pomnožene z determinanto matrike $A(x)$. Če označimo

$$A^{-1}(x) = C(x)$$

potem iz (16) sledi

$$\partial f / \partial a_{ik} = f(x) c_{ki}(x) \quad (17)$$

Če označimo še

$$A'(x) = B(x)$$

in

$$A^{-1}(x) A'(x) = C(x) B(x) = D(x)$$

dobimo iz formule (15) z upoštevanjem zveze (17) in pravila za množenje matrik

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n f(x) c_{ki}(x) b_{ik}(x) = f(x) \sum_{k=1}^n d_{kk}(x) = f(x) \text{sl} D(x)$$

Od tod pa neposredno sledi formula (14). Seveda ima ta formula pomen samo za take vrednosti argumenta x , pri katerih je matrika $A(x)$ nesingularna, torej $f(x) \neq 0$.

Oglejmo si sedaj računski postopek za računanje odvoda determinante po formuli (14).

Pri izbrani vrednosti argumenta x_0 imamo podani matriki $A = A(x_0)$ in $B = B(x_0) = A'(x_0)$. Matrika A naj bo nesingularna, torej naj bo $\det A \neq 0$. Po formuli (14) za $x = x_0$ je

$$f'(x_0) = f(x_0) \text{sl} (A^{-1}B) \quad (18)$$

Izračunati moramo torej sled matrike

$$D = A^{-1}B$$

To enačbo moremo zapisati v obliki

$$AD = B$$

kar pomeni v bistvu, da imamo pred seboj n sistemov linearnih enačb z isto matriko A in različnimi desnimi stranmi, ki so stolpci matrike B . Ustrezne rešitve teh sistemov so stolpci matrike D . Zapomnimo si, da potrebujemo le diagonalne elemente matrike D . Nalogo rešimo z Gaussovimi razcepom matrike A

$$A = L \cdot U \quad (19)$$

to je razcepom matrike na produkt spodnje trikotne matrike z enojkami na diagonalni in zgornje trikotne matrike ([3]). Mislimo si za hip, da ta razcep obstaja. Potem dobimo matriko D v dveh korakih. Najprej rešimo n spodnjih trikotnih sistemov

$$LY = B \quad (20)$$

nato pa n zgornjih trikotnih sistemov

$$UD = Y \quad (21)$$

Algoritem za direktni razcep (19), ki je razložen v članku [4], je tale:

$$r = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{rk} = a_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj} u_{jk}, \quad k = r, \dots, n \quad (22)$$

$$l_{ir} = \left(a_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{ij} u_{jr} \right) / u_{rr}, \quad i = r + 1, \dots, n \quad (23)$$

Spodnje trikotne sisteme (20) rešimo tako, da najprej zapišemo enačbe po stolpcih. Za k -ti stolpec veljajo enačbe

$$\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_{jk} + y_{ik} = b_{ik}, \quad i = 1, \dots, n \quad (24)$$

Tu smo upoštevali, da je L spodnja trikotna matrika ($l_{ik} = 0, i < k$) z enojkami na diagonalni ($l_{ii} = 1$). Iz enačb (24) lahko po vrsti izračunamo elemente k -tega stolpca matrike Y . Algoritem za rešitve spodnjih trikotnih sistemov (20) je torej:

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ik} = b_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

Ko računamo i -to komponento k -tega stolpca matrike Y , prvih $i - 1$ komponent že poznamo.

Na podoben način rešimo zgornje trikotne sisteme (21). Če zapišemo enačbe za k -ti stolpec, dobimo

$$u_{ii} d_{ik} + \sum_{j=i+1}^n u_{ij} d_{jk} = y_{ik}$$

Od tod lahko izračunamo d_{ik} , če smo števila d_{jk} , $j > i$ že izračunali. Ker pa potrebujemo le diagonalne elemente matrike D , je algoritem tale:

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$d_{ik} = \left(y_{ik} - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} d_{jk} \right) / u_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, k \quad (26)$$

S temi formulami imamo vse pripravljeno za izračun determinante ([4])

$$f(x_0) = u_{11} u_{22} \dots u_{nn} \quad (27)$$

in odvoda po formuli (18)

$$f'(x_0) = f(x_0) (d_{11} + d_{22} + \dots + d_{nn}) \quad (28)$$

Izračunajmo sedaj, koliko aritmetičnih operacij je potrebnih za izračun odvoda determinante po formuli (18).

Razcep (19) in izračun determinante (27) terjata ([4])

$$(4n^3 - 3n^2 + 5n - 6)/6$$

aritmetičnih operacij. Reševanje spodnjih trikotnih sistemov po formuli (25) zahteva

$$n \left(\sum_{i=1}^n 2(i-1) \right) = n^3 - n^2$$

aritmetičnih operacij. Reševanje zgornjih trikotnih sistemov po formuli (26) pa zahteva

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n (1 + 2(n-i)) \right) = (2n^3 + 3n^2 + n)/6$$

aritmetičnih operacij. Skupaj z n operacijami za odvod po formuli (28) imamo torej

$$2n^3 - n^2 + 2n - 1 \quad (29)$$

aritmetičnih operacij, kar je znaten prihranek v primeri s številom (11), posebno pri večjih matrikah.

Izračunajmo odvod determinante matrike (12) pri $x = 2$ po pravkar opisanem algoritmu. Podatke obsegata matriki A in B (13).

Formule (22) in (23) nam dajo po vrsti

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1, & u_{12} &= 1, & u_{13} &= -1 \\ l_{21} &= -1/1 = -1, & l_{31} &= -1/1 = -1 \\ u_{22} &= 1 - (-1) \times 1 = 2, & u_{23} &= 2 - (-1) \times (-1) = 1 \\ l_{32} &= (1 - (-1) \times 1)/2 = 1 \\ u_{33} &= 5 - (-1) \times (-1) - 1 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

Izračunali smo torej

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Po formuli (27) imamo determinanto

$$f(2) = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Formule (25) nam dajo:

$$y_{11} = 1, \quad y_{21} = -2 - (-1) \times 1 = -1, \quad y_{31} = -1 - (-1) \times 1 - 1 \times (-1) = 1$$

$$y_{12} = 2, \quad y_{22} = 1 - (-1) \times 2 = 3, \quad y_{32} = 0 - (-1) \times 2 - 1 \times 3 = -1$$

$$y_{13} = -1, \quad y_{23} = 1 - (-1) \times (-1) = 0, \quad y_{33} = 2 - (-1) \times (-1) - 1 \times 0 = 1$$

Izračunali smo torej matriko

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Preostanejo še formule (26):

$$d_{31} = 1/3, \quad d_{21} = (-1 - 1 \times (1/3))/2 = -2/3$$

$$d_{11} = (1 - 1 \times (-2/3) - (-1) \times (1/3))/1 = 2$$

$$d_{32} = -1/3, \quad d_{22} = (3 - 1 \times (-1/3))/2 = 5/3$$

$$d_{33} = 1/3$$

Izračunali smo spodnji trikotnik matrike D :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ -2/3 & 5/3 & * \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

kjer * označuje elemente, ki jih ne potrebujemo. Odvod determinante dobimo po formuli (28)

$$f'(2) = 6(2 + 5/3 + 1/3) = 24$$

Opisani algoritem ni univerzalen, ker lahko pride v formuli (23) do deljenja z nič tudi v primeru, ko matrika A ni singularna. Da se izognemo deljenju z nič in tudi zato, da omejimo zaokrožitvene napake, pri razcepljanju matrike A pivotiramo ([3], [6]), to je po potrebi zamenjujemo med seboj vrstice tako, da v formuli (23) vedno delimo z največjim številom po absolutni vrednosti od tistih, ki pridejo v poštev. Pivotiranje pri računanju determinante je podrobno razloženo v članku [4]. Zamenjava dveh vrstic v matriki ima za posledico spremembo znaka v determinanti. Tu, ko računamo tudi odvod determinante, je seveda nujno, da pri vsaki zamenjavi vrstic v matriki A zamenjamo hkrati tudi ustrezni vrstici v matriki B . Pri tem tudi odvod determinante spremeni znak. Število aritmetičnih operacij se s tem ne bistveno poveča za $(n^2 - n)/2$.

Metoda računanja odvoda determinante na osnovi formule (14) ima to pomanjkljivost, da odpove, ko je pri danem x matrika $A(x)$ singularna. Zanimivo je, da to nič ne moti, kadar rešujemo enoparametrični posplošeni problem lastnih vrednosti (2) z Newtonovo iteracijo (4). Logaritmični odvod determinante je ravno recipročna vrednost Newtonovega popravka. Če je pri kakem $x = x_r$ matrika $A(x_r)$ singularna, je logaritmični odvod neskončno velik, Newtonov popravek je nič in iteracija se pravilno konča, saj je takrat x_r kar iskana lastna vrednost.

Pri reševanju dvoparametričnega problema (6) z Newtonovo iteracijo je situacija drugačna. Če je pri kaki vrednosti parametrov x in y samo ena od matrik $A(x, y)$ ali $B(x, y)$ singularna, še ni res, da smo našli lastni par. Nadaljevanje iteracije pa ni več mogoče.

V splošnem moramo torej računati odvod determinante tudi, ko je matrika singularna. Poiskati moramo torej univerzalen in ekonomičen algoritem.

4. Algoritem na osnovi trikotnega razcepa

Vzemimo, da obstaja trikotni razcep

$$A(x) = L(x) \cdot U(x) \quad (31)$$

kjer je $L(x)$ spodnja trikotna matrika z enojkami na diagonalni

$$l_{ik}(x) = 0, \quad i < k; \quad l_{ii}(x) = 1$$

in $U(x)$ zgornja trikotna matrika

$$u_{ik}(x) = 0, \quad i > k$$

za vsak x v neki okolici danega x_0 in da so $l_{ik}(x)$ in $u_{ik}(x)$ odvedljive funkcije v točki $x = x_0$. Potem je očitno

$$f(x) = \det A(x) = \det L(x) \cdot U(x) = \det U(x) = u_{11}(x) u_{22}(x) \dots u_{nn}(x)$$

in po pravilu za odvajanje produkta je

$$\begin{aligned} f'(x_0) = & u'_{11}(x_0) u_{22}(x_0) \dots u_{nn}(x_0) + u_{11}(x_0) u'_{22}(x_0) \dots u_{nn}(x_0) + \\ & + \dots + u_{11}(x_0) u_{22}(x_0) \dots u'_{nn}(x_0) \end{aligned} \quad (32)$$

Če znamo pri danem x_0 izračunati matriki $U(x_0)$ in odvod te matrike $U'(x_0)$, potem lahko sestavimo odvod determinante iz njunih diagonalnih elementov. Nestroga izpeljava postopka je tale. Odvajajmo enačbo (31) na x

$$A'(x) = L'(x) \cdot U(x) + L(x) \cdot U'(x) \quad (33)$$

Z oznakami

$$A'(x) = B(x), \quad L'(x) = M(x), \quad U'(x) = V(x)$$

enačbo (33) prepišemo v obliko

$$B(x) = M(x) \cdot U(x) + L(x) \cdot V(x) \quad (34)$$

Matrika $M(x)$ je spodnja trikotna matrika z ničlami na diagonalni

$$m_{ik}(x) = 0, \quad i \leq k \quad (35)$$

$V(x)$ pa je zgornja trikotna matrika

$$v_{ik}(x) = 0, \quad i > k \quad (36)$$

Če bi znali iz enačbe (34) izračunati diagonalne elemente matrike $V(x_0)$, bi nalogo s tem rešili.

Predpostavimo torej, da pri danem x_0 poznamo matriki $A = A(x_0)$ in $B = B(x_0)$. Razcep

$$A = L \cdot U \quad (37)$$

kjer je $L = L(x_0)$ in $U = U(x_0)$, naredimo z algoritmom (22), (23). Iz enačbe

$$B = M \cdot U + L \cdot V \quad (38)$$

v kateri poznamo matrike B , U in L , moramo izračunati matriki $M = M(x_0)$ in $V = V(x_0)$. To se da, če upoštevamo lastnosti (35) in (36) za $x = x_0$.

Zapišimo enačbo (38) po elementih:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} + \sum_{j=1}^n l_{ij} v_{jk}$$

Ker so matrike na desni strani v (38) vse trikotne, moramo ločiti dva primera. Naj bo najprej $i \leq k$, torej naj leži element b_{ik} v zgornjem trikotniku ali na diagonali. Potem velja

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} u_{jk} + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} v_{jk} + v_{ik} \quad (39)$$

Tu smo upoštevali (35) in (36). Če pa je $i > k$, če leži torej b_{ik} v spodnjem trikotniku, je

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} m_{ij} u_{jk} + m_{ik} u_{kk} + \sum_{j=1}^k l_{ij} v_{jk} \quad (40)$$

Iz enačb (39) in (40) moremo pri pogoju

$$u_{kk} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

izračunati po vrsti vse elemente matrik M in V . Računamo izmenoma vrstice matrike V in stolpce matrike M . Osnovni algoritem je tale:

$$r = 1, 2, \dots, n$$

$$v_{rk} = b_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (m_{rj} u_{jk} + l_{rj} v_{jk}), \quad k = r, \dots, n \quad (41)$$

$$m_{ir} = \left(b_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (m_{ij} u_{jr} + l_{ij} v_{jr}) - l_{ir} v_{rr} \right) / u_{rr}, \quad i = r + 1, \dots, n \quad (42)$$

Ko računamo elemente r -te vrstice matrike V in r -tega stolpca matrike M , že poznamo elemente v prvih $r-1$ vrsticah matrike V in prvih $r-1$ stolpcih matrike M , torej v formulah (42) na desni strani nastopajo samo znani elementi.

Odvod determinante matrike $A(x)$ pri $x = x_0$ je potemtako po formuli (32) enak

$$f'(x_0) = v_{11} u_{22} \dots u_{nn} + u_{11} v_{22} \dots u_{nn} + \dots + u_{11} u_{22} \dots v_{nn} \quad (43)$$

Število aritmetičnih operacij, ki ga zahteva ta algoritem, je

$$\sum_{r=1}^n (4(r-1)(n-r+1) + (4(r-1) + 3)(n-r)) = (8n^3 - 3n^2 - 5n)/6$$

To število skupaj s številom operacij za razcep (37), za izračun determinante in odvoda po formuli (43) nam da število

$$2n^3 - n^2 + 6n - 4 \quad (44)$$

kar je skoraj enako številu (29) za izračun logaritmičnega odvoda determinante.

Kot zgled za nov algoritem izračunajmo odvod determinante matrike (12) pri $x = 2$. Podani imamo matriki A in B (13). Razcep matrike A je dan z matrikama L in U (30). Po formulah (42) nato računamo po vrsti:

$$\begin{aligned} v_{11} &= 1, \quad v_{12} = 2, \quad v_{13} = -1 \\ m_{21} &= (-2 - (-1) \times 1)/1 = -1, \quad m_{31} = (-1 - (-1) \times 1)/1 = 0 \\ v_{22} &= 1 - (-1) \times 1 - (-1) \times 2 = 4, \\ v_{23} &= 1 - (-1) \times (-1) - (-1) \times (-1) = -1 \\ m_{32} &= (0 - 0 \times (-1) - (-1) \times 2 - 1 \times 4)/2 = -1 \\ v_{33} &= 2 - 0 \times (-1) - (-1) \times (-1) - (-1) \times 1 - 1 \times (-1) = 3 \end{aligned}$$

Odvod determinante dobimo s formulo (43)

$$f'(2) = 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 4 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 = 24$$

S preskusom se lahko prepričamo, da sta enačbi (37) in (38) res izpolnjeni.

5. Algoritem s pivotiranjem

Algoritem (42) odpove, če je kak u_{rr} enak nič. Če je $\det A \neq 0$, se pri razcepu (37) lahko temu izognemo s pivotiranjem, to je zamenjavo vrstic. Pri tem lahko vrstice tako zamenjujemo, da so vsi $|l_{ik}| \leq 1$, kar jamči, da so zaokrožitvene napake omejene ([4]). Če pri vsaki zamenjavi vrstic v matriki A hkrati zamenjamo tudi ustrezni vrstici v matriki B in upoštevamo, da se pri tem zamenja znak tako v determinanti kot v odvodu determinante, lahko algoritem pripeljemo do konca brez izjeme. Drugače pa je, če je $\det A = 0$. Tedaj se nam kljub pivotiranju mora zgoditi, da je vsaj eden izmed u_{rr} enak nič. Če želimo izračunati odvod determinante tudi v tem primeru, moramo ravnati drugače.

Razcepa (37) in (38) delamo hkrati. Da bi lažje razložili ustrezne zamenjave vrstic, ravnajmo kot pri računanju determinante ([4]). Vpeljimo matriki C in D , ki sta na začetku enaki

$$C = A, \quad D = B$$

na koncu pa

$$C = L - I + U, \quad D = M + V$$

To pomeni, da je spodnji trikotnik matrike C po računu enak spodnjemu trikotniku matrike L , zgornji trikotnik pa zgornjemu trikotniku matrike U . Spodnji trikotnik matrike D je po računu enak spodnjemu trikotniku matrike M , zgornji trikotnik pa zgornjemu trikotniku matrike V . Na koncu naj torej velja

$$\begin{aligned} c_{ik} &= l_{ik}, \quad d_{ik} = m_{ik}, \quad i > k \\ c_{ik} &= u_{ik}, \quad d_{ik} = v_{ik}, \quad i \leq k \end{aligned} \tag{45}$$

Proces ima n korakov. Predpostavimo, da imamo na r -tem koraku že izračunanih prvih $r - 1$ stolpcev in vrstic matrik L , U , M in V , torej matrik C in D . Preostala kvadrata v spodnjem desnem kotu reda $n - r + 1$ vsebujeta še prvotne elemente matrik A in B .

Najprej izračunamo števila

$$c_{ir} = c_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} c_{jr}, \quad i = r, \dots, n \quad (46)$$

in med njimi poiščemo po absolutni vrednosti največjega. Naj bo torej

$$|c_{sr}| = \max_{r \leq i \leq n} |c_{ir}| \quad (47)$$

Če je $c_{sr} \neq 0$, zamenjamo r -to in s -to vrstico v obeh matrikah C in D in si zapomnimo, da se v determinanti in odvodu spremeni znak. Račun nadaljujemo s formulami

$$c_{ir} = c_{ir}/c_{rr}, \quad i = r + 1, \dots, n \quad (48)$$

$$c_{rk} = c_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{rj} c_{jk}, \quad k = r + 1, \dots, n \quad (49)$$

$$d_{rk} = d_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (d_{rj} c_{jk} + c_{rj} d_{jk}), \quad k = r, \dots, n \quad (50)$$

$$d_{ir} = \left(d_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (d_{ij} c_{jr} + c_{ij} d_{jr}) - c_{ir} d_{rr} \right) / c_{rr}, \quad i = r + 1, \dots, n \quad (51)$$

Formule (48)–(51) se prepisane formule (22), (23) in (41), (42) z upoštevanjem dogovorov (45). Vse enačbe so prireditvene. To pomeni, da najprej izračunamo desno stran in jo kot vrednost priredimo levi strani. Taka je navada pri opisovanju algoritmov, kar olajša programiranje.

S tem da delimo v (48) z največjim elementom, dosežemo, da so vsi elementi matrike L absolutno omejeni z 1, kar zagotavlja numerično stabilnost.

Če pa je $c_{sr} = 0$, to pomeni, da so vsi $c_{ir} = 0$, $i = r, \dots, n$. To hkrati pomeni, da je $\det A = 0$ in da razcep $A = L \cdot U$ ni enoličen. Svobodo pri določitvi r -tega stolpca matrike L , to je r -tega stolpca pod diagonalo v matriki C , uporabimo za to, da lahko proces stabilno nadaljujemo.

V tem primeru iz enačbe (40) ne moremo izračunati m_{ik} , ker je $u_{kk} = 0$. Zato pa lahko izračunamo l_{ik} , če je $v_{kk} \neq 0$. Ker moramo v tem primeru deliti z v_{kk} , je spet najbolje, da delimo z absolutno največjim številom. Zato najprej izračunamo števila

$$d_{ir} = d_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (d_{ij} c_{jr} + c_{ij} d_{jr}), \quad i = r, \dots, n \quad (52)$$

Med njimi poiščemo največjega po absolutni vrednosti. Naj bo torej

$$|d_{sr}| = \max_{r \leq i \leq n} |d_{ir}| \quad (53)$$

Če je $d_{sr} \neq 0$, zamenjamo r -to in s -to vrstico v obeh matrikah C in D in si zapomnimo spremembo znaka v determinanti in odvodu. Nato računamo dalje po formulah

$$c_{ir} = d_{ir}/d_{rr}, \quad d_{ir} = 0, \quad i = r + 1, \dots, n \quad (54)$$

$$c_{rk} = c_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} c_{rj} c_{jk}, \quad k = r + 1, \dots, n \quad (55)$$

$$d_{rk} = d_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (d_{rj} c_{jk} + c_{rj} d_{jk}), \quad k = r + 1, \dots, n \quad (56)$$

Tu so spet elementi v r -tem stolpcu matrike L (matrike C pod diagonalo) absolutno omejeni z 1, kar spet zagotavlja numerično stabilnost. Zdaj je r -ti stolpec matrike M (matrike D pod diagonalo) nedoločen, zato ga vzamemo kar enakega 0.

Če pa je tudi $d_{sr} = 0$, potem sta determinanta in njen odvod enaka 0, saj so v formuli (43) vsi sumandi enaki nič. Tedaj račun lahko kar prekinemo.

Tako opisan algoritem je popolnoma univerzalen in zahteva le malo več aritmetičnih operacij pri iskanju maksimalnega elementa.

Skupno število operacij pri osnovnem algoritmu je število (44). Zaradi pivotiranja je to število največ za $n^2/2$ večje.

Da se dokazati, da opisani algoritem s pivotiranjem določa tako permutacijsko matriko P , da veljata enačbi

$$PA = L \cdot U \quad (57)$$

$$PB = M \cdot U + L \cdot V \quad (58)$$

in to tako, da so vsi elementi spodnje trikotne matrike L absolutno omejeni z 1. Pri tem je P matrika, ki jo dobimo iz enotne matrike I , če na njej naredimo iste zamenjave vrstic, kot jih določa algoritem. Malo daljši razmislek pokaže, da obstaja razcep matrike

$$PA(x) = L(x) \cdot U(x)$$

v neki okolici $x = x_0$ in da so funkcije $l_{ik}(x)$ in $u_{ik}(x)$ v tej točki odvedljive. To pomeni, da nam rešitev enačb (57) in (58) res omogoča izračun odvoda determinante pri $x = x_0$ po formuli (43), le da moramo rezultat pomnožiti še z $\det P = (-1)^z$, kjer je z število zamenjav vrstic v opisanem algoritmu.

Oglejmo si sedaj nekaj zgledov, ki naj ilustrirajo algoritem s pivotiranjem.

Zgled 1. Izračunajmo determinanto matrike (12) in njen odvod pri $x = 1$. Začetni matriki C in D sta

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ker je $|c_{21}|$ največji izmed elementov prvega stolpca matrike C , moramo najprej zamenjati prvo in drugo vrstico v obeh matrikah C in D ($s = 2$). Tako je po zamenjavi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad z = 1$$

Na prvem koraku imamo torej po formulah (48)–(51) za $r = 1$

$$c_{21} = 0/1 = 0, \quad c_{31} = 0/1 = 0$$

$$c_{12} = 0, \quad c_{13} = 1$$

$$d_{21} = (1 - 0 \times (-2))/1 = 1, \quad d_{31} = (-1 - 0 \times (-2))/1 = -1$$

Po prvem koraku sta matriki C in D enaki

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Na drugem koraku ($r = 2$) izračunamo najprej po formuli (46)

$$c_{22} = -1 - 0 \times 0 = -1, \quad c_{32} = 1 - 0 \times 0 = 1$$

Ker je $|c_{22}| = |c_{32}|$ zamenjava vrstic ni potrebna. Formule (47)–(51) nam dajo

$$\begin{aligned} c_{32} &= 1/(-1) = -1, \quad c_{23} = 0 - 0 \times 1 = 0 \\ d_{22} &= 2 - 1 \times 0 - 0 \times 1 = 2, \quad d_{23} = -1 - 1 \times 1 - 0 \times 1 = -2 \\ d_{32} &= (0 - (-1) \times 0 - 0 \times 1 - (-1) \times 2)/(-1) = -2 \end{aligned}$$

Po drugem koraku sta matriki C in D enaki

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Na zadnjem koraku ($r = 3$) izračunamo samo po formuli (46)

$$c_{33} = 3 - 0 \times 1 - (-1) \times 0 = 3$$

in po formuli (50)

$$d_{33} = 2 - (-1) \times 1 - 0 \times 1 - (-2) \times 0 - (-1) \times (-2) = 1$$

Končni matriki C in D sta torej

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinanta in odvod sta

$$f(1) = (-1)^1 \times 1 \times (-1) \times 3 = 3$$

in

$$f'(1) = (-1)^1 ((-2) \times (-1) \times 3 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times (-1) \times 1) = -11$$

Iz končnih matrik C in D lahko razberemo, da je

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Preizkus nas prepriča, da sta enačbi (57) in (58), kjer je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

res izpolnjeni.

Preizkusimo metodo še na dveh zgledih v primeru, ko je determinanta enaka nič.

Zgled 2. Izračunajmo determinanto in odvod determinante matrike

$$A(x) = \begin{bmatrix} x - x^2 & 1 & 2 \\ x^2 - x^3 & 3x - x^2 & 1 + 2x \\ x^3 - x^4 & 3x^2 - x^3 & 3x + x^2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

pri $x = 1$. V tem primeru je

$$f(x) = -x^6 + 5x^5 - 8x^4 + 4x^3, \quad f(1) = 0$$

in

$$f'(x) = -6x^5 + 25x^4 - 32x^3 + 12x^2, \quad f'(1) = -1$$

Začetni matriki C in D sta

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Ker so na prvem koraku vsi c_{i1} , $i = 1, 2, 3$ enaki nič, pogledamo števila $|d_{i1}|$, $i = 1, 2, 3$ (formula (52) za $r = 1$). Lahko vzamemo $s = 1$ (formula (53)) in zato zamenjava ni potrebna. Formule (54)—(56) nam dajo

$$c_{21} = (-1)/(-1) = 1, \quad c_{31} = (-1)/(-1) = 1$$

$$d_{21} = 0, \quad d_{31} = 0$$

$$c_{12} = 1, \quad c_{13} = 2$$

$$d_{12} = 0, \quad d_{13} = 0$$

Po prvem koraku imamo novi matriki C in D

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Na drugem koraku ($r = 2$) izračunamo najprej po formuli (46) števila

$$c_{22} = 2 - 1 \times 1 = 1, \quad c_{32} = 2 - 1 \times 1 = 1$$

Lahko vzamemo $s = 2$ in zamenjava ni potrebna. Formule (48)—(51) dajo

$$c_{32} = 1/1 = 1$$

$$c_{23} = 3 - 1 \times 2 = 1$$

$$d_{22} = 1 - 0 \times 1 - 1 \times 0 = 1, \quad d_{23} = 2 - 0 \times 2 - 1 \times 0 = 2$$

$$d_{32} = (3 - 0 \times 1 - 1 \times 0 - 1 \times 1)/1 = 2$$

Po drugem koraku sta matriki C in D enaki

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Sedaj uporabimo le še formuli (46) in (50) za $r = 3$:

$$c_{33} = 4 - 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1$$

$$d_{33} = 5 - 0 \times 2 - 1 \times 0 - 2 \times 1 - 1 \times 2 = 1$$

Končni matriki C in D sta

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Torej je

$$f(1) = 0 \times 1 \times 1 = 0$$

in

$$f'(1) = -1 \times 1 \times 1 + 0 \times 1 \times 1 + 0 \times 1 \times 1 = -1$$

Iz končnih matrik C in D razberemo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in spet se lahko prepričamo v veljavnost enačb (57) in (58) za $P = I$.

Zgled 3. Za zadnji zgled si oglejmo matriko (59) pri $x = 2$.

Začetni matriki C in D sta

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \\ -8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 2 \\ -20 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Na prvem koraku ($r = 1$) moramo najprej zamenjati prvo in tretjo vrstico v obeh matrikah, saj je $|c_{31}| > |c_{11}|, |c_{21}|$. Zato je po zamenjavi

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 10 \\ -4 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 7 \\ -8 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = 1$$

Formule (48)–(51) nam dajo:

$$c_{21} = (-4)/(-8) = 1/2, \quad c_{31} = (-2)/(-8) = 1/4$$

$$c_{12} = 4, \quad c_{13} = 10$$

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -20, \quad d_{12} = 0, \quad d_{13} = 7 \\
d_{21} &= (-8 - (1/2) \times (-20)) / (-8) = -1/4 \\
d_{31} &= (-3 - (1/4) \times (-20)) / (-8) = -1/4
\end{aligned}$$

Matriki C in D sta torej po prvem koraku enaki

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 10 \\ 1/2 & 2 & 5 \\ 1/4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 7 \\ -1/4 & -1 & 2 \\ -1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedaj uporabimo formulo (46) za $r = 2$:

$$c_{22} = 2 - (1/2) \times 4 = 0, \quad c_{32} = 1 - (1/4) \times 4 = 0$$

Ker sta oba elementa enaka nič, nadaljujemo s formulo (52):

$$\begin{aligned}
d_{22} &= -1 - (-1/4) \times 4 - (1/2) \times 0 = 0 \\
d_{32} &= 0 - (-1/4) \times 4 - (1/4) \times 0 = 1
\end{aligned}$$

Ker je $|d_{32}| > |d_{22}|$, zamenjamo drugo in tretjo vrstico v obeh matrikah. Tako imamo

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 10 \\ 1/4 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 7 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad z = 2$$

Sedaj nadaljujemo s formulami (54)–(56) za $r = 2$:

$$\begin{aligned}
c_{32} &= 0/1 = 0, \quad d_{32} = 0 \\
c_{23} &= 2 - (1/4) \times 10 = -1/2, \quad d_{23} = 0 - (-1/4) \times 10 - (1/4) \times 7 = 3/4
\end{aligned}$$

Tako imamo po drugem koraku

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 10 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 7 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \\ -1/4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

V zadnjem koraku ($r = 3$) imamo samo še formuli (46) in (50):

$$\begin{aligned}
c_{33} &= 5 - (1/2) \times 10 - 0 \times (-1/2) = 0 \\
d_{33} &= 2 - (-1/4) \times 10 - (1/2) \times 7 - 0 \times (-1/2) - 0 \times (3/4) = 1
\end{aligned}$$

Končni matriki C in D sta

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 10 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 7 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Od tod izračunamo

$$f(2) = (-1)^2 \times (-8) \times 0 \times 0 = 0$$

in

$$f'(2) = (-1)^2 ((-20) \times 0 \times 0 + (-8) \times 1 \times 0 + (-8) \times 0 \times 1) = 0$$

Ker je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tudi sedaj lahko preizkusimo, da sta enačbi (57) in (58) izpolnjeni, če vzamemo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LITERATURA

- [1] E. Bodewig, *Matrix calculus*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1959.
- [2] Z. Bohte, *O eksistenci rešitev nekaterih dvoparametričnih problemov lastnih vrednosti v Hilbertovem prostoru*, Obzornik mat. fiz. **14** (1967), 97—103.
- [3] Z. Bohte, *Numerične metode*, Ljubljana, DZS 1978.
- [4] Z. Bohte, *O računanju determinante*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979), 161—177.
- [5] I. Vidav, *Višja matematika I*, Ljubljana, DZS 1973.
- [6] J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford, Clarendon Press 1965.

NOVE KNJIGE

Kuščer Ivan, Pregled klasične fizike, Ljubljana: DMFA SRS, 1979. 120 str. 125.— (100.—) din.

Nova skripta prof. Ivana Kuščerja so nastala iz koncepta predavanj za podiplomske študente pedagoške smeri fizike v letu 1973/74 in 76/77. Delo podaja kratek in zgoščen pregled klasične fizike. Skripta so razdeljena na šest poglavij: o definicijah fizikalnih količin, osnove klasične mehanike, mehanika kontinuumov, elektromagnetno polje, nihanje in valovanje, teorija relativnosti. V izbor nista vključeni termodinamika in statistična mehanika. Za to že obstajajo posebna skripta.

Brati dela prof. Kuščerja je vedno zelo poučno, ker je njegov način izredno temeljit. Vsebina novih skript močno presega okvir tega, kar najdemo v standardnih učbenikih. Le nekaj primerov. Avtor obravnava izrek Noetherjeve. Razmišlja o potrebnosti kontinuumske mehanike. Razpravlja o površinski napetosti, o pojavih mehanske histereze in relaksacije, nadalje o vlogi polja v bližini sevajočega dipola pri interni konverziji itd. V delu se seznanimo z osnovami statističnega opisa stacionarnih nihanj in s tem povezanim vprašanjem nepopolne koherence. Poučno je tudi razpravljanje o valovni teoriji optične upodobitve.

V delu je dosti nalog in napotkov za razmišljanja, metodiko pouka in študij. Mestoma so skripta pisana polemično in bičajo napake in spodrsaljaje pri pouku fizike ter v učbenikih.

Skripta so namenjena predvsem učiteljem fizike na srednjih šolah in študentom, ki se usposabljaajo za ta poklic.

Peter Gosar

UPORABA PLANCKOVEGA ZAKONA V ASTRONOMSKI FOTOMETRIJI

V članku [1] je bil podrobneje obdelan Planckov zakon in Wienov približek zanj. Pokažimo, kako ju uporabimo v astronomiji.

Naj zvezde mirujejo glede na Zemljo in naj sevajo kot črna telesa pri dani temperaturi. Spektralna gostota je tedaj dana s Planckovim zakonom:

$$dj^*/d\lambda = c_1/\lambda^5(e^{c_2/\lambda T} - 1) \quad (1)$$

λ je valovna dolžina svetlobe, T absolutna temperatura, $c_1 = 2\pi hc_0^2 = 3,74 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2$ in $c_2 = hc_0/k = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$ (sl. 1).

Za okroglo zvezdo, ki seva enobarvni svetlobni tok z gostoto $j^*(\lambda)$, je $j(\lambda) = \varphi^2 j^*(\lambda)$, če je $j(\lambda)$ gostota toka, ki ga prestrežemo na Zemlji, in $\varphi = R/r$ zorni kot, pod katerim vidimo radij R zvezde v razdalji r [2]. Velja $dj/d\lambda = \varphi^2 dj^*/d\lambda$. Gostota svetlobnega toka na Zemlji v pasu valovnih dolžin med λ_1 in $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ je tako $\varphi^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (dj^*/d\lambda) d\lambda$, polna gostota svetlobnega toka pa $j = \varphi^2 \int_0^\infty (dj^*/d\lambda) d\lambda = \varphi^2 j^*$. Pri tem smo z $j^* = \sigma T^4$ zapisali Stefanov zakon in je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ Stefanova konstanta. Pri danem zornem kotu φ je torej gostota svetlobnega toka j sorazmerna s T^4 .

Iz Planckovega zakona lahko izpeljemo enačbe za nekatere fotometrične količine v astronomiji, npr. za sij in barvni indeks zvezd. Uporabne približke da kar Wienov približek:

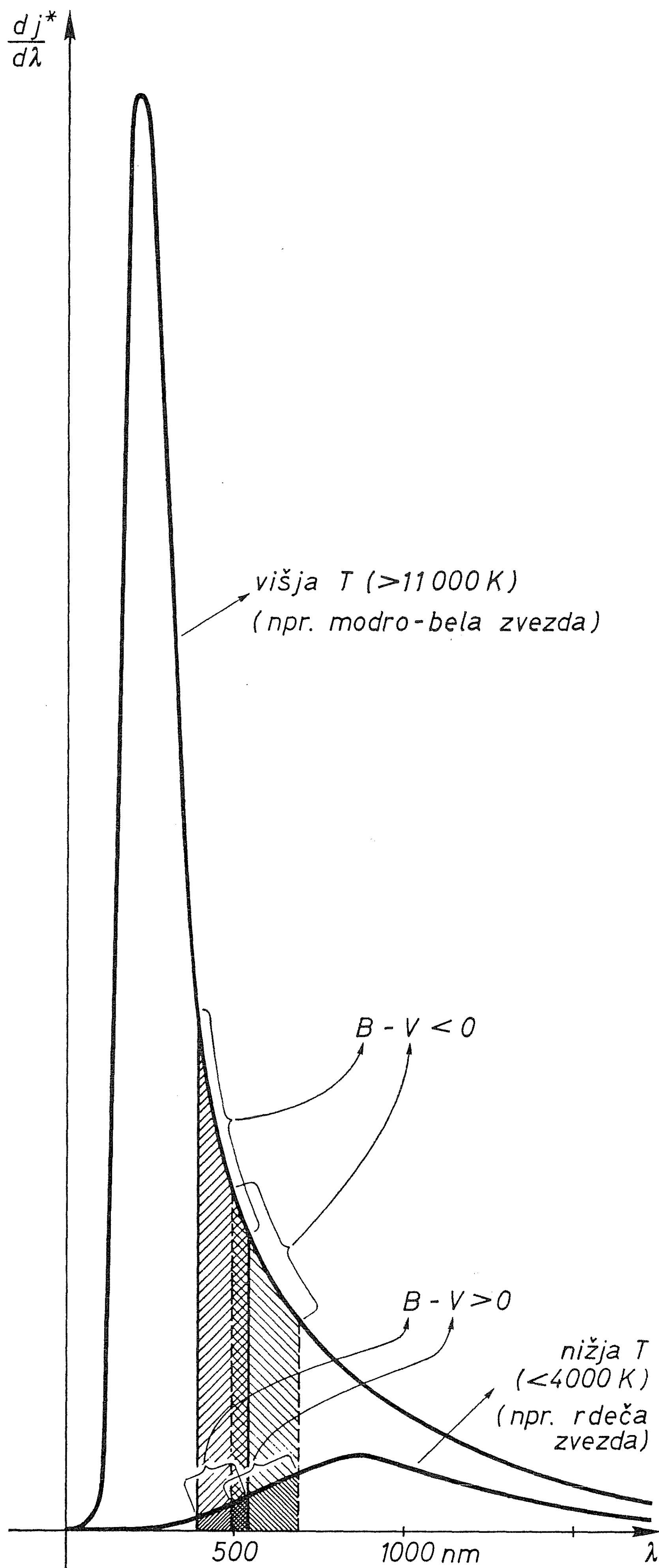
$$dj^*/d\lambda = c_1/\lambda^5 e^{c_2/\lambda T} \quad (2)$$

Sij zvezde m v pasu valovnih dolžin med λ_1 in $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ je v splošnem definiran* [3], [4] z zvezo:

$$m = -2,5 \log \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P(\lambda) (dj/d\lambda) d\lambda + C \quad (3)$$

C je konstanta, ki upošteva dogovorjeno ničlo za sij pri meritvah v določenem spektralnem pasu. $P(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)f(\lambda)k(\lambda)$, če je $p(\lambda)$ prepustnost zemeljskega ozračja, $q(\lambda)$ prepustnost instrumenta, npr. daljnogleda, $f(\lambda)$ prepustnost filtra, ki ga uporabimo pri meritvah in $k(\lambda)$ spektralna občutljivost detektorja, npr. očesa, fotografske plošče, filtra, fotopomnoževalke. Faktor $p(\lambda)$ je odvisen še od višine zvezde. Ker pa so fotometrične meritve reducirane na zenit, ta odvisnost odpade. Če se izognemo absorpciji v zemeljskem ozračju (pri merjenju iz umetnega zemeljskega satelita) in opazujemo z idealnim instrumen-

* Definicija sija pravzaprav sledi iz Weber-Fechnerjevega zakona, po katerem je občutek (subjektivna količina) linearna funkcija logaritma dražljaja (objektivne količine, ki jo merimo). Za vidni občutek, npr. za sij m , je odločilna gostota svetlobnega toka j , ki z zvezde pade na detektor, torej $m = \text{konst}_1 \cdot \log j + \text{konst}_2$. V preteklem stoletju so že lahko izmerili j za večje število zvezd, za katere so bili (vizualni) siji znani iz antike. Ko so raziskovali razlike sijev $m_i - m_k = \text{konst}_1 \cdot \log (j_i/j_k) - i$ in k se nanašata na poljuben par zvezd — so za konst_1 ugotovili poprečno vrednost $-2,5$ (N. Pogson, 1857) [4].



Sl. 1. Spektralna gostota za zvezdi, ki sevata kot črno telo po Planckovem zakonu. Zvezda z višjo temperaturo ima po Wienovem zakonu maksimum pri krajši valovni dolžini, zvezda z nižjo temperaturo pa pri daljši. Označena sta spektralna pasova, v katerih merimo modri sij B in vizulani sij V

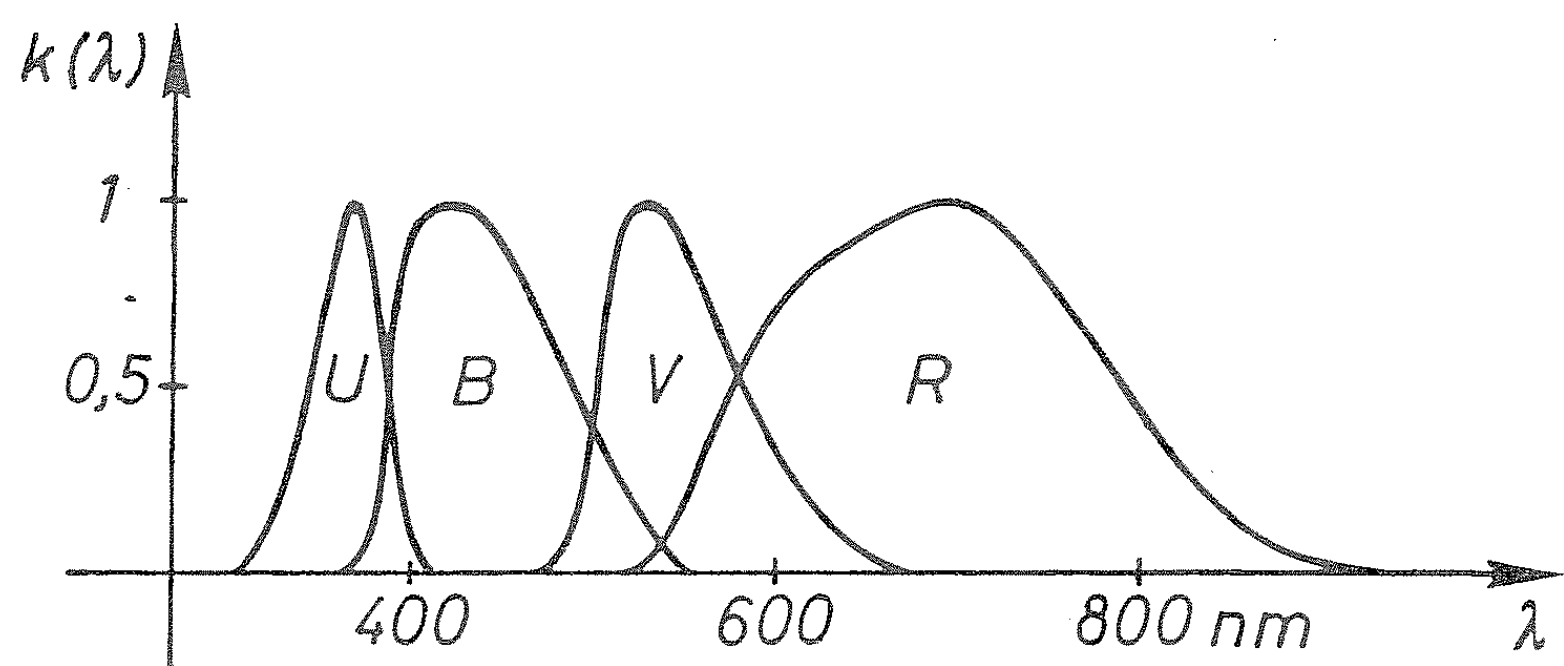
tom brez filtra, je $p = q = f = 1$. Ostane še odvisnost $k(\lambda)$ za detektor, ki je občutljiv v določenem spektralnem pasu. V (3) integriramo v mejah valovnih dolžin, med katerima je spektralna občutljivost detektorja različna od nič.

Če je detektor naše oko, integriramo približno v mejah od 400 nm do 650 nm. Tako dobimo vizualni sij m_v . Če je detektor normalna fotografska plošča, integriramo v mejah občutljivosti te plošče približno od 300 nm do 500 nm. Ta sij imenujemo fotografski sij m_f . Pri opazovanju s filtrom U, B ali V integriramo v mejah prepustnosti miltra (sl. 2). Tako dobimo ultravijolični sij U, modri sij B in vizualni sij V. (Glej preglednico.) Pri gornjih poenostavitvah sta npr. modri in vizualni sij

$$B = -2,5 \log \int_{360 \text{ nm}}^{560 \text{ nm}} k_B(\lambda) (dj/d\lambda) d\lambda - 20,43$$

$$V = -2,5 \log \int_{480 \text{ nm}}^{680 \text{ nm}} k_V(\lambda) (dj/d\lambda) d\lambda - 21,07 \quad (4)$$

Sl. 2. Spektralna občutljivost filtrov U, B, V in R [4]



Integracijske meje so dane orientacijsko. S $k_B(\lambda)$ in $k_V(\lambda)$ smo označili spektralno občutljivost filtrov B in V v fotometričnem sistemu UBV [3]. Konstanti $-20,43$ in $-21,07$ sta izbrani tako, da z zvezde s sijem $B = 0$ pri $\lambda = 440$ nm prestrežemo na vrhu zemeljskega ozračja svetlobni tok z gostoto $6,76 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$, z zvezde s sijem $V = 0$ pri $\lambda = 550$ nm pa $3,74 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$ [3].

Z bolometrom zajamemo vse vpadlo sevanje, tako da velja $k(\lambda) = 1$. Integrirajmo čez vse valovne dolžine, pa dobimo polni ali *bolometrični sij*

$$m_{bol} = -2,5 \log \int_0^{\infty} (dj/d\lambda) d\lambda - 19,01 = -10 \log (T/K) + C_{bol} \quad (5)$$

Konstanta $-19,01$ je izbrana tako, da z zvezde s sijem $m_{bol} = 0$ prestrežemo na vrhu zemeljskega ozračja polni svetlobni tok z gostoto $2,48 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$; $C_{bol} = -5 \log \varphi - 2,5 \log \sigma - 19,01$. Z zvezo (5) je definiran sij v [5].

Preglednica značilnih sije

Sij	Oznaka	Instrument	Maksimalna občutljivost pri
vizualni	m_v	oko	530 nm, 550 nm; navajajo različne vrednosti
fotografski	m_f	ortohromatska fotogr. plošča	425 nm
fotovizualni	m_{fv}	panhromatska fotogr. plošča	590 nm
ultravijolični	U	fotoelektrični fotometer	365 nm
modri	B		440 nm
vizualni	V		550 nm
rdeči	R		700 nm
infrardeči	I		900 nm
infrardeči	I'	fotogr. plošča	840 nm
bolometrični	m_{bol}	bolometer	$k(\lambda) = 1$

Sij v določenem pasu lahko približno izrazimo z enobarvnim sijem pri valovni dolžini, pri kateri je detektor najobčutljivejši. Enobarvni sij $m(\lambda)$, to je sij v enobarvni svetlobi z valovno dolžino λ , je

$$m(\lambda) = -2,5 \log (dj/d\lambda) + C(\lambda) \quad (6)$$

Tu je $dj/d\lambda$ pri valovni dolžini λ sprejeta spektralna gostota na vrhu zemeljskega ozračja. Za $dj/d\lambda$ uporabimo (2) pa dobimo $m(\lambda) = 12,5 \log \lambda + 0,01562/\lambda T - 5 \log \varphi - 2,5 \log c_1 + C(\lambda)$. Če namesto valovne dolžine λ vsta-

vimo valovni dolžini $\lambda_B = 440 \text{ nm}$ in $\lambda_V = 550 \text{ nm}$, dobimo za modri in vizualni sij

$$B = 35500 \text{ K}/T + C_B \quad \text{in} \quad V = 28400 \text{ K}/T + C_V \quad (7)$$

Pri tem je $C_B = 12,5 \log \lambda_B - 5 \log \varphi - 2,5 \log c_1 - 20,43$ in $C_V = 12,5 \log \lambda_V - 5 \log \varphi - 2,5 \log c_1 - 21,07$. Podobno izrazimo z enobarvnim sijem tudi sij v kakem drugem spektralnem pasu.

Razliki sijev pravimo *barvni indeks* ali *korekcija*. Naj bo sij zvezde m v spektralnem pasu med λ_1 in λ_2 podan s (3), sij iste zvezde m' v pasu med λ_1' in λ_2' pa z

$$m' = -2,5 \log \int_{\lambda_1'}^{\lambda_2'} P'(\lambda) (dj/d\lambda) d\lambda + C' \quad (8)$$

Iz (3) in (8) tedaj sledi splošni izraz za barvni indeks

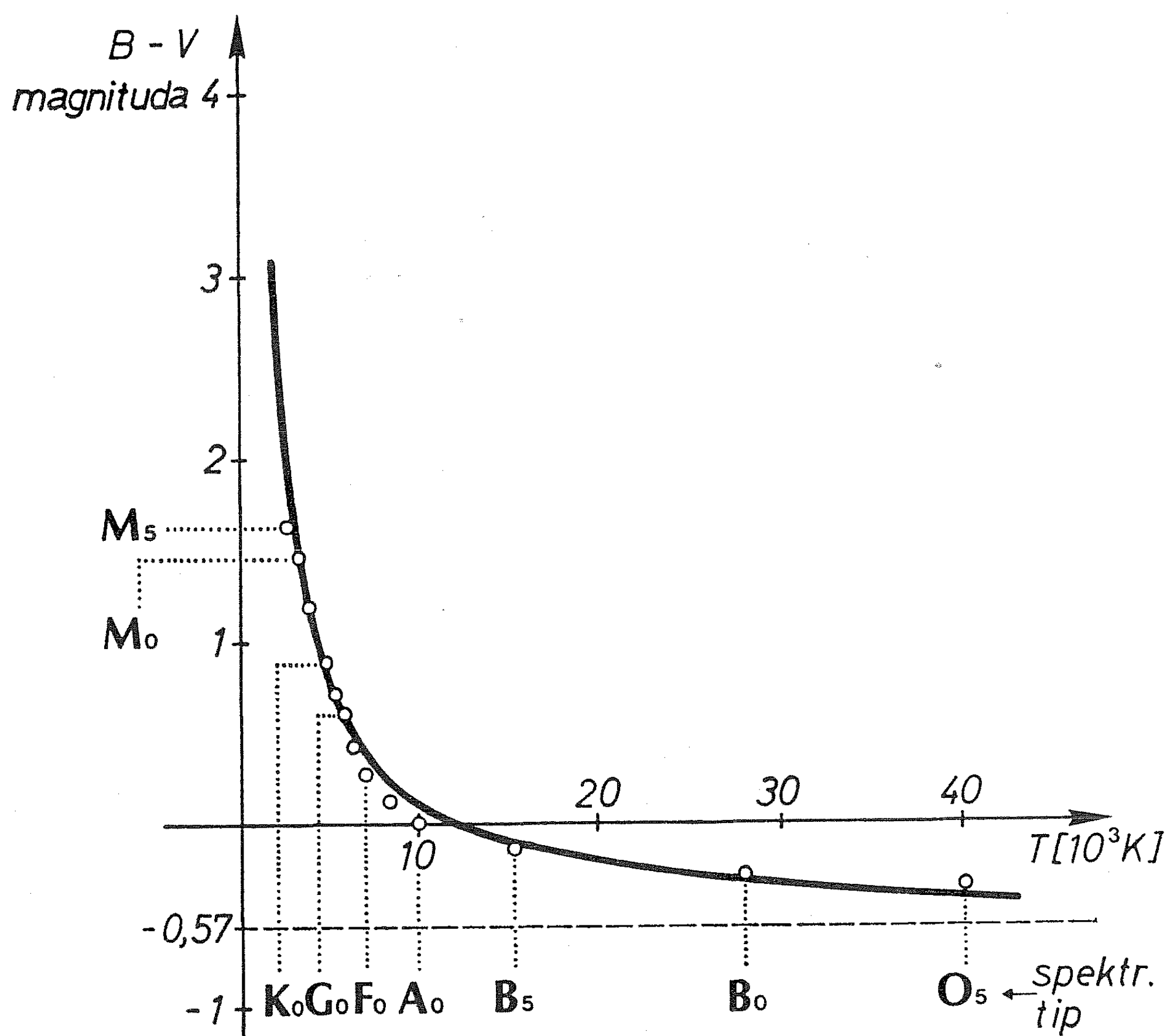
$$m - m' = -2,5 \log \left[\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P(\lambda) (dj/d\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1'}^{\lambda_2'} P'(\lambda) (dj/d\lambda) d\lambda} \right] + (C - C')$$

Dokler se omejimo le na sij U , B in V , imamo tri barvne indekse: $B-V$, $U-B$ in $U-V$ [4], [3]. Od teh si oglejmo le barvni indeks $B-V$. Iz (7) sledi

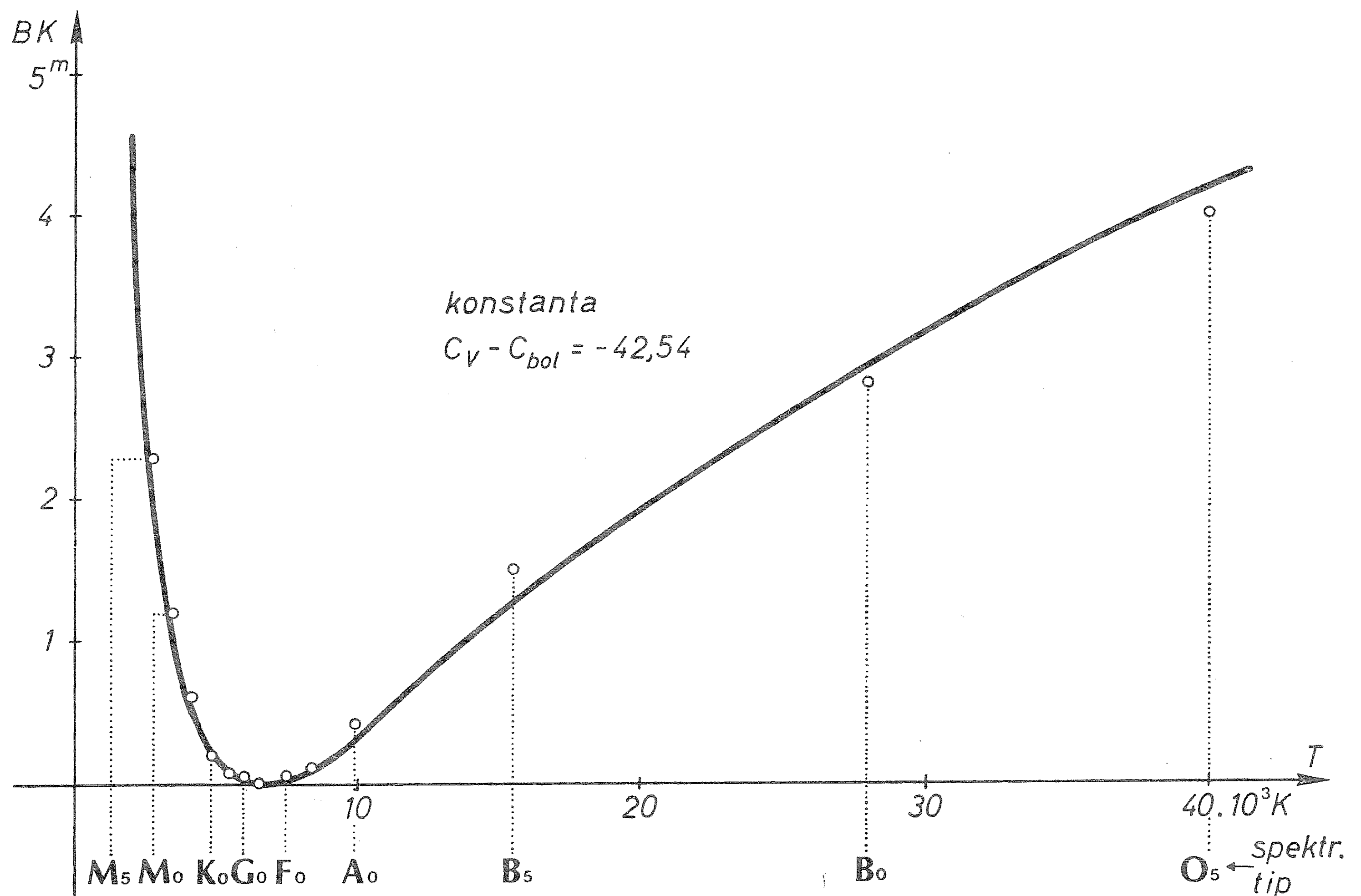
$$B-V = 7100 \text{ K}/T - 0,57 \quad (9)$$

Barvni indeks $B-V$ in drugi barvni indeksi so odvisni od temperature zvezde (sl. 3) [3], [4]. Nič je za zvezde s temperaturo $T = 7100 \text{ K}/0,57 \sim 12000 \text{ K}$, to je za zvezde spektralnega tipa okoli A0 (npr. Vega) [3]. Za take zvezde je torej $B \approx V$.

Vroče — modre-zvezde imajo potemtakem negativni barvni indeks $B-V$, hladne — rdeče — zvezde pa pozitivnega. Rdeče zvezde imajo glede na modre večji sij (manjšo magnitudo) v spektralnem pasu med 480 nm in 680 nm kot v pasu med 360 nm in 560 nm (sl. 1).



Sl. 3. Temperaturna odvisnost barvnega indeksa $B-V$. S krožci so označene izmerjene poprečne vrednosti $B-V$ za posamezne tipe zvezd glavne veje v H—R diagramu [3]



Sl. 4. Temperaturna odvisnost bolometrične korekcije BK . S krožci so označene izmerjene poprečne vrednosti BK za posamezne tipe zvezd glavne veje v H—R diagramu [3]

Razliko med vizualnim in bolometričnim sijem imenujemo *bolometrična korekcija* BK . Iz (5) in (7) sledi, da je

$$BK = V - m_{bol} = 28\,400\, K/T + 10 \log (T/K) - 59,86 \quad (10)$$

Tudi bolometrična korekcija je funkcija temperature (sl. 4). Vedno je pozitivna. Vizualni sij zvezde je namreč vedno manjši (magnituda večja) od bolometričnega (sl. 1), saj zajame prvi le del sevanja, drugi pa vse sevanje.

Enačba (10) da oceno za konstanto $C_V - C_{bol} = -59,86$. Natančna vrednost pa je $-42,54$. Po definiciji je namreč $BK = 0$ pri minimalni temperaturi T [3]. Kolikšna je ta temperatura? Z odvajanjem enačbe (10) dobimo $-28\,400\, K/T^2 + 10\, K/T \ln 10 = 0$ in od tod $T = 28\,400\, K/4,34 \approx 6500\, K$. Bolometrična korekcija je nič za zvezde s temperaturo med $6000\, K$ in $7000\, K$. To so zvezde spektralnega tipa okoli $F\,5$ (npr. Prokion). Približno tolikšna je tudi temperatura površja Sonca. Torej je $BK \approx 0$ za zvezde, ki imajo približno tolikšno temperaturo kot Sonce. Zanimivo je, da takšne zvezde najmočnejše sevajo na sredi vidnega dela spektra.

Marijan Prosén

LITERATURA

- [1] Strnad, J.: *Einstein in Planckov zakon*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979) 74.
- [2] Prosén, M.: *Nov način za določanje zornih kotov zvezd*, Obzornik mat. fiz. **27** (1979) 89.
- [3] Allen, K. U.: *Astrofizičeskie veličiny*, Moskva, Mir 1977, 155, 280.
- [4] Martynov, D. Ja.: *Kurs praktičeskoj astrofiziki*, Moskva, Nauka 1977, 350.
- Kulikovskij, P. G.: *Zvezdnaja astronomija*, Moskva, Nauka 1978, 31.
- Unsöld, A.: *The New Cosmos*, Springer Verlag 1969, 117.
- [5] Avsec, F./Prosén, M.: *Astronomija*, Ljubljana, DZS 1975, 21.

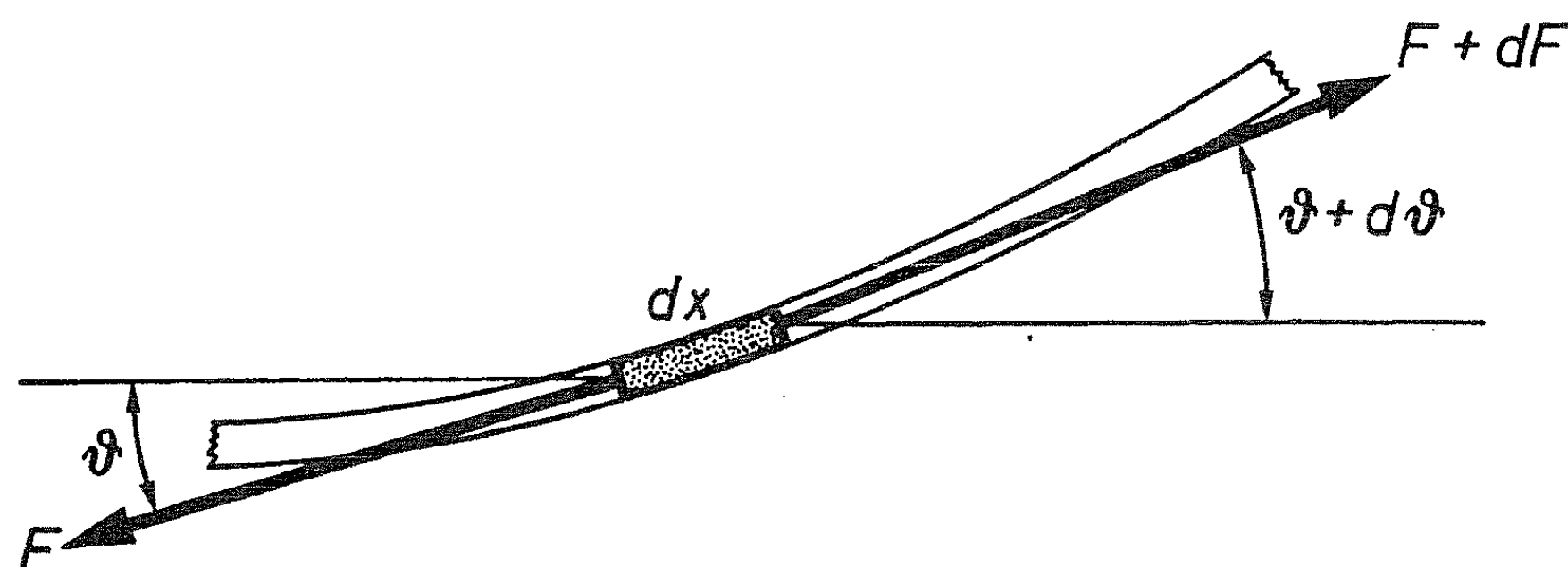
Vprašanje 4 (Obzornik mat. fiz. 15 (1968) 48)

Enakomerno debela struna se vrti okrog enega krajišča s stalno kotno hitrostjo, drugo krajišče pa je prosto. Kotna hitrost je tako velika, da teže ni treba upoštevati. Izračunaj spekter lastnih frekvenc strune, če jo zanihamo tako, da so odmiki vzporedni z vrtilno osjo.

Izpeljimo enačbo za nihanje strune, če se sila F , s katero je napeta, spreminja z razdaljo od pritrdišča. Izhodišče koordinatnega sistema naj bo v pritrdišču, os x pa v osi strune. Zapišimo Newtonov zakon za del strune z dolžino dx , presekom S in gostoto ρ (sl. 1):

$$(F + dF) \sin(\vartheta + d\vartheta) - F \sin \vartheta = S \rho dx \partial^2 u / \partial t^2$$

u je odmik strune in ϑ nagib majhnega dela strune proti osi x .



Leva stran je kar enaka $d(F \sin \vartheta)$. Ker so odmiki majhni, je $\sin \vartheta \cong \tan \vartheta \cong \partial u / \partial x$ in sledi enačba gibanja:

$$(\partial / \partial x) [F(x) \partial u / \partial x] = \rho S \partial^2 u / \partial t^2$$

Opazovalni sistem, v katerem opazujemo struno, ni inercialen; v njem moramo upoštevati centrifugalno silo.

Del strune z maso $dm = \rho S dx$ v razdalji x od osi napenja struno, ki se vrti s kotno hitrostjo Ω , s silo $dF(x) = \Omega^2 \rho S x dx$. Napetost v struni na mestu x je

$$F(x) = \rho S \Omega^2 \int_x^l x dx = \frac{1}{2} \rho S \Omega^2 (l^2 - x^2)$$

Enačba gibanja je potem

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \frac{1}{2} \Omega^2 (\partial / \partial x) [(l^2 - x^2) \partial u / \partial x]$$

Robni pogoj je $u(0) = 0$ in $u(l) < \infty$: odmik v pritrdišču mora biti enak nič in odmik na prostem krajišču končen.

Enačbo poskusimo rešiti z nastavkom $u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$. Po krajšanju s časovnim faktorjem preostane

$$(d/dx) [l^2 - x^2] dX/dx + \omega^2 X/a^2 = 0$$

če je $2a^2 = \Omega^2$. Vpeljemo še $x = l \xi$ in nastane Legendrova diferencialna enačba

$$(1 - \xi^2) d^2 X/d\xi^2 - 2\xi dX/d\xi + (\omega^2/a^2) X = 0$$

Rešitev, ki ustreza robnemu pogoju je

$$X(\xi) = P_{2n-1}(\xi) \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$P_m(\xi)$ je Legendrov polinom. Tedaj je tudi $\omega^2/a^2 = 2n(2n-1)$. Iz tega sledi za lastne frekvence strune

$$\omega_n = \Omega [n(2n-1)]^{1/2}$$

Zanimiva je podobna naloga, ki sprašuje po lastnih frekvencah homogene, navpično viseče strune, ko jo sučemo s kotno hitrostjo Ω okoli njene osi. Začetna enačba je ista kot prej, le napetost v struni na mestu x je sedaj posledica teže preostalega nižjega dela strune $F(x) = \rho g S (l-x)$. Centrifugalna sila $\rho S \Omega^2 u dx$ pa vleče del strune z dolžino dx iz ravnovesne lege. Enačba gibanja je

$$(\partial/\partial x) [g(l-x) \partial u/\partial x] + \Omega^2 u = \partial^2 u/\partial t^2$$

Robni pogoj je $u(l) = 0$, če si izberemo koordinatno izhodišče v krajišču strune. Rešitev enačbe spet iščemo v obliki $u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$. Krajšamo s časovnim faktorjem in dobimo *Besselovo enačbo*

$$d^2 X/d\xi^2 + (1/\xi) dX/d\xi + (\omega^2 + \Omega^2) X/g\xi = 0$$

Pri tem je $\xi = l-x$. Rešitev, ki ustreza robnemu pogoju, je

$$X(\xi) = A J_0 [(4\Omega^2 + 4\omega^2) \xi/g]^{1/2}$$

Pri $x = 0$, to je pri $\xi = l$, mora biti zaradi robnega pogoja argument Besselove funkcije enak eni izmed njenih ničel. Torej mora biti $l(\omega_n^2 + \Omega^2)/g = \varphi_n$, če je n ničla enačbe $J_0(\varphi) = 0$. Nekaj zaporednih ničel je 2,40, 5,52, 8,65... Enačba za lastne frekvence je

$$\omega_n = [(\varphi_n g/l) - \Omega^2]^{1/2}$$

Kritično kotno hitrost, pri kateri struna sploh zaniha, določa pogoj $\varphi_n g > \Omega^2 l$.

Janez Žitnik

Vprašanje 49 (Obzornik mat. fiz. 6 (1958) 187)

Predstavljajmo si zvezdo, ki bi bila v celoti narejena iz idealnega plina. Plin naj miruje in naj ima ves enako temperaturo. Kako je porazdeljena masa zvezde? Kako pojema gostota plina, če gremo od središča navzven? Posebej izračunaj tisto rešitev problema, pri kateri je gostota v središču končna. Ali obstaja rešitev s končno celotno maso?

Zvezda naj bo krogla. Tlak plina je $p(r)$ in gostota plina $\rho(r)$, če je r razdalja od središča. Za hidrostatični tlak velja

$$dp = -g(r) \rho(r) dr$$

Gravitacijski pospešek $g(r)$ je odvisen od mase plina $M(r)$, zaprtega v krogli z radijem r :

$$g(r) = \kappa M(r)/r^2$$

Oboje da enačbo

$$dp = -\kappa M(r) \varrho(r) dr/r^2$$

Odvajamo po r in upoštevamo $M'(r) = 4\pi \varrho(r) r^2$, če s črtico označimo odvod po r :

$$r^{-2} (r^2 p'/\varrho)' = -4\pi \kappa \varrho$$

V izotermni zvezdi velja $p(r) = p(r_0) \varrho(r)/\varrho(r_0) = C \varrho(r)$ in enačba preide v

$$Cr^{-2} [r^2 (\log \varrho)']' = -4\pi \kappa \varrho \quad (1)$$

Vpeljemo $\varrho = \varrho_0 e^{-y}$ in $r = (C/4\pi \kappa \varrho_0)^{1/2} x = \beta x$, če je ϱ_0 gostota v središču zvezde. Enačbo (1) zapišemo v obliki

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = e^{-y} \quad (2)$$

Robni pogoj je $y(x=0) = 0$ in $(dy/dx)_{x=0} = 0$, če zahtevamo, da je gostota v središču zvezde končna.

Enačbo (2) poskusimo pri majhni razdalji x rešiti z vrsto $y = ax^2 + bx^4 + \dots$. Zaradi robnega pogoja ni konstantnega koeficienta in členov z lihimi potencami x . Eksponentno funkcijo na desni razvijemo v vrsto, obdržimo prva dva člena in dobimo rešitve za majhne x

$$y(x) = x^2/6 - x^4/120 + x^6/2000 - \dots$$

Pri večji razdalji vstavimo v (2) novo spremenljivko $z = 1/x$ in dobimo

$$z^4 d^2 y/dz^2 = e^{-y} \quad (3)$$

Ena izmed rešitev te enačbe je $y = -2 \ln z - \ln 2$. Še enkrat vpeljemo novo spremenljivko $y = -2 \log z - \eta$ z neznano funkcijo η , za katero velja

$$z^2 d^2 \eta/dz^2 + e^\eta - 2 = 0$$

Zdaj postavimo še $z = 1/x = e^t$ pa dobimo enačbo

$$d^2 \eta/dt^2 - d \eta/dt + e^\eta - 2 = 0$$

Enačbi znižamo red, če postavimo $\varphi = d\eta/dt$ in $(\partial\varphi/\partial t) \partial\varphi/\partial\eta = d^2 \eta/dt^2$. Tako sledi

$$\varphi \partial^2 \varphi/\partial t/\partial\eta - \varphi + e^\eta - 2 = 0$$

Točka $(0, \eta_0)$ je značilna točka, ki ustreza rešitvi $2z^2 = e^{-y}$ enačbe (3), saj je $y_0 = -\eta_0 + 2 \ln x = \ln(2/x^2)$. Obnašanje rešitve v okolici te točke raziščemo tako, da postavimo $\eta = \eta_0 + \eta_1 = \ln 2 + \eta_1$ in upoštevamo, da je η_1 majhna količina. Sedaj je

$$\varphi (\partial\varphi/\partial\eta_1) - \varphi + 2e^{\eta_1} - 2 = 0$$

Ker je η_1 majhna količina, obdržimo v vrsti za eksponentno funkcijo samo prva dva člena:

$$\varphi (\partial\varphi/\partial\eta_1) - \varphi + 2\eta_1 = 0$$

Zaradi $\varphi = d\eta/dt = d\eta_1/dt$ sledi

$$d^2 \eta_1/dt^2 - d \eta_1/dt + 2\eta_1 = 0$$

Rešitev je

$$\eta_1 = A e^{q_1 t} + B e^{q_2 t}$$

če sta q_1 in q_2 rešitvi karakteristične enačbe $q^2 - q + 2 = 0$, torej $q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{7}$. Rešitev preoblikujemo

$$\eta_1 = A e^{t/2} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t + \delta\right)$$

Ker je $-y = \eta - 2 \ln x = \eta + 2t$ in $\eta = \eta_0 + \eta_1 = \ln 2 + \eta_1$, zapišemo rešitev kot

$$-y = 2t + \ln 2 + A e^{t/2} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t + \delta\right) = \ln(2/x^2) + A x^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} \ln x - \delta\right)$$

Upoštevali smo $1/x = e^t$. Končno je $\rho = \rho_0 e^{-y}$ in gostota za velike x je

$$\rho = 2\rho_0 x^{-2} \exp\left[A x^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} \ln x - \delta\right)\right]$$

Če gre $x \rightarrow \infty$, razvijemo eksponent v vrsto

$$\rho = 2\rho_0 x^{-2} \left[1 + A x^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} \ln x - \delta\right)\right]$$

To pa je rešitev, ki se asimptotično približuje rešitvi $\rho = 2\rho_0/x^2$, ko gre $x \rightarrow \infty$.

Maso zvezde izrazimo z integralom

$$M = \int_0^\infty \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi \beta^3 \rho_0 \int_0^\infty x^2 y dx$$

Pri dovolj velikih x je integral enak $8\pi \beta^3 \rho_0 \int_0^\infty dx$ in ni končen. To kaže, da ni izotermne zvezde s končno maso.

Kot zanimivo razširitev naloge si oglejmo politropno zvezdo. Tlak in gostoto povezuje v tem primeru enačba $p = C \rho^{(n+1)/n}$, kjer sta C in n konstanti. Za adiabatni plin je $(n+1)/n = \kappa' = c_p/c_V$. Postavimo $\rho = \rho_0 y^n$ pa dobimo

$$(n+1) C \rho_0^{(1-n)/n} r^{-2} d(r^2 dy/dr)/dr = -4\pi \kappa y^n$$

Vstavimo $r = \beta x$ z $\beta = [(n+1) C \rho_0^{(1-n)/n} / 4\pi \kappa]^{1/2}$ in dobimo *Emdenovo enačbo*

$$x^{-2} (x^2 y')' = -y^n$$

Zopet zahtevamo, da je gostota v središču zvezde končna, tako da velja pri $x = 0$ robni pogoj $y = 1$ in $dy/dx = 0$.

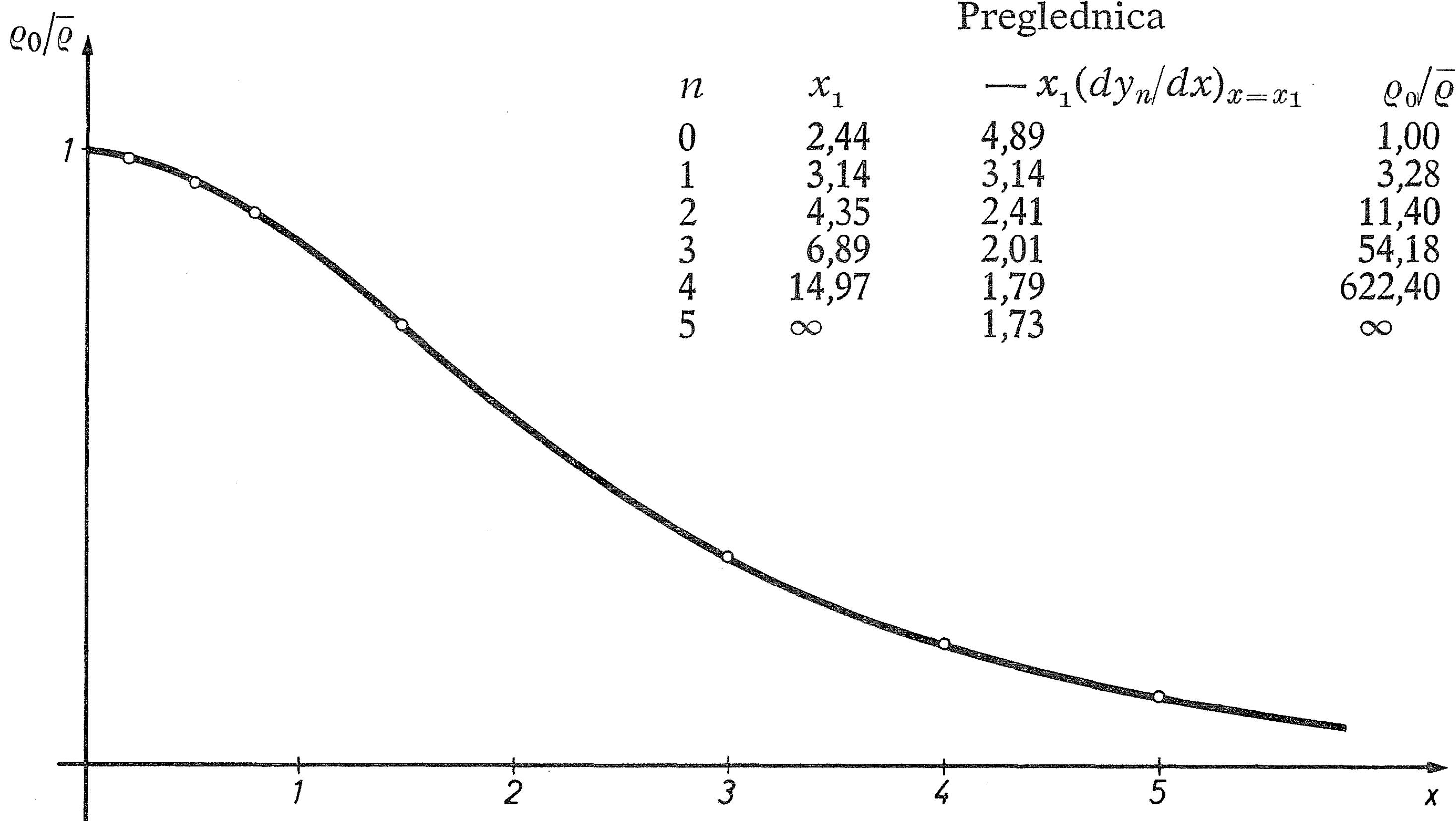
Emdenova enačba ni analitično rešljiva za vsak n . Znane so rešitve, ki ustrezajo našemu robnemu pogoju:

$$\begin{array}{ll} y = 1 - \frac{1}{6}x^2 & n = 0 \\ y = \sin x/x & n = 1 \\ y = (1 + x^2/3)^{-1/2} & n = 5 \end{array}$$

V splošnem je treba rešiti enačbo numerično, npr. z vrsto $y = 1 + ax^2 + bx^4 + \dots$. Zaradi robnega pogoja ni členov z lihimi potencami x . Rešitev, ki vsebuje prve tri člene, je

$$y_n = 1 - \frac{1}{6}x^2 + nx^4/120 - \dots$$

Emdenove funkcije so tabelirane za različne n .



Sl. 1. Gostote izotermne zvezde v odvisnosti od razdalje od središča $r = \beta x$.

Določimo nekaj karakterističnih količin za zvezdo z danim n . Na površju zvezde je $y(\beta x) = 0$, če naj zunaj zvezde ne bo plina. Torej mora biti pri $\beta x_1 = R$ funkcija $y(\beta x)$ enaka nič. V tem primeru ima zvezda ostro mejo in je

$$R = \beta x_1 = [(n + 1) C/4\pi \kappa]^{1/2} \rho_0^{(1-n)/2n} x_1$$

x_1 je prva ničla funkcije y_n . Za $n = 1$ sledi $x_1 = \pi$ in $R = (C/2\pi \kappa)^{1/2}$. To pomeni, da radij zvezde v tem primeru ni odvisen od gostote v središču. Masa zvezde je tedaj

$$\begin{aligned} M(x_1) &= \int_0^{\beta x_1} 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \beta^3 \rho_0 \int_0^{x_1} x^2 y^n dx = -4\pi \beta^3 \rho_0 \int_0^{x_1} x^2 (dy/dx) dx = \\ &= -4\pi \beta^3 \rho_0 x_1^2 (dy/dx)_{x=x_1} \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je na robu x enak ničli, ustrezna funkcija y_n pa je masa zvezde

$$M = -4\pi [(n + 1) C/4\pi \kappa]^{3/2} \rho_0^{(3-n)/2n} x_1^2 (dy/dx)_{x=x_1}$$

Za $n = 3$ masa zvezde ni odvisna od gostote v središču. Za $n = 5$ je masa zvezde končna, čeprav je njen radij neskončen. Nekaj podatkov je zbranih v preglednici. Zanimiv je tudi potek gostote plina v zvezdi. Poprečno gostoto definiramo kot

$$\bar{\rho}(x) = 3M(x)/4\pi \beta^3 x^3 = -3\rho_0(dy/dx)/x$$

Za gostoto v središču zvezde sledi:

$$\rho_0 = -\bar{\rho} x_1/3(dy/dx)_{x=x_1}$$

Janez Žitnik

PREJELI SMO V OCENO

Rakovec J., Osnovni pojmi topologije, Knjižnica Sigma, 31, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1980. Cena 320.— din (256.— din).

Na svetu je razmeroma zelo malo ljudi, ki bi karkoli vedeli o topologiji. Saj še recimo tisti, ki so študirali matematiko na ljubljanski univerzi pred letom 1960, niso pri študiju nikoli slišali za topologijo, kaj šele, da bi se je učili. To pa še ne pomeni, da »navaden« matematik nima nikoli opraviti s topološkimi pojmi. Nasprotno, topologija je ena najosnovnejših matematičnih disciplin in se z njenimi pojmi srečujemo skoraj povsod v matematiki.

Cilj pričujoče knjižice je dati bralcu vsaj približno idejo o tem, kaj je topologija, ga spoznati z nekaterimi osnovnimi topološkimi pojmi (okolice, odprte in zaprte množice, konvergenca, zveznost, povezanost) in prikazati pomen teh pojmov v elementarni matematični analizi in geometriji. Bralec najprej spozna nekaj topoloških pojmov na premici, nato lahko sledi posploševanju teh pojmov na ravnino in prostor in končno prispe do aksiomske definicije abstraktnega topološkega prostora. Težišče dela je na obravnavi topoloških pojmov na konkretnih, enostavnih prostorih; abstraktnim stvarjem avtor ni namenil veliko prostora. Odpovedal se je tudi razvijanju topologije kot take in se je bolj posvetil stvarjem, ki so blizu srednješolski matematiki. Knjiga je napisana skrbno in jasno in vsebuje mnogo risb. Zato jo bo lahko brez hudega napora in s pridom prebral marsikateri srednješolec. Dobrodošla bo tudi srednješolskim profesorjem in najbrž še komu.

Jože Vrabec

Pal Medgyessy, Decomposition of Superpositions of Density Functions and Discrete Distributions. Akademiai Kiado, Budapest 1977. Str. 308.

Pri razčlenjevanju superpozicij gre za takole situacijo. Naj bo $f(x, \alpha, \beta)$ dvo-parametrična gostota zvezne porazdelitve ali diskretna porazdelitev, pri tem pa α in β neznana parametra, prvi iz znane množice A , drugi iz znane množice B . Izberimo poljubno naravno število N , kakršna koli nenegativna števila $p_1, \dots, p_N$ (ne vsa 0), pa še katere koli vrednosti $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in A$ in $\beta_1, \dots, \beta_N \in B$. Funkcijo

$$k(x) = \sum_{i=1}^N p_i f(x, \alpha_i, \beta_i)$$
 imenujemo superpozicijo komponent $f(x, \alpha_i, \beta_i)$. Vzemimo, da

poznamo vrednosti take superpozicije $k(x)$ v točkah $x_1, \dots, x_n$, števila N , uteži $p_1, \dots, p_N$ in parametrov $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$ pa ne. Zdaj bi bilo treba iz eksperimentalnih podatkov $k(x_1), \dots, k(x_n)$ določiti N in oceniti neznane količine $p_1, \dots, p_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$. Tej nalogi pravijo razčlenitev superpozicije $k(x)$ na komponente. Prvi jo je obravnaval N. Sen leta 1922 v zvezi z vodikovim spektrom. Od tedaj uporabljajo razčlenitev superpozicije na komponente v spektroskopiji, jedrski fiziki, biologiji, matematični ekonomiki in še kje.

Delo P. Medgyessyja obravnava razčlenitev superpozicije na komponente kot problem numerične analize, torej s stališča, da so pri eksperimentalnih podatkih slučajni vplivi zanemarljivi. Knjiga je razdeljena na pet poglavij. Prvo je kratek uvod. V drugem so zbrani (po večini brez dokazov) potrebni matematični pripomočki, predvsem iz verjetnostnega računa. Tretje poglavje opisuje, kako se razčleni superpozicija gostot, četrto pa obravnava enako nalogo pri diskretnih porazdelitvah. Zadnje poglavje je dodatek, v njem so na kratko opisane numerične metode, ki pridejo v poštev pri razčlenjevanju superpozicij.

Delo je prva temeljita monografija obravnavanega področja. Strokovnjakom, ki razčlenjevanje superpozicij potrebujejo, bo gotovo olajšalo razumevanje te metode. Knjiga je napisana skrbno in lahko razumljivo, seveda če bralec obvlada potrebne pripomočke iz verjetnostnega računa in numerične analize. Za te pa žal ni mogoče reči, da so elementarni.

Rajko Jamnik

Prijatelj Niko, Uvod v matematično analizo, 1. del. — Ljubljana: DZS. — (Matematika-Fizika: zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij; 13.) Cena br. 740.— din (592.— din).

Knjiga je razdeljena na tri poglavja. V prvem, ki nosi naslov Množice, nas avtor najprej seznani z logičnimi znaki, nato pa z osnovnimi pojmi teorije množic, kot so operacije med množicami, kartezični produkt, funkcije in preslikave, ekvivalenčne relacije, algebre množic in ekvipolentne množice.

Drugo poglavje govori o številih. Avtor definira računske operacije med kardinalnimi števili in pokaže, da ustreza množica končnih kardinalnih števil Peanovim aksiomom in je zato model za množico naravnih števil. Realna števila uvede aksiomatično. V tem poglavju najdemo dokaze za nekatere resnice, ki jih po navadi molče privzamemo, čeprav niso samo po sebi umevne. Tako je npr. dokazana eksistenca funkcije, ki je definirana rekurzivno, splošni zakon komutativnosti pri seštevanju itd. Izrek, da množica realnih števil ni števna, je dokazan brez zapisa realnih števil z decimalnimi številkami.

Težišče knjige je na zadnjem poglavju z naslovom Metrični prostori. Avtor definira metrični prostor in pokaže, kako uvedemo v njem na naraven način topologijo. Vsi topološki prostori v knjigi so metrični prostori. Najprej se srečamo s pojmi, kot so separabilnost, kompaktnost, povezanost itd. Obširno so obravnavana zaporedja in limite preslikav. Bralec se že tu seznani z Banachovo algebro. Primer zanjo je družina vseh omejenih funkcij na danem metričnem prostoru. Nadalje je dokazan Baireov izrek, da je poln metrični prostor druge kategorije. Posebno lepo so obdelane funkcije z omejenim totalnim razmahom. Pri obravnavanju upodobitev, ki ustrezajo Lipschitzovemu pogoju, je dokazana eksistenca negibne točke za upodobitev skrčitve. Nadalje vsebuje to poglavje tri osnovne izreke matematične analize: Tietze-Urysohnov izrek o razširitvi funkcij, Arzela-Ascolijev izrek o relativni kompaktnosti enakozvezne množice omejenih funkcij in Stone-Weierstrassov izrek o aproksimaciji. Poseben razdelek pa je posvečen pojmu odvoda. Odvod je definiran za funkcije realne in kompleksne spremenljivke in podan je pojem holomorfne funkcije. Poleg Rolleovega in Lagrangevega izreka je dokazan izrek o povprečni vrednosti v splošni obliki, ko dopuščamo, da nastopajoče funkcije niso odvedljive v kaki števeni množici točk. V tem razdelku se srečamo tudi s pojmom nedoločenega integrala, tj. primitivne funkcije. Integrabilnost zveznih funkcij je dokazana direktno, ne po običajni poti prek določenega integrala, ki ga v tej knjigi še ni. Predzadnji razdelek govori o polinomskih in racionalnih funkcijah. Obravnavane so lastnosti teh funkcij, podana je Lagrangeva interpolacijska formula in razcep racionalne funkcije na parcialne ulomke. Zadnji razdelek pa je posvečen kompaktifikaciji realne osi s privzemom točk $+\infty$ in $-\infty$.

Že iz tega skopega pregleda je razvidno, kako bogata je vsebina knjige. V njej bo bralec našel osnovne pojme in izreke, ki so potrebni pri nadaljnjem študiju matematične analize. Kakor druga avtorjeva dela se seveda tudi to odlikuje z izredno skrbnostjo, jasnostjo in razumljivostjo. Pač pa pogrešamo naloge, ki bi pomagale bralcu utrditi snov in osvetliti abstraktno teorijo.

Ivan Vidav

Belli F., Erweiterung regulärer Sprachen zur automatischen Erkennung und Korrektur von syntaktischen Fehlern, Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Nr. 199, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1978, 115 str.

Knjiga je posvečena odkrivanju in odpravljanju napak v regularnih jezikih. Pri tem se omeji na naslednje vrste napak:

- natanko en simbol manjka,
- natanko en simbol je napačen,
- natanko en simbol je preveč.

Ta problematika ima več področij uporabe: leksična in sintaktična analiza v programskih jezikih, diagnostika elektronskih vezij in teorija kodiranja. Zato bo najbrž tudi pri nas našla bralce.

Vladimir Batagelj

Strnad Janez, Kvantna fizika za začetnike, Ljubljana, DMFA SRS 1980, 110 str. (Postdiplomski seminar za fiziko; 7.) Cena 60.— din (48.— din).

Kvantna fizika za začetnike je izšla kot sedmi zvezek zbirke Podiplomski seminar iz fizike. Vsebinsko lahko razdelimo na dva dela. V prvem delu avtor kritično obravnava utečeno pot pri uvajanju kvantne mehanike v srednješolskem programu fizike. Pot se ponavadi začne z obravnavo fotoefekta. Ta pojav nam kaže, da je treba svetlobi, ki jo poznamo od prej kot elektromagnetno valovanje, kdaj pripisati tudi nekatere lastnosti delcev. Ko pri prehodu curka elektronov skozi tanek listič grafita opazimo uklonske pojave, se potreba po podobni dvojnosti pokaže tudi pri obravnavanju delcev. Po taki poti nas pedagoška vnema kaj rada zavede, da pustimo dijake v prepričanju, da imajo elektroni lastnosti valovanja, fotoni pa lastnosti lokaliziranih delcev. Avtor podrobneje razčlenjuje razliko med funkcijo stanja za proste elektrone in klasično valovno funkcijo za električno polje v elektromagnetnem valovanju. Prav tako pokaže, da fotoni nimajo lastnosti nerelativističnih kvantnih delcev.

V drugem delu predlaga avtor drugačno pot do kvantne mehanike. Najprej spoznamo, da lahko sprejmejo atomi helija ob trkih z elektroni le diskretne vrednosti energije. Do podobnih zaključkov pridemo tudi pri opazovanju trkov elektronov z drugimi atomi. Tudi notranja energija atomov ima lahko le diskretne vrednosti. To potrjuje spekter svetlobe, ki jo sevajo prosti atomi. Spekter je črtast, frekvenca posameznih komponent je sorazmerna z energijsko razliko med stanjema atoma. Pri nadaljnji obravnavi spoznamo, da izmenjuje elektromagnetno valovanje energijo vselej v obrokah in da je energija takega obroka sorazmerna s frekvenco valovanja. Tem energijskim paketom pravimo fotoni. Fotonom pripišemo energijo in gibalno količino. Prav izmenjava gibalne količine pri interakciji med fotoni in delci omejuje natančnost, s katero lahko z merjenjem določimo lego delca. Avtor na osnovi te ugotovitve pokaže relacijo nedoločenosti. V nadaljevanju obravnava omejitve, ki jih relacija nedoločenosti postavlja pri obravnavi gibanja delcev, in predstavi funkcijo stanja za proste delce z določeno gibalno količino. Poudarek je na statistični interpretaciji funkcije stanja. Preostanek razprave je namenjen kvantnomehanski obravnavi sistemov vezanih delcev, ki smo jih spoznali v uvodnem delu. Na koncu je kronološki pregled spoznanj, ki so osnova kvantne mehanike.

Polemični del knjige je namenjen predvsem učiteljem fizike na šolah in študentom fizike na pedagoški smeri. Prikaz nove poti v kvantno mehaniko pa bo v korist tudi srednješolcem.

Marjan Hribar

M. Hladnik, Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere, 100 str. (Zbirka izbranih poglavij iz matematike; 16.) Cena 100 din (80 din).

Zbirka nalog in primerov iz funkcionalne analize in teorije mere je nastala ob vajah, ki jih je avtor vodil pri obeh predmetih na dodiplomskem študiju matematike. Študent bo v njej našel obilo nalog, ob katerih bo lahko na praktičnih primerih preizkusil pridobljeno teoretično znanje iz teh predmetov. Poleg bolj ali manj standardnih nalog so tu še skrbno izbrani protiprimeri k pomembnejšim izrekom s teh področij. Poudariti pa je treba, da knjiga ni zgolj »zbirka« nalog, saj je v njej avtor mnoge znane primere korenito obdelal, dodani pa so tudi nekateri izvirni.

V »namigih in rešitvah« daje avtor bralcu predvsem napotke za reševanje; včasih mu prepusti še kakšen lažji premislek in večino »težakega« dela, drugič spet pa problem razreši »do konca«. Menim, da je taka kombinacija koristna, saj navaja študenta po eni strani k samostojnemu delu, po drugi strani pa mu tudi pokaže, kakšen naj bo »izdelek«.

Čeprav je knjiga namenjena predvsem dodiplomskim študentom, jo bo gotovo z veseljem vzel v roke tudi marsikateri podiplomski študent in morda še kdo, saj si bo ob njej osvežil osnovno znanje iz funkcionalne analize in teorije mere.

Matjaž Omladič

Prešić S., Prešić M., Rešavanje jednačina, nejednačina, formula, Školska knjiga, Zagreb 1980, 192 str.

Avtorja izhajata iz pojma *reševanje enačb* in ga razširita na reševanje poljubnih formul. Tako je

$$R(x \in \{1, 2\} \vee x \in \{2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$$

tu »*R*« beremo »rešitev formule«. $R(F)$ je torej množica vseh števil, ki rešijo formulo F . Če ima formula n prostih spremenljivk, potem je rešitev neka množica urejenih n -teric. Formulo rešimo tako, da poiščemo ekvivalentno formulo *rešene oblike*:

$$x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{Z}) x = k\pi$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow (\exists c_1, c_2 \in \mathbf{R}) (\forall x \in \mathbf{R}) y(x) = c_1x + c_2$$

Naj ti primeri zadoščajo za predstavitev vsebine.

Knjiga je pomemben prispevek k uveljavitvi simbolne logike v pouku matematike, zato jo priporočam učiteljem matematike na srednjih šolah.

Izidor Hafner

Turk S., Budin L., Analiza primjenom računala, Školska knjiga, Zagreb, 1978, 277 str.

Knjiga obravnava teoretično in algoritmično ozadje ter uporabo programov za analizo omrežij (predvsem električnih vezij) kot so: ECAP (Electronic Circuit Analysis Program), CIRCUS, NET-1, SCEPTRE-PREDICT, NASAP (Network Analysis for System Application Program). V njej se prepletata teorija vezij in numerična analiza (reševanje sistemov diferencialnih enačb in minimizacija funkcij ene ali več realnih spremenljivk).

Knjiga bo dobrodošla predvsem elektrotehnikom pa tudi uporabnim matematikom, ekonomistom in drugim, ki bi se srečali z analizo omrežij.

Vladimir Batagelj

Čaklović L., Zbirka zadataka iz linearne algebre. Školska knjiga, Zagreb 1979, 229 strani.

Zbirka nalog je nastala kot dopolnilo knjigi prof. S. Kurepe, Uvod v linearno algebro (Školska knjiga, Zagreb 1975) in se z njo ujema v vseh poglavjih. Tematsko bi zbirko lahko razdelili na štiri dele. Prvi del obsega poglavja z nalogami iz ravninskih in prostorskih vektorjev, linearnih preslikav v ravnini in prostoru, kvadratnih form ter krivulj in ploskev drugega reda. V drugi del spadajo naloge iz matrik, determinant in sistemov linearnih enačb. Tretji del predstavljajo naloge iz sistemov navadnih diferencialnih enačb in zadnji del naloge iz osnov teorije grup. Zbirka bo prišla gotovo prav ne samo študentom matematike, ampak tudi vsem tistim, ki si žele z nalogami utrditi osnovno znanje iz linearne algebre in principi njene uporabe. Prvi del zbirke je primeren celo za srednješolce. Naloge niso prezahtevne, čeprav med njimi niso vse računske, in vse so opremljene z rešitvami, večinoma tudi z dokaj natančno razlago.

Edvard Kramar

Smiljanić G., Osnove digitalnih računala, Školska knjiga, Zagreb 1978, 290 str.

Knjiga je učbenik — predvsem namenjen študentom elektrotehnike — o zgradbi, delovanju in načinih uporabe računalnikov. V njej so obravnavane naslednje teme: števila in kodi, osnovna logična vezja, enote in nosilci informacije, model računalnika, programiranje v zbirniku, višji programski jeziki, povezave računalnika z vhodno/izhodnimi enotami, razlike med (v knjigi uporabljenim) modelom računalnika in dejanskimi računalniki, mikroprocesorji in računalniške mreže.

Knjiga je dokaj popoln uvod v »drobovje« računalnikov. Zato bo dobrodošla predvsem tistim, ki se žele sami seznaniti tudi s tem delom računalništva. Zamerili pa bi ji lahko, čeprav se avtor v predgovoru opraviči, premajhno skrb za domačo terminologijo.

Vladimir Batagelj

Pauše Ž., Uvod u teoriju informacije, Školska knjiga, Zagreb 1980; VIII + 144.

V slovenščini že imamo knjigo o teoriji informacije. To je knjižica Rajka Jamnika, ki je izšla v zbirki SIGMA. Knjiga Željka Paušeta zahteva od bralca več znanja: poznati mora precej verjetnostnega računa, s tem pa tudi osnove analize in algebre. Avtor pa je želel, da bi bila knjiga dostopna tudi nematematikom. Zato ne uporablja prezahtevnega matematičnega orodja. Avtor je več let predaval teorijo informacije matematikom na zagrebški univerzi. (Ne vem, zakaj naši študentje matematike na univerzi nimajo možnosti, da bi se seznanili s teorijo informacije!) Tako si je knjigo zamislil kot učbenik. V vsakem učbeniku so naloge več kot dobrodošle, žal pa jih v tej knjigi ni.

Knjiga poskuša prikazati tri skupine problemov in rezultatov teorije informacije: problem kvantitativne opredelitve pojma informacije, problemi matematičnega modeliranja posameznih delov informacijskega sistema (npr. kanal s šumom) in končno problemi v zvezi z učinkovitim kodiranjem in dekodiranjem. Prav ta tretja skupina problemov je v zadnjih letih povzročila razcvet posebne matematične veje, znane pod imenom algebrajska teorija kodiranja. V knjigi so od tod le linearni kodi, katerim je posvečeno zadnje poglavje.

Vsem, ki jih zanima teorija informacije, priporočam, da prelistajo tudi tole knjigo.

Tomaž Pisanski

PUBLIKACIJE KOMISIJE ZA TISK DMFA SRS V LETU 1980

	Cena v din
1.—6. Obzornik za matematiko in fiziko 27 (1980) št. 1—6 (432, 450, 460, 466, 467, 484) (posamezna številka)	50.—
7.—10. Presek — list za mlade matematike, fizike in astronome 7 (1979/80) št. 3, 4; 8 (1980/81) št. 1, 2. (439, 444, 458, 472) (posamezna številka)	15.—
11. Preprint series of the department of mathematics 17 (1979) (440)	—
12. Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko : letno poročilo (1978/79) (443)	—
13. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS : republiško tekmovanje iz matematike 1980 (457)	—
14. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS : republiško tekmovanje iz fizike 1980 (465)	—
15. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS : občni zbor, 32 (1980) (475)	—
16. Seminar iz matematike, 8., Zanimiva matematika, 1980 (441)	—
17. Index Math. Subj. Class. (1980) (469)	480.—

Knjižnica Sigma

18. 9 b. Prijatelj N., Matematične strukture, 1. del (2. popravljena izdaja) (455)	240.—
19. 20 g. Uršič S., Štirimestni logaritmi in druge tabele (8. natis) (445)	40.—
20. 31. Rakovec J., Osnovni pojmi topologije (438)	256.—

Matematika — Fizika : zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

21. 4 a. Vidav I., Algebra (2. natis) (456)	320.—
22. 13. Prijatelj N., Uvod v matematično analizo, 1. del (463)	br. 592.— pl. 688.—

Zbirka izbranih poglavij iz matematike

23. 3 c. Zakrajšek E., Fortran (4. natis) (451)	200.—
24. 4 č. Zakrajšek E., Programski jezik pascal (5. natis) (477)	56.—
25. 7 a. Križanič F., Linearna algebra (2. natis) (479)	80.—
26. 12 a. Wirth N., Računalniško programiranje (2. natis) (464)	200.—
27. 14 a. Nadrah N., Cobol (2. natis) (478)	200.—
28. 16. Hladnik M., Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere (428)	100.—

	Cena v din
Zbirka izbranih poglavij iz fizike	
29. 9 b. Gros M. in dr., Naloge iz fizike (3. natis) (436)	80.—
30. 17. Ahlin F. in dr., Fizikalni praktikum I (449)	100.—
Zbirka izbranih poglavij iz mehanike	
31. Muršič M., Osnove tehniške mehanike, 1. del, Statika (453)	200.—
Postdiplomski seminar iz fizike	
32. 7. Strnad J., Kvantna fizika za začetnike (454)	48.—
Učbeniki in priročniki za osnovno in srednjo šolo	
33. Štalec I., Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 4. razred gimnazije (3. natis) (446)	44.—
34. Vadnal A., Matematika — Leksikon CZ (433)	152.—
Seminar za numerično in računalniško matematiko	(posamezni zvezek) 40.—
35. 140/1. Zakrajšek E., Pascal 3.3, 1. del (417)	
36. 140/2. Zakrajšek E., Pascal 3.3, 2. del (418)	
37. 141/1. Marušič D., Simetrični grafi in Hamiltonove poti, 1. del (419)	
38. 141/2. Marušič D., Simetrični grafi in Hamiltonove poti, 2. del (420)	
39. 152. Nadrah N., Žumer M., Dors (434)	
40. 153. Oscilacijske lastnosti lastnih funkcij diferencialnih operatorjev (435)	
41. 154/155. Bobkov V. V., Metody s rasshirenoj oblast'ju soglasovannosti diferencial'noj i raznostnoj zadač, 1. in 2. del (437)	
42. 156. Batagelj V., Razvrščanje v skupine — osnovni pojmi (442)	
43. 160. Batagelj V., Ferligoj A., Razvrščanje v skupine — lastnosti drevesnih razvrstitev (448)	
44. 164. Tvrdy I., Diskretno dinamično programiranje (447)	
45. 167. Bogataj H., B — drevesa (452)	
46. 171. Batagelj V., Ferligoj A., Razvrščanje v skupine — metoda voditeljev, lokalna optimizacija (459)	
47. 172. Šinigoj S., Hitra Fourierova transformacija (461)	
48. 173. Suhadolc A., Kolokacija (462)	
49. 180. Zakrajšek E., Reprezentacija reaktančnih funkcij (468)	
50. 186. Mohar B., Hucklova teorija (470)	
51. 187. Tvrdy I., Operator množenja z neodvisno spremenljivko (471)	
52. 192. Martinec M., Makro procesorji (474)	
53. 193. Mohar B., Problem dimer — Pfaffianska metoda (473)	
54. 195. Vilfan I., Množenje matrik (476)	
55. 196. Bobkov V. V., Cislennye metody povyšenoj točnosti s ulučšennymi svojstvami soglasovannosti diferencial'noj i raznostnoj zadač (480)	
56. 197. Bobkov V. V., Metody s rasshirennoj oblastju ustojčivosti čislennogo rešenija sistem obyknovennyh diferencial'nyh uravnenij (481)	
57. 199. Levstek D., Programiranje KOPE 1000 (483)	
58. 203. Mohar B., Spektri grafov (485)	

Na desni strani seznama so navedene znižane cene, ki veljajo za člane društva, študente in naročnike Preseka.

Na koncu naslovov so v oklepajih zaporedne številke izdaje Komisije za tisk DMFA SRS od leta 1951 do danes.

Ciril Velkovrh