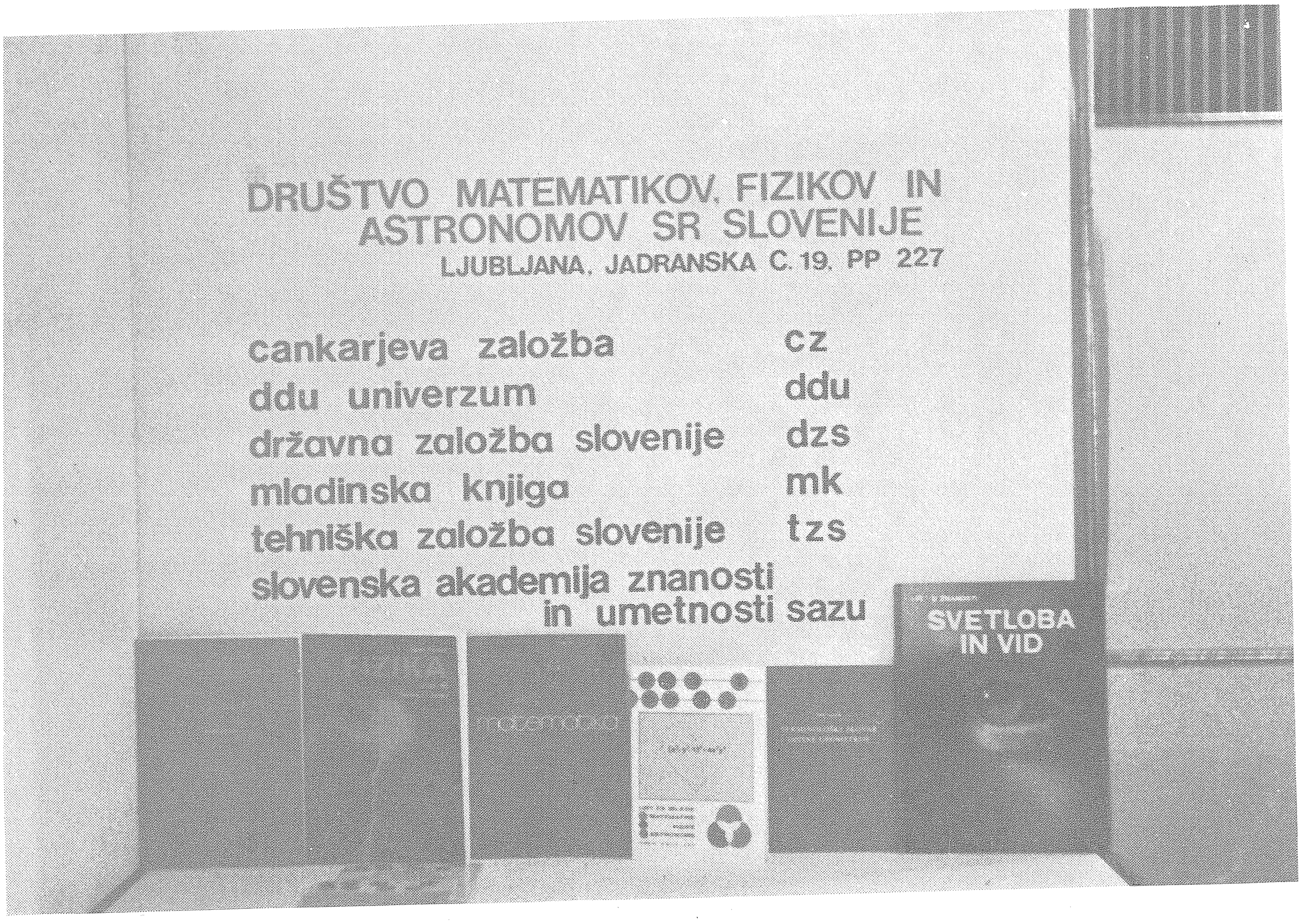
R - 1771/81
ODPISANO

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1981
Letnik 28
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 28. — ŠTEVILKA 1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1981

Glavni urednik: Edvard Kramar, **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 250.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 125.— din, za ustanove in podjetja 350.— din, za tujino 20 $ = 600.— din, posamezna številka 60.— din, dvojna številka 120.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — Obzornik za matematiko in fiziko, 61001 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 227, tel. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije, to številko tudi Zavod SRS za šolstvo.

© 1981 DMFA SRS — 486 YU ISSN 0473-7466

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA

Uvodnik

Beležka ob seminarju za učitelje matematike (Aleksander Cokan) 1

Članki

Sugestija za poučevanje matematike po učbeniku za SVIO (Sonja Križanič, Marjan Vagaja) 2

Vektorski model ravnine in obravnava nekaterih problemov ravninske geometrije (Marija Vencelj) 3

Didaktično metodična zasnovanost in pregled vsebin učbenika za matematiko s poudarkom na povezavi geometrije z algebro (France Križanič) 11

Matematične strukture (Janez Rakovec) 19

Jezik prvega reda z enakostjo (Izidor Hafner) 24

Domače vesti

VII. kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije (Ciril Velkovrh) III

11. seminar iz fizike: FIZIKA POLPREVODNIKOV (Janez Stepišnik) IV

CONTENTS

Articles

Some suggestions on how to use the new text-book for teaching mathematics (Sonja Križanič, Marjan Vagaja) 2

A vector-based approach to plane geometry (Marija Vencelj) 3

The didactic and methodological scheme and a surwey of the contents of the text-book for mathematics, with emphasis on the connection between geometry and algebra (France Križanič) 11

Mathematical structures (Janez Rakovec) 19

First-order language with equality (Izidor Hafner) 24

Home news . . . . . 1, III, IV

Na ovitku: Reklamni pano na razstavi knjig v času VII. kongresa (glej str. III). (Foto Ciril Velkovrh)

BELEŽKA OB SEMINARJU ZA UČITELJE MATEMATIKE

Strokovni svet za vzgojo in izobraževanje SR Slovenije je julija 1979 potrdil vsebino skupne vzgojnoizobrazbene osnove, s tem tudi učni načrt za matematiko, junija 1980 pa je sprejel sklep, da se v šolskem letu 1980/81 uvaja poskusni učbenik Matematika 1 dr. F. Križaniča v 1. razred štiriletnih srednjih šol, ki imajo v predmetniku 3 ali 4 ure matematike v 1. razredu. Učbenik je nastal na podlagi sodobno zasnovanega učnega načrta za matematiko v skupni vzgojnoizobrazbeni osnovi.

Učbenik smo nestrpno pričakovali. Izšel naj bi že pred seminarjem za učitelje matematike, njim v pomoč in za orientacijo. Zaradi neljube zamude pa smo na seminarju lahko izmenjali le prve vtise ob še »toplih« izvodih iz tiskarne. Beseda predavateljev je razjasnila marsikatero nejasnost.

Novi učni načrt in učbenik sta korak k posodobitvi srednješolske matematike, ki na začetku srednjega izobraževanja na algebrski ravni zaokroža in poglablja znanje iz osnovne šole. Vektorsko zasnovana ravninska geometrija je vpletena v celotno zgradbo obravnavane snovi, zaradi stroge obravnave in vsebinske zgoščenosti pa gotovo predstavlja zahtevnejši del učnega načrta in učbenika. Tudi na seminarju smo največ pozornosti posvetili prav temu poglavju.

Priporočilo glede razporeditve učne snovi za pouk matematike s štirimi in tremi urami na teden odraža časovno stisko pri skrajševanju poti skozi učbenik, čeprav je vsebina učbenika že notranje diferencirana. Notranji diferenciaciji so namenjeni znaki, ki označujejo temeljno znanje ter poglobljeno in razširjeno znanje — za lažje delo učitelja in učenca. Pestra likovna in grafična oprema pripomore k razumljivosti, vzpodbuja aktivne metode dela. Izvedljivost učnega načrta in obdelava vsebine učbenika s tremi urami pouka na teden pa je vsekakor ključno vprašanje, s katerim se bo v prihodnjem šolskem letu soočila vsa generacija učencev na začetku srednjega izobraževanja.

Zavod SR Slovenije za šolstvo je v okviru širše evalvacije vzgojnoizobraževalnih programov pripravil tudi spremljavo učbenika za matematiko. Spremljava je oprta na neposredno vzgojnoizobraževalno delo učiteljev, tudi s poklicnih šol, in med drugim vključuje:

analizo obsežnosti in zahtevnosti vsebine;
ugotovitev, kako teme omogočajo delo z učbenikom;
vlogo ilustracij in spremnega teksta pri pouku ter potrebe po učilih;
analizo učnega uspeha učencev.

Na matematičnem področju se srečujemo s precej kritično kadrovsko situacijo. Posebno pozornost bo treba posvetiti dopolnilnemu izobraževanju učiteljev.

Že šolsko leto 1980/81 skriva obilico nalog in le s skupnimi močmi jim bomo kos.

Aleksander Cokan

R- 1771/81-1

Ymi 111287

Obzornik mat. fiz. 28 (1981) 1

SUGESTIJA ZA POUČEVANJE MATEMATIKE PO UČBENIKU ZA SVIO

SONJA KRIŽANIČ IN MARJAN VAGAJA

AMS Subj. Class. 97 A 99

Sestavek obravnava matematični učbenik za prvi letnik usmerjenega izobraževanja. Avtorja želita dati nekaj sugestij učiteljem pri njegovi uporabi.

SOME SUGGESTIONS ON HOW TO USE THE NEW TEXT-BOOK FOR TEACHING MATHEMATICS

The present article deals with the mathematical text-book for the first year of "directed education". The authors want to give teachers some suggestions on how to use it.

Odločitev, kako in koliko, je prepuščena vsakemu posamezniku glede na razpoložljivi fond ur in dojemljivost učencev. Profesor naj se skuša prilagoditi učencem. Če so bistrejši, več razlage, zakaj je tako, več dokazov in izpeljav; pri manj nadarjenih, v glavnem, kako se naredi, več vaj in utrjevanja.

Učbenik je lepo zgrajena celota, ki je porazdeljena na šest poglavij, ki pa niso enako zgoščena. V prvem poglavju nas avtor seznani z osnovami teorije množic, s katerimi so se že precej ukvarjali v osnovni šoli, z osnovnimi pojmi iz matematične logike, preslikavami in grupo. Poglavje zaključi transformacijska grupa kot praktični primer prej obdelane algebrske strukture. Prvo poglavje moramo vzeti predvsem kot uvod in se ob njem ne smemo predolgo zadrževati. Pri slabših učencih in pomanjkanju časa opustimo preproste fizikalne enačbe in transformacijsko grupo, nikakor pa ne smemo izpustiti pojma transformacije, ki je vez med geometrijo in analizo.

Drugo poglavje je povsem algebrsko. Dijaka pouči o zgradbi kolobarja in urejenega kolobarja. V razdelku Deljivost celih števil so vsebovani osnovni pojmi in izreki o praštevilih in sestavljenih številih. Poglavje zaključi osnovni izrek o deljenju in njegova uporaba — številski sestavi. Vsebina poglavja se več ali manj ujema s prejšnjim učbenikom, vendar je snov marsikje precej skrčena in lepše napisana. Morda bi bilo mogoče v sili izpustiti številske sestave in se zadovoljiti z znanjem iz osnovne šole. Problem je z zakonom o popolni indukciji, ki je kot močno dokazovalno orodje zelo pomemben, miselno pa precej zahteven. Glede na okoliščine se lahko zadovoljimo le s preprostimi primeri, lahko pa posežemo po težjih primerih dokazovanja formul, relacij in lastnosti.

Tretje poglavje obravnava zgradbo obsega in urejenega obsega. Preko racionalnih števil nas pripelje do množice realnih števil, ki je poln urejen obseg. Pika na i je bijekcija med množico realnih števil in množico točk na premici. Tega motiva nikakor ne smemo prezreti, hitreje pa lahko preidemo desetiški zapis racionalnih števil (brez dokazovanja), računanje s približki in periodične decimalne številke. Poudariti pa velja decimalni zapis realnih števil, v katerem se skriva limitni proces.

Četrto poglavje obravnava osnove vektorske algebre, s katero pripravimo orodje za naslednje poglavje, je pa tudi dobra osnova za pouk mehanike. Ravnina in prostor postaneta posebna primera nove matematične strukture — vektorski prostor. Poglavje moramo predelati v celoti.

Peto poglavje je posvečeno geometriji — vektorskemu modelu ravnine. Aksiomi, izbrani na začetku poglavja, so osnova za izpeljavo izrekov. Do klasičnih izrekov planimetrije, konstrukcij in lastnosti likov pridemo po vektorski poti. Podrobno so obdelana gibanja, ker z njimi avtor definira skladnost in orientacijo. Pri uporabi gibanj se lahko opremo na njihovo demonstracijo in se tako izognemo obsežni teoriji. Izogniti pa se ne moremo podobnostni preslikavi, ki jo potrebujemo za definicijo podobnosti. Prav tako lahko po potrebi opustimo zahtevnejše pasuse (potenca točke glede na krog itd.).

Poslednje poglavje obravnava realne funkcije. Čeprav je poudarek na linearni funkciji, so obravnavane tudi kotne funkcije in reševanje pravokotnega trikotnika. Vsi razdelki, ki so v zvezi z linearno funkcijo, so popolnoma klasični. Izjema je prvi, v katerem avtor s pomočjo vektorske oblike enačbe premice izpelje normalno obliko enačbe premice in razdaljo točke do premice. V tem poglavju je mogoče opustiti zadnja dva razdelka, ki sta uporabne narave.

Vse to so le sugestije. Počakati moramo na izkušnje; v bližnji prihodnosti bomo lahko skupaj še marsikaj izboljšali.

VEKTORSKI MODEL RAVNINE IN OBRAVNAVA NEKATERIH PROBLEMOV RAVNINSKE GEOMETRIJE

MARIJA VENCELJ

AMS Subj. Class. 97 A 15,

Članek je posvečen vektorskemu modelu evklidske ravnine, kot ga uvaja novi učbenik F. Križaniča: Matematika za 1. razred srednjih šol. Predstavlja ga z obravnavo nekaterih zanimivih primerov ravninske geometrije.

A VECTOR-BASED APPROACH TO PLANE GEOMETRY

The article discusses a vector-based approach to plane geometry in the form introduced by the textbook by F. Križanič, Mathematics for the first class of middle schools. This approach is introduced by treating some interesting examples from plane geometry.

Gotovo je z novim učbenikom doživela največjo spremembo prav geometrija. Obsežno peto poglavje je v celoti posvečeno spoznavanju vektorskega modela ravnine in njene geometrije. Sledi neposredno poglavju o vektorskih prostorih, ki ga mora dijak dobro obvladati, če naj bo kos zasnovi in metodam »nove« geometrije.

V članku bomo najprej iz učbenika povzeli najosnovnejše definicije in nato metode, ki iz njih slede, ilustrirali z obravnavo nekaterih znanih izrekov planimetrije. Da ne bo predolgočasno, bomo pustili ob strani rezultate, ki

sodijo v najožji program slehernega učbenika planimetrije in jih najdemo tudi v novem učbeniku, ter raje dokazali nekaj nekoliko zahtevnejših trditev.

Predstavimo sedaj evklidsko ravnino $\mathcal{R}$. Za to potrebujemo najprej *dvodimenzionalen evklidski vektorski prostor,* to je dvorazsežen vektorski prostor, v katerem je definiran *skalarni produkt.* Običajno ga označimo z $\mathcal{E}_2$. Njegove elemente bomo označevali z **a**, **b**, **c**, ... ali tudi še kako drugače. Ravnino $\mathcal{R}$ obravnavamo kot *neprazno* množico; njene elemente bomo označevali z velikimi črkami A, B, C, in jih imenovali točke. Zanje postavimo naslednje aksiome:

I. *Urejenemu paru točk* $(A, B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ *ustreza natanko določeni vektor* $AB \in \mathcal{E}_2$.

II. *Točki* $A \in \mathcal{R}$ *in vektorju* $\mathbf{a} \in \mathcal{E}_2$ *ustreza natanko določena točka* $B \in \mathcal{R}$, *da je* $AB = \mathbf{a}$.

III. *Vsaka trojica točk* A, B, C *zadošča Chaslesovi identiteti*

$$AB + BC + CA = 0$$

Ti aksiomi skupaj z aksiomi prostora $\mathcal{E}_2$ določajo *evklidsko ravnino* $\mathcal{R}$. Iz teh osnov je moč izpeljati vso ravninsko geometrijo.

Omenimo, da je možen tudi splošnejši način obravnave. Če namesto prostora $\mathcal{E}_2$ vzamemo poljuben dvorazsežen vektorski prostor, v katerem ni omejitve s skalarnim produktom, dobimo ob ohranitvi vseh drugih aksiomov splošnejšo *afino ravnino.* Seveda pa tisti izreki, ki so v evklidski ravnini bistveno odvisni od skalarnega produkta, v afini ravnini ne veljajo več.

Pomemben pojem ravninske geometrije je tudi *premica.* Z vso strogostjo bi bilo treba tudi premico obravnavati kot osnovni pojem in z aksiomi urediti odnose med točko in premico, vendar geometrije ne spremenimo, če zaradi enostavnosti obravnavamo premico kar kot množico točk, ki leže na njej. Kot taka je premica natanko opisana, brž ko lahko za vsako točko $T \in \mathcal{R}$ ugotovimo, ali leži na premici ali ne. Tak dober opis nam podaja naslednja definicija:

Pravimo, da leži točka T *na premici* p *skozi točki* A *in* B $(A \neq B)$ *natanko takrat, ko sta vektorja* AT *in* AB *linearno odvisna.*

Definicija je smiselna, saj se takoj vidi, da je $A, B \in p$ in da je premica neodvisna od izbora točk A, B v definiciji (izmed točk premice seveda). Vidimo tudi, da je za določitev premice dovolj poznati dve njeni različni točki.

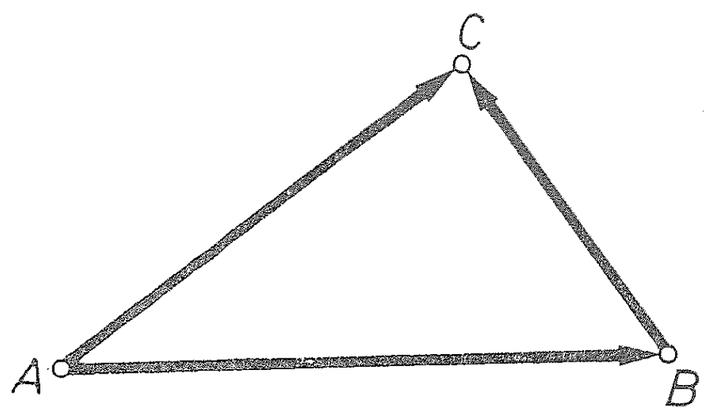
Naj bosta A in B dve različni točki ravnine in p premica, ki poteka skozenju. Iz definicije sledi, da pripada poljubni točki T premice p realno število t, tako da je $AT = t\,AB$; ta preslikava med točkami premice in množico realnih števil je bijektivna. Posebno ime damo množici točk, za katere je $0 < t < 1$. Imenujemo jo *odprta daljica* s krajiščema A in B, če dodamo še točki A in B, pa *zaprta daljica.* Prvo označimo $]AB[$, drugo $[AB]$.

Zahteva po skalarnem produktu omogoča uvedbo pojma *pravokotnosti* v ravnini in *razdalje* med danima točkama ravnine. Razdalja točk A, B ali dolžina daljice s tema krajiščema je dolžina pripadajočega vektorja AB, torej

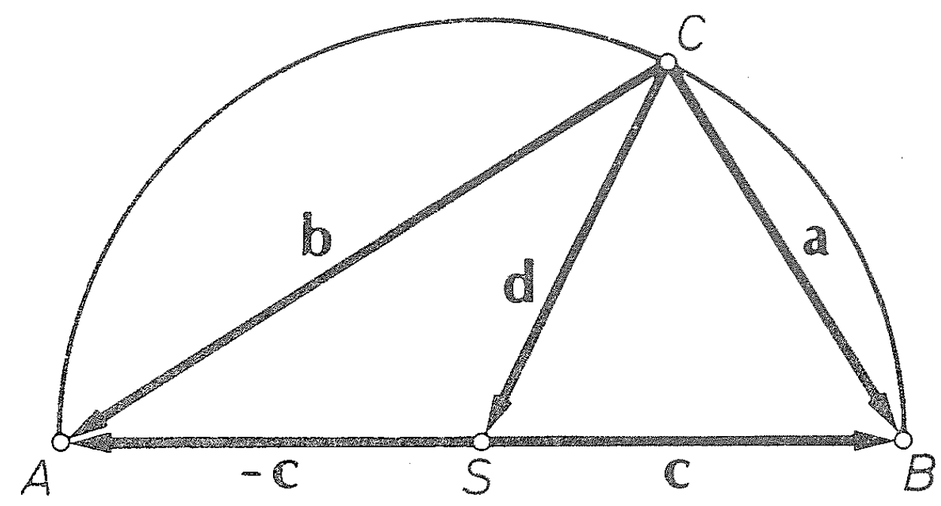
$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{AB \,.\, AB}$$

Vso dosedanjo zgradbo lahko udobno ponazorimo, denimo, na tabli. Ponazoritev je utemeljena v učbeniku, zato jo le opišimo. Ravnino predstavlja

površina table, podaljšana na vse strani, točke so pike in premice ravne črte na tabli. Daljice so ravne spojnice svojih krajišč. Vektor AB, ki po aksiomu I pripada urejenemu paru točk (A, B), ponazorimo z *usmerjeno daljico* z začetno točko A in končno točko B. Označimo jo kar z oznako AB, enako kot vektor sam. Iz Chaslesove identitete sledi, da usmerjena daljica z začetkom in koncem v isti točki predstavlja vektor 0, da usmerjeni daljici z zamenjano začetno in končno točko predstavljata nasprotna vektorja, kakor tudi pravilo za seštevanje usmerjenih daljic (iz $AB + BC = AC$), ki ga predstavimo s sliko 1.



Slika 1



Slika 2

Aksiom II pove, da lahko isti vektor predstavimo še z nešteto usmerjenimi daljicami, saj si lahko eno od krajišč še poljubno izberemo. Dejansko lahko do izomorfizma natanko gledamo na vektorje kot na ekvivalenčne razrede usmerjenih daljic za ekvivalenčno relacijo: usmerjeni daljici sta ekvivalentni, če urejenima paroma njunih krajišč pripada po aksiomu I isti vektor.

Ta ponazoritev nam je lahko v veliko pomoč pri obravnavanju ravninske geometrije, saj iz nazorne slike često dobimo idejo za rešitev problema.

Pogosto si lahko delo poenostavimo tudi z izbiro primernega *koordinatnega sistema* v ravnini. Tega uvedemo preprosto tako, da izberemo na ravnini točko O in jo imenujemo *koordinatni začetek*. Tedaj pripada vsaki točki $T \in \mathcal{R}$ natanko določen vektor OT. Običajno ga označimo z $\mathbf{r}$ in ga imenujemo *krajevni vektor* točke T glede na izhodišče (začetek) O. Če sta A in B dve poljubni točki s krajevnima vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, potem iz Chaslesove identitete sledi, da pripada urejenemu paru (A, B) vektor $AB = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ta vektor je, kar je tudi edino smiselno, neodvisen od izbire koordinatnega izhodišča.

Pripravili smo dovolj osnov, da bi se lahko spoprijeli s spoznavanjem ravninske geometrije, to je, definirali izpeljane pojme (poltraki, polravnine, koti, večkotniki itd.) in navajali ter dokazovali izreke. Vendar smo se že uvodoma domenili, da se bomo temu deloma izognili, saj je vse lepo in pregledno napravljeno v novem učbeniku. Za nadaljnje razumevanje to ne bo nobena ovira, saj gre za znane pojme in trditve, le obravnava je drugačna. Zgolj v ilustracijo navedimo lep primer iz učbenika.

Izrek. Trikotnik je pravokoten natanko takrat, ko je ena njegovih stranic premer očrtane krožnice.

Dokaz: V trikotniku ABC naj bo S središče stranice $]AB[$. Pokazali bomo, da je kot pri C pravi natanko takrat, ko je S tudi središče očrtane krožnice. Označimo situacijo kot na sliki 2. Če označimo $|\mathbf{c}| = c$ in $|\mathbf{d}| = d$, bo S središče očrtane krožnice natanko takrat, ko bo $c = d$. Ker je $\mathbf{a} = \mathbf{d} + \mathbf{c}$ in $\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, sledi iz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = d^2 - c^2$ naša trditev, saj je $\mathbf{a}$ pravokoten na $\mathbf{b}$ natanko takrat, ko je $c = d$.

Cevin, Stewartov in Menelajev izrek

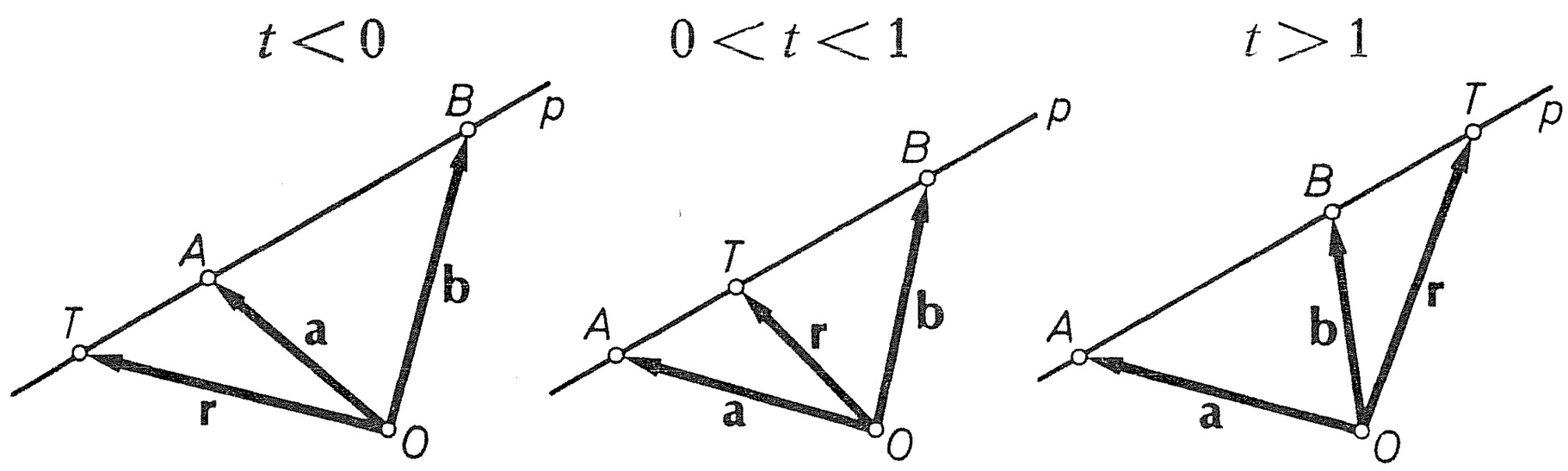
Ogledali si bomo nekaj izrekov, ki so v glavnem posplošitve sorodnih planimetričnih rezultatov, ki iz njih neposredno slede. Pred tem se na delo še nekoliko pripravimo.

Uvedba koordinatnega sistema v ravnini omogoča govoriti o enačbah, ki pripadajo posameznim množicam. Nam bo potrebna le enačba premice p skozi dani točki A in B. Če sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ krajevna vektorja točk A in B in $\mathbf{r}$ krajevni vektor poljubne točke T na premici p, potem se enačba premice glasi

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in \mathbf{R}$$

ali tudi

$$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad s, t \in \mathbf{R} \quad \text{in} \quad s + t = 1$$



Slika 3

Število t določa medsebojno lego točk A, B, T. Za $t = 0$ je $T = A$, za $t = 1$ je $T = B$, za druge vrednosti pa prikažimo položaje kar s sliko (slika 3).

Naj bo sedaj $t = \dfrac{m}{1+m}$, $m \neq -1$ in C pripadajoča točka premice p. Takoj vidimo, da leži C med A in B, če je m pozitiven, in zunaj daljice $[AB]$, če je m negativen. Nadalje je $C = A$ pri $m = 0$ in C se približuje točki B, ko $m \to \infty$. Njen krajevni vektor je

$$\mathbf{c} = \frac{1}{1+m}\mathbf{a} + \frac{m}{1+m}\mathbf{b}$$

Iz preoblikovane zveze

$$\frac{1}{1+m}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \frac{m}{1+m}(\mathbf{b} - \mathbf{c})$$

dobimo še en pomen števila m

$$|m| = |\mathbf{c} - \mathbf{a}| : |\mathbf{c} - \mathbf{b}| = |AC| : |BC|$$

Absolutna vrednost števila m je torej razmerje dolžin odsekov, ki jih točka C ustvarja s točkama A in B na premici p. Vse je v redu tudi v točki B, saj $|AC|/|BC| \to \infty$, ko gre C proti B.

Smemo torej reči, da je m razmerje, v katerem točka C deli usmerjeno daljico AB. Za notranje delilne točke je pozitivno, za zunanje negativno.

Ne spreglejmo še, da je m kvocient koeficienta pri $\mathbf{b}$ s koeficientom pri $\mathbf{a}$ v linearnem razvoju vektorja $\mathbf{c}$ po $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$. Očitno je tudi, da razmerje m točko C natanko določa.

Cevin izrek

Izrek je prvi dokazal leta 1678 italijanski matematik Giovanni Ceva. Seveda je potekalo njegovo dokazovanje drugače, kot bo naše. Pa poglejmo, za kaj gre.

Naj bo dan trikotnik ABC. Vsako spojnico oglišča s točko na nasprotni stranici bomo imenovali *Cevina linija*. Pod stranico pri tem razumemo odprto daljico med dvema ogliščema.

Če narišemo v trikotniku tri Cevine linije, iz vsakega oglišča po eno, potem se lahko sekajo vse tri v isti točki ali pa tudi ne. Vemo, da so take Cevine linije, ki imajo skupno točko, težiščnice pa kotne simetrale in tudi višine. Kaj je tem primerom skupnega? Cevin izrek podaja potreben in zadosten pogoj za to, da imajo tri Cevine linije, ki izhajajo iz vsakega oglišča po ena, skupno presečišče.

Naj bodo K, L, M točke, ki jih Cevine linije ustvarjajo na nasprotnih stranicah $]AB[$, $]BC[$, $]CA[$. Potreben in zadosten pogoj za to, da gredo vse tri linije skozi isto točko, je, da je produkt razmerij, v katerih te točke delijo prizadete stranice, enak 1, torej

$$\frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} = 1 \tag{1}$$

Dokažimo najprej potrebnost pogoja. Naj imajo tri Cevine linije skupno presečišče O, ki ga bomo vzeli za koordinatno izhodišče. Označimo vektorje kot na sliki 4.

Vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ so kot trije ravninski vektorji linearno odvisni, ker pa po konstrukciji točka O ne leži na nobeni izmed nosilk trikotnikovih stranic, so paroma linearno neodvisni. Torej obstajajo števila α, β, γ, vsa tri različna od nič, da je

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$$

Nadalje je $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{a}$, $\mathbf{k} = \varkappa\mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mu\mathbf{b}$ in od tod

$$\mathbf{l} = (-\lambda/\alpha)(\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}), \quad \mathbf{k} = (-\varkappa/\gamma)(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}), \quad \mathbf{m} = (-\mu/\beta)(\alpha\mathbf{a} + \gamma\mathbf{c})$$

Neničelna števila $\varkappa$, λ, μ lahko izrazimo z α, β, γ iz pogojev, da točke K, L, M leže na trikotnikovih stranicah. Tako imamo za λ pogoj $(-\lambda/\alpha)(\beta + \gamma) = 1$ in analogno za ostali števili. Vendar tega niti ne potrebujemo, saj nas zanimajo samo razmerja, v katerih te točke stranice delijo. Točka L deli stranico $]BC[$ v razmerju koeficientov pri $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ in ker je notranja delilna točka, to pomeni

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Enako dobimo

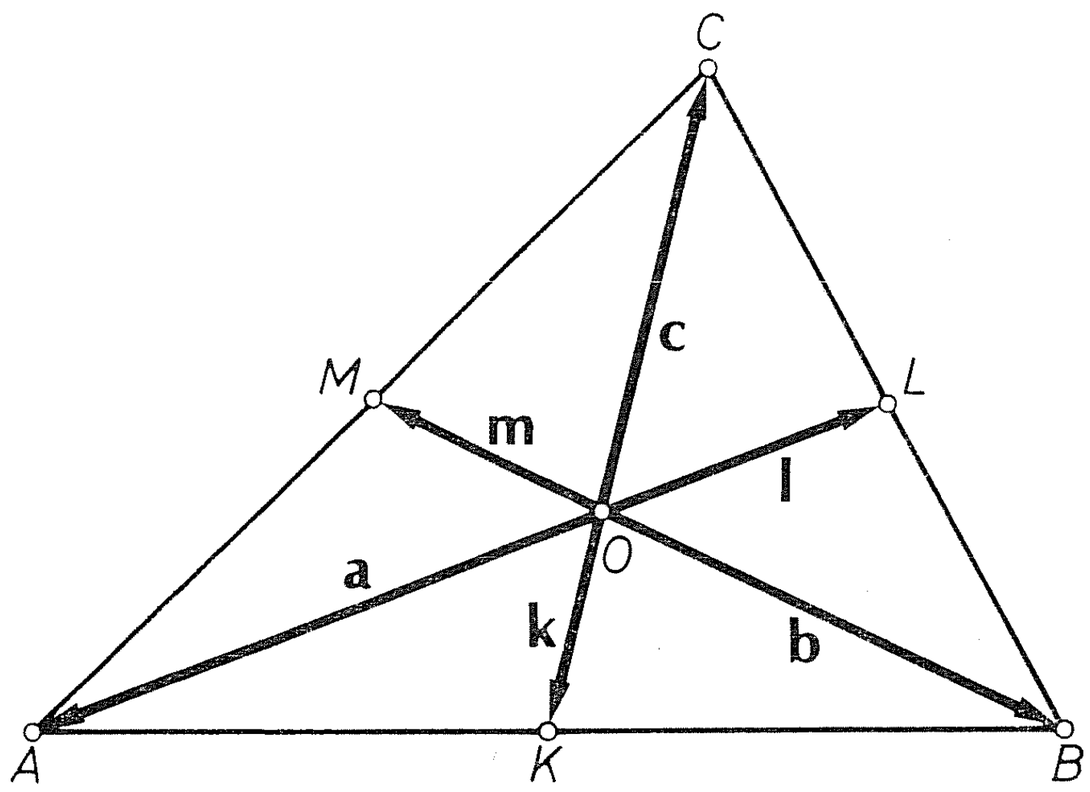
$$\frac{|CM|}{|MA|} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{in} \quad \frac{|AK|}{|KB|} = \frac{\beta}{\alpha}$$

kar skupaj da

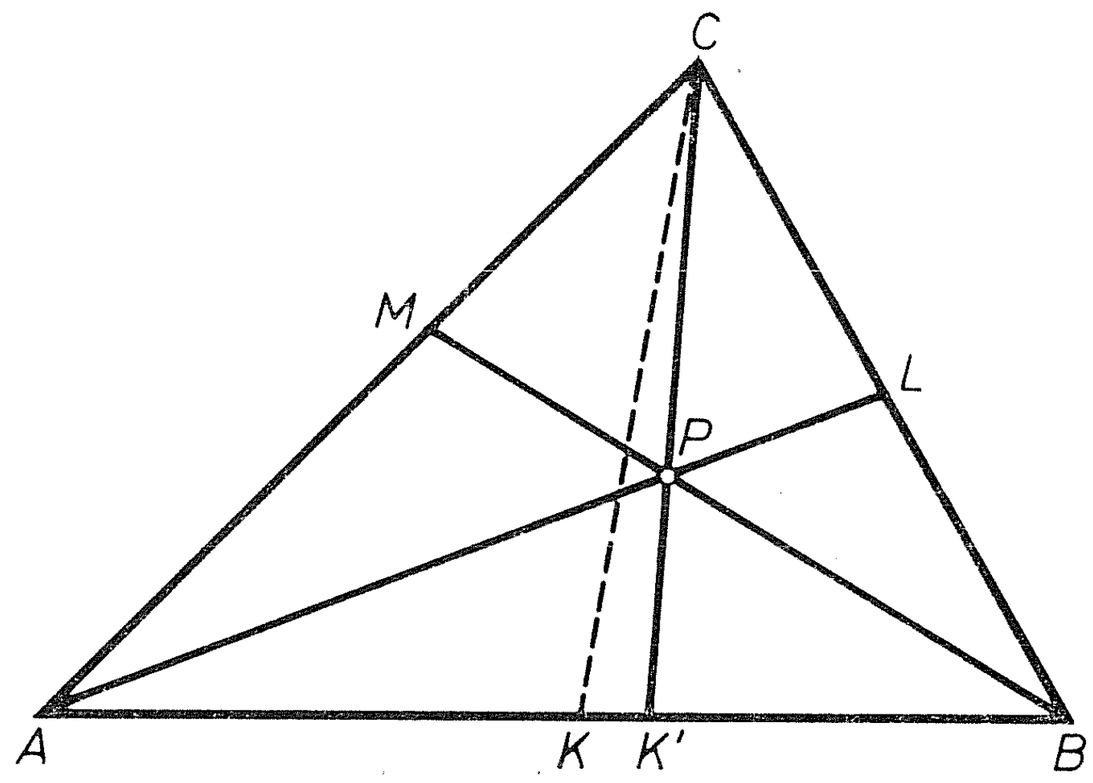
$$\frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} = 1$$

Ko smo tako dokazali potrebnost pogoja, poglejmo še, kako je z njegovo zadostnostjo. Naj bodo $]AL[$, $]BM[$ in $]CK[$ tri Cevine linije, take da izpolnjujejo pogoj (1). Označimo s P presečišče linij $]AL[$ in $]BM[$. Če gre tudi tretja linija $]CK[$ skozi točko P, nimamo več kaj dokazovati. V nasprotnem primeru položimo premico skozi točki P in C. Ta seka stranico $]AB[$ v točki K', pri čemer je $K \neq K'$ (slika 5). Daljice $]AL[$, $]BM[$, $]CK'[$ so tri Cevine linije s skupnim presečiščem. Za ustrezne odseke na stranicah torej velja zveza

$$\frac{|AK'|}{|K'B|} \cdot \frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} = 1$$



Slika 4



Slika 5

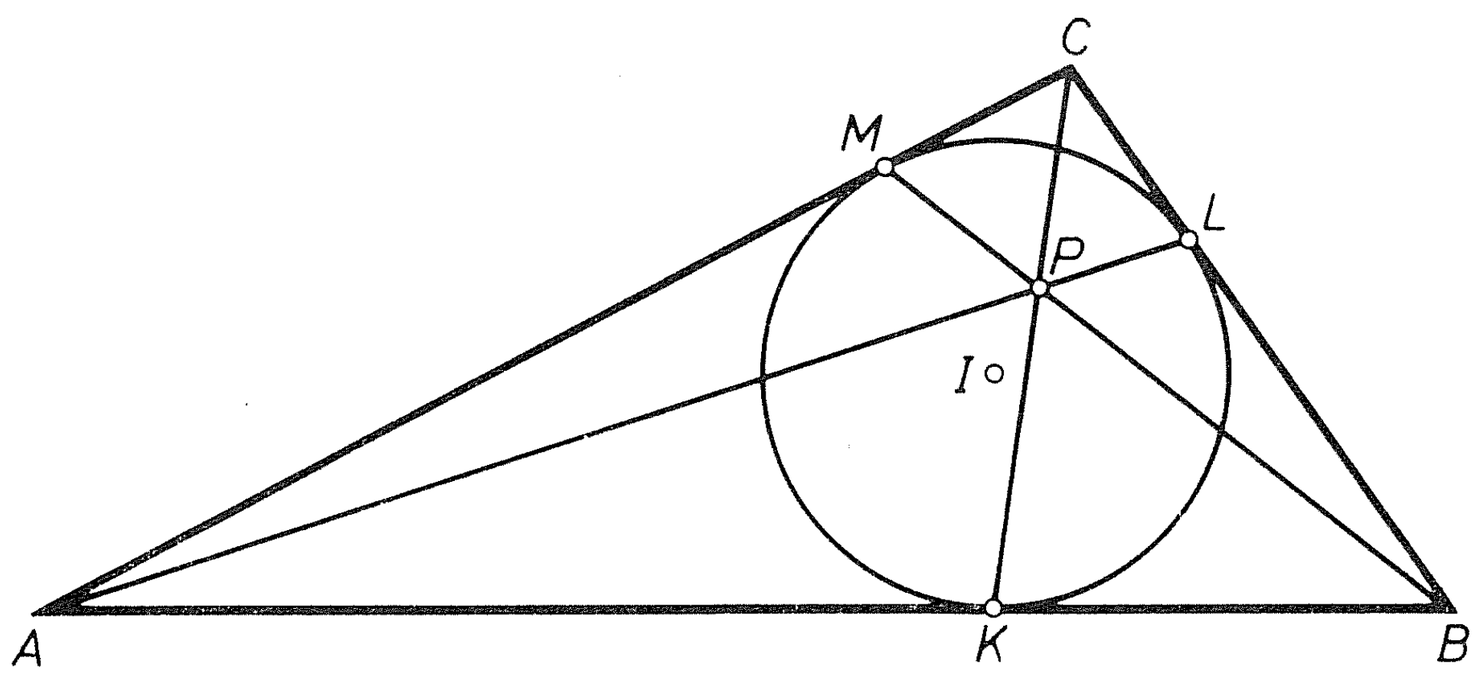
Odtod in iz (1) dobimo

$$\frac{|AK'|}{|K'B|} = \frac{|AK|}{|KB|}$$

Absolutni vrednosti razmerij, v katerih delita točki K oziroma K' daljico AB, sta torej enaki, ker pa sta obe točki notranji delilni točki, pomeni to tudi enakost razmerij samih. Vemo, da delilno razmerje delilno točko natanko določa, torej je $K = K'$, kar je protislovje. Primer, da bi pri izpolnjenem pogoju (1) tretja linija ne šla skozi presečišče prvih dveh, torej sploh ne more nastopiti.

Izrek je tako v celoti dokazan.

Uporaba Cevinega izreka je široka. Z njim lahko na pamet ugotovimo, da imajo težiščnice skupno presečišče ali da gredo simetrale trikotnikovih kotov



Slika 6

skozi isto točko, obenem pa je tudi uspešno dokazovalno sredstvo v planimetriji, posebno v teoriji pedalnih trikotnikov.

Tu za njegovo ilustracijo poglejmo le neko zanimivo trikotnikovo točko, o kateri govori *Gergonneov izrek* (zgodnje 19. stoletje): *Spojnice, ki vežejo oglišča trikotnika z dotikališči včrtanega kroga, gredo skozi isto točko.* To točko imenujemo *Gergonneova točka* danega trikotnika (slika 6). Trditev preprosto dokažemo. Ker je $|AK| = |AM|$, $|BK| = |BL|$ in $|CL| = |CM|$, je

$$|AK| \,.\, |BL| \,.\, |CM| = |MA| \,.\, |KB| \,.\, |LC|$$

odkoder sledi

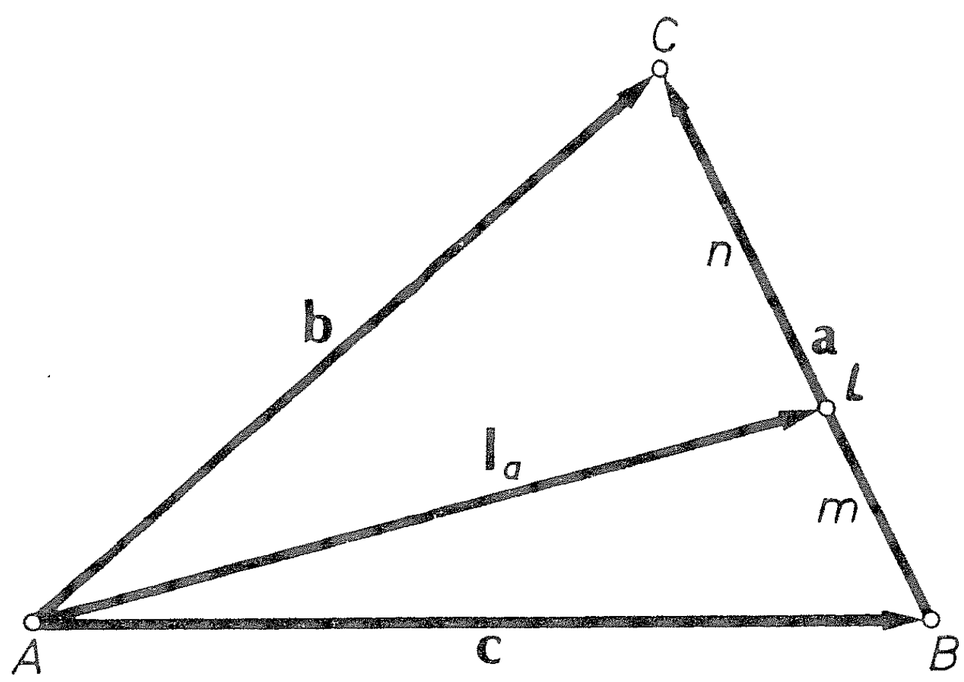
$$\frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} = 1$$

Stewartov izrek

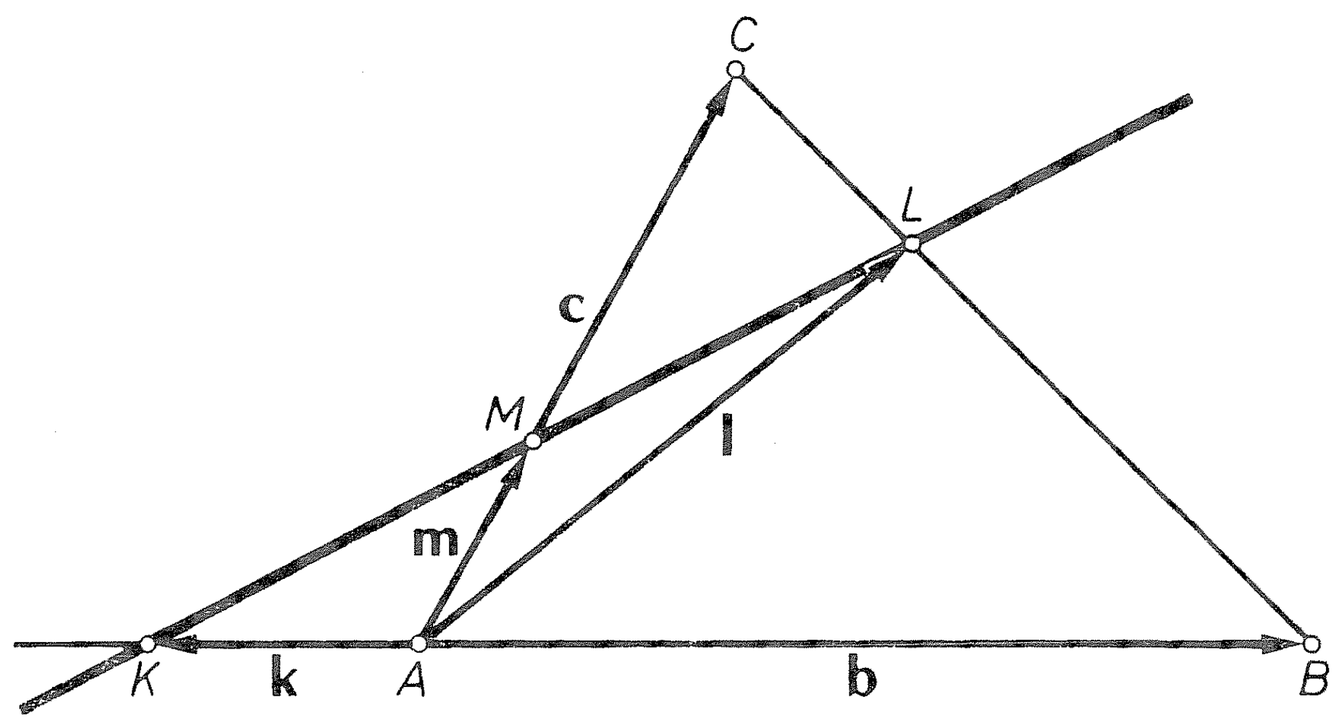
Prvi ga je objavil leta 1746 Maclaurinov učenec Matthew Stewart. Izrek izraža dolžino Cevine linije s trikotnikovimi stranicami in z odsekoma, ki ju linija ustvarja na obravnavani stranici.

Označimo trikotnik kot na sliki 7. Naj bosta m in n dolžini odsekov $]BL[$ in $]LC[$ in $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$, $c = |\mathbf{c}|$, $l_a = |\mathbf{l}_a|$. Imamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad \text{in} \quad a = m + n$$



Slika 7



Slika 8

Vektorja $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ sta linearno neodvisna, torej lahko pišemo $\mathbf{l}_a = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$. Ker točka L leži na premici skozi B in C, je $\alpha + \beta = 1$ in ker deli BC v razmerju $m : n$, velja $\alpha : \beta = m : n$. Dobimo

$$\mathbf{l}_a = (m\mathbf{b} + n\mathbf{c})/a$$

in

$$l_a^2 = (m^2b^2 + n^2c^2 + 2mn\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})/a^2$$

Po preoblikovanju

$$\begin{aligned} al_a^2 &= [m(m+n)b^2 + n(m+n)c^2 - mn(b^2 - 2\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c} + c^2)]/a = \\ &= [mab^2 + nac^2 - mn(\mathbf{b} - \mathbf{c})^2]/a \end{aligned}$$

sledi Stewartov izrek

$$al_a^2 = mb^2 + nc^2 - mna$$

Menelajev izrek

Potrebnost pogoja, ki nastopa v tem izreku, je uvidel že Menelaj iz Aleksandrije, pravo bistvo izreka pa je izluščil Carnot in ga uporabil za osnovo v svoji teoriji transverzal. Oglejmo si preprost dokaz izreka, kot sledi iz našega modela geometrije.

Naj bo ABC poljuben trikotnik in K, L, M točke na nosilkah njegovih stranic $]AB[$, $]BC[$, $]CA[$, različne od oglišč. Menelajev izrek govori o potrebnem in zadostnem pogoju za to, da so točke K, L, M kolinearne. Enega od primerov, ki lahko nastopijo, prikazuje slika 8.

Označimo s $\varkappa$ razmerje, v katerem deli točka K usmerjeno daljico AB, z λ razmerje, v katerem deli L daljico BC, in z μ delilno razmerje, ki pripada točki M glede na CA. Če si izberemo koordinatno izhodišče v ogliščU A in označimo posamezni točki pripadajoči krajevni vektor z ustrezno malo črko, imamo, ker je $\mathbf{a} = 0$,

$$\mathbf{k} = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa}\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{1 + \lambda}\,\mathbf{b} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\,\mathbf{c}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{1 + \mu}\,\mathbf{c}$$

kar da

$$\mathbf{l} = \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \frac{1 + \varkappa}{\varkappa}\,\mathbf{k} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot (\mu + 1)\mathbf{m}$$

Točke K, L, M bodo kolinearne natanko takrat, ko bo vsota koeficientov v tem razvoju vektorja $\mathbf{l}$ enaka 1. Torej

$$\frac{1}{1 + \lambda} \cdot \frac{1 + \varkappa}{\varkappa} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot (\mu + 1) = 1$$

odkoder sledi vsebina *Menelajevega izreka.*

$$\varkappa\,\lambda\,\mu = -1$$

Iz izreka neposredno sledi, da poljubna premica v ravnini trikotnika bodisi ne seka nobene izmed trikotnikovih stranic bodisi seka natanko dve, ker je le tako lahko produkt ustreznih razmerij negativen. To pa ni nič drugega kot *Paschev izrek.*

Za ilustracijo omenimo še naslednjo trikotnikovo lastnost, ki sledi iz Menelajevega izreka. Simetrale zunanjih trikotnikovih kotov sekajo nosilke trikotnikovih stranic v treh kolinearnih točkah. Trditev lahko uvidi na pamet bralec sam.

Na seminarju smo obravnavali tudi problem skladnosti in podobnosti v evklidski ravnini. O tem bo v Obzorniku izšel samostojen članek.

Obzornik mat. fiz. 28 (1981) 1

DIDAKTIČNO METODIČNA ZASNOVANOST IN PREGLED VSEBIN UČBENIKA ZA MATEMATIKO S POUDARKOM NA POVEZAVI GEOMETRIJE Z ALGEBRO

FRANCE KRIŽANIČ

Math. Subj. Class. (1981) 97 A 99

Članek najprej opravi z didaktiko in z metodiko, potem pa poda itinerar skozi tečaj matematike za prvi letnik srednjega izobraževanja, kakršnega predlaga novi učbenik. Vodič skozi snov je kar premica. Srečamo jo kot množico realnih števil, kot vektorski prostor, kot podmnožico na afini in na evklidski ravnini. Nazadnje, v koordinatnem zapisu, nas pospremi še v analitično geometrijo in v linearno programiranje. Na koncu članek zaupno izda, kako je bil Ohmov zakon kriv, da so grupe prodrle v prvo poglavje.

THE DIDACTIC AND METHODOLOGICAL SCHEME AND A SURWAY OF THE CONTENTS OF THE TEXT-BOOK FOR MATHEMATICS, WITH EMPHASIS ON THE CONNECTION BETWEEN GEOMETRY AND ALGEBRA

Firstly, the article deals shortly with didactics and methodology, and then describes the contents of mathematics for the first class of "directed education" (secondary education), as proposed by the new text-book. The guide through the material is the stright line. We meet it as the set of real numbers, as a vector space, as a subset of the affine and euclidean plane. Finally, it accompanies us to analytic geometry and linear programming. The article also discloses confidentially that the Ohm's law was responsible for the appearence of groups in the first chapter of the text-book.

Priznati moram, da je naslov mojega prispevka kolektivno delo, ustvarjeno v Zavodu za šolstvo. Sam se nerad spuščam v didaktiziranje, pa tudi obvladam ga ne. Kar po pravici povem: didaktiki kot nauku in sistemu ne zaupam. Najraje bi se ji izognil, toda naslov me izziva, moram nadaljevati, moram poskusiti, moram tvegati, moram iskati, na koncu vseh koncev moram najti podučivni zapopadek.

Veliko šolskih reform je obletelo naš planet v povojnih desetletjih. Tudi k nam so privršale, nismo zaostajali. Nekaj teh je zajelo šolstvo v celoti, druge spet so se lotile posameznih predmetov. Delijo pa se te reforme v dve disjunktni množici, v manjšo in v večjo. Ločnica med njima je odnos do učitelja. Manjšina gradi šolo na učitelju, večina postavlja šolo proti učitelju. Sam pripadam manjšini, zato dovolite, da strnem nekaj njenih izhodišč. Za dovoljenje prosim, ker so naslovljena bolj na organe in telesa prosvetnih oblasti kot pa na zbrano poslušalstvo. Najprej naj prisluhnejo prvemu:

DAJTE MLADINI ZADOVOLJNEGA IN SPOČITEGA UČITELJA.

Le od takega, nepreobremenjenega in neiznorjenega učitelja bomo lahko zahtevali tudi strokovno neoporečnost in gorečnost. Ne vem, kako je z drugimi predmeti, za matematiko velja:

VSAKDO LAHKO UČI MATEMATIKO LE TAKO, KAKOR JO RAZUME.

Zato so lahko vsi napori za višjo raven pouka usmerjeni le v boljše učiteljevo razumevanje. Seveda lahko njihove učinke pričakujemo šele, ko je izpolnjen prvi pogoj. Novi zakon o usmerjenem izobraževanju za to že ve. V svojem 195. členu predpisuje najvišjo dovoljeno obremenitev. Zastavljena zgornja meja, 23 ur na srednji, 11 na visoki šoli, je še vedno strašna, toda prvič je v naših gradivih zapisana zgornja meja. Zase na primer vem, da je že 9 tedenskih ur predavanj na univerzi smrtna doza, ob 23 tedenskih urah na srednji šoli tudi ne moremo pričakovati več kot ponavljanje že osvojene (ali pa tudi ne) plošče. Dogovorimo se, da bomo zakon smiselno uporabljali, da bomo v predpisani zgornji meji našli tudi mero za kakovost šole:

Večja ko je razlika med predpisano zgornjo mejo in resnično obremenitvijo učitelja, kvalitetnejši utegne biti pouk.

Na tem sodilu bi moral temeljiti vsak smotrn razvojni načrt za naše šolstvo. Z njim bi lahko ocenjevali delo ravnateljev, Zavoda za šolstvo, izobraževalnih skupnosti, strokovnih in družbenih svetov, vseh pač, ki se tako ali drugače ukvarjajo z usodo šolstva in izobrazbe.

Utegne biti, sem zapisal, ker gre za zunanje, očitno samo potrebne pogoje, ki jih terja prvo vodilo. Do zadostnih nas bo pripeljalo drugo, kako je učitelj v stroki podkovan, kako je zanjo vnet. V razredu je učitelj na milost in nemilost prepuščen svojemu znanju, nobenih didaktičnih pravil ne more biti, ki bi omogočala poučevanje tistih poglavij, ki jih učitelj ni osvojil. Osvojil pa pomeni več kot razumel, se naučil, obvladal. Osvojil pomeni, da je znanje v sebi tako prekuhal, da ga je sprejel za svoje, da ga rahlo razdaja neposredno iz samega sebe. Didaktični pripomočki — učbenik, ravnatelj, mentor, svetovalec Zavoda za šolstvo — so le pomagala, osnovnega poustvarjalnega napora pa učitelja ne more nihče razbremeniti. In tudi učencu ne more noben didaktični trik nadomestiti tiste radosti učenja, tistega notranjega zadovoljstva, zadoščenja in navdušenja, s katerim ga lahko navda sodoživljanje poustvarjanja.

O metodiki sem se dovolj razpisal že pred leti v Vzgoji in izobraževanju, takrat ko so bile v modi smernice. Naj ponovim, kakor je bilo v rokopisu, brez stilističnega popravka:

Kaj pa metodika? Ali ni zato tu, da pomaga učiti tudi neukemu? Ali ni svoj »kako« izbrusila tako umetelno, da je »kaj« že povsem nepotreben? Ali ni predolgotrpno pripravljati učitelje, ki bi suvereno ravnali z učnimi pripomočki? Ali niso cenejši in preprostejši pripomočki, ki vodijo učitelje? Od ure do ure: kje a, kje b, kam z roko, kam z nogo, s kakšnim naglasom in z glavo sklonjeno kako.

Ne, tu se naše poti ločijo. Jaz se bom s tako metodiko vse življenje tepel, vam se bo otepala.

Naslednja reč, ki me v naslovu zbada, je pregled vsebin. Doslej je bila v navadi ednina: vsebina in ne vsebine. Med ednino in množino zija globok spoznavnoteorijski prepad. »Vsebina« govori o notranji povezanosti snovi, »vsebine« jo razbijajo. Z vidika uprave in služb so seveda »vsebine« priročnejše, dajo se odkljukati, zvenijo kot »veščine«.

Dosedanji pouk matematike na gimnazijah je v prvih dveh razredih še poznal dve vsebini, tekel je po dveh tirih, algebrskem in geometrijskem. Pred novim učbenikom je bila postavljena naloga: strniti matematiko prvih razredov v eno samo, povezano vsebino. Zato bom besedo še naprej uporabljal v ednini.

Kolegi sopredavatelji bodo na predlagano vsebino pogledali iz različnih zornih kotov. Moja naloga pa je, skoznjo potegniti kako rdečo nit. Kaj je v ta namen primernejše, kakor je premica!

Premico srečamo in potem srečujemo v eni sami podobi, kot premico realnih števil* $\mathbb{R}$. Samo po sebi ni to nič novega. Realna števila smo si že prej predstavljali s točkami na premici, v geometriji smo tudi hiteli k uvedbi števil. V novem sožitju analize in geometrije opravimo to delo enkrat samkrat. Z definicijo

$\mathbb{R}$ *je poln urejen obseg*

povemo o premici vse, kar potrebujemo o njej v geometriji. Ne morem pa dovolj poudariti, kako pomembna za ves naš tečaj matematike je intuitivna pot do te definicije. Poudariti pa moram, ker se bojda tej poti radi izognete. Naj vas opozorim na postaje ob njej: geometrijska slika racionalnih števil, vrzeli med racionalnimi točkami, desetiška številka, enkrat periodična, drugič ne. Pa še Arhimedov izrek tiči za vsem skupaj. Predstava o približkih, o natančni zgornji meji množice realnih števil je osnova za vse analitične izreke, za naivno uvajanje odvoda, ploščine in integrala v drugem razredu. V novem učbeniku se ta poglavja ne ločijo dosti od starega, so pa napisana in narisana malce bolj vsiljivo; morda bo le kdo popustil in ta del povedal otrokom živó. Ves čas, do zadnjega razdelka je geometrijska slika le intuitivni pripomoček, v zadnjem razdelku pa odnose prevržemo. Množico realnih števil imamo z definicijo strogo zasnovano, z njo opredelimo premico in geometrijske odnose na njej.

V četrtem poglavju se s premico posebej ne ukvarjamo. Omenimo pa ga le, zaradi nekaterih pripomočkov. Vse poglavje plava v intuitivnih vodah, dokler ne pristane ob trdni skali, vektorskem prostoru. Za nazorno rabo spremljamo vektorje na ravnini, doživimo osnovne tri operacije: $m\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$. Seznanimo se z bazo in z razsežnostjo prostora. Na ravnini izberemo, na primer, bazo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, ki jo sestavljata pravokotna smerna vektorja

$$\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{i} \,.\, \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{j} \,.\, \mathbf{j} = 1 \tag{1}$$

Poljuben vektor $\mathbf{r}$ razvijemo po bazi, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Vsoto in skalarni produkt dveh vektorjev izrazimo s koordinatami

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}_1 \,.\, \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{2}$$

Ravnino, to boste še videli in slišali, definiramo po tej pripravi kot dvorazsežni realni afini prostor. Poljubnemu urejenemu paru točk (A, B) na ravnini ustreza vektor AB iz dvorazsežnega vektorskega prostora. Usmerjena daljica AB, pravimo včasih, je le predstavnik tega vektorja.

Premico p skozi točki A, B, $A \neq B$, definiramo kot množico točk: $T \in p \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ *AT kolinearen AB*, ali

$$AT = t\,AB \tag{3}$$

---

* Številske množice običajno označimo z dvopoteznimi črkami $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. V učbeniku so označene s polkrepkimi **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**. Tiskarna žal nima ustreznih znakov.

Vektor $\mathbf{n}$ je pravokoten na premico skozi točki A in B, če je $\mathbf{n} \,.\, AB = 0$. Za vsako točko $T \in p$ je tedaj

$$\mathbf{n} \,.\, AT = 0 \tag{4}$$

Tudi v nasprotni smeri bi šlo: naj bo $\mathbf{n} \perp AT$. Točka T, ki zadošča (4), leži na premici skozi A, B. Za dokaz razčlenimo $AT = s\mathbf{n} + t\,AB$, pomnožimo skalarno z $\mathbf{n}$, zvemo $s = 0$ in (3).

Spotoma smo dokazali: dva ravninska vektorja sta pravokotna na tretjega natanko takrat, ko sta linearno odvisna (kolinearna).

Za zgled pokažimo, drugače kot v učbeniku, kako je s presečiščem dveh premic. Prva naj gre skozi točki A, B, druga skozi C, D. Prvo premico zapišimo z enačbo (3), drugo z normalno enačbo $\mathbf{n} \,.\, CT = 0$. Vektor $\mathbf{n}$ je pravokoten na drugo premico, $\mathbf{n} \,.\, CD = 0$. Brž ko je T na obeh premicah, razčlenimo $CT = AT - AC = t\,AB - AC$ in skalarno pomnožimo z $\mathbf{n}$. Tako dobimo enačbo za parameter t

$$(\mathbf{n} \,.\, AB)t = \mathbf{n} \,.\, AC$$

Dvoje je mogoče: $\mathbf{n} \,.\, AB \neq 0$ ali $\mathbf{n} \,.\, AB = 0$. V prvem primeru ima enačba natanko eno rešitev, presečišče premic je natanko določeno. V drugem primeru sta AB in CD kolinearna; premici, pravimo, sta vzporedni. Brž ko sta premici vzporedni, moramo ločiti $\mathbf{n} \,.\, AC \neq 0$ in $\mathbf{n} \,.\, AC = 0$. V prvem primeru premici nimata skupne točke, v drugem imata vse točke skupne.

Korak kasneje uvedemo vektorsko soredje na ravnini: Izberemo izhodišče O. Točki T priredimo krajevni vektor $\mathbf{r} = OT$. Točki A in B naj imata krajevna vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$. Po Chaslesu je tedaj $AB = OB - OA = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ in prav tako $AT = \mathbf{r} - \mathbf{a}$. Definiciji (3), (4) zapišemo tedaj kot enačbi premice, enkrat parametrično

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{5}$$

drugič normalno

$$\mathbf{n} \,.\, (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{6}$$

V normalni enačbi radi izberemo za $\mathbf{n}$ smerni (normiran) vektor, vektor z dolžino 1. Tako naj bo tudi poslej. Izraz $\mathbf{n} \,.\, AT$ ima pomen za vsako točko T na ravnini. Z njim razdelimo ravnino v tri množice: premico, kjer je $\mathbf{n} \,.\, AT = 0$, in dva njena bregova, na pozitivnem je $\mathbf{n} \,.\, AT > 0$, na negativnem $\mathbf{n} \,.\, AT < 0$. Bregova sta odprti polravnini. Predznak (natančneje rečeno signatura) izraza $\mathbf{n} \,.\, AT$ pove, kako leži T proti p, na njej ali na enem njenih bregov. Absolutna vrednost izraza ima tudi lep pomen, z njo izmerimo razdaljo med T in p

$$d(T, p) = |\mathbf{n} \,.\, AT| \tag{7}$$

V zadnjem poglavju se lotimo premice z vsemi analitičnimi pripomočki. Izberemo izhodišče koordinatnega soredja O in še vektorsko bazo $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. Koordinati vektorja $\mathbf{r}$ imenujmo x, y, koordinati vektorja $\mathbf{n}$ pa a, b. Označimo še $\mathbf{n} \,.\, \mathbf{a} = c$. S koordinatami izrazimo $\mathbf{n} \,.\, AT = \mathbf{n} \,.\, \mathbf{r} - \mathbf{n} \,.\, \mathbf{a} = ax + by - c$. Normalno enačbo premice zapišemo

$$ax + by - c = 0 \qquad a^2 + b^2 = 1 \qquad c \geqq 0 \tag{8}$$

$c = 0$ natanko takrat, ko gre premica skozi izhodišče, z zahtevo $c \geqq 0$ pa poskrbimo, da zdrkne izhodišče s premice na negativni breg. Enačbi bregov, polravnin, sta pač

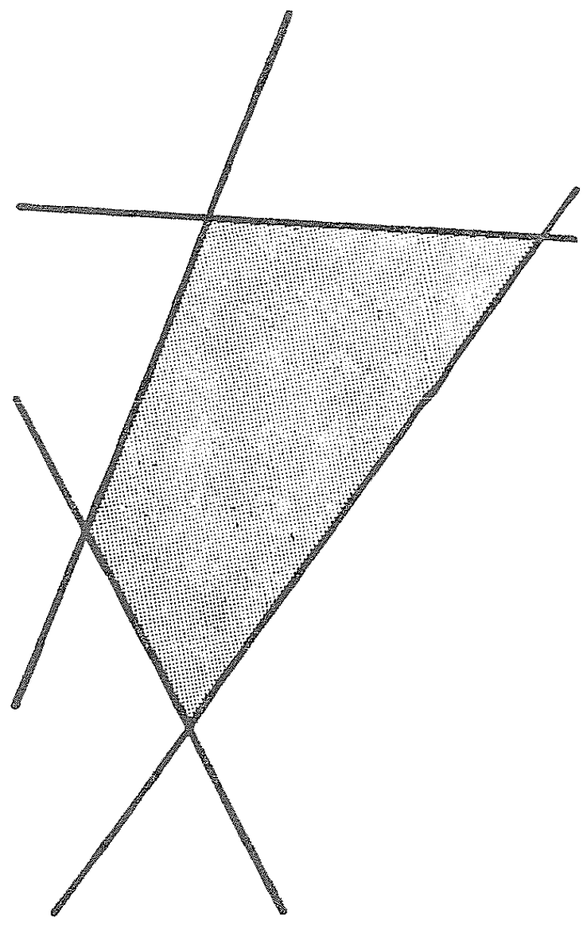
$$ax + by - c > 0 \qquad ax + by - c < 0 \tag{9}$$

Tu smo že na dobro uhojeni poti. Kaj srečamo na njej? Najprej linearno funkcijo, ki jo zapišemo v dveh delih

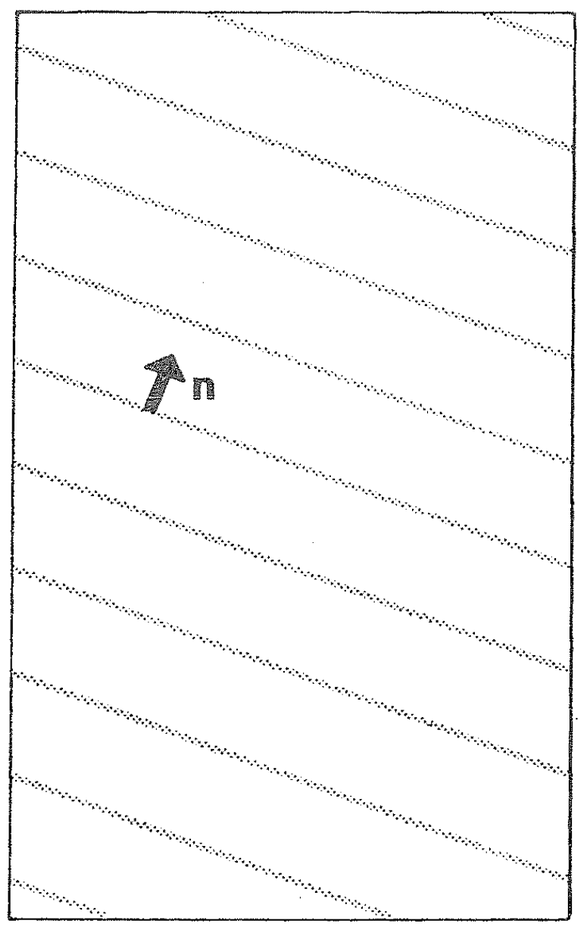
$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f\colon x \mapsto kx + n \tag{10}$$

Prvi, s svobodno puščico, pove, med katerima množicama slika funkcija, drugi, z oprto puščico, pa, kaj napravi iz posamezne točke. V premem produktu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ poiščemo graf funkcije, množico parov $(x, f(x))$. Točka (x, y) leži na grafu funkcije f natanko takrat, ko zadošča enačbi grafa $y = f(x)$ ali $y = kx + n$. Malo bolj natanko kot nekdaj ločimo torej med funkcijo — ta je preslikava $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — med funkcijsko vrednostjo $f(x)$ in enačbo grafa $y = f(x)$. Vsebina pa ostaja taka kot prej. Komur je ljubše, lahko reče vsebine.

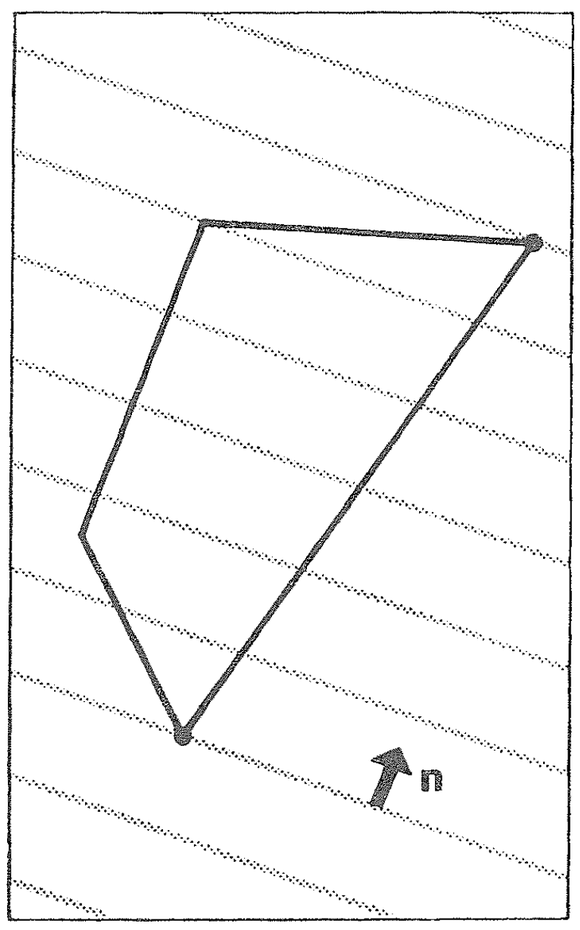
Vzamemo dve premici in vprašamo po njunem presečišču — analitično obravnavamo sistem dveh enačb z dvema neznankama.



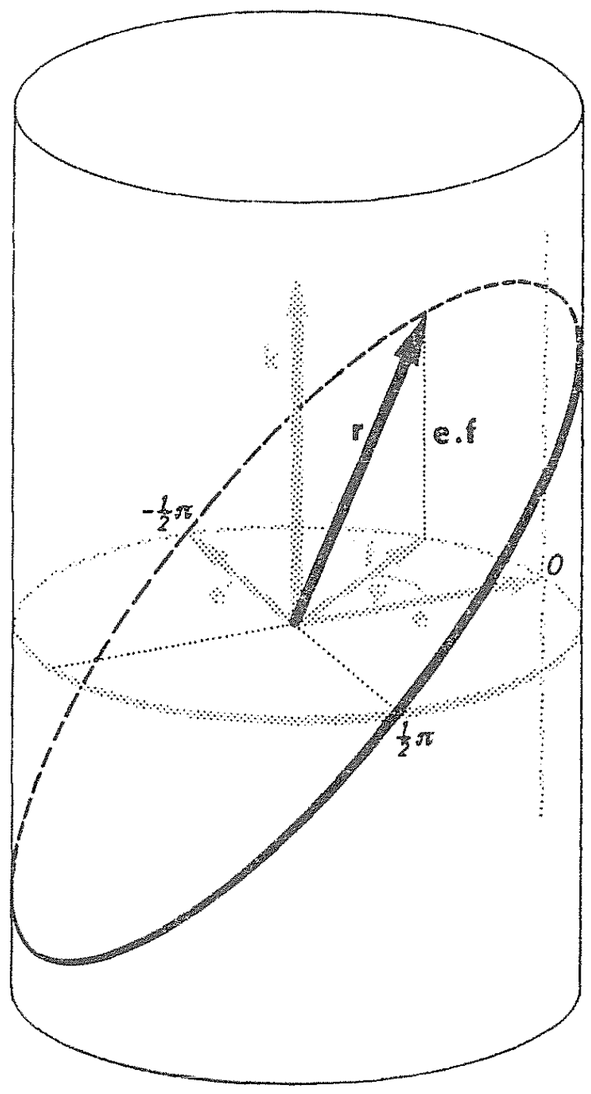
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Vzamemo več polravnin in vprašamo po njihovem preseku — obravnavamo sistem več neenačb z dvema neznankama. Rešitve tega sistema sestavljajo izbočeni večkotnik. Poiskati njegova oglišča je že kar maturitetna naloga, za vsako moramo rešiti sistem dveh enačb z dvema neznankama.

Za levo stranjo normalne enačbe (8) lahko vidimo skrito linearno funkcijo dveh neodvisnih spremenljivk

$$f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f\colon (x, y) \mapsto ax + by - c \tag{11}$$

Graf te funkcije bi morali risati v trorazsežnem prostoru $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$, sestavljajo ga trojke (x, y, z), ki zadoščajo enačbi grafa $z = ax + by - c$. V drugem razredu bomo videli, da je graf funkcije (11) ravnina. V prvem si pomagamo do predstave o funkciji (11) drugače. Rišemo nivojnice, na nivojnici ima funkcija stalno vrednost, $f(x, y) = K$. Nivojnice linearne funkcije (11) sestavljajo šop vzporednih premic

$$ax + by - c = K$$

S puščico nakažimo še, v kateri smeri funkcijska vrednost narašča. Za nalogo: puščica kaže v smeri normale $\mathbf{n}$ s koordinatama (a, b).

Bodimo še bolj maturitetni. Sestavimo obe sliki in že lahko zastavimo vprašanje: kakšne vrednosti lahko zavzame funkcija (11) na izbranem večkotniku. Iz slike kar lepo vidimo: vse med najmanjšo in največjo. Najmanjšo in največjo vrednost pa zavzame nekje na robu večkotnika, v oglišču ali vzdolž stranice.

Tako smo, povejmo odkrito, iznašli linearno programiranje. Pa nič zato.

2

Vrnimo se v geometrijsko poglavje. Realna premica **R** nam mora odslužiti še eno tlako, pomagati nam mora pri merjenju lokov in kotov. V sintetični geometriji je merjenje kotov sitna reč, za njim tiči preveč topologije. Zato je boljši zasukan vrstni red: najprej si pripravimo merilnik in računalnik za kote, potem se šele lotimo merjenja kotov in računanja z njimi.

Za pripravo potrebujemo ločno mero, dolžino krožnega loka. To lahko, naivno res, a vendar lepo definiramo, če smo dovolj dobro pogledali v zgradbo **R**. Zato še enkrat opozarjam: minimizirajte program, kot hočete, obsega **R** ne izvrzite.

Ko vemo za ločno dolžino, pripravimo kotomerno krožnico $\mathcal{K}$, s polmerom 1, in nanjo preslikamo **R**. Preslikavo

$$\mathbf{R} \to \mathcal{K} \tag{12}$$

zasnujemo takole: od začetne točke $\Omega \in \mathcal{K}$ začnemo meriti krožni lok, gremo naokrog in na $\mathcal{K}$ preslikamo vse točke z intervala $[0, 2\pi[$. Nazorno si predstavimo to z nitjo, ki jo navijamo na krožnico. Dodajmo število 2π, ustrezna točka je spet Ω. Potem pa nit **R** sučimo v eno in drugo stran, dokler ne preslikamo vse premice **R** na $\mathcal{K}$. Preslikava seveda ni injektivna. V točko Ω se preslikajo vsi celi večkratniki števila 2π. V splošnem: v vsako točko na krožnici se preslika celo zaporedje števil, ki se eno od drugega ločijo za cel večkratnik 2π.

Preslikavo (12) si lahko predočimo še z drugo sliko: premico **R** v pravšnjem razmerju raztegnemo, zvijemo v vijačnico, potem pa vijačnico projiciramo na krožnico. Na tej sliki lepo vidimo vsa števila, ki leže nad isto točko krožnice. V topologiji pravimo, da je **R** krovni prostor za $\mathcal{K}$.

Brž ko smo realna števila naselili na kotomerni krožnici, napravimo iz nje Abelovo grupo. Elementom te grupe pravimo usmerjeni loki (ali kar usmerjeni koti). S točkami na kotomerni krožnici računamo kot z realnimi števili po modulu 2π. Iz vsega zaporedja realnih števil, ki leže nad isto točko kotomerne krožnice (nad istim usmerjenim lokom), izberemo predstavnika, ki leži na intervalu $]-\pi, \pi]$. Usmerjena kota seštejemo tako, da seštejemo njuna predstavnika, od vsote pa odvržemo tolikšen večkratnik 2π, da ji najdemo predstavnika na $]-\pi, \pi]$. Tako smo iz kotomerne krožnice napravili kotomerno ali kar *kotno grupo*.

V učbeniku teče beseda bolj počasi, da se delo z usmerjenimi koti dobro usede. V bistvu pa gre le za kotno grupo, ki jo lahko, če hočete, zapišemo kot faktorsko grupo $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\,2\pi$.

S pripravljeno kotomerno krožnico se lotimo kotov v onem pomenu besede. Kotu priredimo urejeni par krakov (p, q), zapišemo ga kot usmerjeni kot pq. Okrog vrha kota očrtamo kotomerno krožnico. Zasučemo jo tako, da se s krakom p seče v točki 0. Točka, v kateri seče krožnico krak q, je mera za kot pq. Kot pq je lahko pozitiven ali negativen. Tudi je na dlani, kako sešteti kota pq in qr.

Kotu pq priredimo še drugo realno število. Na kraku p izberemo smerni vektor $\mathbf{e}$, na kraku q smerni vektor $\mathbf{f}$ in kotu priredimo število $\mathbf{e} \,.\, \mathbf{f}$

$$\varphi \mapsto \mathbf{e} \,.\, \mathbf{f} \tag{13}$$

Ker sta $\mathbf{e}$ in $\mathbf{f}$ smerna vektorja, je $\mathbf{e} \,.\, \mathbf{f}$ projekcija enega na drugega, na primer $\mathbf{f}$ na $\mathbf{e}$.

Kaj pa v nasprotni smeri? Število $\mathbf{e} \,.\, \mathbf{f}$ kota ne določa natanko, isto število ustreza dvema, nasprotnima si kotoma.

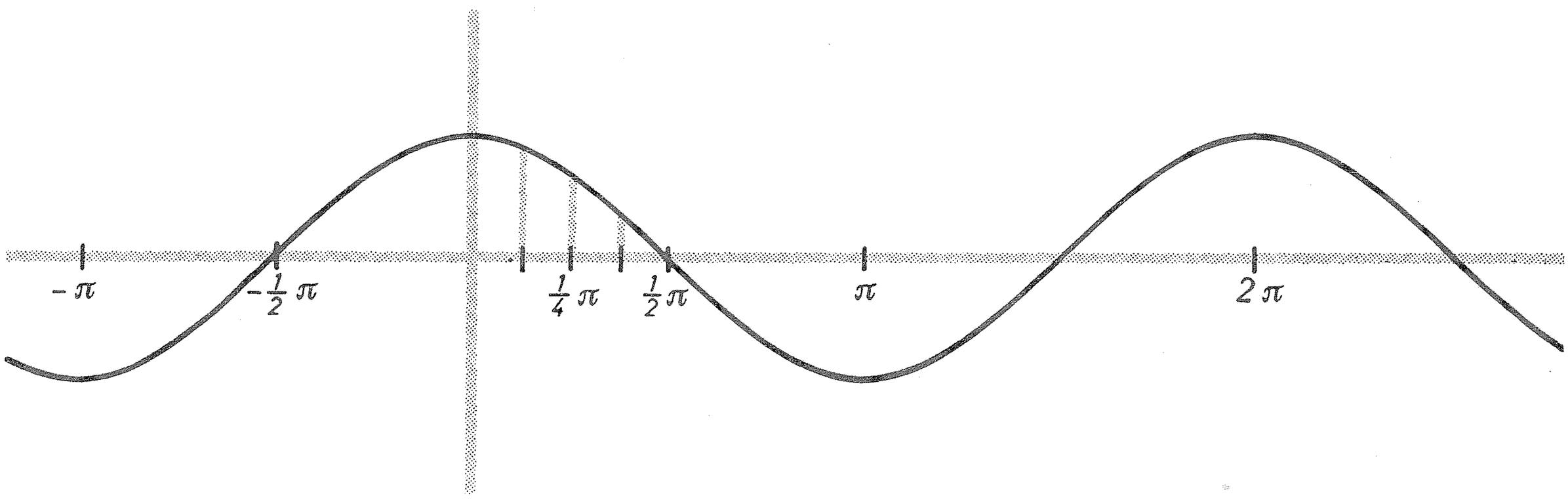
Za predpisom (13) je skrita preslikava $\mathcal{K} \to \mathbf{R}$. Taki preslikavi iz $\mathcal{K}$ v $\mathbf{R}$ pravimo kotna funkcija. Graf kotne funkcije narišemo na premem produktu $\mathcal{K} \times \mathbf{R}$ — neskončnem valju. Za zgled naj bo graf funkcije

$$\cos\colon \mathcal{K} \to \mathbf{R} \qquad \cos\colon \varphi \mapsto \mathbf{e} \,.\, \mathbf{f} \tag{14}$$

V drugem razredu bomo pokazali, da je ta graf presek valja z ravnino, elipsa torej.

Dokaz ni prav nič težak. V ravnini kotomerne krožnice izberimo pravokotno bazo $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$. Prvi vektor naj kaže iz središča krožnice proti točki 0 na krožnici, drugi proti točki $\frac{1}{2}\pi$. Na osi valja izberimo smerni vektor $\mathbf{k}$.

Vzemimo kot φ s krakoma v smeri vektorjev $\mathbf{e}, \mathbf{f}$. Vektor $\mathbf{f}$ razčlenimo, $\mathbf{f} = c\mathbf{e} + c'\mathbf{e}'$ in brž izračunamo $c = \mathbf{e} \,.\, \mathbf{f}$. Točka na grafu funkcije $\varphi \mapsto \mathbf{e} \,.\, \mathbf{f}$, ki leži nad vektorjem $\mathbf{f}$, ima tedaj krajevni vektor $\mathbf{r} = \mathbf{f} + c\mathbf{k} = c\mathbf{e} + c'\mathbf{e}' + c\mathbf{k} = c(\mathbf{e} + \mathbf{k}) + c'\mathbf{e}'$. Krajevni vektor do poljubne točke na grafu leži na ravnini, ki je napeta na vektorja $\mathbf{e} + \mathbf{k}$ in $\mathbf{e}'$. Dokaz je končan.



Slika 5

Kotno funkcijo lahko »razvijemo«, njeno definicijsko območje razširimo na $\mathbf{R}$. Število $x \in \mathbf{R}$ leži nad natanko določenim $\varphi \in \mathcal{K}$. Vrednosti x priredimo vrednost funkcije v φ

$$f(x) = f(\varphi)$$

Števila, ki leže nad istim φ, se drugo od drugega ločijo za cel večkratnik števila 2π, zato

$$n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(x + 2n\pi) = f(x)$$

Funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ki smo jo razvili iz kotne funkcije, je periodična funkcija s periodo 2π. Taka je v posebnem primeru tudi

$$\cos: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad \cos: x \mapsto \cos x$$

3

Skoraj vseh poglavij smo se dotaknili, razen prvega. Prvo poglavje ima svojo zgodbo. Dolgo sem se upiral tako natančnemu uvodu, nazadnje so me premagali fiziki. Čimprej so hoteli na jedilniku preproste enačbe, kakršne prinese Ohmov zakon

$$IR = U \tag{14}$$

V njem že nastopa dvočlena operacija. Upor R ima obratno količino, prevodnost Z, da je $RZ = 1$. Pomnožimo (14) z Z

$$(IR)Z = UZ$$

pa bi radi še asociativnost, da bo $I(RZ) = UZ$ in nazadnje $I = UZ$. Ob reševanju preprostih fizikalnih enačb se srečamo z vso orožarno grupnih aksiomov. Pa je beseda dala besedo in je nastalo poglavje, kakršno je. Osnovna veščina, ki si jo je edino vredno zapomniti v dobrobit in za uporabo, pa ostane še vedno, kako iz $IR = U$ potegniti I. Metodika pozna v ta namen še druge znanosti.

Sklepno besedo po vsej pravici zasluži geometrija. Obravnava, naslonjena na vektorje, pospeši potovanje skozi uporabne dele geometrije, geometrijo naravno poveže z drugimi vejami matematike, ni pa »kraljevska pot« v geometrijo. So pač v geometriji naloge, ki se dajo lepo ugnati na en način, in naloge, ki gredo lepše na drugega. In še se najdejo tretje, lotimo se jih tako ali drugače, če v začetku zgrešimo šivankino uho, ne pridemo skozi. Program za prvi razred se je takim zankam previdno izognil. Zato pa se tudi ne odpovedujemo sintetični poti v geometrijo povsod in za vselej. V višjih razredih gimnazije, če se smem tako izraziti, bo matematiki dodeljeno, če se ne motim, še nekaj ur za posebna poglavja. Med njimi bi morali na prvo mesto postaviti prav geometrijo s sintetičnim — Hilbertovim — uvodom in z nalogami, ob katerih se tako mikavno kreše in iskri matematični bistrc mladih rodov.

Za konec, da bo tudi didaktično-metodični okvir sklenjen, razdrimo še zadnje načelo

VSAKDO OBVLADA MATEMATIKO TAKO IN TOLIKO, KAKOR IN KOLIKOR SE JE SAM NAUČI.

To velja tudi za učenca: če se sam ne uči, mu noben učitelj ne more pomagati. V metodično-didaktično-političnem jeziku izražamo to načelo še vedno v želelniku-velelniku: učenec naj postane subjekt učenja (po slovensko bi rekli: učenec naj se vendar že začne učiti). S to isto željo sem dal učbeniku, preden ga je prosvetna oblast oblekla v uniformo, delovni naslov:

MATEMATIKA ZA SREDNJEŠOLCE
Prvo berilo:
Osnovne strukture

Obzornik mat. fiz. 28 (1981) 1

MATEMATIČNE STRUKTURE

JANEZ RAKOVEC

Math. Subj. Class. (1980) 03-01, 06-01, 51-01, 97 A 99

Nekaj besed o temeljni vlogi struktur v matematiki, tudi glede na pouk v srednji šoli.

MATHEMATICAL STRUCTURES

Some words on the fundamental role of structures in mathematics, also regarding the teaching in secondary school.

1. Pojem strukture

V prejšnjih časih so si mnogi matematiki prizadevali, da bi dali svoji znanosti čimbolj enotno podobo. Začetna, izkustvena matematična spoznanja so med seboj povezali z logičnim sklepanjem in tako prišli do prvih matematičnih teorij. Različnim teorijam pa so želeli dati skupen temelj.

Za takšen temelj so pitagorejci imeli naravno število. Vendar so morali kmalu priznati, da npr. stranice in diagonale istega kvadrata ni mogoče hkrati izraziti z naravnima številoma pri skupni dolžinski enoti. Odtlej je bilo treba za dolga stoletja strogo ločevati med klasičnima disciplinama, aritmetiko in geometrijo. Do popolne aritmetizacije geometrije je prišlo šele v prejšnjem stoletju, ko se je posrečilo natančno aritmetično definirati realna števila, na katerih sloni analitična geometrija. Po drugi strani pa se je nato izkazalo, da je pojem realnega števila preozek za izpeljavo številnih nastajajočih matematičnih pojmov in teorij. Šele mnogo splošnejši pojem množice daje enotno osnovo za sodobno matematiko.

Na temelju množic razvija matematika svoje teorije po aksiomatični metodi. Le-to so poznali že stari Grki, vendar imajo danes aksiomi drugačen pomen kakor takrat. Za Grke so bili aksiomi razvidne resnice, ki veljajo za vnaprej dane, natanko določene osnovne pojme teorije. V 19. stoletju pa so matematiki že predlagali, naj v teorijah ne opredeljujemo osnovnih pojmov: ti naj bodo poljubni, da le zadoščajo izbranim aksiomom, ki imajo zdaj pomen dogovora.

Tako je danes osnova matematične teorije abstraktna množica; narava njenih elementov ni določena. Med elemente vpeljemo odnose (relacije) ali operacije, za katere naj veljajo izbrane predpostavke — aksiomi. Pravimo, da smo s tem v množico vpeljali določeno *matematično strukturo.*

Ista struktura je lahko uresničena v zelo različnih konkretnih primerih — *modelih.* Modeli za grupo so npr. množice števil (celih, racionalnih ...) za seštevanje, množica od nič različnih racionalnih števil za množenje itd. pa tudi razne množice bijektivnih preslikav (npr. gibanj v ravnini). Vektorski prostor sestavljajo tako usmerjene daljice ali pa translacije v ravnini, kakor tudi vse zvezne (ali vse integrabilne) realne funkcije nad zaprtim intervalom.

Dokazovanje izrekov je v matematiki neodvisno od tega, kaj si predstavljamo pod elementi osnovne množice. Zato je seveda najbolj ekonomično iz-

peljati ugotovitve najprej v okviru strukture in jih nato uporabiti v vseh posameznih primerih. Ta način dela pomaga tudi učencu k boljšemu pregledu nad matematiko: za vsak izrek bo zdaj jasneje videl, na čem temelji. Tako na primer ne bo izvajal enakosti $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ posebej za množenje števil in posebej za komponiranje preslikav, ampak bo vedel, da izhaja že iz aksiomov za grupo.

2. Primeri struktur

Množica realnih števil $\mathbf{R}$ je z dvomestno relacijo $\leqq$ popolno (linearno) urejena. Sploh pa v primeru poljubne množice $\mathscr{A}$ in v njej dvomestne relacije R pravimo, da je R *popolna (linearna) urejenost*, če je:

1. antisimetrična: če je aRb in bRa, je $a = b$;
2. tranzitivna: če je aRb in bRc, je aRc;
3. popolnoma sovisna: za poljubna $a, b \in \mathscr{A}$ je aRb ali bRa;
4. refleksivna: za poljuben $a \in \mathscr{A}$ je aRa.

Ker refleksivnost logično izhaja iz popolne sovisnosti (v točki 3 je treba vzeti $a = b$), so zahteve 1, 2, 3 sistem aksiomov za popolno urejenost. Pravimo tudi, da ti aksiomi določajo *strukturo popolne urejenosti* v množici $\mathscr{A}$.

Poljubni relaciji R v kakšni množici $\mathscr{A}$ priredimo njen graf $\mathscr{R}$, ki je množica vseh tistih urejenih parov (a, b) iz kartezijskega produkta $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$, za katere je aRb. Tako je npr. graf relacije $\leqq$ v $\mathbf{R}$ unija simetrale lihih kvadrantov in njenega levega brega v $\mathbf{R}^2$. Na grafu vsake popolne urejenosti se lepo odražajo navedeni aksiomi 1, 2, 3. Da bi to videli, priredimo najprej poljubni relaciji R v množici $\mathscr{A}$ še tile množici: $\mathscr{R}^{-1} = \{(a, b);\ bRa\}$, $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} = \{(a, c);\ (\exists b)\,(aRb \wedge bRc)\}$. Naj bo $\mathscr{I} = \{(a, a);\ a \in \mathscr{A}\}$. (Glej tudi [4], str. 69—72.) Izkaže se, da so zgornji aksiomi logično ekvivalentni naslednjim, ki se izražajo z $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}^{-1}$, $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ in $\mathscr{I}$:

$$1.^* \quad \mathscr{R} \cap \mathscr{R}^{-1} \subset \mathscr{I} \qquad 2.^* \quad \mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subset \mathscr{R} \qquad 3.^* \quad \mathscr{R} \cup \mathscr{R}^{-1} = \mathscr{A}^2$$

Sklepamo namreč: Če je $(a, b) \in \mathscr{R} \cap \mathscr{R}^{-1}$, je aRb in bRa, torej zaradi antisimetrije $a = b$ in s tem $(a, b) \in \mathscr{I}$. Tako iz 1 izhaja 1*. Pa tudi obratno velja. Če je aRb in bRa, je $(a, b) \in \mathscr{R}$ in $(a, b) \in \mathscr{R}^{-1}$ in po 1* je $(a, b) \in \mathscr{I}$ oziroma $a = b$. — Podobno se prepričamo o drugih dveh ekvivalencah.

Pogosto enačimo relacije z njihovimi grafi. Potem lahko definiramo popolno urejenost v množici $\mathscr{A}$ kot podmnožico $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}^2$ — in s tem element $\mathscr{R} \in \mathscr{P}(\mathscr{A}^2)$ — z lastnostmi 1*, 2*, 3*. V splošnem seveda $\mathscr{R} \in \mathscr{P}(\mathscr{A}^2)$ s temi lastnostmi ni enolično določen. Tako imamo v končni množici $\mathscr{A}$ z n elementi kar $n!$ različnih popolnih urejenosti, kolikor je pač razporedb n elementov. — Strukturo linearne urejenosti v kakšni množici $\mathscr{A}$ torej določa *poljuben* element $\mathscr{R} \in \mathscr{P}(\mathscr{A}^2)$ *z lastnostmi* 1*, 2*, 3*.

Ustavimo se kratko še pri *grupi* kot primeru algebrske strukture. V njej imamo dvočleno operacijo, ki vsakemu paru $(a, b) \in \mathscr{G}^2$ priredi kompozitum $a \circ b \in \mathscr{G}$; enočleno operacijo, ki poljubnemu $a \in \mathscr{G}$ priredi inverzni element a^{-1}; niččleno operacijo, ki pribije enoto $e \in \mathscr{G}$. Te operacije so preslikave $\mathscr{G}^2 \to \mathscr{G}$, $\mathscr{G}^1 \to \mathscr{G}$, $\mathscr{G}^0 \to \mathscr{G}$. Poljubno preslikavo $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ pa radi enačimo z njenim grafom, ki je podmnožica v $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Navedene operacije so tedaj podmnožice v $\mathscr{G}^2 \times \mathscr{G} = \mathscr{G}^3$, $\mathscr{G}^1 \times \mathscr{G} = \mathscr{G}^2$, $\mathscr{G}^0 \times \mathscr{G} = \mathscr{G}$. Enočlena operacija je — kot podmnožica v $\mathscr{G}^2$ — primer dvomestne relacije v $\mathscr{G}$. Podobno je dvočlena (oziroma

niččlena) operacija primer trimestne (oziroma enomestne) relacije v $\mathcal{G}$. Pri grupi imamo torej opravka z operacijami kot relacijami posebne vrste, ki seveda zadoščajo grupnim aksiomom.

Sploh se dajo vse matematične strukture izraziti s pojmom relacije. To najprej lepo vidimo pri *strukturah urejenosti.* Mednje spadajo popolna urejenost (glej zgoraj), delna urejenost (refleksivna, antisimetrična in tranzitivna relacija), stroga popolna urejenost, stroga delna urejenost... Tu gre za dvomestne relacije, ki so vselej tranzitivne in s tem nekako urejajo oziroma razvrščajo elemente v množici. — *Algebrske strukture:* grupa, kolobar, obseg, vektorski prostor... temeljijo vse na operacijah, ki so posebni primeri relacij. — Omeniti je treba še *topološke strukture,* med katerimi ima osrednje mesto topološki prostor (glej [6], str. 54). Tu imamo predvsem relacije med podmnožicami osnovne množice.

Navedene tri vrste struktur, urejenostne, algebrske in topološke, so v matematiki temeljne, saj lahko iz njih izpeljemo vse druge, bolj zapletene strukture. Le-te dobimo s kombiniranjem temeljnih vrst struktur v isti množici, pri čemer se morajo različne strukture med seboj primerno skladati.

Primer takega sestavljanja struktur imamo pri *urejenem kolobarju.* V isti množici $\mathcal{K}$ imamo strukturo kolobarja in popolne urejenosti ($\leqq$), ki sta med seboj uglašeni z aksiomoma: za vsak $c \in \mathcal{K}$ velja: $a \leqq b \Rightarrow a + c \leqq b + c$; $(a \leqq b) \wedge (0 \leqq c) \Rightarrow ac \leqq bc$. — Od tod je le korak do kolobarja celih števil, ki je po definiciji najmanjši urejen kolobar. Podobno sestavljajo racionalna števila najmanjši urejen obseg, realna števila pa poln urejen obseg. (Glej [2], str. 41, 59, 72.) Ta vpeljava števil na podlagi struktur je zelo naravna, saj se naslanja na urejenost števil in na osnovne računske zakone, kar je pri delu s števili najpomembnejše.

3. Izomorfizem

Med dvema množicama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ naj obstaja bijektivna preslikava f: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ (se pravi, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ enako močni). Za vsak $x \in \mathcal{A}$ naj bo $x' = f(x)$. — V $\mathcal{A}$ naj bo dana kakšna struktura, ki temelji na določeni dvomestni relaciji R. Z uporabo bijekcije f definirajmo relacijo R' v $\mathcal{A}'$ takole: za poljubna $x', y' \in \mathcal{A}'$ naj bo $x'R'y'$ natanko tedaj, ko je xRy. Ni težko videti, da ima zaradi te definicije relacija R' v $\mathcal{A}'$ iste lastnosti kot relacija R v $\mathcal{A}$; s tem smo strukturo, ki je bila dana v $\mathcal{A}$, prenesli še v $\mathcal{A}'$. — Primer: Če je R relacija popolne urejenosti v $\mathcal{A}$, velja isto za R' v $\mathcal{A}'$, kar sklepamo takole: Če je $x'R'y'$ in $y'R'x'$, pomeni to, da je xRy in yRx. Ker je R antisimetričen, je tedaj $x = y$ in s tem $x' = y'$. Torej je tudi R' antisimetričen. — Podobno se prepričamo še o tranzitivnosti in popolni sovisnosti relacije R'.

Če obstaja bijektivna preslikava f med množicama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ ter je v $\mathcal{A}$ definirana dvočlena operacija, prenesemo le-to v $\mathcal{A}'$ z zahtevo: $f(x) \circ f(y) = f(x \circ y)$. Če imamo v $\mathcal{A}$ enoto e, proglasimo $f(e)$ za enoto v $\mathcal{A}'$, prehod k inverznemu elementu pa prenesemo iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}'$ z zahtevo: $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$. — Enaka algebrska struktura kakor v $\mathcal{A}$ (npr. grupa) je s tem definirana tudi v $\mathcal{A}'$. (Saj je npr.: $f(x) \circ f(e) = f(x \circ e) = f(x)$; itd.)

Kadar sta dve množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ enako močni, lahko na tak način prenesemo z bijektivno preslikavo poljubno strukturo iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}'$. Če gledamo elemente iz $\mathcal{A}'$ kot dvojnike elementov iz $\mathcal{A}$, je prenesena struktura v $\mathcal{A}'$ natančen posnetek prvotne strukture v $\mathcal{A}$. — Takšni strukturi v dveh množicah $\mathcal{A}$ in

$\mathscr{A}'$, da je ena posnetek druge po neki bijektivni preslikavi $f: \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$, imenujemo *izomorfni;* sama preslikava f je *izomorfizem.* Očitno gre tu za posplošitev pojma izomorfizma iz algebre.

Primer. V končni množici $\mathscr{A}$ z n elementi imamo $n!$ različnih struktur popolne urejenosti, ki pa so vse med seboj izomorfne. Poljubni dve popolni urejenosti namreč določata dve razporedbi množice $\mathscr{A}$, med katerima pa vselej posreduje bijektivna preslikava množice $\mathscr{A}$ nase.

Tu smo imeli izomorfizem med strukturami v isti množici (torej $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$). Seveda pa sploh ni nujno, da sta dve strukturi iste vrste in v isti množici tudi izomorfni. Tako se npr. izkaže, da naslednji grupi s štirimi elementi (glej [2], str. 23) nista izomorfni:

	e, a, b, c
e	e, a, b, c
a	a, b, c, e
b	b, c, e, a
c	c, e, a, b

	e, a, b, c
e	e, a, b, c
a	a, e, c, b
b	b, c, e, a
c	c, b, a, e

V drugi grupi, Kleinovem četverčku, je kvadrat vsakega elementa enak e, medtem ko ima prva grupa, ciklični četverček, element a z redom 4 (šele $a^4 = e$). Že po tem vidimo, da sta grupni strukturi bistveno različni in tako med njima ne more obstajati izomorfizem. — Izkaže pa se, da je poljubna grupa s štirimi elementi izomorfna eni od obeh navedenih grup.

Struktura grupe ima veliko bistveno različnih, to je neizomorfnih modelov: poleg končnih še najrazličnejše neskončne, npr. grupe števil, bijektivnih preslikav... — Vektorska prostora različnih končnih razsežnosti nista izomorfna, noben končnorazsežen vektorski prostor pa ni izomorfen neskončnorazsežnemu (kakršen je npr. prostor zveznih funkcij nad zaprtim intervalom). Sploh ima neizomorfne modele večina struktur v današnji matematiki.

Za kakšno strukturo pa se izkaže, da velja naslednje. Če imamo v dveh množicah $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A}'$ kakršnakoli primerka te strukture, sta ta dva nujno izomorfna (in s tem množici $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A}'$ enako močni). Struktura, ki ima to lastnost, se imenuje *univalentna;* v nasprotnem primeru je *multivalentna.*

Prej omenjene strukture, ki imajo neizomorfne modele, so torej multivalentne. Za univalentno strukturo pa se izkaže poln urejen obseg. Ta je do izomorfizma en sam; pravimo mu obseg realnih števil. Tudi vektorski prostor nad $\mathbf{R}$ z izbrano razsežnostjo n je univalenten. Vektorjem iz n-razsežnega prostora namreč lahko priredimo pri izbrani bazi stolpce koordinat, ki so n-terke realnih števil. Le-te sestavljajo svoj vektorski prostor, operacije z njimi pa ustrezajo operacijam s prvotnimi vektorji (glej [2], str. 92). Tako so vsi n-razsežni vektorski prostori nad $\mathbf{R}$ izomorfni prostoru n-terk realnih števil.

4. Strukture v geometriji

Obravnava premice temelji v [2] na obsegu realnih števil, ravnina pa je vpeljana s strukturo *evklidske ravnine,* ki se naslanja na dvorazsežni evklidski vektorski prostor (str. 102). Tu je poleg točke in ravnine tudi vektor nedefiniran pojem, medtem ko je premica definirana na podlagi točk in vektorjev (str. 103).

Tudi pri sintetični obravnavi geometrije govorimo o strukturi evklidske ravnine. Nedefinirani pojmi so v tem primeru točka, premica in ravnina, ki morajo zadoščati vsem petim skupinam Hilbertovih aksiomov (kolikor se nanašajo na ravnino). — Če v tej evklidski ravnini vpeljemo vektorje kot ekvivalenčne razrede usmerjenih daljic, dobimo dvorazsežni evklidski vektorski prostor; točke in vektorji zadoščajo aksiomom evklidske ravnine na str. 102 v [2]. Vse to izhaja iz Hilbertovih aksiomov. — Obratno pa se izkaže, da iz strukture evklidske ravnine v [2] izhaja veljavnost Hilbertovih aksiomov za točke in premice v ravnini.

Obe strukturi evklidske ravnine, v [2] in pri Hilbertu, sta tedaj *ekvivalentni* v tem smislu, da lahko na podlagi osnovnih pojmov in aksiomov ene od njiju vpeljemo osnovne pojme in dokažemo aksiome druge od njiju — in obratno. Sploh pravimo za katerikoli strukturi, ki sta v tem odnosu, da sta ekvivalentni. Takšni strukturi očitno povesta eno in isto, le na dva različna načina.

Ekvivalenco struktur moramo dobro ločiti od izomorfnosti. Tam je ena struktura natančen posnetek druge, ekvivalentni strukturi pa sta med seboj odvisni v logičnem smislu, po obliki pa sta lahko zelo različni.

Preprost primer ekvivalentnih struktur sta popolna urejenost ($\leqq$) in stroga popolna urejenost ($<$) v poljubni množici. Na podlagi relacije $\leqq$ definiramo relacijo $<$ takole: $a < b \Leftrightarrow (a \leqq b) \wedge (a \neq b)$. Lahko je videti, da iz antisimetričnosti, tranzitivnosti in popolne sovisnosti za $\leqq$ izhaja asimetričnost, tranzitivnost in sovisnost za $<$. Obratno izvedemo relacijo $\leqq$ iz $<$: $a \leqq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$, lastnosti za $\leqq$ izhajajo iz lastnosti za $<$.

Vrnimo se h geometriji. V [2] je na str. 102 navedena tudi struktura *afine ravnine,* ki se naslanja na dvorazsežni vektorski prostor (brez skalarnega produkta). Ta struktura je ekvivalentna Desarguesovi afini ravnini, kakor je podana v [7]. Tam so osnovni pojmi točka, premica in ravnina, za katere zahtevamo le naslednje. Skozi dve različni točki naj gre natanko ena premica; v ravnini naj bodo vsaj tri točke, ki ne leže na isti premici; veljata naj aksiom o vzporednici in Desarguesov aksiom. — Poseben primer te strukture je evklidska ravnina, ki se odlikuje s pojmi razdalje, pravokotnosti..., povezanimi s skalarnim produktom.

Kakor sta sintetična in analitična oziroma algebrska obravnava geometrije logično ekvivalentni, pa ima vsaka od obeh svoje značilnosti in prednosti. Pri sintetični geometriji se izbira aksiomov naslanja na opazovanje geometrijskih objektov. Čim večji del teorije je tu izpeljan brez uporabe realnih števil. Pri vektorski zasnovi geometrije pa srečamo realna števila že v začetku, hkrati z vektorskim prostorom. Tako lahko kar največ uporabljamo algebrske metode, ki mnogokje zelo poenostavijo obravnavo. Vektorski pristop, kakršen je v [2], podaja naravno in pregledno povezavo osnov geometrije z analitično geometrijo in analizo.

LITERATURA

[1] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles,* Paris, Hermann 1964.

[2] F. Križanič, *Matematika* 1, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1980.

[3] N. Prijatelj, *Nicolas Bourbaki,* Obzornik mat. fiz. 7 (1960) 145—150.

[4]—[6] N. Prijatelj, *Matematične strukture* I—III, Ljubljana, Mladinska knjiga 1964, 1967, DZS 1972 (Knjižnica Sigma).

[7] I. Vidav, *Afina in projektivna geometrija,* Ljubljana, Društvo mat., fiz. in astr. SRS 1976.

Obzornik mat. fiz. 28 (1981) 1

JEZIK PRVEGA REDA Z ENAKOSTJO

IZIDOR HAFNER

AMS Subj. Class. (1980) 03 B 10

V članku obravnavamo jezik prvega reda z enakostjo s primeri za pouk v srednjih šolah.

FIRST-ORDER LANGUAGE WITH EQUALITY

The first order-language is considered in the article. Applications for secondary school are given.

Jezik prvega reda z enakostjo

1. *Jeziki prvega reda* nam rabijo za formalizacijo matematičnih teorij, npr. teorije obsegov. Vendar pa izrazna moč teh jezikov omogoča formalizacijo le dela teorije, t. i. elementarnega dela, celotno teorijo pa lahko ponavadi opišemo v jeziku drugega reda. Za natančnejši opis jezikov prvega reda glej [3] in [4].

Jezik prvega reda je določen s spiskom osnovnih znakov, ki sestoji iz:

individualnih konstant (v elementarni teoriji urejenih obsegov (***UO***) sta to znaka 0 in 1);

individualnih spremenljivk (v ***UO*** bomo uporabljali $a, b, c, d, x, x_1, x_2, \ldots$);

znakov za relacije ($<$, $=$);

znakov povezave ($\Rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$);

kvantifikatorjev $\forall$, $\exists$ ter

ločil (,) in vejice.

Definicije *terma, formule, vezane* in *proste spremenljivke* ter okrajšav najdemo v [3].

Uporabljali bomo še **x**, **y**, **z** in **w** kot sintaktične spremenljivke za *zaznamovanje* individualnih spremenljivk;

f in **g** za zaznamovanje funkcijskih znakov;

p in **q** za zaznamovanje predikatnih (relacijskih) znakov;

e za zaznamovanje individualnih konstant;

A, **B** za formule ter

a, **b**, **c** in **d** za zaznamovanje termov.

Po potrebi bomo dodali sintaktičnim spremenljivkam še indekse.

Izraz $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ bomo uporabljali za označevanje terma, ki ga dobimo iz terma **b**, če vsako nastopanje spremenljivke **x** *zamenjamo* s termom **a**; izraz $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ bo označeval formulo, ki jo dobimo z vstavo terma **a** na mesto vsakega prostega nastopanja spremenljivke **x** v formuli **A**.

Rekli bomo, da je term **a** *vstavljiv* za **x** v **A**, če za vsako spremenljivko **y**, ki nastopa v **a**, velja, da noben del formule **A** oblike $\forall \mathbf{y}\mathbf{B}$ (ali $\exists \mathbf{y}\mathbf{B}$) ne vsebuje prostega nastopanja spremenljivke **x** v **A**. Te oznake razširimo tudi za primer večjega števila spremenljivk. Tako bo izraz $\mathbf{b}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ označeval term, ki ga dobimo iz **b**, če zamenjamo vsa nastopanja spremenljivk $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ s termi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Kadarkoli bo nastopal izraz $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots,$

$\mathbf{a}_n]$, bodo izrazi $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ omejeni na primer, ko je $\mathbf{a}_i$ vstavljiv za $\mathbf{x}_i$ v $\mathbf{A}$ za $\mathbf{i} = 1, 2, \ldots, n$. Spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ bodo vedno zaznamovale različne individualne spremenljivke. Včasih jih bomo izpustili kot indeks v izrazu $\mathbf{A}_{x_1, \ldots, x_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$, če le-ta ne bo pomemben.

2. Naslednji korak pri formalizaciji pa je določitev logičnih aksiomov in pravil sklepanja. Ker smo to v zadostni meri obravnavali v [1], se tu omejimo le na tista, ki so v zvezi z enakostjo. Kot je že znano, izraz »$\vdash_T \mathbf{A}$« beremo »*formula* $\mathbf{A}$ *je dokazljiva v teoriji* $\mathbf{T}$«.

Aksiom identitete je formula oblike $\mathbf{x} = \mathbf{x}$. *Aksiom enakosti* je formula oblike

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n \Rightarrow \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{f}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n$$

ali pa oblike

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n \Rightarrow (\mathbf{p}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Rightarrow \mathbf{p}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n)$$

Ti aksiomi zadoščajo, da dokažemo

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a} \qquad \textit{(simetričnost)}$$
$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} \qquad \textit{(tranzitivnost)}$$

ter bolj splošno *pravilo enakosti:*

Naj bo $\mathbf{b}'$ *term, ki ga dobimo iz terma* $\mathbf{b}$ *tako, da zamenjamo nekaj nastopanj termov* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, *ki niso v področju kvantifikatorjev, s termi* $\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n'$, *in naj bo formula* $\mathbf{A}'$ *dobljena iz formule* $\mathbf{A}$ *na podoben način. Če velja* $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1', \ldots, \vdash \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n'$, potem velja $\vdash \mathbf{b} = \mathbf{b}'$ in $\vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}'$.

Posledica 1: $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1' \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n' \Rightarrow \mathbf{b}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = \mathbf{b}[\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n']$

Posledica 2: $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1' \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n' \Rightarrow (\mathbf{A}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \Leftrightarrow \mathbf{A}[\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n'])$

Vidimo torej, da sta recimo pri številskih enačbah »množenje z leve oziroma desne« čisto logična koraka: posledica aksioma enakosti za funkcijo, ki dvema številoma priredi produkt:

Če velja $\vdash \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, potem velja $\vdash \mathbf{a}_1 . \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 . \mathbf{x}$ in $\vdash \mathbf{x} . \mathbf{a}_1 = \mathbf{x} . \mathbf{a}_2$.

Opomba. V matematični logiki sta »identičnost« in »enakost« sinonima. To pa ne velja za slovensko verzijo nove matematike. Če namreč velja

$$\mathrm{m}\,\{\mathrm{x\,x\,x\,x\,x}\} = 5$$

potem velja $\mathrm{x} = \mathrm{x}$ in $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}$ ($\neg\, \mathrm{x} = \mathrm{x}$), ker eno ime označuje več reči.

3. Izrek, podoben pravilu enakosti, je *pravilo ekvivalence:*

Predpostavimo, da smo formulo $\mathbf{A}'$ *dobili iz formule* $\mathbf{A}$ *z zamenjavo nekaterih nastopanj formul* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ *s formulami* $\mathbf{B}_1', \ldots, \mathbf{B}_n'$. *Če velja*

$$\vdash \mathbf{B}_1 \Leftrightarrow \mathbf{B}_1', \ldots, \vdash \mathbf{B}_n \Leftrightarrow \mathbf{B}_n'$$

potem velja

$$\vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}'$$

To pravilo je še posebej važno pri uporabi definicij. Od izvedenih pravil, ki jih najpogosteje uporabljamo, je pravilo *vstave (zamenjave):*

Pravimo, da smo $\mathbf{A}'$ dobili *z vstavo* iz formule $\mathbf{A}$, če je $\mathbf{A}'$ oblike $\mathbf{A}_{x_1 \ldots x_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. *Če velja* $\vdash \mathbf{A}$, *potem velja* $\vdash \mathbf{A}'$.

Tako z vstavo v formulo $a + 0 = a$ dobimo $0 + 0 = 0$. Tu smo vstavili 0 na mesto spremenljivke a (to dejstvo bomo zapisovali z $0/a$). V dokazovanju običajno ne navajamo natančno, za katero vstavo gre, saj naj bi bilo to razvidno iz obeh formul **A** in **A**′.

Razširitev teorije z definicijami

Za vsako matematično teorijo so značilni tisti aksiomi, ki določajo lastnosti te teorije, zato jih imenujemo *lastni aksiomi* te teorije. Te moramo razlikovati od *aksiomov logike.*

Oglejmo si zdaj problem uvajanja novega predikatnega ali funkcijskega znaka v teorijo. Recimo, da želimo vpeljati znak $\leqq$ v teorijo urejenih obsegov. To lahko naredimo tako, da se dogovorimo, da je $\mathbf{a} \leqq \mathbf{b}$ okrajšava za $\mathbf{a} < \mathbf{b} \vee \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Seveda pa tedaj $\leqq$ ni predikatni simbol in izrazi, v katerih nastopa, so le okrajšave za formule, v katerih $\leqq$ ne nastopa.

Bolj sprejemljiva rešitev pa je ta, da tvorimo razširitev teorije UO tako, da dodamo nov aksiom

$$x \leqq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$$

Oglejmo si splošno situacijo. Imejmo neko teorijo $\boldsymbol{T}$, različne spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ in formulo **D**, v kateri nobena spremenljivka razen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ne nastopa prosto. Potem tvorimo novo teorijo $\boldsymbol{T}'$ tako, da dodamo k $\boldsymbol{T}$ novi n-mestni predikatni simbol **p** in nov lastni aksiom

$$\mathbf{p}\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Leftrightarrow \mathbf{D}$$

ki ga imenujemo definicijski aksiom za **p**.

Opišimo sedaj še splošno situacijo za uvedbo funkcijskega znaka ali individualne konstante. Imejmo teorijo $\boldsymbol{T}$, različne spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, **y**, **y**′ ter formulo **D**, v kateri ne nastopa prosto nobena spremenljivka razen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, **y**. Imejmo še

$$\vdash_{\boldsymbol{T}} \exists \mathbf{y}\, \mathbf{D} \tag{1}$$

$$\vdash_{\boldsymbol{T}} \mathbf{D} \wedge \mathbf{D}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}'] \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}' \tag{2}$$

Potem tvorimo teorijo $\boldsymbol{T}'$ iz $\boldsymbol{T}$ tako, da dodamo nov n-mestni funkcijski znak **f**, nov lastni aksiom

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Leftrightarrow \mathbf{D}$$

ki ga imenujemo definicijski aksiom za znak **f**. Trditev (1) imenujemo *eksistenčni pogoj* in trditev (2) *pogoj enoličnosti* za znak **f**. Eksistenčni pogoj zahteva, da ima funkcija vrednost pri vsakem izboru argumentov. Pogoj o enoličnosti pa dopušča največ eno funkcijsko vrednost.

Izrek, da obe vrsti definicij ne prispevata nič ‚bistveno novega', preberi v [4].

V posebnem primeru je **D** kar formula $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, kjer je **a** term, v katerem nastopajo le spremenljivke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Eksistenčni pogoj $\exists \mathbf{y}\ (\mathbf{y} = \mathbf{a})$ sledi iz $\mathbf{a} = \mathbf{a}$, pogoj enoličnosti

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{y}' = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

pa iz lastnosti enakosti. V tem primeru funkcijskega znaka ne vpeljemo z ekvivalenco $\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{a}$, temveč z identiteto $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$.

Primer: V teoriji množic je $\in$ osnovni simbol. Če želimo vpeljati funkcijo $P\,r$ z definicijo

$$z = P\,r(x, y) \Leftrightarrow \forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

moramo prej dokazati naslednji formuli

$$\exists z\, \forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y) \tag{3}$$

$$\forall u\,(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y) \wedge \forall u\,(u \in z' \Leftrightarrow u = x \vee u = y) \Rightarrow z = z' \tag{4}$$

Eksistenčni pogoj (3) je kar aksiom o paru. Iz hipotez v (4) sledi $\forall u\,(u \in z \Leftrightarrow \Leftrightarrow u \in z')$, nato pa $z = z'$ po aksiomu ekstenzionalnosti [4]. Zapomnimo si, da je »$\{x, y\}$« okrajšava za »$P\,r(x, y)$« in da je

$$P\,r(x, y) = P\,r(y, x) \quad \text{oziroma} \quad \{x, y\} = \{y, x\}$$

izrek, ki ga je treba dokazati.

Funkcijo, ki poljubnemu objektu priredi množico, ki ima to reč za svoj edini element, definiramo

$$Sg(x) = P\,r(x, x) \quad (= \{x, x\})$$

in tu ni treba ničesar dokazovati (»$\{x\}$« je okrajšava za »$Sg(x)$«). Nato definiramo »urejen par«

$$Up(x, y) = P\,r(Sg(x),\ P\,r(x, y)) \quad (= \{\{x\}, \{x, y\}\})$$

(namesto »$Up(x, y)$« pišemo običajno »(x, y)«).

Elementarna teorija obsegov

1. Naslednje formule (identitete) so lastni aksiomi teorije obsegov:

01. $(a + b) + c = a + (b + c)$
02. $a + 0 = a$
03. $(-a) + a = 0$
04. $a + b = b + a$
05. $(a\,.\,b)\,.\,c = a\,.\,(b\,.\,c)$
06. $a\,.\,1 = a$
07. $a \neq 0 \Rightarrow \exists b\,(b\,.\,a = 1)$
08. $a\,.\,b = b\,.\,a$
09. $a\,.\,(b + c) = (a\,.\,b) + (a\,.\,c)$
010. $0 \neq 1$

2. Dogovorimo se, da bomo namesto »$x\,.\,y$« pisali »xy« in da bomo opuščali oklepaje glede na običajni prednostni red operacij. Ker so formalni dokazi izrekov dolgi, se dogovorimo, da izpeljave »iz $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ sledi $\mathbf{b} = \mathbf{a}$« ne bomo nikoli omenjali in da bomo, kjer je le mogoče, uporabljali izpeljana pravila. Tako bomo v skladu z *izrekom o dedukciji* [1] dokazovali implikacijo

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n \Rightarrow \mathbf{B}$$

tako, da bomo privzeli formule $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ kot hipoteze in jih bomo v dokazu omenili kot $\mathbf{HP}(n)$. Dokaz formule $\mathbf{B}$ lahko tolmačimo kot implikacijo

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n \Rightarrow \mathbf{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{B}_m \wedge \mathbf{B}$$

kjer je vsaka formula $\mathbf{B}_i$ (ter $\mathbf{B}$) logična posledica formul $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{i-1}$ ter že dokazanih izrekov.

3. Nekaj izrekov teorije obsegov.

011. $a + (-a) = 0$ [**04**, **03**]

Oglati oklepaj našteva formule, katerih logična posledica je dana vrstica, v tem primeru formul

$$a + (-a) = (-a) + a \quad \text{ter} \quad (-a) + a = 0$$

012. $x + a = x' + a \Rightarrow x = x'$

DK **HP** (1) $\Rightarrow$

(2)	$(x + a) + (-a) = (x' + a) + (-a)$	[(1)]
(3)	$x + (a + (-a)) = x' + (a + (-a))$	[(2), **01**]
(4)	$x + 0 = x' + 0$	[(3), **011**]
	$x = x'$	[(4), **02**]

013. $x + a = b \wedge x' + a = b \Rightarrow x = x'$ [**012**]

014. $\exists x\,(x + a = b)$

DK

(1)	$b + 0 = b$	[**02**]
(2)	$b + ((-a) + a) = b$	[(1), **03**]
(3)	$(b + (-a)) + a = b$	[(2), **01**]
	$\exists x\,(x + a = b)$	[(3)]

Sedaj lahko vpeljemo definicijo

D1 $x = b - a \Leftrightarrow x + a = b$

Izreka **013** in **014** sta pogoj enoličnosti in eksistenčni pogoj za znak »—«.

015 $x = b - a \Rightarrow x = b + (-a)$

DK **HP** (1) $\Rightarrow$

(2)	$x + a = b$	[(1), **D1**]
(3)	$(x + a) + (-a) = b + (-a)$	[(2)]
(4)	$x + (a + (-a)) = b + (-a)$	[(3), **01**]
(5)	$x + 0 = b + (-a)$	[(4), **011**]
	$x = b + (-a)$	[(5), **02**]

017 $b - a = b + (-a)$ [**015** $b - a/x$]

Formulo **017** bi bili lahko vzeli za definicijo znaka »—«. Potem bi seveda formulo **D1** dokazali kot izrek.

018 $a - a = 0$

DK

(1)	$a - a = a + (-a)$	[**017**]
	$a - a = 0$	[(1), **011**]

019 $a = 0 - (-a)$ [**D1**, **011**]

020 $-a = 0 - a$ [**D1**, **03**]

021 $a = 0 + (-(-a))$ [**019**, **017**, $0/b$, $-a/a$]

022 $a = -(-a)$

DK

(1)	$a = -(-a) + 0$	[**0**21, **0**4]
	$a = -(-a)$	[(1), **0**2]

023 $-0 = 0$

DK

(1)	$-0 + 0 = -0$	[**0**2 $-0/a$]
(2)	$-0 + 0 = 0$	[**0**3 $0/a$]
	$-0 = 0$	[(1), (2)]

024 $x + y = x \Rightarrow y = 0$

DK **HP** (1) $\Rightarrow$

(2)	$x + y = x + 0$	[(1), **0**2]
	$y = 0$	[(2), **0**12, **0**4]

025 $0 . a = 0$

DK

(1)	$a(a + 0) = a a$	[**0**2]
(2)	$a a + a . 0 = a a$	[(1), **0**9]
(3)	$a . 0 = 0$	[(2), **0**24]
	$0 . a = 0$	[(3), **0**8]

026 $-(a + b) = (-a) + (-b)$

DK

(1)	$(a + b) + (-a + (b)) = (-a + a) + (-b + \mathrm{b})$	[**0**1, **0**4]
(2)	$(a + b) + (-a + (-b)) = 0 + 0$	[(1), **0**3]
(3)	$(a + b) + (-a + (-b)) = 0$	[(2), **0**2]
(4)	$(a + b) + (-(a + b)) = 0$	[**0**11]
	$-(a + b) = -a + (-b)$	[(4), (3), **0**12, **0**4]

V točki (1) je treba komutativnost in asociativnost uporabiti večkrat.

027 $(-a) b = -(a b)$

DK

(1)	$a b + (-a) b = (-a + a) b$	[**0**9, **0**8, **0**4]
(2)	$a b + (-a) b = 0$	[(1), **0**2, **0**25]
(3)	$a b + (-(a b)) = 0$	[**0**11]
	$(-a) \mathrm{b} = -(a b)$	[(2), (3), **0**13, **0**4]

028 $(-a)(-b) = a b$

DK

(1)	$(-a)(-b) = -(a(-b))$	[**0**27 $-b/b$]
(2)	$a(-b) = -(a b)$	[**0**27 b/a, a/b, **0**8]
(3)	$(-a)(-b) = -(-(ab))$	[(1), (2)]
	$(-a)(-b) = a b$	[**0**22, (3)]

Formulo (1) smo dobili z vstavo v izrek **0**27 terma —b za spremenljivko b.

4. Če želimo vsakokrat omeniti vse uporabe aksiomov, so dokazi še precej daljši. Tako identitete dokažemo npr. takole:

$$(x + y) + (z + u) = (x + z) + (y + u)$$

Dokaz

(1)	$(x + y) + (z + u) = ((x + y) + z) + u$	[**0**1 $x + y/a$, z/b, u/c]
(2)	$((x + y) + z) + u = (x + (y + z)) + u$	[**0**1 x/a, y/b, z/c]
(3)	$(x + (y + z)) + u = (x + (z + z)) + u$	[**0**4 y/a, z/b]

(4)	$(x + (z + y)) + u = ((x + z) + y) + u$	[**01** x/a, z/b, y/c]
(5)	$((x + z) + y) + u = (x + y) + (y + u)$	[**01** $x + z/a$, y/b, u/c]
	$(x + y) + (z + u) = (x + z) + (y + u)$	[(1), (2), (3), (4), (5)]

Vrstici (1) in (5) smo dobili z vstavo v aksiom **01**. Vrstici (2) in (4) smo dobili tako, da smo k rezultatu vstavitve v **01** dodali na desni u. Vrstico (3) smo dobili tako, da smo k komutativnostnemu zakonu (**04**) dodali x z leve, nato pa u z desne. Iskani izrek je posledica (1), (2), (3), (4) in (5) ter tranzitivnosti enakosti. Učitelju priporočam, da na tak način dokaže z učenci več izrekov iz učbenika [2].

5. Problem deljenja z 0

V teorijah prvega reda, v katerih velja princip identitete **a** = **a**, mora vsak term brez spremenljivk označevati objekt. V teorijo obsegov ne moremo uvesti definicije

$$x = a / b \Leftrightarrow a = x\, b$$

saj niti eksistenčni pogoj niti pogoj enoličnosti za znak / nista dokazljiva. Formula

$$\exists x\, (a = x\, b)$$

ne velja zaradi primera $a = 1$, $b = 0$; formula

$$a = x\, b \wedge a = x'\, b \Rightarrow x = x'$$

pa ne velja zaradi primera $a = 0$, $b = 0$, $x = 1$, $x' = 2$. Ena možnost bi bila, da bi definirali

D2 $x = a / b \Leftrightarrow (b \neq 0 \Rightarrow a = x\, b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x = 0)$

torej tako, da bi rezultat deljenja z nič poljubno izbrali. Seveda smo tako pridobili nepričakovan rezultat

$$1 / 0 = 0 = 0 / 0$$

vendar pa je glede deljenja s števili, različnimi od nič, vse lepo in prav.

Pogoj o enoličnosti za / bomo pokazali z analizo primerov: najprej bomo predpostavili $b \neq 0$, nato $b = 0$.

029 $(b \neq 0 \Rightarrow a = x\, b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x = 0) \wedge$
$(b \neq 0 \Rightarrow a = x'\, b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x' = 0) \Rightarrow x = x'$

DK **HP** (4)

(5)	$b \neq 0 \Rightarrow$	
(6)	$a = x\, b$	[(1), (5)]
(7)	$a = x'\, b$	[(3), (5)]
	$\exists y$	
(8)	$y\, b = 1$	[(5), **07**]
(9)	$b\, y = 1$	[(8), **08**]
(10)	$a\, y = (x\, b)\, y$	[(6)]
(11)	$a\, y = (x'\, b)\, y$	[(7)]
(12)	$x\, (b\, y) = x'\, (b\, y)$	[(6), (7), **05**]

(13)	$x\,1 = x'\,1$	[(9), (12)]
(14)	$x = x'$	[(13), **06**]
(15)	$b = 0 \Rightarrow$	
(16)	$\quad x = 0$	[(2), (15)]
(17)	$\quad x' = 0$	[(4), (15)]
(18)	$\quad x = x'$	[(16), (17)]

Izrek nato sledi iz izreka $b = 0 \vee b \neq 0$ ter vrstic (14) in (18).

Tudi eksistenčni pogoj bomo dokazali z analizo primerov

030 $\exists x\,((b \neq 0 \Rightarrow a = x\,b) \wedge (b = 0 \Rightarrow x = 0))$

DK

(1)	$b \neq 0 \Rightarrow$	
	$\quad \exists z$	
(2)	$\quad z\,b = 1$	[(1), **07**]
(3)	$\quad (a\,z)\,b = a$	[(2), **06**, **05**]
	$\quad \exists x$	
(4)	$\quad x\,b = a$	[(3)]
(5)	$\quad b \neq 0 \Rightarrow x\,b = a$	[(4)]
(6)	$\quad b = 0 \Rightarrow x = 0$	[(1), zakon protislovja]
(7)	$b = 0 \Rightarrow$	
	$\quad \exists x$	
(8)	$\quad b = 0 \Rightarrow x = 0$	[$\exists x\,(x = 0)$ je izrek logike]
(9)	$\quad b \neq 0 \Rightarrow a = x\,b$	[zakon protislovja]

Izrek nato sledi zaradi $b = 0 \vee b \neq 0$ ter (5), (6), (8) in (9).

Modeli za elementarno teorijo obsegov

1. Jezik prvega reda, v katerem smo formalizirali elementarno teorijo obsegov, ni zadosti bogat, da bi lahko v njem izrazili takšne trditve, kot je npr.: »Obseg O_1 je izomorfen obsegu O_2.« Takšne trditve običajno formuliramo v jeziku teorije množic. Najprej pa se vprašamo, kaj je to obseg.

Definicija. Urejena šesterica ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, .) *je obseg* natanko tedaj, kadar v domeni $\mathcal{D}$ veljajo aksiomi **01** do **010**.

Znaki $\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, . so tu spremenljivke, funkcijski znaki v jeziku prvega reda pa so konstante. Toda tu gre za drug jezik.

Včasih namesto o urejeni šesterici govorimo o šestmestni relaciji »*Množica* $\mathcal{D}$ *skupaj z operacijami* 0, 1, —, +, . *je obseg* . . .«

Ta definicija je torej odvisna od osnovnih simbolov in vrstnega reda. Torej, če je šesterica ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, .) obseg, potem skoraj gotovo reči $\mathcal{D}$, ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, ., +), ($\mathcal{D}$, +, .) niso obsegi.

Vprašanje: »Kaj je ničla obsega ($\mathcal{A}$, x, y, f, g, h)?« ima trivialen odgovor — x, to je druga komponenta urejene šesterice.

Odgovor na vprašanje: »Ali je množica $\mathcal{A}$ skupaj z operacijami f, g, h obseg?« je seveda nikalen.

Če želimo temu vprašanju dati vsebino, moramo definirati:

Množica $\mathcal{D}$ skupaj z operacijami f, g, h je 'obseg' natanko tedaj, kadar obstajata taka elementa x in y iz $\mathcal{D}$, da je množica $\mathcal{D}$ z operacijami x, y, f, g, h obseg.

2. Imejmo obseg ($\mathcal{D}$, 0, 1, —, +, .). Potem lahko konstruiramo neki nov obseg, ki bo le-temu izomorfen. Množica

$$\mathcal{D}' = \{\{x\} \mid x \in \mathcal{D}\}$$

opremljena z operacijami $\{0\}$, $\{1\}$, —, +, .
kjer so zadnje tri operacije definirane z enačbami

$$-\{x\} = \{-x\}, \{x\} + \{y\} = \{x + y\}, \{x\} \cdot \{y\} = \{x \cdot y\}$$

je obseg, izomorfen prvotnemu obsegu, kjer je izomorfizem preslikava, definirana na $\mathcal{D}$, ki $x \in \mathcal{D}$ priredi $\{x\} \in \mathcal{D}'$.

Bolj zanimiva pa je neka podobna struktura, v kateri so definirane operacije z vsemi podmnožicami množice $\mathcal{D}$, npr. seštevanje:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x + y \mid x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

V tej strukturi velja

$$\mathcal{A} + \emptyset = \emptyset \qquad (\emptyset \text{ je prazna množica})$$
$$\mathcal{A} + \{0\} = \mathcal{A}$$

Tu lahko definiramo deljenje

$$\mathcal{X} = \mathcal{A}/\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{X} \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \wedge \forall \mathcal{X}' (\mathcal{X}' \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X})$$

V tem primeru velja

$$\{0\} / \{0\} = \mathcal{D}$$
$$\{1\} / \{0\} = \emptyset$$

LITERATURA

[1] I. Hafner, *Izrek o dedukciji,* Obzornik mat. fiz., **25** (1978) 34—40.
[2] F. Križanič, *Aritmetika, algebra in analiza,* I. *del,* DZS 1968.
[3] N. Prijatelj, *Formalna izgradnja logičnega jezika,* Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 20—33.
[4] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic,* Addison-Wessley 1967.

VII. KONGRES MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE

VII. kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije je bil od 6. do 11. oktobra 1980 v Bečićih pri Budvi. Udeležilo se ga je 1460 strokovnjakov iz Jugoslavije in nekaterih sosednjih držav s 578 referati. Med njimi je bilo 26 Slovencev, ki so imeli 19 referatov.

MATEMATIKA

Analiza — splošni problemi
J. Vukman, *Realna simetrična Banachova algebra z involucijo*
A. Volčič, *Integral in mera*
Topologija
T. Pisanski, *Kratek dokaz nekega izreka A. T. Whitea*
Numerična matematika
Z. Bohte, *Nove metode za računanje odvoda determinate*
S. Indihar, *Multilinearno programiranje*
Pouk matematike
A. Cokan, *Pouk računalništva v srednjih šolah v SR Sloveniji*
A. Cokan, *Usklajevanje učnih načrtov za matematiko v osnovnem izobraževanju in v skupni vzgojno-izobrazbeni osnovi srednjega usmerjenega izobraževanja v SFRJ*
I. Mulec, *Informacija o modernizaciji osnovnošolskega pouka matematike v SR Sloveniji*

FIZIKA

Fizika delcev
J. Strnad, *Šestrazsežni prostor-čas v teoriji elektrošibke interakcije*
Atomska fizika
M. Kregar, *Hevristični atomski model*
Fizika trdega stanja
J. Pirnat, J. Lužnik, Z. Trontelj, V. Kavčič, *Študij in primerjava hidratov* $SnCl_2 . 2 H_2O$ in $SnCl_2 . 1 . 5 H_2O$
J. Pirnat, J. Lužnik, A. Kogovšek, E. Srebotnjak, Z. Trontelj, *Kalorimeter z vgrajenim mikroračunalnkom*
Pouk fizike
A. Kregar, *Elementarna obravnava ohranitvenih zakonov elektromagnetnega polja*
J. Strnad, *Kvantna mehanika za začetnike*
J. Strnad, *Postopna pot v posebno teorijo relativnosti*
J. Ferbar, *Vaje iz fizike za učence*
J. Lekić, *Eksperimentalna oprema za pouk in vaje iz fizike*
T. Skulj, *Sistem naprav in osnovna oprema v prostorih za pouk in vaje iz fizike*
A. Kregar, *Projekt začetnega pouka fizike v Sloveniji*

Med kongresom je bila tudi razstava jugoslovanskih knjig in revij ter učnih pripomočkov. Komisija za tisk DMFA SRS je sodelovala na razstavi s svojimi publikacijami in z nekaterimi matematičnimi in fizikalnimi publikacijami slovenskih založb. Zanimanje za slovensko matematično, fizikalno in astronomsko literaturo je bilo presenetljivo veliko.

Na skupščini Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov so izvolili novo kolektivno vodstvo. Do izbora delegatov republiških društev bodo v predsedstvu predsedniki republiških društev in pokrajin. Predsedujoči predsedstva ima mandatno dobo eno leto. V sekretariat Zveze so bili izbrani: dr. Predrag Obradović, izredni prof. (generalni sekretar), dr. Miograd Petrović, doc. (seketar za matematiko), dr. Slobodan Backović, doc. (sekretar za fiziko), (vsi iz Titograda), dr. Djordje Teleki, znanstveni svetnik, Beograd (sekretar za astronomijo) in mag. Blagoje Cerović, prof. višje šole, Nikšić (blagajnik). Sedež sekretariata je za pet let v Titogradu.

Naslednji, osmi kongres Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov bo leta 1985 v Prištini.

Ciril Velkovrh

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Oddelek za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Zavod za šolstvo SRS, Institut za matematiko, fiziko in mehaniko ter Institut Jožef Stefan prirejajo 23. in 24. januarja 1981

11. seminar iz fizike

FIZIKA POLPREVODNIKOV

Seminar je namenjen učiteljem srednjih in tudi osnovnih šol za strokovno izpopolnjevanje, vabljeni pa so tudi drugi člani društva. Seminar bo v veliki fizikalni predavalnici, Jadranska 26, v Ljubljani.

URNIK PREDAVANJ

Petek, 23. 1.

9.00 Otvoritev seminarja
9.15 Janez Strnad: Energijski pasovi v kristalih (2 uri)
11.15 Jože Pahor: Dioda in tranzistor (2 uri)
16.00 Peter Gosar: Fotoelektrični pojavi (2 uri)

Sobota, 24. 1.

8.15 Andrej Likar: Polprevodniški detektorji
9.15 Janez Stepišnik: Svetleče in laserske diode
10.15 Slobodan Žumer: Termoelektrični pojavi
11.15 Peter Prelovšek: Tunelska dioda
12.15 Seta Oblak: Organizacija aktivov iz fizike

Prispevek je 250.— din na udeleženca seminarja. Vodstva šol in organizacije združenega dela prosimo, da nakažejo prispevek vnaprej na žiro račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS št. 50101-678-47233, lahko pa ga plača udeleženec na seminarju. Za seminar se ni treba posebej prijaviti.

Sekretar seminarja
Martina Koman

Vodja seminarja
Janez Stepišnik